2^

~~23 — 9 — 2~~

23
9 =
7
1

~~9 — 3 — 16~~

4A
16
17
7

ELEMENTOS

DE

ARITHMETICA.

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA
POR
M. BEZOUT
DA ACADEMIA REAL
das Sciencias de Pariz &c &c.

Traduzidos do Francez.,

COIMBRA:

NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXXIV.

Por Ordem de Sua Mageſtade.

INDICE

Das materias que se contém nestes Elementos.

ELEMEN-

ELEMENTOS DE ARITHMETICA.

NOÇOES PRELIMINARES

Sobre a natureza dos Numeros, e ſuas differentes eſpecies.

I

DAMOS o nome de *Quantidade*, em geral, a tudo aquillo que he capaz de aumento, ou diminuiçaõ; como he, por exemplo a *extenſaõ*, *duraçaõ*, *pezo* &c. Tudo o que he quantidade pertence ao objecto das *Sciencias Mathematicas*. Mas a *Arithmetica*, que he a primeira parte dellas, e ſerve de porta para todas as outras, trata ſómente da quantidade *diſcreta*, que he a que ſe exprime por numeros.

2 A Arithmetica pois he a *Sciencia de contar*: Ella conſidera a natureza, e propriedades dos numeros, e tem por fim enſinar os meios mais faceis, tanto para os repreſentar, como para os compôr e reſolver, que he o que ſe chama *calcular*.

3 Para ſe formar huma idéa exacta dos numeros, he neceſſario ſaber primeiro o que entendemos por *unidade*.

4 A *Unidade* he huma quantidade, que ſe toma (as mais das vezes arbitrariamente) para ſervir de termo de comparaçaõ a todas as outras quantidades da meſma eſpecie. Aſſim, quando dizemos

que hum corpo péza *ſinco* libras, a *libra* he a unidade, iſto he, a quantidade, com a qual ſe compara, e pela qual ſe faz idéa do pezo delle. Podiamos igualmente tomar a *onça* para unidade, e entaõ o pezo do meſmo corpo ſeria *oitenta* onças.

5 O *Numero* ſerve pois para exprimir de quantas unidades, ou partes da unidade ſe compoem qualquer quantidade.

Se a quantidade ſe compoem taõ ſómente de unidades, o numero que a exprime ſe chama *inteiro*: porém ſendo compoſta de unidades, e juntamente de partes da unidade, ou ſimpleſmente de partes da unidade, entaõ chamamos o numero *quebrado*, ou *fracçaõ*: Aſſim, *tres e meio* fazem hum numero quebrado, ou fraccionario; e *tres quartas*, huma fracçaõ.

6 O numero, de que nos ſervimos, ſem determinar a eſpecie das unidades, como quando dizemos ſimpleſmente *tres*, ou *tres vezes*, *quatro*, ou *quatro vezes*, chama-ſe numero *abſtracto*; porém quando declaramos ao meſmo tempo a eſpecie das unidades, como quando dizemos *quatro libras*, *cem tonelladas*, chama-ſe numero *concreto*.

Há muitas outras eſpecies de numeros, dos quais daremos a definiçaõ ao meſmo tempo que delles houvermos de tratar.

Da Numeraçaõ ordinaria, e da Dizima.

7 A *Numeraçaõ* he a arte de exprimir todos os numeros por huma quantidade limitada de nomes, ou de caracteres. Eſtes caracteres, que ſaõ as letras da eſcritura numerica, chamaõ-ſe *algariſmos*. Naõ he neceſſario dizer aqui os nomes dos numeros, por ſer conhecimento familiar a toda a ſorte de peſſoas. Quanto ao modo de os repreſentar por algariſmos, naõ podemos deixar de

explicar com toda a exactidaõ os ſeus principios.

8 Os caracteres, de que uſamos na *Numeraçaõ* actual, e os nomes dos numeros, que elles repreſentaõ, ſaõ eſtes: (*)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cifra	*hum*	*dous*	*tres*	*quatro*	*ſinco*	*ſeis*	*ſete*	*oito*	*nove*

Para exprimir todos os outros numeros com eſtes meſmos caracteres, ſe aſſentou: Que de dés unidades ſe fizeſſe huma ſó, a qual ſe chamaſſe *dezena*, e que ſe contaſſe por dezenas da meſma ſorte, que ſe conta por unidades, iſto he, que ſe contaſſem *duas* dezenas, *tres* dezenas &c. até *nove*; E que para repreſentar eſtas novas unidades ſe uſaſſe dos meſmos algariſmos com que ſe repreſentaõ as unidades primitivas, diſtinguindo-as ſómente pelo lugar, que ſe lhes aſſinallou á eſquerda dellas.

Aſſim, para repreſentar *ſincoenta e quatro*, que contém *ſinco* dezenas, e *quatro* unidades, eſcreveremos 54. Para repreſentar *ſeſſenta*, que contém hum numero exacto de dezenas, e nenhuma unidade, eſcreveremos 60; pondo huma cifra na caſa das unidades, para moſtrar que as naõ há neſte numero, e juntamente determinar a letra 6 a ſignificar dezenas. Deſte modo podemos contar até *noventa e nove* inclusivamente.

9 Pelo que, antes de paſſarmos a diante, notemos eſta propriedade da Numeraçaõ actual, a

(*) Na Arithmetica vulgar uſamos tambem de huma figura, que chamamos *Cifraõ*, a qual ſe eſcreve pela maior parte como o *Phi* Grego, e algumas vezes deſta fórma U. O ſeu lugar he entre os *milhares*, e as *centenas*, e ſerve para ler com mais facilidade os numeros, diſtinguindo-ſe á primeira viſta a caſa dos *milhares*, como em 425U172. Tambem ſerve de abreviatura, quando os tres ultimos algariſmos ſaõ cifras. Aſſim 725U he o meſmo, que 725000.

ſaber : *Que huma letra poſta á eſquerda da outra ou ſeguida de huma cifra, repreſenta hum numero dés vezes maior, do que havia de repreſentar, ſe eſtiveſſe ſó.*

10 Por huma convençaõ ſemelhante contaremos de 99 até *novecentos e noventa e nove*. Porque de dés dezenas faremos huma unidade, a qual chamaremos *centena*, porque dés vezes dés fazem cem; e contaremos as centenas deſde *huma* até *nove*, eſcrevendo-as com os meſmos algariſmos, ſómente com a differença de as pôrmos á eſquerda das dezenas.

Aſſim, para exprimir *oito centos e ſincoenta e nove*, que contém *oito* centenas, *ſinco* dezenas, e *nove* unidades, eſcreveremos 859. Se foſſem *oito centos e nove*, que contem *oito* centenas, e *nove* unidades, ſem dezena alguma, ſeria neceſſario eſcrever 809; pondo huma cifra na caſa das dezenas, que faltaõ. E ſe tambem faltaſſem as unidades, deveriamos pôr duas cifras; de ſorte que para aſſentar *oito centos*, eſcreveremos 800.

11 Peloque notaremos tambem, *Que em virtude da meſma convençaõ, qualquer letra ſeguida de outras duas, ou de duas cifras, moſtra hum numero cem vezes maior, de que moſtraria eſtando ſó.*

12 Com o meſmo artificio contaremos de 999 até *nove mil nove centos e noventa e nove*; formando de dés centenas huma unidade, que ſe chama *milhar*, porque dés vezes cem fazem mil; contando eſtas unidades pelo modo, que já diſſemos; e repreſentando as com as meſmas letras, ſituadas porem á eſquerda das centenas.

Aſſim para aſſentar *ſete mil oito centos e ſincoenta e nove*, eſcreveremos 7859; para aſſentar *ſete mil e nove*, eſcreveremos 7009; e para aſſentar *ſete mil*, eſcreveremos 7000. Donde ſe vé, *Que huma letra ſendo ſeguida de outras tres, ou de tres*

ci-

cifras, mostra hum numero mil vezes maior, doque mostraria estando só.

13 Continuando por diante do mesmo modo; fazendo sempre de dés unidades de qualquer ordem huma só unidade, e escrevendo as novas unidades, que se vaõ formando, nas casas consecutivas, caminhando sempre para a esquerda; chegamos a exprimir, e assentar de hum modo uniforme, com os dés algarismos propostos, todos os numeros inteiros, que se pódem imaginar.

14 Para lermos com facilidade, ou dizermos o valor de qualquer numero, que conste de quantos algarismos quizermos, dividillo hemos em classes de tres letras cada huma, exceptuando a ultima da parte esquerda, que conforme a quantidade das letras de que o numero constar, poderá ser tambem de huma, ou de duas letras. A' primeira, terceira, e todas as mais classes impares, principiando da direita para a esquerda, daremos por sua ordem os nomes seguintes, *unidades*, *milhoens*, *billioens*, *trillioens*, *quatrillioens*, *quintillioens*, *sextillioens* &c; e á segunda, quarta, e todas as mais classes pares, o nome de *milhares*. Feito isto, advertiremos que a primeira letra de cada classe (principiando sempre da parte direita) mostra as unidades proprias da sua classe, conforme os nomes que lhes temos dado, e que a segunda mostra as dezenas, e a terceira as centenas das mesmas unidades respectivas.

Entaõ, principiando da parte esquerda, leremos cada huma das classes, como se estivesse só, applicando-lhe no fim a denominaçaõ respectiva das suas unidades. Assim, por exemplo, para declararmos o valor do numero seguinte,

23'	456'	789'	234'	565'	456
milhares	*billioens*	*milhares*	*milhoens*	*milhares*	*unidades*

Di-

Diremos: vinte e tres *mil*, quatroçentos e sincoenta e seis *billioens*; setecentos e oitenta e nove *mil*, duzentos etrinta e quatro *milhoens*; quinhentas e sessenta e sinco *mil*, quatrocentas e sincoenta e seis *unidades*. (*)

15 Da *Numeraçaõ*, que temos explicado, e que he de pura convençaõ, se segue manifestamente; Que á medida que se vaõ seguindo os algarismos de hum numero da direita para a esquerda, representaõ unidades consecutivamente maiores, sendo sempre cada huma dellas dés vezes maior que a precedente; e por conseguinte, Que para fazer hum numero dés, cem, mil vezes maior &c. basta pôr depois do algarismo das unidades, huma, duas, tres cifras &c. Pela rasaõ contraria, quando em hum numero se caminha da esquerda para a direita, os algarismos consecutivos mostraõ unidades cada vez menores, sendo sempre cada huma dellas dés vezes menor que a precedente.

16 Tal he o artificio da *Numeraçaõ* actual: Ella serve de base a todos os outros modos de contar, aindaque em muitas artes naõ se guarde sempre a regra de contar unicamente por dezenas, dezenas de dezenas &c.

17 Para assentar o valor das quantidades mais pequenas doque a unidade, que se tem escolhido, divide-se esta em outras unidades mais pequenas. O numero dellas he arbitrario, com tanto que por ellas se possaõ medir as quantidades, que queremos mostrar. Porém o que mais se deve pro-

---

(*) Nas Contas pecuniarias usamos do termo *conto* em lugar de *milhaõ*; de *conto de contos* em lugar de *milhaõ de milhões*, ou de *hum billiaõ*. Naõ dizemos *hum milhaõ de reis*, mas *hum conto de reis*, ou simplesmente *hum conto*. Dizemos igualmente *hum conto de ouro*, ou *hum milhaõ de cruzados*. Em tudo o mais naõ contamos senaõ por *milhões*, pois naõ dizemos hum *conto*, mas hum *milhaõ* de moedas, de arrobas &c.

procurar nesta sorte de divisoẽs, he que se façaõ de maneira, que dem aos calculos a facilidade maior, que he possivel. Por esta rasaõ, em lugar de dividir logo a unidade em hum grande numero de partes, que sejaõ sufficientes para a avaliaçaõ das mais pequenas quantidades, se divide primeiro em hum moderado numero de partes, cada huma das quais se divide em outras, e estas em outras &c. E esta he a rasaõ, porque nas moedas se divide a *libra* em 20 partes, que se chamaõ *soldos*; e o *soldo* em 12 partes, que se chamaõ *dinheiros*. Do mesmo modo nos pezos, divide-se a *libra* em 2 *marcos*, o marco em 8 *onças*, e a onça em 8 *oitavas*, de sorte, que no primeiro caso se faz a divisaõ por *vintenas*, e por *duzias*; e no segundo, por *meios*, e *oitavas* &c.

18 O numero composto de partes, que se reportaõ do modo sobredito a differente especie de unidades, chama-se *Complexo*, *Denominado*, ou *Heterogeneo*; e ao contrario chama-se *Incomplexo* todo aquelle, que involve huma só especie de unidades. Assim 8^{lb}, ou 8 *libras*, he numero incomplexo; e 8^{lb} 17^{s} 8^{d}, ou 8 *libras*, 17 *soldos*, e 8 *dinheiros*, numero complexo.

19 Cada arte tem o seu modo particular de dividir a unidade principal, de que se serve. As divisoẽs da *toesa* naõ saõ as mesmas que as da *libra*; as da *libra* saõ differentes das do *dia*, e da *hora*; e estas differem tambem das do *marco*, e assim as mais. De todas ellas mostraremos o valor, quando tratarmos dos numeros complexos.

20 Porém de todas as divisoẽs, e subdivisoẽs, que se pódem fazer da unidade, a que mais contribue sem duvida alguma para a facilidade dos calculos, he a *divisaõ decimal*, na qual se suppoem a unidade dividida em dés partes, cada huma destas em outras dés, e assim por diante. Della

se

ſe faz hum uſo continuo na practica das Sciencias Mathematicas; e tem a vantagem de que a ſua numeraçaõ, e o ſeu calculo he do meſmo modo, que o dos numeros ordinarios e inteiros, como agora ſe verá.

21 Para aſſentar pois em *partes decimais* as quantidades mais pequenas que a unidade, imagina-ſe a meſma unidade, qualquer que ella ſeja, v. gr. *libra*, *toeſa* &c. compoſta de dés partes iguais, aſſim como ſe imagina a *dezena* compoſta de dés *unidades*, ou a *libra* compoſta de vinte *ſoldos*. A eſtas novas unidades, em contrapoſiçaõ das *dezenas*, damos o nome de *decimas*; repreſentamo-las com os meſmos algariſmos; e porque ſaõ dés vezes menores que as unidades principais, dar-lhes-hemos lugar á direita dellas.

Para tirar porém o equivoco que podia haver, tomando-ſe as *decimas* por unidades ſimples, aſſentou-ſe ao meſmo tempo fixar por huma vez a caſa das unidades principais, a que o numero todo ſe reporta, por meio de hum ſinal particular. Para iſſo ſe uſa de huma virgula (ou de hum ponto, ou de huma riſca), a qual ſe poem ao lado direito das unidades, ou entre as unidades e as decimas, que vem a ſer o meſmo. Aſſim, para aſſentarmos *vinte e quatro unidades* e *tres decimas* partes da unidade, eſcreveremos deſte modo 24,3.

22 Da meſma ſorte podemos actualmente conſiderar as *decimas*, como unidades formadas de outras dés, cada huma dés vezes mais pequena do que ellas; e pela meſma raſaõ de analogia, as aſſentaremos á direita das meſmas *decimas*. Eſtas novas unidades dés vezes mais pequenas que as decimas, vem a ſer cem vezes mais pequenas que as unidades principais, e por iſſo ſe chamaõ *centeſimas*. Aſſim, para notar *vinte e quatro unidades*, *tres decimas*, *e ſinco centeſimas*, eſcreveremos deſte modo 24,35.

23 Igual,

23 Igualmente podemos conceber as *centesimas*, como formadas de dés partes. Estas seraõ mil vezes mais pequenas que a unidade principal, e por conseguinte se chamaráõ *millesimas*; e por serem dés vezes mais pequenas que as *centesimas*, se assentaráõ á direita dellas. Continuando por diante a dividir do mesmo modo na rasaõ decupla, formaremos novas unidades consecutivas, ás quais daremos os nomes de *decimas-millesimas*, *centesimas-millesimas*, *millionesimas*, *decimas-millionesimas*, *centesimas-millionesimas*, *bimillionesimas* &c. e as assentaremos por sua ordem nas casas seguintes, caminhando sempre para a direita.

24 As partes da unidade, que acabamos de explicar saõ as *fracçoẽs decimais*, a que os nossos Authores daõ commumente o nome de *Dizima*.

25 O modo de ler, ou dizer o valor dos algarismos pertencentes á *Dizima*, he como nos outros numeros. Depois de se haverem lido as letras que estaõ á esquerda da virgula, lem-se as letras decimais da mesma sorte, applicando-lhes no fim o nome das unidades respectivas, que competem á sua ultima casa. Assim, para declarar o valor deste numero 34,572 diremos, trinta e quatro unidades, e quinhentas e setenta e duas *millesimas*: Se, por exemplo, se tratasse de *toesas*, diriamos, trinta e quatro *toesas*, e quinhentas e setenta e duas *millesimas partes* de huma *toesa*.

A rasaõ disto he facil de perceber, em se advertindo que no numero 34,572 a letra 5 se póde tomar indifferentemente por sinco *decimas*, ou por quinhentas *millesimas*; porque valendo a *decima* 10 *centesimas* (n.22.), e a *centesima* 10 *millesimas* (n. 23.), cada *decima* valerá dés vezes dés *millesimas*, ou 100 *millesimas*; e assim as 5 *decimas* valeráõ 500 *millesimas*. Pela mesma rasaõ, a letra 7 mostrará 70 *millesimas*, porque cada *centesima* vale 10 *millesimas* (n. 23.)

26 Quan-

26 Quanto á denominaçaõ das unidades reſpectivas da ultima caſa dos algariſmos decimais, ſerá ſempre facil de achar, contando ſobre cada huma das letras por ſua ordem, da virgula para a direita, os nomes ſeguintes: *decimas*, *centeſimas*, *milleſimas*, *decimas-milleſimas*, *centeſimas-milleſimas*, *millioneſimas* &c.

27 No caſo de naõ haver unidades, mas taõ ſómente partes decimais da unidade, para evitar toda a equivocaçaõ aſſentaremos huma cifra na caſa das unidades. Aſſim para declarar 125 *milleſimas*, eſcreveremos deſte modo 0, 125. Se quizeſſemos moſtrar 25.*milleſimas*, eſcreveriamos 0,025, aſſentando huma çifra na caſa das *decimas*, naõ ſomente para moſtrar que as naõ há no dito numero, mas tambem para ficarem os algariſmos ſeguintes no ſeu devido lugar. Pela meſma raſaõ, querendo declarar 6 *decimas-milleſimas*, eſcreveremos 0,0006 &c.

28 Suppoſta a intelligencia dos principios precedentes, examinemos as mudanças, que reſultaõ no valor de hum numero, quando a virgula ſe muda do ſeu lugar.

Como a virgula ſerve para marcar a caſa das unidades, e como o valor de cada hum dos algariſmos depende da ſua diſtancia local, e reſpectiva á meſma caſa das unidades, fica evidente, que mudando-ſe a virgula huma, duas, tres caſas &c. para a eſquerda, o numero ſe fará dés, cem, mil vezes &c. mais pequeno; e ao contrario dés, cem, mil vezes &c. maior, ſe a virgula ſe adiantar huma, duas, tres caſas &c. para a direita.

E com effeito, ſe tomarmos o numero 4327,5264, e mudarmos a virgula para a caſa ſeguinte á eſquerda, de ſorte que fique 432,75264; he manifeſto, que os *milhares* do primeiro numero, paſſaõ no ſegundo para *centenas*, as *centenas* para *dezenas*, as *deze-*

dezenas para *unidades*, as *unidades* para *decimas*, as *decimas* para *centesimas*, e assim por diante. Logo cada parte do primeiro numero, e por conseguinte todo elle, se tornou dés vezes menor, em virtude da mudança da virgula. Pelo contrario, se mudassemos a virgula huma casa para a direita, e escrevessemos 43275,264, os *milhares* do primeiro numero se converteriaõ em *dezenas de milhares*, as *centenas* em *milhares*, as *dezenas* em *centenas*, as *unidades* em *dezenas*, as *decimas* em *unidades*, as *centesimas* em *decimas*, e assim por diante; mudança, de que manifestamente resulta hum numero dés vezes maior que o primeiro.

29 Discorrendo do mesmo modo acharemos, que mudando a virgula duas, ou tres casas para a esquerda, resulta hum numero cem, ou mil vezes menor; e pelo contrario, cem, ou mil vezes maior, se a virgula se mudar duas, ou tres casas para a direita.

30 A ultima observaçaõ que faremos sobre a *Dizima*, he que naõ se altéra o valor de hum numero, assentando depois da ultima letra decimal quantas cifras quizermos. Assim 43,25 he o mesmo que 43,250, ou 43,2500, ou 43,25000. &c.

Porque valendo cada *centesima* o mesmo que 10 *millesimas*, ou 100 *decimas-millesimas* &c., as 25 *centesimas* valeraõ 250 *millesimas*, ou 2500 *decimas-millesimas* &c. Em huma palavra: He o mesmo, como se em lugar de 25 moedas de desaseis tostoẽs (25 *pistoles*) dissessemos 250 *libras de França*; ou em lugar de 25 *quintais*, dissessemos 2500 *arrateis*. (*)

Das

(*) O *quintal* de França tem 100 arrateis. Entre nós o *quintal* cõmum tem 128 arrateis, e o *quintal* da casa da India 112.

Das Operaçoẽs da Arithmetica.

31 S*Omar*, *Diminuir*, *Multiplicar*, *e Repartir*, saõ as quatro operaçoẽs fundamentais da Arithmetica, a que os nossos Escritores daõ o nome de *Especies*. Todas as questoẽs, que se pódem propôr sobre os numeros, se reduzem finalmente a praticar alguma destas Especies, ou todas ellas. E por isso convem muito adquirir o habito de as executar com prontidaõ, e facilidade, procurando alcançar a rasaõ em que ellas se fundaõ.

32 O fim da Arithmetica, como já dissemos, he ensinar os meios de calcular facilmente os numeros. Estes meios consistem em reduzir o calculo dos numeros compostos ao dos numeros simples, que se exprimem pelo menor numero de letras que he possivel, fazendo por partes todas as operaçoẽs, como logo mostraremos.

DA ESPECIE DE SOMAR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

33 S*Omar* naõ he outra cousa mais, do que mostrar o valor total de muitos numeros por meio de hum só, que seja igual a todos juntos. Este numero, que se busca por meio da operaçaõ chama-se *Soma*; e os numeros que se ajuntaõ, (os quais devem significar todos a mesma especie de unidades) chamaõ-se *Addiçoẽs*, ou *Parcellas*.

Quando os numeros, que se haõ de somar, saõ *digitos*, isto he, quando naõ se escrevem com mais doque huma letra, naõ há necessidade de regra alguma para achar a sua soma. Quando porém forem

rem numeros compostos, isto he, quando se escrevem com muitas letras, usaremos da regra seguinte.

Escreveremos as *addiçoẽs* humas debaixo das outras, de sorte que fiquem unidades debaixo de unidades, dezenas debaixo de dezenas &c., e por baixo de todas passaremos huma risca, que as separe e distinga da soma.

Entaõ somaremos primeiramente todos os algarismos, que estaõ na colunna das unidades; se a soma naõ passar de 9, escrevella-hemos por baixo; se passar de 9, como entaõ comprehende dezenas, só poremos por baixo o que excede do numero das dezenas, e contaremos estas dezenas por outras tantas unidades, e somallas-hemos juntamente com os algarismos da colunna seguinte. Nella observaremos a mesma regra, como na primeira; e assim por diante de colunna em colunna, até chegar á ultima, debaixo da qual escreveremos a sua soma inteira, ou conste de hum, ou de mais algarismos. Esta regra se entenderá melhor por meio dos exemplos seguintes.

Exemplo I.

SE nos derem para somar estas duas addiçoens 54925 . . . e 2023, escrevellas-hemos do modo que aqui se vè:

54925	
2023	
56948	Soma

E tendo passado huma risca por baixo dellas, começaremos pelas unidades, dizendo: 5 e 3 fazem 8, e escreveremos 8 debaixo desta mesma colunna. Passando ás dezenas, diremos: 2 e 2 fazem 4, e escreveremos 4 por baixo. Nas centenas diremos, 9 e 0 fazem 9, e escreveremos 9 por bai-

baixo. Nos milhares diremos: 4 e 2 saõ 6, e escreveremos 6 por baixo da risca. E na columna seguinte diremos finalmente, 5 e o fazem 5, e escreveremos 5 na mesma columna.

He evidente, que o numero achado 56948 he a soma dos dous numeros propostos, pois que elle contém as unidades, dezenas, centenas, milhares, e dezenas de milhares de ambos elles, as quais ajuntámos por partes na mesma operaçaõ.

Exemplo II.

SE nos perguntarem a soma dos quatro numeros seguintes 6903 . . . 7854 . . . 953 . . . 7327, assentallos hemos do modo que aqui se mostra.

6903	
7854	
953	
7327	
23037	Soma

E começando, como no exemplo precedente, pela columna das unidades, diremos: 3 e 4 saõ 7, e 3 saõ 10, e 7 saõ 17; e como nesta soma parcial a letra 7 pertence á casa das unidades onde estamos, e a letra 1 á casa das dezenas, escreveremos 7 debaixo da risca na columna das unidades, e guardaremos 1 para o somar com os algarismos da columna seguinte, que he das dezenas.

Passando a ella, diremos: 1, que vem da columna precedente, e 5 (porque naõ he necessario ter conta da cifra) fazem 6, e 5 fazem 11, e 2 fazem 13. Pela mesma rasaõ escreveremos 3 debaixo desta columna, e levaremos 1 para a seguinte, dizendo: 1 e 9 saõ 10, e 8, saõ 18, e 9 saõ 27, e 3

saõ

ſaõ 30. Aſſim poremos o em direito deſta columna, e levaremos 3 para diante, dizendo do meſmo modo: 3 e 6 ſaõ 9, e 7 ſaõ 16, e 7 ſaõ 23. Deſte numero 23 aſſentaremos a letra 3 debaixo da columna que temos ſomado; e porque naõ há mais columna para onde levemos a letra 2, a eſcreveremos no lugar ſeguinte para a eſquerda; e concluida a operaçaõ, diremos que ſomaõ as addiçoẽs propoſtas 23037.

34 Se as addiçoẽs forem acompanhadas de *Dizima*, como neſta ſe procede do meſmo modo que nos numeros ordinarios, contando ſempre por *dezenas* de caſa em caſa da direita para a eſquerda, a regra para as ſomar he abſolutamente a meſma, tendo ſempre a attençaõ de ajuſtar em huma meſma columna as unidades da meſma ordem, o que ſe conſeguirá, ficando as virgulas em direitura de alto a baixo.

Exemplo III.

SE quizermos ſomar os tres numeros ſeguintes 72,957 ... 12,8 ... 124,03, aſſentallos-hemos como aqui ſe moſtra:

72,957	
12,8	
124,03	
209,787	Soma

E praticando a regra, como nos exemplos precedentes, acharemos que ſomaõ 209,787.

DA

DA ESPECIE DE DIMINUIR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais

25 DIminuir, he huma operaçaõ, pela qual se tira hum numero de outro numero. O que della resulta chama-se *resto*, *excesso*, ou *differença*.

Para fazer esta operaçaõ, assentaremos o numero que queremos tirar por baixo do outro (que sempre deve ser o maior) do mesmo modo que assentamos as addiçoẽs na regra de somar. E passando huma risca por baixo delles, iremos tirando da direita para a esquerda cada numero inferior do superior, que lhe ficar correspondente, a saber, as unidades das unidades, as dezenas das dezenas, &c. e escreveremos cada resto debaixo da risca pela mesma ordem, pondo cifra todas as vezes que naõ restar nada.

Quando o algarismo debaixo se achar maior que o de sima, este se aumentará com dés unidades, tomando para isso mentalmente emprestada huma das unidades do algarismo vezinho da parte esquerda, o qual por esta rasaõ se deve tratar como diminuido de huma unidade na operaçaõ seguinte.

Exemplo I.

QUerendo diminuir 5432 de 8954, assentaremos ambos os numeros desta maneira.

$$\begin{array}{rl} 8954 & \\ 5432 & \\ \hline 3522 & \text{Resto.} \end{array}$$

E principiando pela caſa das unidades, diremos: quem de 4 tira 2, ficaõ 2, que aſſentaremos debaixo da riſca na meſma caſa das unidades. Depois paſſando ás dezenas, diremos: quem de 5 tira 3, ficaõ 2, que aſſentaremos debaixo dellas. Na terceira colunna: quem de 9 tira 4, ficaõ 5, que poremos em direitura della. E na quarta finalmente: quem de 8 tira 5, ficaõ 3, que eſcreveremos debaixo do 5; e feita a conta, achámos que tirando 5432 de 8954 fica o reſto 3522.

Exemplo II.

QUerendo tirar 7987 de 27646, aſſentaremos os numeros deſta maneira - - 27646

27646	
7989	
19659	Reſto.

E como de 6 naõ ſe pódem tirar 7, ajuntaremos a 6 dés unidades, que ſe formaráõ de huma unidade tirada na caſa ſeguinte ao algariſmo 4, e diremos: tirando 7 de 16, ficaõ 9, que eſcreveremos debaixo do 7. Paſſando ás dezenas, naõ diremos, tirando 8 de 4; mas tirando 8 de 3 ſómente, porque do 4 já tiramos 1 na operaçaõ precedente; e porque tambem de 3 naõ ſe pódem tirar 8, ajuntaremos da meſma ſorte a 3 dés unidades, tomando para iſſo 1 á letra 6 da eſquerda, e diremos: tirando 8 de 13, ficaõ 5, que aſſentaremos debaixo do 8. Paſſando á terceira colunna, diremos do meſmo modo: tirando 9 de 5 naõ póde ſer; mas tirando 9 de 15 (tomada huma unidade do algariſmo 7, como nas operaçoens precedentes) ficaõ 6, que eſcreveremos debaixo do 9. Na quarta colunna: tirando 7 de 6, naõ póde ſer, mas tirando 7 de 16, ficaõ 9, que poremos debaixo do 7. E como naõ há nada, que tirar na quinta colunna, eſcreveremos debaixo della, naõ 2, porque delle já tiramos 1 para a operaçaõ precedente, mas ſómente 1, que lhe ficou; e aſſim o reſto total ſerá 19659.

36 Eſtando cifra na caſa, donde havemos de tomar a unidade de empreſtimo, naõ a tomaremos della, mas do primeiro algariſmo ſignificativo, que depois della ſe ſeguir. Neſte caſo, aindaque realmente ſe pedem 100, ou 1000, ou 10000 &c, conforme houver huma, duas, ou tres cifras conſecutivas &c: cómtudo obraremos ſempre, como no exemplo precedente, ajuntando ſómente 10, ou 1 da caſa vezinha, ao algariſmo neceſſitado. E porque eſtes 10 ſaõ huma parte dos 100, ou 1000 &c, tomados do primeiro algariſmo ſignificativo, para empregarmos os 90, ou 990 &c que reſtaõ, tomaremos as cifras ſeguintes, como ſe cada huma foſſe hum nove. Iſto ſe entenderá melhor por meio do exemplo ſeguinte.

Exemplo III.

	99	
SE de - - - - - - - - -	20064	
quizermos tirar - -	17489	
	2575	Reſto.

Primeiramente, tirando 9 de 14, ficaõ 5. Depois, como de 5 (porque do 6 já tomámos 1) naõ ſe pódem tirar 8, e como naõ podemos tomar 1 da letra ſeguinte que he 0, tomallo-hemos do 2, e valerá 1000 a reſpeito da caſa, onde fazemos a operaçaõ. Deſtes 1000 naõ tomaremos ſenaõ

naõ 10 para ajuntar-mos a 5, e diremos, de 15 tirando 8, ficaõ 7.

E porque dos 1000 que pedimos só temos usado de 10, ou de 100 só temos usado de 1, usaremos do resto 99, para delle tirarmos os dous algarismos seguintes, que vem a ser o mesmo que tomar cada huma das cifras, como se fosse hum 9. Assim diremos: quem de 9 tira 4, ficaõ 5; quem de 9 tira 7, ficaõ 2; e finalmente, quem de 1 tira 1, fica 0, que naõ he necessario assentar-se, por ser no ultimo lugar.

37 Se houver *Dizima* nos numeros, seguiremos absolutamente a mesma regra. Porém, para evitar todo o embaraço na applicaçaõ della, faremos com que ambos tenhaõ igual numero de letras decimais, ajuntando as cifras que forem necessarias ao que menos tiver; preparaçaõ, que lhe naõ altera o valor (n. 30.)

Exemplo IV.

DE - - - - - - - - - - - - - - - - - 5403, 25
Querendo tirar - - - - - - - - 385, 6532

Primeiramente ajuntaremos duas cifras á *Dizima* do numero superior. Depois obraremos sobre os numeros assim preparados conforme a regra dos numeros inteiros.

5403, 2500	
385, 6532	
5017, 5968	Resto

E feita a operaçaõ, acharemos o resto 5017, 5968.

PROVA

Do Somar, e Diminuir.

38 *A Prova* de huma operaçaõ Arithmetica he huma nova operaçaõ, pela qual nos certificamos do reſultado da primeira.

Para provar a conta de *Somar*, ſomar-ſe-haõ de novo todas as colunnas, mudada porém a ordem, iſto he, começando da eſquerda para a direita. O que ſomar a primeira colunna diminuir-ſe-há do membro que lhe correſponde na Soma total, e ſe aſſentará o reſto por baixo, ſe o houver: eſte como em lugar de dezena ſe tomará com a letra ſeguinte da meſma ſoma para fazer hum novo membro, do qual ſe há de diminuir o que ſomar a ſegunda colunna; e aſſim por diante até a ultima, onde feita a diminuiçaõ, naõ deve ficar reſto algum.

Aſſim, tendo achado aſſima que eſtes quatro

numeros - - - - - - - - - - - - - - -	6903
	7854
	953
	7327
Somaõ - - - - - - - -	23037
	03110
	000

Para verificar eſte reſultado, ſomaremos os meſmos numeros, principiando pela eſquerda, deſte modo: 6 e 7 ſaõ 13, e 7 ſaõ 20, os quais tirados de 23, ficaõ 3, que com a cifra, que na ſoma ſe ſegue, fazem 30. Na ſegunda colunna: 9 e 8 ſaõ 17, e 9 ſaõ 26, e 3 ſaõ 29, e tirados de 30, fica 1, que com a letra ſeguinte 3 fazem 13. Na terceira colunna: 5 e 5 ſaõ 10, e 2 ſaõ 12, e tirados

rados de 13, fica 1, que com a letra seguinte 7 faz 17. E na ultima columna: 3 e 4 saõ 7, e 3 saõ 10, e 7 saõ 17, e tirados de 17, naõ fiça nada: donde entenderemos, que a primeira operaçaõ he exacta.

A rasaõ que temos para concluir que a primeira operaçaõ tem sido bem feita todas as vezes que depois desta prova naõ resta nada, he porque tendo tirado successivamente todos os milhares, centenas, dezenas, e unidades, de que ella deve constar, he necessario, que naõ reste cousa alguma.

39 Para provar a conta de Diminuir, soma-se o resto achado por meio da operaçaõ com o numero que se diminuio; e se a operaçaõ foi bem feita, ha de vir na soma o mesmo numero, do qual se fez a diminuiçaõ. Assim vemos, que no terceiro exemplo assima posto, a operaçaõ foi exacta; porque somando 17489 (que he o numero que se diminuio) com o resto 2565, se acha reproduzido na soma o numero 20054, do qual aquelle se diminuio.

$$
\begin{array}{r}
20054 \\
17489 \\
\hline
2565 \\
\hline
20054
\end{array}
$$

§ A prova vulgar de ambas as operaçoẽs precedentes costuma fazer-se pela regra dos *noves fóra*, a qual tem o partido de ser muito expedita na practica.

Tiraõ-se os *noves* de qualquer numero com summa facilidade, somando os seus algarismos successivamente; e chegando a soma a 9, lança se fóra, passando de nove, somaõ-se tambem mentalmente as suas letras, e com o que fica se continûa por diante. Deste modo, para tirar os *noves* do numero

860,

86097546 diremos, 8 e 6, 14, nove fóra, 5; e 7 (porque naõ he neceſſario faliar com o 0, nem com o 9) ſaõ 12, nove fóra 3; e 5 ſaõ 8, e 4 ſaõ 12, nove fóra, 3; e 6 ſaõ 9, nove fóra, 0.

A raſaõ diſto ſerá facil de entender a quem refletir ſobre os principios da *Numeraçaõ*. Porque v. gr. no numero 6745, a letra 6 vale *mil vezes 6*, iſto he, *novecentas e noventa e nove vezes*, e mais *huma vez 6*; porém novecentas e noventa e nove vezes 6 ſaõ *noves* juſtos; logo ſendo lançados fóra, fica *huma vez 6*. Do meſmo modo a letra 7 moſtra *cem vezes 7*, iſto he, *noventa e nove vezes*, e mais *huma vez 7*; e por conſeguinte, lançando fóra *noventa e nove vezes 7*, fica *huma vez 7*. E como tambem a letra 4 vale *nove vezes* e mais *huma vez 4*, lançando fóra *nove vezes 4*, fica *huma vez 4*. Logo ſomando-ſe todas as letras, como ſe todas eſtiveſſem na caſa das unidades, a ſoma 22 ſerá o reſto que fica depois de lançados fóra os *noves* que ſe contem nas dezenas, centenas, e milhares do numero propoſto. E porque eſte reſto ainda comprehende *noves*, pela meſma raſaõ ſe ſomaráõ as ſuas letras, e ſerá 4 o reſto final, que ficará tirados todos os *noves* do numero 6745.

Iſto ſuppoſto: para prova da conta de *Somar*, tiraõ-ſe os *noves* a todas as addiçoens conſecutivamente, como ſe ellas formaſſem hum ſó numero, e aſſenta-ſe o reſto á margem dellas; e o meſmo ſe faz na ſoma. Se o reſto naõ for o meſmo de ambas as partes, he prova infallivel, que a conta eſtá errada (ſuppondo ſempre que o erro naõ eſteja na operaçaõ da meſma prova); pois naõ he poſſivel, que a ſoma ſeja igual ás addiçoẽs, quando tirando de ambas as partes os *noves* ficaõ reſtos deſiguais. Porém ſe ficarem de ambas as partes reſtos iguais, naõ he prova infallivel de que a conta eſtá certa, mas muito provavel: convem a ſaber, eſtará certa a conta, ſalvo ſe a ſoma tiver de erro *nove*; ou algum dos multiplos de *nove*; e a raſaõ he, porque na operaçaõ lançamos fóra os *noves*, ſem haver reſpeito ſe lançamos igual numero delles de ambas as partes; e por iſſo naõ he inteiramente ſegura eſta prova. Como porém o erro dos multiplos de *nove* naõ ſuccede quaſi nunca na practica, ſe naõ ſe errar de propoſito deſſa maneira, por eſſa raſaõ ſe dá a conta por certa, quando na prova ſe achaõ reſtos iguais. Aſſim no exemplo aſſima, tirando os *noves* das addiçoẽs 6903 -- 7854 -- 953 .. 7327, fica de reſto 6; e como ſe acha o meſmo na ſoma 23037, julga-ſe com muita probabilidade, mas naõ com certeza, que a conta eſtá bem feita. E he de advertir, que nem o primeiro methodo aſſima dado, o qual ſe chama *prova real*, tem certeza abſoluta, e infallivel; pois he poſſivel, e ainda factivel, que ao tirar da prova ſe commetta na ſoma de huma colunna hum erro igual e ſemilhante ao que ſe commetteu na primeira operaçaõ; e neſſe caſo ſahirá na prova a conta certa, eſtando errada.

Na conta de *Diminuir*, tiraõ-ſe os *noves* ao numero de quem ſe diminuio, e depois aos outros dous numeros juntos. E conforme ficarem de ambas as partes reſtos iguais, ou deſiguais, faz-ſe o meſmo juizo, que indicamos a reſpeito do *Somar*. Deſte modo no exemplo aſſima poſto, tirando os *noves* ao numero 20054, fica o reſto 2: e como ſe acha o meſmo nos outros dous numeros 17489 e 2565 tomados juntamente, tem-ſe a conta por certa. §§

DA

DA ESPECIE DE MULTIPLICAR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

40 MUltiplicar hum numero por outro he tomar o primeiro tantas vezes, quantas saõ as unidades do segundo. Assim por exemplo, multiplicar 4 por 3, naõ he outra cousa, senaõ tomar *tres* vezes o numero 4.

41 O numero, que se ha de multiplicar, chama-se *multiplicando*; o numero, pelo qual se há de multiplicar, chama-se *multiplicador*; e o numero que resulta da operaçaõ, chama-se *producto*. Os nossos Arithmeticos antigos daõ ao multiplicando o nome de *multiplicaçaõ*. Mas hoje usamos deste termo para significar a mesma operaçaõ do multiplicar.

42 O termo *producto* tem commumente hum sentido muito mais amplo, e geral. Porém neste tratado sómente usaremos delle para significar o resultado da multiplicaçaõ.

O multiplicador, e o multiplicando chamaõ-se tambem *factores* do producto. Assim 3 e 4 saõ factores de 12, porque 3 vezes 4 saõ 12.

43 Pela idéa que temos dado da multiplicaçaõ se vê, que ella se póde absolutamente fazer escrevendo o multiplicando tantas vezes, quantas saõ as unidades do multiplicador, e somando ao depois. Assim, por exemplo, para multiplicar 7 por 3 podiamos escrever deste modo:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

E a ſoma 21, que reſulta das tres addiçoẽs, ſeria o producto.

Como porém eſte modo de multiplicar ſeria tanto mais longo e trabalhoſo, quanto maior foſſe o multiplicador, a regra particular da multiplicaçaõ enſina o methodo de chegar ao meſmo reſultado por hum caminho mais breve.

44 Em quanto os numeros ſe conſideraõ *abſtractamente*, ſem attender ás unidades que elles repreſentaõ, he indifferente o tomar qualquer delles para multiplicando, ou para multiplicador. Por exemplo, querendo multiplicar 4 por 3, tanto faz multiplicar 4 por 3, como 3 por 4; porque o producto ſempre ſerá 12. E com effeito 3 vezes 4 moſtra o triplo de 1 vez 4; e 4 vezes 3, o triplo de 4 vezes 1: e he evidente, que tanto faz 1 vez 4, como 4 vezes 1. O meſmo raciocinio ſe pòde applicar a quaiſquer outros numeros.

45 Sendo porém os numeros *concretos*, he precizo diſtinguir o multiplicando do multiplicador; principalmente na multiplicaçaõ dos numeros *complexos*, dos quais adiante trataremos.

Eſta diſtinçaõ naõ tem difficuldade. Porque a meſma queſtaõ moſtra ſempre, qual he a quantidade que temos intento de repetir, e qual he a que declara as vezes que queremos fazer a repetiçaõ; e a primeira ſerá o *multiplicando*, a ſegunda o *multiplicador*.

46 Como o multiplicador ſerve de marcar as vèzes que ſe ha de repetir o multiplicando, ſerá ſempre hum numero *abſtracto*. Perguntando-ſe v.gr. quanto haõ de cuſtar 52 *toeſas* de obra de carpinteiro, á raſaõ de 36 *libras* a *toeſa*: facilmente ſe vê, que o *multiplicando* he 36 *libras* que ſe haõ de tomar 52 *vezes*: preſcindindo de que o numero 52 ſignifique *toeſas* na queſtaõ, ou qualquer outra couſa.

47 Don-

47 Donde ſe ſegue, que ſendo o *producto* formado da addiçaõ repetida do *multiplicando*, deve moſtrar ſempre unidades da meſma natureza que elle. (*)

Tendo feito eſta reflexaõ ſobre as unidades do *producto* e ſeus *factores*, paſſemos ao methodo de o achar.

48 As regras da multiplicaçaõ dos numeros compoſtos reduzem-ſe á multiplicaçaõ dos numeros ſimples, que conſtaõ de hum ſó algariſmo. Por iſſo he neceſſario ſaber primeiro o producto delles, o qual ſe acha facilmente ajuntando cada numero de 1 até 9 nove vezes conſecutivas a ſi meſmo. Tambem ſe póde uſar da *Taboada* ſeguinte, cuja invençaõ ſe attribue a *Pythagoras*.

(*) Deſta regra naõ exceptuamos a multiplicaçaõ Geometrica, na qual tambem as unidades do *multiplicador* ſe devem tomar como *abſtractas*, e o *multiplicando* e *producto* devem moſtrar unidades da meſma eſpecie, como havemos de declarar na Geometria.

TA-

Taboada de Pythagoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

A primeira columna deſta *Taboada*, tanto vertical, como tranſverſal, fórma-ſe da addiçaõ ſucceſſiva da unidade 1; a ſegunda do numero 2; a terceira do numero 3; e aſſim por diante.

49 Para achar nelle o *producto* de dous numeros ſimples, buſca-ſe hum delles v. gr. o *multiplicando* no alto da *Taboada*, e delle ſe deſce pela columna vertical até chegar á caſa fronteira ao multiplicador, que ſe buſca na primeira columna vertical da parte eſquerda; e o numero que na dita caſa ſe achar ſerá o *producto*. Querendo v. gr. ſaber o producto de 9 por 6, ou quanto he 6 vezes 9, buſcaremos

mos o 9 no alto da *Taboada*, e deſcendo até á caſa fronteira ao 6, nelle acharemos 54, que he o producto delles.

Eisaqui quanto ſe requer para entrar na multiplicaçaõ dos numeros compoſtos.

MULTIPLICAÇAÕ

De hum numero compoſto por hum numero ſimples.

50 ESCreva-ſe o *multiplicador*, que aqui ſuppomos ſer de hum ſó algariſmo, debaixo do *multiplicando*. O lugar delle he arbitrario; mas para fixar as idéas coſtuma aſſentar-ſe na caſa das unidades.

E paſſando por baixo delles huma riſca, que diſtingua os *factores* do *producto*, multipliquem-ſe as unidades do multiplicando pelo multiplicador; e ſe o producto conſtar ſómente de unidades, eſcreva-ſe na caſa das unidades, debaixo da riſca; ſe conſtar porém de unidades e dezenas, eſcrevaõ-ſe ſómente as unidades, e guardem-ſe mentalmente as dezenas para ſe ajuntarem ao producto da operaçaõ ſeguinte.

Depois multipliquem-ſe as dezenas do multiplicando pelo meſmo multiplicador; ajuntem-ſe ao producto as dezenas que ficáraõ da operaçaõ precedente, ſe as houver; e eſcreva-ſe a ſoma na caſa das dezenas, podendo ſer com huma ſó letra; quando naõ, eſcrevaõ-ſe ſómente as unidades, e guardem-ſe as dezenas (que ſaõ realmente centenas) para ſe ajuntarem ao producto ſeguinte, o qual tambem ha de conſtar de centenas.

Continuando deſte modo a operaçaõ, até fallar o multiplicador com todos os algariſmos do multi-

multiplicando, o numero que tivermos escrito será o producto total.

Exemplo.

PErgunta-se quantos *pés* fazem 2864 *toesas*. (Cada *toesa* tem 6 *pés*). A questaõ se reduz a tomar 6 *pés* 2864 vezes, ou (que vem a ser o mesmo) a tomar 6 vezes 2864 *pés* (n. 44.)

Escreveremos pois - - -	2864	Multiplicando.
	6	Multiplicador.
	17184 - - -	Producto.

E principiando pelas unidades, diremos: 6. vezes 4, saõ 24; e escrevendo 4, levaremos 2 para a operaçaõ seguinte. 2º 6 vezes 6 saõ 36, e 2 que vem saõ 38; assentemos 8, e vaõ 3. 3º 6 vezes 8 saõ 48, 3 que vem saõ 51; assentemos 1, e vaõ 5: 4º 6 vezes 2 saõ 12, e 5 que vem saõ 17; que escreveremos por inteiro, porque naõ ha mais nada que multiplicar.

O numero 17184 he o producto que se pede, ou o numero de *pés*, de que constaõ 2864 *toesas*. Porque nelle se contém 6 vezes 4 unidades, 6 vezes 6 dezenas, 6 vezes 8 centenas, e 6 vezes 2 mil; e por conseguinte, 6 vezes todo o numero 2864.

MULTIPLICAÇAÕ

De hum numero composto por outro composto.

51 QUando o multiplicador constar de muitos algarismos, por cada hum delles se praticará huma operaçaõ, como no primeiro caso,

caſo, principiando da direita para a eſquerda.

Primeiramente pois ſe multiplicará todo o multiplicando pelas unidades do multiplicador, e depois pelas dezenas. Eſte producto ſe eſcreverá por baixo do primeiro; e porque deve moſtrar dezenas, pois por ellas ſe fez a multiplicaçaõ, a ſua primeira letra ſe aſſentará em direitura das dezenas do primeiro, e as outras nas caſas ſeguintes para a eſquerda.

Pela meſma raſaõ o terceiro producto, que ſe fizer multiplicando pelas centenas, ſe porá da meſma ſorte debaixo do ſegundo, adiantando-ſe mais huma caſa para a eſquerda, e o meſmo ſe fará com os outros.

Feitas todas eſtas multiplicaçoens, ſomar-ſe-haõ os productos parciais que ellas deraõ, e a ſoma ſerá o producto total que ſe buſca.

Exemplo I.

Querendo multiplicar - - - 65487
por - - - - - - - - - - - 6958

523896	
327435	
589383	
392922	
455658546	Producto.

Primeiramente multiplico 65487 pelo algariſmo 8, que eſtá na caſa das unidades do multiplicador, e aſſento o producto 523896 debaixo da riſca, procedendo conforme a regra dada para o primeiro caſo (n. 50.)

Depois multiplico o meſmo numero 65487 pela ſegunda letra 5 do multiplicador, e eſcrevo

o

o producto 327435 debaixo do precedente, porém de sorte que a primeira letra 5 fique correspondente ás dezenas delle.

Do mesmo modo, multiplicando 65487 pela terceira letra 9 do multiplicador, assento o producto 589383 debaixo do precedente, ficando a letra 3 correspondendo á casa das centenas, porque a letra do multiplicador representa centenas.

Multiplicando finalmente o mesmo numero 65487 pela ultima letra 6 do multiplicador, assento o producto 392922 debaixo do precedente, adiantando-o mais huma casa para a esquerda, para que a sua primeira letra 2 fique na casa dos *milhares*, em que está a letra do multiplicador.

Em fim, de todos estes productos faço a soma 455658546, que será o producto de 65487 multiplicados por 6958, ou o valor do numero 65487 tomado 6958 vezes; pois que com effeito se tomou 8 vezes na primeira operação, 50 vezes na segunda, 900 vezes na terceira, 6000 na quarta; e por conseguinte 6958 vezes em todas quatro.

52 Se o multiplicano, ou o multiplicador, ou ambos acabarem em cifras abbrevia-se a operação, multiplicando sem fazer caso dellas, e ajuntando-as depois todas ao producto.

Exemplo II.

Havendo de multiplicar - - 6500
por - - - - - - - - - - - - 350

325	
195	
2275000	Producto.

Deixando as cifras, multiplico 65 por 35, e ao

pro-

producto 2275 ajunto as tres cifras que se achaõ em ambos os factores.

A rasaõ he, porque o multiplicando 6500 representa 65 centenas; e por isso quando se multiplica 65, o producto se entende ser de centenas. Do mesmo modo o multiplicador 350 mostra 35 dezenas, e por essa rasaõ quando se multiplica por 35, o producto deve significar dezenas. Logo multiplicandose 65 por 35, o producto mostrará dezenas de centenas, ou milhares; e por conseguinte deve acabar em tres cifras, quantas saõ as dos factores; e o mesmo raciocinio se applicará a todos os outros casos.

53 Quando se encontraõ cifras entre os algarismos do multiplicador, como a multiplicaçaõ dellas dá hum producto todo de cifras, he escusado assentallo. Immediatamente se passa ao primeiro algarismo significativo, tendo advertencia de assentar sempre a primeira letra do producto na casa correspondente á letra do multiplicador, que falla com o multiplicando nessa mesma operaçaõ.

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar - 42052
por - - - - - - - - - - - 3006

	252312
	126156
	126408312 Producto.

Tendo feito a multiplicaçaõ por 6, e assentado o producto 252312 no seu lugar competente, passaremos logo a multiplicar por 3, mas assentaremos o producto 126156 de sorte que represente milhares, como a letra do multiplicador, o que se consegue ficando a primeira letra 6 na mesma casa della.

MUL-

MULTIPLICAÇAÕ

Das partes decimais.

54 NA multiplicaçaõ da *Dizima* obſervar-ſe-há a meſma regra dos numeros inteiros, ſem fazer caſo da virgula; e depois de achar o producto, delle ſe cortaráõ por meio da virgula tantas letras de *Dizima* para a direita, quantas ſaõ as que tem os factóres ambos juntos.

Exemplo I.

Querendo multiplicar - - - - 54,23
por - - - - - - - - - - - 8,3

$$\begin{array}{r} 16269 \\ 43384 \\ \hline 450{,}109 \end{array}$$

Multiplicaremos 5423 por 83, e acharemos o producto 450109; e porque no multiplicando há duas letras de dizima, e no multiplicador huma, cortaremos tres letras para a direita com a virgula no dito producto, e ficará 450,109, qual deve ſer.

A raſaõ deſta regra he facil de entender, obſervando que ſe o multiplicador foſſe 83, o producto ſeria de *centeſimas*, pois ſe teria repetido 83 vezes o numero 54,23 que moſtra *centeſimas*. Como porém o multiplicador he 8,3; iſto he, hum numero déz vezes menor (n. 28.) que 83, o producto moſtrará unidades déz vezes menores que as *centeſimas*; logo a ſua ultima letra moſtrará *milleſimas* (n.23.); e por conſeguinte deverá ter tres algariſmos de dizima, quantos ſe achaõ em ambos os factores juntamente.

E o meſmo raciocinio ſe póde applicar a qualquer outro caſo.

Exemplo II.

SE tiveſſemos de multiplicar - - 0, 1 2
por - - - - - - - - - - - - - 0,3

0,036

Multiplicar ſe-hia, como no exemplo precedente, 12 por 3, e ſahirá o producto 36. Como porém a regra neſte caſo ordena, que ſe ſeparem com a virgula tres letras para a dizima, ficaria hum principiante embaraçado, vendo que o producto naõ tem mais doque duas. Mas applicando a eſte caſo o raciocinio que fizemos no exemplo precedente, he facil de ver, que ſe deve meter huma cifra entre a virgula e 36. Com effeito, he evidente que ſe multiplicaſſemos 0,12 por 3, o producto devia ſer 0,36; logo multiplicando por 0,3 que he dés vezes menor que 3, o producto ſerá dés vezes menor que 0,36; e por conſeguinte (n. 27.28.) ſerá 0,036 ſupprindo-ſe o lugar com huma cifra, para haver tantas caſas de dizima no producto, como em ambos os factores juntamente.

55 Como na *Dizima* ſe intenta ordinariamente a facilidade das operaçoẽs, ſubſtituindo em lugar de hum calculo rigoroſo huma *approximaçaõ* ſufficiente, e de menos trabalho; naõ ſerá fóra de propoſito, que expliquemos aqui hum meio de abbreviar a multiplicaçaõ, quando nos baſtar ſaber o producto até hum gráo determinado de exactidaõ.

Supponhamos v. gr. que havemos de multiplicar o numero 45,625957 por 28,635, e que nos baſta hum producto exacto até a caſa das milleſimas. Primeiramente aſſentaremos os numeros, como aqui abaixo ſe moſtra; iſto he, inverteremos a ordem dos algariſmos de hum delles, e o aſſentaremos

debai-

debaixo do outro de ſorte, que o algariſmo que era das unidades fique correſpondendo ao algariſmo do numero ſuperior que eſtiver duas caſas mais para a direita doque aquella, até onde queremos o producto exacto. Entaõ faremos a multiplicaçaõ, advertindo que cada letra do multiplicador naõ há de fallar com as letras do multiplicando que ficaõ para a direita da colunna em que eſtá, e que os productos que ſe forem achando ſe haõ de aſſentar de maneira, que as primeiras letras de todos da parte direita fiquem em huma colunna vertical. Na ſoma deſtes productos riſcaremos as ultimas duas letras á direita, com a advertencia de ajuntar huma unidade à ultima que ficar, ſe as duas que ſe riſcaõ paſſarem de 50. E feito iſto, aſſentaremos a virgula no lugar que pedem os algariſmos da dizima, que queremos no producto.

Exemplo III.

Se quizermos multiplicar - - - - 45,625957
por - - - - - - - - - - - - - - - 28,635

E ſe for baſtante achar o producto exacto até a caſa das milleſimas; eſcreveremos os numeros deſta maneira - - - - - - - - - - - 45,625957

53682

91251914
36500760
2737554
136875
22810

1306499(13

E ſerá o producto - - - - - - - - 1306,499

Se fizessemos a operaçaõ por extenso, achariamos o producto 1306,499278695, com o qual se ajusta o precedente até a casa das millesimas, como se intentava.

Se o multiplicando naõ tiver tantas letras de dizima, quantas saõ precizas para que a letra das unidades do multiplicador corresponda á casa que deve, conforme a regra, supprir-se-há ajuntando ao multiplicando as cifras necessarias.

Exemplo IV.

Havendo de multiplicar - - - - 54,236
por - - - - - - - - - - - - - 532,27

e querendo o producto exacto até a casa das centesimas, assentaremos os numeros deste modo:

54,236000
72235
271180000
16270800
1084720
108472
37961
2886819(53

E o producto será . . . . 28868,20 . . . ajuntando huma unidade á ultima letra 9, porque as duas supprimidas 53 excedem 50.

Exemplo V.

QUerendo multiplicar - - - - 0,227538917
por - - - - - - - - - - - - 0,5664178

de ſorte, que o producto venha exacto até o ſetimo algariſmo da dizima, aſſentaremos os numeros deſte modo - - - - - - - - - 0,227538917

87146650
.....0
113769455
13652334
1365228
91012
2275
1589
176
1288820(69

E o producto ſerá - - - - - 0,1288821

§§ Para quem naõ eſtá exercitado na *Taboada* há hum methodo de *multiplicar* por meio unicamente do *ſomar*, o qual ajuntaremos aqui, e he da maneira ſeguinte.

Forme-ſe á parte huma colunna, na qual primeiramente ſe aſſentará o *multiplicando* defronte da unidade; depois ſomar-ſe-há comſigo meſmo, tomando cada algariſmo duas vezes, e a ſoma ſe eſcreverá por baixo defronte do numero 2; eſta ſoma ſe ajuntará outra vez com o meſmo multiplicando, e a nova ſoma ſe aſſentará por baixo da precedente defronte do numero 3, e aſſim por diante até 10: e ſe defronte de 10 vier huma ſoma que ſeja o meſmo multiplicando augmentado de huma cifra, ſervirá de prova que todas

as

as ſomas da columna eſtaõ certas. Pela conſtrucçaõ deſta columna ſe vê, que nella, ſe tem formado os productos do multiplicando por todos os numeros ſimples de 1 até 9.

Preparada deſte modo a columna, paſſar-ſe-há á multiplicaçaõ, e por cada huma das letras do *multiplicador* ſe tomará o producto que na dita columna lhe correſponde, o qual ſe aſſentará de forma que a primeira letra á direita fique na caſa que compete á letra do meſmo multiplicador; e a ſoma de todos eſtes productos, dará o producto total que ſe buſca. O exemplo ſeguinte moſtrará claramente a fórma da operaçaõ.

Se quizermos multiplicar o numero 79856345 pelo numero 9605843, aſſentallos-hemos ao modo ordinario, como aqui ſe moſtra.

79856345	1	79856345
9605843	2	159712690
	3	239569035
239569035	4	319425380
319425380	5	399281725
638850760	6	479138070
399281725	7	558994415
479138070	8	638850760
718707105	9	718707105
767087512623835	10	79856345(0

Depois, transferindo o multiplicando para o lado direito defronte de 1, o ſomaremos comſigo meſmo, e aſſentaremos a ſoma por baixo defronte do 2; do meſmo modo ajuntaremos eſta ſoma com o multiplicando, e eſcreveremos a nova ſoma por baixo defronte do 3; e aſſim por diante.

Feita a columna como ſe vê no exemplo, paſſaremos

mos á multiplicaçaõ. E porque a primeira letra do multiplicador he 3, tomaremos da columna o numero que lhe correſponde, e o aſſentaremos no ſeu lugar. O meſmo faremos a reſpeito das letras ſeguintes 4, 8, 5, 6, e 9; e fazendo a ſoma acharemos o producto 76708751262383 5.

Eſte methodo he indirecto, e mais longo que o ordinario; mas na multiplicaçaõ dos numeros grandes tem a ventagem de que naõ requer taõ grande attençaõ, nem he taõ ſujeito ao erro. Quando porém tivermos, como ſuccede muitas vezes, de multiplicar ſucceſſivamente hum meſmo numero por muitos outros, como entaõ feita huma vez a columna ſerve para todas as operaçoens, he eſte methodo naõ ſómente o mais expedito, e ſeguro, mas tambem o mais abbreviado de todos. ∬

Uſo da Multiplicaçaõ.

56 NAõ he noſſa tençaõ moſtrar aqui todos os uſos que ſe pódem fazer da multiplicaçaõ. Sómente indicaremos alguns, que ſerviráõ de encaminhar para todos os mais.

Serve a Multiplicaçaõ, em geral, para achar o valor total de muitas unidades, quando ſe conhece o valor de cada huma. Se v. gr. nos perguntarem 1º *Quanto devem cuſtar* 5842 *toeſas de obra, a raſaõ de* 54^{lb} *a toeſa?* Multiplicaremos 54^{lb} por 5842, ou (n. 44.) 5842^{lb} por 54; e teremos 315468^{lb} pelo preço total que ſe pede. 2º *Quanto pézaõ* 5954 *pés cubicos* (*) *de agua; ſuppondo que cada pé tem* 72 *libras?* Multiplicaremos 72^{lb} por 5954, ou 5954^{lb} por 72; e teremos 428688 libr. pelo pezo total que ſe pergunta.

57 Ser-

(*) O *pé cubico* he huma medida que tem hum *pé* de comprido, de largo, e de fundo, pela qual ſe avalia a capacidade dos corpos, como ſe verá na Geometria.

57 Serve tambem a multiplicaçaõ para converter as unidades de qualquer eſpecie em unidades de outra eſpecie menor; como, por exemplo, para reduzir as *libras* em *ſoldos*, e eſtes em *dinheiros*; as *toeſas* em *pés*, eſtes em *pollegadas*, e eſtas em *linhas*; os *dias* em *horas*, eſtas em *minutos*, e eſtes em *ſegundos* &c. Muitas vezes hà neceſſidade deſta ſorte de reducçoens; e por iſſo as moſtraremos praticadas em alguns exemplos.

Se quizermos converter em *dinheiros* a quantia de 8^{lb} 17^{s} 7^{d}; como a *libra* vale 20^{s}, multiplicaremos as 8^{lb} por 20 (n. 52.) e teremos 160^{s}, aos quais ajuntando os 17^{s} teremos 177; depois multiplicaremos eſtes por 12 (porque cada *ſoldo* vale 12 *dinheiros*), e teremos 2124^{d}, aos quais ajuntando os 7^{d}, teremos 2131^{d} pelo valor total da quantia 8^{lb} 17^{s} 7^{d} reduzida a *dinheiros*.

Se nos perguntarem quantos minutos tem o anno commum, a ſaber 365^{d} 5^{h} 48^{m}, ou 365 dias 5 horas, e 48 minutos; como o dia he de 24 horas, multiplicaremos 24^{h} por 365, e ao producto 8760^{h} ajuntaremos 5^{h}; depois multiplicaremos (n. 52.) o total 8765 por 60 (porque a hora tem 60 minutos), ao producto 525900^{m} ajuntaremos os 48^{m}, e o total 525948^{m} ſerá o numero de minutos, que no anno commum ſe contém.

58 O multiplicar abbreviado, que aſſima explicámos (n. 52.), póde ſervir para reduzir prontamente em *libras* qualquer numero de *tonnelladas*. Como a *tonnellada* péza 2000 *libras*, ſe tivermos v. gr. 854 *tonnelladas* para reduzir, naõ he neceſſario mais doque duplicar 854, e pôr tres cifras adiante do producto; e teremos 1708000 pelo numero de *libras* que pézaõ 854 *tonnelladas*. Obſervem os principiantes, que *duplicar*, *triplicar*, *quadruplicar* &c. he o meſmo que multiplicar por 2, 3, 4, &c.

DA

DA ESPECIE DE REPARTIR
Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

59 REpartir ou *Dividir* hum numero por outro, em geral, naõ he outra couſa mais do que buſcar *quantas vezes* o primeiro delles contêm o ſegundo; e a operaçaõ com que ſe buſca chama-ſe *Repartiçaõ*, ou *Diviſaõ*. Aſſim, repartir 12 por 4 he o meſmo que buſcar em 12 quantas vezes há 4; que ſaõ 3 vezes.

O numero que ſe toma para ſe dividir, chama-ſe *Dividendo*, e vulgarmente *Partiçaõ*; o numero pelo qual ſe divide, chama-ſe *Diviſor*, ou *Partidor*; e o numero, que moſtra as vezes que o dividendo contém o diviſor, chama-ſe *Quociente.*

A Diviſaõ naõ ſe faz ſempre com a tençaõ de ſaber quantas vezes hum numero contém outro, mas a operaçaõ procede em todos os caſos, como ſe unicamente ſe dirigiſſe a eſſe fim; e por eſta raſaõ he, que ella ſe póde conſiderar em geral, como huma operaçaõ pela qual ſe acha quantas vezes o dividendo contém o diviſor (*).

§ Pela noçaõ precedente da *Diviſaõ* ſe entenderá facilmente, que ella ſe póde fazer por meio da *Subtracçaõ*, tirando ſucceſſivamente o diviſor do dividendo; pois he evidente, que quantas vezes

(*) Na pratica vulgar conſidera-ſe o dividendo como huma quantia que ſe ha de repartir em partes iguais por tantos *companheiros* quantas ſaõ as unidades do partidor, ás quais ſe coſtuma dar o meſmo nome de *companheiros*; e no quociente ſe procura ſaber quanto cabe a cada hum delles.

zes delle ſe poder tirar, tantas nelle ſe contém. Aſſim para dividir 21 por 7 podemos obrar deſte modo:

$$\begin{array}{r l} 21 & \\ 7 & \\ \hline 14 & \text{- - - 1º reſto.} \\ 7 & \\ \hline 7 & \text{- - - 2º reſto.} \\ 7 & \\ \hline 0 & \text{- - - 3º reſto.} \end{array}$$

E tendo achado, que tirando-ſe 3 vezes conſecutivas o diviſor 7 do dividendo 21, naõ ſobrou nada, conheceremos que 7 ſe contém *tres vezes* exactamente em 21, e por conſeguinte, que o quociente he 3.

Porém como eſte methodo ſeria tanto mais longo e trabalhoſo, quanto maior foſſe o quociente, pela regra particular da *Diviſaõ*, como por hum *Diminuir abbreviado*, chegamos com maior prontidaõ, e facilidade a alcançar o meſmo reſultado. ”

Da meſma noçaõ ſe ſegue evidentemente; *Que multiplicando-ſe o diviſor pelo quociente deve vir no producto o dividendo*; porque niſſo ſe naõ faz outra couſa mais do que tomar o diviſor tantas vezes quantas elle ſe contém no meſmo dividendo; e iſto he geral, quer ſeja o quociente numero inteiro, quer fraccionario.

Quanto á eſpecie das unidades que o *quociente* deve moſtrar, he de advertir que naõ póde determinar-ſe nem pela eſpecie das unidades do dividendo, nem do diviſor, nem de ambos juntos. Porque ficando o dividendo, e o diviſor ſempre os meſmos, o quociente, que ſerà tambem ſem-

ſempre o meſmo numericamente, póde ſer muito differente em quanto á eſpecie das ſuas unidades, conforme a natureza da queſtaõ o determinar.

Por exemplo: Se procurarmos ſaber quantas vezes 8^{lb} contém a 4^{lb}, o quociente ſerá hum numero *abſtracto*, que moſtrará 2 *vezes*. Porém ſe quizermos ſaber quanta obra ſe ha de fazer por 8^{lb}, a raſaõ de 4^{lb} a *toeſa*, o quociente ſerá hum numero *concreto*, que moſtrará 2 *toeſas*, cuja eſpecie naõ diz reſpeito algum às unidades do dividendo, nem do diviſor. Por onde ſe vê, que ſómente a queſtaõ que conduz á diviſaõ actual de que ſe trata, he a que decide a natureza das unidades, que deve moſtrar o quociente.

DIVISAŎ

De hum numero compoſto por hum numero ſimples.

60 A Operaçaõ, que agora entramos a moſtrar, ſuppoem que cada hum ſabe achar por ſi meſmo quantas vezes ſe contém hum numero ſimples em outro ſimples, ou compoſto taõ ſómente de doís algariſmos. Eſte conhecimento ſe adquire ao meſmo tempo que ſe apprendem os productos dos numeros ſimples; faltando o qual, póde fazer-ſe uſo da *Taboada*, que aſſima temos propoſto (n. 48.). Se v. gr. quizermos ſaber em 74 quantas vezes há 9, buſcaremos o diviſor 9 no alto da *Taboada*, e pela ſua colunna vertical deſceremos até encontrar ou o numero dado 74, ou o que for proximamente menor, como neſte caſo he o numero 72; e á caſa delle correſponderá na primeira colunna vertical á eſquerda o quociente, que he neſte exemplo o numero 8.

Iſto ſuppoſto, eis-aqui o methodo de executar

a

a *Diviſaõ* de hum numero compoſto por hum numero ſimples, á qual ſe dá vulgarmente o nome de *meio partir*.

Aſſenta-ſe o diviſor ao lado direito do dividendo, ſeparando-os por meio de huma riſca perpendicular. Por baixo do diviſor ſe paſſe tambem huma riſca, debaixo da qual ſe eſcreveráõ os algariſmos do quociente á medida que ſe forem achando.

Entaõ tomar-ſe-há o primeiro algariſmo á eſquerda do dividendo, ou os primeiros dous, quando o primeiro ſó for menor que o diviſor; e fazendo delles hum dividendo parcial, buſcar-ſe-hâ quantas vezes o diviſor nelle ſe contém, e o numero das vezes ſe aſſentará no lugar do quociente. O quociente achado ſe multiplicará pelo diviſor, e o producto ſe aſſentará debaixo do reſpectivo dividendo, do qual ſe diminuirá; e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial. Neſte ſe praticará a meſma operaçaõ. A letra, que ſe achar para o quociente, ſe aſſentará á direita da primeira; depois ſe multiplicará pelo diviſor, e o producto ſe eſcreverá debaixo do reſpectivo dividendo parcial, do qual ſe diminuirá; e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará de novo outro dividendo parcial, com o qual ſe praticará a meſma operaçaõ; e aſſim por diante, até ſe acabarem as letras do dividendo.

Eſta Regra ſe entenderá mais claramente por meio dos exemplos ſeguintes.

Exem-

Exemplo I.

SE quizermos repartir 8769 por 7, aſſentaremos eſtes dous numeros como aqui ſe moſtra:

Dividendo	Diviſor
8769	7
7	$1252\frac{5}{7}$ Quociente.
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

E começando pela eſquerda do dividendo, deveriamos dizer em 8 *mil* quantas vezes há 7; mas baſta que digamos em 8 quantas vezes há 7? há 1; e aſſentaremos 1 no quociente. Eſte 1 he realmente *mil*; mas naõ he neceſſario attender ao ſeu valor local, pois que elle ſerá determinado pelas letras ſeguintes do quociente, que havemos de achar. Agora multiplicaremos o quociente 1 pelo diviſor 7, e aſſentaremos o producto 7 debaixo do dividendo parcial 8; e feita a diminuiçaõ, fica 1. Eſte reſto 1 he a parte de 8 que naõ foi dividida, e vale por huma *dezena* a reſpeito da letra 7 que ſe ſegue no dividendo, a qual abaixaremos para junto do dito reſto, e teremos outro dividendo parcial 17.

Entaõ diremos do meſmo modo; em 17 que vezes há 7? ha 2; e eſcreveremos 2 no quociente á direita da outra letra 1, que achamos pela primeira operaçaõ. Depois multiplicaremos o novo quocienteciente 2 pelo diviſor 7, e eſcreveremos o producto 14 debaixo do membro dividendo 17; e feita a diminuiçaõ, teremos o reſto 3, que he a parte do dividendo que naõ foi repartida: pelo que lhe ajuntaremos a letra ſeguinte 6, e teremos o novo dividendo parcial 36.

Continuando a meſma operaçaõ, diremos: em 36 que vezes há 7? há 5; e aſſentaremos 5 no quociente. Depois multiplicando 5 pelo diviſor 7 tiraremos o producto 35 do dividendo 36, e ficará o reſto 1, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo, que he a ultima 9, e teremos ainda para partir 19. Pelo que diremos: em 19 que vezes há 7? há 2; e eſcreveremos 2 no quociente.

Depois multiplicaremos o meſmo 2 pelo diviſor 7, e diminuindo o producto 14 do dividendo 19, ficará por ultimo o reſto 5.

Aſſim achamos pois, que 8769 contém a 7 tantas vezes, quantas moſtra o quociente, iſto he, 1252 vezes, e que álem diſſo ainda reſtaõ 5.

Pelo que reſpeita a eſte reſto, baſtará por ora dizer, que ſe aſſenta á direita do quociente, aſſim como ſe vê no exemplo; iſto he, que ſe eſcreve em ſima de huma riſca, ficando-lhe o diviſor por baixo; expreſſaõ, que quer dizer *ſinco ſetimas* partes da unidade, como adiante moſtraremos, quando tratarmos dos *quebrados*.

61 Se no decurſo da operaçaõ ſe achar algum dividendo parcial menor que o diviſor, o qual por conſeguinte o naõ chegará a conter 1 vez, pôr-ſe-há cifra no quociente, e deixando a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial, com o qual ſe continuará a operaçaõ.

Exem-

Exemplo III.

SUpponhamos que havemos de repartir 14464 por 8.

```
14464 | 8
 8    |----
----- | 1808
 64
 64
-----
 064
  64
-----
   0
```

Neſte exemplo faremos o primeiro dividendo parcial das duas letras 14, porque a primeira 1 he menor que o diviſor.

Entaõ partindo 14 por 8, cabe ſómente 1, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, fica o reſto 6, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 4, e teremos para partir 64.

Partindo pois 64 por 8, cabem 8, que aſſentaremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica nada de reſto; pelo que eſcreveremos cifra, e para junto della traremos a letra ſeguinte do dividendo 6. Agora como temos o dividendo parcial 6, e eſte he menor que o diviſor, aſſentaremos o no quociente, e abaixaremos immediatamente a letra ſeguinte do dividendo 4, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 64. Entaõ partindo 64 por 8, cabem 8, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica reſto algum. E por iſſo entenderemos, que 8 ſe contém em 14464 exactamente 1808 vezes.

DIVI-

DIVISAÕ
De hum numero composto por outro composto.

62 QUando o divisor constar de muitos algarismos, que he o caso a que vulgarmente se dá o nome de *partir por inteiro*, praticar-se-há a Divisaõ desta maneira.

Tomem-se da parte esquerda do dividendo tantas letras, quantas bastarem para fazer hum dividendo parcial, que naõ seja menor que o divisor. E porque seria muito difficultoso buscar, quantas vezes o dito dividendo contém o divisor inteiro, como no primeiro caso; bastará achar quantas vezes a primeira letra do divisor á esquerda se contém na parte superior do mesmo dividendo, que lhe corresponde; e o quociente assim achado se assentará no seu lugar.

Entaõ multiplicar-se-há o mesmo quociente por todo o divisor; e conforme se forem achando as letras do producto, se iraõ assentando debaixo do dividendo parcial da direita para a esquerda. Depois tirar-se-há este producto do mesmo dividendo respectivo, e ao resto se ajuntará a letra seguinte do dividendo principal, com a qual se formará outro dividendo parcial, que se repartirá da mesma maneira; e assim por diante.

Passemos a illustrar esta regra com alguns exemplos, e a prevenir juntamente os casos, em que pode haver algum embaraço.

Exemplo I.

QUerendo repartir 75347 por 53.

$$\begin{array}{r|l} 75347 & 53 \\ \underline{53} & \overline{1421\ \tfrac{34}{53}} \\ 223 & \\ \underline{212} & \\ 114 & \\ \underline{106} & \\ 87 & \\ \underline{53} & \\ 34 & \end{array}$$

Faremos o nosso primeiro dividendo parcial dos dous algarismos 75, porque estes bastaõ para elle naõ ser menor que o divisor; e em lugar de dizermos em 75 que vezes há 53, diremos sómente em 7 que vezes há 5? há 1, que escreveremos no quociente.

Depois multiplicaremos o quociente 1 por todo o divisor 53, e assentaremos o producto debaixo do dividendo respectivo 75; do qual o diminuiremos, e ficará o resto 22, que com a letra seguinte do dividendo 3 formará outro dividendo parcial 223. Neste tambem, em lugar de dizer em 223 que vezes há 53, diremos sómente, em 22 que vezes há 5? há 4, que assentaremos no quociente; e multiplicando 4 pelo divisor, escreveremos o producto 212 debaixo do dividendo respectivo 223, do qual o diminuiremos, e ao resto 11 ajuntaremos a letra seguinte 4 do dividendo principal, e teremos para repartir de novo 114. Partindo pois 11 por 5, cabem 2, que assentaremos no quociente; depois multiplicaremos pelo divifor ; tiraremos o producto 106 do dividendo refpectivo 114 ; ao refto 8 ajuntaremos a letra feguinte do dividendo 7 ; e teremos o novo dividendo parcial 87. E fazendo nelle finalmente a mefma operaçaõ , acharemos 1 para o quociente ; e feita a multiplicaçaõ, e fubtracçaõ , ficará o refto 34 , que affentaremos á direita do quociente do modo que affima indicámos (n. 60.).

63 Na operaçaõ precedente devia , em rigor, bufcar-fe quantas vezes cada hum dos dividendos parciais continha o divifor inteiro. Porém como efta indagaçaõ pediria grande força de attençaõ , contentamo-nos , do modo que fe tem vifto , com bufcar quantas vezes a parte maior do dividendo contém a maior parte do divifor. He verdade , que defte modo naõ acertamos fempre com o verdadeiro algarifmo , que deve affentar-fe no quociente , pois procedemos meramente por huma tentativa. Mas , afem de que efta tentativa conduz pela maior parte ao conhecimento do verdadeiro quociente , e quando naõ , fempre nos indica hum algarifmo pouco diftante delle ; a multiplicaçaõ , que immediatamente fe faz , logo moftra o defeito que fe tem commettido , e ferve para o corrigir.

E com effeito , fe o dividendo contiveffe realmente o divifor *tres vezes* , e nós , julgando pelas primeiras letras de ambos elles , entendeffemos que o continha *quatro* ; he facil de ver , que multiplicando o divifor por 4 achariamos hum producto maior que o dividendo , por quanto fe tomaria o divifor mais vezes do que realmente fe continha no mefmo dividendo , e por confeguinte naõ póderia fazer-fe a fubtracçaõ. Nefte cafo fe diminuirá o quociente fuppofto de huma , duas unidades &c. , até que venha hum producto que poffa diminuir-fe do refpectivo dividendo. Ao contrario , fe no mefmo cafo figurado puzeffemos 2 no quo-

quociente, poderia ſim diminuir-ſe o producto do dividendo, mas ficaria hum reſto maior do que o diviſor, por onde ſe conheceria que elle ſe continha no dividendo mais vezes, do que ſe tinha julgado: e por conſeguinte, que o quociente 2 ſe tinha tomado menor, do que devia ſer. Com o exercicio ſe adquire em pouco tempo o habito de prever quanto ſe deve aumentar, ou diminuir o algariſmo achado pela primeira prova, no caſo de ſe achar defeituoſo.

Exemplo II.

HAvendo de repartir 189492 por 375:

189492	375
1875	
1992	$505\frac{117}{375}$
1875	
117	

Em primeiro lugar: Tomaremos as primeiras quatro letras do numero propoſto para fazermos dellas o noſſo primeiro dividendo parcial, porque as tres primeiras fazem hum dividendo menor que o diviſor.

Depois, diremos: em 18 quantas vezes há 3? há 6 realmente, naõ havendo reſpeito ás letras ſeguintes; como porém multiplicando o diviſor por 6, ſahe hum producto maior que o dividendo reſpectivo, aſſentaremos ſómente 5 no quociente, e feita a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, ficará o reſto 19, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo principal 9, e teremos de novo para repartir 199.

E como em 1 naõ há vez alguma 3, aſſentaremos huma cifra no quociente, e teremos a letra ſeguinte do dividendo principal 2, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 1992. Repetindo nelle a meſma operaçaõ, acharemos que 3 ſe contém em 19 realmente 6 vezes; mas pela raſaõ ja declarada eſcreveremos ſómente 5 no quociente; e acabando a operaçaõ, ſobraràõ 117.

64 Eisaqui huma reflexaõ, que em muitos caſos nos póde livrar de fazermos tentativas inuteis. Como pela maior parte ſe erra no juizo que ſe faz do quociente, quando a ſegunda letra do diviſor paſſa muito de 5; neſſe caſo accreſcentaremos mentalmente 1 á primeira letra do meſmo diviſor, e veremos quantas vezes aſſim aumentada ſe contêm na parte correſpondente do dividendo. Porque deſte modo faremos hum juizo mais ſeguro do algariſmo, que devemos aſſentar no quociente.

Exemplo III.

SUpponhamos, que nos daõ para repartir 1832 por 288.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ 1728 & \\ \hline 104 & 6\frac{104}{288} \end{array}$$

Neſte caſo em lugar de dizer em 18 que vezes há 2, diremos: em 18 que vezes há 3. Porque o diviſor 288 ſe chega muito mais para 300 do que para 200. Aſſim acharemos que há 6, e com effeito eſte he o verdadeiro quociente; e da outra ſorte achariamos 9, e por conſeguinte fariamos tres tentativas inuteis, paſſando de 9 a 8, de 8 a 7, e de 7 a 6.

Mo-

Modo de abbreviar a Diviſaõ.

65 PAra que melhor ſe entendeſſe o methodo da operaçaõ antecedente, mandámos até agora eſcrever ſempre os productos, que reſultavaõ da multiplicaçaõ do diviſor pelos algariſmos do quociente que ſe hiaõ achando, debaixo dos dividendos reſpectivos, dos quais ſe haviaõ de diminuir. Porém como na Arithmetica ſe deve attender muito a reduzir, e abbreviar as operaçoens, quanto he poſſivel; devemos notar, que podemos deixar de eſcrever os ditos productos, fazendo a ſubtracçaõ juntamente com a multiplicaçaõ. O exemplo ſeguinte baſtará, para moſtrar como iſto ſe executa.

Exemplo.

QUerendo repartir 756984 por 932.

$$\begin{array}{r|l} 756984 & \underline{932} \\ 1138 & \\ 2064 & 812\frac{200}{932} \\ 200 & \end{array}$$

Tomaremos as quatro primeiras letras do dividendo, porque as tres fazem hum membro menor que o diviſor; e partindo 75 por 9, acharemos que cabem 8, os quais aſſentaremos no quociente. Entaõ em lugar de multiplicar 8 por 932, e eſcrever o producto debaixo do membro 7569, para delle ſer diminuido; faremos tudo junto, dizendo: 8 vezes 2 ſaõ 16, que tirados de 9, naõ póde ſer, mas tirados de 19, ficaõ 3, que eſcreveremos debaixo do 9.

Para deſcontar a dezena, que tomámos da letra 6, a fim de que o 9 valeſſe 19, em lugar de tra-

tratarmos a meſma letra 6 como diminuida de huma unidade, da maneira que praticámos na conta de *Diminuir*, guardaremos eſſa unidade para a juntarmos ao producto ſeguinte. Aſſim continuando a operaçaõ, diremos: 8 vezes 3 ſaõ 24, e 1 que guardámos ſaõ 25, que tirados de 6, naõ póde ſer, mas tirados de 26, fica 1, que aſſentaremos debaixo do 6. Deſte modo fica deſcontada a unidade, que tinhamos pedido ao 6, porque lhe tirámos huma de mais na diminuiçaõ que acabamos de fazer; e do meſmo modo deſcontaremos os 2 que agora tomámos do 5 para que o 6 valeſſe 26. Aſſim diremos: 8 vezes 9 ſaõ 72, e 2 que vem (porque na operaçaõ antecedente diminuimos de 26) ſaõ 74, que tirados de 75, fica 1, que eſcreveremos debaixo do 5.

Ao reſto 113 ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 8, e continuaremos do meſmo modo, dizendo: em 11 que vezes há 9? há 1, que aſſentaremos no quociente; depois, 1 vez 2 he 2, que tirados de 8 ficaõ 6, que aſſentaremos debaixo do 8; 1 vez 3 he 3, que tirados de 3 naõ fica nada, e por iſſo poremos cifra debaixo do 3; 1 vez 9 he 9, que tirados de 11, ficaõ 2, que aſſentaremos por baixo. Ao reſto 206 ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo que he 4, e diremos: em 20 quantas vezes há 9? há 2, que aſſentaremos no quociente; e fazendo a multiplicaçaõ, diremos: 2 vezes 2 ſaõ 4, que tirados de 4, fica 0; 2 vezes 3 ſaõ 6, que tirados de 6, fica 0; e em fim 2 vezes 9 ſaõ 18, que tirados de 20, ficaõ 2.

66 Póde ſucceder no decurſo das diviſões parciais, de que conſta eſta operaçaõ, que o dividendo contenha o diviſor mais de 9 vezes. Neſte caſo entenderemos, que na operaçaõ precedente ſe tomou para o quociente huma letra menor do que devia ſer, pois que a ella certamente pertence-

rá

rá a dezena, que ſe achar involvida no quociente actual.

67 Se o dividendo, e o diviſor, acabarem ambos em cifras, antes de fazer a diviſaõ pódem cortar-ſe em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. Por exemplo, para repartir 8000 por 400, dividiremos ſómente 80 por 4; porque he evidente, que 80 centenas contem a 4 centenas tantas vezes, quantas 80 unidades contém a 4 unidades.

DIVISAŎ
Das partes decimais.

PAra que nos naõ demoremos com diſtinçoẽs eſcuſadas, reduziremos a diviſaõ dos numeros accompanhados de *dizima* a huma ſó regra, que he deſta maneira:

Preparem-ſe os numeros propoſtos de ſorte que tenhaõ ambos igual numero de algariſmos decimais, ajuntando as cifras neceſſarias ao que menos tiver, o qual por iſſo naõ muda de valor (n. 30.); ſupprima-ſe a virgula, e pratique-ſe a diviſaõ como ſe os numeros foſſem inteiros: e o quociente ſerá o que ſe buſca, ſem haver nelle algariſmos decimais.

Exemplo I.

SE houvermos de repartir 12,52 por 4,3;

1252	430
392	$2\frac{392}{430}$

Primeiramente reduziremos os numeros dados a igual numero de decimais, ajuntando huma cifra

ao

ao divisor, que ficará 4,30. Depois supprimindo a virgula partiremos 1252 por 430, e acharemos o quociente 2, e o resto 392; e por conseguinte o quociente total $2 \frac{392}{430}$.

Porém, como usamos da *dizima* com o fim principal de evitarmos as fracçoẽs ordinarias, em lugar de assentarmos o resto em fórma de fracçaõ, como fizemos no exemplo dado, continuaremos a operaçaõ para acharmos a *dizima* do quociente, como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo II.

1252	430
3920	2,9116 &c.
500	
700	
2700	
120	

Tendo achado o quociente inteiro 2, como no primeiro exemplo, ao resto 392 ajuntaremos huma cifra, que realmente o tornará déz vezes maior, e teremos para partir 3920. Feita a operaçaõ, acharemos a letra 9 para o quociente, a qual assentaremos, tendo primeiro marcado o lugar das unidades por meio da virgula, que poremos junto ao 2. Deste modo o 9 mostrará sómente *decimas*, e desfará o que se tinha supposto no dividendo, fazendo-se dèz vezes maior, pois he manifesto, que, se partindo 3920 por 430 vem ao quociente 9, partindo 392 por 430 deve ser o quociente déz vezes menor, isto he, 0,9, Agora fazendo a multiplicaçaõ, e subtracçaõ, teremos o resto 50, ao qual ajuntaremos tambem outra cifra, que vem a ser o mesmo, como se ao principio tivessemos ajuntado duas ao dividendo. Mas porque a letra 1, que havemos de achar para o quociente, se há de assentar á direita do 9 na casa das *centesimas*, com isso desfaremos a supposiçaõ, que tinhamos feito, de hum dividendo cem vezes maior.

Deste modo continuaremos a operaçaõ até onde quizermos, havendo sempre respeito á natureza da questaõ, a qual mostrará quantos algarismos de *dizima* saõ bastantes. Bem entendido: que se pararmos em dous, naõ poderá chegar o defeito do quociente a huma *centesima* parte da unidade; nem a huma *millesima*, se pararmos no terceiro algarismo decimal; e assim por diante: pois he manifesto, que naõ póde accrescentar-se, nem diminuir-se huma unidade ao ultimo algarismo achado, sem que o quociente se faça maior, ou menor, do que deve ser.

Da mesma maneira se pódem converter em dizima todos os restos da Divisaõ, quando ella se pratica em numeros inteiros.

Resta mostrar a rasaõ porque supprimindo a virgula tanto no dividendo, como no divisor, naõ se altéra nada o quociente, no caso de haver igual numero de letras decimais em ambos elles. Isto será facil de entender, advertindo que no exemplo assima o dividendo 12,52 vale o mesmo que 1252 *centesimas*, e o divisor 4,30 o mesmo que 430 *centesimas*, porque as unidades principais contém cem *centesimas* (n. 22.); e he claro, que 1252 *centesimas* contém 430 *centesimas* tantas vezes, quantas 1252 unidades contém a 430 unidades: logo he escusado attender á virgula, todas as vezes que ambos os numeros acabaõ na mesma casa decimal.

69 Algumas vezes, conforme a natureza da questaõ, basta achar o quociente até hum gráo determinado de exactidaõ. Nestes casos podemos abre-

breviar muito a operaçaõ, uſando do methodo, que agora moſtraremos.

Primeiramente ſupponhamos, que nos he baſtante o quociente exacto até a caſa das unidades (porque depois moſtraremos como ſe deve applicar o meſmo methodo a outros caſos). Eisaqui a regra.

Supprimaõ-ſe no dividendo tantas letras, menos huma, da parte direita, quantas ſaõ as do diviſor; e depois pratique-ſe a diviſaõ ao modo ordinario. Se naõ ficar reſto, ajuntem-ſe ao quociente tantas cifras, quantas ſaõ as letras ſupprimidas no dividendo, e teremos o quociente pedido. Porém ficando algum reſto, eſte ſe partirá pelo diviſor, no qual para iſſo ſe ſupprimirá o ultimo algariſmo á direita. Feita eſta diviſaõ, o reſto que ficar ſe tornará a partir pelo diviſor da operaçaõ precedente, ſupprimindo-lhe o ultimo algariſmo á direita; e aſſim por diante. A praxe deſta regra ſe facilitará por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

QUerendo repartir 87892364 87 por 64423, e baſtando ſaber o quociente exacto até a caſa das unidades, deixaremos os quatro ultimos algariſmos do dividendo, porque o diviſor tem ſinco, e partiremos 878923 por 64423.

	64423
878923	
234693	136430
41424...	6442
2772...	644
196...	64
4...	6

E tendo achado pela regra ordinaria o quociente 13, e o reſto 41424; dividiremos eſte por 6442, 6442, ſupprimindo o ultimo algariſmo á direita no diviſor primitivo; e acharemos a letra 6 para o quociente, a qual aſſentaremos á direita das duas 13 antecedentemente achadas; e ficará o reſto 2772. Do meſmo modo partiremos eſte por 644, ſupprimindo mais huma letra no diviſor primitivo, e virá ao quociente 4, ficando o reſto 196. Partindo eſte por 64, caberá ao quociente 3, e ficará o reſto 4; e finalmente partindo eſte por 6, tocará cifra ao quociente, a qual nelle aſſentaremos. Aſſim repartindo 8789236487 por 64423 teremos o quociente 136430 exacto até á caſa das unidades. E com effeito ſe fizeſſemos a diviſaõ por extenſo acharíamos $136430\frac{6597}{64423}$.

Naõ he neceſſario eſcrever os novos diviſores defronte dos reſtos, que por elles ſe haõ de repartir, como aqui fazemos a fim de que melhor ſe entenda o modo da operaçaõ. Mas baſta, que ſe vaõ marcando com hum ponto, ou com huma riſca, as letras do diviſor primitivo, confórme ſe forem ſupprimindo no decurſo da operaçaõ.

70 Se o reſto da primeira diviſaõ ſe achar menor que o diviſor que lhe compete, aſſentar-ſe-há cifra no quociente; ficarà o meſmo reſto; e no diviſor ſe ſupprimirà outra letra. Se o meſmo reſto ainda for menor que o novo diviſor, aſſentar-ſe-há outra cifra no quociente; e aſſim por diante.

Exemplo II.

HAvendo de repartir 55106054 por 643, e baſtando ſaber o quociente exacto até á caſa das unidades, deixaremos as duas ultimas letras do di-

dividendo, e partiremos ao modo ordinario 551060 por 643.

551060	643
3666	85701
4510	
009...64	
9...6	
3	

Feita a operaçaõ ordinaria, acharemos o quociente 857, e o reſto 9, o qual, confórme a regra preſente, devia repartir-ſe por 64 Porém, como ſe acha o dito reſto menor que o ſeu competente diviſor, aſſentaremos cifra no quociente, e conſervaremos o meſmo reſto 9, o qual dividiremos pelo novo diviſor 6, e aſſim teremos o quociente 85701 exacto até á caſa das unidades, conforme ſe buſcava.

71 Quando no principio da operaçaõ ſe ſupprimem no dividendo as letras, que a regra ordena, ſe as que ficarem naõ forem baſtantes para conſtituirem hum numero maior, ou ao menos igual ao diviſor; entaõ cortar-ſe-haõ neſte tantas letras á direita, quantas forem preciſas, paraque as reſtantes poſſaõ caber ao menos huma vez no dividendo.

Exemplo III.

HAvendo de repartir 1611527 por 64524, e requerendo-ſe o quociente exacto até á caſa das unidades.

Primeiramente devemos ſupprimir no dividendo as quatro ultimas letras 1527. Depois, como o reſto 161 faz hum numero menor que o diviſor primitivo 64524, nelle tambem ſupprimiremos as tres ultimas letras 524, que ſaõ as que baſtaõ paraque o reſto 64 poſſa caber em 161. Entaõ, fazendo a operaçaõ como nos exemplos precedentes, partiremos 161 por 64;

$$\begin{array}{r|l} 161 & 64 \\ \cline{2-2} & 25 \\ 33 \ldots 6 & \\ 3 & \end{array}$$

e acharemos que da repartiçaõ de 1611527 por 64524 reſulta o quociente 25, ſem defeito de huma ſó unidade. E na verdade o quociente exacto he $24\frac{62951}{64524}$, o qual ſe chega muito mais para 25 do que para 24.

72 A' medida que ſe vaõ ſupprimindo as letras do diviſor, para maior exactidaõ, convem ajuntar huma unidade á ultima das que ficaõ, ſe a letra ſupprimida for 5, ou maior que 5. E do meſmo modo ſe ajuntará huma unidade á ultima letra, que ficar no dividendo, quando as letras nelle ſupprimidas paſſarem de 5, ou 50, ou 500 &c, conſórme ſe ſupprimir huma, duas, tres &c.

Exemplo IV.

SUpponhamos, que ſe pede o quociente do numero 8657627 repartido por 1987, com a condiçaõ de ter a meſma exactidaõ, que ſe tem procurado nos exemplos precedentes.

Conforme a reflexaõ ultima que temos feito, tomaremos pois para repartir 8658 por 1987, como aqui ſe moſtra:

$$\begin{array}{r|l} 8658 & 1987 \\ \cline{2-2} & 4357 \\ 710 \ldots 199 & \\ 113 \ldots 20 & \\ 13 \ldots 2 & \end{array}$$

On-

Onde, em lugar de partir o resto 710 por 198, partiremos por 199, por quanto a letra 7 supprimida no divisor he maior que 5. Do mesmo modo na operaçaõ seguinte em lugar de 19 tomaremos 20 para divisor, porque se supprime hum 9. E finalmente na operaçaõ seguinte, como o divisor 2 he hum pouco maior do que devia ser, e este se contém 6 vezes e $\frac{1}{2}$ no resto 13, assentaremos antes 7 no quociente, do que 6; e acabada a operaçaõ diremos, que o quociente pedido he 4357.

73 Agora será facil de entender o que se deve praticar, quando se requer o quociente com maior exactidaõ, do que até á casa das unidades.

Por exemplo: Se quizermos o quociente exacto até á casa das *decimas-millesimas*, naõ he necessario mais do que ajuntar ao dividendo tantas cifras quantas saõ as casas da dizima que pertendemos, v. gr. quatro no exemplo proposto. Entaõ se fará a divisaõ, segundo o methodo presente; e tendo achado o quociente exacto até á casa das unidades, nelle se cortaráõ para a dizima por meio da virgula tantas letras, quantas se determináraõ achar no principio da operaçaõ.

Exemplo V.

PEde-se o quociente do numero 6927 dividido por 4532 com a condiçaõ de ser exacto até a casa das *decimas-millesimas*.

Como as *decimas-millesimas* pertencem á quarta casa da dizima, ajuntaremos quatro cifras ao dividendo; e a questaõ será reduzida a buscar o quociente do numero 69270000 dividido por 4532, exacto até á casa das unidades, como nos exemplos precedentes. Assim fazendo a applicaçaõ do me-

methodo actual, teremos para repartir 69270 por 4532, da maneira seguinte:

69270	4532
	15285
23950	
1290 . - . 453	
384 . . . 45	
24 : . . 5	

E achando o quociente 15285, nelle cortaremos para a dizima quatro letras, pois tantas cifras ajuntámos ao dividendo; e será o quociente pedido 1,5285.

Havendo dizima no dividendo, no divisor, ou em ambos, deveráõ primeiro preparar-se de sorte, que se possa desprezar a virgula, como assima fica declarado (n. 68.), e depois se procederá á operaçaõ, como neste ultimo exemplo.

Pelo methodo presente póde reduzir-se facilmente á dizima qualquer *fracçaõ* ordinaria, havendo respeito ao que assima dissemos (n. 71.).

Querendo v. gr. reduzir á dizima a fracçaõ $\frac{4253}{9678}$ de sorte que se represente o seu valor exactamente até á casa das millesimas; deveremos partir (n. 73.) o numero 4253000 por 9678; que vem a ser o mesmo que dividir (n. 69.) o numero 4253 por 9678, ou (n. 71.) o numero 4253 por 968, conforme o methodo até agora declarado. Feita a operaçaõ, virá ao quociente 439: e teremos 0,439 pelo valor da fracçaõ proposta, com a exactidaõ que se intentava.

¶ O methodo que assima ajuntámos no fim da *Multiplicaçaõ*, para se fazer esta operaçaõ por meio unicamente do *Somar*, tambem se póde applicar a *Divisaõ* de sorte, que alem do *Somar* naõ se careça de outra couſa mais que do *Diminuir*. A ſua praxe he deſta maneira.

Primeiramente forma-ſe huma colunna da addiçaõ ſucceſſiva do *diviſor*, do meſmo modo que para multiplicar a formámos da addiçaõ do *multiplicando* (pag. 37.).

Depois toma-ſe no dividendo á eſquerda hum membro de tantas letras quantas baſtarem, paraque na colunna ſe ache hum numero igual, ou proximamente menor. O algariſmo, que eſte tiver defronte, ſe aſſenta no quociente, e o numero debaixo do dividendo parcial, do qual ſe diminue, e ao reſto ſe ajunta a letra ſeguinte do dividendo principal; e aſſim reſulta outro dividendo parcial, o qual ſe buſca na colunna, e na ſua falta o numero proximamente menor; e aſſim por diante. Quando na colunna ſe naõ achár o dividendo parcial, nem algum numero proximamente menor, aſſentar-ſe-há cifra no quociente, e ſe ajuntará ao dito dividendo a letra ſeguinte do dividendo total, para ſe continuar a operaçaõ.

Se quizermos v. gr. repartir 220188745725 por 236743, primeiramente aſſentaremos eſtes numeros do modo ordinario, como aqui ſe moſtra.

	236743	1 ... 236743
220188745725	930075	2 ... 473486
2130687		3 ... 710229
712004		4 ... 946972
710229		5 ... 1183715
1775572		6 ... 1420458
1657201		7 ... 1657201
1183715		8 ... 1893944
1183715		9 ... 2130687
0000000		10.. 2367430

pa

Depois faremos a columna ſubſidiaria por meio da addiçaõ ſucceſſiva do diviſor, como ſe vê no exemplo; e com ella entraremos a executar a diviſaõ, que naõ involve mais difficuldade alguma.

Tomando pois para o primeiro dividendo parcial as primeiras ſete letras 2201887, porque ſeis fariaõ hum dividendo menor que o diviſor, acharemos que na columna lhe toca o numero proximamente menor 2130687 defronte da letra 9. Peloque aſſentaremos 9 no quociente, e o dito numero debaixo do dividendo reſpectivo, do qual o diminuiremos, e ao reſto ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo, que he 4, e teremos para partir 712004. Naõ achando eſte numero na columna, tomaremos o que ſe acha proximamente menor, defronte da letra 3, a qual ſe aſſentará no quociente, e o dito numero ſe diminuirá do dividendo, ajuntando ao reſto a letra ſeguinte 5, de ſorte que ficará para partir 17755.

Como porém eſte numero ſe naõ acha na columna, nem outro que ſeja proximamente menor, poremos cifra no quociente, e ajuntando a letra ſeguinte 7 teremos para dividir 177557. E como eſte numero ainda he menor que os da columna, poremos outra cifra no quociente, e ajuntando outra letra teremos para repartir 1775572. Entaõ acharemos na columna o numero proximamente menor 1657201 defronte da letra 7, a qual paſſaremos ao quociente, e diminuiremos o numero do dividendo reſpectivo, ajuntando ao reſto a letra ſeguinte do dividendo principal, que he a ultima 5, e teremos para repartir 1183715. Eſte numero ſe acha na columna defronte da letra 5, a qual aſſentaremos no quociente; e porque feita a diminuiçaõ, naõ ſobra nada, ſerá o quociente exacto 930075.

Sobre o uſo deſte methodo deve aqui entenderſe o meſmo, que já declarámos a reſpeito da multiplicaçaõ (pag. 39.)

PROVA
Da Multiplicaçaõ, e Divisaõ.

74 DA mesma definiçaõ, que temos dado destas duas operaçoẽs, se póde conhecer a *prova* dellas, que vulgarmente se chama *real.*

Como na Multiplicaçaõ se toma o multiplicando tantas vezes quantas saõ as unidades do multiplicador, he evidente, que se procurarmos quantas vezes o producto contém o multiplicando, isto he (n. 59.), se dividirmos o producto pelo multiplicando, deve sahir o multiplicador no quociente. E como he indifferente tomar o multiplicando para multiplicador, e reciprocamente (n. 44), segue-se em geral, *Que dividindo o producto de qualquer multiplicaçaõ por hum dos factores deve sahir o outro no quociente.*

Por exemplo, tendo achado assima (n. 50.) que o numero 2864 multiplicado por 6 dá o producto 17184; se dividirmos este por 2864, teremos no quociente 6; e se o dividirmos por 6, teremos no quociente 2864.

Do mesmo modo: Por quanto o quociente de qualquer divisaõ denota quantas vezes o divisor se contêm no dividendo, manifestamente se segue, que se o divisor se tomar tantas vezes quantas denota o quociente, isto he (n. 40.), se o divisor se multiplicar pelo quociente, deve sahir no producto o dividendo, no caso de ter sido feita a divisaõ, sem ficar resto algum; e que tendo havido resto, se o divisor se multiplicar pelo quociente, e ao producto se ajuntar o resto, deve resultar o mesmo dividendo.

Por exemplo: Temos achado assima (n. 63.), que o numero 189492 repartido por 375 dá o quociente 505, e o resto 117. E multiplicando 375

por

por 505, teremos o producto 189375, ao qual ajuntando-se o resto 117, resultará o mesmo dividendo 189492.

Donde se vê, que a *prova real* da Divisaõ se faz pela Multiplicaçaõ, e a da Multiplicaçaõ pela Divisaõ.

Porém estas operaçoẽs pódem verificar-se por hum meio muito mais facil e expedito, que agora mostraremos; advertindo, que naõ devem por isso desprezar-se as reflexoẽs, que acabamos de fazer, por quanto serviráõ para muitas outras cousas.

PROVA

Pela regra dos noves.

75 PAra mostrarmos o uso desta regra por meio de hum exemplo, supponhamos que tendo multiplicado 65498 por 454, e achado o producto 29736092, queremos verificar este resultado. Eisaqui a operaçaõ.

Somaremos as letras do multiplicando 6,5,4,9,8, sem attender ao seu valor local, como se todas estivessem na casa das unidades, e lançaremos fóra *nove*, á medida que elle se achar na soma. Por fim teremos hum resto, que neste exemplo he 5, o qual assentaremos ao lado do mesmo multiplicando.

Do mesmo modo somaremos todas as letras do multiplicador 4, 5, 4, lançando fóra os *noves*, e teremos o resto 4, que assentaremos ao lado do mesmo multiplicador.

Entaõ multiplicaremos os dous restos hum pelo outro, e do producto, que neste exemplo he 20, lançaremos fóra os *noves* que elle tiver; e ficará hum resto, que no caso presente he 2.

Ora se o producto assima dito he exacto, he ne-

neceſſario que ſomando do meſmo modo todas as letras delle 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, e lançando fóra os *noves*, naõ fique tambem ſenaõ 2, como ſe acha com effeito.

Eſta regra ſuppoem, que para haver o reſto da ſubtracçaõ de todos os *noves*, que em qualquer numero ſe contém, naõ he neceſſario mais do que ſomar todas as ſuas letras, e lançar fóra na ſoma dellas os *noves* que ſe acharem, como ſe demonſtra facilmente reflectindo ſobre os principios da Numeraçaõ (n. 39 §§). Iſto ſuppoſto eiſaqui a raſaõ da prova na Multiplicaçaõ.

Como o multiplicando 65498 he compoſto de hum certo numero de *noves* e do reſto 5, e como o multiplicador 454 he tambem compoſto de hum certo numero de *noves* e do reſto 4, he manifeſto que ſómente pelo producto de 4 por 5 ou por 20, ha de deixar o producto total de ſer diviſivel por 9; ou (tirando os *noves* de 20) que ſómente por 2 ha de deixar de ſer diviſivel por 9. Logo eſtando o dito producto exacto deve ficar nelle o meſmo numero, que fica no producto dos dous reſtos, depois de ſerem lançados fóra os *noves*, que elle contém.

A prova da Multiplicaçaõ ſe applica facilmente á Diviſaõ. Como o producto do diviſor pelo quociente com o reſto, quando o houver, he igual ao dividendo (n. 74.), naõ he neceſſario mais do que tirar os noves ao diviſor, e ao quociente; multiplicar os dous reſtos; do producto lançar fóra os noves, ſe os tiver; ſomar o reſto com o que ficar depois de tirados os noves ao reſto da diviſaõ; e da ſoma lançar fóra os noves, ſe os tiver; e o reſto ſerá o que ſe deve achar tambem no dividendo, depois de lançados fóra os noves.

Por exemplo: Tendo achado o quociente 812, e o reſto 200, da repartiçaõ de 756984 por 932, tira-

tiraremos os noves ao diviſor 932, e ficará o reſto 5, depois ao quociente 812, e ficará 2. Entaõ multiplicaremos os dous reſtos, e do producto 10 lançando fóra 9, fica 1; e tirando tambem os noves ao reſto da diviſaõ 200, ficaõ 2, que ſomados com o reſto precedente 1 fazem 3; e iſto he o que deve reſtar no dividendo depois de ſe tirarem os noves, eſtando a operaçaõ exacta, como ſe acha com effeito.

Tomando a couſa em rigor, eſta verificaçaõ naõ he infallivel. Porque ſe na multiplicaçaõ, por exemplo, nos enganaſſemos de ſorte, que fizeſſemos qualquer algariſmo do producto maior huma, duas, ou mais unidades, e depois puzeſſemos outras tantas de menos em qualquer outro: como iſto naõ influiria ſobre o reſto que fica depois de lançados fóra os noves, he claro, que hum erro ſemelhante naõ ſerá deſcuberto pela prova. Porém como para iſſo ſaõ neceſſarios dous erros, e dous erros iguais, e contrarios, que mutuamente ſe deſtruaõ, que vem a ſer o meſmo que commetter o erro de 9, ou dos multiplos de 9, he facil de ver que os caſos em que a prova póde faltar, haõ de ſer rariſſimos na pratica.

ʃʃ A prova, que ſe faz por meio dos *noves*, igualmente podia fazer-ſe por meio de qualquer outro numero: mas eſcolheu-ſe o nove, por ſer mais facil de ſe lançar fóra. Como porém temos notado, que os *onzes* ſe pódem tirar de qualquer numero quaſi com a meſma facilidade, e como iſto moſtra huma propriedade notavel da Numeraçaõ actual, que por outra parte póde ſervir de utilidade, ſerá conveniente que a ajuntemos neſte lugar, e he da maneira ſeguinte.

Se o primeiro algariſmo de qualquer numero, o terceiro, e os mais pelas caſas impares da direita para a eſquerda ſe ajuntarem, lançando fóra

da

da ſoma o numero onze quando nella vier, e notando o reſto final que reſultar; e ſe depois ſe ajuntar do meſmo modo o ſegundo algariſmo, o quarto, e os mais pelas caſas pares; e ſe o reſto ſe tirar do primeiro (ao qual ſendo neceſſario ſe ajuntará para iſſo o numero onze), o que ficar ſerá o reſto que ſobra do numero propoſto, lançados fóra todos os *onzes*.

Aſſim, por exemplo, para tirarmos os *onzes* do numero 7543945, diremos: 5 e 9 ſaõ 14, menos onze ſaõ 3, e 4 ſaõ 7, e 7 ſaõ 14, menos onze, ficaõ 3; depois, 4 e 3 ſaõ 7, e 5 ſaõ 12, menos onze, fica 1; e tirando eſte ſegundo reſto 1 do primeiro 3, ficaõ 2, que he o reſto que ſobra, tirados os onzes do numero 7543945. E para os tirarmos do numero 527381, diremos: 1 e 3 ſaõ 4, e 2 ſaõ 6, primeiro reſto; depois 8 e 7 ſaõ 15, menos onze, ſaõ 4, e 5 ſaõ 9, ſegundo reſto; e porque eſte naõ póde diminuir-ſe do primeiro 6, ajuntar-lhe-hemos 11, e ſerá 17, do qual tirando 9, ficaõ 8; e eſte he o reſto que fica, tirados os *onzes* do numero 527381.

Eſta notavel propriedade, com igual raſaõ póde ſervir de prova ás quatro operaçoẽs da Arithmetica; prova, que ſómente faltará, quando o erro cometido na operaçaõ for onze, ou algum dos multiplos de onze. E ſe eſta prova ſe ajuntaſſe com a dos noves, muito mais provavel ſeria o juizo que ſe fizeſſe da certeza da operaçaõ, pois que entaõ ſómente eſcaparia o erro de 99, ou dos multiplos de 99. ¶¶

Uſo da Diviſaõ.

76 A Diviſaõ ſerve naõ ſómente para achar quantas vezes hum numero contém outro, mas tambem para partir qualquer numero em

em partes iguais. Tomar a ametade, a terça, quarta, quinta, vigesima, trigesima parte &c. de hum numero, he o mesmo que dividillo por 2, 3, 4, 5, 20, 30 &c., ou partillo em 2, 3, 4, 5, 20, 30 partes iguais &c., para tomar huma dellas.

A Divisaõ serve tambem para converter as unidades de qualquer especie em outras de especie superior; como, por exemplo, para reduzir hum certo numero de *dinheiros* a *soldos*, e estes a *libras*. Para reduzir 5864 *dinheiros* a *soldos*, notaremos que como saõ necessarios 12 *dinheiros* para fazer hum *soldo*, quantas vezes houver 12^d em 5864^d, tantos *soldos* haverá na dita quantia. He necessario pois dividir 5864 por 12, e acharemos no quociente 488^s, e 8^d de resto. Para reduzir a *libras* os 488^s, dividiremos 488 por 20, porque saõ necessarios 20^s para fazer 1 *libra*, e teremos no quociente 24^{lb}, e de resto 8^s; e assim a quantia proposta será reduzida a 24 *libras*, 8 *soldos*, e 8 *dinheiros*.

Por occasiaõ desta repartiçaõ por 20, notaremos que havendo de dividir qualquer numero por outro que acaba em cifras, podemos abbreviar a operaçaõ, separando no dividendo da parte direita tantas letras quantas saõ as cifras do divisor, e dividindo as que ficarem á esquerda pelas letras significativas do mesmo divisor; se houver algum resto, á direita delle se ajuntaráõ as letras separadas no dividendo, para ter o resto total da divisaõ; e naõ havendo resto, as mesmas letras separadas seraõ o unico resto da operaçaõ.

Por exemplo: havendo de dividir 5834 por 20, separaremos a ultima letra do dividendo 4, e repartiremos por 2 a parte que fica 583. Feita a operaçaõ, teremos o quociente 291, e o resto 1, ao qual ajuntaremos a letra separada 4, e será o

resto

resto total 14, de sorte que o quociente completo será 291 $\frac{14}{20}$.

Esta abbreviaçaõ póde applicar-se á reducçaõ da carga de hum navio a *tonelladas*. Sabendo v. gr. que a carga he de 2584954 *libras*, para a reduzir em *tonelladas*, isto he, para a dividir por 2000, deveremos separar as tres ultimas letras á direita, e tomar a ametade das que ficarem; e assim teremos 1292 *tonelladas*, e 954 *libras*.

O mesmo se applicará a muitos outros casos, conforme a natureza da questaõ o permittir.

DOS QUEBRADOS.

77 DAmos na Arithmetica o nome de *Quebrados*, ou *Fracçoẽs*, aos numeros, pelos quais se exprimem as quantidades menores que a unidade.

78 Para se formar huma idéa clara delles, he necessario conceber a mesma quantidade, que se tem escolhido para unidade, como composta de outras unidades mais pequenas; assim como se concebe, por exemplo, a *libra* composta de 20 partes, ou unidades, que se chamaõ *soldos*.

Huma, ou muitas destas partes, nas quais se divide a unidade, ou das quais se entende composta, formaõ o que se chama *quebrado*, ou *fracçaõ* da unidade. E o mesmo nome se dá aos numeros, com que ellas se representaõ.

79 Ha duas differenças na expressaõ dos quebrados, e ambas ellas recebidas na pratica.

A primeira consiste em representar as partes da unidade á maneira dos numeros inteiros, tomando-as como unidades de outra especie, e dandolhes hum nome particular.

Assim, para mostrar *sete* partes, das quais entraõ

traõ vinte em huma *libra*, damos primeiramente ás ditas partes o nome de *soldos*, e prescindindo da *libra*, ou da unidade principal, as declaramos como unidades absolutas com a letra 7, á qual ajuntamos a letra inicial das unidades que significa, deste modo 7^s; expressaõ, que em si mesma he inteira e absoluta, mas a respeito da *libra* he huma fracçaõ.

Esta differença de quebrados tem lugar nos numeros complexos, dos quais adiante falaremos.

80 Como porém naõ he possivel dar nomes em particular a todas as divisoẽs que se pódem fazer da unidade, faz-se necessaria a segunda differença de quebrados, em cuja expressaõ se usa de dous numeros, o primeiro dos quais se assenta em sima de huma risca, e mostra as partes da unidade de que se compoem a quantidade, que queremos significar; e o segundo debaixo da risca, para denotar quantas dessas partes formaõ a unidade. Assim, para pôr em figura as *sete* partes da *libra*, de que ha pouco fallamos, deveremos assentar os dous numeros desta maneira $\frac{7}{20}$.

81 Para dizer o valor de hum quebrado, primeiramente se lê o numero que está em sima da risca, o qual se chama *Numerador*, e depois o que está por baixo, o qual se chama *Denominador*; e a este se ajunta a addiçaõ *avos* (*). Assim para declarar o valor de $\frac{7}{20}$, diremos *sete vinte-avos*, e de $\frac{11}{100}$,

(*) Esta addiçaõ *avos* naõ significa cousa alguma per si mesma. He a terminaçaõ de *oitavos*, até onde os nossos Arithmeticos antigos davaõ nome *ordinal* proprio ao denominador. Dahi por diante, ou por arrecearem usar dos *ordinais* da lingoa Latina, ou para maior facilidade na leitura dos quebrados, usáraõ dos *cardiais*, ajuntando-lhes a terminaçaõ do mesmo nome *oitavos*, para os fazerem ser equivalentes aos *ordinais*. Deste modo *onze-avos* tem o lugar de hum nome que se formaria de *onze*, assim como *oitavos* se forma de *oito*, que seria *onzavos*. Assim dous *onze-avos* he como se dissessemos dous *onzavos*, tres *cem-avos* o mesmo que tres *centavos* &c.

diremos *onze cem-avos* &c.; advertindo, que *onze cem-avos* quer dizer *onze* partes tais, que dellas sejaõ necessarias *cem* para formar a unidade.

Sendo o denominador de 2 até 8 naõ se usa da addiçaõ *avos*, mas dos nomes, *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *sextos*, *setimos*, e *oitavos*; ou *ametades*, *terças*, *quartas* partes &c. Tambem de 9 para sima se usa hoje dos nomes ordinais da lingua Latina, como $\frac{3}{1000}$ *tres mil-avos*, ou *tres millesimas* partes da unidade.

82 Mostra pois o numerador de quantas partes da unidade se compoem a quantidade, que se declara pelo quebrado; e o denominador determina a grandeza e valor dessas partes, mostrando quantas dellas formaõ a unidade. Por isso se chama denominador, porque dá o nome ás partes da fracçaõ, e faz v. gr. nestes dous quebrados $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, que as partes do primeiro sejaõ *quintas*, e as do segundo *setimas*.

83 Tanto o numerador como o denominador se chamaõ tambem *termos* do quebrado, que por elles se representa. E em dous quebrados, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores chamaõ-se termos *homologos*; e o numerador de hum com o denominador do outro, termos *heterogeneos*.

Dos numeros inteiros considerados em fórma de quebrados.

84 AS operaçoẽs, que se fazem sobre os quebrados, conduzem muitas vezes a resultados fraccionarios, cujo numerador se acha igual, ou maior que o denominador, como v. gr. $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ &c.

As

As expressoẽs desta sorte naõ saõ fracçoẽs propriamente tais, mas numeros inteiros, ou inteiros com quebrados, representados em fórma de fracçoẽs.

85 Para extrahir os inteiros, que se achaõ incluidos nellas, he necessario dividir o numerador pelo denominador. O quociente mostrará os inteiros, e o resto da divisaõ, se o houver, será o numerador de huma fracçaõ propriamente tal, que se ha de ajuntar aos ditos inteiros, ficando o mesmo denominador. Assim $\frac{27}{5}$ se reduzem a $5\ \frac{2}{5}$, isto he, sinco unidades, e dous quintos da unidade.

A rasaõ he, porque na expressaõ $\frac{27}{5}$ o denominador 5 mostra que a unidade se tem dividido em 5 partes: logo quantas vezes houver 5 em 27, tantas unidades inteiras haverá no valor da fracçaõ $\frac{27}{5}$.

86 As multiplicaçoẽs, e divisoẽs dos numeros inteiros acompanhados de fracçoẽs requerem, ao menos para maior facilidade das operaçoẽs, que os ditos inteiros se reduzaõ á fórma de quebrados. Isto se faz, multiplicando o inteiro pelo denominador da fracçaõ, á qual se quer reduzir, e o producto será o numerador.

Por exemplo: Querendo reduzir o numero 8 a huma fracçaõ, que tenha 5 por denominador, multiplicaremos 8 por 5, e o producto 40 será o numerador; donde teremos $\frac{40}{5}$. A rasaõ he, porque havendo de reduzir o numero 8 a *quintos*, cada unidade se considéra composta de 5 partes: logo 8 unidades se converteráõ em 40 das ditas partes.

Do

Do meſmo modo o numero miſto $7\frac{4}{9}$ convertido todo em *nove-avos* dará $\frac{67}{9}$, porque o inteiro 7 vale $\frac{63}{9}$, e ajuntando os $\frac{4}{9}$, teremos $\frac{67}{9}$.

Quando ſe ha de reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, e naõ importa que tenha certo denominador, o mais ſimples de tudo he tomar para iſſo a unidade, a qual ſe ſubentende ſempre como denominador natural de todos os numeros inteiros. Porque aſſim como por $\frac{8}{3}$ entendemos oito *terços*, e por $\frac{8}{2}$ oito *meios*, aſſim por $\frac{8}{1}$ entenderemos oito *unidades*.

Das mudanças, que ſe pódem fazer nos termos de hum quebrado, ſem lhe alterar o valor.

87 HE manifeſto, que em quantas mais partes ſe conceber a unidade dividida, tantas mais ſeraõ neceſſarias para repreſentar huma meſma quantidade.

88 Donde ſe vê, que póde fazer-ſe o denominador de huma fracçaõ duplo, triplo, quadruplo &c., ſem lhe mudar o valor, com tanto que ao meſmo tempo ſe faça tambem o ſeu numerador duplo, triplo, quadruplo &c.

Logo pòde dizer-ſe em geral: *Que hum quebrado naõ muda de valor, quando ſe multiplicaõ ambos os ſeus termos por hum meſmo numero.*

Aſſim $\frac{3}{4}$ he o meſmo que $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ &c.; e $\frac{1}{2}$ a meſma couſa que $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ &c.

89 Por

89 Por huma rasaõ semelhante se entende, que quanto menos partes se suppuzerem na unidade, tanto menos seraõ precisas para formar huma mesma quantidade.

Pelo que he manifesto, que sem mudar o valor de hum quebrado podemos fazer o seu denominador 2, 3, 4 &c. vezes menor, com tanto que façamos igualmente o numerador 2, 3, 4 &c. vezes menor.

Donde em geral se póde dizer: *Que hum quebrado naõ muda de valor todas as vezes que ambos os seus termos se dividem por hum mesmo numero.*

Para se ver distintamente a verdade destas duas proposiçoẽs, basta reflectir sobre as noçoẽs que temos dado do numerador, e denominador.

Pelo que devemos notar, que multiplicar ou dividir os termos de hum quebrado por hum mesmo numero, he cousa muito diversa de multiplicar ou dividir o mesmo quebrado; porque as ditas operaçoẽs se fazem sem elle mudar de valor, como temos declarado.

Os dous principios, que acabamos de expôr, servem de base ás duas Reducçoẽs seguintes, que saõ de grande uso na pratica dos quebrados.

Reducçaõ dos Quebrados ao mesmo denominador.

90 1º PAra reduzir duas fracçoẽs ao mesmo denominador, multiplicar-se-haõ os dous termos da primeira pelo denominador da segunda, e os dous termos desta pelo denominador daquella.

Supponhamos, por exemplo, que temos para reduzir ao mesmo denominador os dous quebrados $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Pri-

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira fracçaõ 2, e 3 pelo denominador da segunda 4, e teremos $\frac{8}{12}$ que (n. 88.) he do mesmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da segunda 3 e 4 pelo denominador da primeira 3, e resultará $\frac{9}{12}$ do mesmo valor que $\frac{3}{4}$. E assim as fracçoẽs $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ seraõ mudadas em $\frac{8}{12}$, e $\frac{9}{12}$ que tem respectivamente o mesmo valor, e se achaõ reduzidas ao mesmo denominador.

He facil de ver, que por este methodo teraõ sempre as novas fracçoẽs o mesmo denominador, porque em cada huma das operaçoẽs se fórma este da multiplicaçaõ dos denominadores primitivos.

91 2º Sendo mais de duas as fracçoẽs, reduzir-se-haõ ao mesmo denominador, multiplicando os dous termos de cada huma pelo producto dos denominadores de todas as outras.

Tendo v. gr. para reduzir ao mesmo denominador estas quatro fracçoẽs $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$;

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira 2 e 3 pelo producto dos denominadores das outras 4, 5, e 7; producto, que acharemos multiplicando primeiro 4 por 5, e o seu producto 20 por 7, que dá 140. Assim multiplicando 2 e 3 por 140, teremos os productos 280, e 420, dos quais resultará a fracçaõ $\frac{280}{420}$, que (n. 88.) he do mesmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da segunda 3 e 4 pelo producto dos denomina-

dores

dores das outras 3, 5, e 7, isto he, por 105, e teremos a fracçaõ $\frac{315}{420}$ igual a $\frac{3}{4}$. Passando á terceira multiplicaremos os seus termos 4 e 5 por 84, producto dos tres denominadores das outras 3, 4, e 7, e teremos a fracçaõ $\frac{336}{420}$ em lugar de $\frac{4}{5}$. E na quarta em fim multiplicaremos ambos os seus termos 5 e 7 por 60, que he o producto dos denominadores 3, 4, 5 das tres primeiras, e teremos $\frac{300}{420}$ em lugar de $\frac{5}{7}$.

Deste modo temos convertido as quatro fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{7}$ nestas quatro $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, e $\frac{300}{420}$, menos simples na verdade, mas do mesmo valor que ellas, e pela rasaõ de serem reduzidas ao mesmo denominador, mais susceptiveis das operaçoẽs da Addiçaõ, e Subtracçaõ, como adiante mostraremos.

He manifesto pela mesma operaçaõ da reducçaõ, que as fracçoẽs que resultaõ saõ respectivamente iguaes ás fracçoẽs dadas, porque em cada huma destas se multiplicaõ ambos os termos por hum mesmo numero (n. 88.). E como o denominador de cada huma das novas fracçoẽs he formado do producto de todos os denominadores primitivos, naõ pódem deixar de ficarem todas com o mesmo commum denominador.

55 Como pelo methodo antecedente se reduzem sim os quebrados ao mesmo commum denominador, mas nem sempre ao mais simples que elles pódem ter, pela qual rasaõ seria necessaria outra reducçaõ, e essa muito trabalhosa, para os trazer á maior simplicidade, que permitte a condiçaõ de ficarem com a mesma denominaçaõ; será muito conveniente procurar, que logo se reduzaõ

zaõ ao mais pequeno denominador commum, que he poſſivel. Iſto ſe conſeguirá, praticando da maneira ſeguinte.

Se os denominadores dos quebrados que ſe haõ de reduzir á meſma denominaçaõ, cada hum dos quais ſe ſuppoem abbreviado aos ſeus menores termos, naõ tiverem diviſor commum, a reducçaõ ſe praticará ſimpleſmente da maneira aſſima declarada; e o denominador commum, que ſe achar será o menor, que os ditos quebrados pódem ter.

Porém ſe os denominadores tiverem diviſor commum, dividir-ſe-haõ todos por elle, ou pelo maior delles, quando forem muitos; e os quebrados ſe converteráõ em outros tantos, que ſeraõ de differente valor, mas depois ſe reſtituiráõ ao meſmo. Eſtes ſe reduziráõ á meſma denominaçaõ, conforme a regra aſſima dada; e o denominador commum delles ſe multiplicará pelo meſmo diviſor, pelo qual foraõ divididos os denominadores primitivos. Deſte modo ſe tornaráõ a fazer os quebrados reduzidos iguais aos quebrados da queſtaõ, e ficaráõ álem diſſo com o menor denominador commum que he poſſivel.

Quando ſómente alguns dos denominadores tiverem diviſor commum, por elle ſe dividiráõ os ditos denominadores, e ſe multiplicaráõ tambem os numeradores dos outros quebrados, cujos denominadores por elle ſe naõ pódem dividir, e aſſim ſe formaráõ os novos quebrados ſubſidiarios, que ſe haõ de reduzir ao meſmo denominador, o qual ſe multiplicará pelo dito diviſor, para ſe reſtituirem ao valor dos quebrados propoſtos. Do meſmo modo, quando todos os denominadores primitivos tem diviſor commum, e feita a diviſaõ reſultaõ quebrados, nos quais alguns donominadores ainda tem diviſor entre ſi, ſobre elles ſe praticará o meſmo que no caſo antecedente, e assim por diante. E no fim o denominador commum dos quebrados reduzidos se multiplicará pelo producto de todos os divisores, que successivamente se empregárao. Os exemplos seguintes mostrarão claramente a praxe destas regras.

Exemplo I. Querendo reduzir á mesma denominação os dous quebrados $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{27}$; como os denominadores 18 e 27 tem o maior divisor commum 9, partillos-hemos ambos por 9, e resultaráõ os dous quebrados $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$; os quais sendo reduzidos ao mesmo denominador, daráõ $\frac{15}{6}$, $\frac{14}{6}$; e multiplicando o denominador commum delles 6 pelo divisor 9, se mudaráõ em $\frac{15}{54}$, $\frac{14}{54}$; quebrados iguais aos da questaõ, e os mais simples que saõ possiveis. Se a reducçaõ se fizesse ao modo ordinario, em lugar delles achariamos $\frac{135}{486}$, $\frac{126}{486}$.

Exemplo II. Havendo de reduzir ao mesmo denominador os quebrados $\frac{1}{26}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{39}$; como os denominadores 26, 13, 39, tem o divisor commum 13, por elle os dividiremos todos, e resultaráõ os quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$, sobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita esta, acharemos que se reduzem a $\frac{3}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{8}{6}$; e multiplicando o denominador commum 6 pelo divisor 13, ficaráõ os quebrados propostos reduzidos a $\frac{3}{78}$, $\frac{12}{78}$, $\frac{8}{78}$, com o menor denominador commum que he possivel. Se praticassemos a regra ordinaria, achariamos $\frac{507}{13182}$, $\frac{2028}{13182}$, $\frac{1352}{13182}$.

Exemplo III. Se tivermos de reduzir á mesma denominaçaõ os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{30}$; como os tres denominadores 7, 15, 30, naõ tem divisor commum, mas taõ sómente os dous ultimos, estes se dividiráõ pelo seu maior divisor 15, e pelo mesmo se multiplicará o numerador 2 do primeiro quebrado, cujo denominador naõ podemos dividir. Assim resultaráõ outros tres quebrados $\frac{30}{7}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{2}$, sobre os quais executaremos a reducçaõ. Feita a qual, acharemos que se reduzem a $\frac{60}{14}$, $\frac{56}{14}$, $\frac{7}{14}$; e multiplicando o denominador 14 pelo divisor 15, ficaráõ os quebrados da questaõ reduzidos a $\frac{60}{210}$, $\frac{56}{210}$, $\frac{7}{210}$. Se obrassemos do modo ordinario achariamos $\frac{900}{3150}$, $\frac{840}{3150}$, $\frac{105}{3150}$.

Exemplo IV. Pede-se, que reduzamos ao mesmo denominador os quebrados $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{55}$, $\frac{5}{77}$, $\frac{1}{154}$. Primeiramente, como todos os denominadores saõ divisiveis por 11, feita a divisaõ mudaremos os quebrados em $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{14}$. Depois, como nestes ultimos os denominadores 7, e 14, ainda tem o divisor commum 7, por elle os dividiremos, e pelo mesmo multiplicaremos os numeradores 3, e 7, cujos denominadores se naõ poderaõ dividir; e assim resultaráõ novamente os quebrados $\frac{21}{1}$, $\frac{49}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$, sobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita a operaçaõ, acharemos que se reduzem a $\frac{210}{10}$, $\frac{98}{10}$, $\frac{50}{10}$, $\frac{5}{10}$; e multiplicando o denominominador commum 10 por 77, que he o produ-cto dos diviſores 7, e 11, teremos os quebrados da queſtaõ reduzidos reſpectivamente a $\frac{210}{770}$, $\frac{98}{770}$, $\frac{50}{770}$, $\frac{5}{770}$, da fórma mais ſimples que he poſſivel. Se neſte caſo uſaſſemos da regra ordinaria, achariamos $\frac{1956570}{7174090}$, $\frac{913066}{7174090}$, $\frac{465850}{7174090}$, $\frac{46585}{7174090}$, quebrados muito compoſtos, que careceriaõ de huma operaçaõ muito trabalhoſa, para ſe reduzirem á ſimplicidade da primeira fórma, ſendo para iſſo neceſſario procurar primeiro o maior diviſor commum entre o denominador, e os quatro numeradores, como abaixo ſe moſtrará.

Reducçaõ dos Quebrados á expreſſaõ mais ſimples que he poſſivel.

92 Huma fracçaõ he tanto mais ſimples, quanto os ſeus termos ſaõ menores. Muitas vezes he poſſivel reduzir huma fracçaõ dada a menores termos; e iſto ſuccede todas as vezes que o numerador, e denominador ſe podem dividir ambos por hum meſmo numero. Como eſta operaçaõ naõ lhe altéra o valor (n. 89.), he huma ſimplificaçaõ que ſe naõ deve omittir, pois naõ ſómente contribue para a elegancia da expreſſaõ, mas tambem para ſe formar melhor conceito do ſeu valor. Porque ſem embargo de que v. gr. a fracçaõ $\frac{27}{63}$ tem o meſmo valor que $\frac{3}{7}$, por eſta ſegunda com tudo ſe fórma huma idêa mais clara da quantidade que por ambas ellas ſe repreſenta, naõ ſe diſtrahindo a attençaõ com taõ grande numero de partes, como na primeira.

Para ſe fazer pois a reſoluçaõ preſente, ou para *abbreviar quebrados*, eiſaqui o methodo que ſe ha de ſeguir.

93 Primeiramente dividir-ſe-haõ ambos os termos por 2, e eſta operaçaõ ſe continuará em quanto ſe puder fazer ſem reſto. Depois ſe paſſará a dividir por 3, e dahi por 5, 7, 11, 13, 17 &c., iſto he, por todos os numeros *primos*, que ſaõ aquelles que naõ tem diviſor exacto, ſenaõ a ſi meſmos, ou a unidade.

A unica difficuldade que ſe offerece neſte methodo, he ſaber quando ſe póde dividir ſem reſto por 2, 3, 5, &c. para naõ fazer de balde a diviſaõ. Para iſſo ajudaráõ muito os principios ſeguintes.

94 Todo o numero, cuja ultima letra a direita ſignifica numero par, he diviſivel por 2.

Todo o numero, cujos algariſmos ſomados fizerem 3, ou hum numero multiplo de 3, he diviſivel por 3. Aſſim v. gr. o numero 54231 póde dividir-ſe exactamente por 3, porque a ſoma dos ſeus algariſmos 5, 4, 2, 3, 1, faz 15, que he multiplo de 3, pois contem 5 vezes 3 exactamente.

Do meſmo modo, ſe a ſoma dos algariſmos fizer 9, ou hum multiplo de 9, ſerá o numero diviſivel por 9.

Todo o numero que acabar em 0, ou em 5, ſerá diviſivel exactamente por 5.

95 E todo o numero, cujos algariſmos das caſas impares da direita para a eſquerda fizerem huma ſoma igual á dos algariſmos das caſas pares; ou tambem deſigual, com tanto que a differença das duas ſomas ſeja 11, ou hum multiplo de 11, ſerá diviſivel por 11. Aſſim ſerá diviſivel por 11 o numero 89452, porque as letras das caſas impares 2, 4, 8, fazem a meſma ſoma que as letras das caſas pares 5, e 9. Do meſmo modo o numero

mero 8452719 ſerá diviſivel por 11, porque as letras das caſas pares 9, 7, 5, 8, fazem a ſoma 29, e as das pares 1, 2, 4, a ſoma 7; ſendo a differença das duas ſomas 22, que he multiplo de 11.

§§

Em quanto ao numero 7, e aos mais *primos*; aindaque ſeria facil achar regras ſemelhantes, como o exame que ellas ſuppoem ſeria mais trabalhoſo que a meſma diviſaõ, melhor he que eſta ſe experimente.

Supponhamos v. gr. que queremos abbreviar o quebrado $\frac{2016}{5796}$. Primeiramente dividiremos ambos os termos por 2, porque ambos elles acabaõ em algariſmo par, e teremos $\frac{1008}{2898}$. Depois tornaremos a dividir por 2, e reſultará $\frac{504}{1449}$. E porque naõ póde mais fazer-ſe a diviſaõ por 2, e pelo que fica dito ſe vê que póde fezer-ſe por 3, dividiremos or 3, e teremos $\frac{168}{483}$. Tornando a dividir por 3, reſultará $\frac{56}{161}$; e porque naõ póde mais caber a diviſaõ por 3, experimentaremos por 7, e como ſuccede ſem reſto, ficará o quebrado propoſto finalmente reduzido a $\frac{8}{23}$.

A raſaõ porque neſta operaçaõ naõ experimentamos a diviſaõ, ſenaõ pelos numeros *primos* 2, 3, 5, 7 &c., he porque depois de exhaurida v. gr. a diviſaõ por 2, he eſcuſado tentar fazella por 4, por quanto ſe eſta pudeſſe fazer-ſe ſem reſto, muito melhor ſe poderia fazer aquella.

95 De todos os meios, que ſe pódem applicar para abbreviar hum quebrado, o mais directo he dividir logo ambos os ſeus termos pelo maior diviſor

ſor commum, que elles pódem ter. Eiſaqui a regra para o achar.

Divida-ſe o termo maior pelo menor. Se eſta diviſaõ ſe fizer ſem reſto, o termo menor ſerá o maior diviſor commum de ambos elles. Ficando porém algum reſto, por elle ſe dividirá o termo menor, que ſervio de diviſor na operaçaõ antecedente. Entaõ, ſe naõ houver reſto, o reſto precedente que ſervio de diviſor ſerà o maior diviſor que ſe buſca; e ſe houver reſto, por elle ſe dividirá o que foi diviſor na operaçaõ antecedente; e aſſim por diante, até chegar a huma diviſaõ exacta; e o diviſor della ſerá o que ſe buſca. Se o diviſor da ultima operaçaõ for a unidade, he ſinal de que a fracçaõ naõ póde reduzir-ſe a menores termos.

Supponhamos v. gr. que temos para abbreviar o quebrado $\frac{3760}{9024}$. Primeiramente buſcaremos o maior diviſor commum de ambos os termos, dividindo 9024 por 3760, donde virá o quociente 2, e o reſto 1504. Por eſte reſto dividiremos 3760, e teremos o quociente 2, e o reſto 752; pelo qual dividiremos o reſto precedente 1504. E como eſta diviſaõ ſe faz exactamente, ſerá o diviſor della 752 o maior diviſor commum dos termos do quebrado propoſto; o qual por conſeguinte, feita a diviſaõ, ſe reduzirá a $\frac{5}{12}$.

E com effeito, pela operaçaõ achamos que 752 he diviſor exacto de 1504; logo tambem o he de 3760, que ſe compoem de 2 vezes 1504, e 1 vez 752; e por conſeguinte o deve ſer igualmente de 9024, que ſe compoem de 2 vezes 3760, e 1 vez 1504.

Além diſto he facil de ver, que 752 he o maior diviſor commum, que podem ter os numeros 9024

e

e 3760. Porque naõ póde haver diviſor commum entre 9024 e 3760, que o naõ ſeja ao meſmo tempo entre 3760 e 1504; nem tambem entre eſtes dous, ſem que o ſeja igualmente entre 1504 e 752; porém he evidente, que entre eſtes dous ultimos numeros naõ póde haver maior diviſor commum do que 752: Logo &c.

§§ Se forem mais que dous os numeros, entre os quais devemos achar o maior diviſor commum, uſaremos do methodo ſeguinte.

Buſque-ſe o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, entre o ſegundo e o terceiro, entre eſte e o quarto &c., de qualquer ſorte que os numeros eſtiverem diſpoſtos. Pratique-ſe o meſmo ſobre os diviſores achados, e aſſim por diante, até chegar a hum ſó diviſor, o qual ſerà finalmente o maior diviſor commum dos numeros propoſtos. Se em alguma parte da operaçaõ ſahirem dous ou mais diviſores iguais, hum delles ſómente ſe tomará para a operaçaõ ſeguinte; e ſe todos alguma vez ſahirem iguais, ſerá eſcuſado continuar a operaçaõ, porque ella virá a acabar em hum diviſor igual a elles, ſe ſe levar ao fim conforme a regra, e por conſeguinte qualquer delles ſerá o maior diviſor que intentamos achar. Encontrando-ſe na operaçaõ dous numeros, quaiſquer que ſejaõ, os quais naõ tenhaõ diviſor commum ſenaõ a unidade, tambem os numeros propoſtos o naõ teraõ.

Exemplo. Pede-ſe o diviſor maior commum dos numeros . . . . 7174090 . . . . 1956570 . . . . 913066 . . . . 465850 . . . . 46585. Primeiramente buſcaremos o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, entre o ſegundo e o terceiro &c., e acharemos os numeros . . . . 652190 . . . . 130438 . . . . 18634 . . . . 46585; depois ſobre eſtes faremos a meſma operaçaõ, e ſahiráõ

os

os diviſores . . . . 130438 . . . . 18634 . . . . 9317; ſobre eſtes praticaremos do meſmo modo, e ſahiráõ os diviſores . . . . 18634 . . . . 9317; e finalmente achando o maior diviſor commum deſtes dous ultimos, que he 9317, eſte ſerá o maior diviſor commum dos ſinco numeros propoſtos. 55

Outro modo de conſiderar os quebrados, e conſequencias que delle reſultaõ.

96 A Idêa, que até agora temos dado dos quebrados, he que o denominador moſtra de quantas partes ſe ſuppoem compoſta a unidade; e o numerador, de quantas deſſas partes conſta a quantidade, que pelo quebrado ſe repreſenta.

Agora moſtraremos, como ſe podem tomar em outro ponto de viſta. Póde o numerador conſiderar-ſe, como repreſentando huma certa quantidade, que ſe ha de repartir em tantas partes quantas ſaõ as unidades do denominador, para ſe tomar huma dellas.

Aſſim v. gr no quebrado $\frac{4}{5}$ póde conſiderar-ſe o numerador 4, como repreſentando *quatro* couſas v. gr. *libras*, que ſe haõ de repartir em *ſinco* partes, para ſe ſignificar huma dellas. Porque he evidente, que tanto faz dividir 4 *libras* em 5 partes para tomar huma dellas, como dividir a *libra* em 5 partes para tomar 4.

97 Pelo que póde conſiderar-ſe o numerador de hum quebrado como hum *dividendo*, e o denominador como hum *diviſor*. E por iſto ſe vê o que querem dizer os reſtos da diviſaõ reduzidos ao modo fraccionario, que aſſima lhes démos (n. 60.).

98

98 Donde ſe ſegue, que hum numero inteiro póde ſempre reduzir-ſe a huma expreſſaõ fraccionaria, fazendo delle o numerador, e dando-lhe a unidade por denominador. Aſſim 3 e $\frac{3}{1}$, 5 e $\frac{5}{1}$ repreſentaõ huma meſma couſa.

99 Segue-ſe tambem, que para converter em *dizima* qualquer quebrado, naõ he neceſſario mais do que conſiderar o numerador como hum reſto de diviſaõ, em que o denominador tenha ſervido de diviſor, e obrar como aſſima fica declarado (pag. 56.), tendo a advertencia de pôr huma cifra primeiro na caſa das unidades. Deſte modo ſe achará, que $\frac{3}{5}$ vale o,6, que $\frac{5}{9}$ vale o,5555 &c., que $\frac{1}{25}$ vale o,o4, e aſſim dos mais.

Deſta maneira ſe pódem tambem reduzir á *dizima* os numeros *complexos*.

Se, por exemplo, quizermos reduzir $3^T\ 5^P\ 8^P\ 7^l$ a partes decimais da *toeſa*, de modo que ſe naõ deſpreze ametade de huma *linha*, obſervaremos que a *toeſa* contém 864 *linhas*, e por conſeguinte 1728 *meias-linhas*. Peloque, para naõ deſprezar ametade de huma *linha*, será neceſſario que a *dizima* paſſe da caſa das milleſimas, ou que chegue até as decimas-milleſimas.

Iſto ſuppoſto, converteremos $5^P\ 8^P\ 7^l$ tudo em *linhas* (n. 57.), e acharemos 823^l, ou $\frac{823}{864}$ de huma *toeſa*. E reduzindo eſte quebrado á *dizima*, como aſſima diſſemos, reſultará o,9525, e por conſeguinte o numero propoſto ficará reduzido a 3^T,9525.

ſſ As fracçoẽs particulares da *dizima* pódem reduzir-ſe ás ordinarias de dous modos diverſos.

Porque em primeiro lugar, ſe as quizermos conſervar na fórma decimal, reduzir-ſe-haõ à maneira

neira dos numeros inteiros, cuja natureza imitaõ (n. 86. 98.). Se v. gr. quizermos pôr em figura de quebrado esta expressaõ 0,23, bastará escrever $\frac{0,23}{1}$; e se a quizermos reduzir ao denominador 7, praticando como nos inteiros, teremos $\frac{1,61}{7}$ (n. 86.).

Querendo porém tirar-lhes a fórma decimal, as letras da *dizima* serviráõ de numerador, e para denominador se tomará a unidade com tantas cifras adiante, quantas eraõ as casas da dizima. Assim 0,23 he o mesmo que $\frac{23}{100}$; 0,0071 o mesmo que $\frac{71}{10000}$ &c.

Póde álem disto reduzir-se facilmente a hum quebrado ordinario a mesma *dizima* continuada ao infinito, com tanto que depois de certos intervallos tornem a vir as mesmas letras, e pela mesma ordem; *dizima*, que chamamos *periodica*. Deste modo he a expressaõ 0,321321321 &c., na qual se suppoem o periodo dos tres algarismos 321 repetido infinitamente.

E com effeito, se os periodos começarem logo desde a virgula, tomar-se-ha hum delles para numerador, e o denominador será hum numero composto de tantos 9, quantas forem as casas de cada periodo. Assim acharemos que 0,321321321 &c. vale exactamente $\frac{321}{999}$; que 0,013201320132 &c. vale $\frac{132}{9999}$; e que 0,777777 &c. fracçaõ igualmente periodica, cujos periodos constaõ de huma só letra, se reduz a $\frac{7}{9}$.

Porém, se os periodos naõ começarem logo des-

desde a virgula, será sempre o denominador composto de tantos 9 como saõ as casas de cada periodo, mas esses seguidos de tantas cifras quantas saõ as casas decimais antes do primeiro periodo. E para acharmos o numerador, multiplicaremos as letras antecedentes ao primeiro periodo pelo denominador, no qual naõ attenderemos ás cifras que se lhe ajuntáraõ; e ao producto ajuntaremos hum dos periodos. Para reduzirmos v. gr. a hum quebrado ordinario esta expressaõ 1,357121212 &c., como cada periodo consta de duas letras, e antes do primeiro se achaõ tres casas de *dizima*, será o denominador 99000. E multiplicando os algarismos 1357, que precedem ao primeiro periodo, pelo denominador 99, cortadas as cifras; teremos o producto 134343, ao qual ajuntando o periodo 12, será o numerador 134355; e por conseguinte o quebrado que se busca $\frac{134355}{99000}$. Do mesmo modo acharemos, que 0,00473473473 &c. se reduz a $\frac{463}{99900}$; que 0,633333 &c. vale $\frac{57}{90}$; assim dos mais.

Das operaçoẽs Arithmeticas sobre os Quebrados.

100 O Calculo dos quebrados se pratica por meio das mesmas quatro operaçoẽs, que já temos mostrado nos numeros inteiros. As duas primeiras de *Somar* e *Diminuir* requerem pela maior parte huma operaçaõ preparatoria, as outras duas naõ carecem de preparaçaõ alguma

De:

De Somar Quebrados.

101 SE os quebrados tiverem a mesma denominação, para saber a sua soma naõ he necessario mais doque somar os numeradores, e dar á soma delles o mesmo denominador.

Por exemplo: Havendo de somar os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, como todos saõ da mesma denominação, ajuntaremos os numeradores 2, 3, 5, e a soma 10 será o numerador, que com o mesmo denominador 7 dará a soma total que se busca $\frac{10}{7}$, a qual se reduz a $1\frac{3}{7}$ (n. 85.).

102 Se os quebrados propostos forem de differente denominação, primeiramente se reduziráõ ao mesmo denominador como assima mostrámos (n. 90. 91.); e depois se somaráõ como no primeiro caso.

Tendo de somar, por exemplo, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, transformaremos primeiro os ditos quebrados em $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$; depois buscaremos a sua soma, que he $\frac{133}{60}$, ou $2\frac{13}{60}$ (n. 85.).

De Diminuir Quebrados.

103 SEndo ambos os quebrados da mesma denominação, diminuir-se-ha o numerador de hum do numerador do outro, e ao resto se dará o mesmo denominador.

Assim, para diminuirmos $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, tiraremos o numerador 5 do numerador 8, e ao resto 3 da-teremos o mesmo denominador 9; donde será o resto que buscamos $\frac{3}{9}$, que se reduz a $\frac{1}{3}$ (n. 93.).

104 Se de $9\frac{5}{8}$ quizermos tirar $4\frac{7}{8}$, como $\frac{7}{8}$ naõ podem diminuir-se de $\frac{5}{8}$, tomaremos huma unidade do inteiro 9, a qual reduzida a oitavos, e somada com $\frac{5}{8}$ faz $\frac{13}{8}$ (n. 86.). Entaõ, tirando $\frac{7}{8}$ de $\frac{13}{8}$, ficaráõ $\frac{6}{8}$; e tirando 4 de 8 (attendendo-se á unidade já tirada do numero 9) ficaraõ 4. E assim será o resto total $4\frac{6}{8}$, ou $4\frac{3}{4}$ (n. 93.).

105 Sendo os quebrados de differente denominaçaõ, primeiro se reduziráõ ao mesmo denominador (n. 90.); e feita esta preparaçaõ, se obrará como no primeiro caso.

Assim, para diminuirmos $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, converteremos estes quebrados em $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$; e feita a diminuiçaõ, resultará o resto $\frac{1}{12}$.

De Multiplicar Quebrados.

106 A Multiplicaçaõ dos quebrados se executa por meio da regra seguinte: *Multipliquem-se os dous numeradores hum pelo outro, e da mesma sorte os denominadores; o producto dos primeiros será o numerador, e o dos segundos o denominador do producto que se busca.*

Querendo, por exemplo, multiplicar $\frac{4}{5}$ por

$\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$, multiplicaremos o numerador 4 pelo numerador 2, e acharemos 8 para numerador; depois multiplicaremos os denominadores 5, e 3, e acharemos 15 para denominador do producto, o qual por conseguinte será $\frac{8}{15}$.

Para se entender a rasaõ desta regra, he necessario trazer á lembrança, que multiplicar dous numeros he tomar hum delles tantas vezes quantas saõ as unidades do outro. Em virtude desta mesma difiniçaõ, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ vêm a ser o mesmo que tomar $\frac{2}{3}$ de huma vez o quebrado $\frac{4}{5}$, ou tomar 2 vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$. Multiplicando pois 5 por 3, os *quintos* de $\frac{4}{5}$ se mudaõ em 15 *avos*, isto he, em partes *tres vezes* menores; e multiplicando 4 por 2, tomaõ se *duas vezes* essas novas partes: logo toma-se duas vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$; e por conseguinte se multiplica effectivamente $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$.

107 Havendo de multiplicar-se quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro se reduzirá a quebrado, dando-lhe a unidade por denominador, e a operaçaõ entrará na regra geral assima dada.

Por exemplo: Se quizer-mos multiplicar 9 por $\frac{4}{7}$, reduziremos o inteiro 9 á fórma de quebrado $\frac{9}{1}$, e multiplicando $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$ acharemos

o pro-o producto $\frac{36}{7}$, o qual ſe reduz a $5\frac{1}{7}$ (n. 85.).

Donde ſe vê, que para multiplicar quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, a operaçaõ ſe reduz a multiplicar o inteiro pelo numerador do quebrado.

108 Se forem *mixtos* os numeros, que ſe haõ de multiplicar, iſto he, ſe forem compoſtos de inteiro e quebrado, cadahum dos inteiros ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado, e ſe ſomará com elle (n. 86.); e aſſim entraráõ na meſma regra aſſima dada (n. 106.).

Por exemplo: Se tivermos de multiplicar $12\frac{3}{5}$ por $9\frac{3}{4}$, reduziremos primeiro o multiplicando a $\frac{63}{5}$, e o multiplicador a $\frac{39}{4}$; e depois multiplicaremos $\frac{63}{5}$ por $\frac{39}{4}$, e teremos o producto $\frac{2457}{20}$, o qual ſe reduz a $122\frac{17}{30}$ (n. 85.).

§§ Na multiplicaçaõ dos quebrados póde logo attender-ſe a que o producto ſe ache já reduzido aos termos mais ſimples.

Para iſſo he primeiramente neceſſario, que os meſmos quebrados, que ſe haõ de multiplicar, ſe reduzaõ aos menores termos. Depois, deverá advertir-ſe ſe os termos *heterogeneos*, iſto he, o numerador de hum quebrado com o denominador do outro, tem algum diviſor commum, e por elle ſe partiráõ, ou pelo maior delles, quando forem muitos. Os quebrados que deſte modo reſultarem, ſe multiplicaráõ hum pelo outro, e o producto ſerá o meſmo, que o dos quebrados propoſtos, abbreviado aos ſeus menores termos.

Querendo v. gr. multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{5}{7}$, reflectirectiremos que o denominador do primeiro quebrado, e o numerador do ſegundo podem ambos partir-ſe por 5, e ficaráõ reduzidos a 1; e aſſim conheceremos logo, ſem fazer operaçaõ alguma, que o producto he $\frac{3}{7}$.

Outro exemplo. Se houvermos de multiplicar $\frac{18}{13}$ por $\frac{26}{63}$, obſervaremos, que o numerador do primeiro quebrado com o denominador do ſegundo tem ambos o diviſor maior commum 9, ſendo pelo qual divididos ſe reduzem a 2, e 7; e que o denominador do primeiro com o numerador do ſegundo tambem tem o diviſor commum 13, pelo que ſe reduzem a 1, e 2. Deſte modo ſe tornaráõ os quebrados propoſtos em $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{7}$, cujo producto $\frac{4}{7}$ he o que ſe buſca, reduzido á fórma mais ſimples, o qual pela operaçaõ ordinaria ſahiria neſtes termos $\frac{684}{819}$, que dariaõ mais trabalho para ſe reduzirem á ſimplicidade daquelles.

De Repartir Quebrados

109 PAra ſe dividir hum quebrado por outro a regra he deſta maneira: *Mudem-ſe os termos do diviſor, paſſando o numerador para denominador, e o denominador para numerador; multiplique-ſe o dividendo pelo diviſor aſſim preparado; e o producto ſerá o quociente que ſe buſca.*

Querendo v. gr. partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, primeiramente mudaremos os termos do diviſor $\frac{2}{3}$, o qual

qual ficará $\frac{3}{2}$; depois multiplicaremos $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$ (n. 106), e o producto $\frac{12}{10}$, ou $1\frac{1}{5}$ (n. 75. 93.), será o quociente que buscamos.

Para se entender a rasaõ desta regra, deve observar-se que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ he buscar quantas vezes se contém $\frac{2}{3}$ em $\frac{4}{5}$. Isto supposto, he facil de ver que 2 *terços* se devem conter em $\frac{4}{5}$ tres vezes mais doque 2 unidades. He tambem evidente, que $\frac{4}{5}$ contém a unidade $\frac{4}{5}$ de huma vez, e que por conseguinte contém 2 unidades ametade de $\frac{4}{5}$ de huma vez. Logo deve o quebrado $\frac{4}{5}$ dividir-se primeiro por 2, e depois multiplicar-se por 3, ou tomar-se tres vezes a ametade de $\frac{4}{5}$, que vem a ser o mesmo que multiplicar por $\frac{3}{2}$, quebrado inverso do divisor $\frac{2}{3}$.

110 Se houver de partir-se quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro se reduzirá a quebrado, tomando a unidade por denominador, e a divisaõ se praticará conforme a mesma regra.

Tendo v. gr. de partir 12 por $\frac{5}{7}$, a operaçaõ se reduzirá a dividir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, ou (n.

109.) a multiplicar $\frac{12}{1}$ por $\frac{7}{5}$, e o quociente ſerá $\frac{84}{5}$ ou 16 $\frac{4}{5}$. Do meſmo modo, ſe quizermos partir $\frac{3}{4}$ por 5, dividiremos o quebrado por $\frac{5}{1}$, ou multiplicaremos por $\frac{1}{5}$, e ſerá o quociente $\frac{3}{20}$.

Donde ſe vê, que para dividir hum quebrado por hum inteiro, a operaçaõ ſe reduz ſimpleſmente a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado.

111 Quando os inteiros forem acompanhados de quebrados, cadahum ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado (n. 86.), e a operaçaõ ſe fará como nos exemplos antecedentes.

Havendo v. gr. de partir 54 $\frac{3}{5}$ por 12 $\frac{2}{3}$, o dividendo ſe reduzirá a $\frac{273}{5}$, e o diviſor a $\frac{38}{3}$. Depois partir-ſe há $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, ou (n. 109.) multiplicar-ſe-há por $\frac{3}{38}$; e ſerá o quociente $\frac{819}{190}$, ou 4 $\frac{59}{190}$ (n. 85.).

¶ Na diviſaõ dos quebrados, ſerá tambem conveniente ter cuidado de achar logo o quociente, abbreviado aos menores termos poſſiveis.

Iſto ſe conſeguirá: Primeiramente, reduzindo os meſmos quebrados propoſtos aos ſeus menores termos, ſe o naõ eſtiverem; e depois, dividindo os termos *homologos*, iſto he, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores, pelo ſeu maior diviſor commum, quando o tiverem.

Deſte

Deste modo resultaráõ outros dous quebrados; que daráõ o mesmo quociente dos primeiros, e e já reduzido aos termos mais simples.

Havendo v. gr. de partir $\frac{5}{7}$ por $\frac{5}{6}$, advertiremos logo que ambos os numeradores saõ divisiveis por 5, e se reduzem a 1; e por tanto veremos, sem fazer operaçaõ alguma, que o quociente he $\frac{6}{7}$.

Do mesmo modo, se houvessemos de partir $\frac{3}{5}$ por $\frac{4}{5}$, como os denominadores se reduzem a 1, logo conheceriamos sem calculo algum que o quociente he $\frac{3}{4}$.

Outro exemplo. Se nos pedirem o quociente de $\frac{22}{39}$ *avos* partidos por $\frac{11}{13}$, advertiremos que os numeradores se pódem ambos dividir por 11, e se reduzem a 2, e 1; e que os denominadores partidos por 13, se reduzem tambem a 3, e 1. Por conseguinte teremos para repartir $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{1}$, e será o quociente pedido $\frac{2}{3}$, o qual pela regra ordinaria se acharia em termos muito compostos $\frac{286}{429}$. §§

Uso dos Quebrados.

112 PElo que assima dissemos (n. 96.), he facil de ver, como se ha de mostrar o valor de huma fracçaõ por meio das divisoens estabelecidas da unidade da questaõ.

Pergunta-se v. gr. quanto valem $\frac{5}{7}$ de huma ma *libra*. Como $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem o mesmo que $\frac{1}{7}$ de 5 *libras* (n. 96.), reduziremos 5 *libras* a *soldos* (n. 57.), e teremos 100 *soldos*, dividindo estes por 7, sahiráõ no quociente 14^s, e sobraráõ 2^s. Reduzindo tambem estes a *dinheiros*, teremos 24^d, que repartidos por 7 daráõ $3^d \frac{3}{7}$. E deste modo diremos, que $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem 14 *soldos*, 3 *dinheiros*, e $\frac{3}{7}$ de hum *dinheiro*.

Se nos perguntassem quanto valem $\frac{5}{7}$ de 24 *libras*, he visivel que podiamos buscar primeiro o valor de $\frac{5}{7}$ de huma *libra* como acabamos de mostrar, e multiplicallo depois por 24. Porem he mais expedito o multiplicar logo as 24 *libr.* por $\frac{5}{7}$, e sahirá o producto $\frac{120}{7}$ de huma *libra* (n. 107.), ou 17 *libras* e $\frac{1}{7}$ de hũa *libra*. Este ultimo quebrado reduzido a *soldos* e *dinheiros* dará $2^s\ 10^d \frac{2}{7}$; e por conseguinte o valor total de $\frac{5}{7}$ de 24 *libr.* será $17^{lb}\ 2^s\ 10^d \frac{2}{7}$.

113 As fracçoens decimais, como naõ tem denominador, ainda saõ mais faceis de reduzir ás partes da unidade, estabelecidas pelo uso ordinario.

Querendo saber, por exemplo, quanto valem 0,532 de huma *toesa* em partes da divisaõ vulgar da mesma *toesa*; como esta consta de 6 *pés*, multiplitiplicaremos 0,532 por 6, e o producto 3,192 mostrará 3 *pés*, e 0,192 de hum *pé*. Depois, como o *pé* contém 12 *pollegadas*, multiplicaremos 0,192 por 12, e o producto 2,304 dará 2 *pollegadas*, e 0,304 de huma *pollegada*. Finalmente, como a *pollegada* se compoem de 12 *linhas*, multiplicaremos 0,304 por 12, e o producto 3,648 mostrará 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*. Peloque diremos, que o valor total de 0,532 de huma *toesa* he 3 *pés*, 2 *pollegadas*, 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*; e assim se procederá em outros casos semelhantes.

114 A avaliação dos quebrados nos conduz naturalmente a fallar dos *quebrados de quebrados*. Por este nome entendemos huma serie de fracções separadas humas das outras pela particula *de*, como v. gr. $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, &c. Porque qualquer quebrado não sómente póde reportar-se á unidade, ou a hum numero inteiro, como $\frac{3}{4}$ *de huma libra*, $\frac{3}{4}$ *de vinte libras*, mas tambem a qualquer outro quebrado, cujo valor se póde conceber como hum todo, e dividir em qualquer numero de partes, para significar algumas dellas. Assim de $\frac{3}{4}$ podemos mostrar $\frac{2}{3}$; e depois concebendo dous terços de tres quartos como hum todo, podemos dividillo em *seis* partes, e dellas tomar *sinco*, donde resultão $\frac{5}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$.

Estes quebrados successivamente relativos huns aos outros podem converter-se em hum só, que unicamente se reporte á unidade principal, multiplicando todos os numeradores huns pelos outros

tros, e da meſma ſorte os denominadores. Aſſim $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ vale o meſmo que $\frac{6}{12}$, ou $\frac{1}{2}$; e $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ o meſmo que $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

E com effeito he facil de ver que tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ nada mais he que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, ou tomar *duas* vezes a *terça* parte do quebrado $\frac{3}{4}$. Do meſmo modo, tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ vem a ſer o meſmo que tomar $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, porque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ fazem $\frac{6}{12}$; e pelo que temos dito $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ ſe reduzem a $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

Se nos pedirem o valor $\frac{3}{4}$ de $5\frac{3}{8}$, reduziremos o inteiro 5 á denominaçaõ do ſeu quebrado (n.86.), e teremos $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$, que ſe reduzem a $\frac{129}{32}$, ou $4\frac{1}{32}$.

115 Quando huma fracçaõ involve termos algum tanto conſideraveis, e naõ póde abbreviarſe pelo methodo aſſima dado (n. 95.), ſe a natureza da queſtaõ permittir que nos contentemos com hum valor approximado, mas reduzido a termos mais ſimples, poderemos uſar do methodo ſeguinte, pelo qual acharemos alternadamente valores ora maiores, ora menores, mas cada vez mais convergentes para o verdadeiro, até cahirmos finalmente na meſma fracçaõ propoſta.

Tome-

Tomemos por exemplo a fracçaõ $\frac{100000000}{314159265}$, a qual, como se mostrará na Geometria, representa proximamente a *rasaõ* entre o *diametro*, e a *circunferencia* do circulo, e supponhamos que a queremos transformar em outras fracçoẽs menos exactas na verdade, mas reduzidas a termos mais simples.

Primeiramente dividiremos ambos os termos da dita fracçaõ pelo numerador, e a reduziremos a esta forma $\cfrac{1}{3\cfrac{14159265}{100000000}}$; a qual, desprezando a fracçaõ que acompanha o denominador inteiro 3, se reduzirá a $\frac{1}{3}$, que he o primeiro valor approximado da fracçaõ dada, o mais exacto que he possivel em termos taõ simples, mas maior doque o verdadeiro.

Para acharmos outro valor mais chegado ao verdadeiro, na fracçaõ junta ao denominador inteiro 3, partiremos ambos os termos pelo numerador, e a reduziremos a esta forma $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\cfrac{885145}{14159265}}}$; a qual, desprezando a fracçaõ junta ao denominador inteiro 7, se reduz a $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7}}$, ou (n. 26.) a $\cfrac{1}{\cfrac{22}{7}}$, ou (n. 109.) a $\frac{7}{22}$; que he outro valor mais exacto, que o precedente $\frac{1}{3}$, mas algum tanto menor que o verdadeiro.

Se quizermos maior exactidaõ, dividiremos pelo numerador ambos os termos da fracçaõ junta ao denominador 7, e a fracçaõ primitiva ficará reduzida a esta fórma $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{882090}{885145}}}}$; a qual, desprezando a fracçaõ que accompanha o denominador 15, se reduz a $\frac{106}{333}$, valor mais exacto que os precedentes, mas algum tanto maior que o verdadeiro. Porém se aqui houvermos de suspender a operaçaõ, naõ desprezaremos a fracçaõ junta ao denominador 15, mas advertindo que ella vale quasi huma unidade, ajuntaremos 1 ao dito denominador, e teremos $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}}$; expressaõ, que se reduz a $\frac{113}{355}$. Este he hum valor da fracçaõ proposta muito mais exacto que os precedentes, mas ainda alguma cousa menor que o verdadeiro, pois para igualar a fracçaõ proposta lhe falta $\frac{611}{22305307815}$, ou proximamente $\frac{1}{36506232}$.

¶¶ Os quebrados reduzidos á fórma, que se tem dado á fracçaõ proposta pela divisaõ successiva das fracçoẽs juntas aos denominadores inteiros, chamaõ se *quebrados continuos*.

E deve notar-se, que a divisaõ que fazemos nesta operaçaõ he a mesma que praticamos, quando buscamos o maior divisor commum dos ter-

termos de hum quebrado, para o abbreviarmos exactamente, ſendo poſſivel. Por iſſo achando finalmente que elles naõ tem diviſor commum ſenaõ a unidade, podemos ſervirnos logo dos quocientes achados, diſpondo-os em fracçaõ continua com a unidade por numerador; e nella deſprezaremos os termos que permittir a exactidaõ, que buſcamos.

Por exemplo; Querendo reduzir o quebrado $\frac{964}{5141}$, e buſcando o diviſor maior commum dos ſeus termos, achamos que naõ tem outro que naõ ſeja a unidade. Porém como pela operaçaõ achamos os quocientes 5, 3, e 321, delles formaremos a expreſſaõ $\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{321}}}$, q̃ he exactamẽte igual ao quebrado propoſto; e deſprezando a fracçaõ junta ao denominador 3, que com tanto mais raſaõ ſe deſpreza quanto he mais pequena, ficará $\frac{1}{5\frac{1}{3}}$, que ſe reduz a $\frac{3}{16}$; quebrado muito abbreviado, ao qual naõ falta mais doque $\frac{1}{82256}$ para igualar o quebrado propoſto.

Dos numeros complexos.

116 AIndaque as regras, que até agora temos dado, ſe pódem igualmente applicar aos numeros *complexos*, ou *heterogeneos*, naõ deixará com tudo de ſer conveniente que delles tratemos em particular, porque muitas vezes a diviſaõ da unidade nelles eſtabelecida ſerve de facilitar as operaçoens.

Há

Há muitas eſpecies deſtes numeros, em que ſe uſaõ differentes diviſoens, das quais principalmente dependem as regras do calculo. Mas naõ he neceſſario, que as pratiquemos todas aqui, porque os exemplos de humas ſe applicaõ a todas as mais, em ſe ſabendo a natureza das ſuas diviſoens. Eiſaqui as mais uſadas entre nós.

§§ O dinheiro de França pela maior parte ſe conta por *libras*. A *libra* conſta de 20 *ſoldos*, e o *ſoldo* de 12 *dinheiros*. Eſtas differentes eſpecies ſe diſtinguem com as letras iniciais dos ſeus nomes. Aſſim 32^{lb} $15^{ſ}$ 7^{d} quer dizer 32 *libras*, 15 *ſoldos*, e 7 *dinheiros*.

A *libra* de pezo, ou *arratel*, quaſi em toda a parte ſe divide em 2 *marcos*, o *marco* em 8 *onças*, a *onça* em 8 *oitavas*, a *oitava* em 3 *ſcropulos*, o *ſcropulo* em 24 *grãos*. Para os pezos maiores uſamos de *quintais*. O *quintal* ſe divide em 4 *arrobas*, e a *arroba* em 32 *arrateis*.

As medidas das couſas ſecas em Portugal ſe reduzem a *moyos*. O *moyo* conſta de 15 *fangas*, a *fanga* de 4 *alqueires*, e o *alqueire* de 4 *quartas*; medidas, que alguma couſa differem entre ſi, conforme os lugares.

Nas medidas dos liquidos uſamos de *pipas*. A *pipa* tem 25 *almudes*, o *almude* 12 *canadas*, e a *canada* 4 *quartilhos*; medidas, que tambem variaõ de grandeza, conforme os lugares.

As diſtancias locais, ſendo maiores, medemſe por *Eſtadios*, *Milhas*, *Legoas* &c. Nas menores ſe uſa da *toeſa*. Cada *toeſa* tem 6 *pés*, o *pé* 12 *pollegadas*, a *pollegada* 12 *linhas*, e a *linha* 12 *pontos*; eſpecies, que por ſua ordem ſe aſſentaõ deſta maneira: 72^{T} 3^{P} 7^{P} 10^{l} 5^{pts}. A *braça* Portugueza tem 10 *palmos craveiros*, e o *palmo* 8 *pollegadas*.

A medida natural do tempo he o *dia*. Cada *dia*

dia ſe divide em 24 *horas*, a *hora* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c., e eſtes numeros por ſua ordem ſe coſtumaõ notar deſte modo: 223^d 13^h $40'$ $53''$ &c.

Hum circulo celeſte divide-ſe em 12 *ſignos*, o *ſigno* em 30 *grâos*, o *grâo* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c. Os ſignos marcaõ-ſe com a letra s, os grâos com a letra o, os minutos primeiros, ſegundos &c. com huma, duas riſcas &c., deſta maneira: 11^s 23^o $43'$ $52''$ $23'''$ &c.

Tambem ſe tem imaginado diviſoẽs particulares para avaliar a qualidade de algumas couſas, como temos o exemplo na conta do ouro, e da prata.

O ouro na ſua maior pureza, ſem liga alguma de outro metal, ſuppoem-ſe conſtar de 24 *quilates*, o quilate de 4 *graõs*, e o *graõ* de 8 *oitavas*. Qualquer quantidade deſte metal v. gr. hum *marco*, ſendo puro, vale como de 24 *quilates*; ſendo ametade de ouro, e a outra ametade de outro metal, como de 12 *quilates*; ſendo 5 partes de ouro, e huma de outro metal, como de 20 *quilates* &c. Deve diſtinguir-ſe o *graõ* do *quilate*, do *graõ* de pezo. Ao *graõ* do *quilate* damos o nome de *graõ de Lei*, porque tem hum valor fixo e determinado pela Lei, e o *graõ* de pezo tem differente valor, conforme he mais ou menos puro o ouro, que nelle ſe contém.

Pela Lei de 4 de Agoſto de 1688 ſe fixou neſte Reino o valor de hum marco de ouro de 22 quilates em 96U000 reis; e eſta he a Lei da noſſa moeda. Repartindo o dito valor por 22, acharemos que cada quilate em hum marco vale 4U363 $\frac{7}{11}$, cada *graõ* de Lei 1U090 $\frac{10}{11}$ &c.; e conſeguintemente, que o márco de 24 quilates vale

vale 104U727 $\frac{5}{11}$ reis. Pela meſma Lei ſe ordenou, que os Bate-folhas uſaſſem do ouro de 23 quilates, e que os Ourives fizeſſem as ſuas obras de 20 quilates e meio. Neſtas, ſuppoſto o valor fundamental do marco de 22 quilates, deveria ſahir o marco a raſaõ de 89U454 $\frac{6}{11}$ reis, a onça a raſaõ de 11U181 $\frac{9}{11}$, e a oitava a raſaõ de 1U397 $\frac{8}{11}$. Porêm para evitar o embaraço dos quebrados, a meſma Lei regulou o marco a 89U600 reis, a 11U200 a onça, e a 1U400 a oitava.

A prata, ſem liga alguma, ſuppoem-ſe conſtar de 12 *dinheiros*, cada *dinheiro* de 24 *grãos de Lei*, e cada *graõ* de 4 *quartas*. E por eſta diviſaõ ſe regula o valor de qualquer quantidade de prata, a qual ſendo pura valerá como de 12 *dinheiros*; tendo ametade de liga, como de 6 *dinheiros* &c.

Pela meſma Lei já citada ſe fixou neſte Reino o valor de hum marco de prata de 11 *dinheiros*, que he a Lei da moeda, em 6U000 reis. Em conſequencia deſte valor fundamental, vale cada *dinheiro* em hum marco U545 $\frac{5}{11}$; e o marco de 12 *dinheiros*, que he a Lei dos Bate-folhas, vale 6U545 $\frac{5}{11}$. Pela meſma raſaõ o marco de 10 *dinheiros* e 6 *grãos*, que he a Lei dos Ourives da prata, deveria valer exactamente 5U590 $\frac{10}{11}$. Porém, para evitar o embaraço dos quebrados, a meſma Lei reduzio o dito marco a 5U600 reis.

He de advertir, que o dinheiro de ouro, e prata alem do valor da Lei, que chamamos intrinſeco, tem tambem hum valor de ſinal, procedido dos direitos da caſa da moeda. A peça de meia onça de ouro de 22 *quilates* tem de pezo 6U000 reis, e pelo cunho vale 6U400; e o cruzado novo, que tem meia onça de prata de 11 *dinheiros*, péza U375 reis, e corre por U480 reis. §§

De Somar os numeros complexos.

117 PAra fazer eſta operaçaõ, eſcrevem-ſe todas as addiçoẽs, humas debaixo das outras, de maneira que as unidades da meſma eſpecie fiquem diſpoſtas em huma columna vertical; e tendo paſſado huma riſca por baixo, principia-ſe a operaçaõ pelas unidades da infima eſpecie da direita para a eſquerda. Se a ſoma dellas naõ chegar a fazer huma unidade da eſpecie proximamente maior, eſcrever-ſe-há debaixo da riſca; e ſe chegar a fazer huma, ou mais das ditas unidades, eſcrever-ſe-há ſómente o que ficar, tiradas eſſas unidades, ou cifra, naõ ficando reſto; e as tais unidades ſe levaraõ para a columna ſeguinte, na qual ſe praticará o meſmo, e aſſim por diante.

Exemplo I.

QUerendo ſomar - - -	227^{lb}	$14^{ſ}$	8^{d}	
	2549	18	5	
	184	11	11	
	17	10	7	
	2979^{lb}	$15^{ſ}$	7^{d}	Soma

Ordenadas as addiçoẽs, como ſe vê no exemplo, principiaremos pelos *dinheiros*, cuja ſoma faz 31^{d}, nos quais ſe contém 2 vezes 12^{d}, iſto he, $2^{ſ}$, e alèm diſſo ſobraõ 7^{d}. Por tanto aſſentaremos os 7^{d} na columna reſpectiva, e levaremos

mos 2^{s} para a columna dos *soldos*. Nesta acharemos, que as unidades fazem 15, do qual numero assentaremos logo a letra 5 debaixo das unidades respectivas, e levaremos a dezena 1 para a somar com as dezenas dos mesmos *soldos*, as quais acharemos que fazem 5. E porque cada duas dezenas de *soldos* fazem huma *libra*, partiremos mentalmente o 5 por 2, e teremos por quociente 2^{lb}, ficando o resto 1, que he 1 dezena de *soldos*; peloque assentaremos esta dezena no seu lugar, e levando 2^{lb} para a columna seguinte, acharemos finalmente que a soma total he $2979^{lb}\ 15^{s}\ 7^{d}$

Exemplo II.

SE quizermos somar as quatro addiçoēs seguintes - - - - - -

54^{T}	2^{P}	3^{P}	9^{l}
12	5	4	11
9	4	11	11
8	2	9	10
85^{T}	3^{P}	6^{P}	5^{l}

Principiaremos pelas *linhas*, que daõ 41^{l}, ou $3^{P}\ 5^{l}$; e por conseguinte assentaremos sómente as 5^{l}, e levaremos as 3^{P} para a columna seguinte. Esta dará a soma 30^{P}, ou $2^{P}\ 6^{P}$; e por isso assentaremos nella as 6^{P}, e levaremos os 2^{P} para a columna seguinte; cuja soma acharemos ser 15^{P}, ou $2^{T}\ 3^{P}$. Peloque assentando nella 3^{P}, e levando 2^{T} para a columna seguinte, teremos a soma total $85^{T}\ 3^{P}\ 6^{P}\ 5^{l}$.

Exem-

Exemplo III.

§§ HAvendo de somar - 23^d 13^h $43'$ $52''$

Havendo de somar -	23^d	13^h	$43'$	$52''$
	35	0	12	41
	0	23	0	24
	12	14	23	5
	72^d	3^h	$20'$	$2''$ Som.

Na columna dos *segundos* acharemos que as unidades fazem 12, e logo escreveremos $2''$, e levaremos a dezena 1 para a somarmos com as dezenas, as quais fazem 12. E como 6 dezenas de *segundos* fazem hum *minuto*, partiremos mentalmente 12 por 6, e o quociente mostrará $2'$, os quais levaremos para a columna seguinte, e como naõ ficou resto algum da dita divisaõ, naõ escreveremos nada nas dezenas dos *segundos*. Na columna seguinte as unidades daõ 10, e logo assentaremos a 0, e levaremos a dezena 1 para a somarmos com as dezenas, as quais fazem 8; e partindo-as por 6 o quociente será 1^h que guardaremos para a columna das *horas*, e ficaráõ 2, que assentaremos na casa das dezenas dos minutos. Na columna das *horas* acharemos a soma total 51^h, que saõ 2^d 3^h; e por conseguinte assentando as 3^h, e levando os 2^d para a sua respectiva columna, acharemos que as addiçoẽs propostas somaõ 72^d, 3^h $20'$ $2''$.

Exemplo IV.

SE tivermos para somar -	11^s	23^o	$43'$	$53''$
	0	12	22	4
	7	21	3	12
	3	0	25	37
	10^s	27^o	$34'$	$46''$ Soma.

Soma-

Somaremos os *segundos* e *minutos*, como no exemplo precedente. E chegando ás unidades dos *grãos*, logo assentaremos a soma dellas 7^{o} na mesma casa, e passaremos ás dezenas, cuja soma he 5; e porque 3 dezenas de *grãos* fazem hum *signo*, na casa das dezenas assentaremos 2, e levaremos huma unidade para a columna dos *signos*. Esta dá a soma 22; mas porque no calculo destes numeros se lançaõ fóra os circulos inteiros, ou 12^{s}, todas as vezes que os houver na soma; de 22^{s} tiraremos 12^{s}, e assentaremos o resto 10^{s}; donde a soma que buscamos será $10^{s}\ 27^{o}\ 34'\ 46''$. §§

De Diminuir os numeros complexos.

118 PAra diminuir hum numero complexo de outro, ambos se assentaõ, como no Somar, e a operaçaõ se principia tambem pela menor especie. Se o numero inferior se póde tirar do superior, feita a subtracçaõ, o resto se escreve por baixo da risca. Porém naõ se podendo tirar, o numero superior se aumentará com o que produzir huma unidade da especie immediatamente maior reduzida ás unidades da columna em que estamos. Entaõ feita a subtracçaõ, se escreverá o resto em baixo; e o numero de quem se tomou a unidade se tratará mentalmente sem ella na operaçaõ seguinte, na qual se procederá do mesmo modo, e assim por diante.

Exem-

Exemplo I.

SE do numero - - - - - -	143^{lb}	17^{s}	6^{d}	
quizermos tirar - - -	75	12	9	
	68^{lb}	4^{s}	9^{d}	Resto.

Como de 6^{d} naõ se pódem tirar 9^{d}, de 17^{s} tomaremos mentalmente 1^{s}, que vale 12^{d}, e a juntando estes com os 6^{d} teremos 18^{d}, dos quais tirando 9^{d}, ficaõ 9^{d}, que assentaremos por baixo. E no lugar seguinte naõ tiraremos 12^{s} de 17^{s}, mas de 16^{s}, por causa da unidade que já tirámos dos 17^{s}; e escreveremos o resto 4^{s}. Finalmente tirando 75^{lb} de 143^{lb} ficaõ 68^{lb}; e por conseguinte o resto total será 68^{lb} 4^{s} 9^{d}.

Exemplo II.

SE de - - - - - - - - - -	163^{lb}	0^{s}	5^{d}	
houvermos de tirar - -	84	18	9	
	78^{lb}	1^{s}	8^{d}.	Resto.

Naõ podendo tirar 8^{d} de 5^{d}, e naõ havendo na casa dos *soldos* numero, do qual tomemos huma unidade, tomalla-hemos de 163^{lb}, a qual valerá 20^{s}. Destes deixaremos mentalmente 19^{s} no lugar vazio dos *soldos*, e converteremos sómente 1^{s} em *dinheiros*, os quais ajuntaremos com os 5^{d}; e feita a operaçaõ, como no exemplo antecedente, acharemos o resto 78^{lb} 1^{s} 8^{d}.

Exemplo III.

55 SE do numero -	7^{s}	12^{o}	$20^{\prime}$	$42^{\prime\prime}$	
quizermos tirar	4	23	36	23	
	2^{s}	18^{o}	$44^{\prime}$	$19^{\prime\prime}$	Resto.

Em chegando ás dezenas dos *minutos*, acharemos para diminuir 3 de 1; e como isto naõ póde ser, tomaremos huma unidade dos 12°, a qual vale 6 dezenas de *minutos*, e com 1 fazem 7, das quais tiraremos as 3. Do mesmo modo nas dezenas dos *grãos*, acharemos 2 para tirar de o, e por isso tomaremos huma unidade dos 7^{s}, a qual nos lembraremos que vale 3 dezenas de *grãos*; e acabando a operaçaõ, teremos o resto 2^{s} 18° $44'$ $19''$.

No calculo destes numeros muitas vezes se diminue hum numero maior de outro menor, porque a este se póde ajuntar para esse effeito hum circulo inteiro, ou 12^{s}.

Exemplo IV.

SE de - - - - - - - - - - -	3^{s}	0°	$12'$	$27''$
houvermos de tirar	9	15	27	22
	5^{s}	14°	$45'$	$5''$ *Resto.*

Primeiramente nas dezenas dos *minutos*, sendo necessario tomar huma unidade da casa dos *grãos*, que a naõ tem, tomálla-hemos dos 3^{s}, a qual valerá 30°, e destes deixaremos 29° na mesma casa dos *grãos*, e tomaremos sómente 1°, que converteremos em 6 dezenas, para fazermos a subtracçaõ. Continuando a operaçaõ teremos finalmente para diminuir 9^{s} de 2^{s}, pelo que ajuntaremos 12^{s} a 2^{s}, e feita a subtracçaõ será o resto que buscamos 5^{s} 14° $45'$ $5''$ §§

Multiplicaçaõ dos numeros complexos.

119 A praxe desta operaçaõ póde reduzir-se em geral á multiplicaçaõ dos quebrados ordinarios, conforme a regra que assima temos dado (n. 106). Por-

Porque v. gr. ſe quizermos ſaber o feitio, que deve pagar-ſe por $54^T\ 3^P$ de obra, tendo-ſe ajuſtado a *toeſa* a raſaõ de $42^{lb}\ 17^{ſ}\ 8^d$; podemos converter o multiplicando $42^{lb}\ 17^{ſ}\ 8^d$ todo em *dinheiros* (n. 57.), que dará 10292^d. E porque o *dinheiro* he $\frac{1}{240}$ de huma *libra*, reduzir-ſe-há o multiplidando a $\frac{10292}{240}$ da meſma *libra*. Igualmente o multiplicador $54^T\ 3^P$ convertido todo em *pés* dará 327^P; e porque o *pé* he $\frac{1}{6}$ da *toeſa*, ficará o dito multiplicador reduzido a $\frac{327}{6}$ da meſma *toeſa*. Por conſequencia, a queſtaõ ſe reduz a multiplicar a fracçaõ $\frac{10292}{240}$ de huma *libra* por $\frac{327}{6}$ (n. 106.); donde reſulta o producto $\frac{3365484}{1440}$ da meſma *libra*, o qual ſe reduz finalmente (n. 112.) a $2337^{lb}\ 2^{ſ}\ 10^d$.

Eſte methodo ſe extende a toda a ſorte de numeros complexos. Porém, como o que agora moſtraremos ſe executa com menos trabalho, naõ nos demoraremos mais com elle.

120 O numero, que ſe contém em outro algumas vezes exactamente, chama-ſe parte *aliquota* delle; e o que ſe naõ contém exactamente, parte *aliquanta*. Aſſim 3 he parte *aliquota* de 12, e *aliquanta* de 8.

Multiplicar, como já diſſemos, nada mais he que tomar o multiplicando hum certo numero de vezes. Se v. g. qualquer numero ſe houver de multiplicar por $8\frac{3}{4}$, deveremos tomallo 8 vezes, e além diſſo $\frac{3}{4}$ de huma vez. Ora de dous modos podemos tomar os $\frac{3}{4}$ de hum numero; ou buſcando hum *quarto* delle, e repetindo-o 3 vezes; ou tomando primeiramente a ſua ametade, e depois ametade da meſma ametade. Aſſim v. gr.

Se tiveſſemos de multiplicar 84

$$\begin{array}{lr} \text{por} \text{ - - - - - - - - - - - - - - } & 8\frac{3}{4} \\ \hline & 672 \\ & 42 \\ & 21 \\ \hline & 735 \end{array}$$ Producto.

Primeiramente, multiplicando pelo inteiro 8, teriamos o producto 672. Depois, para tomarmos com mais facilidade os $\frac{3}{4}$ de 84, reſolveriamos o quebrado $\frac{3}{4}$ em $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{4}$. E aſſim tomando a ametade de 84, que he 42, e a ametade deſta que he 21, e reunindo os tres productos parciais, achariamos o producto total 735.

121 Para iſto ſe applicar aos numeros complexos, devemos notar que as differentes unidades, de que elles ſe compoem, ſaõ quebrados tanto entre ſi, como a reſpeito da unidade principal; e que para ſe multiplicarem com mais facilidade, he por conſeguinte muito conveniente reſolvellas em partes aliquotas tanto da unidade principal, como humas das outras. Quando por eſta reſoluçaõ naõ ſe pudérem haver partes aliquotas, que facilitem o calculo, ſupprir-ſe-há com productos ſubſidiarios; da maneira, que moſtraremos nos exemplos ſeguintes.

Ex-

Exemplo I.

PErgunta-se, quanto devem custar $54^T\ 3^P$ de obra, a rasaõ de 72^{lb} por *toesa*?

Deveremos pois multiplicar - - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - - - - - $54^T\ 3^P$

$288^{lb}\ 0^s\ 0^d$
360
36
$3924^{lb}\ 0^s\ 0^d$ Prod.

E primeiramente multiplicaremos 72^{lb} por 54, conforme a regra costumada da multiplicaçaõ. Depois, para multiplicarmos por 3^P, reflectiremos que este numero representa meia *toesa*, e por conseguinte deve custar ametade do preço della; pelo que assentaremos por baixo 36, ametade do multiplicando, e somando os tres productos parciais, teremos o producto que se pede 3924^{lb}.

Exemplo II.

PEde-se o producto de - - - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - $54^T\ 5^P$

$288^{lb}\ 0^s\ 0^d$
360
36
24
$3948^{lb}\ 0^s\ 0^d$ Producto

Em primeiro lugar multiplicaremos 72^{lb} por 54, como no exemplo antecedente. Depois como 5^P saõ $\frac{5}{6}$ de huma *toesa*, resolveremos este quebrado

brado em $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$. E assim tomando de 72^{lb} primeiramente a ametade 36, depois a terça parte 24, e somando os productos parciais, acharemos o producto total 3948^{lb}.

Exemplo III.

QUerendo-se multiplicar - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - - - 5^T 4^P 8^p

$$\begin{array}{rll}
360^{lb} & 0^s & 0^d \\
36 & & \\
12 & & \\
4 & & \\
4 & & \\
\hline
416^{lb} & 0^s & 0^d
\end{array}$$ Producto.

Feita primeiramente a multiplicaçaõ por 5^T, multiplicaremos depois por 4^P, e para isso resolveremos este numero em 3^P e 1^P. Por 3^P tomaremos ametade do multiplicando, que he 36^{lb}; e por 1^P, observaremos que elle he hum terço de 3^P, e por conseguinte tomaremos o terço de 36^{lb}, que he 12^{lb}. Para multiplicarmos por 8^p, em lugar de compararmos as *polegadas* com a *toesa*, será melhor que as comparemos com o *pé*; e resolvendo 8^p em 4^p e 4^p, veremos que cada huma destas partes he hum terço do *pé*, e por isso dará 4^{lb}, que he o terço do producto que acabamos de achar para 1^P. Reunindo finalmente todas estas partes, será o producto total 416^{lb}.

122 Se tambem o multiplicando for numero complexo, far-se-há a operaçaõ, como se mostra no exemplo seguinte.

Exem-

Exemplo IV.

Para multiplicar - - - 72^{lb} $6^{ſ}$ 6^{d}
por - - - - - - - - - - 27^{T} 4^{p} 8^{p}

504^{lb}	$0^{ſ}$	0^{d}	
144			
6	15	0	
1	7	0	
0	13	6	
36	3	3	
12	1	1	
4	0	4	$\frac{1}{3}$
4	0	4	$\frac{1}{3}$
2009^{lb}	$0^{ſ}$	6^{d}	$\frac{2}{3}$. Producto.

Tendo multiplicado 72^{lb} por 27, paſſaremos tambem a multiplicar $6^{ſ}$, para o que reſolveremos eſte numero em $5^{ſ}$ e $1^{ſ}$. E porque $5^{ſ}$ fazem hum *quarto* da *libra*, multiplicar $5^{ſ}$ por 27 ſerá o meſmo que tomar 27 *quartos* da *libra*, ou hum *quarto* de 27 *libras*, que he 6^{lb} $15^{ſ}$. E para multiplicarmos $1^{ſ}$ por 27, como $1^{ſ}$ he hum *quinto* de $5^{ſ}$, tomaremos hum *quinto* do producto antecedente 6^{lb} $15^{ſ}$, que he 1^{lb} $7^{ſ}$. E finalmente, para multiplicarmos 6^{d} pelo meſmo numero 27, advertiremos que 6^{d} fazem ametade de $1^{ſ}$, e conſeguintemente tomaremos ametade do producto 1^{lb} $7^{ſ}$, que achamos competir a $1^{ſ}$, a qual ſerá $13^{ſ}$ 6^{d}.

Até aqui temos multiplicado todo o numero multiplicando pela primeira parte do multiplicador 27^{T}. Agora para o multiplicarmos tambem por 4^{p}, praticaremos como no exemplo anteceden-
te.

te. E resolvendo 4^p em 3^p e 1^p, por 3^p tomaremos ametade do multiplicando, a saber 36^{lb} 3^{s} e 3^{d}, e por 1^p tomaremos hum terço dadita ametade, que he 12^{lb} 1^{s} 1^{d}. Do mesmo modo resolveremos 8^p em 4^p e 4^p, e por cada huma destas partes tomaremos hum terço do producto, que achamos para 1^p, a saber 4^{lb} 0^{s} 4^{d} $\frac{1}{3}$. E reunindo todas as ditas partes, teremos o producto total 2009^{lb} 0^{s} 6^{d} $\frac{2}{3}$.

123 Nos exemplos precedentes tem sido muito faceis de tomar as partes do multiplicando, por causa da sua simplicidade. Quando forem mais compostas, usaremos do artificio que se mostra nos exemplos seguintes.

Exemplo V.

PErgunta-se, quanto devem custar 17^T de obra, a rasaõ de 34^{lb} 10^{s} 2^{d} a *toesa*?

Será pois o multiplicando	34^{lb}	10^{s}	2^{d}
e o multiplicador - - - - -	17^T		
	238^{lb}	0^{s}	0^{d}
	34		
	8	10	
	.	..	
	0	17	
	0	2	10
	586^{lb}	12	10^{d} Product.

E em primeiro lugar multiplicaremos 34^{lb} por 17, e depois 10^{s}, os quais fazendo meia *libra* daráõ 17 meias *libras*, ou ametade de 17 *libras*, que he 8^{lb} 10^{s}. Entaõ para multiplicarmos 2 por 17, observaremos que 2^{d} fazem huma sexta parte te de 1^{s}, e conseguintemente huma sexta de huma decima, ou (n. 114.) huma sexagesima parte de 10^{s}. Pelo que por 2^{d} deveriamos tomar huma sexagesima parte do producto 8^{lb} 10^{s}, que temos achado competir a 10^{s}. Mas para facilitar o calculo tomaremos primeiro a decima parte do dito producto, que he 0^{lb} 17^{s}, e a marcaremos com pontos, ou riscas, para denotar que he hum producto subsidiario, que ao depois naõ havemos de somar. Delle porem tomaremos a sexta parte 2^{s} 10^{d}, que vem a ser a sexagesima parte de 8^{lb} 10^{s}, e somando todos os productos parciais, será o producto que se pergunta 586^{lb} 12^{s} 10^{d}.

Exemplo VI.

PErgunta-se, quanta obra se deve fazer por 34^{lb} 10^{s} 2^{d}, a rasaõ de 17^{T} por 1^{lb}?

Multiplicarmos pois - 17^{T}

por - - - - - - - - - 34^{lb} 10^{s} 2^{d}

68^{T}	0^{P}	ro	0^{l}	0^{pts}	
51					
8	3				
0	5	1	2	4	$\frac{4}{5}$
0	0	10	2	4	$\frac{4}{5}$
586^{T}	3^{P}	10^{P}	2^{l}	4^{pts}	$\frac{4}{5}$ Producto.

E tendo multiplicado 17^{T} por 34^{lb}, passaremos a multiplicar por 10^{s}; e porque 10^{s} fazem meia *libra*, pelo producto correspondente tomaremos ametade de 17^{T}, que he 8^{T} 3^{P}. Para multiplicarmos por 2^{d}, buscaremos o producto que deveria dar 1^{s}, tomando a decima parte do producto ante-

antecedente, a ſaber $0^{T}\ 5^{P}\ 1^{P}\ 2^{l}\ 4^{Pts}\ \frac{4}{5}$; producto ſubſidiario, que marcaremos com pontos, e de que nos ſerviremos, para delle tomarmos a ſexta parte $0^{T}\ 0^{P}\ 10^{P}\ 2^{l}\ 4^{pts}\ \frac{4}{5}$; que aſſentaremos por baixo; e ſomando todos os productos parciais acharemos, que o producto pedido he $586^{T}\ 3^{P}\ 10^{P}\ 2^{l}\ 4^{pts}\ \frac{4}{5}$.

Temos dado eſte exemplo, para confirmar o que aſſima diſſemos (n. 45.); que era neceſſario diſtinguir o *multiplicando* do *multiplicador*, quando ambos foſſem *concretos*. E com effeito nos dous exemplos antecedentes temos os meſmos *factores* 17^{T}, e $34^{lb}\ 10^{f}\ 2^{d}$: e com tudo reſultaõ productos differentes.

55 He porém de advertir, que a dita differença he ſómente na expreſſaõ; e que na realidade ſe declara pelo primeiro producto o meſmo numero de *libras*, que de *toeſas* pelo ſegundo; ſendo ſómente diverſos os algariſmos, porque ſaõ diverſas as diviſoens da *toeſa*, e da *libra*. Para iſto ſe provar, baſta reduzir as partes da *libra* no primeiro, e as da *toeſa* no ſegundo, a huma fracçaõ da unidade principal, e ambos ſe acharaõ concordes, ſendo hum $586^{lb}\ \frac{77}{120}$, e o outro $586^{T}\ \frac{77}{120}$.

Advirta-ſe tambem, que nos exemplos aſſima dados ſe ſuppoem ſempre que a unidade principal he a da maior eſpecie, mas que póde ſervir igualmente de principal qualquer das outras. Póde v. gr. perguntar-ſe quanta obra ſe deve fazer por $34^{lb}\ 10^{f}\ 2^{d}$, a raſaõ de 17^{T} por 1^{f}. Neſte caſo, por 2^{d} teriamos o producto $2^{T}\ 5^{P}$, por 10^{f}

te-

teriamos 170^T, e por 34^{lb} finalmente $1156o^T$; donde feria o producto total $11732^T\ 5^P$. §§

Divisaõ de hum numero complexo por hum numero incomplexo.

124 SE o dividendo fómente for complexo, e fe ao mefmo tempo o dividendo, e o divifor moftrarem unidades de diverfa fpecie, a operaçaõ fe praticará da maneira feguinte.

Dividir-fe-haõ primeiramente as unidades principais do dividendo, conforme a regra dada para os numeros inteiros. O que ficar defta divifaõ reduzir-fe-há ás unidades da efpecie immediatamente inferior (n. 57.), e fe ajuntará com as unidades femelhantes que no dividendo houver, e o total fe partirá do mefmo modo. O refto defta divifaõ fe tornará a reduzir ás unidades da efpecie feguinte, e fe ajuntará com as do dividendo, e a foma fe tornará a repartir; e affim pordiante, até chegar á infima efpecie.

Exemplo.

PAgando-fe 4783 *libras*, 3 *foldos*, e 9 *dinheiros* pelo jornal 87 de *toefas* de obra, queremos faber a quanto fahe cada *toefa*.

Para iffo repartiremos $4783^{lb}\ 3^{f}\ 9^{d}$ por 87^T, da maneira feguinte:

$$
\begin{array}{r|l}
4783^{lb}\ 3^{f}\ 9^{d} & 87^T \\
433 & \overline{54^{lb}\ 19^{f}\ 7^{d}} \\
85 & \\
\hline
1703^{f} & \\
833 & \\
50 & \\
\hline
609^{d} & \\
000 &
\end{array}
$$

Prin-

Principiando pelas *libras*, partiremos pois 4783^{lb} por 87 (n. 65.), e viráõ ao quociente 54^{lb}, ficando de resto 85^{lb}. Este resto convertido em *soldos* com os 3^{s} do dividendo primitivo faz 1703^{s}; e partindo esta soma por 87, sahiráõ no quociente 19^{s}, e sobraráõ 50^{s}. Do mesmo modo reduzindo este resto a *dinheiros*, e ajuntando-lhe os 9^{d} do dividendo, teremos 609^{d}; os quais sendo finalmente repartidos por 87, daraõ no quociente 7^{d}, sem resto algum; e conseguintemente será o quociente total que buscamos $54^{lb}\ 19^{s}\ 7^{d}$.

125 No caso porém de mostrarem unidades da mesma especie tanto o dividendo, como o divisor; antes de fazer a divisaõ he necessario examinar, se o quociente deve, ou naõ deve ser da mesma especie que elles; exame, que facilmente se decide pelo estado da questaõ.

126 Mostrando pois o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo ao mesmo tempo conformar-se o quociente com as unidades de ambos elles, a divisaõ se praticará inteiramente como no primeiro caso.

Sabendo, por exemplo, que 1243^{lb} produziraõ de lucro 7254^{lb}, pergunta-se quanto cabe a cada *libra*. He claro nesta questaõ, que o quociente deve mostrar unidades da mesma especie que as do dividendo, e do divisor, isto he que se deve achar em *libras*, e partes da *libra*. Pelo que dividiremos 7254^{lb} por 1243, e convertendo o resto em *soldos* tornaremos a dividir por 1243, e assim por diante; e acabada a operaçaõ, acharemos que o quociente pedido he $5^{lb}\ 16^{s}\ 8^{d}\ \frac{760}{1243}$.

127 Mostrando porém o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo o quociente mostrar unidades de differente especie que as de ambos elles, antes de fazer a divisaõ

será

ſerá neceſſario reduzir tanto o dividendo como o diviſor ás unidades da infima eſpecie que no meſmo dividendo ſe contém (n. 57.). Depois diſſo praticar-ſe-há, como no exemplo precedente, tratando as unidades do dividendo aſſim reduzido, como ſe foſſem da meſma eſpecie das que devem ſahir do quociente.

Pergunta-ſe v. gr. quantas *toeſas* de obra ſe devem fazer por 7954 *libr.* 11. *ſold.* e 7. *dinh.* a razaõ de 72 *libras* a *toeſa*? Pela meſma queſtaõ entenderemos, que o quociente deve ſahir em *toeſas*, e partes da *toeſa*. E por iſſo reduziremos $7954^{lb}\ 11^{ſ}\ 7^{d}$ tudo em *dinheiros* e teremos 1909099^{d}; o meſmo faremos ao diviſor 72^{lb}, que dará 17280^{d}; e mudando no dividendo a denominaçaõ de *dinheiros* para *toeſas*, teremos para dividir 1909099^{T} por 17280, donde reſultará o quociente $110^{T}\ 2^{p}\ 10^{P}\ 6^{lh}\ \frac{13}{20}$.

Diviſaõ de hum numero complexo, por outro complexo.

128 SEndo tambem complexo o diviſor, reduzillo-hemos primeiro ás unidades da ſua infima eſpecie (n. 57.), e multiplicaremos o dividendo pelo numero das vezes que entra a unidade da dita infima eſpecie na unidade principal do meſmo diviſor. Deſte modo a operaçaõ ſerá reduzida ao caſo precedente de hum diviſor incomplexo.

Exemplo.

TEndo cuſtado $854^{lb}\ 17^{ſ}\ 11^{d}$ huma obra de $57^{T}\ 5^{P}\ 5^{P}$, perguta-ſe a como ſahe a *toeſa*? Deveremos pois dividir $854^{lb}\ 17^{ſ}\ 11^{d}$ por $57^{T}\ 5^{P}\ 5^{P}$. Para iſſo reduziremos o diviſor a *pollegadas*, que fa-

fará 4169^p ; e como ſaõ neceſſarias 72^p para fazer huma *toeſa*, que he a unidade principal do diviſor, multiplicaremos o dividendo por 72 (n. 121.), e teremos 61552^{lb} 10^ſ . Por tanto partiremos o numero 61552^{lb} 10^ſ por 4169, da maneira ſeguinte:

61552^{lb} 10^ſ	4169
19862	14^{lb} 15^ſ 3^d $\frac{1833}{4169}$
3186	
63730^ſ	
22040	
1195	
14340^d	
1833	

Primeiramente as 61552^{lb} partidas por 4169 daõ no quociente 14^{lb}, e 3186^{lb} de reſto. Eſte reduzido a *ſoldos* com os 10^ſ do dividendo faz 63730^ſ, os quais ſendo partidos por 4169 daõ no quociente 15^ſ, ficando de reſto 1195^ſ . Eſte reduzido a *dinheiros* faz 14340^d, os quais ſendo finalmente partidos por 4169 daõ 3^d, e ſobraõ 1833^d ; peloque ſerá o quociente pedido 14^{lb} 15^ſ 3^d $\frac{1833}{4169}$.

He clara a raſaõ deſta regra. Porque reduzindo-ſe o diviſor 57^T 5^P 5^p a 4169^p, e ſendo 1^p hum 72-*avo* da *toeſa*, o meſmo diviſor ſe reduzirá a eſta fracçaõ da *toeſa* $\frac{4169}{72}$. Ora para dividir por huma fracçaõ, he neceſſario inverter-lhe primeiro os termos, e depois multiplicar por ella (n. 109.) Logo no exemplo propoſto deveremos multiplicar por $\frac{72}{4169}$; que vem a ſer o meſmo que multiplicar primeiro por 72, e depois dividir por 4169, como a regra preſcreve.

Co-

Como a divisaõ por hum numero complexo se reduz á divisaõ por hum numero incomplexo, do modo que temos visto: sobre as unidades do quociente se guardará o mesmo que assima dissemos (n. 126. 127.).

Aqui se poderia fallar tambem da multiplicaçaõ, e divisaõ geometrica, pelas quais se calculaõ as mediçoens *Geodesicas* e *Stereometricas*. Mas estas operaçoens pelo que respeita á fórma do calculo naõ differem em nada das que temos exposto. Sómente faltaria explicar a natureza das unidades dos factores, e do producto; Porém reservamos isso para a Geometria, onde se entenderá com mais facilidade.

Da formaçaõ dos numeros quadrados, e extracçaõ das suas raizes.

129 CHama-se *quadrado* de hum numero o producto, que resulta da multiplicaçaõ delle por si mesmo. Assim 25 he o quadrado de 5 por que resulta da multiplicaçaõ de 5 por 5.

130 *Raiz quadrada* de qualquer numero he o numero que multiplicado por si mesmo produz o dito numero. Assim 5 he a raiz quadrada de 25, e 7 a raiz quadrada de 49 &c.

131 He pois o numero que se *quadra* multiplicando e multiplicador ao mesmo tempo; e por conseguinte he duas vezes factor do producto (n. 42.) Donde vem, que o dito producto, ou quadrado se chama tambem *segunda potencia* do mesmo numero.

Para achar o quadrado de hum numero, naõ he necessario mais doque multiplicallo por si mesmo, conforme as regras ordinarias da Multiplicaçaõ. Mas para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, ou para vir pelo quadrado no conhecimento da raiz, he neceſſario hum methodo particular, principalmente quando o numero conſtar de mais que dous algariſmos.

Se o numero propoſto conſtar de hum ou dous algariſmos, a ſua raiz, em numero inteiro, ſerá algum dos numeros digitos.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

cujos quadrados ſaõ

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Aſſim v. gr. a raiz quadrada de 72, em numero inteiro, ſerá 8; porque eſtando 72 entre 64 e 81, a ſua raiz tambem ſe achará entre as raizes dos ditos numeros, que ſaõ 8, e 9; e por conſeguinte ſerá 8 com hum quebrado. Eſte quebrado porem nunca ſe póde determinar exactamente, mas póde approximar-ſe continuamente, como mais abaixo ſe moſtrará.

132 A raiz quadrada de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-ſe numero *ſurdo irracional*, ou *incommenſuravel*.

§§ Temos alguns principios derivados da Lei da Numeraçaõ, pelos quais podemos muitas vezes conhecer, que hum numero propoſto certamente naõ he quadrado, e ſaõ os ſeguintes.

Todo o numero cuja ultima letra à direita for 2, 3, 7, ou 8, naõ póde ſer quadrado.

E todo o numero, que acabar em huma, tres, ſinco, ou geralmente, em numero impar de cifras, naõ ſerá quadrado.

Se de qualquer numero lançarmos fóra os *noves*, e ficar no reſto 2, 3, 5, 6, ou 8, conheceremos que naõ he quadrado. E o que deixar de reſto 3, ou 6, naõ ſómente naõ ſerá quadrado, mas naõ terá raiz racional de qualquer grão que ella ſeja.

Do meſmo modo, ſe de hum numero tirarmos os *onzes*, e tivermos de reſto 2, 6, 7, 8, ou 10, naõ poderá ſer quadrado.

Os

Os numeros, que naõ forem incluidos neſtas regras poderáõ ſer quadrados, mas naõ ſe ſegue por iſſo que o ſejaõ neceſſariamente. §§

133 Em quanto aos numeros de mais letras que duas, obſervando o que ſe paſſa na formaçaõ do quadrado, acharemos o methodo inverſo de lhes extrahir a raiz.

Para quadrar qualquer numero, por exemplo 54;

$$\begin{array}{r} 54 \\ \underline{54} \\ 216 \\ \underline{270} \\ 2916 \end{array}$$

Primeiramente, multiplicaremos o 4 ſuperior pelo 4 inferior, e o producto ſerá evidentemente o *quadrado das unidades* do dito numero.

Depois, multiplicaremos o 5 ſuperior pelo 4 inferior, e teremos neſta operaçaõ o *producto das dezenas pelas unidades.*

Entaõ, multiplicaremos o 4 ſuperior pelo 5 inferior, donde reſultará o producto das unidades pelas dezenas, ou (n. 44.) o *producto das dezenas pelas unidades.*

Finalmente, multiplicaremos o 5 ſuperior pelo 5 inferior, e teremos por eſta operaçaõ o *quadrado das dezenas.*

Somando eſtes productos parciais, achamos que o numero propoſto produz o quadrado 2916, o qual vemos que ſe compoem Do *quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades* da ſua raiz 54.

134 Sendo iſto que acabamos de obſervar huma conſequencia immediata das regras da Multiplicaçaõ, he manifeſto que naõ pertence ſómente ao

numero 54, mas a todo o numero composto de dezenas e unidades. Pelo que diremos em geral, que o quadrado de todo o numero composto de dezenas e unidades contém as tres sobreditas partes a saber, o quadrado das dezenas, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades.

135 Isto supposto, como o quadrado das dezenas faz centenas (por quanto 10 vezes 10 fazem 100) he claro que o quadrado das dezenas naõ se contém nas duas ultimas letras do quadrado total. E como o producto das dezenas pelas unidades he necessariamente de dezenas, tambem he claro que o duplo deste producto se naõ contém na ultima letra do quadrado total.

136 Para voltarmos pois do quadrado 2916 a procurar a sua raiz, podemos discorrer desta maneira.

Exemplo I.

2916	54 Raiz
416	
104	
000	

Comecemos pelas dezenas da mesma raiz. A formaçaõ do quadrado nos tem mostrado, que o quadrado dellas faz huma parte de 2916, e que nada delle se acha nas duas ultimas letras 16; logo estará o dito quadrado incluido em 29. E como a raiz quadrada de 29 naõ póde ser maior que 5, concluiremos que 5 he o numero das dezenas da raiz, e o assentaremos á direita do numero proposto, como se mostra no exemplo.

Entaõ quadraremos o 5, e tiraremos o seu quadrado exacto 25 de 29, e ficará o resto 4, para ta junto do qual abaixaremos as outras duas letras 16 do numero propoſto.

Para acharmos agora as unidades da raiz, reflectiremos no que contém finalmente o reſto 416. Pelo que aſſima moſtramos ſe vê que naõ contém mais que duas partes, a ſaber, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades da meſma raiz. A primeira deſtas nos baſtará para acharmos a letra que agora buſcamos; pois ſendo ella formada do duplo das dezenas multiplicado pelas unidades, ſe a dividirmos pelo dobro das dezenas que ja conhecemos, o quociente moſtrará as unidades (n. 74). Falta pois ſaber, em que parte do reſto 416 ſe contém o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades; e como, pelo que aſſima notamos, nada delle ſe contém na ultima letra do dito reſto, neceſſariamente ſe achará em 41. Pelo que dividiremos 41 pelo dobro das dezenas 10, o qual eſcreveremos debaixo, e o quociente 4 moſtrará as unidades da raiz, que por conſeguinte ſerá 54.

He porém de advertir, que, ſem embargo de termos neſte exemplo achado o quociente 4 juſtamente como convinha, póde algumas vezes ſucceder que o quociente achado deſta maneira ſeja maior do que convem; porque 41 (iſto he, a parte reſtante depois de ſeparada a ultima letra) naõ ſómente contém o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades, mas tambem as dezenas que podem reſultar do quadrado das unidades. Por eſta raſaõ, para naõ haver duvida ſobre a letra que temos achado, uſaremos da verificaçaõ ſeguinte.

Depois de ter achado a letra das unidades 4, e de a ter eſcrito na raiz, tambem a aſſentaremos á direita do diviſor 10, que ficará 104, e multiplicaremos eſte numero pela meſma letra 4, tirando os productos successivos das partes correspondentes de 416, como praticamos na Divisaõ; e como naõ resta nada, concluiremos que a raiz he com effeito 54.

Se ficasse porém algum resto, naõ deixaria por isso a raiz de ser exacta até a casa das unidades; com tanto que o dito resto naõ fosse igual, ou maior que o dobro da raiz achada augmentado de huma unidade; mas isto he o que se naõ póde recear, pois pelo methodo assima exposto sómente podemos errar tomando o quociente maior do que convem.

A verificaçaõ, que temos ensinado, he fundada sobre a mesma formaçaõ do quadrado. Porque multiplicando 104 por 4, he evidente que se fórma ao mesmo tempo o quadrado das unidades, e o producto das unidades pelo dobro das dezenas, que era o que faltava para completar o quadrado perfeito.

137 Do que acabamos de mostrar concluiremos em geral o methodo de tirar a raiz quadrada de qualquer numero, que naõ tiver mais de quatro letras, nem menos de trez.

Depois de se terem separado com hum ponto as duas ultimas letras á direita, buscar-se-há a raiz quadrada da parte que ficar á esquerda, e essa raiz mostrará as dezenas da raiz total que se busca, e se assentará adiante do numero proposto com a distinçaõ de huma risca perpendicular, que a separe delle.

O quadrado exacto da letra achada se tirará da mesma parte, cuja raiz se buscou, e o resto se assentará debaixo, para junto do qual se abaixaráõ as duas letras, que se tinhaõ separado no numero proposto.

Nestas letras se apartará com hum ponto a ultima á direita, e as que ficarem á esquerda se dividiráõ raõ pelo dobro das dezenas da raiz, o qual ſe aſſentará por baixo.

O quociente deſta diviſaõ ſe eſcreverá adiante da primeira letra da raiz, e juntamente ao lado direito do diviſor, enchendo a caſa correſpondente á letra ſeparada.

E finalmente multiplicar-ſe-há o diviſor aſſim aumentado pelo meſmo quociente, e o producto ſe tirará do numero que fica por ſima do dito diviſor. Moſtremos iſto com outro exemplo.

Exemplo II.

PEde-ſe a raiz quadrada do numero 7569.

75.69 116.9 167	87 Raiz.
000	

Separemos primeiramente com hum ponto as duas ultimas letras 69, e buſquemos a raiz de 75, que acharemos ſer 8, e eſta letra aſſentaremos adiante da riſca; cujo quadrado exacto 64 diminuiremos de 75, aſſentando por baixo o reſto 11, para junto do qual abaixaremos as duas letras 69 que tinhamos ſeparado.

Depois no reſto total 1169 apartaremos com hum ponto a ultima letra 9, e ficará o dividendo 116, debaixo do qual eſcreveremos o diviſor 16, que he o dobro da raiz achada 8; feita a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que aſſentaremos adiante da primeira letra da raiz 8, e adiante do diviſor 16, debaixo da letra ſeparada 9.

Finalmente multiplicaremos o diviſor aſſim aumentado 167 pelo meſmo quociente 7, e diminuirenuiremos o producto do numero superior 1169; e porque naõ sobra nada, entenderemos que o numero 7569 he quadrado perfeito, e que a sua raiz exacta he 87.

138 Deve notar-se bem, que naõ se ha de partir pelo dobro das dezenas senaõ a parte que ficar á esquerda depois de separada a ultima letra. De sorte que naõ chegando ella a conter o dito dobro, naõ poderá por isso usar-se da letra separada, mas assentar-se-ha cifra no quociente. Ao contrario, se o mesmo dobro se contiver na parte, que constitue o dividendo, mais de nove vezes, naõ poderá pôr-se no quociente letra maior que 9, pela rasaõ que já dissemos tratando da Divisaõ (n. 66.).

139 Sendo bem comprehendido o que acabamos de dizer sobre a raiz quadrada dos numeros que naõ tem mais de quatro letras, he facil de entender o que se deve praticar com os numeros de mais letras. De qualquer numero de letras que deva constar a raiz, sempre a podemos considerar como composta de duas partes, das quais huma seja de dezenas, e a outra de unidades; como v. gr. o numero 874 póde considerar-se composto de 87 dezenas, e 4 unidades.

Isto supposto quando tivermos achado as duas primeiras letras da raiz pelo methodo que acabamos de expôr, pelo mesmo poderemos achar a terceira, tomando as ditas duas letras como hum só numero de dezenas, e applicando-lhes para achar a terceira todo o raciocinio que applicámos á primeira para achar a segunda.

Igualmente, quando tivermos tres letras acharemos a quarta, se for necessario, tomando as tres por hum numero total de dezenas, e praticando com ellas, o mesmo que praticámos com as duas primeiras para achar a segunda; e assim por diante.

Mas

Mas para proceder com ordem, diſtribuiremos primeiro o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, marcando-as com hum ponto. A ultima claſſe á eſquerda ſerá de huma ſó letra, quando o numero deſtas for impar.

A raſaõ deſta preparaçaõ he, porque conſiderando a raiz como compoſta de dezenas, e unidades, devem ſeparar-ſe duas letras á direita para ſe achar na parte reſtante o quadrado das dezenas (n. 135. e ſeg.). E pela meſma raſaõ, conſtando as dezenas de unidades e dezenas de dezenas, deveremos ſeparar outras duas letras; e aſſim por diante.

Exemplo III.

PEde-ſe a raiz quadrada do numero 76807696.

76.80.76.96	8764
12 8.0	
1 67	
1 1 1 7.6	
1 7 4 6	
7 0 0 9.6	
1 7 5 2 4	
00000	

Tendo diſtribuido o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, buſcaremos a raiz da ultima claſſe á eſquerda 76, que acharemos ſer proximamente 8, e aſſentaremos eſte algariſmo adiante da riſca; depois quadraremos o 8, e diminuiremos o quadrado 64 de 76, eſcrevendo por baixo o reſto 12 para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 80, ſeparando-lhe com hum ponto a ultima letra 0. Debaixo da parte que fica 128 eſcreveremos o diviſor 16 formado do dobro da raiz achada 8; e fazendo a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que eſcreveremos na raiz depois da primeira letra 8, e tambem adiante do diviſor 16. Entaõ multiplicaremos 167 pelo meſmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero 1280, eſcrevendo por baixo o reſto 111, para junto do qual traremos a claſſe ſeguinte 76, ſeparando nella a ultima letra. Por baixo da parte reſtante 1117 eſcreveremos o diviſor 174, que he o dobro da raiz até agora achada 87; e partindo 1117 por 174 acharemos o quociente 6, que aſſentaremos na raiz, e adiante do diviſor; e multiplicando 1746 pelo meſmo quociente 6, tiraremos o producto do numero 11176, e eſcreveremos debaixo o reſto 700, ao qual ajuntaremos a ultima claſſe 96, ſeparando-lhe a ultima letra. Aſſim ficará 7009, que dividiremos pelo duplo da raiz achada 876, que he 1752, e acharemos o quociente 4, que poremos na raiz, e no diviſor; e multiplicando 17524 pelo meſmo 4, tiraremos o producto do numero 70096; e porque neſta ultima operaçaõ naõ fica reſto, ſerá a raiz exacta do numero propoſto 8764.

140 Quando o numero naõ for quadrado perfeito, no fim da operaçaõ ficará neceſſariamente algum reſto; e a raiz achada ſerá a verdadeira raiz do maior quadrado que no dito numero ſe contém. Neſte caſo naõ he poſſivel extrair-ſe a raiz exactamente, mas podemos approximár-nos ao ſeu juſto valor quanto quizermos, de ſorte que o erro ſeja menor que qualquer quantidade aſſignavel.

Eſta approximaçaõ ſe faz commodamente por meio da *dizima*. Ajuntaõ-ſe ao numero dado duas ve-

vezes tantas cifras, quantas ſaõ as letras decimais que ſe querem na raiz; tira-ſe a raiz, como nos exemplos antecedentes; e nella finalmente ſe aparta com a virgula ametade das caſas decimais, que ao numero ſe ajuntaráõ. Porque, devendo o producto de huma multiplicaçaõ ter tantas letras decimais, quantas houver nos factores juntamente (n. 54.), o quadrado (cujos factores ſaõ iguais) deverá ter duas vezes mais letras decimais, do que em qualquer dos factores, iſto he, na ſua raiz ſe contem.

Exemplo IV.

PEde-ſe a raiz quadrada de 87567 exacta até a caſa das milleſimas.

Para ter milleſimas requerem-ſe tres caſas de *dizima*; ſerá logo neceſſario ajuntar ao numero dado ſeis cifras, e tiraremos a raiz quadrada de 87567000000

```
8.75.67.00.00,00 | 295917
47.5             |
49               |
-----------
 346.7
 585
-----------
  5420.0
  5909
-----------
  10190.0
   59181
-----------
   427190.0
    591827
-----------
    329111
```

Fazendo a operaçaõ como nos exemplos antecedentes, acharemos a raiz 295917 exacta até as unidades. Esta pertence ao numero 87567000000; porém nós queremos a raiz de 87567, ou de 87567,000000. Por isso cortaremos para a dizima as tres ultimas letras da dita raiz, que vem a ser ametade das cifras que ajuntamos ao numero dado, e será a raiz que buscamos 295,917 exacta até a casa das millesimas.

Do mesmo modo, se nos pedirem a raiz quadrada do numero 2 até a casa das millionesimas, tiraremos a raiz de 2000000000000, que acharemos ser 1414213, e apartando com a virgula seis algarismos á direita, será a raiz que buscamos 1,414213.

§§ A *Prova real* desta operaçaõ manifestamente se collige da mesma definiçaõ da *raiz* (n. 130.) Multiplicar-se-há esta por si mesma, e ao producto se ajuntará o resto da operaçaõ, se o houver; e assim resultarà o numero proposto, se a operaçaõ naõ estiver errada. Se v. gr. de 12541028 acharmos a raiz 3541, e o resto 2347, para verificarmos este resultado, multiplicaremos a raiz por si mesma, e ao producto 12538681 ajuntaremos o resto 2347; e porque torna a restituir-se o numero 12541028, entenderemos que naõ houve erro na operaçaõ.

Querendo usar da *prova dos noves*, tirar-se-haõ estes da raiz, e o resto se multiplicará por si mesmo, tirando-se tambem do producto os noves, se os tiver; o que ficar se ajuntará ao resto da operaçaõ, e juntamente se lhe tiraràõ os noves; e o resto final será o mesmo que deve ficar depois de lançados fóra os noves do numero proposto. Assim no mesmo exemplo, tirando os noves da raiz 3541 fica o resto 4, que multiplicado por si mesmo faz 16, lançando fóra 9, ficaõ

caõ 7, que ſomados com o reſto da operaçaõ 2347, e tirando ao meſmo tempo os noves, finalmente daráõ o reſto 5; e eſte he o que deve ſobrar tirados os noves do numero dado 12541028, como ſobra com effeito. A prova dos *onzes* ſe applica como a dos *noves*, e de ambas ſe entenderá aqui o meſmo que ja fica advertido (n. 75.) §§

141 Temos viſto aſſima (n.106.), que para multiplicar hum quebrado por outro, he neceſſario multiplicar entre ſi os numeradores, e da meſma ſorte os denominadores. Por conſeguinte, para quadrar hum quebrado deveremos quadrar ambos os ſeus termos. Aſſim o quadrado de $\frac{2}{3}$ he $\frac{4}{9}$, o de $\frac{4}{5}$ he $\frac{16}{25}$ &c.

142 Logo reciprocamente, para tirar a raiz quadrada de hum quebrado, deveremos tirar as raizes do numerador, e denominador. Deſte modo a raiz de $\frac{9}{16}$ ſerá $\frac{3}{4}$, porque a raiz do numerador 9 he 3, e do denominador 16 he 4.

143 Póde ſucceder, que o numerador, ou o denominador, ou ambos juntos naõ ſejaõ quadrados perfeitos. Se o numerador ſómente o naõ for, tirar-ſe-há a ſua raiz approximada pelo methodo aſſima expoſto, à qual ſe dará por denominador a raiz exacta do denominador primitivo.

Aſſim por exemplo, querendo a raiz quadrada de $\frac{2}{9}$, tiraremos a raiz aproximada do numerador 2, que ſerá 1, 4, ou 1, 41, ou 1, 414, ou 1,4142 &c. conforme a menor ou maior exactidaõ que nos baſtar, á qual daremos o denominador 3, raiz exacta do denominador dado 9, e

acha-

acharemos que a raiz de $\frac{2}{9}$ he $\frac{1,4}{3}$, ou $\frac{1,41}{3}$, ou $\frac{1,414}{3}$, ou $\frac{1,4142}{3}$ &c.

Porém, se o denominador naõ for quadrado, multiplicar-se-haõ ambos os termos do quebrado proposto pelo mesmo denominador, e a operaçaõ será reduzida ao caso precedente.

Querendo v. gr. tirar a raiz quadrada de $\frac{3}{5}$, reduziremos primeiro este quebrado a $\frac{15}{25}$, e tirando a raiz do numerador 15 até as millesimas, no caso de bastar esta exactidaõ, acharemos que a raiz proxima de $\frac{15}{25}$ ou $\frac{3}{5}$ he $\frac{3,872}{5}$.

144 Para naõ implicar-nos com differentes especies de fracçoens ao mesmo tempo, podemos converter o resultado $\frac{3,872}{5}$ unicamente em *dizima*, partindo 3,872 por 5, e teremos a raiz de $\frac{3}{5}$ puramente em partes decimais 0,774 (n. 99.).

145 Em fim, se vierem inteiros juntos com os quebrados, os inteiros se reduziráõ á denominaçaõ dos quebrados (n. 86.), e entaõ se praticará como nos exemplos antecedentes. Para tirarmos v. gr. a raiz de $8\frac{3}{7}$, converteremos este numero em $\frac{59}{7}$ (n. 86.), e depois em $\frac{413}{49}$ (n. 143), cuja raiz approximada será $\frac{20,322}{7}$, ou 2,903.

146 Tambem se póde converter em *dizima* o quebrado, antes de se lhe tirar a raiz; advertindo, que as letras da *dizima* se haõ de buscar até fazerem o dobro das que queremos na raiz. Appli-

can-

cando este methodo ao numero $8\frac{3}{7}$, e querendo a raiz até á casa das millesimas, converteremos o dito numero em 8,428571 (n.99.), cuja raiz será 2,903, como tinhamos achado.

147 Havendo de tirar a raiz quadrada de qualquer quantidade decimal, faremos que as casas da dizima sejaõ sempre duas vezes tantas como as que deve ter a raiz, e para isso lhe ajuntaremos as cifras necessarias (n. 30.); e a raiz achada sempre terá na dizima ametade das casas da dita quantidade proposta, para o que se assentaráõ as cifras que forem necessarias entre a virgula e a primeira letra da mesma raiz.

Assim querendo extrair a raiz de 21,935 até a casa das millesimas, tiralla-hemos como de 21,935000, e será 4,683. Do mesmo modo acharemos que a raiz de 0,542 he 0,736, que a de 0,0054 he 0,073, e assim das mais.

148 O methodo, que fica exposto (n.69. e seg.) para se abbreviar a Divisaõ, tambem se póde applicar facilmente á extracçaõ da raiz. Sendo bastante, que ella se ache exacta até a casa das unidades, distribuir-se-há primeiramente em classes o numero dado, e depois se cortaráõ á direita tantas letras menos huma, quantas forem as classes, e das que ficarem se extrahirá a raiz pelo methodo até agora declarado. O ultimo resto que ficar se partirá pelo divisor da operaçaõ precedente, no qual se naõ attenderá á ultima letra da parte direita; o resto que ficar desta divisaõ se tornará a partir pelo mesmo divisor, desprezando-se nelle outra letra á direita; e assim por diante.

Da formaçaõ dos numeros cubicos, e extracçaõ das ſuas raizes.

149 SE qualquer numero ſe multiplicar pelo ſeu quadrado, o producto que reſultar he o que chamamos *cubo* do meſmo numero. Aſſim 27 he cubo do numero 3, porque reſulta da multiplicaçaõ de 3 pelo ſeu quadrado 9.

Donde ſe vê, que o numero que ſe eleva ao cubo he tres vezes *factor* do meſmo cubo; e por iſſo o cubo ſe chama tambem a *terceira potencia*, ou *potencia do terceiro grào* do meſmo numero.

150 Em geral, dizemos que hum numero ſe eleva á ſegunda, terceira, quarta, quinta &c. potencia, quando ſe multiplica 1, 2, 3, 4 &c. vezes conſecutivas por ſi meſmo, ou quando elle he 2, 3, 4, 5 &c. vezes *factor* do producto.

151 *Raiz cubica* de qualquer numero he o numero que multiplicado pelo ſeu quadrado forma o dito numero propoſto. Aſſim 3 he raiz cubica de 27, porque da multiplicaçaõ de 3 pelo ſeu quadrado 9 reſulta o numero 27.

152 Para acharmos pois o cubo de qualquer numero dado naõ he neceſſaria outra regra ſenaõ a da multiplicaçaõ; mas para extrairmos a raiz cubica de qualquer numero he neceſſario hum methodo particular, o qual acharemos examinando a formaçaõ do meſmo cubo.

Obſervaremos porem, que naõ temos neceſſidade do dito methodo para acharmos a raiz cubica em numero inteiro, ſenaõ quando o numero propoſto tiver mais de trez letras. Porque ſendo 1000 o cubo de 10, todo o numero menor que 1000, o qual por conſeguinte naõ terá mais de trez letras, terá a raiz cubica menor que 10. Deſtes numeros deveremos ſaber a raiz, para fazermos a operaçaõ nos numeros maiores.

Todo o numero pois, que naõ tiver mais do que trez letras, terá na raiz cubica, em numero inteiro, algum dos numeros digitos.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

aos quais correſpondem os cubos ſeguintes

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Aſſim acharemos que a raiz cubica de 428 em numero inteiro he 7; porque cahindo 428 entre 343 e 512, tambem a ſua raiz ſe achará entre as raizes delles 7, e 8; e por conſeguinte em quanto ás unidades inteiras concordará com o numero 7, raiz exacta do cubo proximamente menor 343.

153 Há muitos numeros que naõ podem ter raiz cubica exacta. Mas podemos uſar de tal approximaçaõ, que o defeito ſeja menor que qualquer quantidade aſſignavel, como abaixo moſtraremos, depois de termos dado o methodo de extrahir a raiz do cubo perfeito.

154 Para bem ſe entender eſte methodo, vejamos as partes de que deve conſtar o cubo de hum numero compoſto de dezenas e unidades.

Como pois reſulta o cubo da multiplicaçaõ de hum numero pelo ſeu quadrado (n. 149.), he neceſſario trazer á lembrança que o quadrado de hum numero compoſto de dezenas e unidades conſta de trez partes, a ſaber, *do quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades.*

Logo para ſe formar o cubo deveráõ multiplicar-ſe eſtas trez partes do quadrado pelas dezenas e pelas unidades da raiz.

E em primeiro lugar multiplicando-as pelas dezenas, reſultaráõ trez productos, convem a ſaber, o cubo das dezenas, dous productos do quadrado das dezenas pelas unidades, e o producto das dezenas pelo quadrado das unidades. Depois multiplicando pelas unidades reſultaráõ outros trez

pro

productos, que seráõ, o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, dous productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

Logo ajuntando os productos semelhantes, he claro, que o cubo de hum numero composto de dezenas e unidades consta de quatro partes, a saber, *do cubo das dezenas, de trez productos do quadrado das dezenas pelas unidades, de trez productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e do cubo das unidades.*

Por meio destas partes podemos formar o cubo de qualquer numero composto de dezenas, e unidades. Tomemos por exemplo o numero 43.

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Primeiramente formaremos o cubo de 4, que he 64, e advertiremos que elle deve significar *milhares*, porque o 4 mostra dezenas, e o cubo de 10 he 1000; e assim acharemos que a primeira parte do cubo total he 64000.

Entaõ multiplicaremos o triplo do quadrado das 4 dezenas, que he 48, pelas trez unidades, e teremos o producto 144, que deve mostrar centenas, porque o quadrado das dezenas faz centenas, e assim será a segunda parte do cubo que buscamos 14400.

Depois multiplicaremos o triplo das 4 dezenas que he 12 pelo quadrado das 3 unidades que he 9, e resultará o producto 108, que devendo mostrar dezenas dará a terceira parte do mesmo cubo 1080.

Fi-

Finalmente formaremos o cubo das 3 unidades, que ſerá 27, e fará a ultima parte do cubo total.

Somando em fim eſtas quatro partes acharemos que o cubo de 43 he 79507; o qual ſem duvida achariamos mais facilmente multiplicando primeiro 43 por ſi meſmo, e depois pelo producto 1849; mas aqui naõ ſe trata tanto de formar o cubo, como de moſtrar o meio, por onde ſe póde voltar reciprocamente do cubo para a ſua raiz.

155 Iſto pois ſuppoſto, eiſaqui o methodo que havemos de ſeguir na extracçaõ da raiz cubica.

Exemplo I.

BUſquemos pois a raiz cubica de 79507

Cubo	Raiz
79.507	43
155.07	
48	
79507	
00000	

Para diſtinguirmos a parte, em que ſe inclue o cubo das dezenas da raiz, deveremos ſeparar com hum ponto as tres ultimas letras 507 do numero dado, nas quais temos viſto que naõ ſe contém o dito cubo, por quanto repreſenta milhares. Da parte 79 que fica á eſquerda tiraremos pois a raiz cubica, que ſerá 4, e a eſcreveremos adiante da riſca junto ao numero dado.

Deſta letra, que achamos, e que moſtra as dezenas da raiz, formaremos o cubo exacto 64, e o tiraremos da dita parte 79, aſſentando por baixo o reſto 15, para junto do qual abaixaremos as tres letras 507 que tinhamos ſeparado, e ſerá o reſto total 15507, no qual eſtaraõ incluidas as tres partes restantes do cubo total, a saber, tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

E como a primeira destas mostra centenas, apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras 07 do dito resto, e nas que ficaõ 155 seráõ incluidos os tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades. Para acharmos pois as unidades, dividiremos 155 pelo triplo do quadrado das 4 dezenas que temos achado, que he 48, o qual escreveremos debaixo; e achando que 48 se contém *tres* vezes em 155, assentaremos 3 na raiz, e esta será a letra das unidades.

Para verificar a letra que temos achado, e conhecer ao mesmo tempo o resto, se o houver, poderiamos formar as tres partes, que se devem achar no resto 15507; mas será igualmente commodo formar todo o cubo da raiz achada 43; e reproduzindo-se o numero dado, ficaremos na certeza de que achàmos a sua raiz exactamente.

Se o numero proposto tiver mais do que seis letras, discorreremos como no exemplo seguinte:

Exemplo II.

Se nos pedirem a raiz cubica de 596947688

596.947.688	842
849 47	
192	
592704	
42436.88	
21168	
596947688	
000000.000	

Tri-