JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Escola Polytechnica do Porto,
Antigo Professor na Universidade de Coimbra,
Socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME VI

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1885

SUR UNE TRANSFORMATION POLAIRE DES COURBES PLANES

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE

Ingénieur des ponts et chaussées, à Paris

1. ρ et ω étant les coordonnées polaires du point M, appelons M_1 le point dont les coordonnées ρ_1 et ω_1 sont liées à ρ et ω par les relations

$$\omega_1 = m\omega, \quad \rho_1 = K\rho^m.$$

Si nous déterminons ainsi les points M_1 qui correspondent aux divers points M d'une courbe (M), nous obtenons une courbe (M_1) que nous appellerons *transformée d'indice m* de la courbe C.

Ce mode de transformation proposé par Chasles (*) a fait l'objet d'études de M.M. Roberts (**) et Faure (***). Tous ces géomètres ont remarqué la propriété capitale de ce mode de transformation, à savoir la *conservation des angles;* nous étions nous-même arrivé directement à cette propriété par une démonstration fort simple que l'on trouvera plus loin. Mais l'objet de la présente Note est de faire connaître quelques remarques nouvelles au sujet de cette importante méthode de transformation qui comprend comme cas particulier, pour $m = -1$, la transformation par rayons vecteurs réciproques.

(*) Note XXI de *l'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.*
(**) *Journal de Liouville*, t. XIII, p. 209.
(***) *Mémoires de l'Académie de Montpellier*, 1854, p. 463.

2. *La transformation conserve les angles.*

Appelons V et V_1 les angles que font, avec les vecteurs OM et OM_1, les tangentes aux courbes (M) et (M_1) aux points correspondants M et M_1. Nous avons

$$d\rho = \rho \operatorname{cotg} V \, d\omega ,$$

$$d\rho_1 = \rho_1 \operatorname{cotg} V_1 \, d\omega_1 .$$

Comme, d'ailleurs, $d\rho_1 = mK\rho^{m-1} d\rho$ et $d\omega_1 = m d\omega$, la seconde égalité peut s'écrire

$$mK\rho^{m-1} d\rho = K\rho^m \operatorname{cotg} V_1 \, m d\omega,$$

ou

$$d\rho = \rho \operatorname{cotg} V_1 \, d\omega.$$

Comparant avec la première égalité on voit que $V = V_1$, et le théorème est établi.

Il est à peine besoin de dire que ce théorème ne s'applique pas aux droites passant par le pôle; si deux telles droites font entre elles l'angle α, leurs transformées font l'angle $m\alpha$.

3. Corollaire. — *L'enveloppe de la transformée d'une courbe variable est la transformée de l'enveloppe de cette courbe variable.*

4. Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier d'une propriété générale bien connue.

En effet, si le point M représente la quantité complexe

$$x + y\sqrt{-1},$$

le point M_1 représente la quantité complexe

$$x_1 + y_1\sqrt{-1} = K(x + y\sqrt{-1})^m.$$

Or, d'une manière générale, si

$$x_1 + y_1\sqrt{-1} = \varphi(x + y\sqrt{-1}),$$

φ représentant une *fonction qui possède une dérivée*, la transformation qui consiste à prendre le point (x_1, y_1) pour transformé du point (x, y) conserve les angles (*).

5. *Si* ON *et* ON_1 *sont les sous-normales qui correspondent aux points* M *et* M_1, *la droite* NN_1 *est perpendiculaire à* MM_1.

En effet, les angles MON et M_1ON_1 étant droits, et les angles OMN et OM_1N_1 étant égaux entre eux, on a

$$\widehat{MOM_1} = \widehat{NON_1}$$

et

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{ON}{ON_1}.$$

Les triangles MOM_1, NON_1 sont donc semblables, et comme les côtés homologues OM et ON d'une part, OM_1 et ON_1 de l'autre, sont perpendiculaires, il en est de même des troisièmes côtés MM_1 et NN_1, ce qui démontre le théorème.

6. Nous allons maintenant faire voir comment, connaissant le centre de courbure C de la courbe (M) au point M, on peut déterminer le centre de courbure C_1 de la courbe (M_1) au point M_1.

On a

$$dV = dV_1,$$

ou, en appliquant la formule (6) de notre Mémoire *sur les transformations centrales des courbes planes* (**),

$$\left(\frac{M_1N_1}{M_1C_1} - 1\right) d\omega_1 = \left(\frac{MN}{MC} - 1\right) d\omega;$$

remplaçant $d\omega_1$ par $m d\omega$, et divisant par $d\omega_1$, nous avons

$$m \frac{M_1N_1}{M_1C_1} = \frac{MN}{MC} + m - 1.$$

(*) Voir, Briot et Bouquet, *Traité des fonctions elliptiques* (2.e édition, p. 3).

(**) *Mathésis*, t. IV, 1884, p. 73 et 97.

Soit E le point qui divise la normale M_1N_1 comme C divise la normale MN; alors, l'égalité précédente peut s'écrire

$$m\frac{M_1N_1}{M_1C_1}=\frac{M_1N_1}{M_1E}+m-1$$

ou

$$\frac{m}{M_1C_1}=\frac{1}{M_1E}+\frac{m-1}{M_1N_1}.$$

Le point C_1 se trouve ainsi parfaitement déterminé.

7. Dans le cas où $m=2$, sur lequel nous insistons plus loin, on a

$$\frac{2}{M_1C_1}=\frac{1}{M_1E}+\frac{1}{M_1N_1},$$

ce qui montre que *le centre de courbure* C_1 *est conjugué harmonique du point* M_1 *par rapport aux points* E *et* N_1.

Dans le cas où $m=-1$ (transformation par rayons vecteurs réciproques) on a

$$\frac{2}{M_1N_1}=\frac{1}{M_1E}+\frac{1}{M_1C_1},$$

c'est-à-dire que *le centre de courbure* C_1 *est conjugué harmonique du point* E *par rapport aux points* M_1 *et* N_1.

Dans le cas où $m=\frac{1}{2}$, spécialement envisagé par M.M. Roberts et Faure (*loc. cit.*), on a

$$\frac{2}{M_1E}=\frac{1}{M_1C_1}+\frac{1}{M_1N_1},$$

c'est-à-dire que *le centre de courbure* C_1 *est conjugué harmonique du point* N_1 *par rapport aux points* M_1 *et* E.

8. Nous avons déjà dit que pour $m=-1$ on tombe sur la transformation par rayons vecteurs réciproques; la transformée d'indice -1 d'une courbe est en effet inverse de la symétrique de cette courbe par rapport à l'axe polaire. Pour le cas où $m=\frac{1}{2}$ nous renvoyons au Mémoire très intéressant de M. Roberts (*).

Nous ferons ici quelques remarques au sujet du cas où $m=2$. Nous écrirons dans ce cas les formules de transformation

$$\omega_1=2\omega, \quad \rho_1=\frac{\rho^2}{a}.$$

9. On voit d'abord immédiatement que *la transformée d'une droite est une parabole ayant son foyer au point* O, car l'équation d'une droite quelconque étant

$$\rho=\frac{h}{\cos(\omega-\alpha)},$$

on trouve bien facilement que sa transformée a pour équation

$$\rho_1=\frac{\frac{2h^2}{a}}{1+\cos(\omega_1-2\alpha)}$$

parabole ayant son foyer à l'origine, dont l'axe fait avec l'axe polaire l'angle 2α, et qui a pour paramètre $\frac{2h^2}{a}$.

10. Chasles, qui avait donné le théorème précédent, a remarqué aussi que la transformée d'un cercle est un ovale de Descartes; mais n'ayant pas jugé à propos d'approfondir la question, il ne s'est pas aperçu que cet ovale n'est pas quelconque; cet ovale a un foyer double; c'est un limaçon de Pascal.

Cette remarque a déjà été faite par M.M. Cayley et Genocchi; au surplus on peut la rendre presque évidente.

En effet, si le point M figure la quantité complexe $x+y\sqrt{-1}$, et le point M_1 la quantité complexe $x_1+y_1\sqrt{-1}$, on a

$$z^2=az.$$

(*) Il faut remarquer en effet que ce que M. Roberts désigne par n est l'inverse de ce que nous appelons m.

Si le point M décrit une courbe unicursale (M), c'est-à-dire si l'on a

$$z = f(t) + \sqrt{-1}\,\varphi(t),$$

f et φ étant des fonctions rationnelles du paramètre t, le point M_1 décrit une courbe (M_1) définie par

$$\sqrt{az_1} = f(t) + \sqrt{-1}\,\varphi(t)$$

ou

$$az_1 = [f(t)^2 - \varphi(t)^2] + \sqrt{-1}\,.\,2f(t)\,\varphi(t),$$

et cette courbe est encore unicursale.

Donc, si la courbe (M) est un cercle, la courbe (M_1) sera un *ovale de Descartes unicursal*, c'est-à-dire, d'après M. Darboux, un *limaçon de Pascal*.

11. Nous avons trouvé un théorème qui, non-seulement fait connaître l'existence du foyer double, mais encore montre comment ce foyer est déterminé.

Nous avons communiqué à l'Académie des sciences de Paris (*) l'énoncé de ce théorème, que voici:

La transformée d'un cercle (M) *de centre* C *est un limaçon de Pascal ayant pour foyer simple l'origine* O *et pour foyer double le transformé commun des deux points où le cercle de centre* O *qui est orthogonal au cercle* (M) *coupe la droite* OC.

Voici maintenant la démonstration.

Soient R le rayon du cercle (M), d la longueur OC.

L'équation du cercle (M) est

$$R^2 = \rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos(\omega - \alpha).$$

Par suite, celle de sa transformée sera

$$R^2 = a\rho_1 + d^2 - 2d\sqrt{a\rho_1}\cos\left(\frac{\omega_1}{2} - \alpha\right),$$

puisque $\rho^2 = a\rho_1$ et $\omega_1 = 2\omega$.

(*) Voir *Comptes-rendus*, t. XCVII, p. 1424.

Posons, pour simplifier

$$R^2 = rd, \quad a = \mu d;$$

l'équation devient

$$r = \mu\rho_1 + d - 2\sqrt{a\rho_1}\cos\frac{\omega_1 - 2\alpha}{2},$$

ou

$$r - \mu\rho_1 - d = -2\sqrt{a\rho_1}\cos\frac{\omega_1 - 2\alpha}{2},$$

ou encore

$$(r - \mu\rho_1 - d)^2 = 4a\rho_1\cos^2\frac{\omega_1 - 2\alpha}{2}.$$

Développant, remplaçant $2\cos^2\frac{\omega_1 - 2\alpha}{2}$ par $1 + \cos(\omega_1 - 2\alpha)$, et simplifiant, nous avons

$$(1) \qquad \mu^2\rho^2{}_1 - 2\mu r\rho_1 + (r - d)^2 = 2\mu d\rho_1\cos(\omega_1 - 2\alpha).$$

Sous cette forme on reconnaît l'équation d'un ovale de Descartes ayant un foyer à l'origine, et dont l'axe fait l'angle 2α avec l'axe polaire. Soit maintenant F un foyer de la courbe, autre que le point O; ce point, étant sur l'axe de la courbe, on a, en appelant c la longueur OF, δ la distance du point F à un point quelconque (ρ_1, ω_1) de la courbe,

$$(2) \qquad \delta^2 = c^2 + \rho^2{}_1 - 2c_1\rho\cos(\omega_1 - 2\alpha).$$

Eliminons $\cos(\omega_1 - 2\alpha)$ entre les équations (1) et (2); cela nous donne

$$\delta^2 = c^2 + \rho^2{}_1 - \frac{c}{\mu d}[\mu^2\rho^2{}_1 - 2\mu r\rho_1 + (r - d)^2],$$

ou

$$\delta^2 = \left(1 - \frac{\mu c}{d}\right)\rho^2{}_1 + 2\frac{cr}{d}\rho_1 + c^2 - \frac{c(r - d)^2}{\mu d}.$$

Cette expression est de la forme

$$\delta^2 = A\rho^2_1 + 2B\rho_1 + C;$$

mais le point F est un foyer et l'équation en coordonnées bipolaires de la courbe rapportée à ses foyers O et F, est

$$\delta = m\rho_1 + n;$$

on doit donc avoir

$$B^2 - AC = 0.$$

Cela donne

$$\frac{c^2r^2}{d^2} - \left(1 - \frac{\mu c}{d}\right)\left(c^2 - \frac{c(r-d)^2}{\mu d}\right) = 0,$$

équation du 3ᵉ degré qui détermine les distances c des divers foyers à l'origine O. Divisons par c ce qui supprime la solution connue $c = 0$, effectuons et réduisons; il vient

$$\frac{\mu c^2}{d} - 2c + \frac{2rc}{d} + \frac{r^2}{\mu d} - \frac{2r}{\mu} + \frac{d}{\mu} = 0,$$

ou, en multipliant par $\frac{d}{\mu}$,

$$c^2 + \frac{2(r-d)}{\mu}c + \frac{(r-d)^2}{\mu^2} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\left(c + \frac{r-d}{\mu}\right)^2 = 0;$$

l'équation a une racine double; les deux foyers autres que le point O sont confondus au même point F.

Effectuant, nous avons

$$c=\frac{d-r}{\mu}$$

$$=\frac{1}{\mu}\left(d-\frac{R^2}{d}\right)$$

$$=\frac{d^2-R^2}{\mu d}$$

$$=\frac{k^2}{a},$$

k étant la puissance du pôle O par rapport au cercle (M).

Considérons le cercle de centre O, orthogonal au cercle (M); il coupe la droite OC aux points $(\rho=k, \omega=\alpha)$ et $(\rho=k, \omega=\alpha+\pi)$; ces deux points ont pour transformé commun le point $\left(\rho_1=\frac{k^2}{a}, \omega_1=2\alpha\right)$, c'est-à-dire le point F, et le théorème se trouve ainsi démontré.

12. On sait que le foyer double d'un limaçon de Pascal est un point double de cette courbe. On le vérifie aisément dans le mode de génération précédent.

En effet, le cercle (M) coupe la perpendiculaire élevée en O à OC aux points

$$\left(\rho=k\sqrt{-1},\ \omega=\alpha-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\rho=k\sqrt{-1},\ \omega=\alpha+\frac{\pi}{2}\right);$$

ces points ont pour transformé commun le point

$$\left(\rho_1=-\frac{k^2}{a},\ \omega_1=\alpha+\pi\right)$$

qui n'est autre que le point F.

En résumé, on pourra transformer par la méthode précédente une propriété quelconque de droites et de cercles en une propriété de paraboles de même foyer et de limaçons de Pascal ayant pour foyer simple le foyer commun à toutes les paraboles. On pourrait en donner des exemples en très grand nombre, mais cela est inutile; le lecteur y suppléera bien aisément.

SOBRE UMA CURVA DO TERCEIRO GRÁO

POR

JOÃO D'ALMEIDA LIMA

Primeiro tenente de artilheria

I

Definição geometrica

Consideremos o angulo XOY; do vertice O, como centro, com um raio qualquer, descreva-se um arco de circulo ASS'S''; dos pontos S e S', e com raios eguaes a SS', descrevam-se arcos que cortarão ASS'S'' nos pontos A e S''.

Tirem-se pelos pontos S e S' rectas parallelas á bissectriz do angulo dado; descrevam-se, com centro em O, arcos de quaesquer raios, e dos pontos T e T', V e V', em que cortam as rectas SZ e S'Z', descrevam-se com o mesmo raio egual a SS' arcos que cortarão BTT', CVV', . . . nos pontos B, C, D, . . .; o logar geometrico de todos estes pontos será uma curva AL. Esta curva gosa da propriedade seguinte: o arco II', determinado pelos pontos de intersecção da curva com OX e OY, ficará dividido por meio da corda SS' em tres partes eguaes.

Com effeito, se considerarmos que os angulos BOT'', COV'' indicam as diversas grandezas do angulo AOA'', que tende a confundir-se com o angulo dado, e como os arcos AS'S'', BTT''. . . são por construcção divididas pela corda SS' em tres partes eguaes, quando o angulo variavel se confundir com o angulo dado, ou quando a curva AL cortar os lados d'esse angulo, tambem aquella corda dividirá em tres partes eguaes o arco II'.

É evidente que para a determinação do ponto de intersecção da curva com o lado OX, basta construil-a entre limites bastante curtos.

Note-se que a curva AL tende a transformar-se n'uma recta parallela á bissectriz do angulo, e que a sua curvatura se torna quasi insensivel, quando o raio vector tirado de O se torne bastante grande; d'aqui se conclue que determinados dois pontos H e L, bastante proximos um a baixo outro a cima de OX, bastará reunil-os por meio de uma recta para determinar o ponto de intersecção da curva; practicamente a curva HL não se póde distinguir de uma linha recta.

Temos assim uma solução practica do problema da trisecção do angulo, quando HL for sufficientemente pequena.

II

Equação da curva

Vamos agora procurar a equação da curva AL (fig. 1) e as coordenadas da sua intersecção com a recta OX.

Para determinar a equação da curva, note-se que sendo o angulo

$$\widehat{SOR}=\frac{1}{2}\,.\,\widehat{SOS'}=\frac{1}{2}\,.\,\widehat{AOS},$$

será

$$SOR=\frac{1}{3}\,.\,AOR.$$

Fazendo

$$AOR=\theta,$$

e

$$AO=SO=\rho,$$

teremos no triangulo SOL

$$SL=\rho\,.\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{3};$$

e pondo

$$SS' = b,$$

resulta

$$\frac{1}{2} \cdot b = \rho \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{3} \text{.} \qquad (1)$$

Fazendo n'esta equação $\theta = \frac{\alpha}{2}$, sendo α o angulo dado, obteremos o valor de ρ, que resolve o problema.

Querendo exprimir a equação da curva em coordenadas rectangulares, tendo a origem em O, e para eixo dos xx a bissectriz do angulo dado, notemos que, sendo pela trignometria

$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos 2a$$

$$= 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos^2 a + \operatorname{sen} a (1 - 2 \operatorname{sen}^2 a),$$

resulta

$$\operatorname{sen} \theta = 3 \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{3} - 4 \cdot \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}.$$

Mas do triangulo AOR deduz-se

$$AR = y = \rho \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

e da equação (1)

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{3} = \frac{b}{2\rho};$$

logo

$$\frac{y}{\rho} = \frac{3b}{2\rho} - \frac{4b^3}{8\rho^3}$$

ou

$$2\rho^2 \cdot y = 3b\rho^2 - b^3.$$

Ora do triangulo AOR deduz-se tambem

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

por consequencia, substituindo, vem

$$(2y-3b)(x^2+y^2)+b^3=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

que é a equação da curva considerada.

A equação da recta OX é

$$y=x \,.\, \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

logo o systema das equações (2) e (3) dá as coordenadas do ponto de intersecção.

Eliminando pois a variavel y resulta a equação

$$\left(2x \,.\, \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}-3b\right)\left(1+\mathrm{tang}^2 \,.\, \frac{\alpha}{2}\right).\, x^2+b^3=0$$

ou

$$\left(2x \,.\, \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}-3b\right).\,\frac{x^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+b^3=0,$$

logo

$$x^3-\frac{3}{2}\,.\,\frac{b}{\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}\,.\,x^2+b^3\,.\,\frac{\cos^2 .\,\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}=0$$

é a equação do problema da trisecção.

REMARQUES ARITHMÉTIQUES

PAR

ERNESTO CESARO

Étudiant à Rome

I

Sur la série de Fibonacci

D'après Lamé, on sait que les nombres de k chiffres, appartenant à la série de Fibonacci

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

sont *quatre* ou *cinq*. Désignons par p la probabilité qu'ils soient plutôt quatre que cinq. Ayant réuni en un groupe les termes qui ont un même nombre de chiffres, on sait aussi que tout groupe de quatre termes est suivi par *trois* ou *quatre* groupes de cinq termes. Appelons q la probabilité qu'un groupe de quatre termes soit suivi par trois, plutôt que par quatre groupes de cinq termes. Cela posé, considérons les k premiers groupes, comprenant une totalité de n termes, n et k étant indéfiniment grands. De ces k groupes, il y en a kp de *quatre* termes, et $k(1-p)$ de *cinq*. Par suite

$$4kp+5k(1-p)=n,$$

d'où

$$p=5-\frac{n}{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

De même, parmi les kp groupes de quatre termes, kpq sont suivis par *trois* groupes de cinq termes, et $kp(1-q)$ par *quatre* groupes de cinq termes. On a donc, en négligeant un nombre *fini* de groupes,

$$3kpq + 4kp(1-q) = k(1-p),$$

d'où

$$q = 5 - \frac{1}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si l'on pose

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1},$$

on a par hypothèse, en se rappelant l'expression du terme général de la série,

$$\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}(1 \pm \varepsilon^{n+1}) < 10^k \gtreqless \frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{5}}(1 \mp \varepsilon^{n+2}).$$

Donc, pour n indéfiniment croissant, on peut écrire $k = n\log\alpha$; puis:

$$p = 5 - \frac{1}{\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = 0{,}2150\ldots.$$

Conséquemment:

«Il y a 73 à parier, contre 20 environ, que les nombres de k *chiffres, appartenant à la série de Fibonacci, sont plutôt cinq que quatre.»*

De même, la formule (2) donne

$$q = 5 - \frac{1}{5 - \cfrac{1}{\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}}} = 0{,}3493\ldots.$$

Remarquons, pour finir, que le rapport $\frac{k}{n}$ représente la probabilité qu'un terme soit le dernier d'un groupe. Par conséquent:

«*Ayant pris, au hasard, un terme de la série de Fibonacci, la probabilité que le terme suivant admette un chiffre de plus est*

$$\log \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 0{,}2089 \ldots \text{»}$$

II

Sur une identité générale

Soient

$$A(x) = \Sigma \alpha_n x^n, \quad B(x) = \Sigma \beta_n x^n,$$

n variant de 1 à $+\infty$, par valeurs *entières*. Il est aisé de démontrer que

$$\Sigma \beta_n A(x^n) = \Sigma \alpha_n B(x^n) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Représentons par $C(x)$ le premier membre, et évaluons, dans le développement de $C(x)$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient γ_n de x^n. Soient, dans ce but, a, b, c, ... *tous les diviseurs* de n, et observons que x^n se rencontre seulement dans les sommes $A(x^a)$, $A(x^b)$, $A(x^c)$, ... Son coefficient est donc

$$\gamma_n = \beta_a \alpha_{\frac{n}{a}} + \beta_b \alpha_{\frac{n}{b}} + \beta_c \alpha_{\frac{n}{c}} + \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Or, les nombres a, b, c, ... ne diffèrent pas, abstraction faite de l'ordre, des nombres $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{b}$, $\frac{n}{c}$, ... Il en résulte que l'on peut, dans l'égalité (2), échanger entre elles les lettres α et β, ce qui prouve bien que, dans le second membre de (1), le coefficient de x^n est aussi γ_n. En conséquence, l'identité (1) se trouve

*

établie. Par exemple, pour $\alpha_n = 1$, $\beta_n = n$, cette identité devient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \ldots \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{x^3}{(1-x^3)^2} + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

On voit, en outre, d'après (2), que le coefficient de x^n, dans le développement de chaque membre, représente la *somme des diviseurs* de n. L'identité (3) a été proposé par M. Catalan aux lecteurs de *Mathesis* (t. II, p. 47).

Remarquons, en passant, que, si les fonctions A et B jouissent de la propriété

$$\psi(x)\,\psi(y) = \psi(xy), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

l'identité (1) revient à écrire

$$B[A(x)] = A[B(x)].$$

Cette remarque nous sera utile ailleurs. — Il serait aisé d'obtenir un grand nombre d'identités analogues à (3). Nous nous bornerons à signaler la généralisation de la *série de Lambert*, que l'on obtient en imaginant deux fonctions f, F, liées entre elles par l'égalité

$$f(a) + f(b) + f(c) + \ldots = F(n). \ldots\ldots\ldots (5)$$

Si la fonction ψ jouit de la propriété (4), on peut prendre

$$\alpha_n = \psi(n), \quad \beta_n = \psi(n)\,f(n), \quad \gamma_n = \psi(n)\,F(n),$$

et l'on a

$$\Sigma\,\psi(n)\,f(n)\,\Psi(x^n) = \Sigma\,\psi(n)\,F(n).x^n, \ldots\ldots\ldots (6)$$

pourvu que l'on pose

$$\Psi(x) = x\psi(1) + x^2\psi(2) + x^3\psi(3) + \ldots.$$

Par exemple, pour $f(x)=\varphi(x)$, et, par suite, $F(x)=x$, la relation (6) devient

$$\Sigma\,\psi(n)\,\varphi(n)\,\Psi(x^n)=\Sigma\, n\psi(n)\,.\,x^n.$$

En particulier, pour $\psi(x)=1$, on trouve la formule

$$\frac{x\varphi(1)}{1-x}+\frac{x^2\varphi(2)}{1-x^2}+\frac{x^3\varphi(3)}{1-x^3}+\ldots=\frac{x}{(1-x)^2},$$

dûe à Liouville. De même, por $\psi(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$, on obtient

$$\frac{x\varphi(1)}{1+x^2}-\frac{x^3\varphi(3)}{1+x^6}+\frac{x^5\varphi(5)}{1+x^{10}}-\ldots=\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

etc., etc. Ces séries sont susceptibles de transformations remarquables. Indiquons seulement celle qui se rapporte au cas de $\psi(x)=1$. Dans cette hypothèse, la formule (6) devient

$$\Sigma\,\frac{x^n f(n)}{1-x^n}=\Sigma\, x^n\,F(n).\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

De la même manière on démontrerait les formules

$$\Sigma\,\frac{x^{n^2} f(n)}{1-x^n}=\Sigma\, x^n\,F_1(n),\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\Sigma\,\frac{x^{n(n+1)} f(n)}{1-x^n}=\Sigma\, x^n\,F_1(n)-\Sigma\, x^{n^2} f(n),\ \ldots\ldots \quad (9)$$

la fonction F_1 étant définie par l'égalité (5), dans laquelle on supprime les diviseurs supérieurs à $\sqrt{n}$. En ajoutant membre à membre les égalités (8) et (9), on obtient

$$\Sigma\,\frac{1+x^n}{1-x^n}\,x^{n^2} f(n)=2\,\Sigma\, x^n\,F_1(n)-\Sigma\, x^{n^2} f(n).\ \ldots\ldots \quad (10)$$

Dans le cas particulier de $f(x)=1$, il est clair que $2F_1(n)-F(n)$ est 1 ou 0, suivant que n est ou n'est pas carré. Il en résulte

$$\Sigma x^{n^2}=2\,\Sigma x^n F_1(n)-\Sigma x^n F(n).$$

Par substitution dans (10), et comparaison avec (7), on obtient la *formule de Clausen*

$$\Sigma\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{1+x}{1-x}x+\frac{1+x^2}{1-x^2}x^4+\frac{1+x^3}{1-x^3}+x^9\ldots$$

Soit encore $f(x)=x$. Faisons aussi $f(x)=\frac{1}{x}$, et désignons par $G_1(x)$ la valeur correspondante de $F_1(x)$. Il est évident que l'excès de $F_1(n)+nG_1(n)$ sur $F(n)$ est $\sqrt{n}$ ou 0, suivant que n est ou n'est pas carré. Il en résulte

$$\Sigma nx^{n^2}=\Sigma[F_1(n)+nG_1(n)]\,x^n-\Sigma x^n F(n).\ \ldots\ldots \quad (11)$$

Or, l'égalité (8) donne

$$\Sigma\frac{nx^{n^2}}{1-x^n}=\Sigma x^n F_1(n),\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

De la même manière on démontrerait les formules

$$\Sigma\frac{1}{n}\cdot\frac{x^{n^2}}{1-x^n}=\Sigma x^n G_1(n).\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

La formule (13) devient, par dérivation,

$$\Sigma\frac{nx^{n^2}}{1-x^n}+\Sigma\frac{x^{n(n+1)}}{(1-x^n)^2}=\Sigma nx^n G_1(n).\ \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Les égalités (12) et (14) ajoutées membre à membre donnent, en tenant compte de (11),

$$\Sigma n\frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2}+\Sigma\frac{x^{n(n+1)}}{(1-x^n)^2}=\Sigma x^n F(n),$$

ou bien, en vertu de (7),

$$\Sigma \frac{nx^n}{1-x^n} = \frac{1+x}{1-x} x + 2\frac{1+x^2}{1-x^2} x^4 + 3\frac{1+x^3}{1-x^3} x^9 + \ldots$$

$$+ \frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{x^6}{(1-x^2)^2} + \frac{x^{12}}{(1-x^3)^2} + \frac{x^{20}}{(1-x^4)^2} + \ldots;$$

etc., etc. Dans un autre article, nous montrerons comment l'on peut appliquer ces formules à l'évaluation asymptotique des principales fonctions, que l'on rencontre dans la Théorie des Nombres.

SOBRE A MUDANÇA DA VARIAVEL INDEPENDENTE

POR

RAYMUNDO FERREIRA DOS SANCTOS

Vamos n'esta nota dar a expressão da derivada da ordem n de y relativamente a x em funcção das derivadas d'estas variaveis relativamente a uma nova variavel independente qualquer.

Temos primeiro

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d\,\dfrac{dy}{dx}}{dx}, \quad y''' = \frac{d\left(\dfrac{d\,\dfrac{dy}{dx}}{dx}\right)}{dx}, \text{ etc.}$$

Pondo

$$dy = u, \quad \frac{1}{dx} = v,$$

vem

$$y' = \frac{dy}{dx} = uv, \quad y'' = vd\,(uv), \quad y''' = vd\,[vd\,(uv)], \text{ etc.,}$$

por onde se vê que cada derivada se fórma da anterior substituindo u por $d\,(uv)$. Por outra parte, a fórmula de Leibnitz dá

$$d\,(uv) = \sum \frac{1}{h_1\,!\,(1-h_1)\,!}\, d^{h_1} v d^{1-h_1} u,$$

e portanto será

$$y'' = v \sum \frac{1}{h_1\,!\,(1-h_1)\,!}\, d^{h_1} v d^{1-h_1} u.$$

Substituindo n'esta fórmula u por $d\,(uv)$ e notando que é

$$d^{1-h_1}\,d\,(uv) = d^{2-h_1}\,(uv)$$

vem

$$y''' = v \sum \frac{1}{h_1\,!\,(1-h_1)\,!}\,d^{h_1}\,vd^{2-h_1}\,(uv),$$

mas temos

$$d^{2-h_1}\,(uv) = \sum \frac{(2-h_1)\,!}{h_2\,!\,(2-h_1-h_2)\,!}\,d^{h_2}\,vd^{2-h_1-h_2}\,u,$$

logo

$$y''' = v \sum \frac{1}{h_1\,!\,(1-h_1)\,!} \times \frac{(2-h_1)\,!}{h_2\,!\,(2-h_1-h_2)\,!}\,d^{h_1}\,vd^{h_2}\,vd^{2-h_1-h_2}\,u$$

$$= v \sum \frac{2-h_1}{h_1\,!\,h_2\,!\,(2-h_1-h_2)\,!}\,d^{h_1}\,vd^{h_2}\,vd^{2-h_1-h_2}\,u.$$

Substituindo n'esta ultima fórmula u por $d\,(uv)$ e notando que é

$$d^{2-h_1-h_2}\,d\,(uv) = d^{3-h_1-h_2}\,(uv),$$

cujo termo geral é

$$\frac{(3-h_1-h_2)\,!}{h_3\,!\,(3-h_1-h_2-h_3)\,!}\,d^{h_3}\,vd^{3-h_1-h_2-h_3}\,u,$$

temos

$$y^{(4)} = v \sum \frac{(2-h_1)\,(3-h_1-h_2)}{h_1!\,h_2!\,h_3!\,(3-h_1-h_2-h_3)!}\,d^{h_1}\,vd^{h_2}\,vd^{h_3}\,vd^{3-h_1-h_2-h_3}\,u.$$

Do mesmo modo se acha $y^{(5)}$, $y^{(6)}$, etc.

D'esta maneira deduz-se por inducção a lei seguinte:

$$y^{(n)}=v\sum\frac{(2-h_1)(3-h_1-h_2)\ldots(n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-2})}{h_1!h_2!\ldots h_{n-1}!(n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1})!}\times$$

$$\times d^{h_1}vd^{h_2}v\ldots d^{h_{n-1}}vd^{n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1}}u.$$

Para a demonstrar supponhamos que é verdadeira para a ordem n, e vamos provar que é verdadeira n'este caso tambem para a ordem $n+1$.

Para isso substituamos u por $d\,(uv)$.

Será

$$d^{n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1}}d\,(uv)=d^{n-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1}}(uv)$$

e a fórmula de Leibnitz dará

$$d^{n-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1}}(uv)=$$

$$=\sum\frac{(n-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1})!}{h_n!\,(n-h_1-h_2-\ldots-h_n)!}d^{h_n}vd^{n-h_1-h_2-\ldots-h_n}u,$$

e substituindo em $y^{(n)}$, obteremos

$$y^{(n+1)}=v\sum\frac{(2-h_1)\ldots(n-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1})}{h_1!\,h_2!\ldots h_n!\,(n-h_1-h_2-\ldots-h_n)!}\times$$

$$\times d^{h_1}vd^{h_2}v\ldots d^{h_n}vd^{n-h_1-h_2-\ldots-h_n}u.$$

Por outra parte a fórmula conhecida

$$(1)\quad y^{(n)}=\sum\frac{n!\,m(m-1)\ldots(m-i+1)\,(\varphi'x)^{\alpha}(\varphi''x)^{\beta}\ldots(\varphi^{(n)}x)^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda}}[\varphi(x)]^{m-i},$$

que dá a derivada da ordem n da funcção $y=[\varphi(x)]^m$, dá as differenciaes da ordem $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$ de

$$v=\frac{1}{dx}=(dx)^{-1}:$$

$$d^{h_1}v=\sum(-1)^{i_1}\frac{h_1!\,i_1!\,(d^2x)^{\alpha_1}(d^3x)^{\beta_1}\ldots(d^{h_1+1}x)^{\lambda_1}}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!\,(2)^{\beta_1}(3!)^{\gamma_1}\ldots(h_1!)^{\lambda_1}}dx^{-1-i_1},$$

$$d^{h_2}v=\sum(-1)^{i_2}\frac{h_2!\,i_2!\,(d^2x)^{\alpha_2}(d^3x)^{\beta_2}\ldots(d^{h_2+1}x)^{\lambda_2}}{\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!\,(2)^{\beta_2}(3!)^{\gamma_2}\ldots(h_2!)^{\lambda_2}}dx^{-1-i_2},$$

. . . .

onde $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_2, \beta_2, \ldots$ representam todas as soluções inteiras e positivas das equações

$$\alpha_1+\beta_1+\ldots+\lambda_1=i_1,\quad \alpha_2+\beta_2+\ldots+\lambda_2=i_2,\quad \ldots$$
$$\alpha_1+2\beta_1+\ldots+h_1\lambda_1=h_1,\quad \alpha_2+2\beta_2+\ldots+h_2\lambda_2=h_2,\quad \ldots$$

Effectuando o producto d'estas differenciaes, vem

$$d^{h_1}v\,d^{h_2}v\ldots d^{h_{n-1}}v=\sum(-1)^{i_1+i_2+\cdots}\times$$

$$\times\frac{h_1!\,h_2!\ldots h_{n-1}!\,i_1!\,i_2!\ldots(d^2x)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots}(d^3x)^{\beta_1+\beta_2+\cdots}\ldots}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!\,\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!\ldots(2!)^{\beta_1+\beta_2+\cdots}(3!)^{\gamma_1+\gamma_2+\cdots}\ldots}dx^{-n-i_1-\cdots}.$$

Substituindo este valor em (1), teremos

$$y^{(n)}=\sum(-1)^{i_1+i_2+\cdots}\frac{(2-h_1)(3-h_1-h_2)\ldots(n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-2})}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!\,\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!\ldots}\times$$

$$\times\frac{(d^2x)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots}(d^3x)^{\beta_1+\beta_2+\cdots}\ldots i_1!\,i_2!\ldots d^{n-h_1-\ldots-h_{n-1}}S}{(2!)^{\beta_1+\beta_2+\cdots}(3!)^{\gamma_1+\gamma_2+\cdots}\ldots(n-1-h_1-\ldots-h_{n-1})!}\times$$

$$\times(dx)^{-(n+i_1+\ldots+i_{n-1})},$$

onde $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_2, \beta_2, \ldots$ representam as soluções inteiras e positivas das equações

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \quad + 2\beta_1 \quad + \ldots + h_1 \quad \lambda_1 \quad &= h_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
\alpha_{n-1} + 2\beta_{n-1} + \ldots + h_{n-1}\lambda_{n-1} &= h_{n-1}
\end{aligned}$$

e $i_1, i_2, \ldots$ são dados pelas egualdades

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \quad + \beta_1 \quad + \ldots + \lambda_1 \quad &= i_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
\alpha_{n-1} + \beta_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} &= i_{n-1}.
\end{aligned}$$

Devemos observar que $h_1, h_2, \ldots$ devem ter todos os valores inteiros e positivos, o primeiro até um, o segundo até dois, etc.

BIBLIOGRAPHIA

O. Verger.— Introduzione all Algebra.— Torino.

Occupa-se o sr. Verger, professor no Instituto technico de Roma, no seu excellente livro da maior parte das doutrinas relativas á Algebra que entre nós fazem parte do curso dos lyceus. Damos noticia d'elle para chamar a attenção sobre o modo como o auctor distribue as materias, que, apezar de ter a seu favor a grande auctoridade de Euler, não tem sido adoptado entre nós pelos que se occupam da Algebra Elementar.

Consta de duas partes o livro do sr. Verger. Na primeira tracta das operações algebricas, considerando primeiro as operações sobre monomios e em seguida as operações sobre polynomios. Esta separação entre as operações sobre monomios e as operações sobre polynomios parece-me preferivel a considerar ao mesmo tempo os monomios e polynomios, por se graduarem assim melhor as difficuldades e por se apreciarem melhor as propriedades caracteristicas das mesmas operações.

Nas operações sobre monomios considera primeiro as operações directas: somma, multiplicação e elevação a potencias; e em seguida as operações inversas: subtracção, divisão, extracção de raizes e logarithmos, considerando a indagação do logarithmo como segunda operação inversa da elevação a potencias. N'esta primeira parte vem exposta de uma maneira notavelmente clara a theoria das quantidades negativas, a dos expoentes negativos, e a dos expoentes fraccionarios.

Depois das operações sobre monomios vêm as operações sobre polynomios, dispostas pela mesma ordem que as operações sobre monomios. D'este modo a lei do binomio de Newton toma o logar que naturalmente lhe pertence, isto é, quando se tracta da elevação a potencias. Para evitar considerações extranhas, esta fórmula é demonstrada directamente sem o auxilio da theoria das combinações.

Na segunda parte tracta o auctor de applicar os principios postos na primeira á resolução das equações do primeiro e segundo gráo, e á theoria das progressões, e em seguida vem a theoria dos logarithmos considerados como termos de uma progressão arithmetica. Termina pela resolução dos problemas de juros compostos e annuidades.

A analyse minuciosa do livro do sr. Verger não póde ser aqui feita; diremos só que pela sua leitura se vê que o auctor attendeu cuidadosamente não só á organisação geral do livro, mas tambem á exposição de cada doutrina; n'uma palavra, que é um livro extremamente recommendavel.

M. d'Ocagne. — Coordonnées parallèles et axiales. — Paris (Gauthiers-Villars), 1885.

O objecto da importante memoria de que vamos dar noticia, é o estudo de dois systemas de coordenadas que, como mais simples, o sr. d'Ocagne escolheu entre os numerosos systemas de coordenadas tangenciaes para estudar desenvolvidamente, e que correspondem o primeiro ás coordenadas rectilineas ordinarias e o segundo ás coordenadas polares ordinarias.

No primeiro d'estes systemas, que o auctor chama *coordenadas parallelas*, referem-se os pontos e as linhas a dois pontos fixos (*origens das coordenadas*) pelos quaes se fazem passar duas rectas parallelas (*eixos de coordenadas*). Uma linha recta é determinada pelos segmentos u e v dos eixos comprehendidos entre as origens de coordenadas e as intersecções d'estas parallelas com os eixos. Um ponto é determinado por uma equação do primeiro gráo em u e v, etc.

Os §§ I, II, III, IV, V são destinados ao esboço de uma Geometria analytica fundada n'este systema de coordenadas, e ahi considera os principaes problemas relativos ao ponto e á linha recta, e em seguida as curvas em geral, e, em especial, as curvas representadas por uma equação do segundo gráo.

Ao outro systema de coordenadas chama o sr d'Ocagne *coordenadas axiaes*, e n'elle os pontos e linhas referem-se a uma recta fixa (*eixo*) e a um ponto d'esta recta (*polo*). Uma recta qualquer é determinada pela sua inclinação sobre o eixo, e pela distancia da sua intersecção com este eixo ao polo. O estudo d'este systema de coordenadas e a sua applicação á determinação de alguns logares geometricos faz objecto dos §§ VI, VII, VIII.

Os §§ IX e X põem fóra de duvida a grande importancia dos systemas estudados pelo auctor. A comparação de uma equação em coordenadas rectilineas ordinarias com a mesma equação em coordenadas parallelas, leva-o a um methodo pelo qual acha um theorema correlativo a cada theorema que resulte de uma equação em coordenadas ordinarias. Applicações numerosas fazem vêr a importancia d'este methodo de transformação geometrica.

A memoria de que estamos dando noticia não é só recommendavel aos geometras, é tambem recommendavel aos engenheiros. Sabe-se que estes empregam muitas vezes os methodos graphicos para effectuar certos calculos; e, em especial, para resolver a equação

$$z^n + pz + q = 0$$

deve-se um methodo graphico ao sr. Lalanne. Fundado no emprego das coordenadas parallelas, o sr. d'Ocagne dá um methodo graphico para resolver esta equação, mais exacto do que o do sr. Lalanne.

E. Cesàro. — *Intorno a taluna funzioni isobarique.*
—— *Dérivées des fonctions de fonctions.*
—— *Notes sur le Calcul isobarique.*

N'esta serie de artigos, publicados o primeiro no *Jornal de Battaglini* (1884) e os outros nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1884 e 1885), o sr. Cesàro faz o estudo d'um algorithmo importante, que comprehende como caso particular as funcções *aleph* de Wronski, e que elle designa pelo nome de *algorithmo isobarico*. Este algorithmo consiste na somma de todos os productos, analogos a

$$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_m),$$

onde $x_1, x_2, \ldots x_m$ representam todas as soluções em numeros inteiros da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p.$$

Na primeira memoria citada o auctor expõe as propriedades d'este algorithmo, e nas outras faz d'elle applicações a muitas questões de analyse. Citaremos as applicações á determinação das sommas das potencias de quantidades dadas, ao estudo das series recorrentes, á theoria dos numeros de Bernoulli, á determinação das derivadas de funcções de funcções, á Analyse partitiva, etc., para se avaliar a importancia do algorithmo estudado pelo joven geometra italiano.

J. M. Rodrigues. — *Desenvolvimento de funcções algebricas* (*Revista scientifica do Porto*, tomo I, 1885).

N'este artigo o sr. Rodrigues faz applicação da sua fórmula, publicada a pag. 137 do tomo IV d'este jornal, ao desenvolvimento das funcções algebricas implicitas em serie ordenada segundo as potencias decrescentes da variavel independente. Depois applica os resultados a que chega á determinação das assymptotas de diversas ordens das curvas algebricas.

A. Schiappa Monteiro. — *Solution d'un problème de géométrie élémentaire* (*Revista scientifica do Porto*, tomo I, 1885).

O problema que o sr. Schiappa resolve é o seguinte:

Traçar por um ponto dado n'um plano d'um circulo uma transversal tal, que as distancias d'este ponto aos pontos de intersecção com o circulo estejam n'uma razão dada.

G. T.

INTRODUCÇÃO A' THEORIA DAS FUNCÇÕES

POR

F. Gomes Teixeira

CAPITULO I

THEORIA DOS IMAGINARIOS E REGRAS PARA O SEU CALCULO

I

Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra

1. — Sabe-se desde a Algebra elementar que o calculo dos imaginarios se faz seguindo as regras do calculo das quantidades reaes. Torna-se porém necessario demonstrar que são verdadeiros todos os resultados reaes a que se chega por este meio. Daremos duas demonstrações d'esta proposição, uma analytica e outra geometrica, porque cada uma d'ellas tem sua importancia propria e dão ambas muita luz sobre os principios geraes do Calculo das operações (*) que vamos aqui recordar rapidamente por d'elles termos de usar n'estas demonstrações.

2. — O fim da Arithmetica é definir as *combinações* que se pódem fazer com numeros, isto é as *operações numericas;* em seguida transformar estas operações umas nas outras; e emfim procurar as *propriedades* dos numeros relativas a estas operações. Principia-se pelas operações relativas aos numeros inteiros, e em seguida generalisa-se as definições das

(*) Vid. para um estudo mais completo do Calculo das operações o *Cours de Calcul infinitésimal par J. Hoüel*, tomo I.

operações de modo que sejam applicaveis aos numeros fraccionarios e incommensuraveis.

A Arithmetica não introduz quantidades negativas nem *à fortiori* imaginarias.

Em logar de combinar numeros, podemos combinar lettras que representem numeros ou objectos; e então, se definirmos estas operações de modo que os seus principios caracteristicos contenham os principios caracteristicos das combinações numericas, forma-se uma sciencia que tem a Arithmetica como caso particular. Esta sciencia é a Algebra que se occupa pois de definir estas *combinações* que se pódem fazer com lettras, isto é as *operações algebricas*, e de transformal-as umas nas outras.

As *definições* das operações algebricas e os seus *principios caracteristicos* são os seguintes:

1.° — *Somma* das lettras a e b é a combinação d'estas lettras, cujos principios caracteristicos são:

$$1)\quad a+b=b+a,$$

$$2)\quad (a+b)+c=(a+c)+b.$$

$$3)\quad a+o=a.$$

2.° — *Subtracção* das lettras a e b é a operação inversa da somma.

3.° — *Multiplicação* é a combinação das lettras a e b caracterisada pelos principios seguintes:

$$1)\quad a\,b=b\,a,$$

$$2)\quad (a\,b)\,c=(a\,c)\,b,$$

$$3)\quad (a+b)\,c=a\,c+b\,c,$$

$$4)\quad (+a)\,(+b)=+a\,b,\ (+a)\,(-b)=-a\,b,\quad (-a)\,(-b)=+a\,b,$$

$$5)\quad a\times 0=0,\ a\times 1=a.$$

4.° — *Divisão* é a operação inversa da multiplicação.

5.° — *Elevação a potencias* é a combinação caracterisada pela propriedade:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

6.° — *Extracção das raizes* é a operação inversa da elevação a potencias.

Examinando um tractado qualquer de Algebra, é facil de vêr que a transformação das operações algebricas umas nas outras é fundada unicamente sobre os principios que vimos de enunciar; e como estes principios subsistem para os numeros, a Algebra contem como caso particular a Arithmetica.

A Algebra sendo pois mais geral do que a Arithmetica, póde chegar a resultados que não tenham significação na segunda d'estas sciencias. E' o que acontece com as quantidades negativas e com os imaginarios. Para lhes achar uma significação, é necessario que se dê ás lettras que entram nas combinações algebricas uma significação differente da de numero; ou, se se quer que as lettras continuem a representar numeros, é necessario definir as operações sobre os numeros d'uma maneira mais geral do que na Arithmetica ordinaria, como vamos vêr.

---

*

II

Theoria analytica dos imaginarios

***3.**—A theoria analytica dos imaginarios é devida a Cauchy. (*) Vamos aqui expol-a com a fórma nova que lhe dêmos na nossa memoria intitulada—*Sur la théorie des imaginaires.* (**)

Consideremos os polynomios $f(i)$ e $f_1(i)$ inteiros relativamente a i, e definamos as operações que se podem fazer com elles.

I—Chamaremos *addicção congrua* a operação que tem por fim procurar o resto da divisão por i^2+1 da somma dos restos dos polynomios dados. Empregaremos para a indicar o signal $+!$. De modo que $f(i) +! f_1(i)$ representa o resto da divisão por i^2+1 da somma ordinaria dos restos de $f(i)$ e $f_1(i)$. Se os polynomios dados são $a+bi$ e $a'+b'i$ a addicção congrua coincide com a somma ordinaria.

E' evidente que a addicção congrua satisfaz a todos os *principios caracteristicos* da addicção (2, 1.°).

II—Chamaremos *subtracção congrua* a operação inversa da addicção congrua. Empregaremos para a indicar o signal $-!$. Assim $f(i) -! f_1(i)$ representa o polynomio inteiro de menor grão cujo resto junto ao de $f_1(i)$ dá o mesmo resto que $f(i)$ dividido por i^2+1; ou, por outras palavras, o polynomio inteiro de menor grão cujo resto da divisão por i^2+1 é igual á differença ordinaria dos restos de $f(i)$ e $f_1(i)$.

Em virtude d'esta definição, a quantidade negativa $-!\,a$ representa um polynomio inteiro relativamente a i cujo resto junto a a dá zero. Este polynomio é $a\,i^2$.

(*) *Cauchy. Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, (tomo IV—pag. 87 a 110).

(**) Esta memoria foi publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (tomo VII—1883), foi transcripta no jornal *Mathesis* (tomo III) e foi traduzida em italiano pelo snr. Gastaldi para a *Rivista di matematica* (tomo V).

III — Chamaremos *multiplicação congrua* a operação que tem por fim procurar o resto da divisão por $i^2 + 1$ do producto dos restos das funcções dadas. Represental-a-hemos pelo signal $\times\,!$, de modo que $f(i) \times ! f_1(i)$ representará o resto da divisão por $i^2 + 1$ do producto dos restos de $f(i)$ e $f_1(i)$.

Por serem $f(i)$ e $f_1(i)$ polynomios inteiros relativamente a i, os restos da sua divisão por $i^2 + 1$ serão da fórma $a + b\,i$ e $a' + b'\,i$. Mas o producto ordinario

$$(a + b\,i)(a' + b'\,i) = a\,a' + (a\,b' + b\,a')\,i + b\,b'\,i^2$$

sendo dividido por $i^2 + 1$ dá de resto

$$a\,a' - b\,b' + (a\,b' + b\,a')\,i,$$

logo será

$$f(i) \times ! f_1(i) \equiv a\,a' - b\,b' + (a\,b' + b\,a')\,i,$$

empregando o signal $\equiv$ para designar as igualdades quando as operações são definidas como estamos vendo.

A multiplicação, como vimos de a definir, satisfaz a todos os *principios caracteristicos* da multiplicação algebrica (2, 3.º), como vamos agora vêr.

1) Primeiramente a ordem dos factores é evidentemente arbitraria, como na multiplicação ordinaria.

2) E' tambem evidente que o quinto principio subsiste.

3) *Para obter o producto congruo de uma somma congrua por um polynomio inteiro deve-se multiplicar cada termo da somma pelo polynomio, e sommar os resultados.*

Este principio da multiplicação é uma consequencia dos dous theoremas seguintes:

1.º theorema. — O resto da divisão de uma somma por $i^2 + 1$ é igual á somma dos restos da divisão de cada termo pelo mesmo divisor.

Com effeito, se é

$$\varphi(i) = f(i) + f_1(i) + f_2(i) + \ldots$$

e

$$\varphi(i) = D(i^2 + 1) + R,\ f(i) = d(i^2 + 1) + r,$$
$$f_1(i) = d_1(i^2 + 1) + r_1,\ \text{etc.}$$

teremos

$$D(i^2+1)+R=(i^2+1)(d+d_1+\ldots)+r+r_1+\ldots,$$

e por consequencia o resto R é igual ao que provem de dividir por i^2+1 a somma $r+r_1+r_2+\ldots$

2.º theorema,— O resto da divisão d'um producto por i^2+1 é igual ao do producto dos restos da divisão dos factores pelo mesmo divisor.

Com effeito, se é

$$\varphi(i)=f(i)\cdot f_1(i)\cdot f(i)\ldots,$$

ter-se-ha

$$D(i^2+1)+R=[d(i^2+1)+r][d_1(i^2+1)+r_1]\ldots$$

e portanto o resto R é igual ao que provem de dividir por i^2+1 o producto $r\,.\,r_1\,.\,r_2\ldots$

Posto isto, vamos demonstrar o terceiro principio da multiplicação.

Em virtude das definições e dos theoremas precedentes, o producto congruo

$$[f(i)+!\,f_1(i)+!\ldots]\times!\,F(i).$$

representa o resto da divisão por i^2+1 do producto ordinario

$$[f(i)+f_1(i)+\ldots]\,F(i).$$

Mas, este resto é igual ao que provem do producto ordinario

$$f(i)\,.\,F(i)+f_1(i)\,.\,F(i)+\ldots$$

e póde portanto representar-se por

$$f(i)\times!\,F(i)+!\,f_1(i)\times!\,F(i)+!\ldots$$

Logo teremos

$$[f(i)+!\,f_1(i)+!\ldots]\times!\,F(i)\equiv f(i)\times!\,F(i)$$
$$+!\,f_1(i)\times!\,F(i)+!\ldots$$

que é o principio que queriamos demonstrar.

4) Vê-se facilmente, applicando o 2.º dos theoremas precedentes, que o segundo principio da multiplicação algebrica subsiste na multiplicação congrua.

5) O quarto principio da multiplicação algebrica subsiste tambem na multiplicação congrua.

Com effeito, se chamarmos $F(i)$ o polynomio inteiro de menor grão que sommado com $f_1(i)$ dá um multiplo de i^2+1, ou se é

$$F(i) +! f_1(i) \equiv 0,$$

teremos

$$f(i) \times! [-! f_1(i)] \equiv f(i) \times! F_1(i).$$

Mas é

$$f(i) \times! F(i) +! f(i) \times! f_1(i) \equiv 0$$

logo

$$f(i) \times! [-! f(i)] \equiv -! [f(i) \times! f_1(i)].$$

Vê-se do mesmo modo que é

$$[-! f(i)] \times! [-! f_1(i)] \equiv f(i) \times! f_1(i).$$

De tudo o que temos dito a respeito da multiplicação congrua conclue-se que ella satisfaz a todos os principios da multiplicação algebrica.

IV — Chama-se *divisão congrua* a operação inversa da multiplicação, isto é a operação que tem por fim procurar um resto, que multiplicado pelo resto da divisão por i^2+1 d'um polynomio $f_1(i)$ dado, dê um producto cujo resto seja igual ao que provem d'um outro polynomio dado $f(i)$. Este resto será representado por $\frac{f(i)}{f_1(i)}!$.

O resto da divisão por i^2+1 dos polynomios dados sendo $a+bi$ e $a'+b'i$, e chamando $A+Bi$ o resto pedido, deve ser $a+bi$ igual ao resto que resulta de dividir

$$Aa' + (Ab' + Ba')i + Bb'i^2$$

por i^2+1, isto é deve ser

$$a + b\,i = A\,a' - B\,b' + (A\,b' + B\,a')\,i\,,$$

d'onde se deduz

$$a = A\,a' - B\,b'\,,\; b = A\,b' + B\,a'$$

e, por consequencia

$$A = \frac{a\,a' + b\,b'}{a'^2 + b'^2}\,,\; B = \frac{b\,a' - a\,b'}{a'^2 + b'^2}\,;$$

logo será

$$\frac{f\,(i)}{f_1\,(i)}\,! \equiv \frac{a\,a' + b\,b'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b\,a' - a\,b'}{a'^2 + b'^2}\,i.$$

V — Chamaremos *potencia congrua* o producto congruo de factores iguaes. Representaremos a potencia congrua de $F\,(i)$ do grão n por $[\,F\,(i)\,]^{\,!\,n}$

O principio caracteristico da theoria das potencias ordinarias é applicavel tambem ás potencias congruas, isto é, se m e n são numeros inteiros positivos, teremos

$$[\,F\,(i)\,]^{\,!\,m} \times\,!\,[\,F\,(i)\,]^{\,!\,n} \equiv [\,F\,(i)\,]^{\,!\,m+n}.$$

Com effeito, o resto da divisão por $i^2 + 1$ d'um producto sendo igual ao resto da divisão por $i^2 + 1$ do producto dos restos dos factores, cada um dos membros da igualdade precedente representa o resto da divisão de $[\,F\,(i)\,]^{\,m+n}$ por $i^2 + 1$.

Deduz-se da igualdade precedente

$$\frac{[\,F\,(i)\,]^{\,!\,m+n}}{[\,F\,(i)\,]^{\,!\,n}} = [\,F\,(i)\,]^{\,!\,m}\,,$$

que faz vêr que o expoente do quociente é igual á differença entre o expoente do dividendo e o do divisor, como na divisão ordinaria.

Seria facil de vêr, procedendo como se faz na Algebra para as potencias ordinarias, que se póde escrever

$$[\,F\,(i)\,]^{-\,!\,m} \equiv \frac{1}{[\,F\,(i)\,]^{\,!\,m}}\,!\,,$$

e demonstrar em seguida que o principio fundamental relativo ás potencias congruas tem tambem logar quando os expoentes são negativos.

VI — *A extracção da raiz congrua do indice n* é a operação inversa da elevação a potencias congruas, isto é a operação que tem por fim procurar um resto cuja potencia n sendo dividida por i^2+1 dê o mesmo resto que o polynomio dado. Assim $!\sqrt{-1}$ indica o resto cujo quadrado sendo dividido por i^2+1 dá o resto -1, de modo que se póde escrever

$$!\sqrt{-1} \equiv i,$$

e temos assim a significação do imaginario $\sqrt{-1}$.

Vê-se pois que os imaginarios que nada significam quando se considera as operações ordinarias da Arithmetica, tem um sentido bem determinado quando se define as operações como vimos de fazer.

4. — Dissemos já que a Algebra transforma as operações umas nas outras, tomando para base alguns *principios*. Estes principios são aquelles que exposemos no § 2.º, e que, como vimos de vêr, subsistem ainda quando se substitue as definições ordinarias das operações sobre numeros pelas que vimos de dar. Logo todas as formulas de Algebra são ainda applicaveis aos numeros quando os signaes $+$, $-$, $\times$, etc. representam operações congruas, e deve-se então substituir o signal $=$ pelo signal $\equiv$, cuja significação se deu precedentemente.

D'esta doutrina tiram-se as seguintes conclusões importantes:

1.ª — Os resultados reaes a que se chega usando dos imaginarios são verdadeiros arithmeticamente falando. Com effeito, se chegarmos a um resultado de fórma $A \equiv B$, e em A e B só entrarem quantidades reaes, podemos substituir ahi o signal $\equiv$ pelo signal $=$, pois que as expressões $a \pm ! b$, $a \times ! b$, $\frac{a}{b}!$, $!\sqrt[n]{a}$ (a sendo positivo) representam o mesmo que $a \pm b$, $a \times b$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt[n]{a}$.

2.ª — Se o resultado d'um calculo feito para resolver um problema é imaginario, o problema é absurdo, mas nós vamos vêr que este resultado indica a possibilidade d'uma transformação do problema n'outro, que não é absurdo e ao qual este resultado satisfaz.

Com effeito, este resultado adquire um sentido bem determinado se n'elle se fizer a mudança das operações ordinarias nas operações congruas correspondentes; basta pois fazer uma mudança correspondente no enunciado do problema, e portanto na equação que o traduz.

Se n'esta equação realisarmos as divisões congruas e as extracções de raiz congruas, ella não conterá mais que as sommas, as differenças e os productos congruos.

Então vê-se, attendendo ás definições de sommas, differenças e productos congruos, que cada membro representa o resto da divisão por i^2+1 do resultado que se obtem substituindo as operações congruas pelas operações ordinarias, e porisso o signal $\equiv$ representa agora a igualdade d'estes restos. D'aqui vem a regra seguinte:

Quando a resolução d'um problema conduz a resultados imaginarios, podemos transformal-o n'outro que seja possivel, fazendo no enunciado da questão uma mudança correspondente á mudança das equações ás quaes conduz esta questão, em igualdade dos restos da divisão dos dois membros d'estas equações por i^2+1.

Se se pede, por exemplo, um numero cujo quadrado seja igual ao dobro do numero menos 5, teremos

$$x^2 = 2x - 5 .$$

Tira-se d'aqui

$$x = 1 \pm 2\sqrt{-1}$$

logo o problema proposto é absurdo.

Mas se modificarmos o enunciado do problema pedindo um numero cujo quadrado dividido por i^2+1 dê o mesmo resto que o dobro do numero diminuido de 5 e dividido pelo mesmo divisor, ter-se-ha

$$x^2 \equiv 2x - 5$$

e a solução será

$$x = 1 \pm 2i .$$

A theoria precedente não serve só para modificar problemas que conduzem a imaginarios; serve tambem para resolver directamente problemas da natureza do seguinte:

Qual é a funcção de i de menor grão cujo cubo dividido por i^2+1 dá o resto $+1$?

Teremos, representando esta funcção por x,

$$x^3 - 1 \equiv 0 .$$

Logo teremos de resolver a equação

$$x^3 - 1 = 0 ,$$

e depois substituir $\sqrt{-1}$ por i, o que dá

$$x = 1 ,\ x = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} ,\ x = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} .$$

III

Theoria geometrica dos imaginarios

5. — A theoria geometrica dos imaginarios é principalmente devida a Argand. (*)

Todo o numero póde ser representado por uma linha, e as operações arithmeticas podem ser substituidas por *construcções* ou *operações geometricas* que se ensinam na Geometria elementar.

Aqui vamos vêr que as operações geometricas podem ter definições mais geraes do que as dadas na Geometria elementar, taes porém que se lhes appliquem os *principios* do Calculo das operações expostos no § I.

Considera-se para isso linhas de *grandeza e direcção* determinadas, e é com estas linhas que se opéra. Uma linha cuja grandeza é ρ, que faz o angulo θ com uma linha de direcção fixa representa-se por ρ_θ. Para distinguir este angulo θ, considera-se na linha a extremidade *inicial* que se lê e escreve primeiro, e a extremidade *final*, e refere-se o angulo á parallela ao eixo tirada pela extremidade inicial. O comprimento ρ chama-se *módulo*, o angulo θ chama-se *argumento*.

Chamaremos, com Bellavitis, *equipollentes* duas linhas iguaes, parallelas e dirigidas no mesmo sentido, e *equipollencia* a expressão da relação d'igualdade entre rectas consideradas em grandeza e direcção, e empregaremos o signal $\triangleq$ para designar que duas linhas são equipollentes.

6. — Passemos agora a definir as operações geometricas.

1.° — Se forem dadas quaesquer linhas e as collocarmos umas adiante das outras, sem alterar a sua grandeza e direcção, fazendo que cada uma comece onde a anterior acaba, a recta que liga as extremidades do polygono assim formado chama-se *somma geometrica* das linhas dadas.

(*) *Argand — Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques.* Paris — 1806.

Assim AD (fig. 2.ª) é a somma geometrica das linhas AB, BC, CD, e póde escrever-se

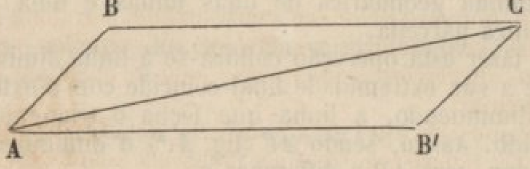
$$AB + BC + CD \triangleq AD\ .$$

Quando as linhas tem todas a mesma direcção póde substituir-se o signal $\triangleq$ pelo signal $=$.

1) A' somma geometrica applica-se o primeiro principio caracteristico da somma (n.º 2—1.º), a saber: *a ordem das parcellas é arbitraria.*

Com effeito, temos

Fig. 1.ª



$$AC \triangleq AB + BC \triangleq AB' + B'C,$$

e

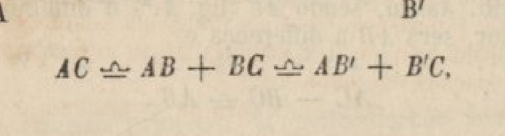
$$AB' \triangleq BC,\ B'C \triangleq AB,$$

logo será

$$AB + BC \triangleq BC + AB\ .$$

2) Para mostrar que o segundo principio caracteristico da somma (n.º 2—1.º) se applica à somma geometrica, consideremos as linhas AB, BC, CD, e teremos

Fig. 2.ª



$$AD \triangleq AC + CD, \triangleq (AB + BC) + CD\ .$$

Por outra parte, tirando por B uma linha BC' parallela e igual a CD, será $BCDC'$ um parallelogrammo, e portanto $BC' \triangleq CD$, $C'D \triangleq BC$, e teremos

$$AD \triangleq AC' + C'D \triangleq (AB + CD) + BC\,.$$

Logo será

$$(AB + BC) + CD \triangleq (AB + CD) + BC\,.$$

2.º — Chama-se *subtração geometrica* a operação inversa da somma geometrica, isto é a operação que tem por fim, dada a somma geometrica de duas linhas e uma parcella, achar a outra parcella.

Para fazer esta operação colloca-se a linha diminuidor de modo que a sua extremidade final coincide com a extremidade final do diminuendo, a linha que fecha o triangulo será o resto pedido. Assim, sendo AC (fig. 1.ª) o diminuendo e BC o diminuidor, será AB a differença e

$$AC - BC \triangleq AB\,.$$

E' evidente que BC póde ser maior que AC.

Se as linhas (fig. 3.ª) AC e BC tem a mesma direcção θ,

Fig. 3.ª

a differença geometrica é AB ou AB', segundo AC é maior ou menor do que BC.

Segundo a notação indicada para a representação das quantidades geometricas, a recta AB póde representar-se por ρ_θ, e a recta AB' por $\rho_{\theta+\pi}$; portanto a differença no primeiro caso é ρ_θ, e no segundo caso é $\rho_{\theta+\pi}$. Mas fazendo a subtracção á maneira ordinaria obtem-se no segundo caso $-\rho_\theta$, logo podemos considerar $-\rho_\theta$ como representando a recta $\rho_{\theta+\pi}$, isto é, podemos considerar uma quantidade geometrica negativa como representando uma recta que faz com o eixo um angulo supplementar d'aquelle que a mesma recta faz quando é positiva.

3.° — Chama-se *producto geometrico* de duas linhas ρ_θ e $\rho'_{\theta'}$ uma linha de grandeza $\rho\rho'$ e de inclinação $\theta + \theta'$, e escreve-se

$$(\rho\rho')_{\theta+\theta'} \triangleq \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'}.$$

A operação assim definida satisfaz aos principios caracteristicos da multiplicação (n.° 2 — 3.°), como vamos vêr.

1) Em primeiro logar, a ordem dos factores é arbitraria, pois que

$$\rho_{\theta'} \cdot \rho'_{\theta'} \triangleq (\rho\rho')_{\theta+\theta'} \triangleq (\rho'\rho)_{\theta'+\theta} \triangleq \rho'_{\theta'} \cdot \rho_\theta .$$

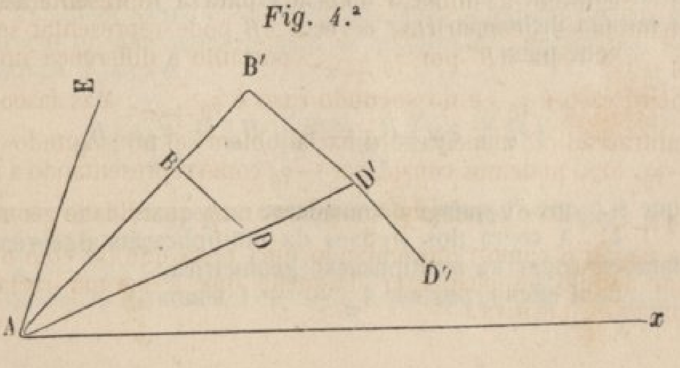
2) O segundo principio da multiplicação tem tambem logar, por ser

$$(\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'}) \rho''_{\theta''} \triangleq (\rho\rho')_{\theta+\theta'} \rho''_{\theta''} \triangleq (\rho\rho'\rho'')_{\theta+\theta'+\theta''}$$
$$\triangleq (\rho\rho''\rho')_{\theta+\theta''+\theta'} \triangleq (\rho\rho'')_{\theta+\theta''} \cdot \rho'_{\theta'} .$$

3) O terceiro principio da multiplicação tem tambem logar, isto é, para obter o producto geometrico de uma somma por uma quantidade geometrica deve-se multiplicar cada parcella da somma pelo multiplicador e sommar os resultados.

Com effeito, chamando $\rho\theta$ e $\rho'_{\theta'}$ as parcellas, a somma geometrica $\rho_\theta + \rho'_{\theta'}$ é representada pela linha AD (fig. 4.ª) que fecha o triangulo cujos lados AB e BD representam ρ_θ e $\rho'_{\theta'}$.

Fig. 4.ª



Esta linha AD multiplicada por outra R_ω dá uma linha AE cujo modulo é $R \times AD$ e cujo argumento é $\omega + DAx$.

Consideremos agora a somma geometrica

$$\rho_\theta \cdot R_\omega + \rho'_{\theta'} \cdot R_\omega .$$

Esta somma representa uma linha que fecha o triangulo cujos lados têm as grandezas $R . \rho$ e $R . \rho'$ e as inclinações $\theta + \omega$ e $\theta' + \omega$.

Dando a este triangulo uma rotação $- \omega$ em roda de A deve tomar a posição $AB'D''$, sendo $B'D''$ parallela a BD por terem estas duas linhas a mesma indicação θ' sobre o eixo. Mas por ser AB' o producto de AB por R e $B'D''$ o producto de BD por R, teremos

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'D''}{BD} = R;$$

logo os triangulos ADD e $AB'D''$ devem ser semilhantes, e portanto o ponto D'' deve estar em D' sobre a recta AD.

Vem pois

$$\frac{AD'}{AD} = R, \; AD' = R \times AD;$$

o comprimento AD' será pois igual a AE.

Trazendo outra vez o triangulo á primeira posição, AD' descreverá o angulo ω e porisso irá cair sobre AE, com o qual coincidirá por ter a mesma grandeza $R \times AD$ e adquirir a mesma inclinação $DAx + \omega$.

Vem pois

$$(\rho_\theta + \rho'_{\theta'})\, R_\omega \triangleq \rho_\theta \cdot R_\omega + \rho'_{\theta'} \cdot R_\omega$$

que é o que se queria demonstrar.

4) A regra dos signaes da multiplicação algebrica tem tambem logar na multiplicação geometrica.

Com effeito, por ser $1_\pi = -1$ temos

$$(+\rho_\theta)(-\rho'_{\theta'}) \stackrel{\wedge}{=} \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'+\pi} \stackrel{\wedge}{=} \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} \cdot 1_\pi \stackrel{\wedge}{=} -\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'},$$

$$(-\rho_\theta) \cdot (-\rho'_{\theta'}) \stackrel{\wedge}{=} \rho_{\theta+\pi} \cdot \rho'_{\theta'+\pi}$$

$$\stackrel{\wedge}{=} \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} \cdot 1_\pi \cdot 1_\pi \stackrel{\wedge}{=} \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} .$$

5) E' evidente que o quinto principio da multiplicação subsiste na multiplicação geometrica.

De tudo que vimos de dizer conclue-se que a multiplicação geometrica satisfaz a todos os principios da multiplicação algebrica.

4.° — Chama-se *divisão de quantidades geometricas* a operação inversa da multiplicação, isto é a operação que tem por fim achar uma linha que multiplicada pelo divisor reproduza o dividendo.

D'este modo é

$$\frac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} \stackrel{\wedge}{=} \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\theta'}$$

5.° — Chama-se *potencia de uma quantidade geometrica* o producto de quantidades geometricas iguaes.

E' facil de vêr, attendendo á definição de multiplicação de quantidades geometricas, que o principio fundamental da theoria das potencias (n.° 2 — 5.°) tem logar quando as quantidades são geometricas, isto é, que temos

$$(\rho_\theta)^m \cdot (\rho_\theta)^n \stackrel{\wedge}{=} (\rho_\theta)^{m+n},$$

sendo m e n inteiros positivos.

As potencias pares das quantidades geometricas podem, ao contrario do que acontece com as quantidades numericas, ser negativas. Assim é

$$\left(\rho_{\frac{1}{2}\pi}\right)^{2n} \stackrel{\wedge}{=} \left(\rho^{2n}\right)_{n\pi} \stackrel{\wedge}{=} \pm \rho^{2n},$$

onde se deve empregar o signal + quando n é par, e — quando n é impar.

6.° — *Extracção da raiz de uma quantidade geometrica* é a operação inversa da elevação a potencias, isto é a operação que tem por fim achar uma quantidade geometrica, que elevada a uma potencia igual ao indice da raiz, reproduza a quantidade geometrica dada.

Assim $\sqrt{-1}$ indica uma quantidade geometrica que elevada ao quadrado dá -1. Esta quantidade é $1_{\frac{\pi}{2}}$, pois que

$$\left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1_{\pi} = -1 ,$$

de modo que se póde escrever

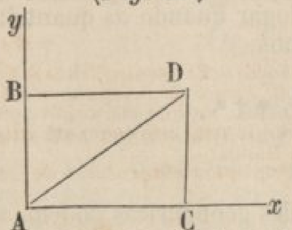
$$1_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1} .$$

Vê-se pois que $\sqrt{-1}$, que nada significava na Arithmetica, representa aqui uma recta perpendicular ao eixo e igual á unidade.

Vejamos o que representa $x + y\sqrt{-1}$. Temos (fig. 5.ª)

$$x + y\sqrt{-1} \triangleq x + y\,1_{\frac{\pi}{2}} \triangleq AC + AB \triangleq AD,$$

(*Fig. 5.ª*)



e portanto $x + y\sqrt{-1}$ representa uma linha AD cujas projecções sobre dous eixos coordenados rectangulares são x e y.

Esta representação geometrica do imaginario $z = x + y\sqrt{-1}$ é muito importante, como veremos mais tarde.

7. — Da analyse das operações geometricas que acabamos de fazer, conclue-se que os *principios* em que se funda a transformação das operações algebricas umas nas outras, applicam-se ás linhas consideradas em grandeza e direcção, quando se definem as operações de modo que vimos de vêr.

Do que precede podemos tambem concluir que o calculo feito com imaginarios tem um sentido concreto bem definido, considerando as lettras e os signaes da Algebra como representando linhas e operações com a significação de que vimos de fallar.

Se este calculo levar a um resultado real as linhas correspondentes tem todas a mesma direcção, as operações tem a significação ordinaria e póde substituir-se o signal $\triangleq$ pelo signal $=$. Estas linhas podem então representar numeros, e conclue-se porisso que *são verdadeiros na Arithmetica os resultados reaes a que se chega quando se faz uso dos imaginarios durante o calculo*, que é a proposição que atraz demonstrámos analyticamente.

***8.** — De tudo o que precede podemos ainda tirar o seguinte theorema:

Quando a resolução de uma questão de geometria leva a soluções imaginarias, a questão é absurda, podemos porém transformal-a n'outra possivel fazendo no seu enunciado uma mudança correspondente á mudança de equações em equipollencias, isto é das operações ordinarias nas geometricas correspondentes. O resultado primeiramente achado satisfará á nova questão, depois de se lhe fazer a mesma mudança.

Abordamos assim um methodo para resolver questões de Geometria plana, descoberto e desenvolvido pelo illustre geometra italiano Bellavitis, que consiste em traduzir as questões geometricas em *equipollencias* em logar de as traduzir em equações, e tratar depois as equipollencias como se fossem equações. (*)

Em principios em parte análogas se funda o methodo chamado dos quaterniões, que se emprega nas questões de Geometria no espaço. (**)

(*) *G. Bellavitis — Spozione del methodo delle equipollenze* — Modena — 1854. Póde vêr-se nos tomos I e II do *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* dous artigos de Bellavitis, em que elle resolve pelo seu methodo algumas questões propostas n'este jornal, bem como um artigo sobre o mesmo assumpto pelo snr. Schiappa Monteiro.

(**) Veja-se *A. d'Arzilla Fonseca — Principios elementares do calculo dos quaterniões — Coimbra — 1884.*

IV

Operações sobre imaginarios

9. — As regras do calculo dos imaginarios foram justificadas nos §§ anteriores.

Observando que todo o imaginario $x + iy$ (pondo $\sqrt{-1} = i$) póde ser reduzido á fórma

$$\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

(ρ tem o nome de *modulo* e θ o de *argumento* do imaginario) pondo, o que é sempre possivel,

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\theta\,,$$

o que dá

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho}\,,\ \cos\theta = \frac{x}{\rho}\,;$$

aquellas regras dão os resultados seguintes:

1.° — A somma e differença dos imaginarios

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\,,\ z' = \rho'\,(\cos\theta' + i\operatorname{sen}\theta')$$

é

$$z \pm z' = \rho\cos\theta \pm \rho'\cos\theta' + i\,(\rho\operatorname{sen}\theta \pm \rho'\operatorname{sen}\theta')\,,$$

ou

$$\pm z' \cos z = R\ \ \omega + i\operatorname{sen}\omega)\,,$$

pondo

$$\rho \cos \theta \pm \rho' \cos \theta' = R \cos \omega, \ \rho \operatorname{sen} \theta \pm \rho' \operatorname{sen} \theta' = R \operatorname{sen} \omega,$$

o que dá

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 \pm 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}.$$

Esta expressão de R mostra que é $R^2 < (\rho + \rho')^2$, e portanto temos o theorema seguinte:

O *modulo de uma somma algebrica de imaginarios é sempre menor do que a somma dos modulos das parcellas.*

2.º — O producto dos mesmos imaginarios é

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho' [\cos\theta \cos \theta' - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta'] + i [\cos\theta \operatorname{sen} \theta' + \operatorname{sen} \theta \cos \theta'] \\ &= \rho\rho' [\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')]. \end{aligned}$$

Multiplicando este resultado por

$$z'' = \rho'' (\cos \theta'' + i \operatorname{sen} \theta'')$$

vem

$$zz'z'' = \rho\rho'\rho'' [\cos(\theta + \theta' + \theta'') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta' + \theta'')].$$

Em geral temos

$$\begin{aligned} zz' \ldots z^{(n-1)} = \rho\rho' \ldots \rho^{(n-1)} [&\cos(\theta + \theta' + \ldots + \theta^{(n-1)}) \\ &+ i \operatorname{sen}(\theta + \theta' + \ldots + \theta^{(n-1)})], \end{aligned}$$

e portanto o *modulo do producto de imaginarios é igual ao producto dos modulos dos factores, e o seu argumento é igual á somma dos argumentos dos factores.*

Se fôr $z = z' = \ldots = z^{(n-1)}$, vem o resultado importante

$$z^n = \rho^n [\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta]$$

conhecido pelo nome de *formula de Moivre.*

3.º — Dividindo por z o imaginario

$$u = r(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$$

vem

$$\frac{u}{z}=\frac{r}{\rho}\,\frac{(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)(\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta)}{(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$
$$=\frac{r}{\rho}[\cos(\omega-\theta)+i\,\mathrm{sen}(\omega-\theta)].$$

Dividindo este resultado por z', vem

$$\frac{u}{z\,z'}=\frac{r}{\rho\rho'}[\cos(\omega-\theta-\theta')+i\,\mathrm{sen}(\omega-\theta-\theta')]\,.$$

Em geral, temos

$$\frac{u}{zz'\ldots z^{(n-1)}}=\frac{r}{\rho\rho'\ldots\rho^{(n-1)}}[\cos(\omega-\theta-\theta'-\ldots-\theta^{(n-1)})$$
$$+i\,\mathrm{sen}(\omega-\theta-\ldots-\theta^{(n-1)})]\,.$$

Fazendo $r=1$, $\omega=0$, $z=z'=\ldots=z^{(n-1)}$, resulta

$$z^{-n}=\rho^{-n}[\cos(-n\theta)+i\,\mathrm{sen}(-n\theta)]\,.$$

Vê-se pois que a *formula de Moivre* ainda tem logar quando o expoente é inteiro negativo.

4.° — Passemos á extracção das raizes.

Vejamos se póde ser

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)}=r(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)\,.$$

Para ter logar esta igualdade deverá ser

$$\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)=r^n(\cos n\omega+i\,\mathrm{sen}\,n\omega),$$

ou

$$\rho\cos\theta=r^n\cos n\omega,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta=r^n\,\mathrm{sen}\,n\omega$$

d'onde se deduz

$$r=\sqrt[n]{\rho},\ n\omega=\theta+2k\pi\,,$$

representando por k um inteiro que póde ter todos os valores positivos e negativos desde zero até ao infinito.

Vem pois

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right]\left[\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right].$$

O binomio

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{rk\pi}{n}$$

só tem n valores differentes correspondentes a $k = 0, 1, 2, \ldots n - 1$, pois é facil de vêr que, quando a k se dá valores differentes d'estes, o seno e coseno que entram no binomio, retomam os valores correspondentes aos valores precedentes de k. O radical tem pois n valores differentes, e o theorema de Moivre tem ainda logar para o valor correspondente a $k = 0$.

Os valores do radical que vimos de obter, representam as n raizes da equação binomia $z^n - \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = 0$.

V

Series

10. — Depois de considerar expressões analyticas compostas de um numero finito de operações é natural passar a considerar expressões analyticas compostas de um numero infinito de operações, isto é, as *series, os productos infinitos e as fracções continuas.* Vamos pois estudar estas expressões, limitando-nos porém aos casos mais simples e mais uzados.

Todas estas expressões para poderem ser sujeitas ao calculo, devem se r*convergentes,* isto é, devem tender para um limite determinado á medida que augmenta o numero de sommas, multiplicações ou divisões. As expressões que não estão n'este caso chamam-se *divergentes.*

11. — As series são expressões da fórma

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

em que o numero das parcellas é infinito. O termo u_n é o *termo geral* do qual se formam todos os outros dando a n os valores *1, 2, 3,* etc. Empregando o signal Σ para designar sommas, esta expressão póde ser escripta do modo seguinte:

$$\sum_1^\infty u_n \,.$$

Como já dissemos, a serie é convergente todas as vezes que a somma s_n' das n primeiras parcellas, isto é, a somma

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n$$

tende para um limite determinado á medida que n augmenta. Este limite chama-se *somma da serie.*

Por exemplo, a progressão

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots$$

é convergente quando o valor absoluto de x é menor do que a unidade, pois que a somma dos seus n primeiros termos, isto é,

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

tende para o limite $\frac{1}{1-x}$ quando n augmenta indefinidamente.

Se o valor absoluto de x é maior do que a unidade, a somma s_n augmenta indefinidamente e a serie é divergente.

Se é $x = 1$, a serie é divergente.

Se é $x = -1$, vem

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

e a serie toma alternadamente os valores *zero* e *um*, e portanto é divergente.

A convergencia das series compostas de termos imaginarios depende da convergencia das series compostas de termos reaes, como veremos.

Os dois theoremas seguintes dão uma condição necessaria e sufficiente para a convergéncia d'estas ultimas series:

1.° — *Se a serie é convergente póde sempre dar-se a* n *um valor tão grande que, combinado com qualquer valor de* p, *satisfaça á desigualdade:*

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} < \delta,$$

por mais pequena que seja δ.

Com effeito, é evidente que o valor absoluto da differença $s_{n+p} - s_n$ nunca póde exceder a somma dos valores absolutos de $s_{n+p} - s$ e $s_n - s$. Mas, representando por s a somma da serie proposta, s_{n+p} e s_n convergem para s quando n e p augmentam, e portanto n'estas circumstancias $s_{n+p} - s_n$ e $s_n - s$ diminuem indefinidamente; ha porisso sempre um valor de n que, combinado com qualquer valor de p, torna esta somma, e *á fortiori* o valor absoluto de $s_{n+p} - s_n$ menor do que qualquer grandeza assignavel δ.

2.° — *Reciprocamente, se houver sempre um valor de*

n *que, combinado com qualquer valor de* **p**, *satisfaça á desigualdade:*

$$s_{n+p} - s_n < \delta,$$

por mais pequena que seja δ, *a serie proposta será convergente.*

Com effeito, se o não fosse, a serie ou augmentaria indefinidamente, ou occillaria entre dous valores. Em qualquer dos casos seria sempre possivel dar a p um valor que, combinado com qualquer valor de n, tornasse o valor absoluto de $s_{n+p} - s_n$ maior do que uma quantidade qualquer, ou maior do que uma quantidade arbitraria inferior a metade do intervallo dos limites entre os quaes a serie occilla, o que é contra a hypothese.

Do que procede tira-se o corollario seguinte:

E' condição necessaria, mas não sufficiente, para que a serie seja convergente, que os seus termos decresçam em valor absoluto á medida que **n** *augmenta.*

Nota. — E' facil de vêr que os theoremas precedentes subsistem quando os termos u_1, u_2, etc. da serie são funcções de n que tendem para limites determinados á medida que n augmenta.

12. — Não ha criterio geral para decidir se uma serie real é convergente; ha apenas regras abrangendo maior ou menor numero de casos. Aqui exporemos apenas as seguintes de que teremos de fazer uso:

1.ª — *Toda a serie de termos positivos na qual a somma* s_n *é, qualquer que seja* **n**, *menor do que uma grandeza determinada L, é convergente.*

Com effeito, a somma das parcellas $u_1, u_2, \ldots u_n$ cresce com n, mas como por hypothese não póde crescer indefinidamente, converge para um limite determinado.

Por exemplo, a serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^n} + \cdots$$

é convergente, pois que cada termo é menor do que o termo correspondente da progressão geometrica convergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

e portanto a sua somma é menor do que a somma da progressão.

2.ª — *Toda a serie composta de termos positivos e negativos de que deriva uma serie convergente pela mudança dos signaes dos termos negativos, é convergente.*

Com effeito, a nova serie composta só de termos positivos é convergente, por hypothese, e portanto, chamando U_1, U_2, U_3, etc. os seus termos e S_n a somma dos n primeiros, teremos (11 — 1.º) a desigualdade:

$$S_{n+p} - S_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p} < \delta,$$

e *à fortiori*

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} < \delta;$$

logo (11 — 2.º) a serie proposta será convergente.

Por exemplo, a serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \ldots$$

é convergente.

3.ª — *Se a partir de um valor determinado* p *de* n *a razão* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *de dois termos consecutivos é sempre menor do que uma quantidade* L *inferior á unidade, a serie é convergente; se esta razão é maior do que a unidade, a serie é divergente.*

Basta considerar o caso de serem os termos da serie todos positivos (theor. 2.º). Temos, por hypothese,

$$u_{p+1} < Lu_p, \; u_{p+2} < Lu_{p+1} < L^2u_p \text{ etc.};$$

logo será

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p + u_{p+1} + \ldots < u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p(1 + L + L^2 + \ldots).$$

Mas, por ser $L < 1$, é convergente a progressão que entra no segundo membro d'esta desigualdade, logo este segundo membro terá um valor determinado, e será porisso convergente (theor. 1.º) o primeiro membro.

Se, pelo contrario, é

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

a serie, a partir de $n = p$, torna-se crescente e portanto divergente.

Por exemplo, a serie

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots + \frac{x^n}{2.3\ldots n} + \ldots$$

é convergente, pois que a razão de dois termos consecutivos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$$

decresce indefinidamente com n, e portanto ha um valor de n, a partir do qual esta razão se torna menor do que uma quantidade qualquer L comprehendida entre zero e a unidade.

4.ª — *Se a partir de um valor determinado* p *de* n *a raiz* $\sqrt[n]{u_n}$ *é menor do que uma quantidade* L *inferior á unidade, a serie é convergente; se esta raiz é maior do que a unidade a serie é divergente.*

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o anterior, pois que temos

$$u_p < L^p,\ u_{p+1} < L^{p+1}, \text{ etc.},$$

o que dá

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p + u_{p+1} + \ldots < u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + L^p(1 + L + L^2 + \ldots).$$

Se é pelo contrario $\sqrt[n]{u_n} > 1$, é tambem $u_n > 1$, e a somma s_n augmenta indefinidamente.

5.ª — *Se uma serie decrescente tem os termos alternadamente positivos e negativos, esta serie é convergente.*

Com effeito, por ser cada termo da serie proposta:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

maior do que o seguinte, a differença:

$$s_{n+p} - s_n = \pm [u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots \pm u_{n+p}]$$

tem o signal de u_{n+1}. Mas esta differença póde ser escripta do modo seguinte:

$$\pm [u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots],$$

e vê-se então que ella é menor do que u_{n+1}, pois que deve ter o signal de u_{n+1}.

Sendo pois, em valor absoluto,

$$s_{n+p} - s_n < u_{n+1},$$

e decrescendo u_{n+1} indefinidamente com n, a serie proposta é (n.º 11 — 2.º) convergente.

Por exemplo, as series

$$1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

são convergentes, pois que têem os termos alternadamente positivos e negativos, e o denominador augmenta, qualquer que seja x, mais rapidamente do que o numerador, de modo que existe um termo a partir do qual a serie é decrescente.

13. — Passemos ás series compostas de termos imaginarios.

Theorema 1.º — A condição necessaria e sufficiente para que uma serie de termos imaginarios seja convergente, é que o sejam a serie formada pelos termos reaes, e a serie formada pelos coefficientes de $\sqrt{-1}$.

Com effeito a somma

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \ldots + (x_n + iy_n) + \ldots$$

ou

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{n=1}^{n=\infty} (x_n + iy_n)$$

é igual a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{n=\infty} y_n,$$

e esta expressão só póde ser convergente quando o forem as sommas Σx_n e Σy_n.

Theorema 2.º — Para que uma serie seja convergente basta que a serie formada pelos módulos dos seus termos o seja.

Com effeito, por ser $\rho = \sqrt{x^2_n + y^2_n}$ o módulo de $x_n + iy_n$, o theorema 1.º do n.º 9 dá

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{x^2_n + y^2_n} \geqq \sqrt{(\Sigma x_n)^2 + (\Sigma y_n)^2}.$$

O primeiro membro d'esta desigualdade é convergente, por hypothese, logo, se as quantidades x_n e y_n são todas positivas, o segundo membro, que augmenta com n e que não póde exceder o limite do primeiro membro, será tambem convergente. Logo serão convergentes as series Σx_n e Σy_n, e portanto a serie (1).

Se algumas das quantidades x_n, y_n forem negativas a desigualdade precedente terá logar para os valores absolutos α_n e β_n de x_n e y_n, isto é

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{x^2_n + y^2_n} \geqq \sqrt{(\Sigma \alpha_n)^2 + (\Sigma \beta_n)^2}.$$

Logo as series $\Sigma \alpha_n$ e $\Sigma \beta_n$ serão convergentes, e porisso tambem o serão (12 — 2.º) as series que resultam de mudar os signaes a alguns termos das series precedentes, isto é, serão convergentes as series Σx_n e Σy_n, e por consequencia a serie (1).

O theorema reciproco do precedente não é sempre verdadeiro, isto é, póde ser convergente a serie (1) e não o ser a serie correspondente dos módulos. Ha porém um caso muito importante em que esta proposição reciproca é verdadeira, que é quando a serie (1) tem todos os seus termos positivos. Com effeito, n'este caso temos

$$\sqrt{x^2_n + y^2_n} < x_n + y_n,$$

e portanto

$$\Sigma\sqrt{x^2_n + y^2_n} < \Sigma x_n + \Sigma y_n \,.$$

Mas por ser a serie (1) convergente tambem o são as series Σx_n e Σy_n, e portanto a desigualdade precedente mostra que é convergente a serie formada pelos módulos (n.º 12—1.º).

Se algumas das quantidades x_n e y_n são negativas ainda terá logar o theorema reciproco, se mudando a estas o signal a nova serie assim formada fôr convergente; pois que então recaímos no caso anterior, e porisso é convergente a somma dos módulos $\Sigma\sqrt{x^2_n + y^2_n}$.

14. — As series formadas de termos cujos módulos formam uma serie convergente chamam-se *series absolutamente convergentes*. A respeito d'estas series vamos demonstrar o seguinte theorema importante:

Theorema 3.º — A somma de uma serie absolutamente convergente não se altera quando se muda a ordem dos seus termos.

Seja s_n a somma dos n primeiros termos da serie dada e s'_p a somma dos p primeiros termos da nova serie, que resulta de mudar a ordem dos termos da primeira. Supponde que se dá a p um valor sufficientemente grande para que s'_p contenha todos os termos de s_n, e chamando u_α, u_β, etc., os termos que aquella somma contém a mais, vem

$$s'_p - s_n = u_\alpha + u_\beta + \ldots + u_p\,;$$

ou, chamando ρ_1, ρ_2, etc. os módulos de u_1, u_2, etc. e attendendo ao theorema 1.º do n.º 9,

$$\begin{aligned}\text{mod}\,(s'_p - s_n) \overline{\overline{<}}\, \rho_\alpha + \rho_\beta + \ldots + \rho_p \,\overline{\overline{<}}\, \rho_{n+1} \\ + \rho_{n+2} + \ldots + \rho_p\,.\end{aligned}$$

Vê-se pois que á medida que n augmenta, o módulo da differença $s'_p - s_n$ tende para o limite zero, e portanto que s'_p tende para o mesmo limite que s_n.

Corollario. — N'uma serie formada de termos reaes pode-se alterar a ordem das parcellas sem mudar o valor da serie, se, dando a todos os termos da serie o signal +, resultar uma serie convergente.

15. — Passando agora ás operações sobre series, demonstraremos a este respeito os dous theoremas seguintes:

Theorema 4.º — Se as series

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

forem convergentes e as suas sommas forem s e s', tambem a serie cujo termo geral é $u_n + v_n$ será convergente, e a sua somma será igual a $s + s'$.

Com effeito, a somma dos n primeiros termos da nova serie será $\Sigma u_n + \Sigma v_n$, e esta somma tende para o limite $s + s'$.

Theorema 5.º — Se as series

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

forem absolutamente convergentes e as suas sommas forem s e s', tambem a serie

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n + \ldots,$$

cujo termo geral T_n é a somma de todos os valores de $u_\alpha v_\beta$ correspondentes ás soluções inteiras positivas da equação $\alpha + \beta = n + 1$, será convergente, e a sua somma será igual a ss'.

Com effeito, a somma S_p dos p primeiros termos da nova serie contém todos os valores de $u_\alpha v_\beta$ correspondentes ás soluções inteiras positivas das equações:

$$\alpha + \beta = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ p + 1.$$

Por outra parte o producto $s_n s'_n$ dos n primeiros termos das series dadas contém como parcellas todos os valores de $u_\alpha v_\beta$ correspondentes aos valores inteiros positivos de α e β desde 1 até n, isto é, a todas as soluções inteiras positivas das equações

$$\alpha + \beta = 2,\ 3,\ \ldots\ 2n,$$

que não excederem n em grandeza.

Logo, dando a p um valor maior do que $2n-1$, vem

$$S_p - s_n s'_n = u_i v_j + u_k v_l + \ldots + u_r v_t,$$

onde cada parcella tem um dos indices superior a n e inferior a $p+2$, e o outro inferior a $p+2$.

Portanto, chamando ρ_1, ρ_2, etc. os módulos de u_1, u_2, etc., ρ'_1, ρ'_2, etc. os módulos de v_1, v_2, etc., M a somma dos primeiros e N a somma dos segundos, temos (n.º 9—1.º)

$$\text{mod}\,(S_p - s_n s'_n) \overline{\overline{<}} \rho_i \rho'_j + \rho_k \rho'_l + \ldots + \rho_r \rho'_t$$

$$\overline{\overline{<}} (\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_{p+1})(\rho'_{n+1} + \rho'_{n+2} + \ldots + \rho'_{p+1})$$

$$+ (\rho'_1 + \rho'_2 + \ldots + \rho'_{p+1})(\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \ldots + \rho_{p+1})$$

$$< M(\rho'_{n+1} + \rho'_{n+2} + \ldots + \rho'_{p+1}) + N(\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \ldots \rho_{p+1}).$$

Como as series $\rho_1 + \rho_2 + \ldots$, $\rho'_1 + \rho'_2 + \ldots$, são, por hypothese, convergentes, o segundo membro da desigualdade precedente tende para o limite zero á medida que n augmenta, logo S_p tende para o mesmo limite que $s_n s'_n$, isto é, para o limite ss'.

***16**.—Consideremos agora especialmente as series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de z, isto é, as series da fórma:

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n z^n, \; z = x + iy,$$

e demonstremos o seguinte theorema, devido a Abel:

Theorema 6.º—Se ha um numero positivo α que, substituido em (2) *no logar do módulo de* **z**, *torna os módulos de todos os termos inferiores a uma quantidade finita* **B**, *a serie* (2) *será convergente todas as vezes que se derem a* **z** *valores cujos módulos sejam inferiores a α.*

Seja z_1 um valor de z cujo módulo ρ_1 é menor que α, e seja r_n o módulo de c_n. Por ser, por hypothese,

$$r_n \alpha^n < B,$$

teremos

$$r_n \rho_1^n < B \left(\frac{\rho_1}{\alpha}\right)^n,$$

e portanto

$$\sum_1^\infty r_n \cdot \rho_1^n < B\, \Sigma \left(\frac{\rho_1}{\alpha}\right)^n = B \frac{\rho_1}{\alpha - \rho_1}.$$

Mas o segundo membro é finito, logo o primeiro tende para um limite determinado; portanto é convergente a serie formada com os módulos de (2), e por consequencia a serie (2).

Nota. — D'este theorema vamos tirar uma conclusão importante, mas para isso observemos primeiro que todo o imaginario $x + iy$ ou ρ (cos $\theta + i$ sen θ) póde ser representado por um ponto cujas coordenadas cartesianas são x e y, e cujas coordenadas polares são ρ e θ, e vice-versa. D'este modo podemos em logar de fallar no imaginario $x + iy$ fallar no ponto (x, y) ou (ρ, θ). Esta observação é muito importante e d'ella faremos um grande uso. Devemos notar que esta representação geometrica do imaginario é independente da theoria geometrica atraz exposta.

Se fizermos variar z, a partir de zero, a serie (2) ficará convergente em quanto $r_n\ \rho^n$ fôr finito, por ser então este módulo inferior á quantidade B; e deixará de o ser logo que este módulo se torne infinito, por ter então a serie proposta termos com valor infinito. Como todos os valores de z a que corresponde o mesmo módulo se podem representar pelos pontos de uma circumferencia cujo centro é a origem das coordenadas e cujo raio é esse módulo, vê-se que para todos os valores de z representados pelos pontos da área de um circulo cujo raio é o maior valor de ρ que torna $r_n\ \rho^n$ finito, a serie é convergente, e é divergente para todos os valores de z que correspondem a pontos collocados fóra d'este circulo. A este circulo deu porisso Cauchy o nome de *circulo de convergencia* da serie (2). O theorema precedente nada diz relativamente á convergencia ou divergencia da serie (2), quando z representa pontos collocados sobre a circumferencia do circulo de convergencia.

O estudo das series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z - a$, isto é, das series da fórma

$$\Sigma c_n (z - a)^n$$

reduz-se ao precedente fazendo $z - a = t$, pois vem a serie

$$\Sigma c_n t^n,$$

que acabamos de estudar.

***17.** — Voltemos á serie

$$(1) \ldots\ldots \quad \Sigma u_n = \Sigma (x_n + iy_n) = \Sigma x_n + i\Sigma y_n,$$

e supponhamos que u_n é funcção de $x + iy = z$, e portanto que x_n e y_n são funcções de x e y.

Representando por $s_n + is'_n$ a somma dos n primeiros termos d'esta serie, isto é, pondo

$$s_n = \sum_1^\infty x_n, \; s'_n = \sum_1^\infty y_n,$$

vimos nos n.os 11 e 13 que é necessario e sufficiente para que a serie (1) seja convergente que, sendo δ e δ' quantidades arbitrarias tão pequenas quanto se queira, exista sempre um valor de n que combinado com qualquer valor de p, satisfaça ás desigualdades:

$$s_{n+p} - s_n < \delta, \; s'_{n+p} - s'_n < \delta'.$$

Suppondo que as condições precedentes são satisfeitas nos pontos $x' + iy'$, $x'' + iy''$, etc. por um valor a de n; nos pontos $x'_1 + iy'_1$, x''_1, $+ iy''_1$, etc. por um valor b de n; etc., temos as desigualdades:

$$s_{a+p} - s_a < \delta, \; s'_{a+p} - s'_a < \delta'$$

$$s_{b+p} - s_b < \delta, \; s'_{b+p} - s'_b < \delta'$$

$$s_{c+p} - s_c < \delta, \; s'_{c+p} - s'_c < \delta'$$

. . . .

Suppondo que a serie (1) é convergente quando a $x+iy$ se dá valores que representam pontos de uma área dada, e que as desigualdades precedentes se referem aos pontos d'esta área, se os valores de a, b, c, etc. tem um limite superior N, as desigualdades:

$$s_{N+p} - s_N < \delta,\ s'_{N+p} - s'_N < \delta'$$

comprehendem todas as precedentes. Diz-se n'este caso que a serie proposta é *uniformemente convergente* em toda a área considerada. A respeito d'estas series vamos demonstrar o theorema seguinte:

Theorema 7.º — Toda a serie ordenada segundo as potencias de uma variavel real ou imaginaria, é uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro do circulo de convergencia.

Seja

$$\sum_1^\infty c_n\, z^n,\ z = x + iy$$

a serie proposta, e seja R o maior valor do módulo de z na área considerada.

Pondo

$$c_n = r_n\,(\cos d_n + i \operatorname{sen} d_n)$$

$$z = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

vem (n.º 9, 2.º)

$$\sum_1^\infty r_n\, \rho^n\, [\cos(n\,\theta + d_n) + \operatorname{sen}(n\,\theta + d_n)]\,.$$

Temos pois

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{n+1}^\infty r_k\, \rho^k \cos(k\,\theta + d_k)$$

$$s'_{n+p} - s'_n = \sum_{n+1}^{\infty} r_k \rho^k \operatorname{sen}(k\theta + d_k).$$

Por ser a serie convergente na área considerada, ha sempre um valor de n que, combinado como qualquer valor de p, satisfaz ás desigualdades

$$\sum_{n+1}^{\infty} r_k R^k \cos(k\theta + d_k) < \delta,$$

$$\sum_{n+1}^{\infty} r_k R^k \operatorname{sen}(k\theta + d_k) < \delta';$$

e portanto, por ser $\rho < R$, o mesmo valor de n satisfará *à fortiori* ás desigualdades

$$s_{n+p} - s_n < \delta,$$
$$s_{n+p} - s'_n < \delta',$$

qualquer que seja ρ, que é o que se queria demonstrar.

Por exemplo, a serie

$$1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} z^n + \ldots$$

onde m é real, é convergente quando o é a serie (n.° 13 — 2.°):

$$1 + m\rho + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \rho^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \rho^n + \cdots$$

Como ha um valor de n a partir do qual, n'esta ultima serie, a razão de dois termos consecutivos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n}\rho = \left(\frac{m+1}{n} - 1\right)\rho$$

tende para o limite ρ (em valor absoluto) quando n augmenta indefinidamente, e fica sempre inferior a este limite, a serie será convergente (n.° 12 — 3.°) quando é $\rho < 1$, e divergente quando é $\rho > 1$.

Logo a serie proposta é uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro do circulo do raio igual á unidade.

Como segundo exemplo consideremos a serie

$$1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \,.\, 2\gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1 \dots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \,.\, 2 \dots n \,.\, \gamma(y+1) \dots (\gamma+n-1)} z^n + \dots$$

e supponhamos que α, β, γ são constantes reaes.

A serie correspondente dos módulos será:

$$1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} \rho + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \,.\, 2\gamma(\gamma+1)} \rho^2 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \,.\, \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \,.\, 2 \dots n \,.\, \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} \rho^n + \dots,$$

e a razão de dous termos consecutivos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{(n+1)(\gamma+n-1)} \rho$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)\left(1+\frac{\beta-1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{n}\right)} \,.\, \rho =$$

$$\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)\left(1+\frac{\beta-1}{n}\right)\left(1-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1-\frac{\frac{\gamma-1}{n}}{1+\frac{\gamma-1}{n}}\right)$$

approxima-se de ρ tanto quanto se queira augmentando n. Logo, se é $\rho < 1$, póde dar-se a n um valor tão grande que a razão precedente se torne menor do que uma quantidade qualquer B comprehendida entre ρ e 1; se é $\rho > 1$, póde dar-se a n um valor tal que a mesma razão se torne maior do que a unidade. No primeiro caso a serie será convergente, no segundo caso será divergente (n.º 12—3.º).

Logo a serie proposta será convergente dentro do circulo de raio igual á unidade, e n'este circulo será uniformemente convergente.

A serie precedente, que tem sido objecto de trabalhos importantes, tem o nome de *serie hypergeometrica.*

Como exemplo de uma serie que não é uniformemente convergente consideremos a progressão geometrica

$$z + z(1-z) + z(1-z)^2 + \dots$$

e supponhamos z real e comprehendido entre 0 e 1. Formando as sommas s_n e s_{n+p} dos n e dos $n+p$ primeiros termos d'esta progressão, e subtraindo os resultados, vem

$$s_{n+p} - s_n = (1-z)^n [1 - (1-z)^p].$$

Para que esta differença seja menor do que δ, qualquer que seja p, basta que seja

$$(1-z)^n < \delta$$

o que dá

$$n > \frac{\log \delta}{\log (1-z)}.$$

Mas á medida que z se approxima de zero, o denominador d'esta fracção diminue indefinidamente; logo n não tende para limite algum e a serie não é portanto uniformemente convergente no intervallo considerado.

VI

Productos infinitos

18. — Consideremos agora as expressões da fórma

$$(3) \dots\dots\dots \quad (1 + a_0)(1 + a_1) \dots (1 + a_n),$$

que, empregando o signal Π para representar productos, podemos escrever do modo seguinte:

$$\prod_0^n (1 + a_n).$$

Suppondo primeiramente $a_0, a_1, \dots a_n$ quantidades reaes positivas, procuremos as condições para que este producto convirja para um limite finito e determinado á medida que n augmenta indefinidamente. (*)

Sabe-se que a media arithmetica de p quantidades positivas é maior do que a sua media geometrica; portanto, sendo q d'estas quantidades iguaes a A e as restantes iguaes a B, teremos

$$\left(\frac{qA + (p-q)B}{p}\right)^p > A^q B^{p-q}.$$

Pondo n'esta desigualdade

$$A = 1 + \beta \frac{p}{q}, \; B = 1,$$

(*) Veja-se o *Calculo Differencial* de Todhunter e o artigo intitulado — *Sobre a expressão* $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ que publiquei na *Revista Scientifica do Porto* — tomo I.

vem

$$\left(1+\beta\right)^p > \left(1+\beta\,\frac{p}{q}\right)^q,$$

ou, pondo $\beta = 1$,

$$2^p > \left(1+\frac{p}{q}\right)^q.$$

Temos pois, pondo $\gamma = \frac{p}{q} > 1$,

$$2^\gamma > 1 + \gamma > 1 + \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Se fôr $\gamma < 1$, a formula precedente dá

$$2^{1+\gamma} > 1 + (1+\gamma)$$

e portanto teremos tambem n'este caso

$$2^\gamma > 1 + \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Em virtude d'esta desigualdade virá

$$1 + a_n < 2^{2a_n}$$

e portanto

$$\Pi\,(1 + a_n) < \Pi\, 2^{2a_n} = 2^{2\Sigma a_n}.$$

Esta igualdade mostra que, se Σa_n converge para um limite finito e determinado, tambem $\Pi\,(1 + a_n)$ converge para um limite finito e determinado.

Por outra parte, a desigualdade

$$\Pi\,(1 + a_n) = 1 + \Sigma a_n + \Sigma a_n a'_m + \ldots > \Sigma a_n$$

mostra que, se Σa_n fôr uma serie divergente, tambem $\Pi\,(1 + a_n)$ será divergente. Temos pois o theorema seguinte:

Theorema.—A condição necessaria e sufficiente para que o producto (3) *seja convergente é que a serie Σa_n o seja.*

19.—Podemos ligar com a doutrina precedente a das potencias de grão infinito. A este respeito vamos considerar a expressão

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

que tem grande importancia no *Calculo Differencial.*

A desigualdade

$$(1+\beta)^p > \left(1+\beta\frac{p}{q}\right)^q$$

ou

$$(1+\beta)^\gamma > 1+\beta\gamma$$

dá, pondo $\beta = \frac{1}{\gamma n}$ e elevando á potencia n,

$$\left(1+\frac{1}{\gamma n}\right)^{\gamma n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

onde é $\gamma n > n$ por ser $y > 1$. Logo a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ augmenta com n.

Por outra parte temos, pondo $a_n = \frac{1}{n}$,

$$1+\frac{1}{n} < 2^{\frac{2}{n}}$$

e portanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2^2,$$

o que mostra que a potencia considerada, que augmenta indefinidamente com n, tende para um limite menor do que 4.

Este limite designa-se habitualmente pela lettra e, e serve de base a um systema de logarithmos, que são chamados *neperianos*, por ser a base de que usou Neper, inventor dos logarithmos.

O valor de e póde calcular-se com a approximação que se quizer dando a n os valores *1, 2, 3, ...*, o que dá $e = 2,278281\ldots$

Se fôr n negativo, vem

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right),$$

e portanto

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e.$$

Podemos pois enunciar o seguinte theorema importante:

Se o numero inteiro ou fraccionario, positivo ou negativo **n** *augmenta indefinidamente em valor absoluto, a expressão* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *tende para um limite determinado.*

***20.** — Consideremos agora o producto

$$\Pi\,(1+u_n),$$

onde u_n é uma funcção da variavel imaginaria z.

Teremos, em virtude da formula conhecida da multiplicação de binomios,

$$(a) \ldots \lim \Pi\,(1+u_n) = \lim\,[1+\Sigma u_i + \Sigma u_i\, u_j + \ldots + u_1\, u_2 \ldots u_n],$$

onde Σu_i representa a somma dos segundos termos dos binomios, $\Sigma u_i\, u_j$ a somma dos seus productos distinctos dois a dois, etc.

Por outra parte, chamando $a_1, a_2, \ldots a_n$ os módulos de $u_1, u_2, \ldots u_n$, e suppondo convergente a serie:

$$(b) \ldots 1 + \Sigma a_i + \Sigma a_i \,.\, a_j + \ldots + a_1\, a_2 \ldots a_n,$$

que é equivalente ao producto $\Pi\,(1+a_n)$, as series Σa_i, $\Sigma a_i\, a_j$, etc. tambem serão convergentes, assim como (n.° 13—2.°) as series Σu_i, $\Sigma u_i\, u_j$, etc. Portanto, chamando

S_n a somma dos n primeiros termos da serie equivalente a $\Pi(1+a_n)$, teremos (n.º 11 — 1.º)

$$S_{n+p} - S_n < \delta.$$

Mas, por ser o termo geral da serie (a), isto é $\Sigma u_i u_j \ldots$, igual a $\Sigma a_i a_j \ldots (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ (representando por θ a somma dos argumentos de u_i, u_j, etc.), as duas series em que ella se decompõe têem os seus termos respectivamente menores do que os da serie (b), e portanto, chamando s_n e s'_n as sommas dos seus n primeiros termos, teremos

$$s_{n+p} - s_n < \delta, \; s'_{n+p} - s'_n < \delta.$$

Logo estas duas series serão (n.º 11 — 2.º) convergentes, e portanto tambem será convergente a sua somma $\Pi(1+u_n)$.

Podemos pois enunciar o principio seguinte:

Se o producto $\Pi(1+a_n)$ *fôr convergente, tambem o será o producto* $\Pi(1+u_n)$.

Vê-se pois que aqui, como no caso das series, se póde fazer depender o estudo das condições de convergencia dos productos imaginarios do estudo das condições de convergencia dos productos reaes.

Por exemplo, o producto

$$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{1.2\ldots n}\right)$$

é convergente, porque, chamando ρ o módulo de z, temos

$$\Sigma a_n = \Sigma \frac{\rho}{1.2\ldots n} = \rho \, \Sigma \frac{1}{1.2\ldots n},$$

e a serie $\Sigma \frac{1}{1.2\ldots n}$ é convergente (n.º 12 — 3.º).

VII

Fracções continuas

21. — As fracções continuas são conhecidas desde os Elementos de Algebra, onde se viu a grande importancia que tinham em muitas questões relativas aos numeros. Os principaes resultados lá achados tem logar no caso da fracção continua:

$$(1)\ldots\quad u=\frac{a_1}{b_1+u_1},\ u_1=\frac{a_2}{b_2+u_2},\ u_2=\frac{a_3}{b_3+u_3},\ \text{etc.},$$

onde a_1, a_2, ... b_1, b_2, etc., representam funcções inteiras de uma variavel z.

I — Formando as convergentes successivas como no caso das fracções continuas elementares, acha-se os resultados:

$$C_1=\frac{N_1}{D_1}=\frac{a_1}{b_1}$$

$$C_2=\frac{N_2}{D_2}=\frac{a_1\,b_2}{b_1\,b_2+a_2}$$

....

$$C_n=\frac{N_n}{D_n}=\frac{N_{n-1}\,b_n+N_{n-2}\,a_n}{D_{n-1}\,b_n+D_{n-2}\,a_n}.$$

II — As tres convergentes consecutivas:

$$\frac{N_{n-2}}{D_{n-2}},\ \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}},\ \frac{N_n}{D_n}=\frac{N_{n-1}\,b_n+N_{n-2}\,.\,a_n}{D_{n-1}\,b_n+D_{n-2}\,.\,a_n}$$

dão, pela subtracção,

$$C_{n-1} - C_n = \frac{a_n (N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2})}{D_{n-1} D_n}$$

$$C_{n-2} - C_{n-1} = - \frac{N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2}}{D_{n-1} D_{n-2}},$$

e portanto o numerador da differença $C_{n-1} - C_n$ é igual ao numerador da differença $C_{n-2} - C_{n-1}$ multiplicado por $-a_n$; mas as primeiras convergentes dão

$$C_1 - C_2 = \frac{a_1 \, a_2}{D_1 \, D_2},$$

logo teremos

$$C_{n-1} - C_n = \pm \frac{a_1 \, . \, a_2 \, \ldots \, a_n}{D_{n-1} D_n},$$

e

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = \pm \, a_1 \, . \, a_2 \, . \, a_3 \, \ldots \, a_n \, .$$

III — Este resultado permitte transformar a fracção continua n'uma serie. Com effeito, temos evidentemente

$$u_1 = C_1 - (C_1 - C_2) - (C_2 - C_3) - \ldots$$

d'onde se segue,

$$u = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 \, a_2}{D_1 \, D_2} + \frac{a_1 \, a_2 \, a_3}{D_2 \, D_3} - \ldots$$

O valor que se obtém sommando n termos d'esta serie é igual á convergente de ordem n de fracção continua. Logo para que a fracção continua seja convergente basta que esta serie o seja e reciprocamente.

IV — Das fracções continuas contidas na fórma geral (1) ha dois grupos importantes na Analyse. O primeiro corresponde a $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 1$ (*). O segundo corresponde a $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$.

(*) Veja-se o nosso opusculo intitulado — *Desenvolvimento das funcções em fracção continua* — Coimbra, 1871.

A respeito das fracções continuas do segundo grupo enunciaremos os principios seguintes:

1.° — *O denominador de convergente da ordem* n *é um polynomio inteiro cujo grão augmenta com* n.

Este principio é uma consequencia da lei da formação dos denominadores das convergentes.

2.° — *A fracção algebrica* $\frac{N_n}{D_n}$ *é irreductivel.*

Este principio é consequencia da formula

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = \pm 1.$$

3.° — *O producto por* x^k *da differença entre o valor da fracção continua completa e de qualquer convergente, isto é, a expressão*

$$x^k \left(\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - u\right)$$

tende para um limite finito, quando x *augmenta indefinidamente, se* k *é igual á somma dos grãos dos polynomios* D_{n-1} *e* D_n, *tende para zero se* k *é maior do que esta somma, e tende para o infinito se* k *é menor do que esta somma.*

Com effeito, a igualdade

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - \frac{N_n}{D_n} = \pm \frac{1}{D_n D_{n-1}}$$

$$= \pm \frac{1}{D_{n-1}(D_{n-1} b_n + D_{n-2})}$$

dá, quando se muda b_n em $b_n + u_n$,

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - u = \pm \frac{1}{D_{n-1}(D_{n-1} b_n + D_{n-1} u_n + D_{n-2})}$$

$$= \pm \frac{1}{D_{n-1}(D_n + D_{n-1} u_n)}.$$

Temos pois a igualdade

$$(C_{n-1} - u)\, x^k = \pm \frac{x^k}{D_{n-1}\,(D_n + D_{n-1}\, u_n)},$$

que, dividindo os dois termos da fracção que entra no segundo membro por x levantado a uma potencia de gráo igual á somma dos gráos de D_n e D_{n-1} e fazendo depois $x = \infty$, leva ao theorema enunciado.

(*continua.*)

SUR LES POLYNOMES DE LEGENDRE

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. Ch. Hermite

... Vous connaissez cette belle proposition de M. Tchebichew que le polynôme X_n de Legendre est le dénominateur de la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de la quantité:

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots.$$

On peut y parvenir, comme vous allez voir, au moyen du développement en série, qui a été le point de départ de Legendre et a donné la première définition des polynômes X_n, à savoir:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}=X_0+X_1z+\ldots+X_nz^n+\ldots.$$

Soit pour abréger

$$R(z)=1-2zx+z^2,$$

je remarque d'abord qu'en changeant z en $\frac{1}{z}$, on aura:

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}}=\frac{X_0}{z}+\frac{X_1}{z^2}+\ldots+\frac{X_n}{z^{n+1}}+\ldots$$

Il en résulte, comme je l'ai établi page 299 de mon *Cours d'Analyse*, que l'intégrale $\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}}$ s'exprime ainsi:

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = F(z)\sqrt{R(z)} + X_n \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

en désignant par $F(z)$ un polynôme en z du dégré $n-1$.

Et il est facile de voir que ce polynôme est donné par le développement en série suivant les puissances descendantes de z de l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} \int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}},$$

en n'en prenant que la partie entière. Cette partie entière s'obtient au moyen de la relation:

$$\frac{z^n}{\sqrt{R(z)}} = X_0 z^{n-1} + X_1 z^{n-2} + \ldots + X_i z^{n-i-1} + \ldots,$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{X_0 z^n}{n} + \frac{X_1 z^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{X_i z^{n-i}}{n-i} + \ldots.$$

Il suffit en effet de multiplier membre á membre avec l'équation:

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{X_0}{z} + \frac{X_1}{z^2} + \ldots + \frac{X_i}{z^{i+1}} + \ldots$$

et l'on trouve immédiatement ainsi:

$$F(z) = \frac{X_0^2 z^{n-1}}{n} + \frac{(2n-1) X_0 X_1 z^{n-2}}{n(n-1)} + \ldots.$$

Je remarquerai seulement le dernier terme, le terme indépendant de z, ou bien $F(o)$, qui a pour expression:

$$F(o) = \sum \frac{X_i X_{n-i-1}}{i+1}, \; i = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Ce résultat donne en effet la valeur de l'intégrale définie:

$$\int_0^\xi \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}},$$

où ξ désigne la plus petite racine de $R(z) = 0$, c'est-à-dire:

$$\xi = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Si l'on employe la formule générale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \log \left[z - x + \sqrt{R(z)} \right],$$

on a facilement:

$$\int_0^\xi \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \log \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1},$$

d'où par conséquent:

$$\int_0^\xi \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = -F(o) + \frac{1}{2} X_n \log \frac{x+1}{x-1},$$

et cette expression de l'intégrale définie contient la belle proposition de M. Tchebichew.

Faites, pour le voir, la substitution $z = \zeta\xi$, l'intégrale devient:

$$\xi^{n+1} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - 2x\zeta\xi + \zeta^2\xi^2}},$$

*

ou bien

$$\frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{Y},$$

en posant

$$\mathrm{Y}=(x\,\xi)^{n+1}\int_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta\xi+\zeta^2\xi^2}},$$

quantité finie pour n infiniment grand. Effectivement

$$\xi=x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2x}+\ldots,$$

ce qui donne pour x infini

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta}}=\frac{1}{2^{n+2}}.$$

Remarquez encore que

$$\mathrm{F}(o)=\sum\frac{\mathrm{X}_i\,\mathrm{X}_{n-i-1}}{i+1}$$

est un polynôme entièr en x du dégré $n-1$; $\dfrac{\mathrm{F}(o)}{\mathrm{X}_n}$ est bien par conséquent la réduite d'ordre n du développement de $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+1}{x-1}$ en fraction continue.

Paris, 31 mai 1885.

EMPREGO DA CYCLOIDE
PARA A RESOLUÇÃO GRAPHICA DE ALGUNS PROBLEMAS DE GEOMETRIA

POR

RODOLPHO GUIMARÃES

1. PROBLEMA. — *Dividir graphicamente um angulo em* m *partes proporcionaes a numeros dados.*

SOLUÇÃO. — Do vertice o do angulo dado (*) descrevamos um circulo com um raio egual á unidade, que intercepte os lados do angulo nos pontos A e B.

Façamos em seguida coincidir um dos lados do angulo, OA por exemplo, com o diametro perpendicular ao eixo dos x, ficando por conseguinte o circulo tangente no ponto A ao dicto eixo.

Podemos considerar este circulo como o gerador da cycloide CBD, que passa pelo ponto B, e encontra respectivamente o eixo dos x nos pontos C e D.

Por esta consideração o arco AB é egual à linha AC. Mas, como esta propriedade é a mesma para todo e qualquer ponto da circumferencia do circulo gerador, podemos considerar no dicto circulo em vez d'um ponto unico B, m pontos a, a_1, a_2, ... a distancias proporcionaes a numeros dados.

D'este modo, teremos m cycloides passando por esses pontos e encontrando respectivamente o eixo dos x em m pontos b, b_1, b_2, ... tambem a distancias proporcionaes a numeros dados.

D'aqui concluimos que, se AC se dividir em m partes proporcionaes, o arco AB fica egualmente dividido em m partes na mesma proporção.

2. Posto isto, vejamos como se opéra na practica.

Construamos uma cycloide de metal correspondente a um cir-

(*) Pede-se ao leitor o favor de construir a figura.

culo gerador de raio qualquer, que deve estar marcado na cycloide. Dando ao angulo a mesma disposição que anteriormente, colloquemos a cycloide sobre o eixo dos x, de maneira que passe pelo ponto B, e notemos o ponto C que lhe corresponde no dicto eixo.

Dividamos AC no mesmo numero de partes em que se quer dividir o angulo dado; e, applicando a cycloide sobre cada uma d'essas divisões, vejamos os pontos que lhes correspondem no arco.

D'este modo o arco, e portanto o angulo, fica dividido em m partes proporcionaes.

3. Corollario I. — Até aqui não nos temos referido á grandeza do angulo. Se o considerarmos de 360°, estamos no caso de dividir a circumferencia do circulo gerador em m partes proporcionaes a numeros dados.

Dividida a circumferencia do circulo gerador, para dividirmos uma outra de raio R, basta traçal-a concentrica com a primeira, e em seguida prolongar os raios tirados para os pontos de divisão da circumferencia do circulo gerador.

4. Corollario II. — É evidente que o problema da divisão do angulo e da circumferencia em partes eguaes é um caso particular do que vimos de expôr.

5. Problema II. — *Rectificar um arco de circulo.*

Solução. — Seja A'B' o arco que se quer rectificar, correspondente a um circulo de raio R e que tem O como centro (*).

Unindo as extremidades A' e B' do arco dado com o centro O do circulo, os raios A'O e B'O interceptam nos pontos A e B o circulo descripto de O como centro e com um raio egual ao do gerador da cycloide.

Para se rectificar o arco AB, dispomos a cycloide como no n.° 2, e vejamos o ponto C que lhe corresponde no eixo dos x. Unindo C com O, o seu prolongamento encontrará o eixo dos X em um ponto C'.

A distancia A'C' é a rectificação do arco dado A'B'.

(*) Note-se que a disposição da figura é a mesma que a do processo anterior, portanto a extremidade A' do arco dado é tangente ao eixo dos X, e OA' é perpendicular ao dicto eixo. Egualmente, o eixo dos X, tangente em A', é parallelo ao dos x, tangente em A, estando os pontos A e A' situados na mesma perpendicular ao eixo dos X e portanto ao dos x.

Com effeito. Os triangulos AOC e A'OC' dão

$$\frac{OA}{AC}=\frac{OA'}{A'C'}.$$

D'onde concluimos que A'C' é a rectificação do arco A'B'.

6. Corollario. — Do mesmo modo que rectificámos o arco A'B', rectificaremos uma circumferencia. Para isso basta substituir na relação

$$\frac{OA}{AC}=\frac{OA'}{A'C'}$$

AC pela rectificação da circumferencia do circulo gerador, isto é, pela base da cycloide de metal.

7. Problema III. — *Reciprocamente, dada uma linha recta, achar o raio da circumferencia de que essa recta é a rectificação.*

Solução. — Na relação

$$\frac{OA}{AC}=\frac{OA'}{A'C'}$$

OA' é uma quarta proporcional entre OA, AC, e A'C'. Por outra, é uma quarta proporcional entre *o raio da circumferencia do circulo gerador, a rectificação do mesmo circulo, e a linha dada.*

8. Problema IV. — *Dada uma esphera achar um triangulo cuja área lhe seja equivalente.*

Solução. — Se R é o raio da esphera dada, a sua área é representada pela expressão

$$S=4\pi R^2=\pi(2R)^2.$$

Esta fórmula diz-nos que a área d'uma esphera é egual á de um circulo de raio duplo do da esphera; isto é, egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são $2R$ e $2\pi(2R)$.

Vejamos o modo de construir esse triangulo sem rectificar a circumferencia do circulo equivalente á esphera dada.

Vimos já que a rectificação da circumferencia do circulo gerador da cycloide de metal, era a base da propria cycloide.

Portanto, unindo a extremidade C da base AC da cycloide com o centro O do circulo gerador, situado na extremidade do raio OA perpendicular em A á base da cycloide, obtemos um triangulo rectangulo OAC equivalente ao circulo gerador.

Prolonguemos os lados OA e OC; tomemos sobre o prolongamento de OA a partir de O um comprimento OM egual ao dobro do raio da esphera, e tiremos pelo ponto M uma parallela a AC que irá encontrar o prolongamento de OC n'um ponto P. O triangulo assim formado OMP será equivalente á superficie da esphera.

Com effeito, os triangulos OAC e OMP dão

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{PM}},$$

d'onde

$$\mathrm{PM}=2\pi\,(2\mathrm{R}),$$

e portanto a área da esphera será

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\,\mathrm{PM}\times\mathrm{OM}=4\pi\mathrm{R}^2.$$

D'onde concluimos que *a área d'uma esphera é egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são o duplo raio da esphera dada, e a quarta proporcional entre esse duplo raio, o raio do circulo gerador da cycloide de metal e a base d'essa cycloide.*

9. Problema V. — *Determinar a superficie lateral e total d'um cone circular recto.*

Solução. — Sabe-se que a planificação d'um cone circular recto é um sector circular, cujo arco é evidentemente egual á circumferencia da base.

D'onde concluimos que *a superficie lateral d'um cone circular recto é egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são a generatriz e a rectificação da circumferencia da base.*

Se quizermos obter a superficie total, temos de accrescentar á lateral a da base, que é representada por um triangulo rectangulo cujos cathetos são o raio da base e a rectificação da circumferencia da mesma base.

Vejamos agora quaes devem ser os elementos d'um triangulo rectangulo, para que a sua área seja egual á superficie total do cone.

Seja AOB um triangulo rectangulo cujos cathetos OA e AB são respectivamente a generatriz e a rectificação da circumferencia da base do cone dado. Este triangulo será equivalente á superficie lateral do cone.

Prolonguemos os lados OA e OB, e tomemos sobre o prolongamento de OA um ponto A'; tiremos em seguida por A' uma recta A'B' parallela a AB, e vejamos qual deve ser o comprimento de OA' para que o triangulo A'OB' represente a superficie total do cone dado.

Na hypothese de que A'OB' representa a superficie total, o trapezio ABA'B' representa evidentemente a área da base.

D'onde, representando por R o raio da base, temos

$$\frac{1}{2}AB \times R = \frac{1}{2}A'B' \times OA' - \frac{1}{2}AB \times OA$$

ou

$$\frac{1}{2}A'B' \times OA' = \frac{1}{2}AB\,(OA + R),$$

e pela relação

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$$

teremos

$$\overline{OA'}^2 = OA\,(OA + R).$$

D'onde concluimos que *a superficie total d'um cone circular recto, é egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são a media geometrica entre a generatriz do cone e essa mesma generatriz augmentada do raio da base*, e *a quarta proporcional entre essa media geometrica, a generatriz do cone e a rectificação da circumferencia da base.*

10. Problema VI. — *Determinar a superficie lateral e total d'um tronco de cone circular recto de bases parallelas.*

Solução. — Sabe-se que a planificação d'um tronco de cone é um trapezio circular, em que os arcos de circulo parallelos que o limitam são eguaes ás circumferencias das bases do tronco.

Rectificando esses arcos obtemos um trapezio que se póde ainda transformar em um triangulo rectangulo da mesma altura que o trapezio e de base egual á somma das bases.

Portanto, *a área lateral do tronco é egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são a generatriz do tronco e a somma das rectificações das circumferencias das bases.*

11. O methodo que empregamos nas questões dos numeros antecedentes, leva-nos á resolução graphica de muitos problemas de geometria.

Assim os problemas concernentes á linha recta se tornam extensivos aos arcos e circumferencias de circulo; assim se, por exemplo, quizermos dividir uma circumferencia em duas partes taes que a maior seja meia proporcional entre a outra e a circumferencia toda, basta-nos dividir a sua rectificação em media e extrema razão; se pretendermos achar sobre uma circumferencia um ponto tal que a divida em duas partes proporcionaes a dois arcos ou a duas rectas, não temos mais do que dividir a sua rectificação em dois segmentos proporcionaes a esses arcos ou rectas; da mesma fórma querendo construir a meia proporcional entre duas circumferencias dadas, rectifical-as-hemos e acharemos a meia proporcional entre essas rectificações.

A muitos outros problemas poderiamos ainda, como é evidente, applicar o mesmo methodo de resolução.

Tencionamos opportunamente estudar outras questões a que este methodo se applica.

REMARQUES ARITHMÉTIQUES

PAR

Ernest Cesaro

III

Sur quelques conséquences asymptotiques de la série de Lambert

1. Soient a, b, c, ... *tous* les diviseurs de n, et posons

$$F(n) = f(a) + f(b) + f(c) + \ldots \tag{1}$$

Si l'on développe

$$\frac{zf(1)}{1-z} + \frac{z^2 f(2)}{1-z^2} + \frac{z^3 f(3)}{1-z^3} + \ldots + \frac{z^\nu f(\nu)}{1-z^\nu}$$

suivant les puissances croissantes de z, on reconnaît facilement que le coefficient de z^n est ce que devient le second membre de (1), quand on y supprime les diviseurs *supérieurs à* ν. Si l'on représente le résultat par $F_\nu(n)$, on obtient, après multiplication par $1-z$,

$$\sum_{n=1}^{n=\nu} \frac{1-z}{1-z^n} z^n f(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} [F_\nu(n) - F_\nu(n-1)] z_n.$$

En faisant $z=1$, puis $\nu=\infty$, on trouve

$$F(\infty)=\frac{f(1)}{1}+\frac{f(2)}{2}+\frac{f(3)}{3}+\ldots \tag{2}$$

pourvu que le second membre soit convergent.

2. Soit, par exemple, $f(n)=\frac{1}{n}$, de sorte que $F(n)$ représente la somme des inverses des diviseurs de n. La formule (2) montre que *la somme des inverses des diviseurs d'un nombre tend asymptotiquement vers* $\frac{\pi^2}{6}$. Si, d'après *Euler*, on représente par $\int n$ la *somme des diviseurs de* n, la somme des inverses des diviseurs du même nombre est $\frac{1}{n}\int n$. On a donc

$$\lim.\frac{\int n}{n}=\frac{\pi^2}{6},$$

pour n indéfiniment croissant. Cependant, il ne faut pas croire que ces égalités soient vraies autrement qu'*en moyenne*. En effet, si grand que soit n, la fonction $\frac{1}{n}\int n$ peut différer aussi peu qu'on le veut de 1 ou de 2, et, par suite, s'écarter considérablement de $\frac{\pi^2}{6}$: il suffit de prendre n *premier* ou *parfait*. En d'autres termes, si $F(x)$ est une fonction continue, qui, pour les valeurs entières n de x, prend les valeurs définies par (1), il n'est pas dit que la ligne $y=F(x)$ admet pour asymptote la droite $y=F(\infty)$. La courbe oscille autour de la droite, mais ne tend pas à se confondre avec elle.

3. Si $u, v, w, \ldots$ sont les facteurs premiers de n, et l'on a $n=u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots$, on sait que

$$\varphi(n)\int n=n^2\left(1-\frac{1}{u^{\alpha+1}}\right)\left(1-\frac{1}{v^{\beta+1}}\right)\left(1-\frac{1}{w^{\gamma+1}}\right)\ldots,$$

d'où l'on pourrait déduire

$$\lim.\frac{\varphi(n)}{n}=\lim.\frac{n}{\int n}=\frac{6}{\pi^2},$$

conformément à un théorème démontré par M. Perott dans le *Bulletin de M. Darboux.*

Pour la démonstration, il ne faut pas oublier que ces égalités sont des *relations moyennes.* — Si $f(n)=(-1)^n$, la formule (2) montre que *l'excès du nombre des diviseurs impairs d'un nombre, sur le nombre de ses diviseurs pairs, tend asymptotiquement vers log* 2. De même, pour $f(n)=\sin\frac{\pi n}{2}$, *l'excès du nombre des diviseurs de* n, *de la forme* $4k+1$, *sur le nombre des diviseurs de* n, *de la forme* $4k+3$, *tend asymptotiquement vers* $\frac{\pi}{4}$; etc., etc.

4. Soit

$$Q_r(z)=z(1-z)^{r-1}\Delta(0^r)+z^2(1-z)^{r-2}\Delta^2(0^r)+\ldots+z^r\Delta^r(0^r),$$

et considérons la somme

$$\frac{Q_r(z)f(1)}{(1-z)^{r+1}}+\frac{Q_r(z^2)f(2)}{(1-z^2)^{r+1}}+\ldots+\frac{Q_r(z^\nu)f(\nu)}{(1-z^\nu)^{r+1}}.$$

On sait que

$$\frac{Q_r(z)}{(1-z)^{r+1}}=1^r.z+2^rz^2+3^rz^3+\ldots.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$F(n)=n^r\left\{\frac{f(a)}{a^r}+\frac{f(b)}{b^r}+\frac{f(c)}{c^r}+\ldots\right\},$$

et l'on désigne par $F_\nu(n)$ ce que devient le second membre, lorsqu'on y supprime les diviseurs supérieurs à ν, on a

$$\sum_{n=1}^{n=\nu} \frac{Q_r(z^n) f(n)}{(1-z^n)^{r+1}} = zF_\nu(1) + z^2 F_\nu(2) + z^3 F_\nu(3) + \ldots;$$

puis:

$$\sum_{n=1}^{n=\nu} \left(\frac{1-z}{1-z^n}\right)^{r+1} Q_r(z^n) f(n)$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} z^n \left\{F_\nu(n) - C_{r+1,\,1} F_\nu(n-1) + C_{r+1,\,2} F_\nu(n-2) - \ldots\right\},$$

en convenant de prendre $F_\nu(n) = 0$, lorsque $n < 1$. Si l'on fait $z = 1$, puis $\nu = \infty$, et l'on observe que

$$Q_r(1) = \Delta^r(0^r) = r!,$$

on trouve

$$\lim \left\{F(n) - C_{r,1} F(n-1) + C_{r,2} F(n-2) - \ldots\right\} = r! \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f(n)}{n^{r+1}},$$

pourvu que la série du second membre soit convergente. On en déduit sans peine que $F(n)$ *tend asymptotiquement vers*

$$n^r \left\{\frac{f(1)}{1^{r+1}} - \frac{f(2)}{2^{r+1}} + \frac{f(3)}{3^{r+1}} + \ldots\right\}.$$

Par exemple, *la somme des diviseurs de* n *tend asymptotiquement vers* $\frac{\pi^2}{6} n$; etc.

D'ailleurs, ces résultats peuvent être déduits, bien plus simplement, de la formule (2).

5. Au lieu de (2) on peut *toujours* écrire

$$F_\nu(\infty) = \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \frac{f(3)}{3} + \ldots + \frac{f(\nu)}{\nu}.$$

Cette égalité permet de se rendre compte de l'*allure moyenne* de certaines fonctions.

Pour $f(n) = 1$, et ν très-grand, nous avons les égalités asymptotiques

$$F_\nu(\infty) = \log \nu, \quad F_{2\nu}(\infty) - F_\nu(\infty) = \log 2.$$

Il en résulte que, *si d'un nombre indéfiniment grand on prend les diviseurs non supérieurs à un nombre* ν, *très-grand, leur nombre est asymptotique à log* ν, tandis que *le nombre des diviseurs compris entre* ν *et* 2ν *est asymptotique à log 2.*

Il y a donc une irrégularité extrême dans la distribution de ces diviseurs. Il n'en est pas ainsi de leurs sommes; car, pour $f(n) = n$, on trouve que, *si l'on considère la somme des diviseurs compris entre* 0 *et* ν, — *la somme de ceux qui sont compris entre* ν *et* 2ν, etc. — *toutes ces sommes sont asymptotiques à* ν. — Remarquons, pour finir, que, *si d'un nombre indéfiniment grand on prend les diviseurs non supérieurs à* ν, *et l'on calcule leur moyenne arithmétique, cette moyenne tend asymptotiquement vers la totalité des nombres premiers inférieurs à* ν, *lorsque* ν *augmente sans limite.*

NOTA SOBRE O EMPREGO DO PARALLELEPIPEDO ELEMENTAR

POR

Henrique da Fonseca Barros

No bello artigo *Hydromechanics* da Encyclopedia Britannica, artigo devido, na parte especulativa, á penna erudita do sr. A. G. Greenhill, assevera-se (pag. 445) que o methodo geralmente seguido para deduzir a equação de continuidade constitue (palavras textuaes do auctor) *uma violação dos principios do calculo differencial,* por isso que n'elle se considera successivamente cada um dos accrescimos infinitamente pequenos dx, dy e dz como sendo infinitamente grande em relação a qualquer dos outros dois, e tambem em relação ao elemento de tempo dt.

Por esse motivo, o sabio professor inglez entende dever substituir a demonstração vulgar pela que se funda no emprego da notavel fórmula de calculo integral devida a Georges Green.

É possivel que as observações da Encyclopedia Britannica sejam applicaveis ao modo pelo qual, n'alguns livros de mecanica e de physica mathematica, vem exposto o methodo do parallelepipedo elementar, methodo que póde empregar-se, como é de todos sabido, na deducção, não só da equação de continuidade, como das equações do equilibrio e do movimento dos fluidos, e ainda na deducção das equações da elasticidade, na theoria do calor, etc.

O proprio Euler, na sua celebre memoria em que estabelece as equações dos Fluidos, dirige a sua exposição por fórma tal, que lhe são applicaveis, até certo ponto, as reflexões citadas; e não nos deve admirar muito que assim succeda, porque não vai longe ainda a epocha em que a exposição rigorosa e didactica do methodo infinitesimal se desembaraçou da obscuridade e confusão em que se involvia.

Parece-me porém que, relativamente ao methodo em si, a critica é infundada, pois nada ha mais facil, como vou mostrar, do que apresentar a demonstração de modo que não haja violação de principio algum.

Supponhamos, por exemplo, que se pretendem as condições de equilibrio do parallelepipedo $dx\,dy\,dz$; diz-se geralmente: «a pressão no ponto (x, y, z) é p, portanto a pressão sobre a face $dy\,dz$ é $p\,dy\,dz$; na face opposta é

$$\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)dy\,dz;$$

logo a differença, isto é, a pressão no sentido do eixo dos X é

$$-\frac{dp}{dx}dx\,dy\,dz.»$$

Effectivamente, parece á primeira vista que é contrario aos principios ordinarios do methodo infinitesimal attender por um lado á variação de p quando x cresce de dx, e não attender por outro á variação que soffre a mesma quantidade p quando y e dz crescem dos accrescimos dy e dz, da mesma ordem que dx e até muitas vezes eguaes a este ultimo; e é claro que só não attendendo á variação de p proveniente dos accrescimos de y e z se póde dizer que a pressão sobre a face é $p\,dy\,dz$. É porém facil reconhecer que não ha na realidade contradicção alguma; mas que, pelo contrario, se seguem em tudo as prescripções do methodo infinitesimal — «não desprezar, ou, mais correctamente, não supprimir senão os termos de ordem superior aos que se pretendem calcular.»

Com effeito, o que pretendemos determinar? São as pressões sobre as faces oppostas, ou é a differença entre essas pressões? Evidentemente é a differença, porque é esta que dá a componente da pressão segundo o eixo dos X; ora a differença entre as pressões por unidade de superficie no ponto (x, y, z) e no seu correspondente na face opposta $(x+dx, y, z)$ é $-\frac{dp}{dx}dx$; para um outro qualquer ponto da face $dy\,dz$ e para o seu correspondente, essa differença é o valor que toma $-\frac{dp}{dx}dx$ quando y e z

variam de quantidades quando muito eguaes ás arestas dy e dz, isto é,

$$-\frac{dp}{dx}dx+\varepsilon,$$

sendo ε um termo de segunda ordem pelo menos.

A differença entre as duas quantidades é ε, e por isso, segundo o methodo infinitesimal, e sem violação de principio algum, a expressão $-\frac{dp}{dx}dx$ póde ser tomada para valor constante da differença de pressão por unidade de superficie em quaesquer dois pontos oppostos das faces perpendiculares ao eixo dos X.

Considerações inteiramente analogas, e que ficam evidentes em presença do exposto, se podem fazer quando se tracte de applicar o methodo de Euler á deducção da equação de continuidade, ou a qualquer dos problemas em que se emprega a consideração do parallelepipedo elementar.

Parece-me pois que não ha motivo algum para considerar menos rigorosa, ou sequer menos conforme com o espirito do methodo infinitesimal, a consideração que serviu a Euler, a Fourier, a Lamé, e outros mais, e que é na verdade muito mais directa, simples e naturalmente indicada pela indole dos problemas a que se applica, do que o emprego da fórmula, aliás importantissima e de grande utilidade n'outros casos, de Georges Green.

BIBLIOGRAPHIA

D. Besso. — *Sul prodotto di due soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenea de seconde ordine.* — *Roma, 1884.*
——— *Sull'equazione del quinto grado.* — *Roma, 1884.*
——— *Sopra una classe di equazione trinomia.* — *Roma, 1884.*

Na primeira d'estas memorias o sabio professor do Instituto technico de Roma expõe algumas propriedades importantes das equações differenciaes lineares homogeneas de quarta ordem, satisfeitas por productos de soluções de duas equações differenciaes lineares homogeneas de segunda ordem.

Na segunda memoria tracta da resolução da equação do quinto gráo por meio das series hyper-geometricas.

Na terceira memoria resolve por meio das series hyper-geometricas de ordem $n-2$ a equação trinomia

$$y^n + y - a = 0.$$

Todas estas memorias importantes foram publicadas na collecção de Memorias da *Academia dos Lynces* de Roma.

G. Paxton Young. — *Solution of Solvable Irreducible Quintic Equations without the aid of a Resolvent Sextic (American Journal of Mathematics*, vol. VII).

No tomo V d'este jornal (pag. 121) demos noticia de duas memorias do sr. Young, onde este sabio geometra se occupa da resolução algebrica das equações. A importante memoria de que hoje damos noticia é continuação das precedentes, e n'ella o auctor, partindo da fórma dada por Jerrard á equação do quinto gráo, acha as condições necessarias e sufficientes para que esta

*

equação seja resoluvel algebricamente, e dá as fórmulas por meio das quaes se obtêm as raizes, no caso de se verificarem estas condições.

A. d'Arzilla Fonseca. — *Applicação dos quaterniões á Mecanica.* — *Coimbra, 1835.*

No volume v d'este jornal demos noticia de um trabalho, em que o sr. Arzilla expõe com todo o rigor e clareza a theoria dos quaterniões.

No presente trabalho faz applicação dos principios expostos no anterior á Mecanica racional, para fazer ver a importancia d'estes principios.

Principia pela Statica onde considera o equilibrio do ponto e dos systemas rigidos, e passa depois á Dynamica onde considera o movimento do ponto e o movimento do corpo solido independentemente das forças que o produzem, e em seguida o movimento do ponto produzido por quaesquer forças.

Brito Limpo. — *Sobre as refracções terrestres* (*Revista Scientifica*, tomo I, 1855).

N'este artigo faz o sr. Brito Limpo algumas considerações a respeito dos coefficientes de refracção terrestre. Mostra que em logar de empregar um coefficiente medio para cada paiz, se devem empregar varios coefficientes medios correspondentes ás differentes alturas, e dá os methodos practicos para obter estes coefficientes.

A. Marre. — *Lettre à le Président de l'Académie de Sciences de Lisbonne* (*Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, n.º 38, 1884).

N'esta carta dá o sr. Marre uma breve noticia da vida e dos trabalhos do sabio belga René François de Sluze, que floreceu no seculo XVII, e que foi notavel como mathematico, physico, astronomo, etc.

J. M. Rodrigues. — *Teoria de la Balistica.* — *Madrid, 1884.*

Este artigo, escripto em lingua hespanhola, contém os pontos mais importantes da bella *Memoria sobre a theoria da Balistica*, que o sr. Rodrigues apresentou á Academia das Sciencias de Lisboa, e da qual demos noticia no tomo V d'este jornal.

J. A. Sarrasqueiro. — *Tratado de Geometria elementar* — *3.ª edição, Coimbra, 1884.*

—— *Tratado elementar de Arithmetica* — *6.ª edição, Coimbra, 1885.*

Veja-se o que se disse a respeito das edições anteriores d'estes excellentes compendios no tomo V d'este jornal.

F. M. Costa Lobo. — *Resolução das equações indeterminadas.* — *Coimbra, 1885.*

N'este trabalho importante o sr. Costa Lobo expõe e desenvolve os trabalhos dos principaes geometras que se tem occupado das equações indeterminadas.

Principia pelas equações do primeiro grão, a respeito das quaes expõe os principaes methodos de resolução, e desenvolve o calculo relativo a n equações a m incognitas.

Passa depois ás equações do segundo grão, e de grãos superiores, e expõe a este respeito os trabalhos importantes de Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Chasles, etc.

Depois, na segunda parte, expõe os principios da theoria das congruencias.

Finalmente na terceira parte expõe com todo o desenvolvimento a applicação do methodo teleologico de Wronski á resolução das congruencias e das equações indeterminadas.

O sr. Costa Lobo promette occupar-se n'outro trabalho de applicações que façam ver a importancia do methodo teleologico.

A. Schiappa Monteiro. — *Sur un théorème relatif à la théorie des nombres* (*Revista scientifica,* tomo I, 1885).

N'este artigo interessante o sr. Schiappa apresenta duas soluções da questão proposta a pag. 173 do volume II d'este jornal.

G. T.

RECHERCHES RELATIVES AU CERCLE VARIABLE QUI COUPE DEUX CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES DONNÉS

PAR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

(Professeur à l'École Polytechnique de Lisbonne)

(Suite)

60. Comme nous savons, étant donnés deux cercles directeurs correspondants (E) et (I) (fig. 4), si nous prenons dans les cercles enveloppes respectifs (E′) et (I′) les couples de tangentes $m_1\theta$, $m_o\theta_o$ et $n_{i_o}\theta'_2$, $n_{s_o}\theta'_1$ aux extrémités de leurs diamètres m_1m_o et $n_{s_o}n_{i_o}$, et des points d'intersection θ, θ_o et θ'_1, θ'_2 de ces tangentes avec l'axe radical $\theta\Omega_{m_o}\theta_o$ des cercles directeurs nous abaissons les perpendiculaires $\theta\theta_c$, $\theta\theta_2$; $\theta_o\theta_c$, $\theta_o\theta_1$ et $\theta'_1\theta'$, $\theta'_1\theta'_o$; $\theta'_2\theta'_o$, $\theta'_2\theta'$ sur les vecteurs $\mathrm{E}m_1$, $\mathrm{E}'m_1$; $\mathrm{E}m_o$, $\mathrm{E}'m_o$ et $\mathrm{E}n_{s_o}$, $\mathrm{E}'n_{s_o}$; $\mathrm{E}n_{i_o}$, $\mathrm{E}'n_{i_o}$, les coupant respectivement aux points π, π'; π_1, π'_1 et $\mathring{\pi}_1$, $\mathring{\pi}'$; $\mathring{\pi}$, $\mathring{\pi}'_1$, nous avons les quadrilatères $\theta_c\theta_1\theta'_c\theta_2, \theta\theta_o$ et $\theta_{c_o}\theta'_1\theta'_{c_o}\theta'_2, \theta'\theta'_o$, dont les sommets θ_1, θ_2 et θ', θ'_o se trouvent sur l'axe radical des cercles directeurs (I_e) et (E_i); d'où il résulte que *nous pouvons de même déterminer d'une manière générale ces cercles au moyen de ces deux quadrilatères.*

En effet, si des sommets θ_1 et θ' de ces quadrilatères nous abaissons sur les rayons $\mathrm{C}m_{\underset{1}{}}$ et $\mathrm{C}_o n_{s_o}$ des cercles enveloppes (E′) et (I′) les perpendiculaires $\overset{1}{\mathrm{C}}\mu''$ et $\mathrm{C}_o m_i$, qui les coupent aux points $\overset{1}{\mu}{}''$ et m_i, les segments $\overset{1}{\mathrm{C}}\mu''$ et $\mathrm{C}_o m_i$ seront les rayons des cercles enveloppes (I'_e) et (E'_i). Ces mêmes perpendiculaires couperont aux points $\mathring{a}$ et a_i les vecteurs tangentiels $\mathring{m}_2\mathring{a}$ et $\mathring{m}_3\check{a}_i$ parallèles à ces rayons, d'où il résulte que les segments $\mathrm{C}\mathring{a}$ et $\mathrm{C}_o a_i$ seront les rayons du second couple de cercles directeurs (I_e) et (E_i), des coniques (Ω) et (Ω'), et ayant pour axe radical la droite $\theta'\theta'_0$: car les cercles focaux (E'') et (I'') de ces coniques restent invariables.

Si les diamètres $m_1 m_0$ *et* $n_{s_0} n_{i_0}$ *de* (E') *et* (I') *sont parallèles les dits quadrilatères auront les côtés parallèles chacun à chacun, ou seront inversement ou symétriquement égaux par rapport à* σ_0 (n.° 45).

61. D'après cela, considérons maintenant (fig. 3) le cas où les cercles directeurs (E) et (I) ne sont point correspondants.

Étant T et T_0 les points d'intersection de la corde commune, ou de l'axe radical des cercles directeurs avec les tangentes $m_1 b$ et $m_0 a'_1$ au cercle (E') aux extrémités de son diamètre $m_1 m_0$, représentons par T_c et T'_c les points d'intersection des couples de droites Too_3, $T_0 o_1 o_4$ et $To'o'_3$, $To'_1 o'_4$, qui coupent orthogonalement les vecteurs Em_1, Em_0 et $E'm_1$, $E'm_0$ aux points P, P_1 et P', P'_1; et par T_1 et T_2 les points d'intersection des couples de droites Too_3, $T_0 o'_1 o'_4$ et $To'o'_3$, $T_0 o_1 o_4$.

Soient O_{m_0} et O_m les intersections des diagonales TT_0 et $T_1 T_2$ du quadrilatère $T_c T_1 T'_c T_2$, TT_0 avec la droite CC_0, et O_c et O'_c les intersections de cette même droite avec les perpendiculaires $T_c O_c$ et $T'_c O'_c$.

Si nous remplaçons le cercle directeur (I) par le cercle directeur correspondant $(\gamma_0 b_0)$ de (E), par rapport aux couples de cercles générateurs (o), (o_3) et (o_1), (o_4) de la conique (Σ), les droites Too_3 et $T_0 o_1 o_4$, et celles qui unissent les centres des deux autres couples de cercles générateurs correspondants de la seconde suite de cercles générateurs d'une conique (Σ_0) isocycloconfocale avec la première (n.° 56), se trouvant aussi sur ba'_1 et ab_3, détermineront un quadrilatère, étant le diamètre $m_2 \overset{0}{m}_2$ du cercle focal (E'') la direction d'une des diagonales, qui, étant équidistante des tangentes $m_1 T$ et $m_0 T_0$ à (E'), passera par le point milieu T'_m de la diagonale TT_0, et le sommet T_c se trouvera sur la droite $T_c O_c$ (n.° 44 et 60).

De même, si nous remplaçons le cercle (I) par le cercle directeur correspondant $(\gamma'_0 b'_0)$ de (E), par rapport aux couples de cercles générateurs (o'), (o'_3) et (o'_1), (o'_4) de la conique (Σ'), les droites $To'o'_3$ et $T_0 o'_1 o'_4$ seront analoguement les côtés opposés d'un autre quadrilatère, étant encore le diamètre $m_2 \overset{0}{m}_2$ de (E') la direction d'une de ses diagonales, qui passera de même par le point milieu T'_m de la diagonale TT_0, et le sommet T'_c se trouvera sur la droite fixe $T'_cO'_c$.

Donc, *ce diamètre sera également la direction de la diagonale* $T_cT'_c$ *du quadrilatère* $T_cT_1T'_cT_2, TT_0$; *et puisque les diagonales* TT_0 *et* T_1T_2 *sont ainsi coupées aux points milieux* T'_m *et* T_m *par cette diagonale, elles seront parallèles.*

Or le point O_m étant alors *le conjugué harmonique* du point fixe O_{m_0}, par rapport aux deux points fixes O_c, O'_c, sera lui-même *fixe*, et, par suite, *la diagonale* T_1T_2 *sera également fixe.*

Menons au cercle enveloppe (I') les tangentes $n_{s_0}T'_1$ et $n_{i_0}T'_2$ aux extrémités d'un diamètre $n_{s_0}n_{i_0}$, et soient T'_1 et T'_2 leurs points d'intersection avec l'axe radical TT_0 des cercles directeurs (E) et (I). Si de ces points nous abaissons les perpendiculaires $T'T'_1T_{c_0}$, $T'_0T'_{c_0}T'_1$ et $T'_0T'_2T_{c_0}$, $T'T'_{c_0}T'_2$ sur les vecteurs En_{s_0}, $E'n_{s_0}$ et En_{i_0}, $E'n_{i_0}$, les coupant respectivement aux points $\mathring{P}_1$, $\mathring{P}'$ et $\mathring{P}$, $\mathring{P}'_1$, nous avons le quadrilatère $T_{c_0}T'_1T'_{c_0}T'_2, T'T'_0$ en des conditions tout à fait analogues au quadrilatère précédent.

Ainsi, *la diagonale* $T_{c_0}T'_{c_0}$ *passera par le centre* C_0 *du cercle enveloppe* (I'), *et par les points milieux* T_{m_0}, T'_{m_0} *des autres diagonales* $T'_1T'_2$ *et* $T'T'_0$, *qui seront fixes, et les sommets* T_{c_0} *et* T'_{c_0} *se trouveront sur les perpendiculaires* $T_{c_0}O_{c_0}$ *et* $T'_{c_0}O'_{c_0}$ *à la droite* CC_0 *également fixes*, dont les points d'intersection avec cette droite sont désignés par O_{c_0} et O'_{c_0}.

En vertu des données, *si les diamètres* m_1m_0 *et* $n_{s_0}n_{i_0}$ *sont parallèles les quadrilatères* $T_cT_1T'_cT_2, TT_0$ *et* $T_{c_0}T'_1T'_{c_0}T'_2, T'T'_0$ *auront les côtés parallèles chacun à chacun, et seront alors symétriquement semblables.*

Soit O le centre de similitude du quel nous abaissons sur CC_0 la perpendiculaire OS, dont le pied nous désignons par S.

Cela étant, on a

$$\frac{OT_1}{OT'_2}=\frac{OT_2}{OT'_1}=\frac{OT'}{OT_0}=\frac{OT'_0}{OT}=\frac{OT_m}{OT'_m}=\frac{SO_m}{SO_{m_0}}=K=Const.$$

d'où il suit que *les sommets* T_1, T_2 *et* T', T'_0 *se trouvent sur une seule et unique droite.*

Quand la corde ab *tournera autour de* C, *simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées, les droites parallèles*

CT_m *et* $C_0T_{m_0}$ *tournant alors autour de* C *et* C_0 *le vecteur de similitude* $T_mOT_{m_0}$ *tournera aussi autour d'un point fixe* F *du segment* CC_0, *qui le divise dans le rapport de* $O_{m_0}C$ *à* $C_0O_{m_0}$, et, par suite, *les quadrilatères, se déformant, leur centre de similitude* O *décrira la droite* OS, ou *on aura*

$$\frac{SO'_c}{SO'_{c_0}}=\frac{SO_m}{SO_{m_0}}=\frac{SO_c}{SO_{c_0}}=K.$$

D'ailleurs, *les points* O_m *et* O_{m_0} *seront les conjugués harmoniques à la fois par rapport aux deux couples de points* O_c, O'_c *et* O_{c_0}, O'_{c_0}, *et*, par conséquent, *ces deux points-là seront les points doubles de l'involution à laquelle appartiennent ces deux couples de points conjugués.*

Maintenant par les sommets T_1 et T' des deux quadrilatères menons parallèlement aux diagonales $T_cT'_c$ et $T_{c_0}T'_{c_0}$ les droites $\overset{\circ}{a}T_1\overset{1}{M}''$ et $T'a_im_i$, qui coupent orthogonalement aux points $\overset{1}{M}''$, m_i les rayons Cm_1, $C_0n_{s_0}$ de (E'), (I'), et aux points $\overset{\circ}{a}$, a_i les vecteurs tangentiels $\overset{\circ}{m_2a}$, $\overset{\circ\,\prime}{m_3a_i}$.

En considérant d'abord les trapèzes rectangles $C_0T_{m_0}T'_1n_{s_0}$ et $CT_mT_1\overset{1}{M}''$, on a

$$\frac{T_{m_0}T'_1}{C_0n_{s_0}}=\frac{T_mT_1}{C\overset{1}{M}''},\quad \text{ou}\quad \frac{C\overset{1}{M}''}{C_0n_{s_0}}=\frac{T_mT_1}{T_{m_0}T'_1}=K;$$

mais la valeur de $C_0n_{s_0}$ étant constante, il en sera de même de la valeur de $C\overset{1}{M}''$.

Donc, *le point* C *et le segment* $C\overset{1}{M}''$ *seront le centre et le rayon d'un nouveau cercle enveloppe* (E'_t) de $\overset{\circ}{a}\overset{1}{M}''$; *et, puisque le cercle focal est le même, le segment* $C\overset{\circ}{a}$ *sera aussi le rayon d'un nouveau cercle directeur* (E_t).

Secondement, en considérant les trapèzes rectangles CT'_mTm_1 et $C_0T'_{m_0}T'm_i$, on a

$$\frac{Cm_1}{C_0m_i}=\frac{T'_mT}{T_mT'}=K;$$

d'où il s'ensuit de même que *le point* C_0 *et le segment* $C_0 m_i$ *seront le centre et le rayon de l'autre nouveau cercle enveloppe* (I'_ι), *et le segment* $C_0 a_i$ *le rayon du cercle directeur respectif* (I_ι).

D'après cela, *la droite* TT'_0 *sera donc l'axe radical de ce nouveau couple de cercles directeurs* (E_ι) *et* (I_ι), *auxquels répondront deux séries de cercles générateurs, qui les couperont sous des angles constants* ε *et* ι, *et dont les centres engendront de même les coniques cyclomofocales* (Σ) *et* (Σ').

On en conclut en même temps que *le nombre* K *est aussi le rapport d'homothésie* ou *de similitude des cercles enveloppes* (E'), (I'_ι) *et* (I'), (E'_ι).

En représentant par R_ι et r_ι les rayons des nouveaux cercles directeurs (E_ι) et (I_ι); et par R'_ι et r'_ι les rayons des cercles enveloppes (E'_ι) et (I'_ι), on a

$$\frac{R''}{R'_\iota} = \text{tg.}\,\varepsilon, \quad \frac{r''}{r'_\iota} = \text{tg.}\,\iota \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

mais étant

$$\frac{R'}{R'_\iota} = \frac{r'_\iota}{r'} = K, \quad \text{ou} \quad R'_\iota . r'_\iota = R' . r' \ldots\ldots \quad (49)$$

et

$$\frac{R''}{R'} = \text{tg.}\,e, \quad \frac{r''}{r'} = \text{tg.}\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

on aura aussi

$$\text{tg.}\,\varepsilon = K . \text{tg.}\,e, \quad \text{tg.}\,\iota = \frac{1}{K} . \text{tg.}\,i \;\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

ainsi que

$$\text{tg.}\,\varepsilon \,.\, \text{tg.}\,\iota = \text{tg.}\,e \,.\, \text{tg.}\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

ou

$$\frac{\text{tg.}\,\varepsilon}{\text{tg.}\,e} = \frac{\text{tg.}\,i}{\text{tg.}\,\iota} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Tels sont les rapports entre les angles donnés e et i, et les angles ε et ι, sous lesquels les nouveaux cercles directeurs sont coupés par les deux séries respectives de cercles générateurs (o_0), $(\mathring{o}_3)$, ...; (o'_0), $(\mathring{o}'_3)$, ...; ou (x_0), $(\mathring{x}_3)$, ...; (x'_0), $(\mathring{x}'_3)$, ...

Donc:

Théorème XXV. — *A un couple de cercles directeurs* (E), (I) *de deux coniques cyclomofocales répond toujours un autre couple de cercles directeurs* (E_i), (I_i), *concentriques à ceux-là, ces couples de cercles directeurs étant coupés respectivement par les cercles générateurs sous deux couples d'angles constants* e, i *et* ε, ι *tels, que les produiss* tg. e.tg. i *et* tg. ε.tg. ι *des tangentes trigonométriques des angles de chacun de ces couples d'angles sont égaux.*

Observation. — Comme on sait, quand les cercles directeurs deviendront correspondants on retombera sur le cas de la fig. 4, déjà étudié en spécial (n.° 60), étant alors $K=1$, $\varepsilon=e$, $\iota=i$; *le point* S *coïncidant avec le point central de l'involution considérée.*

62. Si les cercles directeurs (E) et (I) se rencontrent aux points λ et λ_0 (fig. 5), il est évident que ces points appartiendront aussi aux deux coniques engendrées (Ω) et (Ω'), et, par suite, la droite $\lambda\lambda_0$, perpendiculaire à l'axe de symétrie CC_0, sera donc une *corde principale réelle commune* à ces coniques.

Cela posé, considérons le cercle générateur (ω_0) de la série du cercle générateur (ω), et dont les cordes communes $\mathit{6}b_c$ et $\mathit{6}_0\mathit{6}'$ avec les cercles directeurs (E) et (I) concourent au point φ_1, lequel sera alors le centre radical de ces quatre cercles, pris trois par trois. Déterminons dans le cercle (ω_0) le pôle Φ_ω de la droite $\lambda\lambda_0$, ou le point de concours des cordes $b_c\mathit{6}_0$ et $\mathit{6}\mathit{6}'$ de ce cercle par rapport auquel la droite $E\Phi_\omega$, qui coupe $\lambda\lambda_0$ au point Φ_2, sera la polaire du point φ_1.

Étant j, j' et j_1, j'_1 les points d'intersection des deux couples de cordes $b\beta$, $\beta'\beta_0$ et $b_c\mathit{6}$, $\mathit{6}'\mathit{6}_0$ des cercles (ω) et (ω_0), avec les droites $E\varphi_\omega$ et $E\Phi_\omega$, il est évident que les droites jj_1 et $j'j'_1$ seront les polaires du point φ_1, par rapport aux cercles directeurs (E) et (I), lesquelles se rencontrent au point Φ sur la corde commune $\lambda\lambda_c$ de ces cercles, laquelle sera alors divisée *harmoniquement* par ces deux points. Or, les couples de points φ_2, φ_ω et j, j' de la droite $E\varphi_\omega$ étant conjugués harmoniques, ainsi que les coucouples de points Φ_2, Φ_ω et j_1, j'_1 de la droite $E\Phi_\omega$, les droites $\varphi_2\Phi_2$, $\varphi_\omega\Phi_\omega$ et jj_1, $j'j'_1$ forment un *faisceau harmonique*, ayant pour centre le point Φ; mais la droite $\varphi_\omega\Phi_\omega$ étant la polaire de φ_1 par rapport à la conique (Ω_h), homologique à la conique (Ω) (n.° 57), il en résulte que *la polaire* $\omega\omega_0$ *de ce même point, par rapport à cette dernière conique, passera de même par le centre de ce faisceau.*

En considérant les cercles générateurs de la conique (Ω'), on reconnaîtra que *la polaire du point* φ_1, *par rapport à cette conique, passera encore par le point* Φ.

Il résulte de là que: *La droite* $\lambda\lambda_0$ *étant une corde commune aux deux cercles directeurs* (E) *et* (I), *ainsi que aux deux coniques engendrées* (Ω) *et* (Ω') *les polaires de chaque point de cette droite se rencontrent sur la droite même:* en d'autres termes, *les coniques ont les mêmes systèmes de deux points conjugués sur cette droite.*

Or cette propriété étant nous-seulement indépendente de la nature des cercles directeurs, mais encore de leurs points d'intersection λ et λ_0, elle est également vraie lorsque nous supposons que ces points, conjugués harmoniques de Φ_2 et ψ_2, de réels qu'ils étaient deviennent eux-mêmes imaginaires.

Donc:

Théorème XXVI.— *La corde* (réelle ou idéale) *commune à deux cercles directeurs* (E) *et* (I) *de deux coniques* (Σ) *et* (Σ') *est elle-même une corde principale* (réelle ou idéale) *commune à ces coniques.*

63. Si les deux coniques engendrées (Σ) et (Σ') sont *isocyclomofocales*, les cercles de chacun des deux couples de cercles directeurs (E), (I) et (E_1), (I_1), étant correspondants, et, par suite, les cercles d'un couple étant symétriquement égaux à ceux de l'autre couple, par rapport au centre commun de ces coniques (n.os 44 et 61 *obs.*), les deux cordes communes de ces couples de cercles pourront seulement être toutes deux *réelles* ou *idéales*.

Dans le cas où les coniques (Σ) et (Σ') sont *anisocyclomofocales*, les deux couples de cercles directeurs (E), (I) et (E_1), (I_1) n'étant pas correspondants, ou les cercles d'un couple n'étant pas égaux à ceux de l'autre couple (n.° 61), les deux cordes communes de ces couples pourront aussi être l'une *réelle* et l'autre *idéale*.

Donc:

Théorème XXVII.— *Quand deux coniques sont* isocyclomofocales, *elles ont trois systèmes de deux cordes communes réelles,* ou *un système de deux cordes communes idéales et deux autres imaginaires; mais, si ces coniques sont* anisocyclomofocales, *elles pourront aussi avoir un système de deux cordes communes, étant l'une corde réelle et l'autre idéale, et deux autres systèmes imaginaires.*

64. Les tangentes aux coniques (Ω) et (Ω') (fig. 5) aux extrémités λ_0 et λ de la corde commune $\lambda_0\lambda$, étant elles-mêmes les polaires de ces points, se coupant sur cette corde comme toutes les autres polaires de chaque point de cette corde même (n.° 62), il s'ensuit que, si ces tangentes se confondent, *ces coniques auront un double contact sur cette droite et tout point de celle-ci aura donc même polaire dans les deux courbes.*

Or, cette propriété étant indépendente de la nature des cercles directeurs, ainsi que de leurs points d'intersection, elle est également vraie si ces points de réels qu'ils étaient deviennent eux-mêmes imaginaires (n.° 62).

65. Considérons (fig. 3, 9, 10 et 11) le quadrilatère $T_cT_1T'_cT_2, TT_0$, et indiquons par $h_0h'_0$ la polaire du sommet T_c, par rapport au cercle focal (E''), laquelle, passant par le rencontre k_0 des diagonales oo_4, o_1o_3 du quadrilatère $o_3oo_1o_4, T_c\infty$ [inscrit dans la conique (Σ)] parallèlement aux côtés oo_1, o_3o_4, coupe les côtés oo_3, o_1o_4 aux points h, h'_0, et les droites CC_0, CT_c aux points Γ, q_0. Or, les segments T_ch_0, $T_ch'_0$ étant respectivement *conjuguées harmoniques* des côtés oo_3, o_1o_4, il s'ensuit que, ces côtés représentant aussi deux cordes de la conique (Σ), la droite $h_0h'_0$ sera en même temps la polaire du point T_c, par rapport à cette courbe, laquelle aura par conséquent un *double contact* avec le cercle focal (E''), sur la sécante T_cO_c (n.° 63), étant le point Γ le *pôle de contact.*

De même la polaire $\mathring{h}\mathring{h}'$ du sommet T'_c, par rapport à ce cercle focal (E''), passant par le rencontre k'_0 des diagonales $o'o'_4$, $o'_1o'_3$ du quadrilatère $o'_3o'o'_1o'_4, T'_c\infty$ [inscrit dans la seconde conique (Σ')] parallèlement aux côtés $o'o'_1$, $o'_3o'_4$ sera elle-même la polaire de ce point T'_c, par rapport à cette conique, laquelle aura donc un *double contact* avec ce cercle, sur la sécante $T'_cO'_c$; le point Γ' étant le pôle de contact.

Soient (fig. 3, 9, 10 et 11) $\mathring{o}_0o_3$, $\mathring{o}'_0o'_3$ et $\mathring{o}_1\mathring{o}_4$, $\mathring{o}'_1\mathring{o}'_4$ respectivement les deux couples de cordes de deux coniques (Σ) et (Σ') déterminant le quadrilatère $T_{c_0}T'_1T'_{c_0}T'_2, T'T_0$, ainsi que les deux quadrilatères respectifs $\mathring{o}_3\mathring{o}_0\mathring{o}_1\mathring{o}_4, T_{c_0}\infty$ et $\mathring{o}'_3\mathring{o}'_0\mathring{o}'_1\mathring{o}'_4, T'_{c_0}\infty$ inscrits dans ces coniques.

D'après cela, on reconnaîtra que le cercle focal (I'') aura un double contact avec les coniques (Σ) et (Σ'), sur les sécantes $T_{c_0}O_{c_0}$ et $T'_{c_0}O'_{c_0}$.

Ainsi, *les deux cercles focaux* (E'') et (I'') *communs à deux co-*

niques (Σ) *et* (Σ') *ont toujours un* double contact *avec ses coniques.*

66. Si nous remplaçons le couple de cercles directeurs (E) et (I) par d'autres couples de cercles directeurs de la suite de cercles ayant même axe radical que ce couple de cercles, nous reconnaîtrons immédiatement qu'il faut un couple différent de ces nouveaux cercles directeurs pour chaque suite de cercles générateurs des coniques (Σ) et (Σ'); d'où il résulte que les deux suites de couples de cercles focaux répondant à ces deux suites de couples de cercles directeurs seront distinctes entre ces coniques, et, par conséquent, *elles ne seront cyclomofocales que par rapport aux cercles focaux* (E') *et* (I'), *répondant aux cercles directeurs donnés.*

Ces cercles focaux seront vraiment deux *cercles doubles* de deux suites de cercles focaux des coniques (Σ) et (Σ'), par rapport à leur axe de symétrie CC_0.

En prenant la suite de cercles directeurs ayant même axe radical que le second couple de cercles directeurs (I_1) et (E_1) de ces deux coniques, on retrouvera évidemment ces mêmes suites de cercles focaux.

67. Lorsqu'au lieu de couples de cercles directeurs quelconques, pour engendrer chaque conique (Σ) et (Σ') (fig. 3), nous prenons des couples de cercles directeurs correspondants (fig. 5), il est évident que à ceux-ci répondront des couples de cercles focaux égaux. Si, dans la série de couples de cercles directeurs correspondants, il y a des *cercles tangentiels,* par rapport à l'une ou l'autre série de cercles générateurs (n.° 51), les cercles du couple de cercles focaux de la conique respective, relatifs à ce couple de cercles directeurs, auront, comme on sait (n.° 48), des *dimensions infinitement petites,* c'est-à-dire des *rayons nuls,* ou deviendront les *points focaux* de cette conique, et l'axe de symétrie CC_0 de celle-ci représentera en direction son *axe focal* ou *principal.*

Dans les cas où les cercles directeurs tangentiels sont imaginaires (fig. 5 *b*), et, par suite, il en est de même des cercles focaux de rayons nuls, ou des points focaux sur CC_0, il y aura alors des *cercles focaux minima de rayons finis,* comme on le verra.

D'ailleurs, au *cercle directeur correspondant double* (réel ou imaginaire) *d'une conique* (Ω) (n.° 58) *répondra un cercle focal égale-*

ment double (réel ou imaginaire) *concentrique* ou *homocentrique à cette conique.*

Ainsi nous voyons qu' *une conique quelconque* (Ω), *par rapport à la ligne des centres* CC_0 *de ses cercles directeurs a une série de cercles focaux symétriquement égaux deux à deux, contenant deux cercles coïncidents,* ou *vraiment un* cercle double (réel ou imaginaire) *concentrique à cette conique, laquelle aura un* double contact *avec tous ces cercles.*

68. *Détermination directe des axes.*—Considérons une conique quelconque (Ω) (fig. 5, 5 *a*, 5 *b* et 5 *c*), et, prenons deux (E) et (I_n) de ses cercles directeurs, dont la sécante commune est $\theta\theta_0$, ainsi qu'un (ω) de ses cercles générateurs.

Cela étant, déterminons le centre radical φ_1 de ces trois cercles, et le pôle φ_ω de la sécante $\theta\theta_0$, par rapport au cercle générateur (ω); alors la perpendiculaire $\omega p_\omega \sigma_0$ abaissée de son centre ω sur la droite $\varphi_1 p_\omega \varphi_\omega$, unissant ces deux points, coupera la ligne CC_0, des centres de la série de cercles directeurs, au point σ_0, lequel, comme on sait (n.° 58), sera en même temps le centre du cercle directeur correspondant double (réel ou imaginaire), et de la conique engendrée (Ω), qui aura, donc, pour *axe* (réel ou idéal) le diamètre du cercle focal respectif perpendiculaire à la droite CC_0, ou le diamètre suivant lequel il y a lieu le double contact entre ces courbes.

Dans le cas où la droite $\varphi_1\varphi_\omega$ coupe le cercle générateur (ω), étant ε_σ et ε'_σ les points d'intersection (fig. 5 et 5 *b*), les droites $\sigma_0\varepsilon_\sigma$ et $\sigma_0\varepsilon'_\sigma$ seront deux rayons du cercle directeur correspondant double ($\sigma_0\varepsilon_\sigma$); et le cercle focal double respectif ($\sigma_0 m_\sigma$), étant l'enveloppe des rayons $\omega\varepsilon_\sigma$ et $\omega\varepsilon'$ du cercle générateur, les perpendiculaires $\sigma_0 m_\sigma$ et $\sigma_0 m'_\sigma$ abaissées de σ_0 sur ces rayons, seront deux rayons de ce cercle focal, dont le diamètre $\sigma\sigma_1$ perpendiculaire à CC_0 sera un *axe* de la conique (Ω).

Maintenant passons à déterminer l'autre axe situé sur la droite CC_0.

Étant $C_0M_{n_0}$ la droite unissant le centre du cercle directeur (I_n) au sommet M_{n_0} du rectangle auxiliaire $M_nM_{n_0}M'_{n_0}M'_n$ (n.° 17 et 32), et étant $\varpi_{n_0}\omega$ la perpendiculaire à son point milieu ϖ_{n_0}, déterminant sur la corde ba_3 du cercle directeur (E) le point ω de la conique considérée (Ω), ou le centre du cercle générateur (ω), quand cette corde tourne autour de C, ou roule sur le cercle focal (E″) la droite $C_0M_{n_0}$ tournera autour de C_0, et le point d'intersection ω de la perpendiculaire $\overline{\omega}_{n_0}\omega$ et de cette corde décrira la conique.

Ainsi, l'intersection de cette conique avec la droite CC_0, ou la détermination des *points sommets* de son second axe sera ramenée à obtenir les positions du vecteur tangentiel ou roulant $m_2\omega$ et de la perpendiculaire $\overline{\omega}_{n_0}\omega$ dans le cas où ces droites s'entrecoupent sur CC_0, ou bien quand ces trois droites sont dites *congruentes* (n.° 57).

Mais si, au contraire, nous supposons fixe la corde ba'_1, ou le vecteur tangentiel $m_2\omega$, et faisons tourner la droite CC_0 autour de C, la droite $C_nM_{n_0}$ tournant alors autour du point M_{n_0}, censé également fixe, nous pouvons aussi obtenir la *congruence* des trois droites considérées, sans altérer leurs positions relatives, en ramenant ensuite les points de concours dans leur véritable position.

Or, le point générateur ω de la conique (Ω), se trouvant toujours équidistant du point fixe M_{n_0} et du point C_n, qui décrira une circonférence (CC_n), *les points de concours demandés situés sur la corde* ba'_1, *ou sur le vecteur* $m_2\omega$, *seront les centres de circonférences* (réelles ou imaginaires) *passant par ce point fixe, et touchant cette circonférence-là.*

D'après cela, cette question est donc ramenée à la solution très-simple du problème suivant:

Trouver les cercles tangentes à un cercle donné (CC_n), *qui passent par un point donné* M_{n_0}, *et dont les centres soient situés sur une droite également donnée* $m_2\omega$.

Solution. — Soit, par le point M_{n_0}, mené un cercle quelconque $(\overset{1}{\omega} M_{n_0})$ avec le centre $\overset{1}{\omega}$ sur $m_2\omega$, et qui coupe la circonférence (CC_n) en deux points ι, ι'; et par le point η où la sécante $\iota\iota'$ commune à ces cercles coupe la perpendiculaire $M_{n_0}M_1M_n$, abaissée de M_{n_0} sur $m_2\omega$, on mènera à la circonférence (CC_n) les tangentes: les points de contact seront les points où les circonférences cherchées touchent cette circonférence.

Pour en trouver les centres on tracera les rayons qui vont aux points de contact, dont les intersections avec le rayon vecteur $m_2\omega$ seront les centres demandés, lesquels on rapportera ensuite sur la droite CC_0 ou CC_n en véritable position par les respectifs arcs de circonférences décrites de C comme centre.

Considérons, donc, le cas où nous pouvons du point η tirer les tangentes ηt_n et $\eta t'_n$ à la circonférence (CC_n) (fig. 5 et 5 *a*), dont les rayons Ct_n et Ct'_n, qui vont aux points de contact t_n et t'_n, coupent le rayon vecteur tangentiel $m_2\omega$ aux points ω et ω'. Ces points d'intersection ramenés sur CC_0 par les arcs de cercle $\overset{\frown}{\omega v_1}$ et $\overset{\frown}{\omega v'_1}$ décrits du point C comme centre avec $C\omega$ et $C\omega'$ pour rayon (en sorte que les points de contact t_n et t'_n viennent se confondre avec le point C_n) donneront les *points sommets* demandés, qui déterminent *l'axe* $v_1v'_1$ situé sur CC_0.

69. *Discussion.*—Considérons (fig. 5 et 5 *b*) le *triangle autopolaire* $\varphi_1\varphi_2\varphi_\omega$, ou *conjugué*, par rapport au cercle générateur (ω) (n.° 58), et dont les sommets φ_1 et φ_ω sont respectivement, comme nous savons, le *centre radical* de ce cercle et des cercles directeurs, et le *pôle* de la sécante $\vartheta\vartheta_0$ commune à ces cercles directeurs, sur laquelle se trouve continuellement le côté $\varphi_1\varphi_2$ de ce triangle.

Ainsi, toutes les fois que le sommet φ_2 sera extérieur au cercle (ω), l'un quelconque des deux autres sommets φ_1 ou φ_ω sera intérieur à ce cercle, lequel coupera alors le côté $\varphi_1\varphi_\omega$, opposé au sommet φ_2, et, par suite, le cercle directeur double sera *réel*.

D'après cela, *le cercle focal double d'une conique quelconque* (Ω) *sera* réel, *et, par conséquent, il en sera de même de son axe perpendiculaire à la ligne des centres des cercles directeurs:*

1.° Dans tous les cas où le cercle générateur (ω) *de cette conique aura pour sécante idéale la sécante* (réelle ou idéale) $\vartheta\vartheta_0$ *commune à ses cercles directeurs* (fig. 5).

2.° Quand le centre radical φ_1 *de ces trois cercles sera intérieur à ceux-ci,* c'est-à-dire, *toutes les fois que les cercles directeurs se coupant en deux points réels* λ_0, λ, *l'un seul de ceux-ci sera intérieur au cercle générateur* (fig. 5 *b*).

Dans le cas particulier où le cercle générateur touche la corde commune $\lambda_0\lambda$ de ces cercles directeurs (fig. 5 *b*), les sommets φ_1 et φ_ω coïncidéront avec le point de contact φ_{ω_2} (fig. 5 *c*), et, par conséquent, le triangle autopolaire, ayant un côté *nul*, se réduira au *segment double* $\varphi_1\varphi_{\omega_2}$, ou correspondant à deux *côtés coïncidents.* Alors la perpendiculaire $\omega\varphi_{\omega_2}$ abaissée de ω sur $\varphi_1\varphi_{\omega_2}$ étant parallèle à CC_0, le centre du cercle directeur correspondant double, ou le centre de la conique engendrée se trouvera à l'infini; d'où il résulte que *ce cercle directeur double sera l'ensemble de la sécante commune aux cercles directeurs et de la droite parallèle* *à celle-ci située à l'infini, et le cercle focal double se trouvera tout à fait à l'infini.*

D'ailleurs *ce cercle directeur de rayon infiniment grand* ou *cercle directeur aperantique sera en même temps tangentiel* (n.° 51).

Si le sommet φ_2 du triangle autopolaire $\varphi_1\varphi_2\varphi_\omega$ est intérieur au cercle (ω) (fig. 5 *a* et 5 *d*), les sommets φ_1 et φ_ω étant extérieurs, le côté $\varphi_1\varphi_\omega$ sera une sécante idéale de ce cercle, d'où il résulte que le cercle directeur correspondant double sera *imaginaire.*

Donc, *le cercle focal double d'une conique quelconque deviendra* imaginaire, et, par suite, *son axe perpendiculaire à la ligne des centres des cercles directeurs* sera idéal:

Quand la corde commune à ces cercles directeurs, étant idéale, est toujours coupée réellement par le cercle générateur (fig. 5 *a*); *et, étant réelle, elle est coupée soit intérieurement soit extérieurement par ce cercle générateur,* c'est-à-dire, *entre ses extrémités,* ou *sur ses prolongements* (fig. 5 *d*).

Considérons maintenant l'axe coïncidant en direction avec la droite CC_0.

Le cercle ${}_\omega M_{n_0}$ passant par le sommet M_{n_0} du rectangle auxiliaire $M_{n_0}M_n\overset{1}{M'}_nM'_{n_0}$ passe de même par le sommet M_n, de sorte que le côté $M_{n_0}M_n$ déterminant la conique considérée (Ω), sera aussi une corde de ce cercle.

Cela étant, si la corde $M_{n_0}M_n$ du cercle $(\underset{1}{\omega} M_{n_0})$ est coupée en deux points intérieurement ou extérieurement par le cercle auxiliaire (CC_n), ou bien n'est pas coupée par ce cercle, c'est-à-dire, si ses extrémités sont toutes deux extérieures, ou toutes deux intérieures à ce même cercle, le point d'intersection η de cette corde avec la corde $\iota\iota'$ commune à ces cercles se trouvera extérieur à ceux-ci, ou sur les prolongements de ces mêmes cordes; d'où il suit que les tangentes menées par ce point seront réelles, et, par suite, il en sera de même des points sommets situés sur CC_0.

Quand la corde $M_{n_0}M_n$ du cercle $(\underset{1}{\omega} M_{n_0})$ est coupée en un seul point extérieurement ou intérieurement par le cercle auxiliaire (CC_n), ou l'une seule de ses extrémités est intérieure ou extérieure à ce cercle, le point d'intersection η de cette corde et de la corde $\iota\iota'$ commune à ces cercles sera intérieure à ceux-ci, et, il en résulte que les tangentes tirées par ce point seront *imaginaires;* donc, etc.

Dans le cas particulier où le cercle auxiliaire touche la corde $M_{n_0}M_n$, ou quand cette corde est elle-même l'une des tangentes menée par η à ce cercle, le rayon de contact coïncidera en direction avec le rayon Cm_1 du cercle enveloppe (E') relatif au cercle directeur (E), et alors son point de rencontre avec le rayon vecteur roulant $m_2\omega$ se trouvera à *l'infini,* et il en sera de même d'un des sommets cherchés.

Il résulte de ce qui précède:

1.° Que *l'axe de la conique engendrée, situé sur la ligne* CC_0 *des centres de ses cercles directeurs, est* réel *toutes les fois que dans le rectangle auxiliaire* $M_{n_0}M_nM'_nM'_{n_0}$ *le côté* $M_{n_0}M_n$ *déterminant cette conique sera coupé en deux points extérieurement ou intérieurement par le cercle auxiliaire* (CC_n), ou *ne sera pas coupé par ce cercle.*

Observation.—Si le côté générateur $M_{n_0}M_n$, ou *son prolongement est touché par le cercle auxiliaire* (CC_n), *l'axe demandé deviendra* infini.

2.° Que *l'axe situé sur* CC_0 *sera* idéal *quand le cercle auxiliaire* (CC_n) *coupera en un seul point intérieurement ou extérieurement le côté* $M_{n_0}M_n$ *du rectangle auxiliaire,* ou *enveloppera seulement l'un des sommets* M_{n_0} *ou* M_n.

Observation.—Comme nous savons, dans ce mode de génération des coniques, que nous étudions, il y a des cas tous particuliers où ces coniques deviennent *évanouissantes,* comme il arrive quand les tangentes, que nous venons de considérer, sont coïncidentes, quand le cercle générateur (ω) touche la corde $\lambda\lambda_0$ des cercles directeur dans l'une ou l'autre de ses extrémités; etc., etc.; mais nous n'entrons pas ici en tels détails, puisque nous avons cru que ce serait prolonger inutilement cette discussion et la rendre trop fatigante.

70. En considérant encore dans le rectangle auxiliaire $M_{n_0}M_nM'_nM'_{n_0}$ le côté $M_{n_0}M_n$, déterminant la conique (Ω) (fig. 5, 5 *a*, 5 *b* et 5 *c*), si nous supposons que ce côté ou *segment auxiliaire* tourne dans le même sens autour du points C_n, il pourra ou non, pendant ce mouvement, passer par ce point.

Or, dans le cas où ce segment $M_{n_0}M_n$ ou son prolongement passe par ce point C_n, il se confond, en direction, avec le vecteur auxiliaire $C_nM_{n_0}$, et alors la perpendiculaire $\overline{\omega}_{n_0}\omega$ élevée sur le milieu $\overline{\omega}_{n_0}$ de ce vecteur deviendra parallèle au rayon vecteur roulant $m_2\omega$, et, par suite, le point générateur ω de la conique considérée (Ω) sera *rejeté à l'infini*, ou bien le rayon de son cercle générateur (ω) deviendra *infini*.

Ainsi les *directions reélles* ou *imaginaires* du segment considéré $M_{n_0}M_n$ passant par le point C_n seront données par les *tangentes reélles* ou *imaginaires* menées par ce point au *cercle auxiliaire* (CM), enveloppe de ce segment.

Donc, *la conique* (Ω) *aura à l'infini deux points imaginaires,* (*deux points réels distincts,* ou *coïncidents,* c'est-à-dire, *elle aura, dans la série de ses cercles générateurs, deux cercles de rayons infinis imaginaires, deux cercles de rayons infinis réels distincts* ou *coïncidents, suivant que la circonférence enveloppe auxiliaire* (CM) *aura le point* C_n *situé intérieurement, extérieurement* ou *sur elle-même.*

Autrement.—Si au lieu de faire tourner le rectangle auxiliaire ou le segment $M_{n_0}M_n$ autour de C_n nous le regardons fixe, et faisons tourner la droite CC_n autour de C (ce qui n'altère pas les positions relatives des points et des lignes, que nous considérons) le vecteur auxiliaire $C_nM_{n_0}$, tournant alors autour de M_{n_0}, seulement se confondra, en direction, avec ce segment, quand le cercle auxiliaire (CC_n) coupera ou touchera ce même segment prolongé indéfiniment. Ainsi la perpendiculaire $\overline{\omega}_{n_0}\omega$ sur le milieu $\overline{\omega}_{n_0}$ de $C_nM_{n_0}$ devenant parallèle au vecteur roulant $m_2\omega$, il ne restera qu'à ramener les systèmes de points et de lignes dans leur véritable position, en faisant, pour cela, coïncider successivement avec le point C_n les points d'intersection, ou le point de tangence entre ce cercle auxiliaire et le segment considéré.

Donc, *la conique* (Ω) *aura à l'infini deux points imaginaires, deux points distincts* ou *coïncidents, selon que le cercle auxiliaire* (CC_n) *ne coupe pas, coupe* ou *touche le segment considéré.*

Si nous considérons l'autre segment $M'_{n_0}M'_n$ déterminant la conique (Ω'_n), nous arrivons pour cette conique à des résultats analogues à ceux que nous venons d'obtenir pour la première conique (Ω).

71. Ces principes posés, passons à considérer, en général, les différents cas où les coniques engendrées auront ou non des *points* et des *axes à l'infini*, ainsi que des *axes idéaux*.

Supposons d'abord que le cercle auxiliaire (CC_n) ne coupe pas le segment $M_{n_0}M_n$ déterminant la conique (Ω) (fig. 5). Dans ce cas *la conique* (Ω) *aura deux points imaginaires à l'infini, et ses axes seront tous deux réels.*

Considérons maintenant le cas où le cercle auxiliaire (CC_n) coupe le segment $M_{n_0}M_n$. Si les points d'intersection sont tous deux *intérieurs* ou *extérieurs* au segment considéré, c'est-à-dire s'ils sont tous deux sur ce segment, ou sur son prolongement (fig. 5 *d* et 5 *a*), *la conique* (Ω) *aura un axe réel et fini, sur la droite* CC_n *des centres des cercles directeurs, et l'autre axe sera idéal;* mais si l'un seul des points d'intersection est intérieur ou extérieur à ce même segment (fig. 5 *b*), *l'axe de la conique considérée, situé sur la droite* CC_n *des centres des cercles directeurs, sera au contraire, idéal et l'autre réel et fini, cette conique ayant dans tous les cas deux points réels distincts à l'infini.*

Enfin si ces points d'intersection réels situés à l'infini deviennent *coïncidents,* c'est-à-dire si le cercle auxiliaire touche soit *intérieurement* soit *extérieurement* le segment $M_{n_0}M_n$ (fig. 5 *e* et 5 *c*), *l'axe de la conique situé sur la droite* CC_n *des centres des cercles directeurs aura l'un de ses points sommets à l'infini,* ou *représenté par ces points* coïncidents, *et l'autre axe se trouvera tout à fait à l'infini.*

Si nous considérons dans le rectangle auxiliaire le côté $M'_{n_0}M'_n$ ou segment déterminant la seconde conique (Ω'_n), nous arrivons, comme nous savons, aux mêmes résultats.

Cela étant, si nous regardons la sécante commune aux cercles directeurs rejetée à l'infini, qui forme, conjointement avec leur sécante située à distance finie, un cercle directeur *évanouissant,* que nous avons nommé *aperantique* (n.° 69), il résulte pour les courbes du second ordre engendrées une classification, qui se présente d'elle-même, et qui consiste à les distinguer suivant qu'elles sont coupées par cette sécante rejetée à l'infini, ou sont coupées à l'infini par ce cercle directeur *aperantique* en deux points *imaginaires,* en deux points *réels* ou en deux points *coïncidents.*

À ce point de vue il y a lieu à distinguer les trois *genres* de coniques:

1.° Les *ellipses,* qui sont des courbes coupées à l'infini par le cercle directeur aperantique, ou par la sécante commune de l'infini, en deux points imaginaires; et, par suite, elles auront tous leurs points *propres* ou à distance *finie.*

2.° Les *hyperboles,* qui sont des courbes coupées à l'infini par ce cercle directeur ou par cette sécante, en deux points réels, c'est-à-dire en deux points *impropres*.

3.° Les *paraboles*, qui sont des courbes touchées à l'infini par ce même cercle, c'est-à-dire ayant deux points *impropres coïncidents*.

En considérant ces courbes par rapport à leurs axes, nous avons de même à distinguer les trois genres de coniques:

1.° Les courbes ayant les deux axes réels ou limitées dans tous les sens, *ellipse*.

2.° Les courbes ayant l'une axe réel et l'autre idéal, ou composées de quatre parties indéfinies, *hyperbole*.

3.° Les courbes ayant un axe infini et l'autre tout à fait à l'infini, ou composées de deux parties indéfinies, *parabole*.

72. Comme nous savons, les deux séries de cercles générateurs (ω'_n), (ω'_{n^2}), ..., et (ω), (ω_3), ..., des coniques (Ω'_n) et (Ω) (fig. 5, 5 *a*, 5 *b* et 5 *c*) ont pour centres radicaux respectivement les centres d'homothésie ou de similitude *directe* et *inverse* E'_n et E des cercles enveloppes (E') et (I'_n) relatifs aux cercles directeurs (E) et (I_n).

D'après cela, nous appellerons *conique directe* et *conique inverse* respectivement aux coniques *cyclomofocales* (Ω'_n) et (Ω), et, par suite, la première série de cercles générateurs sera dite *directe* et la seconde *inverse*.

De plus, en attendant à la génération simultanée de ces deux coniques au moyens des mêmes données, elles pourront aussi être nommées *coniques syzygocycliques*.

Le segment EE'_n déterminé par les centres radicaux direct et inverse E'_n et E pourra être appelé *segment auxiliaire interradical*, et le segment CC_n, déterminé par les centres de ces cercles enveloppes, étant rayon du cercle auxiliaire (CC_n), et conjugué harmonique de ce segment-là, sera dit le *segment auxiliaire intercentral* ou *radial*, que nous pouvons remplacer par ce cercle auxiliaire.

Ce segment radial CC_n et les segments auxiliaires directe et inverse $M'_{n_0}M'_n$ et $M_{n_0}M_n$, formant tous les éléments pour la classification des deux coniques syzygocycliques (Ω) et (Ω_n'), pourront être appelés les *segments diatactiques* ou *discriminants*, et l'ensemble de ces segments sera donc nommé le *terne diatactique* ou *discriminant* de ces coniques.

Observation. — Nous avons vu (n.° 61) que au couple de cercles directeurs (E), (I) (fig. 3) de deux coniques cyclomofocales (Σ), (Σ') répond toujours un autre couple de cercles directeurs (E_1), (I_1), d'où il résulte que ces deux coniques ont aussi une *double génération*, et, par suite, il en sera de même des coniques (Ω), (Ω'_n) (fig. 5, 5 *a*, 5 *b* et 5 *c*).

D'après cela, ce que nous venons de dire par rapport au *premier système* de cercles directeurs, de cercles générateurs, de segments auxiliaires, etc., etc., relatif aux coniques (Ω), (Ω'_n), est tout à fait applicable analoguement au *seconde système* de cercles directeurs, de cercles générateurs, de segments auxiliaires, etc., etc., relatif à ces mêmes coniques.

73. Comme tout *cercle générateur de rayon infini* ou *aperantique* est l'ensemble d'une tangente, commune aux cercles enveloppes, avec la droite parallèle rejetée à l'infini, on voit, donc, que chaque série de cercles générateurs présentera autant de cercles aperantiques qu'il y aura de *tangentes extérieures* ou *intérieures*, communes aux cercles enveloppes, selon que la série considérée sera *directe* ou *inverse*.

Observation.—Nous adopterons à la suite la dénomination de *tangente directe* et *inverse* de préférence à celle de tangente extérieure et intérieure, pour être en harmonie avec la dénomination que nous avons donnée aux deux points de concours de ces couples de tangentes communes, lesquels représentent, comme nous savons, deux des *omblics* ou *points omblicaux* des cercles enveloppes (E'), (I'_n).

74. Supposons (fig. 5 *a* et 5 *b*) que les cercles enveloppes (E') et (I'_n) sont extérieures l'un à l'autre, et soient $m_a E n_a$ et $m'_a E n'_a$ leurs tangentes communes inverses, ou passant par le centre radical inverse E, et dont les points de contact avec ces cercles sont respectivement les couples de points m_a, n_a et m'_a, n'_a.

D'après cela, l'ensemble de ces tangentes avec leurs droites parallèles à l'infini détermineront les deux *cercles générateurs aperantiques* ($E\,\infty$) et ($E\,\infty'$), qui coupent aux points S_a et S'_a la sécante $\theta\theta_0$, commune aux cercles directeurs (E) et (I_n), ou le cercle directeur aperantique de la conique considérée (Ω). Or ces tangentes se confondant en même temps avec les sécantes communes aux cercles directeurs (E) et (I_n), et à ces cercles générateurs aperantiques, *les perpendiculaires* $S_a\,\infty$ *et* $S'_a\,\infty'$ *à ces sécantes, aux points* S_a *et* S'_a, *où elles coupent* $\theta\theta_0$, *étant des rayons de ces mêmes cercles, seront, par suite, deux tangentes à la conique* (Ω), *dont les points de contact se trouvent à l'infini,* ou *les asymptotes de cette conique.*

En faisant varier le cercle générateur (ω) de (Ω) jusqu' à ce qu'il vienne se confondre avec le cercle générateur aperantique $(E\,\infty)$, les cordes $b\beta$ et $\beta_{n_0}\beta'_n$, communes à ce cercle-là et aux cercles (E) et (I_n), se confondront avec la secante $m_a S_a n_a$, et alors leur point d'intersection φ_1 tombera sur le point S_a.

D'ailleurs le pôle φ_ω de la sécante $\theta\theta_0$, commune aux cercles directeurs, relatif au cercle (ω) se trouvant rejeté à l'infini, il en résulte que l'intersection σ_0 de la droite indéfinie $S_a \sigma_0 \infty$, ou rayon du cercle aperantique $(E\,\infty)$ avec la droite CC_n, coïncidera avec le centre de la conique (Ω) (n.° 58); et, par suite, en supposant que le cercle (ω) vienne aussi se confondre avec le cercle aperantique $(E\,\infty')$, le rayon $S'_a \sigma_0 \infty'$ de ce cercle passera de même par le centre de cette conique.

Donc, *les asymptotes d'une conique* (Ω) *s'entrecoupent à son centre, et, par conséquent, chacune de celles-ci est un diamètre conjugué à lui-même.*

En considérant dans les cercles enveloppes leurs tangentes communes directes, ou passant par le centre radical direct E'_n, nous obtiendrons de même très facilement les asymptotes de l'autre conique (Ω'_n), et, par suite, son centre.

Ainsi lorsque les cercles enveloppes sont extérieurs l'un à l'autre il y aura pour chacune des coniques syzygocycliques deux cercles générateurs aperantiques, et alors elles auront à l'infini deux points réels distincts: ce cas répondant parfaitement à celui où le cercle auxiliaire (CC_n) coupe les segments diatactiques ou discriminants $M_{n_0}M_n$ et $M'_{n_0}M'_n$ de ces coniques.

Lorsque les cercles enveloppes (E') et (I'_n), (fig. 5 *e* et 5 *c*) sont tangentes, leurs points de contact deviendront un centre radical direct E'_n (fig. 5 *e*) ou inverse E (fig. 5 *c*), suivant que ces cercles seront intérieurs ou extérieurs l'un à l'autre; et ainsi ils auront respectivement deux tangentes communes directes ou inverses *coïncidents,* ou bien l'une tangente commune directe $E'_n\infty$, ou inverse $E\infty$ *double* dont l'intersection avec la sécante commune aux cercles directeurs (E) et (I_n) se trouve à l'infini; d'où il résulte que les asymptotes de la conique respective seront rejetées à l'infini et parallèles à la droite CC_n des centres de ces cercles directeurs.

L'ensemble de chacune de ces tangentes avec sa droite parallèle à l'infini seront donc vraiment deux *cercles générateurs aperantiques doubles* $(E'_n\infty)$ (fig. 5 *e*) et $(E\infty)$ (fig. 5 *c*) coupant à l'infini le *cercle directeur aperantique double* (n.° 69); et, par suite, la conique relative au centre radical qui représente les points de contact des cercles enveloppes aura à l'infini un sommet de son axe situé sur la droite CC_n, lequel représentera deux points réels coïncidents: ce qui répond tout à fait au cas où le cercle auxiliaire (CC_n), touche le segment diatactique ou discriminant direct $M'_{n_0}M'_n$ ou inverse $M_{n_0}M_n$ de la conique respective.

Si les cercles enveloppes sont tout à fait intérieurs l'un à l'autre (fig. 5), leurs tangentes communes étant imaginaires, il en sera de même des cercles générateurs aperantiques des coniques engendrées (Ω'_n) et (Ω), qui, par suite, auront à *l'infini deux points imaginaires*. Ce cas revient donc à celui où le cercle auxiliaire (CC_n) ne coupe pas les segments auxiliaires diatactiques $M'_{n_0}M'_n$ et $M_{n_0}M_n$, des coniques respectives.

D'après cela nous pouvons aussi par la position des cercles enveloppes reconnaître le *genre* des coniques engendrées, et, par suite, ces cercles pourront être nommés *cercles diatactiques* ou *discriminants*, et leur ensemble sera le *couple diatactique* ou *discriminant*.

75. En considérant maintenant soit les ternes soit les couples diatactiques ou discriminants, voyons les différents cas qui auront lieu par rapport à la disposition de leurs éléments.

Nous avons, donc, à regarder d'une manière générale les cinq cas suivants:

1.° *L'extremité libre du segment radial, ou le cercle auxiliaire décrit par ce segment ne rencontre pas les autres deux segments diatactiques direct et inverse; ou bien les cercles diatactiques sont interieurs l'un à l'autre, et, par conséquent, seront imaginaires les cercles générateurs aperantiques.*

2.° *Ce cercle auxiliaire touche le segment direct et ne coupe pas le segment inverse, ou ce qui revient au même les cercles diatactiques sont tangents et intérieurs l'un à l'autre; et ainsi il y aura un cercle générateur aperantique double, et deux imaginaires.*

3.° *Le cercle auxiliaire coupe le segment direct et ne coupe pas le segment inverse, ou bien les cercles diatactiques sont sécants; et on aura deux cercles générateurs aperantiques réels et deux imaginaires.*

4.° *Le cercle auxiliaire coupe le segment direct et touche le se-*

gment inverse, ou bien les cercles diatactiques sont tangents, et extérieurs l'un à l'autre, et tous les cercles générateurs aperantiques seront réels, étant deux distincts et l'un double.

5.° *Le cercle auxiliaire rencontre les segments direct et inverse, ou ce qui revient au même les cercles diatactiques sont complétement extérieurs l'un à l'autre; et de là résulte qu'il y aura deux couples de cercles générateur aperantiques réels distincts.*

D'après cela nous avons ce théorème:

Théorème XXVIII. — *Quand deux coniques sont syzygocycliques, elles seront en general:*

1.° *Deux ellipses.* 2.° *Une parabole et une ellipse.* 3.° *Une hyperbole et une ellipse.* 4.° *Une hyperbole et une parabole.* 5.° *Deux hyperboles.*

76. Considérons le cas où deux cercles directeurs (E) et (I) des coniques syzygocycliques (Ω) et (Ω') s'entrecoupent réellement aux points λ et λ_0 (fig. 5), étant alors la corde commune $\lambda\lambda_0$ à ces cercles une corde principale réelle commune à ces coniques (n.° 62).

Si nous prenons un cercle générateur (ω) de la conique (Ω), la polaire $\varphi_2\varphi_\omega E$ du centre radical φ_1 des cercles (E), (I) et (ω), passant par le centre radical E des cercles générateurs de la série considérée (n.° 63, théor. XIV), coupe orthogonalement en p_ω la tangente $\varphi_1\omega$ au point ω de cette conique (n.° 47 et 58).

Or, quand ce cercle générateur se réduira au point λ, les points ω et p_ω se confondront, et alors la tangente à la conique (Ω) en ce point λ sera perpendiculaire au segment $E\lambda$, qui, par suite, sera la *normale* en ce même point, d'où il résulte que *le cercle directeur* ($E\lambda$) *de la suite de cercles directeurs de cette conique, ayant la droite $\lambda\lambda_0$ pour sécante commune, aura un double contact avec cette même conique,* c'est-à-dire, *tout point de cette droite aura même polaire dans ces deux courbes, et ainsi ce cercle directeur sera en même temps cercle focal; le cercle enveloppe ou diatactique respectif se réduisant par suite au centre* E *de ce cercle.*

D'après cela cette propriété aura aussi lieu dans le cas où sera idéale la corde principale commune aux coniques syzygocycliques (Ω) e (Ω'), suivant laquelle ce cercle *directeur-focal* touchera *idéalement* la conique (Ω) (n.° 64).

D'ailleurs le cercle ($E\lambda$) étant aussi un *cercle directeur double* de la suite des couples de *cercles directeurs isogoniques*, par rapport à la suite de cercles générateurs (ω), (ω_3), etc., de la conique (Ω), pourra être réel ou imaginaire (n.° 51 et 64).

Si nous regardons l'autre conique (Ω') (fig. 5) nous reconnaîtrons analoguement que le cercle directeur $(E'\lambda)$ de la même suite de cercles directeurs sera également un cercle focal de cette conique, ayant, par suite, un double contact suivant la sécante $\lambda\lambda_0$, lequel sera idéale quand cette sécante deviendra *idéale.*

Puisque cette propriété est indépendente de la nature du couple de cercles directeurs donnés (E), (I), ou de la nature des coniques syzygocycliques, tout ce que nous venons de dire sera également applicable au cas des figures 3, 9, 10 et 11 relatives aux coniques (Σ) et (Σ').

Quand nous prenons la série de cercles directeurs ayant même axe radical que le second couple de cercles directeurs (I_1), (E_1) de ces coniques (Σ) et (Σ') (fig. 3, 9, 10 et 11), nous arrivons à des résultats tout à fait analogues.

(à suivre).

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE

Ingénieur des ponts et chaussées, à Paris

1. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. Prenons sur ce cercle deux points M et N tels que la corde MN soit tout entière extérieure au triangle ABC. A chacun des côtés du triangle ABC on peut mener par les points M et N deux cercles tangents ayant l'un son point de contact entre les sommets correspondants, l'autre son point de contact en-dehors de ces sommets. On détermine donc ainsi trois points de contact sur les côtés du triangle et trois points de contact sur leurs prolongements; nous appellerons les premiers *points de contact intérieurs*, les seconds *points de contact extérieurs*. Cela posé, nous énoncerons les propriétés suivantes:

1.° *Les points de contact extérieurs sont en ligne droite* (*).

2.° *Les droites qui joignent les trois points de contact intérieurs aux sommets opposés sont concourantes.*

3.° *Un point de contact extérieur et les points de contact intérieurs situés sur les autres côtés sont en ligne droite.*

4.° *La droite qui joint un point de contact intérieur au sommet opposé et les droites qui joignent les points de contact extérieurs situés sur les deux autres côtés aux sommets opposés sont concourantes.*

2. La première propriété seule a besoin d'être démontrée; les trois autres en sont des conséquences immédiates. En effet, soient respectivement

a, b, c, les points où la droite MN coupe les droites BC, CA, AB,

α, β, γ, les points de contact intérieurs situés sur BC, CA, AB,

α', β', γ', les points de contact extérieurs correspondants.

(*) Nous avons déjà remarqué cette première propriété dans une note publiée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* (t. IV, 1880, p. 536), mais nous ne l'avons pas, à cet endroit, formulée d'une façon suffisamment précise.

On a $\overline{a\alpha'}^2 = \overline{a\alpha}^2 = a\mathrm{M}\,.\,a\mathrm{N} = a\mathrm{B}\,.\,a\mathrm{C},$

ce qui montre que les points α et α' sont conjugués harmoniques par rapport aux points B et C; de même β et β' sont conjugués harmoniques par rapport à C et A; γ et γ' par rapport à A et B.

Donc, si les points α', β', γ' sont en ligne droite, il en est de même de α, β, γ', et de α, β', γ, et de α', β, γ; de plus, les droites $\mathrm{A}\alpha$, $\mathrm{B}\beta$, $\mathrm{C}\gamma$ sont concourantes, ainsi que $\mathrm{A}\alpha'$, $\mathrm{B}\beta'$, $\mathrm{C}\gamma$, et que $\mathrm{A}\alpha$, $\mathrm{B}\beta'$, $\mathrm{C}\gamma'$, et que $\mathrm{A}\alpha'$, $\mathrm{B}\beta$, $\mathrm{C}\gamma'$. Tout cela résulte de théorèmes bien connus, et d'ailleurs presque intuitifs.

3. Tout revient donc à établir cette proposition: les points α', β', γ' sont en ligne droite. Voici comment on peut le faire: L'égalité $\overline{\alpha' a}^2 = a\mathrm{B}\,.\,a\mathrm{C}$ peut s'écrire

$$\frac{\alpha' a}{a\mathrm{C}} = \frac{a\mathrm{B}}{\alpha' a};$$

de même

$$\frac{\beta' b}{b\mathrm{A}} = \frac{b\mathrm{C}}{\beta' b}, \quad \frac{\gamma' c}{c\mathrm{B}} = \frac{c\mathrm{A}}{\gamma' c}.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre; il vient

$$\frac{\alpha' a\,.\,\beta' b\,.\,\gamma' c}{a\mathrm{C}\,.\,b\mathrm{A}\,.\,c\mathrm{B}} = \frac{a\mathrm{B}\,.\,b\mathrm{C}\,.\,c\mathrm{A}}{\alpha' a\,.\,\beta' b\,.\,\gamma' c}. \tag{1}$$

Mais l'égalité $\overline{\alpha' a}^2 = a\mathrm{B}\,.\,a\mathrm{C}$ peut aussi s'écrire

$$(\alpha'\mathrm{B} - a\mathrm{B})^2 = a\mathrm{B}\,(a\mathrm{B} - \alpha'\mathrm{B} + \alpha'\mathrm{C});$$

effectuant et réduisant, on a

$$\alpha'\mathrm{B}\,(\alpha'\mathrm{B} - a\mathrm{B}) = a\mathrm{B}\,.\,\alpha'\mathrm{C},$$

ou

$$\alpha'\mathrm{B}\,.\,\alpha' a = a\mathrm{B}\,.\,\alpha'\mathrm{C},$$

ou encore

$$\frac{a\mathrm{B}}{\alpha' a} = \frac{\alpha'\mathrm{B}}{\alpha'\mathrm{C}};$$

de même, par permutation circulaire,

$$\frac{b\mathrm{C}}{\beta' b} = \frac{\beta'\mathrm{C}}{\beta'\mathrm{A}}, \quad \frac{c\mathrm{A}}{\gamma' c} = \frac{\gamma'\mathrm{A}}{\gamma'\mathrm{B}}.$$

Multipliant les trois dernières égalités membre à membre, nous avons

$$(2)\qquad \frac{aB.bC.cA}{\alpha'a.\beta'b.\gamma'c}=\frac{\alpha'B.\beta'C.\gamma'A}{\alpha'C.\beta'A.\gamma'B}.$$

Le premier membre de (2) est le même que le second membre de (1). On a donc, en égalant le premier membre de (1) au second membre de (2),

$$(3)\qquad \frac{\alpha'a.\beta'b.\gamma'c}{aC.bA.cB}=\frac{\alpha'B.\beta'C.\gamma'A}{\alpha'C.\beta'A.\gamma'B}.$$

Multiplions (2) et (3) membre à membre; il vient

$$\frac{aB.bC.cA}{aC.bA.cB}=\left(\frac{\alpha'B.\beta'C.\gamma'A}{\alpha'C.\beta'A.\gamma'B}\right)^2.$$

Or, les trois points a, b, c appartenant à la droite MN, le premier membre de cette égalité est, en vertu du théorème des transversales, égal à l'unité; on a donc

$$\left(\frac{\alpha'B.\beta'C.\gamma'A}{\alpha'C.\beta'A.\gamma'B}\right)^2=1;$$

de plus, les points α', β', γ' étant par hypothèse, extérieurs aux côtés correspondants, les rapports $\frac{\alpha'B}{\alpha'C}$, $\frac{\beta'C}{\beta'A}$, $\frac{\gamma'A}{\gamma'B}$ sont positifs, leur produit est donc positif, et l'on a

$$\frac{\alpha'B.\beta'C.\gamma'A}{\alpha'C.\beta'A.\gamma'B}=1,$$

ce qui prouve que les trois points α', β', γ' sont en ligne droite; le théorème est donc démontré dans son intégralité.

4. On peut interprêter ce théorème de diverses manières; ainsi on peut remarquer que les six points α, α', β, β', γ, γ' forment les six sommets d'un quadrilatère complet dont les diagonales sont $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$. Remarquant que les points a, b, c sont les milieux respectifs de $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma$, on retombe sur cette propriété bien connue à savoir que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

Appliquant au système des points α, α', β, . . . les propriétés connues du quadrilatère complet on obtient diverses conséquences assez remarquables. Nous en donnerons un exemple. On sait que les cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont même axe radical. Ce théorème appliqué à la figure actuelle peut s'énoncer ainsi: *Une droite tout entière extérieure à un triangle coupe en trois points les prolongements des côtés de ces triangles. Si de chacun de ces points comme centre avec un rayon égal à la moyenne géométrique des segments déterminés sur le côté correspondant, on décrit des cercles, ces trois cercles ont même axe radical.*

5. Une déduction intéressante de notre théorème est celle que l'on obtient en le transformant par polaires réciproques, le cercle Γ étant pris pour cercle directeur. Voici ce à quoi l'on arrive:

Soit Γ le cercle inscrit dans le triangle ABC; en deux points M et N du cercle Γ, tels que la corde MN soit tout entière extérieure au triangle ABC, menons les tangentes μ et ν à ce cercle. Par chaque sommet du triangle ABC, on peut mener deux coniques tangentes aux droites μ et ν et ayant un foyer au centre O du cercle Γ; de plus en ce sommet, la tangente à l'une des coniques est intérieure au triangle, la tangente à l'autre conique lui est extérieure; ces deux tangentes sont d'ailleurs conjuguées harmoniques par rapport aux deux côtés correspondants. On a donc en tout, trois tangentes intérieures au triangle et trois tangentes extérieures. Cela posé, on a les propositions suivantes:

1.° *Les trois tangentes intérieures sont concourantes.*

2.° *Les tangentes extérieures coupent les côtés opposés en trois points qui sont en ligne droite.*

3.° *Une tangente intérieure et les tangentes extérieures issues des deux autres sommets sont concourantes.*

4.° *Une tangente extérieure et les tangentes intérieures issues des deux autres sommets coupent les côtés opposés en trois points qui sont en ligne droite.*

INTRODUCÇÃO A' THEORIA DAS FUNCÇÕES

POR

F. GOMES TEIXEIRA

(*continuação*)

CAPITULO II

PRINCIPIOS GERAES DA THEORIA DAS FUNCÇÕES. FUNCÇÕES ALGEBRICAS, LOGARITHMICAS, ETC.

I

Principios geraes

22. — Se uma variavel, real ou imaginaria, $u = X + iY$ está ligada a outra variavel, real ou imaginaria, $z = x + iy$ de tal modo que a cada valor determinado de z correspondam um ou mais valores determinados de u, diz-se que u é *funcção* de z. Quando isto se dá, representa-se u pelas notações

$$u = f(z),\ u = F(z),\ u = \varphi(z), \text{ etc.}$$

Do mesmo modo se u depende de muitas quantidades z_1, z_2, etc., diz-se que u é funcção d'estas quantidades, e representa-se pelas notações:

$$u = f(z_1, z_2, \ldots),\ u = F(z_1, z_2, \ldots), \text{ etc.}$$

A funcção $f(x)$ da variavel real x diz-se *continua* em

$x = a$, quando $f(a+h)$ tende para o limite $f(a)$ á medida que h tende para o limite zero, ou, em termos mais positivos, quando a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1 de h, tal que a desigualdade

$$f(a+h) - f(a) < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h, positivos ou negativos, inferiores em valor absoluto a h_1.

Mais geralmente, a funcção de uma variavel real ou imaginaria $z = x + iy$ diz-se continua em $x = a + ib$, quando a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor $h_1 + ik_1$ de $h + ik$, tal que a desigualdade

$$\text{mod}\,\{f[a+h+i(b+k)] - f(a+ib)\} < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h e k inferiores em valor absoluto a h_1 e k_1.

A funcção $f(x+iy)$ é continua n'uma área dada quando é continua relativamente a todos os valores de x e y que representam coordenadas de pontos d'esta área.

A funcção $f(x+iy)$ é continua n'uma linha dada quando é continua relativamente a todos os valores de x e y que representam coordenadas de pontos d'esta linha.

A funcção $f(x+iy)$ póde ser *discontinua* no ponto (x, y) de tres modos: *ou passando n'este ponto de um valor a outro differindo do primeiro de uma quantidade finita, ou tomando n'este ponto um valor infinito, ou tornando-se n'este ponto indeterminada.*

Se no ponto $z = c$ a funcção $f(z)$ tem um valor infinito, mas a funcção $\frac{1}{f(z)}$ é continua na visinhança de zero, a discontinuidade toma o nome de *discontinuidade de primeira especie* e o ponto toma o nome de *pólo*.

Se porém no ponto $z = c$ as funcções $f(z)$ e $\frac{1}{f(z)}$ são ao mesmo tempo discontinuas, a discontinuidade toma o nome de *discontinuidade da segunda especie.*

Por exemplo, a funcção $\frac{1}{z-c}$ tem no ponto c um pólo. Pelo contrario a funcção e^t, onde $t = \frac{1}{z-c}$ e $e > 1$, tem no ponto c uma discontinuidade da segunda especie, pois que, quando $z - c$ tende para zero passando por valores positivos, esta funcção tende para o infinito, e a funcção inversa tende para zero. Pelo contrario, se $z - c$ tende para zero passando por valores negativos, a funcção tende para zero, e a sua inversa tende para o infinito.

Ha funcções que são discontinuas ao longo de uma linha. Estas linhas, encontradas pela primeira vez por Reemann, tem o nome de *linhas de discontinuidade*. Está n'este caso a funcção y que representa o limite para que tende a fracção

$$\frac{1 + z^n}{1 - z^n}$$

quando n augmenta indefinidamente. Temos, com effeito, $y = 1$ quando o módulo de z é menor do que a unidade, e $y = -1$ quando o módulo de z é maior do que a unidade. A circumferencia do raio igual á unidade é portanto uma linha de discontinuidade d'esta funcção.

Ha tambem funcções que são discontinuas em todos os pontos de uma área plana determinada. Por exemplo, a funcção y definida como limite correspondente a $n = \infty$ da expressão

$$1 + \frac{1}{z^m},$$

que dá $y = \infty$ quando o módulo de z é menor do que a unidade, e $y = 1$ quando o módulo de z é maior do que a unidade, de modo que a funcção é discontinua no interior do circulo do raio igual á unidade.

Da definição de continuidade decorrem immediatamente as seguintes proposições:

1.ª — *A somma de funcções continuas no ponto* **z** *é uma funcção continua no mesmo ponto.*

Com effeito, sendo $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ estas funcções e $f(z)$ a sua somma, e chamando h o augmento real ou imaginario de z, teremos

$$f(z+h) - f(z) = \varphi(z+h) - \varphi(z) + \psi(z+h) - \psi(z).$$

Mas, por serem $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ funcções continuas no ponto z, ha sempre um valor h_1 tal que a desigualdade

$$\text{mod}\left\{\varphi(z+h) - \varphi(z)\right\} < \tfrac{1}{2}\delta$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1, e ha sempre um valor h_2 tal que a desigualdade

$$\text{mod}\,\{\psi(z+h)-\psi(z)\}<\tfrac{1}{2}\delta$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_2.

Logo a desigualdade (n.º 9 — 1.º)

$$\text{mod}\,\{f(z+h)-f(z)\}<\delta$$

será satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1 e h_2, e a funcção $f(z)$ será portanto continua.

2.ª — *O producto de funcções continuas no ponto* **z** *é uma funcção continua no mesmo ponto.*

Com effeito, suppondo

$$f(z)=\varphi(z)\,.\,\psi(z),$$

e portanto

$$f(z+h)=\varphi(z+h)\,.\,\psi(z+h),$$

temos a identidade

$$\begin{aligned}f(z+h)-f(z)=\psi(z+h)\,[\varphi(z+h)-\varphi(z)]\\+\varphi(z)\,[\psi(z+h)-\psi(z)].\end{aligned}$$

Mas por ser a funcção $\varphi(z)$ continua no ponto z, ha sempre um valor h_1 tal que a desigualdade

$$\text{mod}\,\{\varphi(z+h)-\varphi(z)\}<\delta'$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1, por mais pequeno que seja δ'.

Chamando pois M o maior valor do módulo de $\psi(z+h)$ no intervallo de $+h_1$ a $-h_1$ vem

$$M.\,\text{mod}\,[\varphi(z+h)-\varphi(z)]<M\,\delta',$$

e *à fortiori*

$$\text{mod}\,\{\psi(z+h)\,[\varphi(z+h)-\varphi(z)]\}<M\,\delta'=\tfrac{1}{2}\delta.$$

Esta desigualdade é pois satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1, por mais pequeno que seja o valor que se dê a δ.

Do mesmo modo se acha que a desigualdade

$$\text{mod}\left\{\varphi(z)\left[\psi(z+h)-\psi(z)\right]\right\}<\tfrac{1}{2}\delta$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_2, por mais pequeno que seja δ.

Logo a desigualdade (n.º 9 — 1.º)

$$\text{mod}\left\{f(z+h)-f(z)\right\}<\delta$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1 e h_2, e portanto a funcção $f(z)$ é continua no ponto z.

3.ª — *O quociente de duas funcções continuas no ponto* **z** *é uma funcção continua no mesmo ponto, excepto se* **z** *é uma raiz do denominador da fracção considerada.*

Com effeito, suppondo

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

e portanto

$$f(z+h)=\frac{\varphi(z+h)}{\psi(z+h)},$$

a identidade

$$f(z+h)-f(z)=\frac{1}{\psi(z+h)}\left[\varphi(z+h)-\varphi(z)\right]$$
$$-\frac{\varphi(z)}{\psi(z)\,\psi(z+h)}\left[(\psi(z+h)-\psi(z)\right]$$

mostra, como no caso anterior, que ha sempre um valor h_1 tal que as desigualdades

$$\text{mod}\left\{\frac{1}{\psi(z+h)}\Big(\varphi(z+h)-\varphi(z)\Big)\right\}<\tfrac{1}{2}\delta$$
$$\text{mod}\left\{\frac{\varphi(z)}{\psi(z)\,\psi(z+h)}\Big(\psi(z+h)-\psi(z)\Big)\right\}<\tfrac{1}{2}\delta,$$

e portanto a desigualdade

$$\text{mod}\,\{ f(z+h) - f(z) \} < \delta$$

são satisfeitas por todos os valores de h inferiores a h_1, no caso de $\psi(z)$ não se tornar nulla.

Nos pontos que satisfazem a equação $\psi(z) = 0$, a funcção $f(z)$ torna-se indeterminada ou infinita, segundo o valor que tiver $\varphi(z)$ n'estes mesmos pontos.

4.ª — *A raiz de qualquer grão de uma funcção continua é tambem continua.*

Com effeito, suppondo

$$f(z) = \sqrt[m]{\varphi(z)}$$

e m inteiro positivo, temos

$$\varphi(z) = [f(z)]^m$$

$$\varphi(z+h) = [f(z) + f(z+h) - f(z)]^m$$

$$= [f(z)]^m + m\,[f(z+h) - f(z)]\,[f(z)]^{m-1}\,(1+P),$$

chamando P a somma

$$P = \frac{m-1}{2}\,[f(z+h) - f(z)]\,[f(z)]^{-1} + \ldots$$

Vem portanto a igualdade

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{m\,[f(z)]^{m-1}\,(1+P)}$$

donde se conclue, como nos casos anteriores, que a funcção $f(z)$ é continua quando $\varphi(z)$ o é.

*23. — O imaginario $f(x+iy) = X + iY$ póde ser representado pelo ponto cujas coordenadas são X e Y, do mesmo modo que $x + iy$ póde ser representado pelo ponto cujas coordenadas são x e y. Se a x e a y dermos valores que satisfaçam á equação $F(x, y) = 0$, isto é, que representem as coordenadas dos pontos da curva que tem esta equação, os valores de X e Y correspondentes representarão as coordenadas de pontos de outra curva. A esta segunda curva chama Gauss *imagem* da primeira. O estudo da correspondencia entre as duas curvas é muito importante para o estudo das funcções porque conduz a propriedades caracteristicas d'estas funcções, como vamos vêr. (*)

Consideremos, por exemplo, a funcção

$$u = f(z) = (z-a)(z-b)\ldots(z-l)(z-a')(z-b')\ldots(z-l').$$

Marquemos n'um plano os pontos $a, b, c, \ldots l, a', b', c', \ldots l'$; o ponto z descreva uma curva fechada, tendo dentro os pontos $a, b, c, \ldots$, e fóra os outros $a', b', \ldots l'$.

Chamando ρ, ρ', ρ'' etc. os módulos das differenças $z-a$, $z-b, \ldots z-l, z-a', z-b'$, etc. e $\theta, \theta', \ldots$ os seus argumentos, vem

$$z-a = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$z-b = \rho'\,(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e portanto

$$u = \rho\rho'\rho'' \ldots [\cos(\theta + \theta' + \ldots) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta' + \ldots)].$$

Notemos agora que, sendo A e M os pontos que representam os imaginarios a e z, o angulo θ é representado (fig. 6.ª) por MAx'. Com effeito, pondo $z = x + iy$, e $a = \alpha + i\beta$. teremos

$$z - a = x - \alpha + i\,(y - \beta) = AP + iMP,$$

e portanto (9)

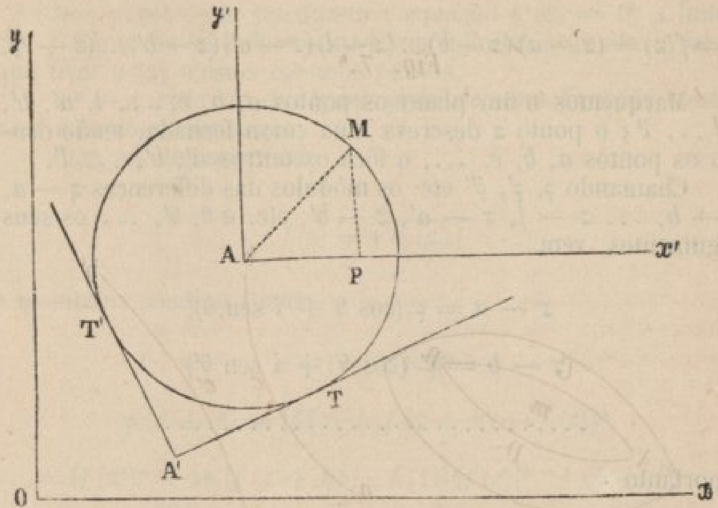
$$\operatorname{tang}\theta = \frac{MP}{AP} = \operatorname{tang} MAx'.$$

Logo, quando M descreve a curva, a linha AM gyra á roda do ponto A descrevendo um angulo igual a 2π, e portanto o angulo θ augmenta de 2π. O mesmo se diz a respeito

(*) M. Hermite—*Cours d'Analyse*—pag. 25.

dos outros pontos correspondentes a b, c, etc., que estão dentro da curva.

Fig. 6.ª



Pelo contrario a linha $A'M$ correspondente ao ponto A' exterior á curva e que representa o imaginario a', descreve, quando z descreve a curva, um angulo que augmenta desde $TA'x'$ até $T'A'x'$ e depois diminue outra vez até tomar o valor $TA'x'$. Logo o argumento de $z - a'$ retoma o primeiro valor quando z volta á primitiva posição. O mesmo acontece com os outros pontos exteriores á curva.

Conclue-se de tudo isto que o argumento de u, que é igual a $\theta + \theta' + \ldots$, augmenta de tantas vezes 2π quantas são as raizes de $f(z) = 0$ que se representam por pontos collocados dentro da curva. Veremos adiante uma applicação importante d'este principio.

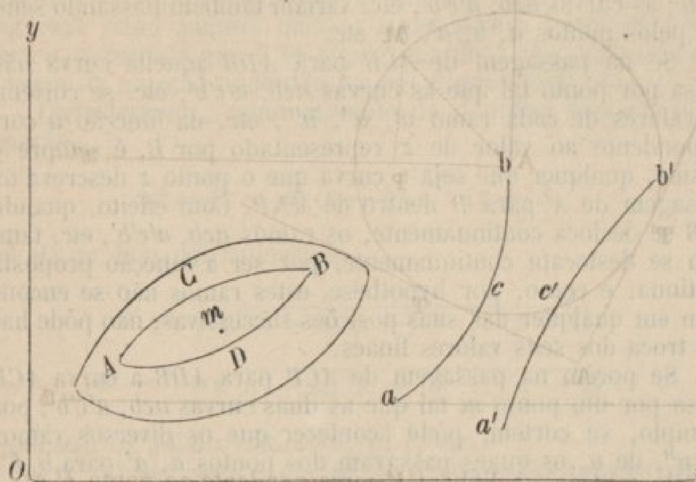
***24.** — Passando á doutrina geral, vejamos qual a influencia do caminho seguido pela variavel z sobre o valor de funcção d'esta variavel.

Seja

$$u = f(z) = X + iY$$

uma funcção continua dentro da área cujo contôrno é MNP (fig. 7.ª). Notemos primeiro que, se n'esta funcção a cada valor de z corresponderem muitos valores de u, podemos considerar esta funcção como equivalente a outras tantas funcções continuas u', u'', u''', etc., cada uma das quaes tem um unico valor correspondente a cada valor de z.

Fig. 7.ª



Com effeito, seja n o numero de valores de u que correspondem, em geral, a cada valor de z, podendo haver valores particulares de z, mas em numero determinado, a que correspondam menos do que n valores de u.

Se a z se dá o valor z_0 representado por A, os valores correspondentes de u, que são em numero de n, serão representados na figura pelos pontos a, a', etc. Se a z se dá o valor z_1 os valores correspondentes de u serão representados por n pontos que, por ser a funcção u continua, podem ser collocados tão proximos quanto se queira dos pontos a, a', etc., para o que basta dar a z_1 um valor tão proximo de z_0 quanto se queira. Continuando do mesmo modo, de maneira que z descreve a curva ACB, obtém-se n series de pontos formando os n ramos de curva acb, $a'c'b'$, etc. Os valores de u correspondentes a cada um d'estes ramos de curva formam pois uma funcção continua que tem um unico valor correspondente a cada valor de z, e a que se chama *ramo* da funcção considerada.

Os valores particulares de z a que correspondem menos do que n valores de u, dão pontos em que os ramos das curvas precedentes se cortam, visto que na visinhança d'estes pontos a funcção adquire outra vez n valores. Os valores correspondentes dos ramos da funcção são iguaes.

Posto isto, supponhamos que a curva ACB, descripta por z, varia, passando sempre por A e por B, até tomar a posição ADB; as curvas acb, $a'c'b'$, etc. variam tambem passando sempre pelos pontos a, b, a', b', etc.

Se na passagem de ACB para ADB aquella curva não passa por ponto tal que as curvas acb, $a'c'b'$, etc. se cortem, os valores de cada ramo u', u'', u''', etc. da funcção u correspondente ao valor de z representado por B, é sempre o mesmo, qualquer que seja a curva que o ponto z descreva na passagem de A para B dentro de MNP. Com effeito, quando ACB se desloca continuamente, os ramos acb, $a'c'b'$, etc. tambem se deslocam continuamente, por ser a funcção proposta continua, e como, por hypothese, estes ramos não se encontram em qualquer das suas posições successivas, não póde haver troca dos seus valores finaes.

Se porém na passagem de ACB para ADB a curva ACB passa por um ponto m tal que as duas curvas acb, $a'c'b'$, por exemplo, se cortem, póde acontecer que os diversos ramos u', u'', de u, os quaes passavam dos pontos a, a' para b, b', quando z descrevia a curva ACB, passem agora dos pontos a, a', para b', b quando z descreve a curva ADB; isto é, póde acontecer que o ramo de u que no primeiro caso deu o valor b dê agora o valor b', e vice-versa. Com effeito, de a póde ir-se tanto para b como para b', seguindo curvas continuas, quando se passa pela intersecção das curvas acb e $a'c'b'$.

O ponto m chama-se *ponto critico*, ou *ponto de ramificação*. As funcções que dentro do contôrno MNP não tem pontos criticos, têem o nome de funcções *uniformes* na área dada. As outras têem o nome de *funcções multiformes*. As funcções que têem um valor unico, qualquer que seja z, são uniformes em todo o plano.

Vê-se pois que entre as funcções uniformes e multiformes ha uma differença importante. No primeiro caso o caminho seguido pela variavel z na passagem de A para B não tem influencia sobre o valor de cada ramo da funcção. No segundo caso, o valor de cada ramo da funcção póde variar com o caminho seguido pela variavel.

Do que temos dito conclue-se ainda que, se z descreve a curva fechada $ACBD$, e na área limitada por este contôrno não existe ponto critico, um ramo qualquer da funcção u toma o valor u_0 com que partiu cada vez que volta á primeira posição A. No caso porém de dentro do contôrno haver ponto critico, este ramo póde tomar o valor u'_0 correspondente ao valor inicial de outro ramo da funcção.

Com effeito, no primeiro caso, o ramo da funcção que principia por u_0 tem no ponto C o mesmo valor u_1, quer z descreva a linha $ADBC$, quer descreva a linha AC; e o valor que este ramo adquire quando z descreve a linha AC tende para u_0 á medida que C se approxima de A. No segundo caso o ramo da funcção póde não ter em C um unico valor.

Consideremos, como exemplo da doutrina precedente, a funcção

$$u^2 = (z-a)(z-b)\dots(z-l),$$

que dá as duas determinações

$$u' = +\sqrt{(z-a)(z-b)\dots(z-l)}$$

$$u'' = -\sqrt{(z-a)(z-b)\dots(z-l)},$$

e que tem os pontos criticos a, b, c, etc.

Um calculo semilhante ao do exemplo do numero anterior dá

$$u' = +\sqrt{\rho\rho'\dots}\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\theta'+\dots) + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\theta+\theta'\dots)]$$

$$u'' = -\sqrt{\rho\rho'\dots}\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\theta'+\dots) + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\theta+\theta'+\dots)].$$

Quando z descreve a curva fechada $ADBC$, u descreve uma curva com dous ramos que se cortam nos pontos a, b, c, etc.

Suppondo que o ponto a está fóra do contôrno, vê-se, como no exemplo citado, que depois de z dar uma volta $ADBCA$, θ toma o mesmo valor com que partiu. E como o mesmo se diz de θ', θ'', etc., se os pontos b, c, etc. estão tambem fóra do contôrno, segue-se que u' volta ao valor u'_0 com que partiu. Se porém dentro do contôrno está o ponto a, θ augmenta de 2π, logo o argumento de u' augmenta de π e o signal de u' muda. Portanto, a determinação de u que principiou por u'_0 acaba por $-u'_0$. que é o valor inicial de outra determinação u''.

Se dentro do contôrno houver dous pontos criticos a e b, θ e θ' variam cada um de 2π, logo o argumento de u' varia de 2π, e portanto conserva o mesmo valor e o mesmo signal, que tinha no principio.

Em geral, se dentro do contôrno houver k pontos criticos, o argumeuto de u' varia de $k\pi$, e cada ramo de u conservará no fim de uma volta de z o mesmo valor que á partida, ou o mesmo valor com signal contrario, segundo fôr k par ou impar.

Postos estes principios geraes, passemos ao estudo das funcções mais usadas.

II

Funcções algebricas

25. — Diz-se que u é funcção algebrica de z quando estas variaveis estão ligadas pela equação

$$\Sigma A z^g u^l = 0,$$

onde o primeiro membro representa um polynomio inteiro relativamente a u e z que supporemos do grão m relativamente a u.

26. — Vamos principiar o estudo das funcções algebricas pela *funcção inteira*, isto é, pela funcção

$$u = f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n,$$

onde n é um numero inteiro positivo, e A_0, A_1, etc. são constantes reaes ou imaginarias.

I — A cada valor de z corresponde um unico valor de u, logo a funcção inteira é uniforme em todo o plano.

II — Mudando z em $z + h$, temos

$$f(z + h) = A_0 (z + h)^n + A_1 (z + h)^{n-1} + \ldots$$
$$+ A_k (z + h)^{n-k} + \ldots + A_{n-1} (z + h) + A_n,$$

ou desenvolvendo as potencias inteiras do binomio $z + h$ e ordenando o resultado segundo as potencias de h,

$$f(z + h) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n$$

$$+ h (n A_0 z^{n-1} + (n - 1) A_1 z^{n-2} + \ldots + A_{n-1})$$

$$+ \frac{h^2}{2} (n (n-1) A_0 z^{n-2} + (n-1) (n-2) A_1 z^{n-3} + \ldots + A_{n-2})$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{h^k}{1 \cdot 2 \ldots k} \left((n_k) A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \ldots \right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ A_0 h^n,$$

pondo

$$(n)_k = n (n-1) \ldots (n-k+1), \text{ etc.}$$

Representando os coefficientes de h, $\frac{1}{2} h^2$, $\frac{1}{2.3} h^3$, etc. por $f'(z,)$ $f''(z)$, $f'''(z)$, etc., vem a formula

$$f(z+h) = f(z) + h f'(z) + \frac{h^2}{2} f''(z) + \cdots$$

$$+ \frac{h^k}{1 \cdot 2 \ldots k} f^{(k)}(z) + \ldots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(z),$$

que tem o nome de *formula de Taylor*.

As funcções $f'(z)$, $f''(z)$, etc. são respectivamente do grão $n-1$, $n-2$, etc., e a sua lei de formação é dada pela formula seguinte:

$$f^{(k)}(z) = (n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \ldots + A_{n-k}$$

A estas funcções dá-se respectivamente os nomes de *derivada de primeira ordem*, de *derivada de segunda ordem*, etc. da funcção $f(z)$.

Da comparação das expressões $f'(z)$, $f''(z)$, etc., ou antes da comparação da formula precedente com a correspondente a $k+1$:

$$f^{(k+1)}(z) = (n)_{k+1} A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_{k+1} A_1 z^{n-k-2} + \ldots$$

$$= (n)_k (n-k) A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_k (n-k-1) A_1 z^{n-k-2} + \ldots$$

conclue-se a seguinte regra para formar as derivadas successivas de $f(z)$:

Multiplique-se em cada termo o expoente de **z** *pelo coefficiente e diminua-se o expoente de uma unidade.*

Por exemplo, no caso de

$$f(z) = z^5 - 3\,z^4 + 4\,z^2 - 7$$

vem

$$f'(z) = 5\,z^4 - 12\,z^3 + 8z$$

$$f''(z) = 20z^3 - 36\,z^2 + 8$$

etc.

III — A funcção inteira é composta de sommas, productos e potencias de funcções continuas, logo (n.° 22 — 1.ª, 2.ª, 3.ª) *é continua em todo o plano.*

IV — Toda a funcção inteira é um producto de n factores do primeiro gráo:

$$f(z) = A_0\,(z-a)^{\alpha}\,(z-b)^{\beta}\ldots(z-l)^{\gamma},$$

onde a, b, ... l são as raizes da equação $f(z) = 0$. Este theorema é bem conhecido da theoria das equações, e em breve o demonstraremos.

27. — Em seguida ás funcções inteiras vem naturalmente as *funcções raccionaes fraccionarias*, isto é, as funcções da fórma:

$$u = f(z) = \frac{\alpha_0\,z^n + \alpha_1\,z^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{a_0\,z^p + a_1\,z^{p-1} + \ldots + a_p}\,.$$

I — Suppondo $n > p$, póde effectuar-se a divisão do numerador pelo denominador e reduzir d'este modo u á fórma

$$u = F(z) + \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\,,$$

onde $F(z)$, $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ são funcções inteiras, sendo o gráo de $\varphi(z)$ menor de que o gráo de $\psi(z)$.

Decompondo $\psi(z)$ em factores, o que dá

$$\psi(z) = (z-a)^{\alpha}\,(z-b)^{\beta}\ldots(z-l)^{\gamma},$$

a fracção $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ é susceptivel da decomposição seguinte:

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha}$$

$$+ \frac{B_1}{z-b} + \frac{B_2}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(z-b)^\beta}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{L_1}{(z-l)} + \frac{L_2}{(z-l)^2} + \ldots + \frac{L_\gamma}{(z-l)^\gamma},$$

onde A_1, B_1, ... A_2, B_2, ... são quantidades constantes.

Demonstra-se esta proposição importante do modo seguinte:

Podemos escrever a igualdade

$$(a) \ldots \quad \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\psi_1(z)},$$

onde é

$$\psi_1(z) = (z-b)^\beta \ldots (z-l)^\gamma,$$

e onde $\varphi_1(z)$ é uma funcção inteira de grão inferior ao de $\varphi(z)$.

Com effeito, reduzindo-a ao mesmo denominador e igualando os numeradores, vem

$$\varphi(z) = A_\alpha \psi_1(z) + (z-a)\,\varphi_1(z),$$

o que dá

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z)}{z-a}.$$

Temos assim uma equação para determinar $\varphi_1(z)$ de modo que a igualdade considerada (a) tenha logar; mas como $\varphi(z)$ deve ser inteiro, é necessario que se determine A_α de modo que seja nullo o resto da divisão de $\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z)$ por $z - a$. Para isso, chamando Q o quociente d'esta divisão e R o resto, teremos

$$\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z) = Q(z-a) + R,$$

o que dá

$$\varphi(a) - A_\alpha \psi_1(a) = R = 0,$$

e portanto

$$A_\alpha = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}.$$

Fica assim demonstrada a igualdade (a), determinada a quantidade A_α, e determinada a funcção $\varphi_1(z)$, cujo grão é pois inferior ao de $\varphi(z)$.

Do mesmo modo obtemos

$$\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\psi_1(z)} = \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(z)}{(z-a)^{\alpha-2}\psi_1(z)}.$$

Continuando acha-se finalmente a igualdade

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z-a} + \frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}.$$

Depois applica-se a $\frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}$ o mesmo processo que se applicou a $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, e continua-se do mesmo modo até chegar á decomposição annunciada.

Pelo processo anterior determina-se as constantes A_α, $A_{\alpha-1}$, $\ldots A_1$, B_β, $B_{\beta-1}$, …, mas, attendendo á importancia da questão, vamos expôr um processo mais simples para esta determinação.

Pondo na igualdade precedente $z = a + h$, vem

$$\frac{\varphi(a+h)}{h^\alpha \psi_1(a+h)} = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{h} + \frac{\varphi_\alpha(a+h)}{\psi_1(a+h)},$$

ou

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)} = A_\alpha + A_{\alpha-1}h + \ldots + A_1 h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha \varphi_\alpha(a+h)}{\psi_1(a+h)}.$$

Este resultado mostra que para achar A_α, $A_{\alpha-1}$, $\ldots A_1$ basta dividir $\varphi(a+h)$ por $\psi_1(a+h)$, tendo o cuidado de ordenar primeiro estes polynomios segundo as potencias de h. Os coefficientes das primeiras α potencias de h no quociente são as constantes pedidas.

Devemos observar que na formação de $\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)}$ é escusado escrever os termos que contêem potencias de h superiores a $\alpha - 1$, pois que estes termos não influem no quociente.

Do mesmo modo se determina as outras constantes B_1, B_2 … dividindo $\varphi(b+h)$ por $\frac{\psi(b+h)}{h^\beta}$, etc.

Exemplo.— Decomponhamos por este processo a fracção:

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)^4(x-2)x}.$$

Pondo n'esta fracção $x = a + h = 1 + h$, vem

$$\frac{\varphi(1+h)}{\psi_1(1+h)} = \frac{3 - h + h^2}{-1 + h^2} = -3 + h - 4h^2 + h^3 + \frac{4h^4 - h^5}{h^2 - 1};$$

logo teremos

$$A_4 = -3,\ A_3 = 1,\ A_2 = -4,\ A_1 = 1.$$

Do mesmo modo, pondo $x = 2 + h$, vem

$$\frac{\varphi(2+h)}{\psi_1(2+h)} = \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 5}{(1+h)^4(2+h)},$$

que, approveitando só a parte independente de h no numerador e no denominador, visto que $x - 2$ entra na fracção proposta no primeiro grão, dá $\frac{3}{2}$. Logo temos

$$B_1 = \tfrac{3}{2}.$$

Do mesmo modo se acha $C_1 = -\frac{5}{2}$.

Temos pois

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)^4(x-2)x} = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{(x-1)^4}$$
$$+ \frac{\frac{3}{2}}{x-2} - \frac{\frac{5}{2}}{x}.$$

Ha muitos outros methodos para fazer a decomposição das fracções raccionaes, e ha mesmo formulas que dão directamente a expressão analytica das constantes A_α, $A_{\alpha-1}$, etc. Póde vêr-se alguns methodos e formulas na nossa memoria intitulada—*Sur la décomposition des fractions rationnelles.* (*)

II — Vejamos agora se a funcção considerada é ou não continua.

A primeira parte $F(z)$ é continua por ser uma funcção inteira. A outra parte $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ é a somma de fracções da fórma $\frac{A}{(z-a)^k}$, onde k é inteiro; logo é continua (n.° 22—3.ª) em todos os pontos, excepto nos pontos $z = a, b, c, \ldots l$.

Concluiremos pois que a *funcção raccional fraccionaria é uniforme e continua em todo o plano, excepto nos pontos correspondentes ás raizes do denominador. Estes pontos são pólos da funcção.*

(*) *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*—tomos I e II (Coimbra).

28. — O estudo geral das funcções algebricas, que tem sido objecto de trabalhos importantes de muitos geómetras eminentes, não póde ser aqui feito de uma maneira completa; limitar-nos-hemos pois a mostrar que estas funcções são multiformes, a procurar o numero dos seus ramos, e a vêr a natureza de seus pontos singulares. O estudo do valor que toma qualquer ramo da funcção em vista do caminho seguido pela variavel não será aqui feito senão em alguns casos particulares.

I — *Theorema 1.º — Toda a funcção algebrica* u *de* z, *dada por uma equação* f (u, z) = 0 *do grão* n *relativamente a* u, *tem* n *valores.*

Tem-se dado muitas demonstrações d'esta proposição fundamental. A que vamos apresentar é devida ao sr. Lipschitz, professor na Universidade de Bonn. (*)

A equação $f(u, z) = 0$ póde ser escripta da maneira seguinte:

$$f(u) = u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

e vamos mostrar que se o theorema é verdadeiro quando o seu grão é $n-1$, tambem o é quando o seu grão é n.

Supponhamos pois que a funcção algebrica dada por uma equação do grão $n-1$, tem $n-1$ valores; terá $n-1$ valores a funcção u determinado pela equação $f'(u) = 0$, por ser $f'(u)$ do grão $n-1$ (26 — II). Sejam estes valores a_1, a_2, ... a_{n-1}, e designemos por a_1 aquelle que dá a $f(a_1)$ um módulo inferior ou quando muito igual ao menor dos módulos de $f(a_2)$, ... $f(a_{n-1})$.

Pondo $u_1 = a_1 + \alpha$, virá (26 — II)

$$f(a_1+\alpha) = f(a_1) + \alpha f'(a_1) + \frac{\alpha^2}{1\,.\,2} f''(a_1) + \dots + \frac{\alpha^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(a_1).$$

O termo que contém $f'(a_1)$ é nullo por hypothese, e podem ser nullos alguns dos seguintes. Suppondo pois que o termo que contém $f^{(p)}(a_1)$ é o primeiro que não se annulla, teremos

$$f(a_1+\alpha) = f(a_1) + \frac{\alpha^p}{1.2\dots p} f^{(p)}(a_1) + \dots + \frac{\alpha^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(a_1).$$

(*) *Lipschitz*—Lehrbuch der Analysis, tomo I.

Designemos por h uma quantidade real comprehendida entre zero e a unidade, e façamos

$$\alpha = \beta \sqrt[p]{h},\ \beta = \sqrt[p]{-1\ .\ 2 \ldots p\ \frac{f(a_1)}{f^{(p)}(a_1)}},$$

onde daremos o valor real ao radical que entra na expressão de α, e um qualquer dos seus valores ao radical que entra na expressão de β. Teremos pois

$$f(a_1 + \alpha) = f(a_1)(1 - h) + \lambda + i\eta,$$

pondo

$$\lambda + i\eta = \frac{\beta^{p+1} h^{\frac{p+1}{p}}}{1\ .\ 2 \ldots (p+1)} f^{(p+1)}(a_1) + \ldots \frac{\beta^n h^{\frac{n}{p}}}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a_1).$$

Representando por P uma quantidade real superior a qualquer dos módulos dos coefficientes de h na somma precedente, e representando o módulo de $\lambda + i\eta$ por $|\lambda + i\eta|$, teremos (n.º 9 — 1.º)

$$|\lambda + i\eta| < P\left(h^{\frac{p+1}{p}} + h^{\frac{p+2}{p}} + \ldots + h^{\frac{n}{p}}\right),$$

ou *à fortiori*

$$|\lambda + i\eta| < (n - p)\ P h^{\frac{p+1}{p}}.$$

Teremos pois

$$|f(a_1 + \alpha)| < |f(a_1)|(1 - h) + (n - p) P h^{1 + \frac{1}{p}},$$

ou

$$|f(a_1 + \alpha)| < |f(a_1)| - h\left[|f(a_1)| - (n - p) P h^{\frac{1}{p}}\right].$$

Se obrigarmos agora h, que já está sujeito a estar comprehendido entre zero e a unidade, a satisfazer á desigualdade

$$|f(a_1)| - (n-p)\,Ph^{\frac{1}{p}} > 0,$$

dando-lhe para isso um valor assaz pequeno, a desigualdade precedente dará

$$|f(a_1+\alpha)| < |f(a_1)|,$$

e póde portanto achar-se um valor u_1 tal que o módulo de $f(u_1)$ seja menor do que o módulo de $f(a_1)$, pondo

$$u_1 = a_1 + \beta \sqrt[p]{h}.$$

Partindo depois de u_1 demonstra-se do mesmo modo que se póde achar um valor u_2 tal que o módulo de $f(u_2)$ seja menor do que o módulo de $f(u_1)$. N'este caso a funcção $f'(u_1)$ não será nulla, porque, segundo o modo como se escolheu a_1, quando u varia de modo que o módulo de $f(u)$ decresce, $f'(u)$ não póde passar por zero.

Se fizermos pois

$$u_2 = u_1 + \alpha_1,\ \alpha_1 = \beta_1 h_1,\ \beta_1 = -\frac{f(u_1)}{f'(u_1)},$$

representando por h_1 uma quantidade real comprehendida entre zero e a unidade e que satisfaça á desigualdade

$$|f(u_1)| - (n-1)\,P_1 h_1 > 0,$$

e por P_1 uma quantidade real qualquer superior ou igual ao maior dos módulos das quantidades

$$\frac{\beta_1^2}{1.2} f''(u_1), \ldots, \frac{\beta_1^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(u_1),$$

teremos, do mesmo modo que no caso anterior,

$$|f(u_2)| < |f(u_1)| - h_1 \{ |f(u_1)| - (n-1)\,P_1 h_1 \},$$

que dá

$$|f(u_2)| < |f(u_1)|\,.$$

Continuando do mesmo modo obtem-se as desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} |f(u_2)| < |f(u_1)| - h_1 [\,|f(u_1)| - (n-1)\,P_1\,h_1] \\ |f(u_3)| < |f(u_2)| - h_2 [\,|f(u_2)| - (n-1)\,P_2\,h_2] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}(a)$$

onde u_2, u_3, etc. são dados pelas igualdades

$$u_2 = u_1 + \beta_1 \sqrt{h_1},\ u_3 = u_2 + \beta_2 \sqrt{h_2},\ u_4 = u_3 + \beta_3 \sqrt{h_3},\ \text{etc.};$$

onde h_1, h_2, h_3, etc. são quantidades menores do que a unidade que satisfazem ás desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} |f(u_1)| - (n-1)\,P_1\,h_1 > 0 \\ |f(u_2)| - (n-1)\,P_2\,h_2 > 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}(b);$$

e onde β_1, β_2, etc. são dados pelas formulas:

$$\beta_1 = -\frac{f(u_1)}{f'(u_1)},\ \beta_2 = -\frac{f(u_2)}{f'(u_2)},\ \beta_3 = -\frac{f(u_3)}{f'(u_3)},\ \text{etc.}$$

Das desigualdades (a) deduz-se

$$f(u_m) < f(u_{m-1}) < \cdots < f(u_2) < f(u_1)\,.$$

As quantidades P_1, P_2, etc. sendo todos inferiores a um numero positivo Q, como veremos em seguida, as desigualdades (b) serão satisfeitas pelos valores de h_1, h_2, h_3, etc. dados pelas equações:

$$h_1 = \frac{|f(u_1)|}{2(n-1)\,Q},\ h_2 = \frac{|f(u_2)|}{2(n-1)\,Q},\ \text{etc.}$$

Em virtude d'estas igualdades, as desigualdades (a) dão

$$|f(u_2)| < |f(u_1)| \left[1 - \frac{|f(u_1)|}{4(n-1)Q}\right]$$

$$|f(u_3)| < |f(u_2)| \left[1 - \frac{|f(u_2)|}{4(n-1)Q}\right]$$

....

$$|f(u_m)| < |f(u_{m-1})| \left[1 - \frac{|f(u_{m-1})|}{4(n-1)Q}\right],$$

d'onde

$$|f(u_m)| < |f(u_1)| \left[1 - \frac{|f(u_1)|}{4(n-1)Q}\right]$$

$$\times \left[1 - \frac{|f(u_2)|}{4(n-1)Q}\right] \cdots \left[1 - \frac{|f(u_{m-1})|}{4(n-1)Q}\right].$$

D'aqui vamos concluir que se póde tomar m tão grande que seja $|f(u_m)| < \delta$, por mais pequeno que seja δ. Com effeito, se fosse sempre $|f(u_m)| > \delta$, seria tambem $|f(u_1)| > |f(u_2)| > \ldots > |f(u_{m-1})| > \delta$, e a ultima desigualdade daria

$$|f(u_m)| < |f(u_1)| \left[1 - \frac{\delta}{4(n-1)Q}\right]^{m-1}.$$

O segundo membro d'esta desigualdade podendo tornar-se tão pequeno quanto se queira augmentando convenientemente m, teriamos pois $|f(u_m)| < \delta$.

Vê-se pois que, quando a u_1, u_2, u_3, etc. se dá os valores precedentes, a funcção $f(u_t)$ diminue, e póde tornar-se menor do que qualquer grandeza assignavel dando a t um valor m sufficientemente grande.

Por outra parte, da relação

$$\frac{f(u)}{u^n} = 1 + \frac{a_1}{u} + \frac{a_2}{u^2} + \ldots + \frac{a_n}{u^n}$$

$$= 1 + \frac{|a_1|}{|u|}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) + \frac{|a_2|}{|u|^2}(\cos\theta' + i\,\text{sen}\,\theta') + \ldots,$$

onde θ, θ', etc. representam os argumentos de $\frac{a_1}{u}$, $\frac{a_2}{u^2}$, etc., deduz-se (n.° 9)

$$\frac{|f(u)|}{|u|^n} = \left(1 + \frac{|a_0|}{|u|} \cos\theta + \ldots\right)^2$$

$$+ \left(\frac{|a_0|}{|u|} \operatorname{sen}\theta + \ldots\right)^2;$$

e esta igualdade prova que, quando $|f(u)|$ diminue indefinidamente, $|u|$ não póde augmentar indefinidamente, pois que o seu segundo membro póde approximar-se da unidade tanto quanto se queira dando a $|u|$ um valor sufficientemente grande.

De tudo o que precede podemos pois concluir que o módulo de $f(u_t)$ se póde tornar menor do que qualquer grandeza assignavel dando a t um valor sufficientemente grande, e que o valor de u_t não póde augmentar indefinidamente com t. Logo o minimo valor da quantidade positiva $|f(u_t)|$ será zero, porque, se este minimo fosse a quantidade δ, poderia dar-se a t um valor tal que fosse $|f(u_t)| < \delta$. Ha portanto um valor u_t que é raiz da equação $f(u_t) = 0$.

Resta mostrar que P_1, P_2, P_3, etc. são menores do que um numero determinado Q. Por hypothese, P_t é maior do que o maior dos módulos das quantidades

$$\frac{\beta_t^2}{1 \cdot 2} f''(u_t), \ldots \frac{\beta_t^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(u_t).$$

Sendo porém $f''(u_t)$, $f'''(u_t)$, ... $f^{(n)}(u_t)$ polynomios inteiros relativamente a u, e não podendo u_t augmentar indefinidamente, tambem elles não podem augmentar indefinidamente; e a fracção

$$\beta_t = -\frac{f(u_{t-1})}{f'(u_{t-1})}$$

não póde tambem augmentar indefinidamente, porque a funcção $f(u_{t-1})$ não póde augmentar indefinidamente, e a funcção $f'(u_{t-1})$ não póde diminuir indefinidamente, visto que u_{t-1} não póde ser raiz de $f'(u)$ (com effeito, o módulo de $f(u_{t-1})$ é menor do que o módulo de $f(a_1)$ e este é, por hypothese, menor do que os módulos de $f(a_2)$, $f(a_3)$, etc. correspondentes ás outras raizes de $f'(u) = 0$). Logo os módulos das quantidades consideradas não podem augmentar indefinidamente, e portanto são menores do que uma quantidade finita Q.

Está pois completamente demonstrado que a cada valor de z corresponde pelo menos um valor u' de u que satisfaz á equação $f(z, u) = 0$.

E' facil de demonstrar agora que o numero de valores de u que satisfazem a esta equação é igual a n.

Com effeito, dividindo o polynomio $f(z, u)$ do grão n relativamente a u por $u - u'$ vem um quociente q do grão $n - 1$ e um resto r independente de u, e teremos

$$f(z, u) = q(u - u') + r,$$

o que dá, pondo $u = u'$

$$f(z, u') = r = 0,$$

e portanto

$$f(z, u) = q(u - u').$$

Mas suppondo o theorema verdadeiro no caso dos polynomios de grão $n - 1$, vem

$$q = (u - u'')(u - u''') \ldots (u - u^{(n)}),$$

logo será

$$f(z, u) = (u - u')(u - u'') \ldots (u - u^{(n)})$$

e o theorema será pois verdadeiro no caso dos polynomios do grão n.

De tudo o que vem de ser dito podemos concluir o theorema 1.º, porque vem de demonstrar-se que se este theorema é verdadeiro no caso de ser a equação proposta do grão $n - 1$, tambem é verdadeiro quando esta equação é de grão n, e sabe-se que elle é verdadeiro quando a equação é do primeiro grão.

Esta demonstração do sr. Lipschitz, cujo principio é devido a Argand, tem a importancia propria de levar a um methodo de approximação para o calculo das raizes incommensuraveis, que coincide com o methodo de Newton. D'este ponto, que pertence á theoria das equações numericas, não podemos porém aqui tratar.

II — A substituição da equação implicita $f(z, u) = 0$ por uma equação explicita $u = F(z)$ equivalente, onde entrem só funcções algebricas em numero finito, e que dê directamente os n ramos de u, é uma questão pertencente á theoria das equações, de que aqui não trataremos. Limitar-nos-hemos a recordar que esta substituição é possivel no caso das equações dos quatro primeiros gráos relativamente a u; que Abel demonstrou a impossibilidade d'esta substituição no caso das equações geraes de gráo superior ao quarto; finalmente que no caso das equações de gráo superior ao quarto, ella é ainda possivel para certos *grupos* particulares de equações que foram estudados por aquelle eminente geometra e por seus successores. (*)

III — *Theorema 2.º — Toda a funcção algebrica* u *dada pela equação*

$$f(u, z) = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,,$$

onde a_0 é uma funcção de z do gráo m, *é continua em todo o plano, excepto em* m *pontos que são pólos.*

Esta proposição importante é devida a Cauchy, bem como a demonstração que vamos dar d'ella. (**)

Suppondo que u tem n valores iguaes a b quando a z se dá o valor a, vamos mostrar que quando z varia a partir de a segundo a lei da continuidade, u adquire ω valores distinctos variando a partir de b segundo a lei da continuidade.

Pondo na equação proposta $z = a + h$ e $u = b + k$, e ordenando o resultado segundo as potencias de k, vem (26 — II) um resultado da fórma:

$$f(a + h, b + k) = Z_0 + Z_1 k + \ldots + Z_\omega k^\omega$$

$$+ Z_{\omega+1} k^{\omega+1} + \ldots + Z_n k^n$$

(*) *Abel* — Oeuvres complètes, 1881.
M. Serret — Cours d'Algèbre supérieure, tomo II — Paris, 1881.
(**) *Cauchy* — Nouveaux Exercices de Mathématiques, tomo II.

onde Z_0, Z_1, etc. são funcções inteiras de z; ou

$$f(a+h,\ b+k)=Z_\omega k^\omega$$

$$\times\left\{\frac{Z_0}{Z_\omega}\frac{1}{k^\omega}+\frac{Z_1}{Z_\omega}\cdot\frac{1}{k^{\omega-1}}+\ldots+1+\frac{Z_{\omega+1}}{Z_\omega}k+\ldots+\frac{Z_n}{Z_\omega}k^{n-\omega}\right\}$$

$$=Z_\omega k^\omega\,(1+P+Q)\,,$$

onde é

$$P=\frac{Z_{\omega+1}}{Z_\omega}k+\ldots+\frac{Z_n}{Z_\omega}k^{n-\omega},$$

$$Q=\frac{Z_0}{Z_\omega}\cdot\frac{1}{k^\omega}+\ldots+\frac{Z_{\omega-1}}{Z_\omega}\cdot\frac{1}{k}\,.$$

Notemos agora que as funcções de z: $Z_0, Z_1, \ldots Z_{\omega-1}$ são nullas quando é $z=a$, pois que então u deve ter, por hypothese, ω valores iguaes a b, e porisso k deve ter ω valores iguaes a zero; e que, nas mesmas circumstancias, Z_ω não póde ser nulla pois que, se o fosse, k teria $\omega+1$ valores iguaes a b.

Descreva z uma circumferencia de centro a e raio ρ tal que o circulo que ella fecha não contenha raiz alguma de $Z_\omega = 0$, e seja B o menor dos valores do módulo de Z_ω, e A o maior dos valores dos módulos de $Z_{\omega+1}, Z_{\omega+2}, \ldots Z_n$.

Se fizermos ao mesmo tempo descrever a u uma circumferencia de raio $r<1$ e de centro b, será r o módulo de $u-b$, isto é, de k.

Então teremos (n.º 9 — 1.º):

$$|P|<\frac{A}{B}\left(r+r^2+\ldots+r^{n-\omega}\right)=\frac{A}{B}\cdot\frac{r(1-r^{n-\omega})}{1-r},$$

ou *à fortiori*

$$|P| < \frac{A}{B} \cdot \frac{r}{1-r}.$$

Como r (que já tem de ser menor do que a unidade) é ainda em parte arbitrario, podemos dar-lhe um valor tal que seja $|P| < \frac{1}{2}$, para o que basta fazer

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{r}{1-r} \overline{\overline{<}} \frac{1}{2},$$

ou

$$r \overline{\overline{<}} \frac{B}{B+2A}.$$

Por outra parte as funcções de z : Z_0, Z_1, ... $Z_{\omega-1}$ annullam-se no ponto a e são continuas, logo podemos tomar para raio da circumferencia descripta por z um valor ρ' menor do que ρ, tal que o valor maximo C dos módulos d'estas quantidades seja tão pequeno como quizermos; de modo que podemos fazer

$$\frac{C}{B}\left(\frac{1}{r^{\omega}} + \frac{1}{r^{\omega-1}} + \ldots + \frac{1}{r}\right) < \frac{1}{2};$$

mas é evidentemente

$$|Q| < \frac{C}{B}\left(\frac{1}{r^{\omega}} + \frac{1}{r^{\omega-1}} + \ldots + \frac{1}{r}\right),$$

logo virá

$$|Q| < \frac{1}{2}.$$

Portanto é sempre possivel dar aos módulos de z e k valores taes que seja

$$|P+Q| < 1.$$

Voltemos á funcção

$$f(a+h,\ b+k) = Z_\omega k^\omega (1+P+Q).$$

Quando u volta á primitiva posição depois de descrever a circumferencia do raio r em roda do ponto b, o argumento θ de $k=u-b=r$ (cos $\theta + i$ sen θ) augmenta (n.º 23) de 2π, logo o argumento de $k^\omega = r^\omega$ (cos $\omega\theta + i$ sen $\omega\theta$) augmenta de $2\omega\pi$. Z_ω é só funcção de z e porisso não varia. Finalmente $1+P+Q$ volta ao valor primitivo; com effeito, temos

$$1+P+Q = 1+M(\cos\iota + i \operatorname{sen}\iota),$$

chamando M o módulo e ι o argumento de $P+Q$, e portanto o argumento α de $1+P+Q$ é dado pela formula

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{M \operatorname{sen}\iota}{M\cos\iota + 1};$$

esta expressão mostra que α não póde passar além de $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$, visto que tang α não póde ser infinito por M ser menor do que a unidade.

A funcção $f(a+h,\ b+k)$ augmentará pois de $2\omega\pi$ quando u der uma volta em roda de b, e portanto (n.º 23) ha ω valores de k contidos n'um circulo do raio r, descripto de b como centro, que satisfazem á equação $f(a+h,\ b+k) = 0$, e como o raio d'este circulo se póde tornar tão pequeno quanto se quizer, conclue-se que são continuos na visinhança a os ω ramos de u que ahi se encontram.

Se dermos a z valores taes que seja $a_0=0$, ha valores de u correspondentes que são infinitos. Por outra parte os valores correspondentes de $u'=\frac{1}{u}$ são nullos, e como os valores de u' são dados pela equação algebrica:

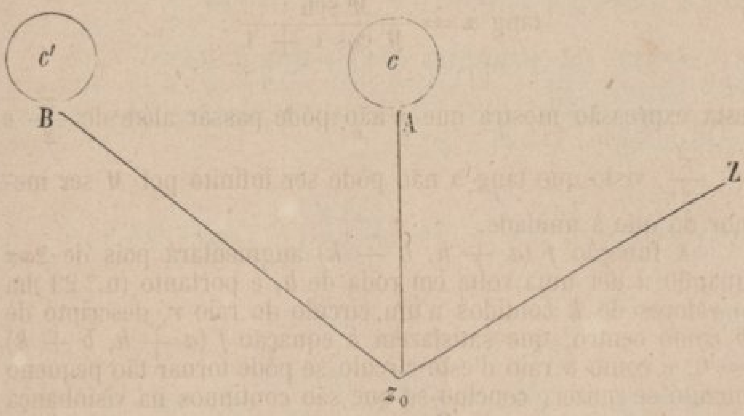
$$a_n u'^n + a_{n-1} u'^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

aquelles valores são continuos a partir de zero. Logo os valores de z que satisfazem á equação $a_0 = 0$ são *pólos*.

De tudo o que temos dito se conclue que as funcções algebricas não tem outros pontos singulares além dos *pólos* e dos *pontos criticos*.

IV — Vimos já que o caminho seguido pela variavel z tem influencia sobre o valor de cada ramo da funcção algebrica u (24). Vimos tambem que uma porção qualquer do caminho seguido por z póde ser substituida por outro quando na área comprehendida entre os dous caminhos não existe ponto singular, sem que por esta substituição se altere este valor. E' facil de vêr que qualquer que seja o caminho que z tenha a seguir para ir de z_0 a Z, póde elle sempre ser substituido pelo que resulta de seguir a recta z_0A, dar (fig. 8.ª) um numero determinado n de voltas á roda do ponto sin-

Fig. 8.ª



gular c, e voltar pelo mesmo caminho a z_0; seguir depois z_0B dar um numero determinado n' de voltas á roda do ponto singular c' e voltar pelo mesmo caminho Bz_0 a z_0; ir do mesmo modo dar um numero determinado de voltas á roda dos outros pontos criticos voltando sempre a z_0; finalmente seguir de z_0 a Z. Estamos pois reduzidos a estudar a influencia d'este caminho sobre o valor de u, o que vamos fazer em dous casos particulares.

Exemplo 1.º — A funcção $u^2 = (z - c)(z - c')$

ou

$$u = \pm\sqrt{(z-c)(z-c')},$$

que tem os pontos criticos c e c', dá

$$u = \pm\sqrt{\rho\rho'}\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\theta') + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\theta+\theta')],$$

chamando ρ e ρ' os módulos e θ e θ' os argumentos $z - c$ e $z - c'$.

Se o ponto z parte de z_0, onde os argumentos são θ_0 e θ'_0 e volta a z_0 depois de ter dado n voltas em roda de c, o angulo θ_0 augmenta de $2n\pi$. Do mesmo modo, se o ponto dá n' voltas em roda de c', o angulo θ'_0 augmenta de $2n'\pi$. Teremos pois

$$u = \pm\sqrt{\rho\rho'}\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta_0 + \theta'_0 + 2n\pi + 2n'\pi)$$
$$+ i \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\theta_0 + \theta'_0 + 2n\pi + 2n'\pi)].$$

Em seguida z_0 dirige-se para Z e então θ_0 e θ'_0 variam e tornam-se em θ e θ', o que dá

$$u = \pm\sqrt{\rho\rho'}\left[\cos\left((n+n')\pi + \frac{\theta+\theta'}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left((n+n')\pi + \frac{\theta+\theta'}{2}\right)\right]$$

ou

$$u = \pm(-1)^{n+n'}\sqrt{\rho\rho'}\left[\cos\frac{\theta+\theta'}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta+\theta'}{2}\right].$$

Este resultado resolve a questão, isto é, dá os valores de u correspondentes a cada caminho seguido por z.

Exemplo 2.º — A funcção

$$u = \sqrt[3]{(z-c)(z-c')(z-c'')}$$

tem tres ramos. Chamando pois ρ, ρ' e ρ'' os módulos e θ, θ' e θ'' os argumentos de $z - c$, $z - c'$ e $z - c''$, vem (n.° 9 — 4.°)

$$u = \sqrt[3]{\rho\rho'\rho''}\,[\cos \tfrac{1}{3}(\theta + \theta' + \theta'' + 2k\pi) + i \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}(\theta + \theta' + \theta'' + 2k\pi)].$$

O primeiro ramo da funcção proposta corresponde a $k = 0$ o segundo a $k = 1$ e o terceiro a $k = 2$.

Raciocinando como no caso precedente, vê-se que o valor de qualquer dos ramos da funcção u correspondente a um valor determinado Z de z e a um caminho determinado seguido por z na passagem de z_0 para Z, é dado pela formula seguinte:

$$u = \sqrt[3]{\rho\rho'\rho''}\,[\cos \tfrac{1}{3}(\theta_1 + \theta'_1 + \theta''_1 + 2k\pi + 2n\pi + 2n'\pi + 2n''\pi)$$
$$+ i \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}(\theta_1 + \theta'_1 + \theta''_1 + 2k\pi + 2n\pi + 2n'\pi + 2n''\pi)],$$

representando por θ_1, θ'_1 e θ''_1 os argumentos que teriam $Z - c$, $Z - c'$ e $Z - c''$ se z fosse directamente de z_0 para Z pela linha recta z_0Z.

Nada mais accrescentaremos a respeito das funcções algebricas. Para um estudo mais profundo d'estas funcções podem cousultar-se os trabalhos notaveis de Puiseux, Riemann, Klein, etc.

III

Funcções exponenciaes, logarithmicas, e circulares

29. — As *funcções exponenciaes* e *logarithmicas* são conhecidas desde os Elementos de Algebra; as *funcções circulares* são conhecidas desde a Trigonometria. São as unicas transcendentes estudadas nos Elementos, e o seu estudo é muito importante por causa da frequencia com que ellas apparecem nas questões a que se applica a Mathematica, e porque serve de preparação para o estudo das trancendentes mais geraes de que se occupa a Analyse.

30. — Sabe-se que, no caso das variaveis reaes, a propriedade fundamental da exponencial é expressa pela igualdade:

$$a^x \cdot a^{x'} = a^{x+x'},$$

que tem logar qualquer que seja a *base* real ou imaginaria a.

A base que se emprega quasi sempre nas formulas d'Analyse é o numero e definido no n.º 19.

A definição de exponencial e^z, no caso das variaveis imaginarias $z = x + iy$, deve ser tal que se recaia na exponencial de expoente real quando é $y = 0$, e que tenha logar o principio fundamental precedente. A estas condições satisfaz e^{x+iy} quando se define pela igualdade, devida a Euler,

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Com effeito, temos, pondo $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$,

$$e^z \cdot e^{z'} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \cdot e^{x'} (\cos y' + i \operatorname{sen} y')$$

$$= e^{x+x'} [\cos (y + y') + i \operatorname{sen} (y + y')].$$

e portanto

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z + z'} .$$

I — Da equação de definição decorre logo uma propriedade importante da exponencial do expoente imaginario, a saber: a sua *periodicidade*. Com effeito, por ser

$$e^{z + 2ki\pi} = e^x [\cos (y + 2k\pi) + i \operatorname{sen} (y + 2k\pi)]$$
$$= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z ,$$

conclue-se que a exponencial toma o mesmo valor cada vez que z augmenta de $2i\pi$.

Do mesmo modo se vê que a exponencial toma o mesmo valor com signal contrario cada vez que z augmenta de $i\pi$.

II. — Do que precede resulta tambem que todo o imaginario se póde exprimir debaixo da fórma de exponencial. Com effeito, temos

$$x + iy = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \rho\, e^{i\theta}.$$

Temos assim tres fórmas que se póde dar ao imaginario, cada uma das quaes póde ser preferivel em sua questão.

III — Por ser

$$e^{x + h} - e^x = e^x (e^h - 1),$$

e por e^h se approximar indefinidamente da unidade á medida que h se approxima de zero, conclue-se que a funcção e^x é continua, qualquer que seja o valor da variavel real x.

Por outra parte as funcções sen y e cos y são continuas, como se conclue immediatamente das suas representações geometricas.

Logo a funcção

$$e^z = e^{x + iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

é continua (n.° 22, 1.° e 2.°) qualquer que seja x e y.

Temos pois a proposição importante:

A funcção exponencial é uniforme e continua qualquer que seja z.

IV — O estudo da funcção $y = a^x$, onde a é uma constante real ou imaginaria, reduz-se ao estudo da funcção precedente. Com effeito, chamando la o logarithmo de a na base e, que se chama tambem *logarithmo neperiano* de a, teremos $a = e^{la}$. Vamos vêr que la tem um numero infinito de valores, mas basta tomar um d'elles visto que o primeiro membro da relação precedente tem um valor unico.

31. — Consideremos agora a funcção inversa da exponencial, isto é a funcção u ligada com a exponencial z pela equação

$$z = e^u.$$

Como se sabe u é o logarithmo de z na base e.

Suppondo

$$z = x + iy = \rho\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega),\; u = \alpha + i\beta$$

temos a equação

$$\rho\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega) = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}\,(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta),$$

que dá

$$\rho \cos\omega = e^{\alpha} \cos\beta,\; \rho \operatorname{sen}\omega = e^{\alpha} \operatorname{sen}\beta,$$

d'onde se tira, por serem α e β reaes,

$$e^{2\alpha} = \rho^2,\; \cos\omega = \cos\beta,\; \operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen}\beta,$$

ou

$$\alpha = \log\rho,\; \beta = \omega + 2k\pi,$$

onde é $\omega < 2\pi$, e k um inteiro positivo ou negativo qualquer.

Temos pois

$$(a) \ldots\ldots\quad u = \log((z)) = \log\rho + i\,(\omega + 2k\pi),$$

empregando, como Cauchy, o signal $\log((N))$ para designar todos os logarithmos de N e o signal $\log N$ para designar o logarithmo real.

I — Se fôr $\omega = 0$, z é real, e vê-se pela formula precedente que o logarithmo de z tem um valor real correspondente a $k = 0$, e um numero infinito d'elles imaginarios correspondentes aos outros valores de k. Em todos os outros casos o logarithmo de z tem um numero infinito de valores imaginarios, e não tem valor real. Em resumo a *funcção logarithmica é uma funcção multiforme de numero infinito de ramos.*

II — Por ser ρ uma quantidade positiva, a igualdade

$$\log(\rho + h) - \log \rho = \log\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)$$

mostra que quando h tende para zero, $\log\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)$ tende tambem para zero, visto que o logarithmo real decresce com o numero e o logarithmo da unidade é zero. Logo o logarithmo real de ρ é uma funcção continua de ρ, excepto quando é $\rho = 0$, pois que $log\ 0 = \infty$.

Em virtude d'isto, e do principio 1.º do n.º 22 a formula (a) mostra que o *logarithmo de z é uma funcção continua de z, excepto no ponto $z = 0$.*

***III** — Dando a k diversos valores em (a) formam-se outros tantos ramos da funcção logarithmica de z, que podem ser representados geometricamente por outras tantas porções de curva. Não ha valor algum de z para o qual dous ramos sejam iguaes, pois que viria

$$\log \rho + i(\omega + 2k\pi) = \log \rho + i(\omega + 2k'\pi),$$

ou $k = k'$. Vê-se pois que a *funcção logarithmica não tem pontos criticos.*

Em resumo a *funcção logarithmica é multiforme, continua e tem um unico ponto singular que é $z = 0$.*

***IV** — D'este theorema segue-se que um ramo qualquer da funcção logarithmica que parte de z_0 com o valor

$$\log z_0 = \log \rho_0 + i(\omega_0 + 2k\pi)$$

toma no ponto z_1 sempre o mesmo valor

$$\log z_1 = \log \rho_1 + i(\omega_1 + 2k\pi)$$

qualquer que seja o caminho seguido pela variavel z na passagem de z_0 para z_1 com tanto que todos estes caminhos estejam dentro de um contôrno fechado que não contenha o ponto $z = 0$.

V — Se porém quizermos o valor que toma o mesmo ramo da funcção logarithmica quando z, partindo de z_0, descreve um caminho qualquer para chegar a z_1, é facil de vêr, como no n.º 28, que estes caminhos podem ser sempre substituidos pelo caminho que resulta de seguir a recta $z_0 A$ até um ponto A tão proximo quanto se queira do ponto correspondente a $z = 0$; dar n voltas circulares em roda d'este ponto no sentido directo, e m voltas no sentido retrogado; e seguir depois uma linha recta de z_0 a Z. Cada vez que z dá uma volta em roda do ponto correspondente a $z = 0$, isto é, em roda da origem das coordenadas, o angulo ω augmenta do dobro de π, logo, chamando ω_1 o valor que tomaria ω no ponto z_1 se z seguisse sómente o caminho rectelineo para ir de z_0 a z_1, teremos

$$\log z_1 = \log \rho_1 + i\,(\omega_1 + 2n\pi - 2m\pi + 2k\pi).$$

Esta formula resolve a questão considerada, isto é, dá o valor que toma o ramo da funcção logarithmica, correspondente a um valor determinado de k, no ponto z_1, em funcção do caminho seguido por z na passagem de z_0 para z_1.

Se o ponto z_1 estiver sobre o prolongamento da linha recta que une o ponto z_0 ao ponto correspondente a $z = 0$, a parte rectilinea $z_0\, z_1$ deve ser substituida por duas porções d'esta recta e por meia circumferencia descripta em roda do ponto correspondente a $z = 0$.

VI — Se a base dos logarithmos é a, teremos

$$z = a^u = e^{ula},$$

e portanto passa-se dos logarithmos neperianos para os logarithmos de base a dividindo os primeiros por um dos valores do logarithmo neperiano de a.

31. — As funcções circulares foram estudadas na Trigonometria, onde apparecem como auxiliares para a resolução dos triangulos.

I — As suas propriedades fundamentaes são, no caso dos arcos reaes, as seguintes:

1.ª Sendo a e b dois arcos reaes, temos

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

E' o *theorema de addicção*.

2.ª As funcções circulares são *periodicas*, isto é, tomam o mesmo valor cada vez que o arco augmenta de 2π, e o mesmo valor com signal contrario cada vez que o arco augmenta de π.

II — As formulas do n.º 25:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

dão as funcções circulares expressas por meio de funcções exponenciaes:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

III — Estas relações permittem definir os *senos* e *cosenos* de arcos imaginarios. Representa-se, com effeito, por $\operatorname{sen}(x + iy)$ e $\cos(x + iy)$ as funcções que resultam de substituir nas formulas precedentes x por $x + iy$, a saber:

$$\cos z = \cos(x + iy) = \frac{e^{iz} + e^{i-z}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2}$$

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}.$$

A primeira d'estas formulas dá

$$\cos(z + z') = \frac{e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}}{2} = \frac{e^{iz}\, e^{iz'} + e^{-iz} \cdot e^{-iz'}}{2}$$

$$= \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz'} + e^{-iz'}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz'} - e^{-iz'})}{4}$$

ou

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'.$$

Do mesmo modo a segunda dá

$$\operatorname{sen}(z + z') = \operatorname{sen} z \cos z' + \cos z \operatorname{sen} z'.$$

Vê-se pois que os *senos* e os *cosenos* de arcos imaginarios gozam da propriedade expressa pelo *theorema de addicção.*

IV — Pondo nas formulas precedentes $x = 0$, vem

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2}, \ \text{sen}(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i}.$$

Estas funcções sen (iy) e cos (iy) têem o nome de *seno hyperbolico* e de *coseno hyperbolico* de y. Temos aqui a origem da theoria das *funcções hyperbolicas*, devida a Riccati, que é objecto de tractados especiaes.

V — Por ser a exponencial uma funcção uniforme e continua qualquer que seja z, e por serem sen z e cos z sommas d'exponenciaes podemos enunciar o theorema seguinte:

As funcções sen z e cos z são uniformes e continuas qualquer que seja z.

VI — A tangente de z, quer z seja real, quer seja imaginaria, é definida pela relação

$$\text{tang}\, z = \frac{\text{sen}\, z}{\cos z}.$$

Esta funcção é uniforme e é continua (n.º 22 — 3.º) qualquer que seja z, excepto nos pontos que satisfazem á equação

$$\cos z = e^{iz} + e^{-iz} = 0,$$

ou

$$e^{-y}(\cos x + i\ \text{sen}\, x) + e^y(\cos x - i\ \text{sen}\, x) = 0,$$

ou

$$\cos x\,(e^{-y} + e^y) + i\ \text{sen}\, x\,(e^{-y} - e^y) = 0.$$

Esta equação, por ser a expressão $e^{-y} + e^y$ sempre positivo, dá $\cos x = 0$, $e^{-y} = e^y$, e portanto

$$y = 0,\ x = \tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \tfrac{5}{2}\pi, \ldots$$

Logo *a tangente é uma funcção uniforme, e é continua qualquer que seja z, excepto nos pontos* $(0, \frac{1}{2}\pi)$ $(0, \frac{3}{2}\pi), \ldots$

SUR TROIS RELATIONS DIFFÉRENTIELLES DONNÉES PAR MR. LIPSCHITZ DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

J. A. MARTINS DA SILVA

Le cahier de 25 décembre 1833 des *Comptes rendus des séances de l'Académie de Sciences de Paris* contient à la page 1411 une Note de Mr. Lipschitz, où l'on trouve trois relations différentielles intéressantes pour la théorie des fonctions elliptiques.

En reflèchissant sur la formule des *Fundamenta nova*, qui est la source de la détermination des représentations d'un nombre quelconque par une somme de quatre carrés, l'illustre analyste remarque que cette formule, par une légère modification conduit à une équation différentielle qui se rapporte aux trois fonctions (*):

$$\theta(o) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2}; \quad \theta_2(o) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2};$$

$$\theta_3(o) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}.$$

Il remarque aussi que, dans la formule de Jacobi:

$$\theta^4_3(o) = 1 + 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m\,.\,q^m}{1+(-1)^m\,.\,q^m},$$

(*) J'emploierai dans ce qui suit les notations de MM. Briot et Bouquet.

on peut réunir toutes les fonctions du second membre, qui contiennent les puissances de q, dont les exposants sont les produits de la multiplication d'un nombre impar par une puissance du nombre 2; en employant ensuite les valeurs de $\theta(o)$ et $\theta_2(o)$ exprimées dans le produit des facteurs binomes $(1-q^m)$, et l'équation $\theta_0^4(0)+\theta^4_2(0)-\theta^4_3(0)=0$, Mr. Lipschitz obtient les trois relations différentielles sous la forme:

$$\left.\begin{aligned}
\theta^4_0(0) &= 4\frac{d}{d\lg.q}\lg.\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}=\frac{d\lg.K^2}{d\lg.q}\dots\ (\mathrm{I})\\
\theta^4_2(0) &= 4\frac{d}{d\lg.q}\lg.\frac{\theta_3(0)}{\theta(0)}=\frac{d\lg.\frac{1}{K'^2}}{d\lg.q}\dots\ (\mathrm{II})\\
\theta^4_3(0) &= -4\frac{d}{d\lg.q}\lg.\frac{\theta(0)}{\theta_2(0)}=\frac{d\lg.\frac{K^2}{K'^2}}{d\lg.q}\dots\ (\mathrm{III})
\end{aligned}\right\}\dots\dots(a)$$

Mr. Hermite a fait voir que ces équations remarquables résultent encore de la formule fondamentale de Jacobi

$$G(z)=\frac{1}{K^2}\left[Hz-\frac{d}{dz}\lg.\theta(z)\right],\quad H=\frac{\theta''(0)}{\theta(0)};\dots\dots(b)$$

ce grand géomètre donne en effet les formules

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{J}{K}+\frac{4}{\theta^4_3(0)}\cdot\frac{d}{d\lg.q}\lg.\theta\ (0);\\
K^2 &= \frac{J}{K}+\frac{4}{\theta^4_3(0)}\cdot\frac{d}{d\lg.q}\lg.\theta_3(0);\\
1 &= \frac{J}{K}+\frac{4}{\theta^4_3(0)}\cdot\frac{d}{d\lg.q}\lg.\theta_2(0).
\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(c)$$

pour trouver les relations cherchées.

Je me propose de montrer comment une relation différentielle très-simples conduit rapidement aux formules de Mr. Lipschitz, sans avoir besoin des considérations de cet auteur, pas même des formules (c).

Considérons les intégrales définies

$$\Omega = \int \frac{dx}{\Delta x}; \quad \Omega_1 = \int \frac{x^2\,dx}{\Delta x}; \quad \Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)};$$

relatives à un même cycle partant de l'origine et y revenant; ces valeurs sont deux périodes correspondantes quelconques des intégrales elliptiques de première et de seconde espèces; en dérivant ces intégrales, on trouve

$$\frac{d}{dK}\Omega = K\int \frac{x^2\,dx}{(1-K^2x^2)\,\Delta x}; \quad \frac{d}{dK}\Omega_1 = K\int \frac{x^4\,dx}{(1-K^2x^2)\,\Delta x}.$$

D'après l'égalité

$$\frac{d}{dx}\,\frac{x(1-x^2)}{\Delta x} = \frac{1-x^2}{\Delta x} - \frac{K'^2x^2}{(1-K^2x^2)\,\Delta x}$$

on a par l'intégration

$$\frac{d}{dK}\Omega = \frac{K}{K'^2}(\Omega - \Omega_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

On obtient aussi

$$\frac{d}{dK}\Omega - K^2\frac{d}{dK}\Omega_1 = K\Omega_1$$

alors

$$\frac{d}{dK}\Omega_1 = \frac{1}{KK'^2}\left[\Omega - (2-K^2)\,\Omega_1\right] \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

*

Il en résulte les équations différentielles du second ordre

$$\frac{d}{dK}\left(KK'^2\frac{d}{dK}\Omega\right)=K\Omega;\quad \frac{d}{dK}\left(K^3K'^2\frac{d}{dK}\Omega_1\right)=3K^3\Omega_1 \ldots (f)$$

auxquelles satisfont séparément les périodes Ω et Ω_1.

Considérons maintenant les cycles qui se rapportent à un couple de périodes elliptiques 2ω, ω' de l'intégrale de première espèce. Alors

$$\frac{d}{dK}\omega=\frac{K}{K'^2}(\omega-\omega_1);\quad \frac{d}{dK}\omega'=\frac{K}{K'^2}(\omega'-\omega'_1);\ \ldots\ldots (g)$$

il résulte d'ailleurs que les premières périodes 2ω, 2ω, et les sécondes périodes ω', ω', satisfont aux équations différentielles (d), (e) et (f).

Cela étant, les équations (g) donnent, en vertu des accroissements constants

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\frac{1}{K^2}H\omega\\ \omega'_1&=\frac{1}{K^2}\left[H+\frac{2\pi i}{\omega.\omega'}\right]\omega'\end{aligned}\right\}$$

que le second membre de la formule (b) éprouve, quand z augmente de ω ou de ω', les deux équations différentielles du premier ordre

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dK}\omega&=\frac{1}{KK'^2}[K^2-H]\omega\\ \frac{d}{dK}\omega'&=\frac{1}{KK'^2}\left[K^2-H-\frac{2\pi i}{\omega\omega'}\right]\omega'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (h)$$

aux quelles satisfont ω, ω'.

Des formules (h) on tire

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dK}\,\lg.\,\omega = \frac{1}{KK'^2}\,[K^2 - H]; \\ &\frac{d}{dK}\,\lg.\,q = \pi i.\,\frac{d}{dK}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{2\pi^2}{KK'^2.\,\omega^2}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ (i)$$

on en déduit

$$\frac{d\,\lg.\,\omega}{d\,\lg.\,q} = \frac{KK'^2}{2\pi^2}\,\omega\,\frac{d\omega}{dK} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (j)$$

La relation différentielle (j) conduit en effet aux relations cherchées.

Remarquons que l'emploie du développement

$$\left.\begin{aligned} &\omega = K^2 \times \varphi(K) \\ &\varphi(K) = \pi\left[\frac{1}{K^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.K^2 + \ldots\right] \end{aligned}\right\}$$

dans l'équation (j), donne

$$\frac{d\,\lg.\,K^2}{d\,\lg.\,q} + \frac{d}{d\,\lg.\,q}\,\lg.\,\varphi(K) = \frac{K^3K'^2}{2\pi^2}\,\varphi(K)\left[2K\,\varphi(K) + \right.$$

$$\left. + K^2\,\frac{d}{dK}\,\varphi(K)\right]$$

ou bien

$$\frac{d\,\lg.\,K^2}{d\,\lg.\,q} + \frac{d}{d\,\lg.\,q}\,\lg.\,\varphi(K) = \frac{K^4K'^2}{\pi^2}\,[\varphi(K)]^2 +$$

$$+ \frac{K^5.\,K'^2}{2\pi^2}\,\varphi(K)\,\frac{d}{dK}\,\varphi(K).$$

Soit maintenant le multiplicateur égal à l'unité, et

$$\theta(0)=\sqrt{\frac{\omega K'}{\pi}},\quad \theta_2(0)=\sqrt{\frac{\omega K}{\pi}},\quad \theta_3(0)=\sqrt{\frac{\omega}{\pi}};$$

on tire d'abord

$$\frac{K^4 . K'^2}{\pi^2} . [\varphi(K)]^2=\theta^4(0);$$

de l'autre côté, il résulte

$$\frac{d}{d\lg. q}\lg.\varphi(K)=\frac{K^5 . K'^2}{2\pi^2} . [\varphi(K)]^2 . \frac{d}{dK}\lg.\varphi(K)=$$

$$=\frac{K^5 . K'^2}{2\pi^2}\varphi(K)\frac{d}{dK}\varphi(K).$$

En conséquence, la formule première (a) est donc démontrée. Si l'on pose

$$\omega=\frac{\psi(K)}{1-K^2}=\frac{1}{K'^2}\psi(K)$$

on obtient tout de même

$$\frac{d}{d\lg. q}\lg.\frac{1}{K'^2}+\frac{d}{d\lg. q}\lg.\psi(K)=\frac{K}{2\pi^2}\psi(K)\left[\frac{2K}{K'^4}\psi(K)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{K'^2}\frac{d}{dK}\psi(K)\right]$$

alors

$$\left.\begin{aligned}&\frac{K^2}{\pi^2 K'^4}[\psi(K)]^2=\theta^4{}_2(0);\\&\frac{d}{d\lg. q}\lg.\psi(K)=\frac{K}{2\pi^2 . K'^2}[\varphi(K)]^2\frac{d}{dK}\lg.\psi(K);\end{aligned}\right\}$$

on en conclut la formule seconde (a).

Soit encore

$$\omega = \frac{K^2}{K'^2} \chi(K);$$

on déduit

$$\frac{d}{d \lg. q} \lg. \frac{K^2}{K'^2} + \frac{d}{d \lg. q} \lg. \chi(K) = \frac{K^3}{2\pi^2} \cdot \chi(K) \times$$

$$\times \left[2 \frac{K}{K'^4} \chi(K) + \frac{K^2}{K'^2} \frac{d}{dK} \chi(K) \right]$$

ou bien

$$\left. \begin{aligned} & \frac{K^4}{\pi^2 . K'^4} [\chi(K)]^2 = \theta^4{}_3(0) \\ & \frac{d}{d \lg. q} \lg. \chi(K) = \frac{K^5}{2K'^2 \pi^2} [\chi(K)]^2 \frac{d}{dK} \lg. \chi(K). \end{aligned} \right\}$$

On obtient ainsi la formule troisième (a) par une déduction indépendante des deux autres formules (a) et de l'équation

$$\theta^4{}_3(0) = \theta^4{}_2(0) + \theta^4(0).$$

Je remarque enfin que la formule (j) donne des autres relations. Soit

$$\omega = \Phi(K) . \lg. K^2;$$

il resulte

$$\left. \begin{aligned} & \frac{K'^2 [\Phi(K)]^2 (\lg. K^2)^2}{\pi^2} = \theta^4(0) \\ & \frac{d \lg. \Phi(K)}{d \lg. q} = \frac{K K'^2}{2\pi^2} (\lg. K^2)^2 . \Phi(K) \frac{d}{dK} \Phi(K). \end{aligned} \right\}$$

Soit encore

$$\omega = \Psi(K) . \lg. \frac{1}{K'^2};$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{K^2\,[\Psi(K)]^2\left(\lg.\frac{1}{K'^2}\right)^2}{\pi^2}=\theta^4{}_2(0)\\[2ex]
&\frac{d\lg.\Psi(K)}{d\lg.q}=\frac{KK'^2}{2\pi^2}\left(\lg.\frac{1}{K'^2}\right)^2\Psi(K)\frac{d}{dK}\Psi(K).
\end{aligned}\right\}$$

Considérons maintenant

$$\omega=\chi(K)\,.\,\lg.\frac{K^2}{K'^2};$$

il résulte

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{[\chi(K)]^2\,.\left(\lg.\frac{K^2}{K'^2}\right)^2}{\pi^2}=\theta^4{}_3(0)\\[2ex]
&\frac{d\lg.\chi(K)}{d\lg.q}=\frac{KK'^2}{2\pi^2}\left(\lg.\frac{K^2}{K'^2}\right)^2.\chi(K)\frac{d}{dK}\chi(K).
\end{aligned}\right\}$$

On obtient donc

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\lg.\lg.K^2}{d\lg.q}=\frac{1}{\lg.K^2}\,.\,\theta^4(0)\ \ldots\ldots\ (\mathrm{IV})\\[2ex]
&\frac{d\lg.\lg.\frac{1}{K'^2}}{d\lg.q}=\frac{1}{\lg.\frac{1}{K'^2}}\,.\,\theta^4{}_2(0)\ \ldots\ldots\ (\mathrm{V})\\[2ex]
&\frac{d\lg.\lg.\frac{K^2}{K'^2}}{d\lg.q}=\frac{1}{\lg.\frac{K^2}{K'^2}}\,.\,\theta^4{}_3(0)\ \ldots\ldots\ (\mathrm{VI})
\end{aligned}\right\}(k)$$

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DA THEORIA DAS EQUAÇÕES ALGEBRICAS

(Fragmento d'umas lições)

POR

L. WOODHOUSE
(Professor na Escola Polytechnica do Porto)

Seja

$$F(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0$$

em que

$$A_j = \rho_j (\cos \omega_j + i \operatorname{sen} \omega_j)$$

e

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

ou

$$z = x + iy;$$

teremos tambem

$$F(z) = \sum_{j=0}^{j=n} \rho_j r^j [\cos(\omega_j + j\theta) + i \operatorname{sen}(\omega_j + j\theta)].$$

Existirá um valor de r pelo menos e outro de θ para os quaes mod. $F(z)$ será zero.

1. Primeiramente tomemos, a partir da origem das coordenadas O, as rectas OP_0, P_0P_1, ... $P_{n-1}P_n$, cujos comprimentos e posições correspondem aos modulos ρ_0, $\rho_1 r$, ... $\rho_n r^n$ e aos argumentos ω_0, $\omega_1 + \theta$, ... $\omega_n + n\theta$, contados, segundo o modo ordinario, desde um eixo fixo Ox e sempre no mesmo sentido. D'este modo teremos construido um polygono $OP_0P_1 \ldots P_n$, em geral aberto, no qual, tirando OP_n, esta recta representará o modulo de $F(z)$, e o angulo P_nOx, contado no sentido dos precedentes, o seu argumento.

Designemos por M o ponto do plano cujas coordenadas são x e y.

2. Suppondo r constante, mas qualquer, se o ponto M, cujas coordenadas são x e y, descrever um circulo á volta de O, qualquer dos pontos P descreverá uma curva fechada; isto é, P_1 descreverá um circulo á volta de P_0, em quanto P_2 descreverá dois circulos á volta de P_1, etc., descrevendo finalmente P_n n circulos á volta de P_{n-1} e girando todas as rectas $P_j P_{j-1}$ no mesmo sentido. Cada um dos pontos P retomará a posição primitiva quando se tiver effectuado o augmento 2π do angulo θ. Designando por Q_1, Q_2, ... Q_n cada uma das curvas, qualquer d'ellas Q_k será pois traçada por um ponto P_k, que descreve k circulos de raio $P_{k-1}P_k$ á volta de outro ponto P_{k-1}, que ao mesmo tempo percorre completamente a curva Q_{k-1}. Em quanto r fôr constante a cada valor de θ corresponde um ponto em cada uma das curvas Q, a posição das quaes será fixa; mas se a r formos attribuindo differentes valores, e para qualquer d'elles fizermos variar θ até $\theta+2\pi$, cada uma das curvas Q irá tambem occupando sobre o plano posições differentes.

Cada curva Q_k estará toda dentro de um circulo C_k cujo centro é O e o raio $\sum_{j=0}^{j=k} \rho_j r^j$, porque esta somma exprime a maxima distancia a que os pontos de Q_k poderão estar de O.

3. Procuremos agora determinar r de modo que $P_{n-1}P_n$ seja maior do que o diametro do circulo C_{n-1} dentro do qual está a curva Q_{n-1}. Devemos satisfazer à desegualdade

$$\rho_n r^n - 2 \sum_{j=0}^{j=n-1} \rho_j r^j > 0,$$

ou, designando R o maior dos modulos ρ_0, ... ρ_n,

$$\rho_n r^n - 2\mathrm{R}\frac{r^n-1}{r-1} > 0.$$

Faça-se $2\mathrm{R} = \rho_n(r'-1)$, a desegualdade precedente transforma-se em

$$\rho_n r^n - \rho_n \frac{r'-1}{r-1}(r^n-1) > 0,$$

que é evidentemente satisfeita por $r = r'$, sendo

$$r' = 2\frac{R}{\rho^n} + 1.$$

Seja pois $r = r'$.

Descrevam-se os circulos C_{n-1} e C_n, dentro do primeiro dos quaes existirá a curva Q_{n-1} e Q_n dentro do segundo (*). Consideremos $P_{n-1}P_n$ em uma posição qualquer. O ponto P_{n-1} não poderá sahir de C_{n-1}, nem P_n entrar n'este circulo, e, emquanto P_{n-1} descreve a curva fechada Q_{n-1}, a recta $P_{n-1}P_n$ descreve n circulos, de modo que, se as tangentes DT e D'T' do circulo C_{n-1} se conservarem constantemente parallelas a $P_{n-1}P_n$, o ponto P_n não poderá sahir da figura limitada pelos arcos TT' e DD' e pelas rectas DT e D'T', a qual se moverá sempre no mesmo sentido entre os circulos C_{n-1} e C_n, voltando á posição inicial todas as vezes que $P_{n-1}P_n$ completar um numero qualquer de voltas. Dada a ultima volta, P_{n-1} e P_n vêm tomar as posições iniciaes, fechando-se assim a curva Q_n e de modo tal que encerrará completamente o circulo C_{n-1} e portanto o ponto O. Não será pois possivel seguir caminho algum desde um ponto interior a C_{n-1} até outro exterior a C_n sem cortar uma vez pelo menos a curva Q_n.

4. Sabe-se que é facil determinar um valor r'' de r sufficientemente pequeno para que a desegualdade

$$\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j r^j < \rho_0$$

seja satisfeita.

(*) Com as seguintes indicações será facil construir a figura a que nos referimos. De O como centro descrevam-se dois circulos C_{n-1} e C_n, sendo este ultimo exterior. Dentro de C_{n-1} tome-se um ponto P_{n-1}. Dentro de C_n, mas fóra de C_{n-1}, tome-se outro ponto P_n. Tire-se a recta $P_{n-1}P_n$ a qual deverá ser maior que o diametro de C_{n-1}. Tirem-se em seguida duas tangentes a C_{n-1} parallelas a $P_{n-1}P_n$. Designem-se por D e D' os pontos de tangencia, e por T e T' os pontos em que estas tangentes prolongadas no sentido $P_{n-1}P_n$ vão cortar o circulo C_n.

Com effeito, sendo R o maior dos modulos $\rho_1, \ldots \rho_n$, temos

$$\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j r^j < R\,(r^n + \ldots + r)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j r^j < R\,\frac{r^{n+1} - r}{r-1}$$

ou ainda, sendo $r < 1$,

$$\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j r^j < R\,\frac{r}{1-r}.$$

Fazendo pois

$$\rho_0 = R\,\frac{r''}{1-r''}$$

será

$$r'' = \frac{\rho_0}{\rho_0 + R}.$$

Ora por ser a somma $\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j r^j$ a expressão da maxima distancia a que os pontos de Q_n poderão estar de P_0, segue-se que, se tomarmos $r \overline{\overline{<}} r''$, a curva Q_n estará completamente dentro de um circulo cujo centro é P_0 e cujo raio é inferior a ρ_0.

D'este modo o ponto O será exterior a Q_n.

5. O modulo da funcção

$$F(z) = X + iY,$$

em que

$$X = \sum_{j=0}^{j=n} \rho_j r^j \cos(\omega_j + j\theta), \qquad Y = \sum_{j=0}^{j=n} \rho_j r^j \operatorname{sen}(\omega_j + j\theta),$$

e θ é qualquer, será uma funcção contínua de r, por serem X e Y funcções contínuas de r; OP_n varía pois continuamente com r qualquer que seja θ.

Se para qualquer valor dado do argumento θ, entre dois valores de r, não se annullar X nem Y, as funcções $\frac{X}{Y}$ e $\frac{Y}{X}$ que representam a tangente e a cotangente de arg. F (z) serão ambas contínuas no intervallo.

Se entre dois valores de r se annullar X ou Y para um ou mais valores de r, uma das funcções $\frac{X}{Y}$ ou $\frac{Y}{X}$ torna-se infinita no intervallo, mas a sua inversa será contínua e arg. F (z), representada pelo angulo $P_n Ox$, variará ainda no intervallo continuamente com r.

Se X e Y se annullam simultaneamente para differentes valores de r no intervallo considerado, então as funcções $\frac{X}{Y}$ e $\frac{Y}{X}$ tornam-se indeterminadas; mas n'este caso será zero o modulo de F (z) tantas vezes quantos os valores de r que tomarem X e Y simultaneamente nullos.

6. Supponhamos agora que r varía continuamente desde $r=r'$ até $r=r''$. A curva Q_n deforma-se conservando-se comtudo fechado, o que é uma consequencia derivada do seu modo de formação. Para $r=r'$ o ponto O será interior á curva Q_n, para $r=r''$ o mesmo ponto será exterior á curva.

Se quizermos admittir que no intervallo de r' para r'' as funcções X e Y se annullam simultaneamente para certos valores de r combinados com valores de θ comprehendidos entre 0 e 2π, admittiremos como consequencia que mod. F (z) se annulla tambem o que precisamente se deseja provar.

Mas se X e Y não se annullam simultaneamente quando r decresce continuamente desde $r=r'$, ou pelo menos em quanto isto não acontece, a curva fechada Q_n deforma-se continuamente, porque os modulos e argumentos de qualquer dos seus pontos serão funcções contínuas de r, e o ponto O para $r=r'$ interior á curva tende a tornar-se exterior, o que não poderá fazer sem cortar a curva uma vez pelo menos em um ponto correspondente a um certo valor de θ comprehendido entre 0 e 2π.

Teremos pois necessariamente

$$\text{mod. } F(z)=0$$

uma vez pelo menos, sendo o argumento de z comprehendido entre 0 e 2π e o seu modulo entre r' e r''.

7. Os valores de z, reaes ou imaginarios, que satisfazem a equação

$$F(z)=0,$$

isto é, as suas raizes, serão pois representados por pontos sobre a porção do plano comprehendida entre dois circulos descriptos de O como centro, e cujos raios r' e r'' determinarão assim dois limites, um superior outro inferior, dos modulos das raizes.

DÉMONSTRATION NOUVELLE DES THÉORÈMES DE PASCAL E DE BRIANCHON

PAR

M. H. Le Pont

Soient dans un plan les six sommets d'un hexagone 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prenons pour triangle de référence le triangle de trois sommets 1, 3, 5 par exemple, le côté $x=0$ étant opposé au sommet 1, le côté $y=0$ au sommet 3, le côté $z=0$ au sommet 5. Les équations des côtés de l'hexagone sont alors, λ, μ ν, l, m, n désignant des constantes:

$$(1,2)\ y+\lambda z=0 \quad (2,3)\ z+\mu x=0 \quad (4,5)\ x+\nu y=0$$

$$(6,1)\ y+lz=0 \quad (3,4)\ z+mx=0 \quad (5,6)\ x+ny=0;$$

les coordonnées des sommets:

$$(1)\ y=z=0 \qquad (3)\ z=x=0 \qquad (5)\ x=y=0$$

$$(2)\ \lambda\mu x=y=-\lambda z \quad (4)\ -mx=m\nu y=z \quad (6)\ x=-ny=lnz;$$

les équations des diagonales (1, 4), (2, 5), (3, 6):

$$(1,4)\ z=m\nu y \quad (2,5)\ y=\lambda\mu x \quad (3,6)\ x=lnz;$$

les coordonnées des points de concours P, Q, R des côtés opposés (1, 2) et (4, 5), (2, 3) et (5, 6), (3, 4) et (6, 1):

$$(P)\ x=-\nu y=\lambda\nu z \quad (Q)\ -\mu x=\mu ny=z \quad (R)\ lmx=y=-lz.$$

Or, si nous désignons par x, y et z les distances des points de référence à une droite quelconque du plan, c'est-à-dire, si nous posons:

$$(\dot{1}) \equiv x \qquad (\dot{3}) \equiv y \qquad (\dot{5}) \equiv z$$

les distances des sommets 2, 4, 6 et des points P, Q, R à la même droite seront, en négligeant des facteurs numériques:

$$(\dot{2}) \equiv \lambda\mu x + y - \lambda z \quad (\dot{4}) \equiv -mx + m\nu y + z \quad (\dot{6}) \equiv x - ny + lnz$$

$$(\dot{P}) \equiv x - \nu y + \lambda\nu z \quad (\dot{Q}) \equiv -\mu x + \mu ny + z \quad (\dot{R}) \equiv lmx + y - lz$$

Si nous exprimons alors que les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont sur une conique, c'est-à-dire que leurs distances d à une droite quelconque satisfont à l'identité caractéristique de Mr. P. Serret (voir, Paul Serret, *Géométrie de Direction*, p. 131):

$$\Sigma^6{}_1\, \theta_i\, d^2{}_i \equiv 0,$$

où les θ sont des coefficients constants, nous avons l'équation de condition:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda^2\mu^2 & m^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & m^2\nu^2 & n^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^2 & 1 & l^2n^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -m\nu & ln^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2\mu & m & -ln \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\mu & m^2\nu & n \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui se réduit par un calcul facile à celle-ci:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\nu & ln \\ \lambda\mu & 1 & -l \\ -\mu & m\nu & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou en développant:

$$1+\lambda\mu\nu lmn-l\mu\nu+lm\nu+l\mu n+\lambda\mu\nu=0 \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Si nous exprimons maintenant qu'entre les distances des points P, Q, R à une droite absolument quelconque, il existe une relation linéaire et homogène, nous obtenons l'équation de condition:

$$\begin{vmatrix} 1 & lm & -\mu \\ -\nu & 1 & \mu n \\ \lambda\nu & -l & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui s'écrira:

$$1+\lambda\mu\nu lmn-l\mu\nu+lm\nu+l\mu n+\lambda\mu\nu=0.$$

Nous retrouvons ainsi la relation (d). Donc:

Théorème. — Lors qu'il existe entre les carrés des distances de six points d'un plan à une droite quelconque de ce plan une relation linéaire et homogène, il existe aussi une relation linéaire et homogène entre les premières puissances des distances à une droite quelconque des points de concours des côtés opposés de l'hexagone formé par ces six points.

Réciproquement, lors que les distances des points de concours des côtés opposés d'un hexagone plan à une droite quelconque sont liées par une relation linéaire et homogène, les carrés des distances à une droite quelconque des sommets de ces hexagones satisfont aussi à une relation linéaire et homogène.

C'est en cela qui consiste le théorème de Pascal.

Le théorème de Brianchon se démontre de la même manière.

Désignant en effet, par x, y, z les distances d'un point quelconque du plan aux trois droites de référence, les distances de ce poiut aux côtés et aux diagonales de l'hexagone, sont, en négligeant des facteurs constants:

$$\overline{(1,2)} \equiv y+\lambda z \qquad \overline{(2,3)} \equiv z+\mu x \qquad \overline{(4,5)} \equiv x+\nu y$$

$$\overline{(6,1)} \equiv y+lz \qquad \overline{(3,4)} \equiv z+mx \qquad \overline{(5,6)} \equiv x+ny$$

$$\overline{(1,4)} \equiv z-m\nu y \qquad \overline{(2,5)} \equiv y-\lambda\mu x \qquad \overline{(3,6)} \equiv x-lnz$$

Exprimant que les distances D de ce point aux côtés de l'hexagone satisfont à l'identité tangentielle de Mr. P. Serret (voir, loc. cit., p. 74):

$$\Sigma^6{}_1 \Theta_i D^2{}_i = 0$$

nous obtenons l'équation de condition:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & l^2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 & m^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \nu^2 & n^2 \\ \lambda & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & n \end{vmatrix} = 0,$$

qui se réduit à:

$$\lambda\mu\nu lmn - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

D'autre part, si nous exprimons qu'entre les distances d'un point absolument quelconque du plan aux trois diagonales il existe une relation linéaire et homogène, nous obtenons la condition:

$$\begin{vmatrix} 0 & -ln & 1 \\ 1 & 0 & -m\nu \\ -\lambda\mu & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui s'écrira:

$$\lambda\mu\nu lmn - 1 = 0$$

ce que n'est autre que la condition (β). Donc:

Théorème. — Lors qu'il existe entre les carrés des distances d'un point quelconque du plan aux six côtés d'un hexagone une relation linéaire et homogène, il existe aussi une relation linéaire et homogène entre les premières puissances des distances d'un point quelconque du plan aux trois droites qui joignent les sommets opposés de cet hexagone. Réciproquement, lors que les distances d'un point quelconque du plan aux trois droites qui joignent les sommets opposés d'un hexagone sont liées par une relation linéaire et homogène, les carrés des distances d'un point quelconque du plan aux six côtés de cet hexagone satisfont aussi à une relation linéaire et homogène.

C'est là précisément ce qui constitue le théorème de Brianchon.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

PAR

M. H. Le Pont

1. Les identités caractéristiques données par Mr. P. Serret pour six points d'une conique ou six couples de points conjugués par rapport à cette conique, pour six tangentes à une conique ou six couples de droites conjuguées par rapport à cette courbe, se généralisent facilement dans le cas où on considère six éléments mêlés de même nature, points et couples de points conjugués, tangentes et couples de droites conjuguées. On a en appelant d la distance d'un point H de la conique à une droite quelconque du plan, m et n les distances à une droite quelconque aussi de deux points M e N formant un couple de deux points conjugués par rapport à cette conique:

$$\Sigma^{i}{}_{1}\, \theta_p\, d^2{}_h + \Sigma^{6}{}_{i+1}\, \Theta_k\, m_k\, n_k = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

où on fera $i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, le premier terme disparaissant pour $i=0$, le dernier pour $i=6$; et l'identité corrélative:

$$\Sigma^{i}{}_{1}\, c_p\, \delta^2{}_p + \Sigma^{6}{}_{i+1}\, C_k \mu_k \nu_k \equiv 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

où δ désigne la distance d'un point quelconque du plan à une tangente à la conique, μ et ν les distances de ce point à deux droites conjuguées par rapport à cette courbe.

Ces identités nous permettent de remplacer immédiatement dans tous les théorèmes relatifs aux coniques un point par un couple de points conjugués, une tangente par un couple de droites conjuguées, et réciproquement, un couple de points conjugués par un point, un couple de droites conjuguées par une tangente.

Pour nous borner à un exemple, le théorème de Desargues-Sturm et son corrélatif donnent les théorèmes suivants:

Théorème. — Les coniques conjuguées à quatre mêmes groupes de deux points tels que trois quelconques ne soient pas en ligne droite, déterminent sur une droite quelconque une série de points en involution.

Théorème. — Les tangentes menées par un point quelconque à toutes les coniques conjugués à quatre couples de droites telles que trois quelconques d'entre elles ne passent pas au même point, forment un faisceau en involution.

Remarquons en outre que donner un couple de points conjugués par rapport à une conique ou un couple de droites conjuguées par rapport à cette conique équivaut à une condition simple, et que si nous désignons par p et q les nombres des coniques qui remplissent outre quatre conditions simples celle d'être conjuguée par rapport à un couple de points ou de droites, ces nombres p et q sont précisément les caractéristiques du groupe de coniques considéré.

2. Soient maintenant deux droites MI et NI, μ et ν les distances orthogonales d'un point quelconque O du plan à les deux droites, δ la distance orthogonale de leur point de concours I à une droite quelconque OD passant par le point O, nous avons:

$$\mu = \mathrm{OI} \sin(\mathrm{OI}, \mathrm{IM})$$

$$\nu = \mathrm{OI} \sin(\mathrm{OI}, \mathrm{IN})$$

$$\delta = \mathrm{OI} \sin(\mathrm{OI}, \mathrm{OD})$$

et par suite:

$$\mu\nu = \delta^2 \frac{\sin(\mathrm{OI}, \mathrm{IM}) \operatorname{Sin}(\mathrm{OI}, \mathrm{IN})}{\sin^2(\mathrm{OI}, \mathrm{OD})} \dots\dots\dots (\alpha)$$

Prenons deux points M et N, soient m et n leurs distances orthogonales à une droite Δ, Ω la projection orthogonale sur la droite MN d'un point ω de la droite Δ, d la longueur $\Omega\omega$, nous avons:

$$d = \Omega\mathrm{M} \sin(\mathrm{MN}, \Omega\mathrm{M}) = \Omega\mathrm{N} \sin(\mathrm{MN}, \Omega\mathrm{N})$$

$$m = \mathrm{OM} \sin(\Omega\mathrm{M}, \Delta)$$

$$n = \mathrm{ON} \sin(\Omega\mathrm{N}, \Delta)$$

d'où:

$$mn = d^2 \frac{\sin(\Omega M, \Delta) \operatorname{Sin}(\Omega N, \Delta)}{\sin(MN, \Omega M) \operatorname{Sin}(MN, \Omega N)} \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Ces formules (α) et (β) nous permettent de transformer les identités (A) et (B). Les identités:

$$\Sigma^6{}_1\, \Theta_i\, m_i\, n_i \equiv 0$$

$$\Sigma^6{}_1\, C_i\, \mu_i\, \nu_i \equiv 0$$

en particulier deviennent:

$$\Sigma^6{}_1\, \theta_i\, d^2{}_i \equiv 0$$

$$\Sigma^6{}_1\, c_i\, \delta^2{}_i \equiv 0.$$

Donc, si nous appelons centre d'un couples de droites conjuguées le point d'intersection de ces droites, et axe d'un couple de points conjugués la droite qui joint ces points nous avons ces deux théorèmes:

Théorème. — Les centres de six couples de droites conjuguées à une même conique sont les sommets d'un hexagone de Pascal.

Théorème. — Les axes de six couples de points conjugués à une même conique sont les côtés d'un hexagone de Brianchon.

Ces théorèmes ne sont que la transformation par les formules (A), (B), (d) et (β) de ceux de Hesse sur les systemes de triangles conjugués à une même conique.

Nous aurons du reste l'occasion de revenir sur les transformations des identités caractéristiques dans de prochains articles.

SOBRE UMA EQUAÇÃO PERIODICA

POR

José Manuel Rodrigues

Professor na escola do exercito de Lisboa

Existe na analyse uma classe muito notavel de equações que tem a propriedade das suas raizes serem funcções periodicas.

N'esta nota temos por fim apresentar uma d'estas equações.

Theorema. — *Se as funcções* $f(x)$ *e* $\varphi(x)$ *forem funcções intermediarias, as raizes da equação holomorpha*

$$f(z) + \alpha \cdot \varphi(z) = 0$$

são funcções duplamente periodicas, admittindo como periodos os mesmos periodos das funcções.

Com effeito, se fôr constantemente

$$\text{mod.}\left(\alpha \cdot \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1,$$

as raizes da equação

$$f(z) + \alpha \cdot \varphi(z) = 0$$

exprimem-se em funcções das raizes de

$$f(z) = 0$$

por meio da fórmula

$$z = x + \sum \left\{ \frac{(-\alpha)^p}{\Gamma^{(p+1)}} \cdot \frac{d^{p-1}\left(\dfrac{\varphi(x)}{f'(x)}\right)^p}{dx^{p-1}} \right\}$$

demonstrado a pag. 137 do tom. IV d'este jornal, ou

$$z - x = -\chi(x),$$

pondo

$$\chi(x) = \sum \left\{ \frac{(-\alpha)^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1}\left(\frac{\varphi(x)}{f'(x)}\right)^p}{dx^{p-1}} \right\} \ldots\ldots\ldots (a)$$

Consideremos agora as equações

$$f(x+\omega) + \alpha \,.\, \varphi(x+\omega) = 0,$$

$$f(x+\omega') + \alpha \,.\, \varphi(x+\omega') = 0.$$

Sendo

$$\text{mod.}\left(\alpha \,.\, \frac{\varphi(x+\omega)}{f(x+\omega)}\right) < 1$$

e

$$\text{mod.}\left(\alpha \,.\, \frac{\varphi(x+\omega')}{f(x+\omega')}\right) < 1,$$

teremos do mesmo modo

$$\chi(x+\omega) = \sum \left\{ \frac{(-\alpha)^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1}\left(\frac{\varphi(x+\omega)}{f'(x+\omega)}\right)^p}{dx^{p-1}} \right\} \ldots\ldots (b)$$

$$\chi(x+\omega') = \sum \left\{ \frac{(-\alpha)^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1}\left(\frac{\varphi(x+\omega')}{f'(x+\omega')}\right)^p}{dx^{p-1}} \right\} \ldots\ldots (c)$$

Ora as funcções $f'(x)$ e $\varphi(x)$ sendo funcções periodicas intermediarias dão

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x+\omega) &= \varphi(x) \\ f'(x+\omega) &= f'(x) \end{aligned}\right\}$$

e

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x+\omega') &= e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(2x+\omega')} + \varphi(x) \\ f'(x+\omega') &= e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(2x+\omega')} + f'(x) \end{aligned}\right\}$$

portanto

$$\frac{\varphi(x+\omega)}{f'(x+\omega)} = \frac{\varphi(x)}{f'(x)}$$

e

$$\frac{\varphi(x+\omega')}{f'(x+\omega')} = \frac{\varphi(x)}{f'(x)};$$

logo as fórmulas (*b*) e (*c*) reduzem-se á serie primitiva (*a*), e por consequencia

$$\chi(x+\omega) = \chi(x)$$

$$\chi(x+\omega') = \chi(x)$$

ou

$$\chi(x+\omega+\omega') = \chi(x),$$

e em geral

$$\chi(x+m\omega+n\omega') = \chi(x)$$

como se queria demonstrar.

J. A. MARTINS DA SILVA

Temos hoje a dar aos leitores d'este jornal a triste noticia do fallecimento do nosso illustre collaborador, o sr. J. A. Martins da Silva, tão novo roubado á sciencia, e quando mais esperanças dava o seu bello talento.

Tinha concluido o seu curso na escola polytechnica de Lisboa e principiava a seguir o curso de artilheria na escola do exercito quando escreveu o seu primeiro trabalho, que foi publicado no tomo II d'este jornal, e que foi logo seguido de outros, publicados nos tomos III e IV:

1.° *Sobre uma fórmula integral* (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, tom. II).

2.° *Sobre a transformação das funcções* X_n *de Legendre* (*Item*, tom. III).

3.° *Sobre a reducção directa d'uma classe de integraes definidos multiplos* (*Item*, tom. III).

4.° *Demonstração d'um theorema de Mr. Besge* (*Item*, tom. III).

5.° *Nota sobre a transformação de um integral definido* (*Item*, tom. III).

6.° *Sobre algumas fórmulas novas relativas ás raizes das equações algebricas* (*Item*, tom. IV).

Todos estes trabalhos foram escriptos durante o tempo em que seguia o curso da escola do exercito. Referem-se ainda a pontos elementares da sciencia, mas revelam já um talento dos mais promettedores.

Depois de concluido o seu curso, em 1881, entrou para o serviço na arma de artilheria, onde aproveitava todo o tempo que lhe ficava disponivel, para estudar a theoria das funcções ellipticas e abelianas, tomando principalmente para guia os excellentes livros de Briot e Bouquet.

A nova orientação dos seus estudos produziu os melhores resultados, e o joven geometra em breve viu coroados os seus esforços chegando a resultados verdadeiramente importantes, que foram publicados nos artigos seguintes:

7.° *Nota sobre a independencia dos zeros na funcção jacobiana de integraes abelianos normaes de primeira especie* (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, tom. V).

8.° *Sobre uma fórmula relativa á theoria das funcções ellipticas* (*Item*, tom. V).

9.° *Sur une question de la théorie des fonctions elliptiques* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Belgique*, 1885).

10.° *Sur trois relations différentielles données par Mr. Lipschitz dans la théorie des fonctions elliptiques* (*Jornal de Sciencias Mathematicas*, tom. VI).

O artigo 8.° contém uma comparação de duas fórmulas importantes de Analyse, e foi desenvolvido pelo sr. Martins da Silva em dois artigos. O primeiro (9.° da lista) foi apresentado pelo illustre geometra belga, sr. P. Mansion, á Academia das sciencias de Bruxellas, e mandado imprimir no *Bulletin* da mesma Academia (*). O segundo foi por nós apresentado á Academia das sciencias de Lisboa, que votou a impressão no seu jornal.

Estas decisões de duas importantes academias, mandando imprimir trabalhos do sr. Martins da Silva, são a confirmação, para assim dizer, official do seu talento, ás quaes se seguiu em breve a da *Sociedade Mathematica de França*, nomeando-o seu socio por proposta dos srs. Rouché e Comberousse em sessão de 7 de janeiro de 1885.

Já minado pela doença que o havia de levar á sepultura trabalhava ainda, como mostram as seguintes palavras de uma carta que nos escreveu a 21 de abril de 1885:

«Continúo a passar mal, constantemente rouco e cansado, o que me faz afrouxar mais o estudo; não obstante conclui agora um trabalho novo sobre a theoria das funcções ellipticas, onde emprego o methodo da decomposição em fracção simples do sr. Hermite: foi por este motivo que pedi a este grande geometra

(*) Foi o sr. P. Mansion tambem encarregado pela sua Academia de dar parecer sobre este trabalho. Este parecer foi publicado no *Bulletin*, mas ainda não nos foi possivel vêl-o. Mais tarde tencionamos transcrevel-o n'este jornal, assim como os artigos do sr. Martins da Silva que foram publicados fóra do paiz.

O artigo apresentado á Academia das sciencias de Lisboa ainda não foi impresso.

para dar o seu auctorisado parecer. Tive a felicidade de receber resposta favoravel, dizendo elle que as minhas demonstrações são muito elegantes, e lhe era agradavel dizer que a questão encetada já lhe tinha chamado a sua attenção. Encarregou-se tambem de mandar publicar o meu trabalho no *Bulletin* do sr. Darboux.»

Esta carta, que produziu em mim um mixto de prazer e de pezar, foi como que a sua despedida, pois passados alguns mezes, a 12 de novembro de 1885, fallecia, contando apenas 27 annos de idade, pois tinha nascido a 22 de agosto de 1858.

F. Gomes Teixeira.

BIBLIOGRAPHIA

P. Arnaut de Menezes. — Cargas addicionaes nas pontes metallicas para estradas (*Revista de obras publicas*, tomo XVI).

O distincto engenheiro tracta n'este trabalho de determinar a posição em que dois carros, caminhando sobre uma ponte metallica acompanhados por uma multidão de pessoas, produzem o maximo momento de flexão, e o ponto da madre em que elle se realisa, e emfim procura qual é a carga que, distribuida uniformemente por todo o taboleiro, produz no ponto em questão egual momento de flexão.

As fórmulas correspondentes são applicadas á discussão dos regulamentos empregados em Portugal para calcular as madres das pontes metallicas para estradas.

R. B. Martins Pereira. — La rotation et le mouvement curviligne. — Lisbonne, 1885.

N'este opusculo o auctor, professor na escola de medicina de Lisboa, occupa-se da explicação da gravitação, gravidade, cohesão e affinidade por meio dos movimentos dos corpos no ether.

G. Loria. — Ricerche intorno alla Geometria della sfera (*Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, tom. XXXVI).

Deve-se a Plücker a idéa de attribuir ao espaço um numero qualquer de dimensões, escolhendo para isso convenientemente a entidade geometrica que se considera como seu elemento; e esta idéa tem sido a origem de trabalhos importantissimos. Têem-se empregado como elementos do espaço, para constituir assim a Geometria, o ponto e a linha recta. Continuando n'esta ordem de idéas, o sr. Loria na sua importante memoria toma para elemento do espaço a esphera. A Geometria assim constituida é a quatro dimensões, e para a estudar o auctor toma para coordenadas cinco quantidades x_1, x_2, etc., que ligadas pela equação

$$x_1 X^{(1)} + x_2 X^{(2)} + \ldots + x_5 X^{(5)} = 0$$

determinam uma esphera qualquer, as quantidades $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, etc., determinando de qualquer modo cinco espheras fundamentaes. Para esta ultima determinação o sr. Loria emprega as coordenadas cartesianas, de modo que toma

$$X^{(i)} = (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 + (z - \gamma_i)^2 - R^2_i,$$

por causa da vantagem que d'ahi vem para as relações da nova Geometria com a Geometria ordinaria.

São estes os fundamentos das indagações do sr. Loria a respeito da Geometria da esphera, que o levaram a resultados importantes, de que se não póde dar idéa em curta noticia, e de que faz applicação a uma nova classificação das *ciclides*, a cujo estudo destina todo o capitulo terceiro da sua bella memoria.

G. Loria. — *Nuovi studi sulla Geometria della sfera* (*Atti della R. Accademia di Torino*, vol. XX).

—— *Intorno alla Geometria su un complesso tetraedale* (*Item*, vol. XIX).

D^r. A. Bieler. — *Das System*

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1\right) = 0.$$

Marburg, 1885.

E. Cesàro. — *Determinanti in Aritmetica* (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, tomo XXIII).
—— *Intorno a taluni determinanti aritmetici* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1885*).
—— *Gli algoritmi delle funzioni aritmetiche* (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, tom. XXIII).
—— *Sull' inversione delle identità aritmetiche* (*Item*).

H. le Pont. — *Notes de Géométrie* (*Journal de Mathématiques spéciales, 1883*).
—— *Théorèmes sur quelques courbes et surfaces remarquables.* — *Cherbourg.*

M. d'Ocagne. — *Sur les raccordements paraboliques* (Mathesis, tomo v).
—— *Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes* (Bulletin *de la Société Mathématique de France*, tom. IX).

P. Mansion. — *Note sur la méthode des moindres carrés* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1885*).
—— *Théorie de l'élimination entre deux équations algébriques.* — *Paris, 1884.*

G. T.

INDICE