

1/2

Costo

JORNAL  
DE  
SCIENCIAS MATHematicas E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

**Dr. Francisco Gomes Teixeira**

PROFESSOR DE MATHematica NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA,  
SOCIO CORRESPONDENTE DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA  
E DA SOCIEDADE DE SCIENCIAS PHYSICAS E NATURAES DE BORDEAUX

VOL. IV—N.º 1

COIMBRA  
IMPRESA DA UNIVERSIDADE  
1882

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHematicas E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

EM

Dr. Francisco Gomes Teixeira

REVISTA DE MATHematicas E ASTRONOMICAS  
DO INSTITUTO DE AGRICULTURA E MEIO DE FIDELIA  
E DE AGRICULTURA E MEIO DE FIDELIA

VOL. IV - N.º 1

COIMBRA

IMPRESSA DA UNIVERSIDADE

1882

CONDIÇÕES DA ASSINATURA

Publica-se o Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas em fasciculos de 32 paginas. Cada fasciculo torquido no fim do anno em volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 28400 reis.

A correspondencia relativa a Redacção do Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas deve ser dirigida para os Editores, Contoso, n.º 24 — Coimbra.

A correspondencia relativa a Administracão deve ser dirigida a Manoel Baptista, na Imprensa da Universidade.

## CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

---

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão no fim do anno um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2\$400 réis

A correspondencia relativa á Redacção do *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para os Palacios Confusos, n.º 24 — Coimbra.

A correspondencia relativa á Administração deve ser dirigida a Manuel Baptista, na Imprensa da Universidade.

---

# JORNAL

DE

## SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

**Dr. Francisco Gomes Teixeira**

Professor de Mathematica na Universidade de Coimbra,  
Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa  
e da Sociedade de Sciencias Physicas e Naturaes de Bordeaux

~~~~~  
VOLUME IV  
~~~~~



COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1882

JORNAL

SCIENCIAS MATEMATICAS E ASTRONOMICAS  
NEGATIVAS AOS SACRES DES EQUATIONS ALGEBRIQUES

PUBLICADO

Dr. Francisco Gomes Teixeira  
Professor de Matemática na Universidade de Coimbra  
e de Geometria na Academia Real das Sciencias de Lisboa  
e de Geometria na Academia Real das Sciencias de Bolonha

VOLUME IV

COIMBRA

IMPRESSA DA UNIVERSIDADE

1883

## SUR QUELQUES FORMULES NOUVELLES RELATIVES AUX RACINES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

PAR

J. A. MARTINS DA SILVA

La résolution des équations algébrique dont le degré est supérieur au quatrième a toujours appelée l'attention des géomètres à cause de sa grande importance dans les questions de l'Analyse mathématique.

«Le problème de la résolution des équations des degrés supérieurs au quatrième, dit Lagrange (\*), est un de ceux dont on a pas encore pu venir à bout, quoique d'ailleurs rien n'en démontre l'impossibilité. Je ne connais jusqu'à présent que deux méthodes qui paraissent donner quelque espérance de succès. Ce sont, l'une celle de M. Tschirnaus, publiée dans les *Actes de Leipzig* de 1683, et l'autre celle que MM. Euler et Bezont ont proposée presque en même temps, le premier dans les *Nouveaux Commentaires de Peterbourg*, tome IX, et le second dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1765. Ces méthodes ont l'avantage de donner la résolution des équations du troisième et du quatrième degré d'une manière générale et uniforme, avantage que leur est particulier, et qui peut par conséquent être un préjugé pour leur succès dans les degrés plus élevés; mais les calculs qu'elles demandent dans les équations du cinquième degré et des degrés ultérieurs sont si longs et si compliqués, que le plus intrépide calculateur peut en être rebuté».

Quoique la fonction résolvante de Lagrange donne seulement la résolution des équations du troisième et du quatrième degré,

---

(\*) *Réflexions sur la résolution algébrique des équations.* — *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin*, années 1770 et 1771.

on est arrivé plus tard par cette considération à la résolution algébrique d'une classe considérable d'équations de degré quelconque.

En même temps que ce grand géomètre publiait à Berlin le Mémoire ci-dessus rapporté, Vandermonde s'occupait de la même question, et présentait à l'Académie des Sciences de Paris un Mémoire où il arrivait à les conséquences de Lagrange par des considérations différentes.

Ensuite on a eu l'idée de faire l'inverse, c'est-à-dire de démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations, et alors Abel a eu la bonheur de généraliser les résultats obtenus par Gauss sur la résolution des équations binômes; il a aussi fait voir que si deux racines d'une équation irréductible sont liées de manière que l'une est fonction rationnelle de l'autre, l'équation est résoluble algébriquement si son degré est un nombre premier, et que dans le cas contraire on peut toujours ramener la résolution de l'équation à celle d'équations de degrés moindres.

Ce résultat célèbre obtenu par Abel, qui serait suffisant pour rendre immortel le nom de ce grand géomètre, mène à une classe assez étendue d'équations résolubles par radicaux. Wantzel a présenté une démonstration simple de ce théorème.

Ensuite E. Galois, ancien élève de l'École normale, a fait voir, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris que, pour qu'une équation irréductible de degré premier soit résoluble par radicaux, il est nécessaire et suffisant que les racines soient toutes exprimables en fonction rationnelle de deux quelconques d'entre elles. Cette question importante en faisant savoir quand une équation est résoluble algébriquement, sert de base aux recherches de quelques géomètres de notre temps.

Steiner dit qu'une équation du troisième degré renfermant en générale vingt sept points dans lesquels elle peut avoir un contact de la cinquième ordre avec une conique, l'équation du vingt sept degré qui détermine ces points est toujours résoluble algébriquement.

Hesse fait voir qu'une équation  $X(x) = 0$  du neuvième degré étant donnée et une fonction  $\Theta$  de deux variables, si l'équation proposée a deux racines  $x_\alpha, x_\beta$  capables de donner une troisième  $x_\gamma$  de manière que soit au même temps

$$x_\gamma = \Theta(x_\alpha, x_\beta), \quad x_\alpha = \Theta(x_\beta, x_\gamma), \quad x_\beta = \Theta(x_\alpha, x_\gamma),$$

cette équation sera résoluble algébriquement.



Kronecker a fait aussi des recherches notables sur la question considérée, et M. Hermite est arrivé à la résolution de l'équation du cinquième degré au moyen des fonctions elliptiques.

Nous devons aussi à Newton, Waring, Jacobi, etc. des expressions notables pour la détermination de la somme des puissances semblables des racines; mais, bien que un si grand nombre de savants se soient occupés de la résolution des équations algébriques, nous ne savons qu'ils aient donné quelque formule pour exprimer les racines imaginaires en fonction des coefficients, ce que nous avons fait, pour une équation d'un degré quelconque, en donnant cette expression en fonction des coefficients, du nombre  $\pi$ , et du module de la racine qu'elle détermine.

Dans ce travail nous obtenons premièrement une formule qui donne la racine imaginaire exprimée au moyen d'une intégrale.

Ensuite nous donnons quelques formules relatives à la somme des mêmes puissances des racines, et l'expression du logarithme d'une racine imaginaire.

Ensuite vient la déduction d'une formule algébrique qui donne une racine imaginaire d'une équation quelconque.

Enfin nous faisons voir comme on détermine les autres racines imaginaires de l'équation proposée.

I

Formule intégrale  
relative à une des racines imaginaires  
des équations algébriques

Soit

$$\Phi(x) = x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \dots \pm A_p x^{m-p} \mp \dots \mp A_{m-1} x \pm A_m = 0$$

une équation algébrique du degré  $m$ , dont nous représenterons les racines par  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , et voyons comme nous pouvons trouver l'expression d'une de ces racines, que nous supposons imaginaire, au moyen d'une intégrale définie.

La théorie des équations donne

$$\begin{aligned} A_m - A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 - \dots \pm A_p x^{m-p} \mp \dots \mp A_1 x^{m-1} \pm x^m = \\ = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_p) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m), \end{aligned}$$

e comme

$$A_m = \pm \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_p \cdot \dots \cdot \alpha_{m-1} \cdot \alpha_m$$

nous avons

$$A_m - A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 - \dots = A_m \cdot \prod_{p=1}^{p=m} \left[ 1 - \frac{x}{\alpha_p} \right];$$

en faisant maintenant

$$\varphi(x) = \frac{A_m}{x} + A_{m-1} \cdot \psi(x)$$

et

$$\psi(x) = \frac{A_{m-2} \cdot x - A_{m-3} \cdot x^2 + \dots}{A_{m-1}}$$

il vient

$$\begin{aligned} 1 - \frac{A_m}{A_{m-1}x} - \psi(x) &= - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot x} \cdot \prod_{p=1}^{p=m} \left[ 1 - \frac{x}{\alpha_p} \right] = \\ &= \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot \alpha_1} \cdot \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{x} \right] \cdot \prod_{p=2}^{p=m} \left[ 1 - \frac{x}{\alpha_p} \right] \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \log \left[ 1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot x} - \psi(x) \right] &= \log \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot \alpha_1} \right) + \log \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{x} \right] + \\ &+ \log \prod_{p=2}^{p=m} \left[ 1 - \frac{x}{\alpha_p} \right] \end{aligned}$$

et, en développant les logarithmes en série,

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{\varphi(x)}{A_{m-1}} \right)^p = \log \left( \frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot \alpha_1 \right) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{x} \right)^p +$$

$$\left[ \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} x^p \cdot \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right] \right].$$

D'un autre côté, nous avons aussi

$$\log \left[ 1 - \frac{\varphi(x)}{A_{m-1}} \right] = \log \left[ 1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot x} \psi(x) \right] = \log \left[ 1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot x} \right] +$$

$$+ \log \left[ \frac{1 - \frac{\psi(x)}{A_m}}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot x}} \right]$$

ou

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{\varphi(x)}{A_{m-1}} \right)^p = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot x} \right)^p - \log \left[ \frac{1 - \frac{\psi(x)}{A_m}}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot x}} \right];$$

par conséquent, en égalant les deux seconds membres, nous avons

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot x} \right)^p - \log \left[ \frac{1 - \frac{\psi(x)}{A_m}}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot x}} \right] = \log \left( \frac{A_{m-1}}{A_m \cdot \alpha_1} \right) + \left. \begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{x} \right)^p + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} x^p \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right] \end{aligned} \right\} (a).$$

Soit maintenant la racine que nous cherchons de la forme  $x = a + b\sqrt{-1}$ , et, comme par la théorie des imaginaires est  $x = k e^{\pm \omega \sqrt{-1}}$ , appelant  $k$  le module et  $\omega$  l'argument, nous allons substituer  $x$  par ces deux valeurs en (a), d'où il vient

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega \sqrt{-1}} - \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{A_m + \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega \sqrt{-1}}} \right] =$$

$$= \log \left( \frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot \alpha_1 \right) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \frac{\alpha_1}{k} \cdot e^{-\omega \sqrt{-1}} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \frac{1}{k e^{\omega \sqrt{-1}}} \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right];$$

et

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega \sqrt{-1}} - \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{A_m + \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega \sqrt{-1}}} \right] =$$

$$= \log \left( \frac{A_{m-1}}{A_m} \alpha_1 \right) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \frac{\alpha_1}{k} e^{\omega \sqrt{-1}} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \frac{1}{k e^{-\omega \sqrt{-1}}} \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right];$$

En additionnant et diminuant membre à membre, on a

$$\begin{aligned}
 2. \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \right)^p \cos p \omega &= \left( \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega \sqrt{-1}}} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega \sqrt{-1}}} \right] \right) = \\
 &= 2 \cdot \log \left( \frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot \alpha_1 \right) + 2 \cdot \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{k} \right)^p \cos p \omega + \\
 &\quad + 2 \cdot \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \cdot k^p \cos p \omega \cdot \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 2. \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \right)^p \sin p \omega + \frac{1}{\sqrt{-1}} &= \left( \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega \sqrt{-1}}} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega \sqrt{-1}}} \right] \right) = \\
 &= 2 \cdot \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{k} \right)^p \cdot \sin p \omega - \\
 &\quad - 2 \cdot \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \cdot k^p \sin p \omega \cdot \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right].
 \end{aligned}$$

Nous multiplions ensuite les deux membres de l'avant-dernière équation par  $\cos p \omega \cdot d \omega$ , et ceux de la dernière par  $\sin p \omega \cdot d \omega$ , nous intégrons ensuite depuis 0 jusqu'à  $\pi$ , avant égard au même temps aux intégrales définies

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\pi} \cos p \omega \cdot \cos q \omega d \omega = 0 \\ \int_0^{\pi} \sin p \omega \cdot \sin q \omega d \omega = 0 \\ \int_0^{\pi} \sin p \omega \cdot \cos q \omega d \omega = 0 \end{array} \right.$$

qui ont lieu toutes les fois que est  $p \geq q$ , et aux intégrales définies

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\pi} \cos^2 p \omega d \omega = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi} \sin^2 p \omega d \omega = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi} \cos p \omega d \omega = \frac{2 \cdot \sin \frac{p \omega}{2}}{p} \end{array} \right.$$

qui a lieu toutes les fois que est  $p = q$ .

Nous avons donc

$$\frac{1}{p} \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \right)^p - \frac{1}{\pi} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega \sqrt{-1}}} \right] \cos p \omega d \omega + \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega \sqrt{-1}}} \right] \cos p \omega d \omega \right\} =$$

$$= \frac{4}{p \pi} \cdot \text{sen} \frac{p \pi}{2} \cdot \log \left( \frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot \alpha_1 \right) +$$

$$+ \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{k} \right)^p + \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right] k^p ;$$

et

$$\frac{1}{p} \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \right)^p + \frac{1}{\pi \sqrt{-1}} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega \sqrt{-1}}} \right] \text{sen} p \omega d \omega - \right.$$

$$\left. - \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega \sqrt{-1}}} \right] \text{sen} p \omega d \omega \right\} =$$

$$= \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{k} \right)^p - \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right].$$

En additionnant membre à membre ces deux équations, on a

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{p} \left( \frac{\Lambda_m}{\Lambda_{m-1} \cdot k} \right)^p - \frac{1}{2\pi} \times \\
 & \left\{ \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega\sqrt{-1}})}{1 - \frac{\Lambda_m}{\Lambda_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega\sqrt{-1}}} \right] \cos p \omega d \omega + \right. \\
 & \left. + \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega\sqrt{-1}})}{1 - \frac{\Lambda_m}{\Lambda_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega\sqrt{-1}}} \right] \cos p \omega d \omega \right\} + \\
 & \times \left\{ \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega\sqrt{-1}})}{1 - \frac{\Lambda_m}{\Lambda_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega\sqrt{-1}}} \right] \text{sen } p \omega d \omega - \right. \\
 & \left. + \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega\sqrt{-1}})}{1 - \frac{\Lambda_m}{\Lambda_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega\sqrt{-1}}} \right] \text{sen } p \omega d \omega \right\} = \\
 & = \frac{2}{p\pi} \text{sen } \frac{p\pi}{2} \log \left( \frac{\Lambda_{m-1}}{\Lambda_m} \alpha_1 \right) + \\
 & + \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{k} \right)^p.
 \end{aligned}$$



Si est

$$p = 2p'$$

on a

$$\alpha_1^{2p'} = \left( \frac{A_m}{A_{m-1}} \right)^{2p'} \frac{p' k^{2p'}}{\pi} \times$$

$$\left\{ \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega\sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega\sqrt{-1}}} \right] \cos 2p' \omega d\omega + \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega\sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega\sqrt{-1}}} \right] \cos 2p' \omega d\omega \right\} +$$

$$\times \left\{ \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega\sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega\sqrt{-1}}} \right] \text{sen } 2p' \omega d\omega - \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega\sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega\sqrt{-1}}} \right] \text{sen } 2p' \omega d\omega \right\}$$

Si nous posons

$$p' = 1$$

nous avons définitivement la valeur de la racine que nous cherchions

$$\alpha_1 =$$

$$= \left( \frac{A_m}{A_{m-1}} \right)^2 - \frac{k^2}{\pi} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega \sqrt{-1}}} \right] \cos 2\omega d\omega + \\ & + \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega \sqrt{-1}}} \right] \cos 2\omega d\omega \\ & + \sqrt{-1} \left\{ \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{-\omega \sqrt{-1}}} \right] \sin 2\omega d\omega - \right. \\ & \left. - \int_0^\pi \log \left[ 1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{1 - \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \cdot e^{\omega \sqrt{-1}}} \right] \sin 2\omega d\omega \right\} \end{aligned} \right\} \cdot \frac{1}{2}$$

Pour simplifier, nous pouvons faire

$$\eta = \int_0^\pi \log \left[ \frac{1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{A_m}}{1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{A_{m-1} \cdot k}} \right] \cos 2\omega d\omega$$

$$\theta = \int_0^\pi \log \left[ \frac{1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{A_m}}{1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{A_{m-1} \cdot k}} \right] \cos 2\omega d\omega$$

$$\epsilon = \int_0^\pi \log \left[ \frac{1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{A_m}}{1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{A_{m-1} \cdot k}} \right] \sin 2\omega d\omega$$

$$\alpha = \int_0^\pi \log \left[ \frac{1 - \frac{\psi(k e^{-\omega \sqrt{-1}})}{A_m}}{1 - \frac{\psi(k e^{\omega \sqrt{-1}})}{A_{m-1} \cdot k}} \right] \sin 2\omega d\omega$$

et

$$\begin{cases} \mu = \eta + \theta \\ \nu = \epsilon - \alpha \end{cases}$$

donc

$$\alpha_1 = \sqrt{\left(\frac{A_m}{A_{m-1}}\right)^2 - \frac{k^2}{\pi}} [\mu + \nu \cdot \sqrt{-1}]$$

## II

Formules intégrales  
relatives à la somme des puissances semblables  
des racines et au logarithme de la racine imaginaire  
d'une équation algébrique

Supposons maintenant que les racines  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  de l'équation proposée sont disposées suivant la grandeur de leur module.

Nous allons faire voir comme Jacobi est arrivé à l'expression des sommes

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^p + \alpha_2^p + \alpha_3^p + \dots + \alpha_m^p \\ \frac{1}{\alpha_1^{p+1}} + \frac{1}{\alpha_2^{p+1}} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^{p+1}} \end{array} \right.$$

$i$  étant un nombre quelconque moindre que  $m$  et  $p$  un exposant entier arbitraire, et comparer les formules de ce grand géomètre avec lesquelles que nous déduirons ensuite.

En échangeant  $i$  par  $i+1$ , nous aurons une autre expression dont l'excès sur la première sera  $\alpha_{i+1}$ .

Étant

$$F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m)$$

est

$$\log F(x) = \log(x - \alpha_1) + \log(x - \alpha_2) + \dots + \log(x - \alpha_m).$$

Soit  $k_1$  un nombre compris parmi le module de  $\alpha_i$  et celui de  $\alpha_{i+1}$ .

Les  $i$  premiers termes du deuxième membre sont développables suivant les puissances de  $\frac{1}{k_1}$ , et les autres suivant les puissances de  $k_1$ .

Nous aurons, par exemple,

$$\log(x - \alpha_i) = \log x - \frac{\alpha_i}{x} - \frac{\alpha_i^2}{2x^2} - \frac{\alpha_i^3}{3x^3} - \dots$$

$$\log(x - \alpha_{i+1}) = \log(\alpha_{i+1}) - \frac{x}{\alpha_{i+1}} - \frac{x^2}{2\alpha_{i+1}^2} - \dots$$

Si nous développons de cette manière tous les termes du deuxième membre, nous substituons dans cette expression successivement  $x$  par  $k_1 e^{\omega \sqrt{-1}}$  et par  $k_1 e^{-\omega \sqrt{-1}}$ , et nous faisons l'addition et la différence des résultats obtenus, il vient

$$\log F(k_1 e^{\omega \sqrt{-1}}) + \log F(k_1 e^{-\omega \sqrt{-1}}) = i \log k_1^2 -$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{n=i} \left[ \frac{\alpha_n}{k_1} \cos \omega + \frac{\alpha_n^2}{k_1^2} \cos 2\omega + \dots \right] +$$

$$+ 2 \sum_{n=i+1}^{n=m} \left[ \frac{1}{2} \log \alpha_n^2 - \frac{k_1}{\alpha_n} \cos \omega - \dots \right]$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} [\log F(k_1 e^{\omega \sqrt{-1}}) - \log F(k_1 e^{-\omega \sqrt{-1}})] = i\omega +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=i} \left[ \frac{\alpha_n}{k_1} \sin \omega + \frac{\alpha_n^2}{2k_1^2} \sin 2\omega + \dots \right] -$$

$$- \sum_{n=i+1}^{n=m} \left[ \frac{k_1}{\alpha_n} \sin \omega + \frac{k_1^2}{2\alpha_n^2} \sin 2\omega + \dots \right].$$

Multiplions les deux membres de ces équations respectivement par  $\cos p \omega d \omega$  et par  $\sin p \omega d \omega$ , et intégrions parmi les limites  $\omega = -\pi$  et  $\omega = +\pi$ .

Il vient

$$\begin{aligned} \alpha^{p_1} + \alpha^{p_2} + \alpha^{p_3} + \dots + \alpha^{p_i} &= \mp k^{p_1} i + \frac{p k^{p_1}}{4 \pi} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} [\log F(e^{k_1 \omega \sqrt{-1}}) + \log F(e^{-k_1 \omega \sqrt{-1}})] \cos p \omega d \omega - \right. \\ &\left. - \sqrt{-1} \int_{-\pi}^{+\pi} [\log F(e^{k_1 \omega \sqrt{-1}}) - \log F(e^{-k_1 \omega \sqrt{-1}})] \sin p \omega d \omega \right\} \\ &\frac{1}{\alpha^{p_{i+1}}} + \frac{1}{\alpha^{p_{i+2}}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} = \pm \frac{i}{k^{p_1}} + \frac{p}{4 k^{p_1} \cdot \pi} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} [\log F(e^{k_1 \omega \sqrt{-1}}) + \log F(e^{-k_1 \omega \sqrt{-1}})] \cos p \omega d \omega + \right. \\ &\left. + \sqrt{-1} \int_{-\pi}^{+\pi} [\log F(e^{k_1 \omega \sqrt{-1}}) - \log F(e^{-k_1 \omega \sqrt{-1}})] \sin p \omega d \omega \right\}. \end{aligned}$$

Les formules précédentes, données par Jacobi dans un de ses premiers Mémoires, sont déduites de la manière précédente dans le *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de M. Bertrand.

Cella posé, nous allons donner des autres expressions qu'on déduit des formules

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{p} \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \right)^p - \frac{\mu}{\pi} &= \frac{4}{p \pi} \cdot \sin \frac{p \pi}{2} \log \left( \frac{A_{m-1}}{A_m} \alpha_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{k} \right)^p + \frac{k^p}{p} \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right]; \\ \frac{1}{p} \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \right)^p + \frac{\nu}{\pi \sqrt{-1}} &= \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{k} \right)^p - \frac{k^p}{p} \left[ \frac{1}{\alpha^{p_2}} + \frac{1}{\alpha^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha^{p_m}} \right]; \end{aligned} \right.$$

puisque, en soustrayant la deuxième de la première, on a

$$-\frac{1}{\pi} \left[ \mu + \frac{\nu}{\sqrt{-1}} \right] = \frac{4}{p\pi} \cdot \text{sen} \frac{p\pi}{2} \log \left( \frac{A_{m-1}}{A_m} \alpha_1 \right) +$$

$$+ \frac{2k^p}{p} \left[ \frac{1}{\alpha_2^{p_2}} + \frac{1}{\alpha_3^{p_3}} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^{p_m}} \right];$$

et

$$\frac{1}{\alpha_2^{2p'}} + \frac{1}{\alpha_3^{2p'}} + \frac{1}{\alpha_4^{2p'}} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^{2p'}} = -\frac{p'}{k^{2p'} \cdot \pi} [\mu - \nu \cdot \sqrt{-1}].$$

Cette expression notable peut donner la somme des racines, moins une, élevées au même exposant paire, résultat qu'on ne peut pas tirer de la formule de Jacobi.

Comme nous connaissons déjà la formule

$$\alpha_1^{2p'} = \left( \frac{A_m}{A_{m-1}} \right)^{2p'} - \frac{p' k^{2p'}}{\pi} [\mu + \nu \cdot \sqrt{-1}]$$

nous avons aussi

$$\frac{1}{\alpha_1^{2p'}} + \frac{1}{\alpha_2^{2p'}} + \frac{1}{\alpha_3^{2p'}} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^{2p'}} =$$

$$= \frac{1}{\left( \frac{A_m}{A_{m-1}} \right)^{2p'} - \frac{p' \cdot k^{2p'}}{\pi} [\mu + \nu \sqrt{-1}]} - \frac{p' [\mu - \nu \cdot \sqrt{-1}]}{k^{2p'} \cdot \pi} =$$

$$= \frac{\pi [k^{2p'} A_{m-1} \cdot \pi - p' A_m^{2p'} (\mu - \nu \sqrt{-1})] + A_{m-1}^{2p'} \cdot p'^2 \cdot k^{2p'} (\mu^2 + \nu^2)}{k^{2p'} \pi [\pi A_m^{2p'} - p' k^{2p'} A_{m-1}^{2p'} \cdot (\mu + \nu \sqrt{-1})]}.$$

\*

Cette expression étant connue, on obtient facilement la somme  $S_{2p'}$  des puissances paires des racines, en échangeant celles de l'équation proposée par leurs réciproques parceque alors l'équation transformée donne

$$S_{2p'} = \alpha_1^{2p'} + \alpha_2^{2p'} + \dots + \alpha_m^{2p'} = \\ = \frac{\pi [A_1^{2p'} \cdot k^{2p'} \cdot \pi - p' (\mu - \nu \sqrt{-1})] + A_1^{2p'} p'^2 k^{2p'} (\mu^2 + \nu^2)}{\pi k^{2p'} [\pi - p' k^{2p'} A_1^{2p'} (\mu + \nu \sqrt{-1})]}$$

Bien que cette expression soit plus compliquée et moins générale que celle de Jacobi, est toutefois plus convenable pour donner la somme des puissances paires de tous les racines.

Quand est

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.^{\circ} \quad A_m = A_{m-1} \\ 2.^{\circ} \quad A_m = A_{m-1}, \quad p' = 1 \\ 3.^{\circ} \quad A_m = A_{m-1}, \quad p' = k = 1 \end{array} \right.$$

il viendra

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.^{\circ} \quad \frac{1}{\alpha_1^{2p'}} + \frac{1}{\alpha_2^{2p'}} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^{2p'}} = \\ = \frac{\pi [k^{2p'} \cdot \pi - p' (\mu - \nu \sqrt{-1})] + p'^2 \cdot k^{2p'} (\mu^2 + \nu^2)}{\pi k^{2p'} [\pi - p' k^{2p'} (\mu - \nu \sqrt{-1})]} \\ 2.^{\circ} \quad \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^2} = \\ = \frac{\pi [k^2 \pi - \mu + \nu \sqrt{-1}] + k^2 (\mu^2 + \nu^2)}{\pi k^2 [\pi - k^2 (\mu + \nu \sqrt{-1})]} \\ 3.^{\circ} \quad \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^2} = \\ = \frac{\pi [\pi - \mu + \nu \sqrt{-1}] + k^2 (\mu^2 + \nu^2)}{\pi [\pi - \mu - \nu \sqrt{-1}]} \end{array} \right.$$



Pour trouver l'expression du logarithme d'une racine imaginaire de l'équation proposée nous employons la formule

$$\frac{1}{p} \left( \frac{A_m}{A_{m-1} \cdot k} \right)^p - \frac{1}{2\pi} [\mu + \nu \sqrt{-1}] = \frac{2}{p\pi} \operatorname{sen} \frac{p\pi}{2} \cdot \log \left( \frac{A_{m-1}}{A_m} \alpha_1 \right) + \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha_1}{k} \right)^p$$

qui donne

$$\log \alpha_1 = \log \frac{A_m}{A_{m-1}} +$$

$$+ \frac{2\pi \left[ A^p_m - A^{p-1}_{m-1} \left( \sqrt{1 - \frac{k^2}{A_{m-1}^2} [\mu + \nu \sqrt{-1}]^p} \right) - k^p A^{p-1}_{m-1} \cdot p [\mu + \nu \sqrt{-1}] \right]}{4 \cdot k^p \cdot A^{p-1}_{m-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{p\pi}{2}}$$

En posant

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.^{\circ} \quad A_m = A_{m-1} \\ 2.^{\circ} \quad A_m = A_{m-1}, \quad p = 1 \\ 3.^{\circ} \quad A_m = A_{m-1}, \quad p = k = 1 \end{array} \right.$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.^{\circ} \quad \log \alpha_1 = \frac{2\pi \left[ 1 - \left( \sqrt{1 - \frac{k^2}{\pi} [\mu + \nu \sqrt{-1}]^p} \right) - k^p \cdot p [\mu + \nu \sqrt{-1}] \right]}{4 \cdot k^p \cdot \operatorname{sen} \frac{p\pi}{2}} \\ 2.^{\circ} \quad \log \alpha_1 = \frac{2\pi \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{k^2}{\pi} (\mu + \nu \sqrt{-1})} \right] - k (\mu + \nu \sqrt{-1})}{4k} \\ 3.^{\circ} \quad \log \alpha_1 = \frac{2\pi \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu + \nu \sqrt{-1}}{\pi}} \right] - (\mu + \nu \sqrt{-1})}{4} \end{array} \right.$$

## III

Sur la formule qui donne une des racines imaginaires  
de l'équation algébrique

En posant

$$M = \pi^2 A^2 k^2 \quad M' = \pi^2 A^4 k^4$$

$$M_1 = A^2 k^2 \quad M'_1 = A^4 k^4$$

$$M_2 = \pi^2 k^2 \quad M'_2 = \pi^2 k^4$$

$$M_3 = \pi k^4 A^2 \quad M'_3 = 2 \pi k^8 A^4$$

on aura

$$S_2 = \frac{M - \pi \mu + \pi v \sqrt{-1} + M_1 \mu^2 + M_1 v^2}{M_2 - M_3 \mu - M_3 v \cdot \sqrt{-1}}$$

$$S_4 = \frac{M' - \pi \mu + \pi v \sqrt{-1} + M'_1 \mu^2 + M'_1 v^2}{M'_2 - M'_3 \mu - M'_3 v \cdot \sqrt{-1}}$$

et par conséquent

$$\begin{cases} \mu^2 + N \mu + v^2 + N_1 \sqrt{-1} \cdot v + N_2 = 0 \\ \mu^2 + N' \mu + v^2 + N'_1 \sqrt{-1} \cdot v + N'_2 = 0 \end{cases}$$

en posant

$$N = \frac{S_2 M_3 - \pi}{M_1} \quad N' = \frac{S_4 M'_3 - \pi}{M'_1}$$

$$N_1 = \frac{S_2 M_3 + \pi}{M_1} \quad N'_1 = \frac{S_4 M'_3 + \pi}{M'_1}$$

$$N_2 = \frac{M - S_2 M_2}{M_1} \quad N'_2 = \frac{M' - S_4 M'_2}{M'_1}$$

ou

$$\begin{cases} (N - N') \mu + (N_1 - N'_1) \sqrt{-1} \cdot \nu + (N_2 - N'_2) = 0 \\ \mu^2 + \frac{1}{2} (N + N') \mu + \nu^2 + \frac{1}{2} (N_1 + N'_1) \sqrt{-1} \cdot \nu + \frac{1}{2} (N_2 + N'_2) = 0 \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{cases} \nu = -\frac{(N'_2 - N_2) - (N - N') \mu}{(N_1 - N'_1)} \cdot \sqrt{-1} \\ \mu = \frac{-P_1 \pm \sqrt{P_1^2 - 4 P P_2}}{2 P} \end{cases}$$

où est

$$\begin{cases} P = 2 [(N_1 - N'_1)^2 - (N - N')^2] \\ P_1 = (N + N') (N_1 - N'_1)^2 + 4 (N'_2 - N_2) (N - N') - (N^2_1 - N'^2_1) (N - N') \\ P_2 = (N^2_1 - N'^2_1) (N'_2 - N_2) + (N_2 - N'_2) (N_1 - N'_1)^2 - 2 (N'_2 - N_2)^2 \end{cases}$$

Mais comme nous pouvons obtenir les sommes des puissances semblables des racines d'une équation ou moyen des formules de Newton, on aura

$$S_1 = A_1$$

$$S_2 = A^2_1 - 2 A_2$$

$$S_3 = A^3_1 - 3 A_1 A_2 + 3 A_3$$

$$S_4 = A^4_1 - 4 A^2_1 A_2 + 4 A_1 A_3 + 2 A^2_2 - 4 A_4$$

$$S_5 = A^5_1 - 5 A^3_1 A_2 + 5 A_1 A_3 + 5 (A^2_2 - A_1) A_4 - 5 (A_2 A_3 - A_5)$$

⋮

⋮

⋮

et par conséquent

$$N = \frac{(A^2_1 - 2A_2) k^4 A^2_1 - 1}{A^2_1 \cdot k^2} \pi$$

$$N_1 = \frac{(A^2_1 - 2A_2) k^4 A^2_1 + 1}{A^2_1 \cdot k^2} \pi$$

$$N_2 = \frac{2\pi^2 A_2}{A^2_1}$$

$$N' = \frac{2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A^2_2\}] k^8 A^4_1 - 1}{A^4_1 k^4} \pi$$

$$N'_1 = \frac{2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A^2_2\}] k^8 A^4_1 + 1}{A^4_1 k^4} \pi$$

$$N'_2 = \frac{2\pi^2 \cdot [2\{A_1(A_1 A_2 - A_3) + A_4\} - A^2_2]}{A^4_1}$$

$$P = 2 \left[ \left( \frac{(A^2_1 - 2A_2) k^4 A^2_1 + 1}{A^2_1 \cdot k^2} - \frac{2(A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A^2_2\}) k^8 A^4_1 + 1}{A^4_1 k^4} \right)^2 - \left( \frac{(A^2_1 - 2A_2) k^4 A^2_1 - 1}{A^2_1 \cdot k^2} - \frac{2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A^2_2\}] k^8 A^4_1 - 1}{A^4_1 k^4} \right)^2 \right] \cdot \pi^2$$

$$\begin{aligned}
 P_1 = & \left\{ \left[ \frac{(A_1^2 - 2A_2) k^4 A_1^2 - 1}{A_1^2 k^2} + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{2[A_1 + 2 \{ 2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A_2^2 \}] k^8 A_1^4 - 1}{A_1^4 k^4} \right] \times \\
 & \times \left[ \frac{(A_1^2 - 2A_2) k^4 A_1^2 + 1}{A_1^2 k^2} - \right. \\
 & - \left. \frac{2[A_1 + 2 \{ 2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A_2^2 \}] k^8 A_1^4 + 1}{A_1^4 k^4} \right]^2 \\
 & - \left[ \frac{\{(A_1^2 - 2A_2) k^4 A_1^2 + 1\}^2}{A_1^4 k^4} - \right. \\
 & \left. - \frac{\{2[A_1 + 2 \{ 2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A_2^2 \}] k^8 A_1^4 + 1\}^2}{A_1^8 k^8} \right] \times \\
 & \times \left[ \frac{(A_1^2 - 2A_2) k^4 A_1^2 - 1}{A_1^2 k^2} - \right. \\
 & - \left. \frac{2[A_1 + 2 \{ 2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A_2^2 \}] k^8 A_1^4 - 1}{A_1^4 k^4} \right] + \\
 & + 8 \left[ \frac{2 \{ A_1(A_1 A_2 - A_3) + A_4 \} - A_2^2}{A_1^4} - \frac{A_2}{A_1^2} \right] \times \\
 & \times \left[ \frac{(A_1^2 - 2A_2) k^4 A_1^2 - 1}{A_1^2 k^2} - \right. \\
 & - \left. \frac{2[A_1 + 2 \{ 2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A_2^2 \}] k^8 A_1^4 - 1}{A_1^4 k^4} \right] \left. \right\} \cdot \pi^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 = & \left\{ \left[ \frac{(A^2_1 - 2A_2) k^4 A^2_1 + 1}{A^4_1 k^4} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2 [A^4_1 + 2 \{ 2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A^2_2 \}] k^8 A^4_1 + 1}{A^8_1 k^8} \right] \times \right. \\
& \times 2 \left[ \frac{2 \{ A_1(A_1 A_2 - A_3) + A_4 \} - A^2_2}{A^4_1} - \frac{A_2}{A^2_1} \right] + \\
& \left. + 2 \left[ \frac{A_2}{A^2_1} + \frac{2 \{ A_1(A_1 A_2 - A_3) + A_4 \} - A^2_2}{A^4_1} \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[ \frac{(A^2_1 - 2A_2) k^4 A^2_1 + 1}{A^2_1 k^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2 [A^4_1 + 2 \{ 2(A_1(A_3 - A_1 A_2) - A_4) + A^2_2 \}] k^8 A^4_1 + 1}{A^4_1 k^4} \right] \right\} \\
& - 8 \left[ \frac{2 \{ A_1(A_1 A_2 - A_3) + A_4 \} - A_2}{A^4_1} - \frac{A_2}{A^2_1} \right]^2 \cdot \pi^4 \\
\alpha_1 = & \left\{ \left( \frac{A_m}{A_{m-1}} \right)^2 - \frac{k^2}{\pi} \left[ \frac{-P_1 \pm \sqrt{P^2_1 - 4PP_2}}{2P} + \frac{1}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{-P_1 \pm \sqrt{P^2_1 - 4PP_2}}{2P} \right] \right\} = \\
= & \left\{ \left( \frac{A_m}{A_{m-1}} \right)^2 - \frac{k^2}{2\pi P(N_1 - N'_1)} \right\} 2P(N'_2 - N_2) + \\
& \left\{ +P_1[(N - N') - (N_1 - N'_1)] \pm [(N_1 - N'_1) - (N - N')] \sqrt{P^2_1 - 4PP_2} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \right\}
\end{aligned}$$

ou en posant

$$Q = \left( \frac{A_m}{A_{m-1}} \right)^2 \frac{k^2}{2\pi P(N_1 - N'_1)} \{ 2P(N'_2 - N_2) + P_1[(N - N') - (N_1 - N'_1)] \}$$

$$Q_1 = - \frac{k^2}{2\pi P(N_1 - N'_1)} [(N_1 - N'_1) - (N - N')]$$

$$Q_2 = P^2_1 - 4PP_2$$

$$\alpha_1 = \sqrt{Q \pm Q_1} \cdot \sqrt{Q_2} =$$

$$= \sqrt{Q_1} \left\{ \sqrt{\frac{\frac{Q}{Q_1} + \sqrt{\left(\frac{Q}{Q_1}\right)^2 - Q_2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\frac{Q}{Q_1} - \sqrt{\left(\frac{Q}{Q_1}\right)^2 - Q_2}}{2}} \right\}$$

Par conséquent, quand  $Q > 0$ , sera

$$Q \pm Q_1 \cdot \sqrt{Q_2} = -z < 0$$

donc

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{z} \cdot \sqrt{-1} \\ \alpha_2 = -\sqrt{z} \cdot \sqrt{-1} \end{cases}$$

parceque, si ce cas n'a pas lieu, alors serait  $Q_2 < 0$ , afin que  $\alpha_1$  ne soit pas nulle ou imaginaire.

Quand est  $k=1$ , il vient

$$N = (A^2_1 - 2A_2 - A_1^{-2}) \pi$$

$$N_1 = (A^2_1 - 2A_2 + A_1^{-2}) \pi$$

$$N_2 = \frac{2A_2}{A_1} \pi^2$$

$$N' = \{2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A^2_2\}] - A_1^{-4}\} \pi$$

$$N'_1 = \{2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A^2_2\}] + A_1^{-4}\} \pi$$

$$N'_2 = \frac{2[2\{A_1(A_1A_2 - A_3) + A_4\} - A^2_2]}{A^4_1} \pi^2$$

$$\begin{aligned} P = & 2[(A^2_1 - 2A_2 + A_1^{-2} - \\ & - 2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A^2_2\}] - A_1^{-4})^2 - \\ & - (A^2_1 - 2A_2 - A^2_1 - \\ & - 2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A^2_2\}] + A_1^4)^2] \pi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 = & 1[A^2_1 - 2A_2 - A_1^{-2} + \\ & + 2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A^2_2\}] - A_1^{-4}] \times \\ & \times [A^2_1 - 2A_2 + A_1^{-2} - \\ & - 2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A^2_2\}] - A_1^{-4}]^2 - \\ & - [(A^2_1 - 2A_2 + A_1^{-2})^2 - \\ & - \{2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A^2_2\}] + A_1^{-4}\}^2] \times \\ & \times [A^2_1 - 2A_2 - A_1^{-2} - \\ & - 2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A^2_2\}] + A_1^{-4}] + \\ & + 8 \left[ \frac{2\{A_1(A_1A_2 - A_3) + A_4\} - A^2_2}{A^4_1} - \frac{A_2}{A^2_1} \right] \times \\ & \times [A^2_1 - 2A_2 - A_1^{-2} - \\ & - 2[A^4_1 + 2\{2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A^2_2\}] + A_1^{-4}] \pi^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P_2 = & \{ [ (A_1^2 - 2A_2 + A_1^{-2}) - \\
 & - \{ 2[A_1^4 + 2\{ 2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A_2^2 \}] + A_1^{-4} \}^2 ] \times \\
 & \times 2 \left[ \frac{2\{ A_1(A_1A_2 - A_3) + A_4 \} - A_2}{A_1^4} - \frac{A_2}{A_1^2} \right] + \\
 & + 2 \left[ \frac{A_2}{A_1^2} + \frac{2\{ A_1(A_1A_2 - A_3) + A_4 \} - A_2}{A_1^4} \right] \times \\
 & \times [ A_1 - 2A_2 + A_1^{-2} - \\
 & - 2[A_1^4 + 2\{ 2(A_1(A_3 - A_1A_2) - A_4) + A_2^2 \}] - A_1^{-4} ]^2 - \\
 & - 8 \left[ \frac{2\{ A_1(A_1A_2 - A_3) + A_4 \} - A_2}{A_1^4} - \frac{A_2}{A_1^2} \right]^2 \} \pi^4
 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{A_m}{A_{m-1}} \right)^2 - \frac{1}{2\pi P(N-N_1)} \{ 2P(N_2 - N_2) + \\ & + P_1[(N-N') - (N_1 - N_1')] \pm [(N_1 - N_1') - (N-N')] \sqrt{P^2 - 4PP_2} \} \end{aligned} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

IV

**Détermination des autres racines imaginaires de l'équations algébrique**

L'expression de la racine imaginaire d'une équation algébrique que nous avons déduit précédemment, est applicable dans la détermination des autres racines imaginaires, comme nous allons voir. La même chose n'arrive pas pour les racines réelles, et il faut que tous les racines de l'équation proposée soient imaginaires afin que soit possible sa résolution complete, ou que le nombre des racines imaginaires soit suffisant pour abaisser le degré de l'équation à moins que 5.

Nous savons déjà déterminer  $\alpha_1$  et par conséquent la racine conjuguée  $\alpha_2$ , et nous pouvons abaisser le degré de  $F(x)$  jusqu'à  $m-1$ ,  $m-2$ , parceque

$$F_1(x) = \frac{F(x)}{x-\alpha_1} = x^{m-1} + (\alpha_1 - A_1)x^{m-2} +$$

$$+ [(\alpha_1 - A_1)\alpha_1 + A_2]x^{m-3} + \dots = 0$$

et

$$\frac{F_1(x)}{x-\alpha_2} = x^{m-2} + (\alpha_2 + \alpha_1 - A_1)x^{m-3} +$$

$$+ [(\alpha_1 - A_1)\alpha_1 + A_2] + [\alpha_2 + (\alpha_1 - A_1)\alpha_2]x^{m-4} + \dots = 0.$$

En appliquant à cette équation la nôtre formule nous pouvons obtenir  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  si ces racines sont imaginaires, et ainsi successivement.

Pour cela, il faut que nous cherchions le nombre des racines réelles des équations, ce qu'on obtient au moyen des méthodes connues de *séparation des racines*.

La méthode attribuée à Lagrange, et premièrement trouvée par Waring, fait connaître le nombre des racines réelles, en opérant au même temps leurs séparation; mais il est très difficile de l'appliquer à cause de le grand nombre des substitutions à faire en général, et à cause de l'étendue du calcul qu'on doit faire pour trouver l'équation aux carrés des différences. Par conséquent les géomètres ont cherché le moyen d'éviter l'usage de cette équation. Toutefois nous allons rappeler un principe notable, à cause de son usage pour former les conditions pour que tous les racines d'une équation donnée soient réelles, et qui peut dans notre question servir très bien pour connaître le cas dans lequel l'emploi de la formule n'est pas possible.

Pour que tous les racines de l'équation proposée soient réelles il est nécessaire et suffisant que l'équation aux carrés des différences soit complète et n'aie que des variations.

Ensuite Budan a présenté un théorème notable au moyen duquel on peut faire facilement la séparation des racines, mais il ne donne pas une solution complète de la question. En 1829,

un grand géomètre, Sturm, a présenté à l'Académie des Sciences de Paris la démonstration de son théorème, qui est un des plus beaux résultats obtenus dans l'Algèbre. Au moyen de ce théorème on obtient la séparation des racines, toutefois le calcul des fonctions qu'il faut employer est compliqué, et par conséquent il faut recourir au théorème de Budan.

On peut aussi employer en beaucoup de cas le théorème de Fourier.

Nous faisons usage de cette méthode pour chercher les racines de l'équation (\*)

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Nous avons donc

$$F(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\frac{F'(x)}{1} = 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$\frac{F''(x)}{2} = 15x^4 + 10x^3 - 6x^2 - 3x + 1$$

$$\frac{F'''(x)}{6} = 20x^3 + 10x^2 - 4x - 1$$

$$\frac{F^{IV}(x)}{24} = 15x^2 + 5x - 1$$

$$\frac{F^V(x)}{120} = 6x + 1$$

$$\frac{F^{VI}(x)}{720} = 1.$$

(\*) Nous tirons cet exemple du *Cours d'Algèbre Supérieure* de M. Serret,

Par conséquent  $-1$  et  $+1$  seront les limites des racines réelles de l'équation proposée. Donc, en substituant dans l'équation proposée et dans ses dérivées  $x$  par les nombres  $-1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +1$ , on obtient

$x$	F	F'	F''	F'''	F <sup>iv</sup>	F <sup>v</sup>	F <sup>vi</sup>
$-1$	+	-	+	-	+	-	+
$-\frac{1}{2}$	+	-	+	+	+	-	+
$0$	+	-	+	-	-	+	+
$+\frac{1}{2}$	+	-	+	+	+	+	+
$+1$	+	+	+	+	+	+	+

Depuis  $-1$  jusqu'à  $-\frac{1}{2}$  il-y-a deux variations, depuis  $0$  jusqu'à  $\frac{1}{2}$  il-y-a deux autres, et depuis  $\frac{1}{2}$  jusqu'à  $1$  il-y-a encore deux; et comme

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{64} \quad F'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{48}{64}$$

$$F(1) = 1 \quad F'(1) = 5$$

l'inégalité

$$\frac{F(1)}{F'(1)} - \frac{F\left(\frac{1}{2}\right)}{F'\left(\frac{1}{2}\right)} > 1 - \frac{1}{2}$$

sert pour nous faire voir que parmi les nombres  $\frac{1}{2}$  et  $1$  n'existent pas des racines réelles.

De la même manière, pour l'intervalle compris parmi  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{2}$ , comme est

$$F''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{128} \quad F'''\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{51}{8}$$

$$F''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \quad F'''\left(\frac{1}{2}\right) = 12$$

il vient

$$\frac{F''\left(\frac{1}{2}\right) - F''\left(\frac{1}{4}\right)}{F'''\left(\frac{1}{2}\right) - F'''\left(\frac{1}{4}\right)} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4}.$$

Pour l'intervalle depuis  $-1$  jusqu'à  $-\frac{1}{2}$ , on a

$$F''(-1) = 6 \quad F'''(-1) = -42$$

$$F''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{8} \quad F'''\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$$

et

$$\frac{F''\left(-\frac{1}{2}\right) - F''(-1)}{F'''\left(-\frac{1}{2}\right) - F'''(-1)} > -\frac{1}{2} + 1.$$

Les inégalités précédentes font voir que dans ces intervalles n'existent pas des racines de l'équation proposée.

Donc toutes les racines de l'équation  $F(x) = 0$  sont imaginaires et nous pouvons par conséquent lui appliquer les formules obtenus précédemment. Soit donc

$$m = 6, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = -1, \quad A_3 = 1, \quad A_4 = 1, \quad A_5 = 1, \quad A_6 = 1,$$

$$\dots = A_{m-2} = A_{m-1} = A_m = 0.$$

Nous aurons

$$N = \frac{3k^4 - 1}{k^2} \pi$$

$$N_1 = \frac{3k^4 + 1}{k^2} \pi$$

$$N_2 = -2\pi^2$$

$$N' = \frac{-2k^8 - 1}{k^4} \pi$$

$$N'_1 = \frac{-2k^8 + 1}{k^4} \pi$$

$$N'_2 = 2\pi^2$$

$$P = 2 \left[ \left( \frac{3k^4 + 1}{k^2} - \frac{-2k^8 + 1}{k^4} \right)^2 - \left( \frac{3k^4 - 1}{k^2} - \frac{-2k^8 - 1}{k^4} \right)^2 \right] \pi^2$$

$$P_1 = \left\{ \left[ \frac{3k^4 - 1}{k^2} + \frac{-2k^8 - 1}{k^4} \right] \left[ \frac{3k^4 + 1}{k^2} - \frac{-2k^8 + 1}{k^4} \right]^2 - \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{(3k^4 + 1)^2}{k^4} - \frac{(-2k^8 + 1)^2}{k^8} \right] \left[ \frac{3k^4 - 1}{k^2} - \frac{-2k^8 - 1}{k^4} \right] + \right.$$

$$\left. + 16 \left[ \frac{3k^4 - 1}{k^2} - \frac{-2k^8 - 1}{k^4} \right] \right\} \pi^3$$

$$P_2 = \left\{ 4 \left[ \frac{(3k^4 + 1)^2}{k^4} - \frac{(-2k^8 + 1)^2}{k^8} \right] - 32 \right\} \pi^4$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 = & \left\{ 1 - \frac{k^2}{4 \cdot \left[ \frac{3k^4+1}{k^2} - \frac{-2k^8+1}{k^4} \right] \cdot \left[ \left( \frac{3k^4+1}{k^2} - \frac{-2k^8+1}{k^4} \right)^2 - \left( \frac{3k^4-1}{k^2} - \frac{-2k^8-1}{k^4} \right)^2 \right]} \right\} \times \\
 & \times \left\{ 8 \left[ \left( \frac{3k^4+1}{k^2} - \frac{-2k^8+1}{k^4} \right)^2 - \left( \frac{3k^4-1}{k^2} - \frac{-2k^8-1}{k^4} \right)^2 \right] + \right. \\
 & + \left\{ \left[ \frac{3k^4-1}{k^2} + \frac{-2k^8-1}{k^4} \right] \left[ \frac{3k^4+1}{k^2} - \frac{-2k^8+1}{k^4} \right]^2 - \right. \\
 & - \left. \left[ \frac{(3k^4+1)^2}{k^4} - \frac{(-2k^8+1)^2}{k^8} \right] \left[ \frac{3k^4-1}{k^2} - \frac{-2k^8-1}{k^4} \right] + \right. \\
 & + 16 \left. \left[ \frac{3k^4-1}{k^2} - \frac{-2k^8-1}{k^4} \right] \right\} \cdot \\
 & \cdot \left[ \left( \frac{3k^4-1}{k^2} - \frac{-2k^8-1}{k^4} \right) - \left( \frac{3k^4+1}{k^2} - \frac{-2k^8+1}{k^4} \right) \right] \pm \\
 & \pm \left[ \left( \frac{3k^4+1}{k^2} - \frac{-2k^8+1}{k^4} \right) - \left( \frac{3k^4-1}{k^2} - \frac{-2k^8-1}{k^4} \right) \right] \\
 & \left[ \left[ \frac{3k^4-1}{k^2} + \frac{-2k^8-1}{k^4} \right] \times \left[ \frac{3k^4+1}{k^2} - \frac{-2k^8+1}{k^4} \right]^2 - \right. \\
 & - \left. \left[ \frac{(3k^4+1)^2}{k^4} - \frac{(-2k^8+1)^2}{k^8} \right] \left[ \frac{3k^4-1}{k^2} - \frac{-2k^8-1}{k^4} \right] + \right. \\
 & + 16 \left. \left[ \frac{3k^4-1}{k^2} - \frac{-2k^8-1}{k^4} \right] \right\}^2 - \\
 & - 8 \left[ \left( \frac{3k^4+1}{k^2} - \frac{-2k^8+1}{k^4} \right)^2 - \left( \frac{3k^4-1}{k^2} - \frac{-2k^8-1}{k^4} \right)^2 \right] \times \\
 & \times \left\{ 4 \left[ \frac{(2k^4+1)^2}{k^4} - \frac{(-2k^8+1)^2}{k^8} \right] - 32 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \right\}^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

\*

Et comme la racine  $\alpha_1$  est déjà déterminé et aussi la racine conjuguée  $\alpha_2$ , nous aurons

$$\begin{aligned} & x^4 + (\alpha_2 + \alpha_1 + 1)x^3 + \{[(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1] + \\ & + [\alpha_2 + \alpha_1 + 1]\alpha_2\}x^2 + \{[(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1] + \\ & + [\alpha_2 + \alpha_1 + 1]\alpha_2\}\alpha_2 + \{[(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1]\alpha_1 - 1\}x + \\ & + \{[(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1] + [\alpha_2 + \alpha_1 + 1]\alpha_2\}\alpha_2 + \\ & + \{[(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1]\alpha_1 - 1\}\alpha_2 + \\ & + \{(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1\}\alpha_2 - 1\}\alpha_1 + 1\} = 0 \end{aligned}$$

ou, en faisant

$$\Delta = \alpha_2 + \alpha_1 + 1$$

$$\Delta_1 = (\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1 + [\alpha_2 + \alpha_1 + 1]\alpha_2$$

$$\Delta_2 = \{[(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1] + [\alpha_2 + \alpha_1 + 1]\alpha_2\}\alpha_2 +$$

$$+ \{(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1\}\alpha_1 - 1$$

$$\Delta_3 = \{[(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1] + [\alpha_2 + \alpha_1 + 1]\alpha_2\}\alpha_2 +$$

$$+ \{[(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1]\alpha_1 - 1\}\alpha_2 +$$

$$+ \{(\alpha_1 + 1)\alpha_1 - 1\}\alpha_2 - 1\}\alpha_1 + 1$$

il vient

$$x^4 + \Delta x^3 + \Delta_1 x^2 + \Delta_2 x + \Delta_3 = 0.$$



Nous pouvons employer la même formule pour obtenir les autres racines, mais comme maintenant l'équation est du quatrième degré on peut les trouver au moyen des formules connues.

Par conséquent

$$p = \Delta_1 - \frac{3}{8} \Delta^2$$

$$q = \frac{1}{8} \Delta^3 - \frac{1}{2} \Delta \Delta_1 + \Delta_2$$

$$r = \frac{\Delta_1 \cdot \Delta^2}{16} - \frac{3}{256} \Delta^4 - \frac{1}{4} \Delta \Delta_2 + \Delta_3$$

$$s = \frac{1}{16} (p^2 - 4r) - \frac{p^2}{1452}$$

$$t = \frac{p^3}{143748} - \frac{p}{1056} (p^2 - 4r) - \frac{q^2}{64}$$

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{27}s^3}} + \frac{1}{2} \\ + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}t - \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{27}s^3}} \end{array} \right\}$$

il vient enfin

$$\alpha_3 = -\frac{\Delta}{4} + T + \sqrt{\frac{-q}{4 \cdot T} - \frac{1}{2} p - T^2}$$

$$\alpha_4 = -\frac{\Delta}{4} + T - \sqrt{\frac{-q}{4 \cdot T} - \frac{1}{2} p - T^2}$$

$$\alpha_5 = -\frac{\Delta}{4} - T + \sqrt{\frac{q}{4 \cdot T} - \frac{1}{2} p - T^2}$$

$$\alpha_6 = -\frac{\Delta}{4} - T - \sqrt{\frac{q}{4 \cdot T} - \frac{1}{2} p - T^2}$$

Nous laissons maintenant aux calculateurs le travail de la recherche du module  $k$  afin que  $\alpha_1$  satisfasse à l'équation proposée.

SOBRE A DIVISÃO EM PARTES IGUAES  
DA DISTANCIA ENTRE DOIS PONTOS E DA CIRCUMFERENCIA  
EMPREGANDO O COMPASSO ORDINARIO

POR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

Advertencia

Os principios que servem de base para se resolver a questão n.º 12, proposta pelo illustre mathematico e academico, o sr. Marrecas Ferreira, no n.º 4 do vol. II d'este Jornal, dão com extrema facilidade a solução de grande numero de questões de geometria, em que podemos considerar só as combinações de circulos, das quaes se derivam tambem propriedades muito interessantes, e algumas construcções mais simples e rigorosas, do que as resultantes da combinação do circulo e da linha recta.

D'entre estas questões só tractaremos das que dizem respeito á *divisão da recta e da circumferencia de circulo em partes iguaes*, por terem intima relação com a questão proposta, cujos limites não devemos ultrapassar, attendendo aos trabalhos do illustre geometra L. Mascheroni (\*).

Devemos notar que Graham e Bird para dividirem o quarto do circulo mural, para o observatorio de Greenwich, tambem tentaram empregar exclusivamente o compasso ordinario, cuja noticia concorreu para que Mascheroni se animasse a recommear as suas anteriores investigações sobre o emprego exclusivo do circulo na solução de questões de geometria elementar, que abandonara por até áquella epoca julgar o seu trabalho perdido em tão ardua empreza.

(\*) Vide *La geometria del compasso* publicada por este geometra em Pavia em 1797. Só conseguimos obter esta interessante obra depois de já termos feito o nosso estudo sobre a questão proposta, por desejarmos apresentar a sua solução o mais breve possivel.

Em vista do que acabamos de dizer, tornar-se-ia inutil apresentar as nossas soluções, se não nos parecessem novas algumas d'ellas, e se o imminente mathematico italiano, Bellavitis, não nos animasse, apresentando a sua solução semelhante á primeira solução dada por Mascheroni.

O sr. Martins da Silva, um dos nossos primeiros genios mathematicos, para quem temos a esperar um brilhante futuro, obteve tambem duas soluções novas da questão proposta, que são extremamente elegantes.

### ORIENTAÇÃO I

*Dados dois pontos a e b, determinar com o compasso ordinario o ponto medio m da distancia que os separa.*

#### PRIMEIRA SOLUÇÃO

Façamos centro nos pontos  $a$  e  $b$ , e com o raio  $ab$  descrevamos os circulos  $bw\alpha a_1$  e  $aw\beta b_1$  (fig. 1), sobre os quaes determinaremos os extremos  $a_1$  e  $b_1$  dos diametros  $a_1b$  e  $b_1a$ , pela inscrição dos semi-hexagonos  $bwu a_1$  e  $awz b_1$ . Assim os pontos  $a_1, a, b, b_1$  estarão em linha recta, e será  $a_1a = ab = bb_1$ . Então se dos pontos  $a$  e  $b$  como centros descrevermos os arcos de circulo  $b_1b_0w_1$  e  $a_1a_0w_1$ , estes cortar-se-hão no ponto  $w_1$ , que unido com  $a$  e  $b$ , determina o triangulo isosceles  $aw_1b$ , cujos lados  $aw_1$  e  $bw_1$  terão para pontos medios os pontos de intersecção  $\alpha$  e  $\beta$  dos arcos já descriptos  $bw\alpha a_1$  e  $aw\beta b_1$  com os arcos de circulo  $b\beta m_1 a_0$  e  $a\alpha m_1 b_0$ , descriptos de  $a_1$  e  $b_1$  como centros e com os raios  $a_1b$  e  $b_1a$ : porquanto o ponto  $\beta$  achando-se sobre o arco  $aw\beta$ , e distando tanto de  $a_1$  como  $a$  dista de  $w_1$ , o referido ponto  $\beta$  estará em linha recta com  $b$  e  $w_1$ , como  $a$  o está com  $a_1$  e  $b_1$ ; e do mesmo modo se reconhece que o ponto  $\alpha$  está em linha recta com  $a$  e  $w_1$ .

Logo, fazendo centro em  $\alpha$  e  $\beta$ , e com os raios  $\alpha a$  e  $\beta b$  descrevendo os arcos de circulo  $am$  e  $bm$ , a sua intersecção  $m$  será o ponto pedido.

Ainda podemos achar este ponto pela intersecção d'um d'estes arcos com o que fôr descripto de  $a$  ou de  $b$  como centros e raio igual ao segmento  $\alpha\beta$ .

SEGUNDA SOLUÇÃO

Como anteriormente, determinemos os pontos  $a_1$  e  $b_1$  em linha recta com  $a$  e  $b$ , bem como o ponto  $m_i$ , intersecção dos arcos de circulo  $a m_i$  e  $b m_i$ . Depois fazendo centro em  $a_1$  e  $b_1$  com os raios  $a_1 a$  e  $b_1 b$ , descrevamos os arcos de circulo  $a a_1 u$  e  $b b_1 z$  (fig. 2), que serão encontrados em  $a_i$  e  $b_i$  pelos arcos de circulo  $m_i a_i$  e  $m_i b_i$  descriptos de  $b$  e  $a$  como centros e raios  $b m_i$  e  $a m_i$ . Finalmente com o centro em  $a_i$  e  $b_i$  e raios  $a_i a_1$  e  $b_i b_1$  descrevendo as semi-circumferencias  $a_1 m m_i$  e  $b_1 m m_i$  symetricas a respeito da recta  $w m_i$ , estas cortar-se-hão no ponto pedido  $m$ .

É claro que acharemos tambem este ponto pela intersecção da semi-circumferencia  $a_1 m m_i$  com a sua symetrica  $a_1 m m_s$  a respeito da recta  $a_1 b_1$ .

Com effeito, os pontos  $a_1, a, b, b_1$  estando em linha recta, sendo  $a_1 a = a b = b b_1$ , e o ponto  $b_i$  achando-se sobre o arco  $b b_i$ , distando tanto de  $a$  como  $b$  dista de  $m_i$ , estará em linha recta com os pontos  $b_1$  e  $m_i$ ; ora se dos pontos  $m_i$  e  $b_i$  baixarmos as perpendiculares  $m_i m$  e  $b_i m_0$  sobre o lado  $a b_1$  do triangulo isosceles  $a b_1 m_i$ , o ponto  $m$  será o meio do segmento  $a b$ , e  $m_0$  o ponto medio do segmento  $b_1 m$ : logo, a circumferencia  $b_1 m m_i$  de raio  $b_i m_i = b_i b_1$  com o centro em  $b_i$ , passará por  $m$ , onde será encontrada pelas circumferencias symetricas a respeito das rectas  $w m_i$  e  $a_1 b_1$ .

TERCEIRA SOLUÇÃO

Com o raio  $a b$  e os centros  $a$  e  $b$  descrevamos os circulos  $b w_0 u w$  e  $a w_0 z w$  (fig. 3), que se cortam em  $w_0$  e  $w$ ; e com o mesmo raio e o centro em  $w$  descrevamos o circulo  $u a s b z$ , que corta os dois primeiros nos pontos  $u$  e  $z$ , situados em linha recta com o ponto  $w$ , por serem vertices do semi-hexagono inscripto  $u a b z$  n'este circulo. Depois faremos centro em  $u$  e  $z$ , e com os raios  $u a, u b$  e  $z a, z b$  descreveremos os arcos  $a z w, b \beta w$  e  $t b j, t a h$ , que se cortam em  $t$  e  $t_0$ ; e tomando novamente os pontos  $u$  e  $z$  para centros e com os raios  $u s$  e  $z s$ , iguaes ao segmento  $w t$ , descreveremos os arcos de circulo  $s \beta \delta g$  e  $s \alpha \gamma f$ , que cortarão os arcos de circulo  $b \beta w$  e  $a z w$  nos pontos  $\beta$  e  $\alpha$ . Finalmente fazendo centro n'estes pontos e com os raios  $\alpha a$  e  $\beta b$  descrevendo os circulos  $a m m_0 \gamma$  e  $b m m_0 \delta$ , um dos seus pontos de intersecção  $m$  será o ponto medio da distancia  $a b$ .

Com effeito, dos pontos  $b$  e  $\beta$  baixando as perpendiculares  $bp$  e  $\beta\pi$  sobre o diametro  $uhfw\pi gppjz$  do circulo ( $w$ ), e considerando o triangulo rectangulo  $uwt$ , teremos, em primeiro logar,

$$wt = \sqrt{ut^2 - uw^2}$$

mas é

$$\overline{ut}^2 = \overline{ub}^2 = \overline{up}^2 + \overline{pb}^2$$

ora fazendo  $ab=r$ , será

$$up = \frac{3}{2} \cdot r \text{ e } pb = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}$$

d'onde

$$\overline{ut}^2 = 3 \cdot r^2$$

e portanto

$$wt = r \cdot \sqrt{2} = us = zs,$$

logo  $wt$  é igual ao lado do quadrado  $uszs'$  inscripto no circulo  $uasbsz's'$  de raio  $r$ , e o ponto de intersecção  $s$  dos arcos  $s\alpha\gamma f$  e  $s\beta\delta g$  será o meio do arco  $ab$ , ou um dos extremos do diametro  $sws'$  perpendicular ao diametro  $uz$ .

Em segundo logar, se representarmos por  $x$  e  $y$  os segmentos

$w\pi = \frac{1}{2} \alpha\beta$  e  $\pi\beta$ , os triangulos rectangulos  $u\pi\beta$  e  $z\pi\beta$  dão

$$y^2 = 2 \cdot r^2 - (r+x)^2 = r^2 - 2 \cdot r \cdot x - x^2$$

e

$$y^2 = r^2 - (r-x)^2 = 2 \cdot r \cdot x - x^2$$

d'onde

$$\alpha\beta = 2 \cdot x = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \cdot r.$$

Logo os pontos  $\alpha$  e  $\beta$  são centros dos circulos  $amm_0\gamma$  e  $bmm_0\delta$ , que, passando por  $a$  e  $b$ , se cortam no ponto medio pedido  $m$ .

QUARTA SOLUÇÃO

Façamos centro em  $a$  e com o raio  $ab$  descrevamos o circulo  $bw_0a_1w$  (fig. 4), no qual determinaremos o hexagono inscripto  $bw_0va_1uw$ . Sendo  $v w_0$  um dos lados d'este hexagono paralelo ao diametro  $a_1ab$ , faremos centro em  $a_1$  e  $b$ , e com os raios iguaes  $a_1w_0$  e  $bw$  descreveremos os arcos de circulo  $t_1w_0w't_1$  e  $t_1t_2vu't_2t'_1$ , que se cortarão em  $t_1$  e  $t'_1$ , sendo (como vimos na solução anterior)  $at_1$  igual ao lado do quadrado  $bs_1a_1s'_1$  inscripto no circulo ( $a$ ) ou de raio  $ab=r$ . Assim fazendo centro em  $a_1$  e com um raio igual a  $at_1$  descreveremos o arco  $t_2s_1s'_1t'_2$ , que, sobre o circulo anterior ( $a$ ), determinará dois dos vertices  $s_1$  e  $s'_1$  do referido quadrado ou os extremos do diametro  $s_1as'_1$ , perpendicular ao diametro  $a_1ab$ ; e cortará o arco  $t_1t_2vu't_2t'_1$  nos pontos  $t_2$  e  $t'_2$ , taes que, se fizermos centro n'estes pontos e com os raios  $t_2a_1$  e  $t'_2a_1$  descrevermos arcos de circulo, estes cortar-se-hão no ponto medio pedido  $m$ : porquanto, representando por  $m_1$  o ponto de intersecção do diametro  $a_1b$  com a recta  $t_2t'_2$ , teremos

$$\frac{m_1t_2}{a_1t_2} = \frac{m_1t'_2}{a_1t'_2} = \frac{m_1t_2}{bt_2} = \frac{m_1t'_2}{bm_1}$$

ou, fazendo  $a_1m_1 = x_1$  e  $m_1t_2 = y_1$ ,

$$y_1^2 = 2.r^2 - x_1^2 = 3.r^2 - (2.r - x_1)^2$$

d'onde

$$x_1 = \frac{3}{4}.r = a_1m_1 = m_1m.$$

Logo, etc.

*Observações.* — Nas figg. 1 e 2 os lados  $am_i$  e  $bm_i$  do triangulo isosceles  $am_ib$  são iguaes a  $r.\sqrt{2}$  ou ao lado do quadrado inscripto no circulo ( $w$ ) de raio  $r=ab$ ; e a altura  $mm_i$  d'este triangulo será igual a  $\frac{r}{2}\sqrt{7}$ .

Na fig. 3 os arcos  $b\delta w$  e  $a\gamma w$  descriptos de  $a$  e  $b$  como centros e raio  $r=ab$  serão divididos em duas partes iguaes pelos pontos  $\delta$  e  $\gamma$ , em que são cortados pelos arcos  $s\beta\delta g$  e  $sa\gamma f$ ,

sendo por isso equilatero o triangulo  $\gamma s \delta$ ; a recta  $\alpha \beta$  prolongada corta o circulo  $us z$  nos pontos  $\alpha'$  e  $\beta'$ , taes que será  $\alpha \beta = \frac{1}{3} \alpha' \beta'$ ; finalmente a perpendicular  $\beta \pi$  é igual a  $\frac{r}{4} \sqrt{7}$ , e portanto igual a metade da altura  $m m_i$  do triangulo  $a m_i b$  das figg. 1 e 2.

Muitas outras propriedades e mais algumas soluções do problema proposto se derivam das figuras relativas a estas quatro soluções, mas de que não nos occuparemos agora.

## II

*Sendo dados dois pontos a e b, dividir em qualquer numero de partes iguaes a distancia que os separa, empregando o compasso ordinario.*

### SOLUÇÃO

Consideremos em primeiro logar o caso simples da divisão em tres partes iguaes.

N'este caso determinaremos os pontos  $a_1$  e  $b_1$  (fig. 5) em linha recta com  $a$  e  $b$  (como fizemos na fig. 1, para determinar o ponto medio  $m$  d'esta distancia); e pelo mesmo processo acharemos os pontos  $a_2$  e  $b_2$ , tambem em linha recta com os primeiros, sendo portanto  $a_2 a_1 = a_1 a = a b = b b_1 = b_1 b_2$ . Depois fazendo centro em  $a$  e  $b$  e com os raios  $a b$ ,  $a b_1$ ,  $a b_2$  e  $b a$ ,  $b a_1$ ,  $b a_2$  descreveremos os arcos de circulo  $b w a_1$ ,  $b_1 w_1 a_1 a_2$ ,  $b_2 w_2$  e  $a w \beta b_1$ ,  $a_1 w_1 \beta_1 b_2$ ,  $a_2 w_2$ , cortando-se os dois ultimos arcos d'estas series no ponto  $w_2$ , que será o vertice d'um triangulo isosceles  $a w_2 b$ , cujos lados  $a w_2$  e  $b w_2$  serão cortados respectivamente pelos outros arcos nos pontos  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  e  $\beta$ ,  $\beta_1$ , que os dividem em tres partes iguaes.

Tractemos agora de obter estes pontos.

Considerando primeiramente o lado  $b w_2$ , temos que o ponto  $\beta_1$ , devendo distar tanto de  $a_2$  como  $a_1$  dista de  $w_2$ , será determinado pela intersecção do arco de circulo  $a_1 w_1 \beta_1 b_2$  com o arco descripto de  $a_2$  com o raio  $a_2 b_1$  igual a  $w_2 a_1$ ; e similhantemente o ponto  $\beta$ , distando tanto de  $a_2$  como  $a$  dista de  $w_2$ , ou distando tanto de  $a_1$  como  $a$  dista de  $\beta_1$ , será a intersecção do arco  $a w \beta b_1$  com o arco descripto de  $a_2$  com o raio  $a_2 \beta$  igual a  $w_2 a$ , ou com o arco descripto de  $a_1$  com o raio  $a_1 \beta$  igual a  $\beta_1 a$ .



Emquanto aos pontos  $\alpha$  e  $\alpha_1$  que dividem  $aw_2$  em tres partes iguaes, obtêm-se por uma construcção perfeitamente symetrica. Assim o referido triangulo isosceles  $aw_2b$  dá

$$\alpha\beta = \frac{2}{3}.ab = \frac{2}{3}.r \quad \text{e} \quad \alpha_1\beta_1 = \frac{1}{3}.ab = \frac{1}{3}.r.$$

Logo, fazendo centro em  $\beta$  e  $\beta_1$ , e com os raios  $\beta b$  e  $\beta_1 b$  descrevendo arcos de circulo  $bn$  e  $bn_1$ , e com o centro em  $a$  e os raios iguaes a  $\alpha\beta$  e  $\alpha_1\beta_1$  descrevendo arcos de circulo, estes cortarão respectivamente os dois primeiros nos pontos  $n$  e  $n_1$ , taes que não só estão em linha recta com  $a$  e  $b$ , mas dividem em tres partes iguaes a distancia entre estes pontos.

Se tomarmos para centros os pontos  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  e  $b$ , teremos uma construcção symetrica da anterior.

Ainda podemos determinar  $n$  e  $n_1$  pela intersecção dos arcos  $bn$  e  $bn_1$ , com os arcos  $an$  e  $an_1$  descriptos de  $\alpha$  e  $\alpha_1$  como centros e com os raios  $\alpha a$  e  $\alpha_1 a$ ; etc.

Agora, como vamos ver, ser-nos-ha facil deduzir o processo para dividir em  $n$  partes iguaes a distancia dada  $ab$ .

Determinemos, nas direcções  $ba$  e  $ab$ ,  $(n-1)$  pontos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$  e  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}$ , sendo então iguaes os segmentos  $a_{n-1}a_{n-2}, a_{n-2}a_{n-3}, \dots, a_2a_1, a_1a, ab, bb_1, b_1b_2, \dots, b_{n-3}b_{n-2}, b_{n-2}b_{n-1}$ ; e fazendo centro em  $a$  e  $b$  com os raios  $ab, ab_1, ab_2, \dots, ab_{n-2}, ab_{n-1}$  e  $ba, ba_1, ba_2, \dots, ba_{n-2}, ba_{n-1}$ , descrevendo as duas series de arcos de circulo  $bw_\alpha a_1, b_1w_1 \alpha_1 a_2, b_2w_2 \alpha_2 a_3, \dots, b_{n-2}w_{n-2} \alpha_{n-2} a_{n-1}, b_{n-1}w_{n-1}$  e  $aw_\beta b_1, a_1w_1 \beta_1 b_2, a_2w_2 \beta_2 b_3, \dots, a_{n-2}w_{n-2} \beta_{n-2} b_{n-1}, a_{n-1}w_{n-1}$ , o ponto de intersecção  $w_{n-1}$  dos ultimos arcos  $a_{n-1}w_{n-1}$  e  $b_{n-1}w_{n-1}$  de cada uma d'estas series será o vertice d'um triangulo isosceles  $aw_{n-1}b$ , cujos lados  $aw_{n-1}$  e  $bw_{n-1}$  serão cortados respectivamente pelos outros arcos nos pontos  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}$  e  $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}$ , que os dividem em  $n$  partes iguaes.

Determinemos primeiramente os pontos de divisão do lado  $bw_{n-1}$ ; para o que fazemos centro em  $a_{n-1}$ , e com os raios  $a_{n-1}\beta, a_{n-1}\beta_1, a_{n-1}\beta_2, \dots, a_{n-1}\beta_{n-3}, a_{n-1}\beta_{n-2}$ , iguaes respectivamente a  $w_{n-1}a, w_{n-1}a_1, w_{n-1}a_2, \dots, w_{n-1}a_{n-3}, w_{n-1}a_{n-2}$ , descreveremos arcos de circulo, que cortarão os arcos

da segunda serie  $aw\beta b_1, a_1w_1\beta_1b_2, \dots aw_{n-1}$ , nos pontos pedidos  $\beta, \beta_1, \dots \beta_{n-2}$ .

Para determinarmos os pontos  $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{n-2}$ , seguiremos um caminho perfeitamente symetrico.

Em virtude das construcções indicadas, o triangulo isosceles considerado dar-nos-ha

$$\alpha\beta = \frac{n-1}{n} \cdot ab = \frac{n-1}{n} \cdot r, \alpha_1\beta_1 = \frac{n-2}{n} \cdot r, \alpha_2\beta_2 = \frac{n-3}{n} \cdot r, \dots$$

$$\alpha_{n-3}\beta_{n-3} = \frac{2}{n} \cdot r, \alpha_{n-2}\beta_{n-2} = \frac{1}{n} \cdot r.$$

Logo, fazendo centro em  $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-3}, \beta_{n-2}$ , e com os raios  $\beta b, \beta_1 b, \beta_2 b, \dots \beta_{n-3} b, \beta_{n-2} b$ , descrevendo arcos de circulo  $bn, bn_1, \dots bn_{n-2}$ , e com o centro em  $a$  e os raios iguaes a  $\alpha\beta, \alpha_1\beta_1, \dots \alpha_{n-2}\beta_{n-2}$ , descrevendo arcos de circulo, estes cortarão os primeiros respectivamente nos pontos  $n, n_1, n_2, \dots n_{n-2}$ , taes que não só estarão em linha recta com  $a$  e  $b$ , mas dividirão em  $n$  partes iguaes a distancia entre estes pontos.

*Observação.*—Das outras tres soluções, que nos dão a divisão da recta  $ab$  em duas partes iguaes, tambem se derivam soluções para a divisão d'esta recta em  $n$  partes iguaes, mas são menos simples do que a que acabamos de indicar; entretanto podemos deduzir d'ellas propriedades interessantes, de que n'outra occasião nos occuparemos.

### III

*Sendo dada uma circumferencia de circulo, dividil-a em quatro, cinco, oito, dez, doze, etc. partes iguaes, empregando simplesmente o compasso ordinario.*

#### SOLUÇÃO

Seja  $bs_1a_1s'_1$  (fig. 4) a circumferencia dada, tendo o centro em  $a$  e descripta com o raio  $ab = r$ .

Para dividirmos esta circumferencia em quatro partes iguaes, ou para lhe inscrevermos o quadrado, inscrever-lhe-hemos primeiramente o hexagono regular  $bw_0va_1uw$ , e fazendo centro nos

vertices  $a_1$  e  $b$ , ou extremos do diametro  $a_1 a b$ , com os raios  $a_1 w_0 = a_1 w$  e  $b v = b u$  descreveremos os arcos de circulo  $t_1 w_0 w t'_1$  e  $t_1 v u t'_1$ , que cortando-se em  $t_1$  e  $t'_1$  darão, como já vimos, o segmento  $a t_1 = a t'_1$ , que representa a grandeza do lado do quadrado pedido.

Sendo o diametro  $a_1 b$  uma das diagonaes d'este quadrado, a outra será o diametro  $s_1 s'_1$ , determinado pelos pontos de intersecção  $s_1$  e  $s'_1$  da circumferencia dada (a) com o arco de circulo  $t_2 s_1 s'_1 t'_2$ , descripto de  $a_1$  com um raio igual ao referido segmento  $a t_1$ : d'onde resulta que estes pontos de intersecção dividem os arcos  $w_0 v$  e  $w u$  de  $60^\circ$  em duas partes iguaes, e que por conseguinte o arco  $\widehat{v s_1}$  será  $\frac{1}{12}$  da circumferencia (a); e a corda  $v s_1$  o lado do dodecagono regular inscripto n'esta circumferencia.

Fazendo centro em  $a_1$  e  $s_1$  e com os raios  $a_1 a$  e  $s_1 a$  descrevendo os arcos de circulo  $a v t_0$  e  $a v_1 t_0$ , o seu ponto de intersecção  $t_0$  estará evidentemente sobre a circumferencia  $t_1 t_0 t'_1$  de raio  $a t_1$  e centro  $a$ , por consequencia, se fizermos centro em  $t_1$  e com o raio igual a  $t_0 a_1 = t_0 s_1$  descrevermos o arco  $a_2 s_2$ , este cortando a circumferencia dada (a) nos pontos medios  $a_2$  e  $s_2$  dos arcos  $a_1 a_2 s_1$  e  $s_1 s_2 b$ , o arco  $s_1 s_2$  será  $\frac{1}{8}$  d'esta circumferencia, e a corda  $s_1 s_2$  o lado do octogano regular inscripto.

Os pontos de intersecção  $v$  e  $v_1$  dos arcos  $a v t_0$  e  $a v_1 t_0$  com o arco  $a_1 s_1$  dividem-n'o evidentemente em tres partes iguaes  $\widehat{a_1 v_1}$ ,  $\widehat{v_1 v}$  e  $\widehat{v s_1}$ , que representam arcos de  $\frac{1}{12}$  da circumferencia (a); e o ponto  $a_2$  sendo o ponto medio do arco  $v_1 v$ , o arco  $a_2 v$  será  $\frac{1}{24}$  d'esta circumferencia; e a corda  $a_2 v$  o lado do polygono regular de vinte e quatro lados inscripto.

Se fizermos centro em  $w_0$  e  $w$  e com os raios iguaes ao segmento  $a t_1$ , ou lado do quadrado  $b s_1 a_1 s'_1$ , descrevermos arcos de circulo, os seus pontos de intersecção  $i_0$  e  $i'_0$  dividirão o raio  $a_1 a$  em media e extrema razão.

Com effeito, o triangulo rectangulo  $w_0 m i_0$ , cujo vertice  $m$  é, como sabemos, o meio de  $a b$  ou de  $w_0 w$ , dá

$$\overline{m i_0}^2 = \overline{w_0 i_0}^2 - \overline{w_0 m}^2 = \frac{5}{4} r^2$$

d'onde

$$m i_0 = i'_0 m = \frac{r\sqrt{5}}{2}$$

e tomando o ponto  $a$  para origem, e attendendo aos signaes, vem

$$m a + a i_0 = \frac{r\sqrt{5}}{2}$$

e

$$m a + a i'_0 = -\frac{r\sqrt{5}}{2}$$

logo

$$a i_0 = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$$

e

$$a i'_0 = -\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Assim o segmento positivo  $a i_0$  será igual á grandeza do lado do decagono regular convexo inscripto na circumferencia (a) de raio  $r$ ; e o segmento negativo  $a i'_0$  será o lado do decagono regular estrellado.

Os segmentos  $s_1 i_0$  e  $s_1 i'_0$  serão respectivamente as grandezas dos lados do pentagono regular convexo inscripto e o do pentagono regular estrellado: porquanto o triangulo  $i_0 s_1 i'_0$  sendo rectangulo, por ter o vertice  $s_1$  sobre a circumferencia descripta de  $m$  com o raio  $m s_1 = m i_0 = i'_0 m$ , se fizermos  $a i_0 = d$ ,  $i'_0 a = d'$  e  $s_1 i_0 = p$ ,  $s_1 i'_0 = p'$ , deduz-se immediatamente da figura

$$d + d' = r\sqrt{5}$$

$$d - d' = r$$

$$d \cdot d' = r^2$$

$$p^2 + p'^2 = 5 \cdot r^2$$

e logo

$$p = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \text{ e } p' = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Sendo  $s_1 s'_1$  o diametro que passa por dois vertices oppostos  $s_1$  e  $s'_1$  do decagono convexo inscripto (fig. 8), é claro que os arcos  $p_1 d_2$  e  $p_1 d_3$  correspondentes aos dois lados d'este polygono parallelos ao referido diametro, ficarão divididos ao meio pelos vertices  $b$  e  $a_1$  do quadrado inscripto  $a_1 s_1 b s'_1$ , e por conseguinte o arco  $p_1 b$  será  $\frac{1}{20}$  da circumferencia (a), e a corda  $p_1 b$  o lado do icosagono regular inscripto.

Em vista do estudo que acabamos de fazer, ficará, pois, também determinado o lado do pentedecagono inscripto.

Como vamos ver, o processo que seguimos para dividir em duas partes iguaes o arco de  $60^\circ$  e o de  $90^\circ$ , é um caso particular do processo para dividir também qualquer arco de circulo em duas partes iguaes; d'onde resulta que, tomando por base os polygonos de tres, quatro, cinco e quinze lados, poderemos dividir a circumferencia em partes iguaes, representadas pelos numeros  $3 \cdot 2^n$ ,  $4 \cdot 2^n$ ,  $5 \cdot 2^n$  e  $15 \cdot 2^n$ .

Seja, pois,  $ab$  (fig. 3) um arco qualquer, cujo ponto medio  $s$  tractamos de determinar, sendo  $w$  o centro d'este arco.

Façamos centro nos extremos  $a$  e  $b$  do arco, e com o raio  $aw = bw$  descrevamos os arcos  $wu$  e  $wz$ . Depois fazendo centro em  $w$  e raio  $ab$ , tracemos um arco que corte estes arcos em dois pontos que designaremos por  $u$  e  $z$ , taes que as cordas  $uw$  e  $wz$  sejam equipollentes á corda  $ab$ . Tomando estes pontos para centros, e com os raios  $za$  e  $zb$  descreveremos os arcos  $at$  e  $bt$ , que se cortam em  $t$ , determinando o segmento  $tw$ . Tomando-o para raio e com os mesmos centros descreveremos os arcos  $fs$  e  $gs$ , que se cortarão no ponto medio  $s$  do arco dado  $ab$ .

Com effeito, o trapezio  $uabz$  sendo isosceles, dá

$$\overline{az}^2 = \overline{au}^2 + 2 \cdot ab \cdot uz = \overline{aw}^2 + 2 \cdot \overline{wz}^2$$

e o triangulo  $tzw$  sendo rectangulo, teremos

$$\overline{tz}^2 = \overline{tw}^2 + \overline{wz}^2$$

e por ser  $tz = az$

$$\overline{tw}^2 = \overline{aw}^2 + \overline{wz}^2$$

ou

$$\overline{zs}^2 = \overline{aw}^2 + \overline{wz}^2,$$

Por serem iguaes os triangulos rectangulos  $szw$  e  $swu$ , vem

$$\overline{zs}^2 = \overline{zw}^2 + \overline{ws}^2,$$

logo

$$ws = aw = bw,$$

o que prova estar o ponto  $s$  sobre a circumferencia  $asbs'$ . Agora pela comparação dos angulos dos triangulos considerados é facil de concluir que este ponto tambem divide o arco  $ab$  d'esta circumferencia em duas partes iguaes.

Passemos agora a tractar succintamente do processo para *circumscrever pentagonos, hexagonos, octogonos e decagonos regulares no circulo* (a).

Consideremos (fig. 6) o quadrado inscripto  $a_2s_2s'_2a'_2$ , tendo para vertices os pontos medios  $a_2, s_2, s'_2$  e  $a'_2$  dos arcos  $a_1s_1, s_1b, bs'_1$  e  $s'_1a_1$ ; e representemos por  $i$  e  $i_1$  os pontos de intersecção do lado  $a_2s_2$  d'este quadrado com os lados  $s_1a_1$  e  $s_1b_1$  do quadrado inscripto  $a_1s_1bs_1$ .

É facil de ver que o ponto  $i$  será dado pela intersecção dos arcos de circulo  $aivt_0$  e  $ait_1$  descriptos de  $a_1$  e  $s_2$  com os raios  $a_1a$  e  $s_2a$ ; e similhantemente o ponto  $i_1$  será dado pela intersecção dos arcos  $ai_1w_0\theta_0$  e  $ai_1t_1$ , descriptos de  $b$  e  $a_2$  com os raios  $ba$  e  $a_2a$ .

O segmento  $ii_1$  será, como sabemos, o lado do octogono regular  $ii_1i_2 \dots i_7$ , que se determina pela intersecção dos lados dos dois quadrados que considerámos inscriptos.

Representemos agora por  $II_1I_2 \dots I_7$  o octogono circumscripto, cujos lados  $II_1, I_1I_2, \dots, I_7I$  tenham para pontos de contacto os vertices do octogono inscripto  $s_1s_2bs'_2s'_1a'_2a_1a_2$ , ou sejam paralelos aos lados do octogono  $ii_1i_2 \dots i_7$ .

Assim pela consideração dos triangulos em que se acha dividido o trapezio isosceles  $a_2t_0\theta_0s_2$ , se reconhece immediatamente ser  $s_1I$  igual a  $ia_2$  ou a  $s_1i_1$ ; e  $ii_1$  equipollente a  $t_0I$ .

Logo, os vertices do octogono circumscripto serão determinados por arcos de circulo, tendo o centro nos vertices do octogono inscripto, e descriptos com um raio igual ao segmento conhecido  $ia_2$  ou  $s_1i_1$ .

Os pontos  $t_1$  e  $t'_1$ , que nos deram a grandeza  $at_1$  ou  $at'_1$  do lado do quadrado inscripto, são vertices do quadrado circumscripto  $A_1t_1B_1t'_1$ , que se obtem pelo prolongamento dos lados  $I_7I, I_1I_2, I_3I_4$  e  $I_5I_6$  do octogono circumscripto  $II_1 \dots I_7$ ;

de modo que *fazendo centro nos vertices*  $A_1, t_0, t_1, \theta_0, B_1, \theta'_0, t'_1$  e  $t'_0$  *dos dois quadrados circumscriptos ao circulo dado* (a) *ou vertices do octogono inscripto no circulo*  $A_1 t_1 B_1 t'_1$ , *e com os raios iguaes a*  $A_1 a, t_0 a, t_1 a, \dots t'_0 a$  *descrevermos circulos, estes cortar-se-hão nos vertices do octogono circumscripto*  $I I_1 \dots I_7$ .

Os arcos  $t_1 I v u I_3 t'_1$  e  $t_1 I_1 w_0 I_4 t'_1$  descriptos de  $b$  e  $a_1$  com os raios  $b v$  e  $a_1 w_0$  que se cortam em  $t_1$  e  $t'_1$ , passam pelos vertices  $I, I_3$  e  $I_1, I_4$ ; e os arcos descriptos de  $s_1$  e  $s'_1$  com os mesmos raios passarão por  $I_3, I_6$  e  $I_2, I_7$ .

Por conseguinte, inscrevendo e circumscrevendo dois quadrados, sendo as diagonaes de um parallelas aos lados do outro, *os vertices do octogono circumscripto serão dados pelas intersecções dos arcos de circulo descriptos dos vertices do quadrado inscripto, sendo o seu raio igual ao lado do triangulo equilatero inscripto, com os arcos descriptos dos vertices do quadrado circumscripto, com o raio igual ás suas diagonaes ou ao lado do quadrado inscripto.*

Designemos por  $P P_1 \dots P_4$  o pentagono circumscripto pedido (fig. 8), e por  $s_1, p_1, p_2, p_3$  e  $p_4$  os pontos de contacto dos seus lados  $P P_1, P_1 P_2, \dots P_4 P$  com a circumferencia dada.

Consideremos agora o lado  $P s_1 P_1$  do pentagono circumscripto, e sejam  $\pi$  e  $\pi_1$  os pontos de intersecção dos dois lados  $s_1 p_3$  e  $s_1 p_2$  do pentagono estrellado  $s_1 p_2 p_4 p_1 p_3$  com o terceiro lado  $p_1 p_4$ . Os triangulos  $\pi_1 p_4 s_1$  e  $\pi_1 p_2 p_1$  sendo isosceles, os circulos descriptos de  $p_2$  e  $p_4$  com os raios  $p_1 s_1$  e  $p_4 s_1$  cortar-se-hão em  $\pi$  e  $p_3$ , e sendo  $P s_1$  equipollente a  $\pi_1 p_1$ , segue-se que *os vertices do pentagono circumscripto serão determinados pela intersecção de arcos de circulo descriptos dos vertices do pentagono inscripto como centros e com o raio igual ao segmento conhecido*  $\pi_1 p_1$ .

Representando por  $\pi_3$  a intersecção dos lados  $p_1 p_3$  e  $p_2 p_4$  do pentagono estrellado, e por  $\pi_2$  e  $\pi_4$  as intersecções d'estes lados respectivamente com os lados  $s_1 p_2$  e  $s_1 p_3$ , é facil de ver que *os lados do pentagono estrellado*  $\pi \pi_2 \pi_4 \pi_1 \pi_3$  *são iguaes aos semi-lados do pentagono circumscripto*  $P P_1 \dots P_4$ , *e que são regulares os cinco pentagonos convexos*  $P p_4 \pi_4 \pi_1 s_1, P_1 s_1 \pi \pi_2 p_1, P_2 p_1 \pi_1 \pi_3 p_2, P_3 p_2 \pi_2 \pi_4 p_3$  e  $P_4 p_3 \pi_3 \pi p_4$ .

Representando por  $\delta'_2$  e  $\delta'_3$  as intersecções da recta  $p_1 p_4$  com as rectas  $s_1 d_2$  e  $s_1 d_3$  que passam pelos meios dos arcos  $p_1 p_2$  e  $p_3 p_4$ , teremos  $p_1 \pi_1 = \pi_1 \delta'_3$  ou  $p_1 \delta'_3 = \delta'_2 p_4 = P_1 P$ .

Sejam (fig. 8)  $s_1, d_1, p_1, d_2, p_2, s_1, p_3, d_3, p_4$  e  $d_4$  os pontos de contacto dos lados  $D D_1, D_1 D_2, \dots D_9 D$  do decagono cir-

cumscripção á circumferencia ( $a$ );  $\Delta_2$  a intersecção das cordas  $s_1 p_1$  e  $d_1 d_2$ ; e  $\Delta'_2$  a intersecção das cordas  $s_1 p_2$  e  $d_2 d_4$ .

Teremos, pois, que o semi-lado  $p_1 D_2$  do decagono circumscripção será evidentemente igual a  $a \Delta'_2$ , por ser isosceles o triangulo  $a \pi_2 \Delta'_2$ . Pelo ponto  $p'_1$ , em que o circulo  $p_1 p'_1 \pi_2 \pi_4 p_4$  descripto de  $s_1$  com o raio  $s_1 p_1$  encontra a corda  $s_1 d_2$ , conduzamos as rectas  $p'_1 \Delta_2 P'_1$  e  $p'_1 \Delta'_2 \pi'_1$ , passando por  $\Delta_2$  e  $\Delta'_2$ , que com as rectas  $s_1 a$  e  $s_1 d_1 P'_1$  determinarão o losango  $s_1 P'_1 p'_1 \pi'_1$ , que, como é facil de ver, será igual ao losango  $s_1 P_1 p_1 \pi_1$ .

Ora o trapezio  $s_1 P'_1 \Delta_2 \pi'_1$  sendo evidentemente isosceles, segue-se que será a sua diagonal  $s_1 \Delta_2$  igual á diagonal  $\pi_1 P_1$  do primeiro losango, e portanto os pontos  $\Delta_2$  e  $\Delta'_2$  serão determinados pela intersecção de arcos de circulo descriptos de  $s_1$  e  $d_2$  com o raio conhecido  $\pi_1 P_1$ .

Logo, *os vertices do decagono circumscripção serão intersecções de arcos de circulo descriptos dos vertices do decagono inscripto como centros e com um raio igual ao segmento dado a  $\Delta'_2$ .*

O segmento  $\pi_1 P_1$  representa o lado do pentagono inscripto no circulo  $P_1 P'_1 \pi_1 \pi P$  descripto de  $s_1$  com o raio  $s_1 P$  igual ao semi-lado do pentagono circumscripção ao circulo dado ( $a$ ).

Inscrevamos na circumferencia ( $a$ ) os dois triangulos equilateros  $v b u$  e  $w_0 a_1 w$  (fig. 7) e sejam  $\sigma_1$  e  $\sigma_6$  as intersecções dos lados  $v b$  e  $v u$  do primeiro triangulo com o lado  $w_0 a_1$  do segundo.

Então se supozermos o problema resolvido, tendo o hexagono pedido para pontos de contacto dos seus lados  $H_5 H$ ,  $H H_1$ ,  $H_1 H_2$ ,  $\dots$ ,  $H_4 H_3$  os vertices  $a_1$ ,  $v$ ,  $w_0$ ,  $b$ ,  $w$  e  $u$  dos referidos triangulos, e se considerarmos os lados  $H H_1$  e  $a_1 w_0$ , reconhece-se immediatamente que são equilateros os triangulos  $a_1 H \sigma_6$ ,  $\sigma_6 H v$ ,  $v \sigma_6 \sigma_1$ ,  $\sigma_1 v H_1$ ,  $H_1 \sigma_1 w_0$ , em que se acha dividido o trapezio isosceles  $H a_1 w_0 H_1$ , d'onde resulta ser  $H H_1$  equipollente a  $a_1 \sigma_1$  ou a  $\sigma_6 w_0$ ; e os pontos  $\sigma_6$  e  $\sigma_1$  dividirão  $a_1 w_0$  em tres partes iguaes  $a_1 \sigma_6$ ,  $\sigma_6 \sigma_1$  e  $\sigma_1 w_0$ .

Logo, se (pelo processo já indicado) tomarmos um segmento igual a  $\frac{1}{3}$  do lado do triangulo equilatero inscripto, e com este segmento como raio fizermos centro nos vertices do hexagono inscripto, e descrevermos circulos, os seus pontos de intersecção  $H$ ,  $H_1$ ,  $\dots$ ,  $H_5$ , situados fóra da circumferencia dada, serão os vertices do hexagono circumscripção.



GÉNÉRALISATION DE LA FONCTION  $X_n$  DE LEGENDRE

PAR

M. BIRGER HANSTED

Nous allons étudier les fonctions  $P_n$  et  $Q_n$ , qui sont intégrales particulières de l'équation

$$(x-a)(x-b)y'' + [2x - (a+b)]y' - n(n+1)y = 0.$$

La fonction  $X_n$  de Legendre est connue comme une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \tag{1}.$$

MM. Legendre, Serret et Laurent se sont particulièrement servis de cette équation pour étudier les propriétés de la fonction.

Ordinairement elle est définie comme le coefficient de  $t^n$  dans le développement de l'expression

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de  $t$ . Pour trouver ce développement je me servirai de la serie de Lagrange pour transformer la fonction

$$z = x + t \frac{z^2 - 1}{2}$$

en serie, savoir:

$$\left. \begin{aligned} z = x + \frac{t}{1} \cdot \frac{x^2 - 1}{2} + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right)^2 + \\ + \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right)^3 + \frac{t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right)^4 + \dots \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

en ne considérant que la racine de  $z$  qui pour  $t=0$ , donne  $z=x$ , c'est-à-dire

$$z = \frac{1 - \sqrt{1 - 2xt + t^2}}{t}.$$

En différentiant (2) par rapport à  $x$ , on obtient

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t \cdot d}{1 \cdot dx} \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right) + \\ &+ \frac{t^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right)^2 + \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right)^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

qui donne

$$X_n = \frac{1}{[n]} \cdot \frac{1}{2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

et  $\frac{dz}{dx}$  est appelée la fonction génératrice de  $X_n$ .

Maintenant il faut supposer que la fonction  $P_n$  analogue à la fonction  $X_n$  de Legendre, dont la fonction génératrice est

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{b-a} [(t^2 + 1)(b-a) - 4tx + 2(a+b)t]^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

en déterminant  $z$  par la racine de l'équation

$$z = x + \frac{t(z-a)(z-b)}{b-a}$$

pour laquelle  $t=0$  donne  $z=x$ , soit une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$(x-a)(y-b)y'' + [2x - (a+b)]y' - n(n+1)y = 0 \quad (5).$$

On démontre directement que cette supposition est vrai par l'introduction dans l'équation (5) de

$$y = P_n$$

qui la rend identique en bornant  $n$  à des valeurs positives et entières.

Maintenant je pose

$$Q_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{Z_n dz}{z-x}$$

où

$$Z_n = \frac{1}{[n]} \frac{1}{(b-a)^n} \frac{d^n}{dz^n} [(z-a)^n (z-b)^n].$$

L'intégration par partie  $n$  fois répétée de

$$\int_a^b \frac{Z_n dz}{z-x}$$

changerait l'expression de  $Q_n$  en

$$C \int_a^b \frac{(z-a)^n (z-b)^n dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Car on a

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \frac{Z_n dz}{z-x} &= \left( \frac{Z_n^{(-1)}}{z-x} \right)_{z=a}^{z=b} - \int_a^b \frac{Z_n^{(-1)} dz}{(z-x)^2} \\ \int_a^b \frac{Z_n^{(-1)} dz}{(z-x)^2} &= \left( \frac{Z_n^{(-2)}}{(z-x)^2} \right)_{z=a}^{z=b} - 2 \int_a^b \frac{Z_n^{(-2)} dz}{(z-x)^3} \\ &\dots \dots \dots \\ \int_a^b \frac{Z_n^{(n-1)} dz}{(z-x)^n} &= \left( \frac{Z_n^{(-n)}}{(z-x)^n} \right)_{z=a}^{z=b} - n \int_a^b \frac{Z_n^{(-n)} dz}{(z-x)^{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

d'où il suit que

$$\int_a^b \frac{Z_n dz}{(z-x)} = \left( \frac{Z_n^{(-1)}}{(z-x)} - \frac{Z_n^{(-2)}}{(z-x)^2} + [2] \frac{Z_n^{(-3)}}{(z-x)^3} - \dots \right) + (-1)^n [n-1] \frac{Z_n^{(-n)}}{(z-x)^n} \Big|_{z=a}^{z=b} + (-1)^n [n] \int_a^b \frac{Z^{(-n)} dz}{(z-x)^{n+1}} \quad (7).$$

La quantité sous parentheses doubles étant égal à 0,  $Q_n$  devient d'après la substitution dans (7) de

$$Z_n^{(-n)} = (z-a)^n (z-b)^n$$

$$Q_n = \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \int_a^b \frac{(z-a)^n (z-b)^n dz}{(z-x)^{n+1}} \quad (8).$$

Le second membre de (8) étant intégrale particulière de (5), je sais maintenant intégrer (5) complètement ayant l'intégrale

$$y = C_1 P_n + C_2 Q_n \quad (9).$$

D'ailleurs (8) donne

$$Q_n = \frac{1}{[n]} \frac{1}{(b-a)^{n+1}} + \frac{d^n}{dx^n} \int_a^b \frac{(z-a)^n (z-b)^n dz}{z-x} \quad (10).$$

De (4) on tire

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{b-a} [(t^2+1)(b-a) - 4tx + 2(a+b)]^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots + P_n t^n + \dots \quad (11).$$

En différentiant (11) on obtient

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sqrt{b-a} [2x - (b-a)t - (a+b)]}{[(t^2+1)(b-a) - 4tx + 2(a+b)t]^{\frac{3}{2}}} = \\ & = P_1 + 2P_2 t + 3P_3 t^2 + \dots + nP_n t^{n-1} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12).$$

En multipliant maintenant les deux membres de (12) par

$$(t^2 + 1)(b - a) - 4tx + 2(a + b)t$$

on aura après quelques reductions faciles l'équation suivante:

$$\left. \begin{aligned} & [2x - t(b - a) - (a + b)] \\ & [P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots + P_n t^n + \dots] = \\ & = [t^2 + 1)(b - a) - 4tx + 2(a + b)t] \\ & [P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n + \dots] \end{aligned} \right\} \quad (13).$$

En igualant les coefficients des mêmes puissances de  $t$ , on aura

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= \frac{2x - (a + b)}{b - a} \\ P_2 &= \frac{3}{2} \left( \frac{2x - (a + b)}{b - a} \right)^2 - \frac{1}{2} \\ P_3 &= \frac{5}{2} \left( \frac{2x - (a + b)}{b - a} \right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x - (a + b)}{b - a} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

où généralement la relation

$$(n + 1)P_{n+1}(b - a) = (2n + 1)P_n[2x - (a + b)] - nP_{n-1}(b - a) \quad (15)$$

laquelle pour  $b = 1, a = -1$  se reduit à la relation

$$(n + 1)X_{n+1} = (2n + 1)xX_n - nX_{n-1}$$

formule bien connue relativement à la fonction  $X_n$  de Legendre.

L'analogie entre les fonctions  $P_n$  et  $X_n$  se voit donc en tout lieu.  
Formant les équations

$$\begin{aligned}(2n+1)P_n[2x-(a+b)] &= (n+1)P_{n+1}(b-a) + nP_{n-1}(b-a) \\ (2n+1)Z_n[2x-(a+b)] &= (n+1)Z_{n+1}(b-a) + nZ_{n-1}(b-a)\end{aligned}\quad (16)$$

et en les multipliant la première par  $Z_n$  et la seconde par  $P_n$ , il résulte de leur soustraction

$$\begin{aligned}2(2n+1)P_nZ_n(z-x) &= (n+1)(b-a)(P_nZ_{n+1} - P_{n+1}Z_n) + \\ &\quad + n(b-a)(P_nZ_{n-1} - P_{n-1}Z_n)\end{aligned}\quad (17).$$

En remplaçant successivement dans l'équation (17)  $n$  par  $0, 1, 2, 3, \text{etc.}$ , et en additionnant le système des équations résultantes :

$$\left. \begin{aligned}2.P_0Z_0(z-x) &= (b-a)(P_0Z_1 - P_1Z_0) \\ 2.3.P_1Z_1(z-x) &= (b-a)[2(P_1Z_2 - P_2Z_1) + (P_1Z_0 - P_0Z_1)] \\ 2.5.P_2Z_2(z-x) &= (b-a)[3(P_2Z_3 - P_3Z_2) + 2(P_2Z_1 - P_1Z_2)] \\ \dots\dots\dots \\ 2(2n+1)P_nZ_n(z-x) &= (b-a) \\ &\quad + [(n+1)(P_nZ_{n+1} - P_{n+1}Z_n) + n(P_nZ_{n-1} - P_{n-1}Z_n)]\end{aligned}\right\} (18)$$

j'aurai

$$\begin{aligned}\varphi(x, z) &= P_0Z_0 + 3P_1Z_1 + 5P_2Z_2 + \dots + (2n+1)P_nZ_n = \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{b-a}{z-x} \cdot (Z_{n+1}P_n - P_{n+1}Z_n)\end{aligned}\quad (19).$$

Mais les équations

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b P_m P_n dx &= 0, \quad m \geq n \\ \int_a^b [P_n]^2 dx &= \frac{b-a}{2n+1} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

donnent

$$\int_a^b \frac{Z_{n+1} dz}{z-x} = \frac{2}{(n+1)P_n} + \frac{P_{n+1}}{P_n} \int_a^b \frac{Z_n dz}{z-x} \quad (21)$$

ou

$$(b-a)Q_{n+1} = \frac{2}{(n+1)P_n} + \frac{P_{n+1}}{P_n} (b-a)Q_n \quad (22)$$

d'où on tire

$$\frac{2}{n+1} \cdot \frac{b}{b-a} = Q_{n+1}P_n - P_{n+1}Q_n \quad (23)$$

Substitutions dans (21) successivement par  $n$  les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., et nous aurons le système suivante

$$\left. \begin{aligned} (b-a)Q_0 &= l \frac{x-a}{x-b} \\ (b-a)Q_1 &= \frac{2}{P_0} + \frac{P_1}{P_0} Q_0 (b-a) = 2P_1 \left( l \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + \frac{1}{P_1 P_0} \right) \\ (b-a)Q_2 &= \frac{2}{P_1} + \frac{P_2}{P_1} Q_1 (b-a) = 2P_2 \left( l \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + \frac{1}{2P_2 P_1} + \frac{1}{P_1 P_2} \right) \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

d'où il resulte

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \frac{2P_n}{b-a} \\ \left( l\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + \frac{1}{nP_nP_{n-1}} + \frac{1}{(n-1)P_{n-1}P_{n-2}} + \dots + \frac{1}{P_1P_0} \right) \end{aligned} \right\} (25)$$

et

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{2Q_n}{a-b} \\ \left( \frac{a-b}{2Q_n} + \frac{1}{nQ_nQ_{n-1}} + \frac{1}{(n-1)Q_{n-1}Q_{n-2}} + \dots + \frac{1}{Q_1Q_0} \right) \end{aligned} \right\} (26)$$

formules analogues.

De même la formule

$$(n+1)(b-a)Z_{n+1} = (2n+1)[2x-(a+b)]Z_n - n(b-a)Z_{n-1}$$

conduit à l'équation

$$\left. \begin{aligned} 2(2n+1) \int_a^b \frac{Z_n z dz}{z-x} &= (n+1)(b-a)^2 Q_{n+1} + \\ &+ (2n+1)(a+b)(b-a)Q_n + n(b-a)^2 Q_{n-1} \end{aligned} \right\} (27).$$

Maintenant on a

$$\int_a^b \frac{Z_n z dz}{z-x} = \int_a^b Z_n dz + x \int_a^b \frac{Z_n dz}{z-x}$$

mais

$$\int_a^b Z_n dz = 0$$

donc nous aurons

$$\int_a^b \frac{Z_n z dz}{z-x} = x(b-a)Q_n$$



et (17) se transforme en

$$\left. \begin{aligned} 2(n+1)x(b-a)Q_n &= (n+1)(b-a)^2Q_{n+1} + \\ &+ (2n+1)(a+b)(a-b)Q_n + n(b-a)^2Q_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ou, les reductions faites,

$$(n+1)(b-a)Q_{n+1} = (2n+1)[2x - (a+b)]Q_n - n(b-a)Q_{n-1}$$

laquelle est parfaitement analogue à la formule (15).

Copenhague, le 30 novembre 1881.

## BIBLIOGRAPHIA

*Mélanges de Calcul intégral*, par Joaquim Gomes da Silva.  
Leipzig, 1882.

Com o titulo precedente vem de ser\*publicada em Leipzig uma collecção de memorias sobre Calculo integral do illustre mathematico brasileiro Joaquim Gomes da Silva. O livro é precedido de um prefacio do editor, o sr. C. Henry, d'onde extra-himos as seguintes informações a respeito do auctor, que em Portugal é, julgamos nós, pouco ou nada conhecido:

Nascido no Brazil, a 15 de fevereiro de 1829, na provincia do Maranhão, onde seu pae, o major Ignacio José de Sousa possuia propriedades, manifestou desde a mais tenra infancia um gosto decidido para os estudos psychologicos e physicos. Sua familia destinava-o para a carreira das armas, e porisso alistou-se, sem a menor vocação, como cadete depois de ter frequentado durante um anno a Escola Militar. Não podendo supportar as fadigas d'esta vida, obteve de seu pae a permissão de se consagrar á medicina.

Matriculou-se pois em 1844 na Escola do Rio de Janeiro, onde ao mesmo tempo que fazia o seu curso de medicina, estudava com ardor as mathematicas, acabando por obter honrosos diplomas de medico e engenheiro.

Em 1857 foi nomeado professor da Faculdade de Mathematica do Rio de Janeiro, e n'esse mesmo anno foi eleito deputado ás côrtes d'aquelle imperio.

Apresentou á Academia das Sciencias de Paris algumas memorias, a respeito das quaes a commissão nomeada para as analysar não chegou a dar parecer.

Em 1863 veio á Europa, e a 1 de junho d'este anno morreu em Londres.

Duas terças partes da presente obra estavam já publicadas na imprensa do sr. Brockaus, de Leipzig, na occasião da sua morte. O resto estava ainda em provas. A ultima memoria da collecção foi publicada segundo um manuscripto existente nos Archivos da Academia das Sciencias de Paris.

J. Gomes da Silva dedicava-se tambem á litteratura, e escreveu com o titulo de *Anthologie universelle* uma collecção das melhores poesias lyricas das diversas nações. Quando morreu trabalhava tambem n'um livro sobre sciencias sociaes e philosophicas.

A primeira memoria da collecção intitula-se — *Mémoire sur les méthodes générales d'intégration*, e n'ella occupa-se o auctor da determinação da funcção  $\varphi(x)$  que satisfaz á equação

$$\int_x^\beta f(x, \theta) \varphi(\theta + x) d\theta = F(x)$$

que contém como caso particular as equações de que se occuparam Abel e o sr. Liouville.

Obtem a solução da questão por dois methodos, no primeiro fazendo uso das series, no segundo fazendo uso dos integraes definidos. Pelo que respeita á generalidade no primeiro methodo, ha o inconveniente de fazer o auctor uso das series sem tractar de ver se ellas são ou não convergentes. Este inconveniente é reconhecido por elle no principio, porém mais tarde (pag. 34) diz que é legitimo o emprego das series divergentes, pois que se podem considerar como um symbolo que representa a funcção generatriz da serie, esquecendo a circumstancia de uma mesma serie poder provir do desenvolvimento de mais do que uma funcção. Sabe-se, com effeito que, por exemplo, a somma da serie de Maclaurin nem sempre é igual á funcção que produziu essa serie. No segundo processo obtem a solução expressa por meio de um integral definido, em que entra uma constante que é raiz de uma equação transcendente. Para a resolver emprega um integral definido, que deduz por meio da serie de Lagrange, o que restringe ainda o uso do processo aos casos em que esta serie é convergente e em que os integraes definidos que entram na solução se podem obter.

Se porém os resultados a que Gomes da Silva chegou na sua bella memoria não tem toda a generalidade, que elle parece suppôr, são todavia ainda de muita importancia, e revelam no illustre analysta brasileiro uma intelligencia elevada.

Transformando o problema proposto n'outros, isto é, no problema da sommação das series e no da integração definida póde-se resolver o primeiro em todos os casos em que se souber resolver os outros,

A memoria termina por uma apreciação da importancia do Calculo integral tão eloquente, que não resistimos ao desejo de a transcrever aqui :

«S'il y a quelque chose vraiment séduisant est l'étude de cette branche de l'Analyse (Calculo integral). Voulez-vous connaître la théorie de la distribution de la chaleur à la surface des corps conducteurs? Vous vous arrêtez devant les obstacles que vous présente le Calcul intégral. Voulez-vous connaître le mouvement de la chaleur dans l'intérieur des corps solides d'une figure quelconque? Voilà encore le Calcul intégral qui vous oblige à vous arrêter presque au commencement de la carrière. Voulez-vous connaître la propagation du mouvement à l'intérieur des corps? l'état vibratoire de leurs molécules? la théorie des marées? la figure des planètes qui s'éloignent sensiblement de la forme espherique? la loi de la variation de leurs densités, etc. etc.? Vous rencontrez le Calcul intégral devant vous; immense, impassible, insurmontable, résistant aux efforts combinés de tous les géomètres distingués de l'Europe, dont pas un seul n'a pas pu s'empêcher de lutter, au moins pour quelque temps, corps à corps avec lui! Quand on voit toutes ces théories dependant de ce Calcul et ce Calcul lui-même réduit à un seul-problème, il y a quelque chose que vous pousse, qui vous entraîne presque malgré vous même. On le regarde, on le mesure, on le croit invincible; mais on va en avant, poussé par cette curiosité inquiète qui nous porte dans les sciences à briser nôtre organisation devant les obstacles que nous savons ne pouvoir vaincre!»

A maior parte das outras memorias que vem nas *Mélanges de Calcul intégral* referem-se ainda á questão de que tracta a primeira memoria de que vimos de fallar, cujos principios na ultima applica á theoria do som.

Traz ainda uma memoria interessante — *Sur l'analogie entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ordinaires*, onde desenvolve as ideias expostas por Libri a este respeito no *Jornal de Crelle* e no *Jornal de Liouville*.

G. T.

## ALGUMAS PROPRIEDADES DAS CONICAS

POR

F. DA PONTE HORTA

Publicámos ha tempos no *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes* da Academia Real das Sciencias de Lisboa um rapido estudo sob a epigraphie — *Algumas propriedades das conicas deduzidas de sua geração parallelogrammica*, de cujos fundamentos vamos dar uma ideia geral, nos limites que a simples intelligencia da presente nota nos prescrevem.

Foi-nos sugerido aquelle trabalho pelo seguinte theoremata de geometria superior :

«Se os trez lados de um triangulo girarem respectivamente sobre pontos tomados nos mesmos lados não em linha recta, e dois de seus vertices percorrerem duas rectas dadas, o terceiro vertice descreverá uma conica».

Tendo em mente este theoremata, imaginamos um triangulo movel de que dois lados girassem sobre dois vertices oppostos de um parallelogrammo, e o terceiro sobre um ponto no infinito da diagonal que unisse os outros dois vertices, reconhecendo que se dois vertices d'este triangulo percorressem dois lados concurrentes do parallelogrammo, o terceiro descreveria a ellipse; e quando os lados percorridos por aquelles vertices fossem parallelos, o terceiro vertice descreveria a hyperbole. Observando igualmente que o terceiro lado do triangulo movel poderia girar sobre o ponto no infinito de qualquer recta tirada por um dos vertices da diagonal já referida, o que nos permittiu comprehender a parabola no mesmo systema de geração.

Como porém n'este caso um dos lados do parallelogrammo gerador se acha todo no infinito, deverá um dos lados do triangulo movel girar sobre um dos vertices do lado finito, outro sobre o ponto no infinito do lado opposto, e finalmente o terceiro

sobre o ponto no infinito de qualquer recta tirada pelo outro vertice do lado finito.

Resumindo o que levamos dito, poderá enunciar-se a alludida geração *parallelogrammica* restricta á ellipse e hyperbole do seguinte modo :

«Determina-se o segundo ponto onde qualquer raio partindo de um dos vertices do *parallelogrammo* gerador encontra a curva, tirando pelo ponto onde o dicto raio corta um dos lados oppostos ao dicto vertice uma recta parallela á diagonal tambem opposta ; a qual prolongaremos até encontrar o lado não parallelo passante pelo mesmo vertice no caso da ellipse, ou parallelo no caso da hyperbole ; a recta que unir esta nova intersecção com o vertice opposto, cortará o raio dado no ponto pedido. Accrescentaremos ainda que os vertices d'onde podem emanar os raios, são todos quatro na ellipse e sómente os mesmos dois oppostos na hyperbole».

A nota que hoje publicamos, filiando-se na mesma ordem de ideias da anterior, tem por objecto a deducção de algumas proposições relativas ás diversas linhas que concorrem á determinação de dois pontos da ellipse situados em dois raios dirigidos de dois vertices seguidos do *parallelogrammo* gerador.

A figura 1, a que vamos referir-nos, apresenta o ponto M pertencente ao raio *Sg* determinado pela intersecção d'este raio com a recta *O'h*, sendo o ponto *h* a intersecção de *OS* com a recta *gh* parallela a *OS'*. Encontra-se na mesma figura o ponto M' pertencente ao raio *S'g'* existente na intersecção d'este raio com a recta *O'h'*, sendo *g'h'* parallela a *O'S*.

**THEOREMA 1.º** — Se tirarmos os raios *S'M* e *SM'* (estampa 1), obter-se-hão os pontos *a* e *a'*, determinando uma recta que concorrerá com a recta  $\rho\rho'$  no mesmo ponto de *OO'*.

Com effeito, por serem *O, S, M, S', M', O'* pontos da conica, teremos

$$\overline{SMM'O'O} = \overline{S'MM'O'O} = \overline{S'M'MOO'}$$

Estes dois feixes cortados pelas rectas *O'S'* e *OS*, dão logar ás duas divisões homographicas

$$\rho', a', O', \infty = \rho, a, O, \infty ;$$

d'onde, por conterem dois pontos homologos *coincidentes*, se conclue que as rectas que unirem os outros pontos respectivamente homologos, concorrerão todas no mesmo ponto. Taes são as rectas  $\rho\rho'$ ,  $aa'$  e  $OO'$ , as quaes concorrem no ponto  $D'$ .

THEOREMA 2.<sup>o</sup>—A corda  $MM'$  tambem concorre no ponto  $D'$ .

Por quanto, se a recta  $\rho\rho'$  girar em torno de  $D'$ , os pontos  $\rho$  e  $\rho'$  marcarão duas divisões homographicas sobre as rectas  $SO$ ,  $S'O'$ , e logo os dois feixes  $\bar{S}\rho' \dots$  e  $\bar{S}'\rho \dots$  são homographicos, isto é,  $\bar{S}M \dots = \bar{S}'M' \dots$ . Mas ao raio  $SM'$  do primeiro feixe corresponde o raio  $S'M$  do segundo; por quanto, suppondo que a recta  $\rho\rho'$  passa á posição  $D'a'$ , a recta  $S\rho'$  determinará o ponto  $M'$ , emquanto que  $S'\rho$  determinará o ponto  $M$ . Sendo pois  $\bar{S}MM' \dots = \bar{S}'M'M \dots$ , e devendo as intersecções de dois quaesquer raios do primeiro feixe com os homologos do segundo, tomados inversamente, determinar rectas que concorram no mesmo ponto, tal acontecerá ás diferentes rectas  $MM'$ , sendo  $D'$  esse ponto de concurso, porque se a recta  $\rho\rho'$  tomar a posição  $D'S'$ , será  $S'$  o novo  $\rho'$ ; a recta  $\rho'S$  produzirá o ponto  $g$  no infinito da recta  $OO'$ ; o ponto  $h$  cairá no infinito da recta  $SO$ , e a recta  $O'h$  cortará  $\rho'S$  no ponto  $S'$ . E visto que o outro ponto da conica deve estar no raio  $S'\rho$ , agora  $S'D'$ , segue-se que os dois pontos actuaes  $M$  e  $M'$  estarão ambos na recta  $D'S'$ .

É tambem facil reconhecer que a recta  $OO'$  representa a posição da recta  $MM'$  quando  $D'\rho'$  se confunde com  $D'O'$ .

THEOREMA 3.<sup>o</sup>—Se do ponto  $Y$  onde se intersectam a diagonal  $O'S$  e a corda  $MM'$ , tirarmos a recta  $Y\rho'$ , obter-se-ha um ponto  $m$  tal que a razão das distancias do ponto  $T$  aos dois  $S$  e  $O$  será a mesma que a das distancias do mesmo ponto  $T$  aos dois  $m$  e  $\rho$ .

Com effeito é

$$\frac{TS}{Tm} = \frac{T'O'}{T\rho'} = \frac{TO}{T\rho}$$

d'onde

$$\frac{TS}{TO} = \frac{Tm}{T\rho}$$

**THEOREMA 4.º** — Se pelo ponto  $Y'$ , intersecção da diagonal  $OS'$  com a corda  $MM'$  também tirarmos a recta  $Y'\rho$ , determinaremos o ponto  $m'$  em linha recta com  $m$  e  $D$ .

Com effeito é

$$\frac{T'S'}{T'm'} = \frac{TO}{T\rho} = \frac{TS}{Tm'}$$

repetindo-se a analogia razão de segmentos da proposição anterior,

$$\frac{T'S'}{T'O'} = \frac{T'm'}{T'\rho'}$$

**THEOREMA 5.º** — A recta que une os pontos  $h$  e  $h'$  passa pela intersecção  $D$  da corda com o lado  $SS'$ .

Por quanto é

$$\frac{TS}{Th} = \frac{T'\rho'}{T'O'} \quad \frac{T'S'}{T'h'} = \frac{T\rho}{TO} = \frac{T'\rho'}{T'O'}$$

logo

$$\frac{TS}{Th} = \frac{T'S'}{T'h'}$$

**THEOREMA 6.º** — A recta  $mm'$  é parallela a  $\rho\rho'$ .

Por quanto é

$$\frac{T'm' - T'\rho}{T'm'} = \frac{T'S' - T'O'}{T'S'}$$

d'onde

$$\rho'm' = \frac{T'm'}{T'S'} \cdot OS' = \frac{T\rho}{TO} \cdot OS;$$

mas tambem de ser

$$\frac{Tm}{T\rho} = \frac{TS}{TO}$$



se deduz

$$\rho m = \frac{T \rho}{T O} \cdot OS,$$

logo

$$\rho' m' = \rho m (*).$$

**THEOREMA 7.º** — A intersecção Q das rectas SY e gh está em linha recta com os pontos M e S', e por conseguinte com a.  
Por quanto é

$$\frac{O'P}{O'g} = \frac{O'S'}{OO'}, \quad \frac{O'g}{Og} = \frac{O'\rho'}{OS'}$$

logo

$$\frac{O'P}{Og} = \frac{O'\rho'}{OO'}$$

mas é tambem

$$\frac{Og}{OS} = \frac{OO'}{S'\rho'}$$

logo

$$\frac{O'P}{O'\rho'} = \frac{O'S'}{\rho S'} \dots \dots \dots (a).$$

Considerando o quadrilatero completo SQhM cortado pela recta O'S', poderemos applicar-lhe a fórmula de involução de Chasles

$$a'b'.c'a.cb = -ab.ca'.c'b',$$

(\*) Vid. nota no fim d'este artigo.

com a seguinte correspondencia :

$$a \dots P$$

$$a' \dots \rho'$$

$$b \dots \left. \vphantom{b} \right\} O'$$

$$b' \dots \left. \vphantom{b} \right\}$$

$$c \dots x$$

$$c' \dots \infty$$

da qual se obterá

$$O' \rho' \cdot O' x = P O' \cdot \rho' x$$

ou

$$\frac{O' P}{O' \rho'} = \frac{O' x}{\rho' x};$$

que comparada com a fórmula (a) mostra que o ponto  $x$  se confunde com  $S'$ .

De modo semelhante se demonstra que a recta  $M'Q'$  passa por  $S$ , e por conseguinte por  $a'$ .

**THEOREMA 8.<sup>o</sup>**— Se tirarmos as duas rectas  $Yh$  e  $Y'h'$ , as suas intersecções  $n'$  e  $n$  estarão n'uma recta que passará por  $D'$ , e a razão de  $Th$  a  $Tn$  será ainda a mesma que a de  $Tm$  a  $T\rho$  ou de  $TS$  a  $TO$ .

Com effeito é

$$\frac{T'h'}{T'S'} = \frac{Th}{TS} = \frac{T'n'}{T'O'};$$

é tambem

$$\frac{T'h'}{T'S'} = \frac{Tn}{TO}.$$

logo

$$\frac{T'n'}{T'O'} = \frac{Tn}{TO}$$

Esta recta  $nn'$  é paralela a  $hh'$ , como acontece na proposição 6.<sup>a</sup>, a respeito de  $mm'$  com  $\rho\rho'$ .

THEOREMA 9.<sup>o</sup> — Os pontos  $u$  e  $u'$ , intersecções das rectas que vão de  $M$  para  $O'$  e  $\rho'$  com as que partem de  $M'$  para  $O$  e  $\varepsilon$ , estão n'uma recta paralela a  $O'S$ , á qual chamaremos *recta das intersecções*.

Por quanto da igualdade

$$\frac{T'\rho'}{T'O'} = \frac{T'S'}{T'h'}$$

deduz-se

$$\frac{T'\rho' + T'O'}{T'\rho'} = \frac{T'S' + T'h'}{T'S'}$$

ou

$$\frac{O'\rho'}{T'\rho'} = \frac{h'S'}{T'S'}$$

mas do quadrilatero completo  $uMu'M'$ , cortado pela recta  $O'S'$ , obtem-se pelas fórmulas de involução, designando por  $x$  o ponto onde a recta  $uu'$  corta a recta  $O'S'$

$$\frac{O'\rho' \cdot T'S'}{S'h' \cdot T'\rho'} = \frac{xO'}{xh'}$$

ou

$$\frac{O'\rho'}{T'\rho'} = \frac{h'S'}{T'S'} \cdot \frac{xO'}{xh'}$$

o que exige, comparada com a fórmula antecedente, que o ponto  $x$  esteja no infinito.

D'esta proposição se conclue o estarem tambem em linha recta os dois grupos de pontos  $u_1, u'_1; u_2, u'_2$ , os quaes se acham respectivamente nas diagonaes dos quadrilateros  $MY'u_1u'_1$  e  $M'Yu_2u'_2$ , tendo estes a outra diagonal commum com o quadrilatero  $MM'uu'$ , e as mesmas intersecções com  $O\rho$  e  $O'\rho'$ , respectivamente, dando por isso logar à mesma equação de involução quando se pretende determinar o ponto  $x$ , onde as diagonaes  $uu', u_1u'_1, u_2u'_2$  encontram a recta  $OS$  ou  $O'S'$ .

Os pontos  $u, u'$  podem passar ás posições  $u_1, u'_1$  e  $u_2, u'_2$ .

Se  $MM'$  girar em torno do ponto  $M$ , permanecerão  $MO'$  e  $M\rho'$ , e variarão  $M'O$  e  $M'\rho$ ; os pontos  $u$  e  $u'$  seguirão as rectas  $MO'$  e  $M'\rho'$ , deslocando-se parallelamente a  $O'S'$ ; logo quando o ponto  $u$  estiver em  $u_1$ , estará  $u'$  em  $u'_1$ ; e visto que o ponto  $M'$  deve estar na recta  $Ou_1$ , elle se achará n'esse instante em  $S'$ ; será  $p$  o logar do ponto  $\rho$  actual, e por conseguinte a recta  $p\rho'$  concorrerá com  $MS'$  no mesmo ponto da recta  $OO'$  (prop. 2.<sup>a</sup>).

N'esta situação da corda  $MM'$  os pontos  $Y$  e  $Q$  estão confundidos.

Finalmente, notando que os pontos  $T$  e  $\rho$  se acham actualmente em  $a$  e  $p$ , a relação

$$S\rho = \frac{Oh.TS'}{Th},$$

se transformará em

$$Sp = \frac{Oh.aS'}{ah};$$

a qual em virtude da proporção harmonica (prop. 1.<sup>a</sup>)

$$\frac{OS}{Oh} = \frac{aS'}{ah}$$

nos conduz á igualdade  $Sp = OS = O'S'$ .

A rotação da corda  $MM'$  sobre  $M'$  poderá levar os pontos  $u, u'$  a coincidirem com  $u_2$  e  $u'_2$ , o que succederá logo que a referida corda tome a posição  $M'S$ . N'esse instante estará o ponto  $\rho'$  em  $p'$ , ponto cuja distancia a  $S'$  será igual a  $S'O'$ . E succede igualmente que os pontos  $Q'$  e  $Y'$  se acham confundidos.

Se quizermos obter o ponto, onde a corda tirada por  $M$  parallelamente a  $SS'$  encontra a curva, levaremos a recta das intersecções a passar pelo centro da conica, as suas intersecções com as rectas  $MO'$  e  $M\rho'$  darão as respectivas posições dos pontos  $u$  e  $u'$ . Tirando então a recta  $S'u'$  obter-se-ha o ponto  $\rho$  em uma certa posição  $\rho_1$ , cuja distancia ao ponto  $S$  será igual a  $S'\rho'$ : por conseguinte a recta  $\rho_1\rho'$  será parallelamente a  $OO'$ ; e logo tambem  $MM'$  será parallelamente a  $OO'$  (prop. 2.<sup>a</sup>). É inutil accrescentar que o ponto  $M'$  se achará então na intersecção das rectas dirigidas de  $O'$  e  $S'$  para as actuaes posições de  $u$  e  $u'$ .

Se os pontos  $u, u'$  forem para o infinito das rectas  $MO'$  e  $M\rho'$ , então o ponto  $M'$  se achará em  $N$ , na intersecção das rectas tiradas pelos pontos  $O$  e  $S'$  respectivamente parallelas a  $MO'$  e  $M\rho'$ .

Ora os pontos  $O, S, a, h$  estão em proporção harmonica, logo

$$\frac{ah}{aS} = \frac{Oh}{OS} = \frac{O'Z}{O'S'}$$

é tambem

$$\frac{ah}{aS} = \frac{O'S'}{S'\rho'}$$

logo

$$\frac{O'Z}{O'S'} = \frac{O'S'}{S'\rho'}$$

e por conseguinte as rectas  $NO'$  e  $MS'$  são parallelas, d'onde se conclue que o ponto  $N$  é um dos vertices do diametro conjugado com o diametro  $CM$ .

E visto que a recta  $SN$  é parallelamente a  $OM$ , segue-se que:

Para se determinar o diametro conjugado com um diametro dado, por ex.,  $CM$ , tiraremos as rectas  $OM$  e  $O'M$ , e depois pelos pontos  $O$  e  $S$  as rectas respectivamente parallelas  $ON$  e  $SN$ .

**THEOREMA 10.<sup>o</sup>**—As rectas  $Y\rho$  e  $OM$  concorrem no mesmo ponto da recta  $O'S'$ .

Considere-se o quadrilatero completo  $gOMh$  cortado pela

recta  $O'S'$ , e designemos por  $U'$  a intersecção d'esta com a recta  $OM$ , teremos

$$\frac{PO'}{P\rho'} = \frac{O'U'}{O'\rho'}$$

Designando por  $x$  a intersecção das rectas  $Y\rho$  e  $O'S'$ , teremos

$$\frac{Ox'}{O'\rho'} = \frac{S\rho}{Sm'}$$

além d'isso é

$$\frac{PO'}{P\rho'} = \frac{hO}{hS}$$

mas do quadrilatero completo  $uM u' M'$  cortado pela recta  $OS$  deduzem-se as fórmulas

$$Oh.TS = S\rho.hT,$$

$$Sh.TO = O\rho.hT,$$

logo

$$\frac{Oh}{Sh} = S\rho : \frac{Tm.O\rho}{T\rho}$$

E visto que da equação

$$\frac{TS}{Tm} = \frac{TO}{T\rho},$$

se deduz

$$\frac{mS}{Tm} = \frac{O\rho}{T\rho},$$

ter-se-ha

$$\frac{Oh}{Sh} = \frac{S\rho}{Sm'}$$

por conseguinte

$$\frac{PO'}{P\rho'} = \frac{S\rho}{Sm};$$

ter-se-ha pois

$$\frac{PO'}{P\rho'} = \frac{O'x}{O'\rho'};$$

logo  $x$  confunde-se com  $U'$ .

Póde igualmente asseverar-se sem mais demonstração do que a consideração da correspondencia perfeita entre os pontos  $Y$  e  $Y'$ , que as rectas  $Y\rho'$  e  $M'O'$  concorrem no mesmo ponto  $U$  da recta  $OS$ .

Vimos na proposição anterior que quando a corda  $MM'$  tomava a posição  $S'M$ , os pontos  $Y$  e  $Q$  se achavam reunidos, logo a recta  $Qp$  concorrerá com  $OM$  no mesmo ponto  $U'$  da recta  $O'S'$ .

Igualmente se verifica o cahir o ponto  $Y'$  em  $Q'$ , quando  $MM'$  toma a posição  $SM'$ ; d'onde se conclue que a recta  $Q'p'$  passa por  $U$ .

**THEOREMA 11.º** — A recta  $UU'$  (fig. 1) passa por  $D$ .  
Com effeito tem-se

$$\frac{T'U'}{TO} = \frac{MT'}{MT} = \frac{T'\rho'}{TS},$$

logo

$$T'U' = \frac{TO}{TS} \cdot T'\rho';$$

mas

$$\frac{TO}{TS} = \frac{T\rho}{Tm},$$

logo

$$T'U' = \frac{T\rho \cdot T'\rho'}{Tm}.$$

Similhantermente

$$\frac{TU}{TO'} = \frac{M'T}{M'T'} = \frac{T\rho}{T'S'},$$

logo

$$TU = \frac{T'O'}{T'S'} \cdot T\rho;$$

mas

$$\frac{T'O'}{T'S'} = \frac{T'\rho'}{T'm'}$$

logo

$$TU = \frac{T\rho \cdot T'\rho'}{T'm'};$$

e finalmente

$$\frac{T'U'}{TU} = \frac{T'm'}{Tm} = \frac{T'D'}{TD}.$$

Esta proposição pôde ainda demonstrar-se do seguinte modo:  
Tem-se

$$\bar{O}SMS'M' = \bar{O}'S'MS'M',$$

mas

$$\bar{O}'S'MS'M' = \bar{O}'S'M'SM,$$

logo

$$\bar{O}SMS'M' = \bar{O}'S'M'SM;$$

mas estes feixes cortados respectivamente pelas rectas  $O'S'$ ,  $OS$  produzem as duas divisões homographicas  $\infty, U', S', h'$ ;  $\infty, U, S, h$ ; logo  $UU', SS', hh'$  concorrem no mesmo ponto.

**THEOREMA 12.º** — A recta tirada de  $U$  para o ponto onde a recta  $Sa'$  encontra o lado  $OO'$  prolongado, é paralela a  $OS'$ .

Por quanto se quizessemos determinar o ponto  $M'$  com o raio  $Sa'$  tirado de  $S$ , deveríamos tirar pela intersecção de  $Sa'$  com  $OO'$  uma recta paralela a  $OS'$ , até encontrar o lado  $SO$ , e conduzir d'esse ponto uma recta para  $O'$ , mas já provámos que a recta  $M'O'$  passe por  $U$ .

De modo semelhante se conclue que a recta tirada de  $U'$  para o ponto onde a recta  $S'a$  encontra o lado  $OO'$  prolongado, é paralela a  $O'S$ .



THEOREMA 13.<sup>o</sup> — Os pontos  $O'$ ,  $S'$ ,  $\rho'$ ,  $U'$  estão em proporção harmonica.

Com effeito, do vertice  $M$  partem os dois feixes harmonicos verticalmente oppostos

$$\overline{MOS}ah = \overline{MU'}\rho'S'O',$$

logo as duas divisões  $O, S, a, h$  e  $U', \rho', S'$ ,  $O$  são harmonicas.

Pelo quadrilatero  $M'h'Q'S'$  se prova igualmente o estarem em proporção harmonica os dois grupos de quatro pontos  $O', h', a', S'$  e  $U, O, S, \rho$ .

A proposição 11.<sup>a</sup> vae dar-nos um processo facil para determinar a tangente em qualquer ponto da curva, como vamos reconhecer.

Se a recta  $MM'$  (estampa 2) girar em torno de  $M$  até se tornar tangente á conica no ponto  $M$ , a recta  $O'M$  passará á posição  $O'M$ , indo o ponto  $U'$  para  $h$ ; e por conseguinte a recta  $U'h$  determinará sobre o lado  $SS'$  um ponto  $D_1$  da tangente em  $M$ .

Applicando o mesmo processo para o ponto  $M'$ , isto é, tirando para  $M'$  os dois raios  $OM'$  e  $SM'$ , obteremos as intersecções  $U_1$  e  $U'_1$  nos dois lados parallellos  $OO'$  e  $SS'$ ; e a nova recta  $U_1U'_1$  dar-nos-ha o ponto  $D$  em  $D_1$ , que pertencerá á tangente em  $M'$ .

Se porém suppozermos que a corda  $MM'$  gira em torno de  $M'$  até se tornar tangente á conica no ponto  $M'$ , a recta  $OM$  havendo passado á posição  $OM'$ , apresentará o ponto  $U'$  em  $h'$ , e por tanto a recta  $Uh'$  dar-nos-ha em  $D_2$  um novo ponto da tangente em  $M'$ .

Ora o ponto  $M'$  é determinado pelos raios  $SM'$  e  $S'M'$ , do mesmo modo que pelos dois  $OM'$  e  $O'M'$ , mas com aquelles raios os novos pontos  $U$  e  $U'$  têm as posições  $a'$  e  $\rho$ , logo a recta  $a'\rho$  dará em  $D_3$  um novo ponto da tangente em  $M'$ .

Os dois raios  $SM$  e  $S'M$  dirigidos para os extremos da mesma corda  $MM'$  determinam dois pontos  $\rho$  e  $\rho'$ , que estão em linha recta com o ponto  $D'$ , onde a dicta corda corta o lado  $OO'$ : se pois esta corda girar em torno de  $M$  até se tornar tangente á conica, o ponto  $\rho$  irá para  $a$ , e logo a recta  $\rho'a$  e a referida tangente encontrarão o lado  $OO'$  prolongado no mesmo ponto  $D'$ .

A posição do ponto  $M$  relativamente aos dois centros  $S$  e  $O$  é analogá á de  $M'$  em relação aos centros  $S$  e  $S'$ ; e pois que o ponto  $D_3$  da tangente em  $M'$  é obtido pelas duas intersecções  $a'$  e  $\rho$  dos dois raios  $SM'$  e  $S'M$  com os lados oppostos  $O'S$  e  $SO$ ;

assim em  $M$ , com os raios  $SM$  e  $OM$ , obteremos os pontos  $g$  e  $q$ , pelos quaes conduzindo a recta  $gq$ , se obterá o novo ponto  $D'''$  da tangente em  $M$ .

Se considerarmos o ponto  $M$  determinado pelos raios  $O'M$  e  $S'M$ , obter-se-hão os pontos  $q'$  e  $U_2$  nas duas parallelas  $SS'$  e  $OO'$ ; logo a recta que unir esses dois pontos determinará o ponto  $D''''$  da tangente em  $M$ .

Finalmente, assim como o ponto  $D''$  pertencente á tangente em  $M$ , é obtido pelas intersecções  $a'$  e  $\rho'$  dos dois raios  $SM$  e  $S'M$ , conduzidos para o ponto  $M$  dos dois vertices mais proximos  $S$  e  $S'$ , assim tambem prolongando os dois raios  $O'M$  e  $S'M$ , obteremos os pontos  $g'$  e  $q_1$ , pelos quaes conduzindo uma recta se determinará um ponto  $D_4$  sobre a recta  $OS$ , que pertencerá á tangente em  $M'$ .

Vê-se pois que a tangente em  $M$  se póde determinar por qualquer dos quatro pontos  $D'_1, D'', D''', D''''$ , assim como a tangente em  $M'$  se póde determinar por qualquer dos quatro pontos  $D_1, D_2, D_3, D_4$ .

D'estas differentes determinações da tangente derivadas das diversas posições que tomam os pontos  $D, T', D', T$ , conclue-se o estarem em linha recta os seguintes grupos de tres pontos  $U'_1, g, T'$ ;  $U_1, q, T'$ ;  $g', q', T$ ;  $q_1, U_2, T$ .

Póde tambem verificar-se que a tangente em qualquer dos vertices do parallelogrammo gerador é parallela á diagonal opposta, como ficou estabelecido na proposição 1.<sup>a</sup> Com effeito, se o ponto  $\overline{MM'}$  cahir em  $S'$ , a recta  $g'h'$  será a parallela á diagonal  $O'S$  tirada por  $S'$ , de modo que o ponto  $h'$  será o mesmo  $S'$ . Prolongando pois  $g'S'$ , obteremos o ponto  $\rho$ . Mas o ponto  $\rho'$  está em  $S'$ , por dever existir ao mesmo tempo na recta  $SM$  e na recta  $O'S'$ ; logo a recta  $\rho\rho'$  dará o ponto  $D'$  em  $g'$ ; e por consequente a recta  $g'S'$  parallela a  $O'S$  será a tangente á curva no ponto  $S$ .

Poderíamos talvez deduzir das linhas proporcionaes da figura o processo para determinar os pontos  $M$  e  $M'$ , dada a secante  $D'Y$  da ellipse, mas é preferivel recorrer aos processos de Mr. Chasles para a determinação dos pontos duplos de duas divisões homographicas sobre a mesma recta, quando se dão tres grupos de pontos homologos, como vamos fazer.

Imagine-se que errando a posição da recta  $g'h'$  parallela á diagonal  $O'S$ , lhe tinhamos dado a posição  $g_1h_1$  (fig. 1); então

os raios  $Oh_1$  e  $S'g$  não concorrerão no ponto  $M'$ , marcando, aliás, sobre a recta  $YD'$  os dois pontos distintos  $d$  e  $d'$ ; e tantos serão estes grupos de pontos  $d$  e  $d'$ , quantas forem as falsas posições da recta  $gh$ .

Ora estes pontos formam sobre a recta  $D'Y$  duas divisões homographicas de que  $M$  e  $M'$  são os pontos duplos; por quanto os dois feixes  $\bar{O}h \dots$  e  $\bar{S}'g \dots$  são homographicos, visto que as rectas  $O'S'$  e  $O'D'$  são cortadas proporcionalmente pela recta  $gh$ , quando esta se deslocar parallelamente a si mesma.

Determinemos pois tres grupos de pontos homologos:

É o primeiro  $T, D'$  (fig. 4), que resulta de suppôr-se  $gh$  reduzida ao ponto  $O'$ .

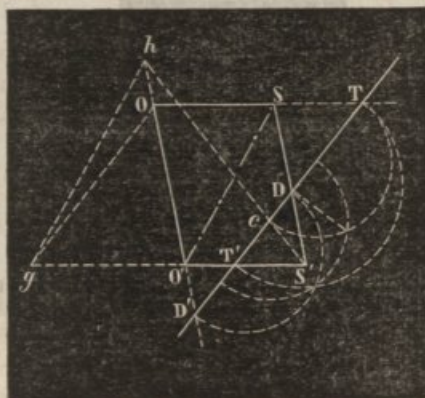


Fig. 4

O segundo é  $D, T$  relativo á existencia da linha  $gh$  no infinito dentro do angulo  $D'O'S'$ . Finalmente para determinarmos outro grupo em que um dos pontos esteja no infinito, tiraremos pelo ponto  $O$  a recta  $Og$  parallelamente a  $TD'$ , e seguidamente a recta  $gh$  parallelamente a  $O'S'$ ; a recta  $S'h$  marcará o ponto  $c$  da primeira divisão que tem o seu homologo no infinito.

Temos pois os tres grupos de pontos homologos

$T', D'; D, T; c, \infty$ .

Descreveremos uma circumferencia com o diametro  $DD'$ , que

interceptará a que se descrever sobre  $T'T$  em dois pontos. Descreveremos outras duas sobre  $Tc$  e  $D\infty$  (esta segunda é uma recta perpendicular a  $DY$  tirada por  $D$ ): a circumferencia que passar pelas intersecções das duas primeiras e pelas intersecções das ultimas, dará os pontos  $M$  e  $M'$  pedidos.

Se a recta  $T D'$  se tornar parallelá a  $O O'$  (fig. 5), os pontos

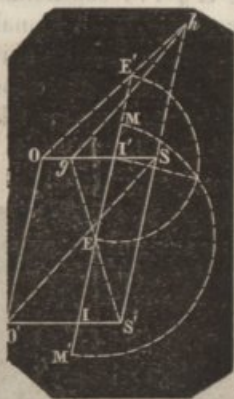


Fig. 5

$T$  e  $T'$  permanecerão nas rectas  $OS$  e  $O'S'$ , enquanto que seus homologos  $D'$  e  $D$  irão para o infinito.

Empregando a fórmula de Mr. Chasles  $Oe = \sqrt{OI' \cdot OO'}$ , temos de determinar o ponto  $E'$  da segunda divisão, que é homologo do ponto medio  $E$  da primeira, o que se consegue tirando  $S'E$ ,  $gh$  parallelá a  $O'S$  e  $hO$ . Com estes dados construiremos a meia proporcional  $EM = \sqrt{E'I' \cdot EE'}$ . A inspecção da figura faz ver a construcção indicada.

As intersecções d'uma recta com a hyperbole, suppondo esta definida pelo parallelogrammo dos diametros conjugados, determinam-se mui facilmente.

Seja  $a'b'$  a secante dada (fig. 6), na qual os dois grupos de pontos  $a, a'; b, b'$  são respectivamente homologos. Tirando as rectas  $S'h$  e  $Oh'$  e seguidamente as rectas  $hg$  e  $h'g'$  parallelá a  $O'S$ , e bem assim as rectas  $S'g'$  e  $Og$ , obter-se-hão os pontos  $I$  e  $I'$ , cada um dos quaes terá o seu homologo no infinito. Considerando agora os tres grupos de pontos respectivamente homologos  $b, b'; I, \infty; \infty, I'$ , traçaremos uma circumferencia

por  $b'$  e  $I$ , que interceptará a perpendicular á secante tirada por  $b$  no ponto  $d$ ; e como os pontos duplos se acham n'uma circumferencia, passando pelo ponto  $d$ , tendo o respectivo centro ao meio de  $II'$ , esta ficará determinada e consequentemente os dois pontos  $M$  e  $M'$ .

Se a secante fôr paralela a dois dos lados do parallelogrammo gerador (fig. 7), ella cortará a curva no infinito, onde terá um

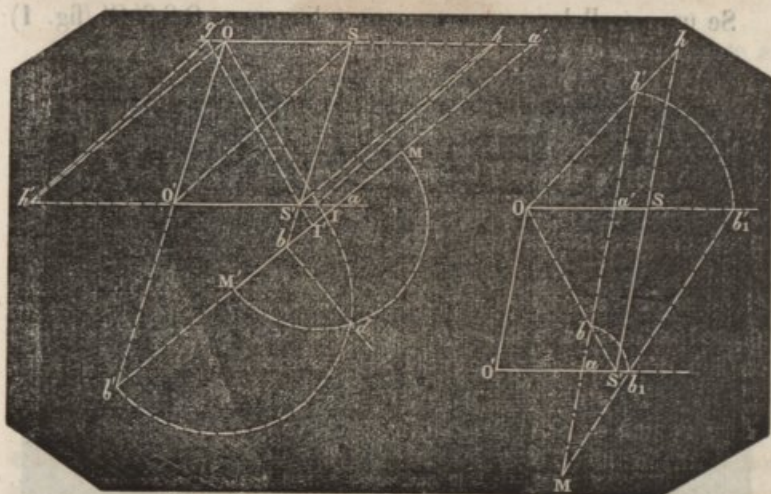


Fig. 6

Fig. 7

dos pontos duplos, como se verifica suppondo que a recta movel  $gh$  occupa o proprio logar da diagonal a que é paralela. Além d'isso são homologos os pontos  $a$  e  $a'$ , como se reconhece suppondo a recta  $gh$  no infinito da faxa formada pelo prolongamento dos lados  $OS$ ,  $O'S'$ . A posição  $Oh$  d'essa recta ainda determina os pontos homologos  $b$ ,  $b'$ . Logo recorrendo á fórmula de Mr. Chasles

$\frac{ae}{a'e} = \frac{ab}{a'b'}$ , bastará rebater  $ab$  e  $a'b'$  sobre  $O'S'$  e  $OS$  respectivamente,

para havermos de obter o ponto  $M$  na intersecção de  $b_1b_1'$  com  $a'a'$ .

Se um parallelogramo com suas diagonaes  $OSS'O'$  (fig. 1)

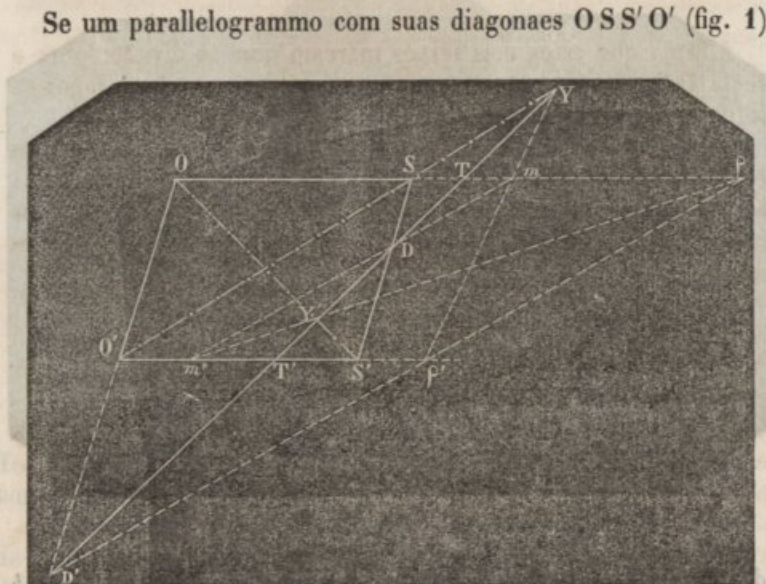


Fig. 1

fôr cortado por uma transversal  $YD'$ , e notarmos as quatro intersecções  $Y, D, Y', D'$ , acontecerá que, se por um d'estes pontos tirarmos um raio qualquer, v. gr.,  $Ym$ , pelo ponto  $m$  a transversal  $mm'$  passando por  $D$ , e pelo ponto  $m'$  a transversal  $m'p$  passando por  $Y'$ , os pontos  $p$  e  $p'$  estarão em linha recta com o quarto ponto  $D'$ , e será  $pp'$  parallela a  $mm'$ .

Quando se não começar por  $Y$ , mas por um qualquer dos outros tres pontos  $D, Y', D'$ , deveremos seguir sempre no tracado das transversaes a mesma disposição da figura actual, na certeza de se chegar por fim a tres pontos em linha recta, em cujo numero se comprehenderá um dos quatro pontos  $Y, D, Y', D'$ .

D. Supponha-se que a recta  $D'\rho'$  gira em torno de  $D'$ , teremos os seguintes feixes homographicos

$$\overline{D'}\rho' = \overline{Y}m = \overline{D}m = \overline{D}m' = \overline{Y'}m' = \overline{Y'}\rho,$$

isto é,

$$\overline{D'}\rho' = \overline{Y'}\rho.$$

Afirmo que estes dois feixes marcam uma só divisão sobre a recta  $OS$ , ou por outra, que os respectivos raios homologos se interseptam sobre a recta  $OS$ .

Com effeito, se a recta  $mm'$  tomar a direcção  $TT'$ , cahirá  $m$  em  $T$ ,  $m'$  em  $T'$ , e logo os dois feixes  $Y'\rho$  e  $D'\rho'$  têm dois raios homologos coincidentes sobre a recta  $TT'$ , e por conseguinte as intersecções de todos os seus raios respectivamente homologos estão em linha recta.

Supponha-se actualmente que a recta  $mm'$  toma a direcção  $SS'$ ; a recta  $Ym$  produzirá o ponto  $\rho'$  em  $O'$ , e ao mesmo tempo a recta  $Y'm'$  dará o ponto  $\rho$  em  $O$ ; logo a intersecção dos dois raios homologos actuaes  $Y'\rho$  e  $D'\rho'$  será o ponto  $O$ .

Se a recta  $mm'$  se tornar parallela a  $OS$ , os dois raios  $Y'\rho$  e  $D'\rho'$  serão parallelos entre si e a  $OS$ , isto é, encontrar-se-hão no infinito da recta  $OS$ .

Por conseguinte a recta  $OS$  é o logar geometrico das intersecções dos raios homologos dos dois feixes  $Y'\rho$  e  $D'\rho'$ .

O parallelismo de  $mm'$  e  $\rho\rho'$  acha-se demonstrado no texto.

A disposição das transversaes que passam por  $D$  e  $Y'$  admitte a seguinte variante:

Depois de havermos tirado a recta  $Y\rho'$  (fig. 2) poderemos conduzir a recta  $\rho\rho'$  pelo ponto  $D$ , tirar  $\rho m'$  pelo ponto  $Y'$ , e será então a recta  $mm'$  que passará por  $D'$ .

A demonstração pouco differe da precedente.

Com effeito é

$$\overline{Y}m = \overline{D'}m,$$

$$\overline{Y}m = \overline{D}\rho' = \overline{D}\rho = \overline{Y'}m',$$

logo

$$\overline{D'}m = \overline{Y'}m',$$

\*





*Observação.* — Estas proposições são communs aos trapezios, quando OS e O'S' forem os seus lados parallelos.

Resolve-se com a disposição das transversaes da figura 1 o problema que consiste em tirar por um ponto situado no plano onde existe um parallelogrammo, uma recta parallela a outra situada no mesmo plano, sem empregar mais do que a regua.

D'este problema, que fôra proposto por Brianchon, encontram-se tres soluções na obra — *Aplicações de analyse e de geometria* de Poncelet, fundadas nas propriedades dos triangulos homologicos, e onde se allude a outras de Gravesande e de Lambert.

O modo como o resolvemos é o seguinte:

Pelo ponto dado M (fig. 3) tiraremos para o ponto D', onde

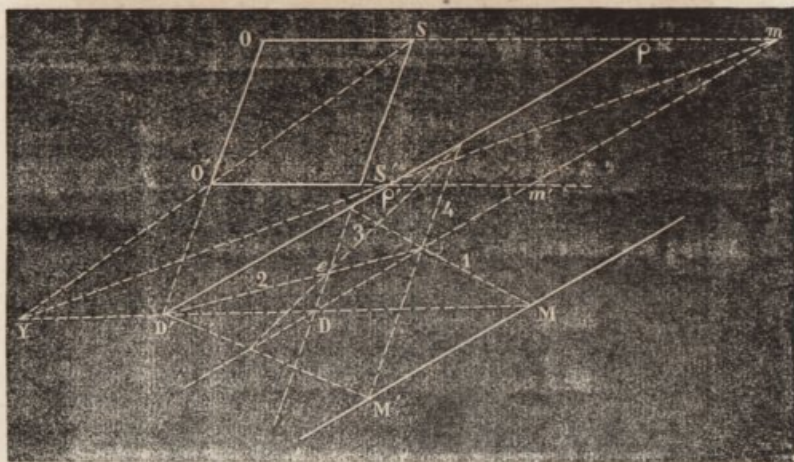


Fig. 3

a recta dada  $D'\rho$  encontra o lado  $OO'$  do parallelogrammo, a nova recta  $MD'$ , a qual prolongaremos até encontrar em  $Y$  a diagonal  $SO'$ ; tiraremos em seguida a recta  $Y\rho$  até  $m$ , cujo ponto uniremos por uma recta com o ponto  $D$ , obtendo assim uma nova parallela á recta pedida. Resta pois o tirar por  $M$  uma recta que passe pelo ponto de concurso das duas  $D'\rho'$  e  $Dm$ , o que é traçar a parallela pedida.



**SOBRE ALGUNS INTEGRAES INDEFINIDOS**

DUARTE, LEITE PEREIRA DA SILVA

A pag. 260 do *Cours d'Analyse* do sr. Hermite lê-se: «... não se conhece processo nenhum para achar directamente o valor dos integraes

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = \frac{v}{u}, \quad \int \frac{x^2 dx}{v^2} = -\frac{u}{v}, \quad \int \frac{x^2 dx}{[au + bv]^2} = -\frac{u}{au + bv}$$

onde

$$u = x \operatorname{sen} x + \cos x, \quad v = \operatorname{sen} x - x \cos x.$$

Comtudo é facil obtel-os directamente, integrando por partes. Temos

$$u = x \operatorname{sen} x + \cos x, \quad du = x \cos x dx$$

$$v = \operatorname{sen} x - x \cos x, \quad dv = x \operatorname{sen} x dx.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{u^2} &= \int \frac{x}{\cos x} \frac{du}{u^2} = -\frac{x}{\cos x} \frac{1}{u} + \int \frac{1}{u} \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx \\ &= -\frac{x}{u \cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{x}{u \cos x} + \operatorname{tg} x = \frac{-x + u \operatorname{sen} x}{u \cos x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x \operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{v}{u}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{v^2} &= \int \frac{x}{\operatorname{sen} x} \frac{dv}{v^2} = -\frac{x}{\operatorname{sen} x} \frac{1}{v} + \int \frac{1}{v} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx \\ &= -\frac{x}{v \operatorname{sen} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\frac{x}{v \operatorname{sen} x} - \operatorname{co} \operatorname{tg} x = -\frac{x + v \cos x}{v \operatorname{sen} x} \\ &= -\frac{x \operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - x \cos x} = -\frac{u}{v}. \end{aligned}$$

Egualmente, pondo  $z = au + bv$ , teremos

$$dz = adu + bdv = x [a \cos x + b \operatorname{sen} x] dx.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} &= \int \frac{x}{a \cos x + b \operatorname{sen} x} \frac{dz}{z^2} \\ &= -\frac{x}{z [a \cos x + b \operatorname{sen} x]} + \int \frac{(au + bv) dx}{z \cdot [a \cos x + b \operatorname{sen} x]^2} \\ &= -\frac{x}{z [a \cos x + b \operatorname{sen} x]} + \int \frac{dx}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)^2}. \end{aligned}$$

Ora, por transformação simples, temos successivamente

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)^2} &= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{[a + b \operatorname{tg} x]^2} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{[a + b \operatorname{tg} x]^2} \\ &= -\frac{1}{b [a + b \operatorname{tg} x]} + C. \end{aligned}$$

Logo

$$\int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} = -\frac{x}{z [a \cos x + b \operatorname{sen} x]} + \frac{-\cos x}{b [a \cos x + b \operatorname{sen} x]}$$

$$= -\frac{u}{au + bv}.$$

Na mesma pag. 260 do *Cours d'Analyse*, do sr. Hermite, lê-se um pouco mais abaixo:

«Nous pourrions encore citer, en designant par  $a$  et  $b$  des constantes, cette intégrale:

$$\int \frac{adx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} = \frac{\operatorname{tg} x}{(ax + b) \operatorname{tg} x + a}$$

dont on ne peut verifier la valeur que par la differentiation.»

É facil obtel-o directamente, integrando por partes.

Pondo

$$z = a + (ax + b) \operatorname{tg} x$$

d'onde

$$dz = \sec^2 x [ax + b + a \operatorname{sen} x \cos x] dx = \sec^2 x \cdot u dx.$$

Logo

$$y = \int \frac{adx}{[(ax + b) \operatorname{tg} x + a]^2}.$$

Ou

$$y = \int \frac{a \cos^2 x}{u} \cdot \frac{dz}{z^2} = -\frac{a \cos^2 x}{uz} + \int \frac{-2au \cos x \operatorname{sen} x - 2a^2 \cos^4 x}{u^2 z} dx.$$

Ou

$$y = -\frac{a \cos^2 x}{uz} + \int -\frac{2a \cos^2 x}{u^2} dx.$$

Mas

$$du = 2a \cos^2 x dx.$$

Logo

$$y = -\frac{a \cos^2 x}{uz} + \int \frac{du}{u^2} = -\frac{a \cos^2 x}{uz} + \frac{1}{u} = \frac{z - a \cos^2 x}{uz}$$

que feitas as transformações dá

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{a + (ax + b) \operatorname{tg} x}.$$

BIBLIOGRAPHIA

*E. Nestore Legnazzi. — Commemorazione del Conte Giusto Bellavitis. — Padova.*

As primeiras 57 paginas do opusculo do sr. Legnazzi são occupadas pelo discurso eloquente que este illustre professor da Universidade de Padua pronunciou n'aquella Universidade, no dia 6 de dezembro de 1880, para commemorar as altas virtudes do sabio Conde de Bellavitis, de cuja morte demos noticia no fim do volume II d'este jornal. Seguem-se 52 notas cheias de particularidades interessantes sobre o vida d'este grande mathematico, cujo retrato adorna o principio do livro.

Ninguem melhor do que o sr. Legnazzi, amigo, e collega de Bellavitis no professorado, podia encarregar-se da difficil missão de descrever com brilho proprio este homem, que foi grande mathematico, grande physico, grande professor e grande cidadão.

Tivemos a insigne honra de ter com Bellavitis correspondencia nos ultimos annos da sua vida. Concebe-se por isso com quanto interesse lemos mais de uma vez este interessante opusculo, que tão minuciosamente o descreve. Recommendamos a sua leitura áquelles que precisarem de algumas informações bibliographicas relativas aos trabalhos ou publicados ou ineditos d'este geometra tão fecundo, e, em geral, áquelles que gostam de ler as biographias dos homens eminentes.

*E. N. Legnazzi. — Aggiunte illustrative alla commemorazione del professore Conte G. Bellavitis. — Padova, 1881.*

N'este importante livro expõe o sr. Legnazzi elementarmente as principaes descobertas de Bellavitis, para poderem ser estudadas por aquelles que não dispõem de tempo para ler os trabalhos extensos, espalhados pelas collecções academicas, d'este

grande geometra, ou ainda por aquelles que se quizerem preparar para esta leitura.

Eis os assumptos de que se occupa o sr. Legnazzi nos cinco capitulos da sua obra:

Capitulo I — Equipollencias.

Capitulo II — Imaginarios.

Capitulo III — Resolução das equações.

Capitulo IV — Quaterniões.

Capitulo V — Logismographia.

Aquelles que quizerem estudar qualquer d'estes assumptos podem com grande vantagem usar da obra do sr. Legnazzi, onde tambem acharão informações muito completas sobre a parte que pertence a Bellavitis no desenvolvimento d'estas questões, e sobre os logares em que foram publicadas as memorias d'este geometra relativas a cada uma d'ellas.

*A sommadora Mesnier. — Porto, 1884.*

N'este folheto faz o sr. Raul Mesnier a descripção do ingenhoso e importante aparelho por elle imaginado para sommar numeros.

Não podendo aqui fazer a descripção do organismo interior d'esta interessante machina, vamos, ao menos, expôr o modo como se opéra com ella.

Na parte superior da machina ha uma serie de aberturas collocadas n'uma mesma linha. É n'estas aberturas que apparecem os algarismos do numero que representa a somma, e o numero d'ellas depende dos usos a que a machina é destinada.

Debaixo de cada abertura está collocada uma filla de dez pequenas peças rectangulares, cada uma contendo um dos algarismos 0, 1, 2, ... 9. Estas peças estão encaixadas todas em uma ranhura rectangular, ao longo da qual se podem mover, tendo para isso um bordo para se poder apoiar sobre elle a unha ou um estylete, de modo a leval-as até á parte superior da ranhura.

A primeira filla, a contar da direita, representa as unidades do numero, a segunda as dezenas, a terceira as centenas, etc.

Posto isto, querendo sommar, por exemplo, os numeros 3 2 5 4 2 e 4 9 5 2, arrasta-se até á parte superior das cinco ranhuras da



direita as peças que têm respectivamente os numeros 3 2 5 4 2, de modo que este numero fique escripto na parte superior do instrumento. Depois dá-se uma volta a uma manivella lateral, e nas aberturas que estão por cima apparece escripto este numero. Depois leva-se á parte superior das quatro ranhuras da direita as peças que têm os algarismos 4 9 5 2, dá-se outra volta á manivella, e apparece nas aberturas que estão por cima a somma dos dois numeros precedentes.

O numero de voltas da manivella fica tambem registado, de modo que se pôde interromper a operação no ponto que se quizer.

Como se vê o manejo do instrumento é muito simples, e por isso é de grande utilidade para as casas commerciaes, onde ha a fazer grandes sommas.

---

*Raul Mesnier. — O Arithmotechno. — Porto, 1882.*

N'este opusculo descreve o sr. Raul Mesnier o ingenhoso instrumento por elle inventado para fazer todas as operações arithmeticas.

A somma realisa-se quasi como na machina precedentemente descripta. Na invenção mesmo da machina da addição está mesmo o principal merito do sr. Mesnier. «Resolvida esta, diz elle, todas as mais são apenas um jogo para qualquer mechanic; uma mudança de movimento na marcha da machina dá logo a subtracção, e a applicação das simples considerações da arithmetica relativamente á multiplicação e divisão como sommas ou subtracções successivas, conduz logo á realisação d'aquellas.»

Fazemos votos para que em breve seja realisada na practica a machina descripta no interessante opusculo que temos á vista.

---

*C. Stephanos. — Sur quelques propriétés du système de trois figures égales situées dans un même plan.*

N'esta nota, publicada no *Bolletim da sociedade philomathica de Paris*, o illustre mathematico, sr. Stephanos, considera tres figuras eguaes  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  situadas n'um plano, e deduz algu-

mas propriedades d'este systema, partindo da proposição importante seguinte:

• Tres figuras eguaes, situadas d'uma maneira arbitraria sobre um plano, coincidem com as symetricas d'uma mesma figura  $F$ , tomadas relativamente a tres rectas.

— Acha depois o logar  $C$  dos pontos de  $F$ , aos quaes correspondem nas figuras  $F_1, F_2, F_3$  tres pontos situados n'uma mesma recta, e as rectas de  $F$  ás quaes correspondem nas figuras  $F_1, F_2, F_3$  rectas passando por um mesmo ponto de  $C$ .

Finalmente, fundado n'estas proposições, resolve a questão de saber qual é o movimento mais simples por meio do qual uma figura plana pôde vir occupar, em tres instantes distinctos, tres posições dadas no mesmo plano.

Pelas indicações que vimos de dar pôde avaliar-se a importancia da nota do sr. Stephanos.

G. T.

NOTE SUR LA GÉNÉRATION D'UNE CONIQUE AU MOYEN DU CERCLE  
OU D'UNE AUTRE CONIQUE,  
ET SUR AUTRES ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES

PAR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

## Avertissement

Comme nous ne pouvons pas pour le moment publier, avec tout le développement convenable, l'étude sur la génération des coniques au moyen du cercle ou au moyen d'une autre conique, et dont la seconde partie a été citée par l'illustre mathématicien Mr. Francisco Horta (*sous la dénomination d'exercices sur la trisection de l'angle*) dans son Mémoire sur la génération parallélogrammique des coniques, en 1870, dans le n.º IX du *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, nous croyons devoir tout de suite présenter, en peu de mots, les bases et quelques parties de cette étude-là, à laquelle nous nous sommes aussi rapportés dans le *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, t. I, p. 106; et dans notre *Mémoire de géométrie descriptive sur l'intersection des surfaces du second ordre et des surfaces de révolution*, p. 5 (note), publié en 1871. D'ailleurs, si nous sommes quelques fois un peu longs, en certaines parties de cette note, c'est pour montrer comment les principes, que nous allons exposer conduisent facilement aux propriétés générales et particulières des figures, et pour voir que nous n'avons point suivi seulement l'analogie, l'induction, et les tracés graphiques, qui, la plupart des fois, non-seulement ne donnent pas le chemin sûr et général des recherches, mais encore entraînent à de fausses conséquences.

Nous ajouterons aussi à ce travail quelques observations générales ainsi que quelques mots sur une partie de nos recherches, que nous avons cru devoir mettre déjà sous les yeux du public,

quoique nous les développons à la suite. On sent assez, sans qu'il soit besoin de le dire, que, en vue de nos faibles moyens et de notre peu d'érudition, nous n'avons pas l'idée de considérer avec le caractère de nouveauté quelques résultats aux quels nous sommes parvenus depuis 1868, car dans cet intervalle et même antérieurement ces résultats auront dû être rencontrés ou publiés par différents géomètres: ainsi nous avons toujours renoncé à la prétention de priorité plus au moins fondée, en préférant à cette gloire celle d'être seulement vrais, justes et utiles.

Cela étant, passons à exposer les questions dont il s'agit, en tâchant, au reste, d'être aussi brefs que possible dans un sujet naturellement fort étendu.

## I

Nous savons que quand une transversale  $t_2e'_2e_2$  tourne autour d'un point fixe  $t_2$ , les couples de point  $e_2, e'_2, \dots$ ; dans lesquels elle rencontre une conique ( $\Sigma$ ) forment deux divisions homographiques en involution; et par suite les rayons  $Oe_2, O'e'_2; Oe'_2, O'e_2; \dots$ ; menés de deux points quelconques  $O$  et  $O'$  de cette conique aux points des deux divisions, respectivement, formant deux faisceaux homographiques, le lieu géométrique des points d'intersection  $y, y', \dots$ , des rayons homologues sera une conique ( $\Sigma'$ ) passant par les centres  $O$  et  $O'$  de ces faisceaux.

De même, si autour de ces points  $O$  et  $O'$  on fait tourner deux cordes parallèles  $OE, O'E'; \dots$ ; leurs extrémités  $E, E'; \dots$ ; formant deux divisions homographiques, les cordes  $EE'; \dots$ ; qui unissent les points homologues envelopperont une conique ( $E$ ).

Il est claire que ces théorèmes sont des cas particuliers de ceux où les centres  $O$  et  $O'$  se trouvent sur deux coniques distinguées ( $\varepsilon$ ) et ( $\varepsilon'$ ). D'ailleurs il est facile de voir que de ces théorèmes relatifs au plan nous pouvons déduire des théorèmes analogues relatifs à l'espace. Et réciproquement.

Considérons d'abord le cas où la conique génératrice est un cercle ( $C$ ). D'après cela la conique enveloppe de la corde  $EE'$ , déterminée sur le cercle générateur ( $C$ ), par les rayons parallèles  $OE, O'E', \dots$ ; issus de deux points quelconques  $O$  et  $O'$  de la circonférence, sera évidemment un autre cercle ( $e$ ) concentrique

au premier, et touchant sa corde  $OO'$ . Donc, suivant que du point fixe  $t_2$  l'on ne peut tirer des transversales tangentes au cercle  $(e)$ , ou l'on peut tirer une transversale tangente ou deux, ainsi les faisceaux homographiques générateurs  $O (e_2 \dots)$  et  $O' (e' \dots)$  n'auront point des rayons parallèles, ou auront un seul couple de rayons parallèles, ou deux, et la conique engendrée  $(\Sigma')$  sera une ellipse, ou une parabole, ou une hyperbole, ou bien une variété de ces courbes.

Nous devons observer que nous pouvons considérer le cercle  $(C)$  comme la projection cylindrique de deux sections faites dans un hyperboloïde gauche ou à une nappe ayant pour contour apparent le cercle  $(e)$ , enveloppe des projections respectives des deux systèmes de génératrices rectilignes.

Les transversales  $t_2O$  et  $t_2O'$  seront évidemment tangentes à la conique engendrée  $(\Sigma')$  aux points  $O$  et  $O'$ , et par suite la corde  $OO'$  sera la *palaise* du point fixe  $t_2$  par rapport à cette courbe.

Si ce point fixe  $t_2$  est extérieur au cercle générateur  $(C)$  sa palaise  $O_1O_1'$ , par rapport à ce cercle le coupera aux mêmes points  $O_1$  et  $O_1'$  que la conique engendrée  $(\Sigma')$ . Quand le point  $t_2$  sera intérieur sa palaise  $O_1O_1'$  sera extérieure, et par suite le cercle  $(C)$  et la conique  $(\Sigma')$  auront seulement pour points réels communs les centres  $O$  et  $O'$  des faisceaux générateurs.

En désignant par  $t_1$  le pôle de  $OO'$  par rapport à  $(C)$ , il est facile de voir que ce point est le pôle de  $O_1O_1'$  par rapport à la conique  $(\Sigma')$ .

Ainsi en représentant par  $P$  le point d'intersection des polaires  $OO'$  et  $O_1O_1'$  des points  $t_1$  et  $t_2$  ou  $t_2$  et  $t_1$ , selon que nous considérons la conique  $(C)$  ou  $(\Sigma')$  sera le pôle de la droite  $t_1t_2$  dans une quelconque de ces courbes. Si le point  $t_2$  se trouve sur une des tangentes  $t_1O, t_1O'$  les courbes se toucheront respectivement en  $O$  ou  $O'$ . Lorsque les points  $t_1$  et  $t_2$  se confondront, ces coniques *reciproques* ou *conjuguées* se toucheront suivant la corde  $OO'$ . Ainsi dans le cas où ces points coïncidants se trouvent à l'infini, ou la corde  $OO'$  devient un diamètre, ces courbes seront supplémentaires par rapport à ce diamètre.

D'après ce qui précède on peut énoncer ce théorème général: *Étant donnée une conique  $(\Sigma)$  et deux de ses points  $O$  et  $O'$ , si l'une transversale  $t_2e_2e_2$  tourne autour d'un point fixe  $t_2$  les deux points dans lesquels elle rencontre la conique, forment avec les premiers*

points un quadrilatère variable inscrit  $Oe_2O'e'_2$ , ayant cette transversale pour diagonale, et dont les points de concours  $y$  et  $y'$  des deux couples de côtés opposés  $Oe_2, O'e'_2$  et  $Oe'_2, Oe_2$  décriront une conique ( $\Sigma'$ ), coupant la première aux deux points donnés et en deux autres points réels ou imaginaires; tandis que la droite  $yy'$ , qui unit ces points de concours tournera autour d'un autre point fixe  $t_1$ .

Et réciproquement, si dans le quadrilatère  $OyO'y'$  inscrit à la conique ( $\Sigma'$ ) la diagonale  $yy'$  tournera autour du point  $t_1$ , les points de concours  $e_2$  et  $e'_2$  des deux couples de côtés opposés  $Oy, O'y'$  et  $O'y, Oy'$  décriront la conique ( $\Sigma$ ); et la droite  $e_2e'_2$ , qui unit ces points de concours tournera autour du point  $t_2$ .

Il est facile de voir que le cercle générateur (C) seulement peut être touché en un point, en deux, ou coupé en quatre points réels par la conique engendrée ( $\Sigma'$ ), quand cette conique sera une hyperbole.

Toutes les fois que cette conique ( $\Sigma'$ ), étant une hyperbole, coupe le cercle (C) seulement aux centres O et O' des faisceaux générateurs, ces centres se trouveront sur la même branche de cette hyperbole.

Quand le point  $t_2$  se trouve à l'infini, les transversales correspondantes  $e_2e'_2, \dots$ , seront parallèles et la conique ( $\Sigma'$ ) deviendra une hyperbole équilatère, ayant le segment  $OO'$  pour diamètre, et coupant le cercle suivant un diamètre  $O_1O'_1$  de celui-ci; alors en prenant les extrémités de ce diamètre pour centre de faisceaux déterminés par les rayons menés de ces points aux points où ces transversales coupent l'hyperbole les intersections des rayons homologues décriront aussi le cercle (C); et les faisceaux déterminés par les rayons qui vont de ces mêmes centres aux points d'intersection de ce cercle avec les transversales issues de  $t_1$  décriront l'hyperbole ( $\Sigma'$ ).

Si le point  $t_1$  se trouve aussi à l'infini les transversales correspondantes  $yy', \dots$ , seront parallèles et le cercle (C) et l'hyperbole équilatère ( $\Sigma'$ ) s'entrecouperont suivant deux diamètres (le cercle enveloppe ( $e$ ) se réduisant à son centre C). Enfin ces courbes (C) et ( $\Sigma'$ ) seront supplémentaires, quand les points conjugués  $t_1$  et  $t_2$  se confondront à l'infini. Quand le point  $t_2$  coïncidera avec le centre du cercle (C) la conique engendrée ( $\Sigma$ ) sera un cercle ayant pour centre le point  $t_1$ , et coupant orthogonalement le premier suivant la corde  $OO'$ .

De l'étude du cercle et de l'hyperbole équilatère nous énonçons les propriétés suivantes :

*Dans une série de cercles, ayant une corde commune, les diamètres parallèles à une direction donnée sont des cordes réelles d'une hyperbole équilatère, conjugués à la direction de la corde commune de la série orthogonale réciproque de la proposée, cette corde représentant un diamètre transverse ou non transverse de l'hyperbole, suivant que cette dernière série a la corde commune réelle ou idéale. Et réciproquement.*

*Donc, étant donnée une série de cercles, ayant une corde commune, le lieu géométrique des points de contact de chaque tangente commune aux couples de cercles, dont les rayons sont dans un rapport constant, est une hyperbole équilatère donnée de position.*

Ces propriétés sont des cas particuliers d'autres que nous présenterons.

Considérons maintenant la génération d'une conique au moyen d'autre, mais dans le cas particulier où le pôle  $t_2$  se trouve à l'infini ou les transversales  $e_2e'_2 \dots$ , sont parallèles.

Si la conique génératrice ( $\Sigma$ ) est une ellipse, la conique enveloppe (E) sera une autre ellipse (homothétique à la première), et puisque à cette courbe l'on peut toujours tirer deux tangentes parallèles à une direction donnée, la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) sera toujours une hyperbole, ou une variété de cette courbe. Comme nous le savons, la distance  $OO'$  sera un diamètre de cette hyperbole, laquelle coupera l'ellipse ( $\Sigma$ ) suivant un diamètre  $O_1O'_1$  de celle-ci. Quand le pôle  $t_1$  se trouve aussi à l'infini l'ellipse enveloppe (E), se réduisant à son centre les transversales correspondantes  $yy', \dots$ , seront parallèles, et la conique génératrice et l'engendrée se couperont suivant deux diamètres  $OO'$  et  $O_1O'_1$ . La coïncidence à l'infini des pôles  $t_1$  et  $t_2$  donne aux transversales correspondantes la même direction, et par suite les courbes conjuguées ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ), se touchant suivant un diamètre  $OO'$  conjugué à ces transversales, seront supplémentaires, par rapport à ce diamètre.

Les asymptotes de ( $\Sigma'$ ) se détermineront très-facilement dans tous les cas.

La conique génératrice ( $\Sigma$ ) étant une parabole la conique enveloppe (E) sera une autre parabole, à laquelle on peut toujours mener deux tangentes parallèles, une se trouvant à l'infini; de manière que le pôle  $t_2$  étant à l'infini les transversales correspon-

dantes  $e_2e_2, \dots$ , seront parallèles, et la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) sera encore une hyperbole, ou une variété de cette courbe, le segment  $OO'$  étant un diamètre de cette hyperbole, laquelle coupera la parabole ( $\Sigma$ ) suivant un diamètre  $O_1 \infty$  de celle-ci. Une des asymptotes de ( $\Sigma'$ ) sera donc parallèles aux diamètres de ( $\Sigma$ ).

Dans le cas où le pôle  $t_1$  passe aussi à l'infini il en sera de même d'un des centres  $O'$  des faisceaux générateurs, alors la conique enveloppe ( $E$ ) se réduisant à l'un diamètre  $O \infty$  (\*) de ( $\Sigma$ ), les transversales correspondantes  $yy', \dots$ , seront parallèles, et la conique génératrice et l'engendrée, se coupant suivant deux diamètres, seront paraboles égales ayant les branches en sens opposés (\*\*). Ainsi seulement deux points  $O$  et  $O_1$ , des quatre points d'intersection, se trouvent à une distance finie déterminant la corde commune  $OO_1$ .

Quand les pôles  $t_1$  et  $t_2$  se confondront à l'infini, les transversales correspondantes auront la même direction, et les deux paraboles ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) ayant les branches en sens apposés, et se touchant à l'extrémité  $O$  d'un de leurs diamètres seront supplémentaires par rapport à ce diamètre.

Étant une hyperbole la conique génératrice ( $\Sigma$ ), la conique enveloppe ( $E$ ) sera de même une autre hyperbole ayant les mêmes asymptotes; mais ses diamètres transverses coïncideront, en direction, avec les diamètres transverses ou non transverses de la première hyperbole, selon que les centres  $O$  et  $O'$  des faisceaux générateurs se trouveront sur une de ses branches ou sur les deux.

D'après cela, si les transversales  $e_2e_2', \dots$ , sont parallèles à un des diamètres transverses de l'enveloppe ( $E$ ) la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) sera une ellipse; dans le cas contraire la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) sera une hyperbole ou une de ses variétés.

Considérons d'abord le cas où les points  $O$  et  $O'$  se trouvent sur une même branche de l'hyperbole génératrice ( $\Sigma$ ). Alors, si la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) est une ellipse le segment  $OO'$  sera un de ses diamètres, et ses deux autres points d'intersection seront imaginaires; et dans le cas où la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) est une

(\*) Cette conique enveloppe sera évidemment une droite double ou une des coniques dites évanouissantes, c'est-à-dire dont le déterminant est nul.

(\*\*) En effet, la parabole engendrée ( $\Sigma'$ ) répond aussi à l'hyperbole ayant une branche à l'infini.



hyperbole ce segment  $OO'$  sera encore un de ses diamètres et cette courbe coupera sa conique génératrice en deux autres points réels  $O_1$  et  $O'_1$ , extrémités d'un diamètre de celle-ci.

Lorsque le pôle  $t_1$  sera sur une des asymptotes de l'hyperbole ( $\Sigma$ ) l'un des points correspondants  $O'$  passera à l'infini et l'ellipse et l'hyperbole engendrées, que nous venons de considérer, dégèrèrent en deux paraboles en des conditions analogues à ces courbes-là. On voit donc le pôle  $t_1$  ne peut être à l'infini.

Supposons, maintenant, que les points  $O$  et  $O'$  sont sur les deux branches de l'hyperbole génératrice ( $\Sigma$ ). Dans ce cas, si la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) est une ellipse le segment  $OO'$  sera encore un de ses diamètres; mais cette courbe coupera sa conique génératrice en deux autres points réels  $O_1$  et  $O'_1$ , extrémités d'un diamètre  $O_1O'_1$  de celle-ci; et dans le cas où la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) est une hyperbole ce segment  $OO'$  continuera à être un de ses diamètres, et ses deux autres points d'intersection seront imaginaires. Si le point  $t_1$  se trouve sur une asymptote de l'hyperbole ( $\Sigma$ ) l'une des points correspondants  $O'$  passera à l'infini, et l'ellipse et l'hyperbole engendrées, que nous venons de considérer, deviendront, comme précédemment, deux paraboles, mais en des conditions inverses de celles-là.

Quand le point  $t_1$  se trouve de même à l'infini, les transversales  $yy'$ , ..., étant parallèles l'hyperbole génératrice ( $\Sigma$ ) et l'ellipse ou l'hyperbole engendrée s'entre couperont suivant deux diamètres (la conique enveloppe ( $E$ ) se réduisant à son centre).

Si les points conjugués  $t_1$  et  $t_2$  coïncident à l'infini, les transversales correspondantes seront parallèles entre elles, et l'hyperbole génératrice ( $\Sigma$ ) et l'ellipse engendrée ( $\Sigma'$ ) se touchant suivant un diamètre  $OO'$  seront supplémentaires, par rapport à ce diamètre.

En n'ajoutant rien de plus sur les différents cas particuliers, qui nous donnent les variétés de coniques dans le cas où nous supposons le pôle  $t_2$  à l'infini, ou les transversales correspondantes parallèles, les centres  $O$  et  $O'$  des centres des faisceaux générateurs étant situés à une distance finie, nous pouvons dire, en resumé, que *la conique génératrice ( $\Sigma$ ) étant une ellipse ou parabole la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) sera toujours une hyperbole, passant par les points réels communs  $O$  et  $O'$ , les deux autres points d'intersection de ces courbes étant également réels, dont un peut être à l'infini; mais si la conique ( $\Sigma$ ) est une hyperbole la conique engendrée ( $\Sigma'$ )*

sera une ellipse ou hyperbole, passant par les points communs  $O$  et  $O'$ , les deux autres points d'intersection étant réels ou imaginaires.

Nous pouvons aussi considérer très-facilement le cas plus général où nous avons deux faisceaux homographiques quelconques pour faisceaux générateurs.

Dans le cas général où les points  $O$  et  $O'$  ne se trouvent pas sur la conique générale ( $\Sigma$ ), si nous la considérons dégénérée en un système de deux droites, on aura le porisme XLIII d'Euclides :

*Étant données deux droites fixes  $CS$  et  $CS'$ , autour d'un point fixe  $\theta_2$ , on fait tourner une droite qui les rencontre en deux points  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon'_2$ ; et de deux autres points donnés  $O$  et  $O'$  on mène les droites  $O\varepsilon_2$  et  $O'\varepsilon'_2$ , qui coupent les droites fixes en  $n$  et  $n'$  la droite  $nn'$  passera par un point donné  $\theta_1$ .*

Ainsi les faisceaux homographiques  $O(\varepsilon_2\dots)$  et  $O'(\varepsilon'_2\dots)$  auront une double génération au moyen des deux points conjugués  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Dans ce cas nous aurons deux coniques enveloppes ( $E_0$ ) et ( $E$ ) (ou leurs variétés) qui toucheront la droite  $OO'$  et les droites donnés  $CS$  et  $CS'$ .

Maintenant passons à donner une idée générale sur la génération des coniques au moyen des quadrilatères.

Considérons encore le cercle ( $C$ ), et par le pôle  $t_2$  menons une transversale  $t_2ab$ , qui coupe ce cercle aux points  $a$  et  $b$ , lesquels, avec les points  $O$  et  $O'$ , déterminent le quadrilatère  $OaO'b$  inscrit à ce cercle. En représentant par  $d$  et  $f$  les points de concours de deux couples de côtés opposés  $Ob$ ,  $O'a$  et  $Oa$ ,  $O'b$ , la droite  $df$  passera par  $t_1$  et coupera en  $t$  la diagonale  $ab$ , laquelle sera la droite qui unit les points de concours des côtés opposés dans le quadrilatère  $OdO'f$  inscrit à la conique ( $\Sigma'$ ).

Les rayons homologues générateurs  $Oy$ ,  $O'y$ , ..., de la conique ( $\Sigma'$ ) coupant les deux couples de côtés consécutifs  $Od$ ,  $O'd$  et  $O'f$ ,  $O'f$  du quadrilatère inscrit  $OdO'f$  aux couples de points  $i_2$ ,  $i'_2$  et  $i''_2$ ,  $i'''_2$ , les transversales  $i_2i_2t_2$  et  $i''_2i''_2t_2$  se couperont au même point  $t_2$  de  $abt_2$ ; et il en sera de même de toutes les autres transversales ainsi déterminées par chaque couple de rayons homologues. Donc, pour un point quelconque  $y$  de la conique engendrée ( $\Sigma'$ ) nous aurons deux transversales conjuguées, d'où il résulte sa double génération.

De même les rayons homologues générateurs  $Oe_2$  et  $O'e_2$  de la conique ( $\Sigma$ ) couperont les côtés consécutifs du quadrilatère inscrit  $OaO'b$  en des points, qui donnent des transversales conjuguées

deux à deux et passant par un même point  $t_1$  de la droite  $t_1df$ , qui unit les points de concours des côtés opposés de ce quadrilatère.

Si dans ces quadrilatères nous considérons les deux points d'intersection de chaque transversale avec les côtés opposés, les couples de rayons qui vont des sommets  $O$  et  $O'$  à ces points se couperont sur deux coniques touchant respectivement les premières coniques ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) suivant  $OO'$ .

Quand toutes les transversales passeront par  $t$  nous n'auront que les coniques ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) se touchant suivant la corde  $OO'$ , qui sera la palaise de ce point-là.

Ainsi étant les sommets  $O$  et  $O'$  à une distance finie, si le point  $t$  passe à l'infini les coniques conjuguées ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) deviendront supplémentaires par rapport au diamètre  $OO'$ . Alors le quadrilatère inscrit à ( $\Sigma$ ) aura les points de concours des côtés opposés à l'infini, ou deviendra un parallélogramme, et par suite l'autre quadrilatère inscrit à ( $\Sigma'$ ) aura deux sommets à l'infini.

Si l'un  $O'$  des deux sommets  $O, O'$  se trouve à l'infini, les côtés  $O'd$  et  $O'f$  des quadrilatères inscrits seront parallèles et alors les coniques ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) deviendront paraboles se touchant à l'autre sommet  $O$  de ces quadrilatères. Dans le cas où le pôle  $t$  se trouve aussi à l'infini ces paraboles deviendront coniques supplémentaires.

Comme nous venons de voir quand, par exemple, la transversale  $t_2i_2''_2$  tourne autour du point  $t_2$ , il en sera de même de sa conjuguée  $t_2i_2''i_2''''$ ; mais si ce point ne se trouve pas sur la droite qui unit les points de concours des côtés opposés des quadrilatères, la transversale conjuguée enveloppera une conique ( $T_1$ ) ayant pour tangentes communes avec la conique engendrée les droites  $t_2O$  et  $t_2O'$ .

Si, dans le plan des figures, nous considérons la conique ( $\Sigma$ ) comme la trace d'une surface du second ordre ( $S$ ), et sa corde  $OO'$  comme la trace d'une section plane ( $s$ ) de cette surface, il est clair que les transversales étant remplacées par des cônes, coupant ( $S$ ) suivant des coniques convenablement choisies; les faisceaux de rayons vecteurs seront donc remplacés par des faisceaux de cônes vecteurs passant constamment par cette section ( $s$ ) et par les intersections de ( $S$ ) avec chaque cône sécant, d'où il résulte que le lieu géométrique des intersections des couples de cônes homologues générateurs sera un surface du second ordre ( $S'$ ).

Selon les cas que se présenteront ainsi les cônes deviendront des cylindres ou des plans. La conique enveloppe ( $E$ ) sera donc

considérée comme la trace de la surface enveloppe (D) des plans des coniques d'intersection de la surface donnée (S) avec les faisceaux de cylindres vecteurs passant par la section (s). Donc, suivant que du sommet commun de la suite de cônes sécants nous pouvons ou non tirer des plans tangents à la surface enveloppe (D), ainsi la surface engendrée sera *illimitée*, ou *intièrement fermée*.

Considérons maintenant le quadrilatère générateur comme les traces de deux cônes du second ordre s'entrecoupant suivant deux coniques, les points O et O' pouvant être les sommets de ces cônes, ou les extrémités de la corde d'une de ces coniques; alors les transversales seront remplacées par des cônes, ou des plans, convenablement choisis, et les couples de rayons vecteurs homologues par des couples de cônes vecteurs passant par la conique, ayant pour corde OO', et par les coniques d'intersection des cônes ou des plans sécants, ou par des couples de cônes vecteurs ayant pour sommets les points O et O' et passant par ces coniques.

Il nous paraît maintenant assez inutile d'examiner le cas où nous avons des cylindres au lieu de cônes et d'entrer en d'autres développements.

Nous voyons donc la manière d'engendrer les surfaces du second ordre au moyen d'un système de deux surfaces développable de ce même ordre.

Nous pouvons encore imaginer les surfaces du second ordre engendrées par deux faisceaux homographiques de cônes, passant par deux coniques déterminées (O) et (O') (\*); et nous ajouterons, en passant, que *si deux plans tournant autour de deux droites quelconques s'entrecoupent sur une troisième droite, le lieu géométrique des intersections de ces plans, et par suite d'une droite assujettie à glisser sur trois droites fixes quelconques sera une surface gauche du second ordre, ou une de ses variétés*.

Il est à remarquer, au surplus, qu'à l'étude d'un système de coniques répondra le système de surfaces du second ordre, etc. On voit donc comment on est parvenu aisément à ramener les simples opérations de lignes décrites sur un plan à celles de l'espace; et réciproquement.

Le problème qui a pour objet de *mener une transversale Omm'*

---

(\*) Voy. notre Mémoire de géométrie descriptive, p. 34 (note).

par un point  $O$  donné à égale distance de deux droites  $O'm$  et  $O'm'$ , de manière que la partie interceptée  $mn'$  par ces droites soit égale à une droite donnée  $k$ , et que nous avons proposé dans ce journal, t. I, p. 64, pour être seulement résolu à l'aide de la géométrie élémentaire (\*), se trouve résolu, dans cette étude de la génération des coniques, — en considérant l'intersection d'une hyperbole, lieu géométrique du point milieu de la partie de cette sécante comprise entre les droites  $Om$  et  $O'm'$ , quand elle tournera autour de  $O$  (\*\*), et d'une ellipse, lieu géométrique du point milieu de la droite  $mm'$  de longueur constamment égale à la droite donnée  $k$ , et dont l'extrémités sont assujetties à glisser sur ces deux droites, les constructions respectives dépendant à peine de l'emploi du cercle et de la droite.

II

Dans l'étude de la *génération cycloïdale des coniques*, ou du lieu géométrique du centre d'un cercle variable assujetti à couper continuellement deux autres cercles donnés, sous des angles également donnés (\*\*\*) nous avons démontré synthétiquement, dans ce journal, t. II, p. 132, le théorème suivant:

Étant donnés deux cercles ( $E''$ ) et ( $I''$ ), si deux tangentes à ceux-ci se déplacent de manière que la somme algébrique des distances  $\tau$  et  $\tau'$  des points de contact au point d'intersection  $o$  de ces tangentes soit une grandeur constante, le lieu géométrique décrit par

(\*) Voy. les solutions publiées dans ce Journal, t. I, p. 71 à 75, et p. 105 à 109.

(\*\*) Comme on sait ce théorème est un cas particulier du suivant: Une point  $O$ , une droite  $D$ , et une conique ( $\Sigma$ ) sont donnés: une transversale, tournant autour du point, coupe la droite en un point  $a$  et la conique en deux points  $m$  et  $m'$ ; si l'on prend le point  $a'$  conjugué de  $a$  par rapport à  $m$  et  $m'$ , le lieu de ce point sera une conique, qui passera par le point  $O$ ; par le pôle de la droite  $D$ ; par les points d'intersection de cette droite et de la conique; et enfin par les points de contact des tangentes menées du point  $O$  à la conique.

A ce théorème répond un autre beaucoup plus général; et à ceux-ci répondront les théorèmes analogues de la géométrie de l'espace. Et réciproquement.

(\*\*\*) Voy. A Treatise on conic sections, by George Salmon (fourth edition, 1863).

ce point d'intersection sera une conique ( $\Sigma$ ) donnée de forme et de position.

D'après cela nous avons donné à ces cercles enveloppes ( $E''$ ) et ( $I''$ ) le nom de *cercles focaux* ou *foyers tangentiels*, et à leurs tangentes  $\tau$  et  $\tau'$  le nom de *vecteurs tangentiels* ou *roulants*.

Pour bien justifier déjà ces dénominations il suffit seulement d'énoncer le théorème suivant, que nous démontrerons aussi synthétiquement :

*Le lieu géométrique des points dont la distance tangentielle  $\tau$  à un cercle ( $E''$ ) et la distance orthogonale  $\pi$  à une droite  $\Delta$  sont dans un rapport constant  $\lambda$  est une conique ( $\Sigma$ ) donnée de forme et de position.*

Ainsi ce cercle ( $E''$ ) et la droite  $\Delta$  auront donc des propriétés analogues à celles des *points focaux* et des *directrices* correspondantes des coniques.

D'ailleurs ce théorème est la traduction du suivant :

*Quand un cercle variable de grandeur est assujéti à couper orthogonalement un cercle donné, et à couper (réellement ou idéalement) sous un angle constant, une droite également donnée, le lieu géométrique du centre de ce cercle variable sera une conique ayant respectivement pour cercle focal et pour directrice correspondante le cercle et la droite donnés.*

Si, par exemple, nous considérons les cercles ( $E''$ ) et ( $I''$ ) comme les traces de cylindres ou de cônes de révolution et les vecteurs tangentiels comme les traces de plans tangents à ces surfaces, la conique ( $\Sigma$ ) deviendra la trace de *surfaces réglées*.

En considérant ces cercles comme les traces de sphères ou de tores, ces surfaces seront alors les *surfaces focales* de surfaces du second ordre de révolution, etc.

Nous avons aussi résolu synthétiquement le problème qui a pour objet de *décrire des cercles coupant sous des angles égaux trois cercles donnés*.

Nous reviendrons tout de suite sur cette étude, que nous avons interrompue par des motifs très-justifiables.

---

Nous passons à dire quelques mots sur le problème, que nous avons proposé dans ce Journal, t. I, p. 80, et qui a pour objet de *mener par un point O donné dans le plan d'un cercle (C) une*

transversale  $Onm$  telle, que les distances de ce point à ceux d'intersection  $m$  et  $n$  avec le cercle soient dans un rapport donné  $\frac{m}{n}$ .

Ce problème a été résolu par Mr. Zeferino Candido, et sa solution publiée dans ce même Journal, t. I, p. 84; mais nous ne pouvons laisser de présenter aussi notre solution pour montrer qu'elle se fonde sur des principes bien connus et que nous avons étudiés avec assez de généralité, tant sur le point de vue de la géométrie plane que de la géométrie de l'espace; car nous n'avons jamais proposé une question quelle qu'elle soit sans que nous ne l'ayons pas étudiée d'abord d'une manière générale.

C'est, au reste, ce qu'on voit évidemment par nos travaux, publiés dans ce Journal, sur ces questions. Maintenant passons à entrer dans la solution de ce problème.

Tirons le diamètre  $ab$  passant par  $O$  et représentons par  $p$  le point milieu de la corde  $mn$  déterminée par la transversale demandée  $Onm$ ; et en unissant ce point au centre  $C$  du cercle, menons par les points  $m$  et  $n$  les droites  $mr$  et  $ns$  parallèles à la droite  $pC$ , lesquelles coupent le diamètre considéré aux points  $r$  et  $s$ . Ainsi nous avons :

$$\frac{Om}{On} = \frac{Or}{Os} = \frac{m}{n}.$$

Or, le point  $p$  se trouvant sur un cercle décrit sur  $OC$  comme diamètre (\*), les points  $m$  et  $n$  seront sur les cercles  $mrm'$  et  $nsn'$  décrits sur  $Om$  et  $On$  comme diamètre.

Donc, si par le point  $O$  nous menons une droite quelconque  $OM$ , en y déterminant les segments  $OM$  et  $ON$  dans le rapport  $\frac{m}{n}$ , nous unissons le point milieu  $P$  du segment  $MN$  au centre du cercle ( $C$ ) les parallèles  $Mr$  et  $Ns$  à la droite  $PC$  couperont le diamètre  $ab$  aux points  $r$  et  $s$  tels, que l'un quelconque des cercles décrits sur  $Or$  et  $Os$  comme diamètres coupera le cercle donné aux points qui déterminent les transversales demandées.

(\*) Comme on sait cette propriété est encore un cas particulier du théorème énoncé à p. 13 (note).

Étant donc le point  $O$  extérieur, quand on aura  $Or > Ob$ , c'est-à-dire quand les points  $r$  et  $s$  seront extérieurs les solutions deviendront idéales; et l'inverse aura lieu dans le cas où le point  $O$  sera intérieur; mais alors aux solutions idéales pour le cercle donné (C) répondront les solutions réelles pour l'hyperbole équilatère (H), sa conique supplémentaire, par rapport au diamètre  $ab$ .

Dans le cas où le cercle est remplacé par une autre conique, nous avons encore à employer seulement des constructions très-faciles déterminées par le cercle et la droite.

---

Nous présenterons plus tard la solution du problème qui consiste à *déterminer un triangle semblable à un autre, et ayant les sommets sur trois cercles quelconques* en n'ayant ressource qu'à la géométrie élémentaire. Nous faisons également l'étude générale de cette question, et pousserons même l'étude aux figures analogues à trois dimensions en considérant, par exemple, les côtés des triangles demandés et les cercles, respectivement, comme les projections de génératrices rectilignes et de sections d'hyperboloïdes.

---

De même nous mettrons au jour nos travaux généraux sur le problème que nous avons proposé dans ce Journal à p. 116 du vol. III.

Lisbonne, 1882.



DERIVADAS DE ORDEM QUALQUER DE  $y$  EM ORDEM A  $x$   
QUANDO É  $f(x,y) = 0$

POR

DUARTE LEITE PEREIRA DA SILVA

I

Dada uma funcção implicita a duas variaveis  $f(x,y) = 0$ , as fórmulas deduzidas pelo sr. dr. Gomes Teixeira (\*) dão-nos o valor de  $y^{(n)}$  em funcção de  $y^{(n-1)}$ ,  $y^{(n-2)}$ , ....

Vamos em seguida deduzir uma fórmula que nos dá o valor de  $y^{(n)}$  directamente em funcção de  $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{df}{dy}$ , ....

Derivemos successivas vezes a equação  $f(x,y) = 0$ . Teremos

$$(1) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dx} \\ 0 &= \frac{d^2f}{dx^2} + 2 \frac{d^2f}{dxdy} y' + \frac{d^2f}{dy^2} y'^2 + \frac{df}{dy} y'' \\ 0 &= \frac{d^3f}{dx^3} + 3 \frac{d^3f}{dx^2dy} y' + 3 \frac{d^3f}{dxdy^2} y'^2 + \frac{d^3f}{dy^3} y'^3 \\ &\quad + 3 \left[ \frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dy^2} y' \right] y'' + \frac{df}{dy} y''' \end{aligned} \right.$$

(\*) *Giornale di Matematiche de Battaglini*, vol. XVIII.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 0 = & \frac{d^4 f}{dx^4} + 4 \frac{d^4 f}{dx^3 dy} y' + 6 \frac{d^2 f}{dx^2 dy^2} y'^2 + 4 \frac{d^2 f}{dx dy^3} y'^3 + \frac{d^4 f}{dy^4} y'^4 \\
 & + 6 \left[ \frac{d^3 f}{dx^2 dy} + 2 \frac{d^3 f}{dx dy^2} y' + \frac{d^3 f}{dy^3} y'^2 \right] y'' \\
 & + 4 \left[ \frac{d^2 f}{dx dy} + \frac{d^2 f}{dy^2} y' \right] + 3 \frac{d^2 f}{dy^2} y'^2 + \frac{df}{dy} y'^4
 \end{aligned}$$

.....

D'onde se deduzem os seguintes valores

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y' = & -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}, \quad y'' = -\frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{\frac{df}{dy}} + 2 \frac{\frac{d^2 f}{dx dy} \frac{df}{dx}}{\left[\frac{df}{dy}\right]^2} - \frac{\frac{d^2 f}{dy^2} \left[\frac{df}{dx}\right]^2}{\left[\frac{df}{dy}\right]^3} \\
 y''' = & -\frac{\frac{d^3 f}{dx^3}}{\frac{df}{dy}} + \frac{3 \frac{d^3 f}{dx^2 dy} \frac{df}{dx} + 3 \frac{d^2 f}{dy dx} \frac{d^2 f}{dx^2}}{\left[\frac{df}{dy}\right]^2} \\
 & \frac{3 \frac{d^3 f}{dx dy^2} \left[\frac{df}{dx}\right]^2 + 6 \left[\frac{d^2 f}{dx dy}\right]^2 \frac{df}{dx} + 3 \frac{d^2 f}{dy^2} \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{df}{dx}}{\left[\frac{df}{dy}\right]^3} \\
 & + \frac{\frac{d^3 f}{dy^3} \left[\frac{df}{dx}\right]^3 + 9 \frac{d^2 f}{dy^2} \left[\frac{df}{dx}\right]^2 \frac{d^2 f}{dx dy} \left[\frac{d^2 f}{dy^2}\right]^2 \left[\frac{df}{dx}\right]^3}{\left[\frac{df}{dy}\right]^4} - \frac{\left[\frac{d^2 f}{dy^2}\right]^2 \left[\frac{df}{dx}\right]^3}{\left[\frac{df}{dy}\right]^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y^{iv} = & -\frac{\frac{d^4f}{dx^4}}{\frac{df}{dy}} + \frac{4 \frac{d^4f}{dx^3dy} \frac{df}{dx} + 6 \frac{d^3f}{dx^2dy^2} \frac{d^2f}{dx^2} + 4 \frac{d^2f}{dx dy} \frac{d^3f}{dx^3}}{\left[\frac{df}{dy}\right]^2} \\
 & + \frac{6 \frac{d^4f}{dx^2dy^2} \left[\frac{df}{dx}\right]^2 + 12 \frac{d^3f}{dx dy^2} \frac{d^2f}{dx^2} \frac{df}{dx} + 24 \frac{d^3f}{dx^2dy} \frac{d^2f}{dx dy} \frac{df}{dx}}{\left[\frac{df}{dy}\right]^3} \\
 & + \frac{12 \left[\frac{d^2f}{dx dy}\right]^2 \frac{d^2f}{dx^2} + 4 \frac{d^3f}{dx^3} \frac{d^2f}{dy^2} \frac{df}{dx}}{\left[\frac{df}{dy}\right]^3} \\
 (2) \quad & + \frac{4 \frac{d^4f}{dx^2dy^3} \left[\frac{df}{dx}\right]^3 + 16 \frac{d^3f}{dx^2dy} \left[\frac{df}{dx}\right]^2 \frac{d^2f}{dy^2} + 24 \left[\frac{d^2f}{dx dy}\right]^3 \frac{df}{dx}}{\left[\frac{df}{dy}\right]^4} \\
 & + \frac{36 \frac{d^3f}{dx dy^2} \frac{d^2f}{dx dy} \left[\frac{df}{dx}\right]^2 + 24 \frac{d^2f}{dx dy} \frac{d^2f}{dx^2} \frac{d^2f}{dy^2} \frac{df}{dx} + 6 \frac{d^3f}{dy^3} \frac{d^2f}{dx^2} \left[\frac{df}{dx}\right]^2}{\left[\frac{df}{dy}\right]^4} \\
 & + \frac{\frac{d^4f}{dy^4} \left[\frac{df}{dx}\right]^4 + 24 \frac{d^3f}{dx dy^2} \frac{d^2f}{dy^2} \left[\frac{df}{dx}\right]^3 + 16 \frac{d^3f}{dy^3} \frac{d^2f}{dx dy} \left[\frac{df}{dx}\right]^3}{\left[\frac{df}{dy}\right]^5} \\
 & + \frac{12 \frac{d^3f}{dx dy^2} \left[\frac{df}{dx}\right]^3 \frac{d^2f}{dy^2} + 60 \left[\frac{d^2f}{dx dy}\right]^2 \left[\frac{df}{dx}\right]^2 \frac{d^2f}{dy^2}}{\left[\frac{df}{dy}\right]^5}
 \end{aligned}$$

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & + \frac{12 \left[ \frac{d^2 f}{dy^2} \right]^2 \left[ \frac{df}{dx} \right]^2 \frac{d^2 f}{dx^2}}{\left[ \frac{df}{dy} \right]^5} \\ & + \frac{10 \frac{d^2 f}{dy^2} \left[ \frac{df}{dx} \right]^4 \frac{d^3 f}{dy^3} + 48 \left[ \frac{d^2 f}{dy^2} \right]^2 \left[ \frac{df}{dx} \right]^3 \frac{d^2 f}{dx dy}}{\left[ \frac{df}{dy} \right]^6} \\ & - \frac{12 \left[ \frac{d^2 f}{dy^2} \right]^3 \left[ \frac{df}{dx} \right]^4}{\left[ \frac{df}{dy} \right]^7} \end{aligned} \right.$$

Do exame d'estas fórmulas se conclue que o termo geral da expressão da derivada de ordem  $n$  póde ser representado pela expressão

$$A \left[ -\frac{df}{dy} \right]^{-(m+1)} \left[ \frac{d^a f}{dx^a dy^{a-u}} \right]^{a_1} \left[ \frac{d^b f}{dx^v dy^{b-v}} \right]^{b_1} \dots \left[ \frac{d^l f}{dx^w dy^{l-w}} \right]^{l_1}$$

onde  $m$  é o numero de termos que precedem,  $A$  um coefficiente numerico, e  $a, u, a_1; b, v, b_1; \dots$  numeros inteiros e positivos que satisfazem ás relações seguintes

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + \dots + l_1 &= m + 1 \\ a_1 u + b_1 v + \dots + l_1 w &= n \\ a_1 a + b_1 b + c_1 c + \dots + l_1 l &= n + m \end{aligned} \right.$$

Para mostrar que é verdadeira a indução que nos dá

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & y^{(n)} = \sum A \left[ -\frac{df}{dy} \right]^{-(m+1)} \\ & \times \left[ \frac{d^a f}{dx^u dy^{a-u}} \right]^{a_1} \left[ \frac{d^b f}{dx^v dy^{b-v}} \right]^{b_1} \dots \left[ \frac{d^l f}{dx^w dy^{l-w}} \right]^{l_1} \\ & (3)' \left\{ \begin{aligned} & a_1 + b_1 + c_1 + \dots + l_1 = m + 1 \\ & a_1 u + b_1 v + \dots + l_1 w = n \\ & a_1 a + b_1 b + c_1 c + \dots + l_1 l = n + m \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

derivemos (3). Virá, depois de feitas as devidas transformações, uma expressão

$$\begin{aligned} & y^{(n+1)} = \sum A \left\{ \left[ -\frac{df}{dy} \right]^{-(m+1)} \right. \\ & \times a_1 \left[ \frac{d^a f}{dx^u dy^{a-u}} \right]^{a_1-1} \frac{d^{a+1} f}{dx^{u+1} dy^{a-u}} \left[ \frac{d^b f}{dx^v dy^{b-v}} \right]^{b_1} \dots \left[ \frac{d^l f}{dx^w dy^{l-w}} \right]^{l_1} \\ & \quad \left. + [-1]^{m+2} \left[ \frac{df}{dy} \right]^{-(m+2)} \right. \\ & \times \left\{ a_1 \left[ \frac{d^a f}{dx^u dy^{a-u}} \right]^{a_1-1} \frac{d^{a+1} f}{dx^u dy^{a-u+1}} \left[ \frac{d^b f}{dx^v dy^{b-v}} \right]^{b_1} \dots \left[ \frac{d^l f}{dx^w dy^{l-w}} \right]^{l_1} \frac{df}{dx} \right. \\ & \quad \left. + (m+1) \frac{d^2 f}{dx dy} \left[ \frac{d^a f}{dx^u dy^{a-u}} \right]^{a_1} \left[ \frac{d^b f}{dx^v dy^{b-v}} \right]^{b_1} \dots \left[ \frac{d^l f}{dx^w dy^{l-w}} \right]^{l_1} \right\} \\ & \quad \left. + \left[ -\frac{df}{dy} \right]^{-(m+3)} (m+1) \frac{d^2 f}{dy^2} \frac{df}{dx} \right. \\ & \quad \left. \times \left[ \frac{d^a f}{dx^u dy^{a-u}} \right]^{a_1} \left[ \frac{d^b f}{dx^v dy^{b-v}} \right]^{b_1} \dots \left[ \frac{d^l f}{dx^w dy^{l-w}} \right]^{l_1} + \dots \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

Ora (4) é análoga a (3), e as condições (3)' tem lugar, se mudarmos  $n$  em  $n+1$ , e  $m$  respectivamente em  $m$ ,  $(m+1)$  e  $(m+2)$ .

Justificada a fórmula (3) resta completá-la determinando o coeficiente A; o que faremos por meio d'um caso particular.

Como no caso geral o signal é perfeitamente determinado e dado por  $[-1]^{m+1}$ , em tudo o que se segue, procuraremos simplesmente o valor absoluto de A.

Seja a equação

$$y = (x + x^2 + \dots + x^n)^p \dots \dots \dots (5).$$

D'onde se tira uma segunda implicita

$$y^{-\frac{1}{p}} (x + x^2 + \dots + x^n) - 1 = 0.$$

De (5), que se pôde escrever depois de desenvolvida

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} y = \sum \frac{p!}{h_1! h_2! \dots h_n!} x^q \\ \left\{ \begin{array}{l} p = h_1 + h_2 + \dots + h_n \\ q = h_1 + 2h_2 + \dots + nh_n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

se conclue que é

$$y^{(n)} = \sum \frac{p! q(q-1) \dots (q-n+1)}{h_1! h_2! \dots h_n!} x^{q-n}.$$

Annulando  $x$ , annullam-se todos os termos em que não é  $q-n=0$ .

Fica, pois, chamando

$$y_0^{(n)} = [y^{(n)}]_{x=0} = \left\{ \begin{array}{l} y_0^{(n)} = \sum \frac{p! n!}{h_1! h_2! \dots h_n!} \\ p = h_1 + h_2 + \dots + h_n \\ h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n = n \end{array} \right\}$$

Da equação implícita

$$y^{-\frac{1}{p}} (x + x^2 + \dots + x^n) - 1 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

se conclue

$$\begin{aligned} \frac{d^u f}{dx^u} &= y^{-\frac{1}{p}} \frac{d^u}{dx^u} \sum x^i = y^{-\frac{1}{p}} \sum i(i-1) \dots (i-u+1) x^{i-u} \\ \frac{d^u f}{dx^u dy^{a-u}} &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} + 1\right) \left(\frac{1}{p} + 2\right) \dots \left(\frac{1}{p} + a - u - 1\right) y^{-\frac{1}{p} - a + u} \\ &\quad \times \sum i(i-1) \dots (i-u+1) x^{i-u} \\ &= 1(1+p)(1+2p) \dots [1+(a-u-1)p] p^{-a+u} y^{-\frac{1}{p} - a + u} \\ &\quad \times \sum i(i-1) \dots (i-u+1) x^{i-u} \\ &= 1^{a-u} p p^{-(a-u)} y^{-\frac{1}{p} - (a-u)} \sum_u \end{aligned}$$

representando, para abreviar,

$$\sum_u = \sum i(i-1) \dots (i-u+1) x^{i-u},$$

\*

Temos pois

$$\left[ \frac{d^a f}{dx^u dy^{a-u}} \right]^{a_1} = [1^{a-u|p}]^{a_1} p^{-(a-u)a_1} y^{-\frac{a_1}{p} - (a-u)a_1} [\Sigma_u]^{a_1},$$

e do mesmo modo

$$\left[ \frac{d^b f}{dx^v dy^{b-v}} \right]^{b_1} = [1^{b-v|p}]^{b_1} p^{-(b-v)b_1} y^{-\frac{b_1}{p} - (b-v)b_1} [\Sigma_v]^{b_1}.$$

D'onde se conclue facilmente que é

$$y^{(n)} = \Sigma A \left[ -\frac{df}{dy} \right]^{-(m+1)} [1^{a-u|p}]^{a_1} [1^{b-v|p}]^{b_1} \dots p^{-m} y^{-\frac{m+1}{p} - m} \\ \times [\Sigma_u]^{a_1} [\Sigma_v]^{b_1} \dots [\Sigma_w]^{l_1}.$$

Mas

$$\frac{df}{dy} = -\frac{1}{p} y^{-\frac{1}{p}} (x + x^2 + x^3 + \dots + x^n) = -\frac{1}{py}.$$

Portanto, não attendendo aos signaes, teremos

$$y^{(n)} = \Sigma A p [1^{a-u|p}]^{a_1} [1^{b-v|p}]^{b_1} \dots y^{-\frac{m+1}{p} + 1} \\ \times [\Sigma_u]^{a_1} [\Sigma_v]^{b_1} \dots [\Sigma_w]^{l_1}.$$

Fazendo  $x=0$ , o que traz consigo  $y=0$  para  $p > 0$ , annullam-se todos os termos em que não fôr

$$\frac{m+1}{p} - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad p = m+1,$$

valor necessariamente positivo.



Logo, representando

$$y_0^{(n)} = [y^{(n)}]_{x=0},$$

e notando que os sommatorios

$$\sum i(i-1) \dots (i-u+1) x^{i-u}, \sum i(i-1) \dots (i-v+1) x^{i-v}, \dots$$

se transformam em

$$1.2 \dots u = u!, \quad 1.2 \dots v = v!, \quad \dots,$$

será representado  $y_0^{(n)}$  pelo valor

$$(7) \dots y_0^{(n)} = \sum A(m+1) [1^{a-u|m+1}]^{a_1} [1^{b-v|m+1}]^{b_1} \dots \\ \times (u!)^{a_1} (v!)^{b_1} \dots (w!)^{l_1}.$$

Egualando (7) a (6) e notando que da comparação das condições (6) com as condições (3)', e de ser  $p = m + 1$ , se vê serem

$$h_1 = u, \quad h_2 = v, \quad \dots \quad h_n = w,$$

resulta para A o seguinte valor

$$A = \frac{n! m!}{a_1! b_1! \dots l_1! (u!)^{a_1} (v!)^{b_1} \dots (w!)^{l_1} [1^{a-u|m+1}]^{a_1} [1^{b-v|m+1}]^{b_1} \dots}$$

e portanto para o valor de  $y^{(n)}$  procurado

$$y^{(n)} = \sum \frac{m! n!}{a_1! b_1! \dots l_1! (u!)^{a_1} (v!)^{b_1} \dots (w!)^{l_1} F_{a-u} F_{b-v} \dots F_{l-w}} \left[ \frac{df}{dy} \right]^{-(m+1)} \\ \times \left[ \frac{d^a f}{dx^u dy^{a-u}} \right]^{a_1} \left[ \frac{d^b f}{dx^v dy^{b-v}} \right]^{b_1} \dots \left[ \frac{d^l f}{dx^w dy^{l-w}} \right]^{l_1}$$



F. A. de Brito Lima. — Algumas palavras sobre a necessidade do determinação directa da longitude geographica de um dos nossos Observatorios pelos processos electricos. — Lisboa, 1882.

**BIBLIOGRAPHIA**

*H. F. Barros.* — *Elementos de Trigonometria Rectilinea.* — Lisboa, 1882.

Este livro, escripto para uso dos Institutos de instrucção secundaria, contem todas as doutrinas exigidas pelo programma respectivo, expostas com muita clareza e ordem, e por isso o recommendamos aos professores de mathematica elementar. É dividido em duas partes, na primeira das quaes se tracta da *Theoria das relações trigonometricas*, e na segunda da *Trigonometria rectilinea propriamente dicta*.

Temos notado que os alumnos têm sempre alguma difficuldade em comprehender a razão pela qual se substitue no calculo os angulos pelas linhas trigonometricas. O sr. Barros expõe com muita clareza a doutrina relativa a esta substituição logo nas primeiras paginas do seu excellente livro.

Passa em seguida á demonstração das fórmulas que dão os valores das relações trigonometricas da somma e differença de dois arcos, e suas principaes consequencias.

Depois tracta da construção e uso das táboas trigonometricas, e assim termina a primeira parte.

Na segunda parte tracta da resolução dos triangulos, e ahi estabelece as fórmulas applicaveis nos diversos casos partindo das equações:

$$A + B + C = 180$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

*F. A. de Brito Limpo.* — *Algumas palavras sobre a necessidade da determinação directa da longitude geographica de um dos nossos Observatorios pelos processos electricos.* — Lisboa, 1882.

N'este opusculo o sr. Brito Limpo, auctor bem conhecido de muitos trabalhos importantes sobre geodesia, mostra que a longitude dos observatorios portuguezes relativamente aos observatorios mais importantes da Europa não é conhecida ainda com o rigor que a moderna sciencia exige; apresenta as tentativas feitas para resolver este importante problema; e insta para que os nossos astrónomos o resolvam, procurando a differença de longitude entre o observatorio da Tapada d'Ajuda e o de Madrid pelos processos electricos.

*Marcus Baker.* — *Alhazen's problem.*

N'este artigo, publicado no *American Journal of Mathematics*, vol. IV, o sr. Baker expõe primeiro a lista dos trabalhos que tem sido publicados a respeito do problema seguinte:

*De dois pontos collocados no plano de um circulo tirar linhas rectas que se encontrem no mesmo ponto de circumferencia e façam angulos eguaes com a tangente que passa por este ponto.*

Depois estende este problema, que é o de Alhazen (mathe-matico arabe que viveu no seculo onze), ao caso em que o circulo está collocado n'uma esphera e por dois pontos da esphera se querem traçar arcos de circulo maximo que façam angulos eguaes com o circulo dado.

$$A + B + C = 180$$

$$\frac{A}{\sin A} = \frac{B}{\sin B} = \frac{C}{\sin C}$$

**SOBRE A FÓRMULA DE LAGRANGE**

POR

J. M. RODRIGUES

Alferes d'artilheria

A notavel fórmula de Lagrange

$$Fy = Ft + x [F't.(\varphi t)] + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{d [F't.(\varphi t)^2]}{dt} + \dots + \frac{x^n}{1.2 \dots n} \cdot \frac{d^{n-1} [F't.(\varphi t)^n]}{dt^{n-1}} + \dots$$

dá o desenvolvimento em serie de uma funcção da variavel *y* definida pela equação

$$y = t + x\varphi y.$$

A fórmula de Taylor e a de Lagrange constituem dois theoremas fundamentaes da theoria geral das funcções; a primeira exprime o desenvolvimento de uma funcção explicita segundo as potencias progressivas da variavel, e a segunda o desenvolvimento de uma funcção implicita reductivel á forma da equação

$$y = t + x\varphi y.$$

O theorema de Lagrange tem sido objecto de importantes investigações de muitos geometras illustres. Laplace demonstrou e generalisou este theorema; Burmann deu uma fórmula notavel, comprehendendo a de Lagrange como um caso particular; e

Wronski, introduzindo as suas notaveis funcções *schins* na generalisação do theorema de Lagrange, deu a solução do seu Problema Universal.

No Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa e no Jornal de M. Liouville, tomo VII da 3.<sup>a</sup> serie, o sr. Dr. Gomes Teixeira deu uma notavel fórmula mais geral que a de Lagrange para o desenvolvimento em serie, ordenada segundo as potencias de  $x$ , da funcção

$$u = Fy$$

$$y = t + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \dots + x^n\varphi_n(y),$$

a saber:

$$Fy = Ft + x [F't \cdot \varphi_1(t)] + \dots$$

$$+ x^i \sum \frac{d^b \{ F't \cdot [\varphi_1(t)]^\alpha \cdot \dots \cdot [\varphi_n(t)]^\lambda \}}{1.2 \dots \alpha \times 1.2 \dots \beta \times \dots \times 1.2 \dots \lambda} dt^b + \dots$$

onde

$$b + 1 = \alpha + \beta + \lambda + \dots + \lambda$$

$$i = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + \lambda$$

que contem a de Lagrange como caso muito particular.

Quando a funcção  $Fy$  designa a propria variavel  $y$ , a fórmula de Lagrange dá o desenvolvimento em serie de uma raiz da equação

$$\bar{y} = t + x\varphi y;$$

mas esta equação tendo, em geral, mais de uma raiz, qual d'ellas é a que dá a fórmula?

A demonstração classica de Laplace não determina a natureza da raiz dada pela fórmula; porém M. Rouché, partindo das bellas investigações de Cauchy sobre esta questão, determinou *à priori* a natureza da raiz, demonstrando elegantemente o theorema de Lagrange.

Taes são, em summa, as investigações mais notaveis sobre a fórmula de Lagrange.

O objecto d'esta memoria é generalisar a fórmula de Lagrange, procurando o desenvolvimento em serie de uma funcção  $Fx$  de uma variavel  $x$  definida pela equação

$$fx \pm \alpha \cdot \varphi x = 0$$

e, como consequencia immediata, exprimir por integraes definidos a geração das raizes das equações algebraicas ou transcendentis.

I

Seja

$$fx \pm \alpha \varphi x = 0$$

uma equação algebraica ou transcendente e  $a$  uma raiz simples da equação

$$fx = 0;$$

pondo

$$x = a + z$$

resulta a equação transformada

$$f(a+z) \pm \alpha \cdot \varphi(a+z) = 0.$$

Se  $f(a+z)$  e  $\varphi(a+z)$  fazem funcções bem determinadas, e continuas para um valor  $r$  do modulo da variavel imaginaria

$$z = \rho e^{i\theta},$$

esta equação gosa de propriedades notaveis que se traduzem nos theoremas seguintes.

THEOREMA I. Se

$$\text{mod.} \left[ \max. \left[ \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] \right] < 1$$

para um valor  $r$  do modulo da variavel imaginaria e inferior ao raio de convergencia  $R$ , a equação

$$f(a+z) \pm \alpha \cdot \varphi(a+z) = 0$$

tem uma raiz unica de modulo inferior a  $r$ .

Com effeito, sejam

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$$

$m$  raizes de modulo inferior a  $r$  da equação

$$f(a+z) \pm \alpha \cdot \varphi(a+z) = 0;$$

será

$$f(a+z) \pm \alpha \cdot \varphi(a+z) = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)\psi(a,z)$$

d'onde

$$l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] = l(z-z_1) + l(z-z_2) + \dots + l(z-z_m) \\ + l \left[ \frac{\psi(a,z)}{f(a+z)} \right];$$

mas

$$f(a+z) = fa + zf'(a+\omega z)$$

ou

$$f(a+z) = zf'(a+\omega z)$$

por ser  $a$  uma raiz da equação  $fx=0$ ; por consequencia

$$l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] = l(z-z_1) + l(z-z_2) + \dots + l(z-z_m) \\ + l \left[ \frac{\psi(a,z)}{zf'(a+\omega z)} \right]$$



d'onde

$$l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] - l \left[ \frac{\psi(a,z)}{f'(a+\omega z)} \right] = l(z-z_1) + l(z-z_2) + \dots + l(z-z_m) - lz$$

e derivando vem

$$\frac{dl \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right]}{dz} - \frac{dl \left[ \frac{\psi(a,z)}{f'(a+\omega z)} \right]}{dz} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \dots + \frac{1}{z-z_m} - \frac{1}{z} = \frac{m-1}{z} + \frac{z_1+z_2+z_3+\dots+z_m}{z^2} + \dots (a)$$

Ora, por hypothese,

$$\text{mod. max.} \left[ \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] < 1$$

para um valor  $r$  do modulo de  $z$ ; logo

$$l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] = \pm \alpha \left( \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right) - \frac{\alpha^2}{2} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right)^2 \mp \dots,$$

mas

$$f(a+z) = z f'(a+\omega z),$$

por consequencia

$$l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] = \pm \alpha \left( \frac{\varphi(a+z)}{z f'(a+\omega z)} \right) - \frac{\alpha^2}{2} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{z f'(a+\omega z)} \right)^2 \pm \dots$$

desenvolve-se n'uma serie convergente segundo as potencias positivas e negativas da variavel  $z$ , pois que  $\varphi$  e  $f$  são, por hypo-

these, funcções bem determinadas e contínuas: logo, no primeiro membro da expressão (a), o primeiro termo desenvolve-se também n'uma serie convergente segundo as potencias positivas e negativas da variavel  $z$ , mas n'este desenvolvimento não ha termo em  $\frac{1}{z}$ .

Ora as funcções  $\psi$  e  $f'$  são funcções bem determinadas e contínuas para o valor  $r$  do modulo de  $z$ ; por consequencia, na expressão (a), o segundo termo do primeiro membro desenvolve-se n'uma serie convergente segundo as potencias ascendentes e positivas de  $z$ .

Logo no desenvolvimento do primeiro membro da expressão (a) não ha termo em  $\frac{1}{z}$ ; por consequencia, egualando entre si os coefficients das mesmas potencias de  $z$ , resulta

$$m - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad m = 1.$$

Logo a equação

$$f(a+z) \pm \alpha \cdot \varphi(a+z) = 0$$

tem uma raiz unica de modulo inferior a  $r$ .

THEOREMA II. Se

$$\text{mod. máx.} \left[ \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right]_1 < 1$$

para um valor  $r$  do modulo de  $z$  e inferior a  $R$ , será

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a+re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta$$

a expressão da funcção bem determinada e continua  $Fx$  de uma raiz da equação

$$fx \pm \alpha \cdot \varphi x = 0$$

em função de uma raiz simples da equação

$$fx = 0.$$

Com efeito, se

$$\text{mod. max.} \left[ \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + z)}{f(a_1 + z)} \right] < 1$$

para um valor  $r_1$  do modulo de  $z$  e inferior a  $R$ , a equação

$$f(a_1 + z) \pm \alpha \cdot \varphi(a_1 + z) = 0$$

tem uma raiz unica  $z_1$  de modulo inferior a  $r_1$ ; será pois

$$f(a_1 + z) \pm \alpha \cdot \varphi(a_1 + z) = (z - z_1) \cdot \psi(a_1, z)$$

d'onde

$$1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + z)}{f(a_1 + z)} = \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right) \cdot \frac{\psi(a_1, z)}{f(a_1 + z)} \cdot z$$

$$l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + z)}{f(a_1 + z)} \right] = l \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right) + l \left[ \frac{\psi(a_1, z)}{f(a_1 + z)} \cdot z \right].$$

Se  $F(a_1 + z)$  é uma função bem determinada e contínua para o valor  $r_1$  do modulo da variavel, tambem  $F'(a_1 + z)$  o será; por consequencia, multiplicando por  $zF'(a_1 + z)$ , resulta

$$zF'(a_1 + z) \cdot l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + z)}{f(a_1 + z)} \right] = zF'(a_1 + z) \cdot l \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right) + zF'(a_1 + z) \cdot l \left[ \frac{\psi(a_1, z)}{f'(a_1 + \omega z)} \right].$$

Ora  $\psi$  e  $f'$  são funções bem determinadas e contínuas para um determinado valor do modulo inferior ao raio de convergen-

cia; por consequencia no segundo membro da expressão precedente o segundo termo desenvolve-a n'uma serie convergente segundo as potencias positivas de  $z$ , e n'este desenvolvimento não ha termo independente de  $z$ : será pois

$$zF'(a_1+z) \cdot l \left[ \frac{\psi(a_1, z)}{f'(a_1 + \omega z)} \right] = \sum M_n \cdot z^n$$

começando o sommatorio a partir de  $n=1$ , e

$$zF'(a_1+z) \cdot l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)} \right] = zF'(a_1+z) \cdot l \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right) + \sum M_n \cdot z^n$$

Mas, por ser

$$\text{mod. } \frac{z_1}{z} < 1,$$

$F'(a_1+z)$  e  $l \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right)$  podem desenvolver-se em series convergentes: portanto

$$F'(a_1+z) = F'a_1 + z \cdot F''a_1 + \frac{z^2}{1 \cdot 2} \cdot F'''a_1 + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot F^{IV}a_1 + \dots$$

$$-z l \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right) = z_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{z_1^2}{z} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z_1^3}{z^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{z_1^4}{z^3} + \dots$$

e formando o producto de estas duas series resulta ainda uma serie convergente. N'este producto apparecem tres especies de termos, a saber: termos independentes de  $z$ , termos com potencias positivas e termos com potencias negativas de  $z$ . Podemos pois escrever

$$-zF'(a_1+z) \cdot l \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right) = z_1 F'a_1 + \frac{z_1^2}{1 \cdot 2} \cdot F''a_1 + \frac{z_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot F'''a_1 + \dots$$

$$+ \sum N_n \cdot z^n + \sum P_n \cdot z^{-n},$$

Como o modulo de  $z_1$  é inferior ao modulo de  $z$  segue-se que a serie que entra no segundo membro é convergente e a sua somma é

$$F(a_1 + z_1) - Fa_1 = z_1 F' a_1 + \frac{z_1^2}{1 \cdot 2} \cdot F'' a_1 + \frac{z_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot F''' a_1 + \dots;$$

por consequencia

$$z F'(a_1 + z) \cdot l \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right) = - [F(a_1 + z_1) - Fa_1] - \sum N_n \cdot z^n - \sum P_n \cdot z^{-n}.$$

Logo

$$\left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + z)}{f(a_1 + z)} \right] \right) \cdot F'(a_1 + z) \cdot z = - [F(a_1 + z_1) - Fa_1] + \sum M_n \cdot z^n - \sum N_n \cdot z^n - \sum P_n \cdot z^{-n}$$

ou

$$\left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + z)}{f(a_1 + z)} \right] \right) \cdot F'(a_1 + z) \cdot z = - [F(a_1 + z_1) - Fa_1] + \sum Q_n \cdot z^n - \sum P_n \cdot z^{-n} \dots \dots \dots (a)$$

onde

$$Q_n = M_n - N_n.$$

Dando pois á variavel  $z$  o modulo  $r_1$ , será

$$z = r_1 e^{\theta i},$$

e, substituindo e integrando entre os limites 0 e  $2\pi$ , resulta

$$\int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + z_1 e^{\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a_1 + r_1 e^{\theta i}) \cdot r_1 e^{\theta i} d\theta = - 2\pi [F(a_1 + z_1) - Fa_1]$$

$$+ \sum Q_n r_1^n \cdot \int_0^{2\pi} e^{n\theta i} d\theta - \sum P_n r^{-n} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-n\theta i} d\theta;$$

mas

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm n\theta i} \cdot d\theta = 0,$$

logo

$$F(a_1+z_1) = Fa_1 - \frac{r_1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1+r_1 e^{\theta i})}{f(a_1+r_1 e^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a_1+r_1 e^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta,$$

ou, supprimindo os indices,

$$F(a+z) = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+r e^{\theta i})}{f(a+r e^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a+r e^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta.$$

Más

$$x = a + z,$$

portanto o modulo de  $x$  inferior ao modulo de  $z$  e por maioria de razão inferior ao modulo  $r$ ; logo

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+r e^{\theta i})}{f(a+r e^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a+r e^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta$$

é a expressão de uma função contínua  $Fx$  de uma raiz de modulo inferior a  $r$  da equação

$$fx \pm \alpha \cdot \varphi x = 0$$

em função de uma raiz simples da equação

$$fx = 0,$$

como se queria demonstrar.

Atribuindo ao modulo da variavel

$$z = \rho \cdot e^{\theta i}$$

um valor determinado  $r_1$ , o argumento fica indeterminado e póde

receber todos os valores desde  $-\infty$  a  $+\infty$ ; por consequencia fazendo na equação (a)

$$z = r_1 e^{\theta i} \quad \text{e} \quad z = r_1 \cdot e^{-\theta i}$$

resulta

$$\left( l \left[ 1 \pm z \cdot \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a_1 + r_1 e^{\theta i}) \cdot r_1 e^{\theta i} = - [F(a_1 + z_1) - F a_1] + \sum Q_n r^n \cdot e^{+n\theta i} - \sum P_n r^{-n} \cdot e^{-n\theta i}$$

$$\left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{-\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{-\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a_1 + r_1 e^{-\theta i}) \cdot r_1 e^{-\theta i} = - [F(a_1 + z_1) - F a_1] + \sum Q_n r^n \cdot e^{-n\theta i} - \sum P_n r^{-n} \cdot e^{+n\theta i}$$

Pondo

$$\Theta = \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a_1 + r_1 e^{\theta i}),$$

$$\Theta' = \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{-\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{-\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a_1 + r_1 e^{-\theta i})$$

e, sommando, vem

$$r_1 [\Theta \cdot e^{+\theta i} + \Theta' \cdot e^{-\theta i}] = -z [F(a_1 + z_1) - F a_1]$$

$$+ \sum Q_n r^n (e^{+n\theta i} + e^{-n\theta i}) - \sum P_n r^{-n} (e^{+n\theta i} + e^{-n\theta i})$$

ou

$$r_1 [\Theta \cdot e^{\theta i} + \Theta' \cdot e^{-\theta i}] = -z [F(a_1 + z_1) - F a_1]$$

$$+ 2 \sum Q_n r^n \cos. n\theta - 2 \sum P_n r^{-n} \cos. n\theta;$$

mas

$$\int_0^\pi \cos. n\theta d\theta = 0,$$

\*

logo

$$F(a_1 + z_1) = Fa_1 - \frac{r_1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\Theta \cdot e^{\theta i} + \Theta' \cdot e^{-\theta i}] \cdot d\theta.$$

Esta fórmula é apenas uma transformação da precedente ( $a$ ) e mostra que o integral definido entre 0 e  $2\pi$  se decompõe em dois entre 0 e  $\pi$ ; logo

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \Theta \cdot e^{\theta i} d\theta - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \Theta' \cdot e^{-\theta i} d\theta$$

ou

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \cdot F'(a + re^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{-\theta i})}{f(a + re^{-\theta i})} \right] \cdot F'(a + re^{-\theta i}) \cdot e^{-\theta i} d\theta$$

exprime em integraes definidos uma funcção de uma raiz de modulo inferior a  $r$  da equação

$$fx \pm \alpha \cdot \varphi x = 0.$$

**THEOREMA III. Se**

$$\text{mod. max.} \left[ \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] < 1,$$

será

$$Fx = Fa \mp \alpha \cdot \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right) \right] + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^2 \right]}{da} \mp \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^3 \right]}{da^2} + \dots$$



o desenvolvimento em serie convergente de uma função de uma raiz da equação

$$fx \pm \alpha \cdot \varphi x = 0$$

em função de uma raiz simples da equação reduzida

$$fx = 0.$$

Se

$$\text{mod. max.} \left[ \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] < 1$$

para um valor  $r$  do modulo de  $z$ , é

$$l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] = \pm \alpha \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right) - \frac{\alpha^2}{2} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right)^2 \pm \frac{\alpha^3}{3} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right)^3 - \dots,$$

mas

$$f(a+z) = zf'(a+\omega z)$$

portanto

$$l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] = \pm \frac{\alpha}{z} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{z^2} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right)^2 \pm \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha^3}{z^3} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right)^3 - \dots,$$

e, multiplicando por  $zF'(a+z)$ , resulta

$$\begin{aligned}
 & zF'(a+z) \cdot l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] \\
 &= \pm \alpha F'(a+z) \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right) - \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{F'(a+z)}{z} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right)^2 \\
 & \quad \pm \frac{\alpha^3}{3} \cdot \frac{F'(a+z)}{z^2} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right)^3 \\
 & \quad + \dots \dots \dots \\
 & > \left[ \frac{z+\omega z}{z} \right]^n - (\mp 1)^n \cdot \frac{\alpha^n}{n} \cdot \frac{F'(a+z)}{z^{n-1}} \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right)^n \\
 & \quad + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Dando pois ao modulo de  $z$  o valor  $r$ , teremos

$$z = re^{\theta i},$$

e o segundo membro da expressão precedente é um serie convergente para todos os valores do argumento; por consequencia, integrando entre 0 e  $2\pi$ , resulta

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a+re^{\theta i}) \cdot re^{\theta i} \cdot d\theta \\
 &= \pm \alpha \int_0^{2\pi} F'(a+re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})} \right) d\theta \\
 & \quad - \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} F'(a+re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})} \right)^2 \cdot e^{-\theta i} d\theta \\
 & \quad + \dots \dots \dots \\
 & - (\mp 1)^n \cdot \frac{\alpha^n}{n} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} F'(a+re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})} \right)^n \cdot e^{-(n-1)\theta i} d\theta \\
 & \quad + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Mas pelo theorema precedente

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + \omega e^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a + re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta;$$

logo

$$2\pi [Fx - Fa] = \mp \alpha \cdot \int_0^{2\pi} F'(a + re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f'(a + \omega e^{\theta i})} \right) d\theta$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} F'(a + re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f'(a + \omega e^{\theta i})} \right)^2 \cdot e^{-\theta i} \cdot d\theta$$

.....

$$(\mp 1)^n \cdot \frac{\alpha^n}{n} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} F'(a + re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f'(a + \omega e^{\theta i})} \right)^n \cdot e^{-(n-1)\theta i} \cdot d\theta$$

..... (s)

Ora pela fórmula de Maclaurin

$$F'(a + z) \cdot \left( \frac{\varphi(a + z)}{f'(a + \omega z)} \right)^n = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_m z^m + \dots$$

onde

$$A_m = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \cdot \frac{d^m \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^n \right]}{da^m}$$

é o coefficiente de  $z_m$ ; mas, como é sabido, o coefficiente de  $z^m$  no desenvolvimento de uma função  $fz$  em serie convergente é igual ao valor medio do quociente  $\frac{fz}{z^m}$ ; logo

$$A_m = \text{val. med.} \left[ z^{-m} F'(a + z) \cdot \left( \frac{\varphi(a + z)}{f'(a + \omega z)} \right)^n \right]$$

e como, por um theorema notavel de Cauchy,

$$\begin{aligned} & \text{val. med. } \left[ z^{-m} F'(a+z) \cdot \left( \frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right)^n \right] \\ &= \frac{1}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} F'(a+re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})} \right)^n \cdot e^{-m\theta i} d\theta, \end{aligned}$$

resulta

$$A_m = \frac{1}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} F'(a+re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})} \right)^n \cdot e^{-m\theta i} d\theta.$$

Esta relação tem logar para todos os valores inteiros de  $m$ ; por consequencia para  $m = n - 1$  resulta

$$A_{n-1} = \frac{1}{2\pi r^{n-1}} \int_0^{2\pi} F'(a+re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})} \right)^n \cdot e^{-(n-1)\theta i} \cdot d\theta;$$

logo

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \cdot \frac{d^{n-1} \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^n \right]}{da^{n-1}} \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} F'(a+re^{\theta i}) \cdot \left( \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})} \right)^n \cdot e^{-(n-1)\theta i} \cdot d\theta \end{aligned}$$

é a expressão do termo geral da serie (1).

Logo

$$\begin{aligned}
 Fx = Fa \mp \alpha \cdot \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right) \right] + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^2 \right]}{da} \\
 \mp \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^3 \right]}{da^2} \\
 \dots \dots \dots \\
 (\mp 1)^n \cdot \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{d^{n-1} \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^n \right]}{da^{n-1}} \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} Fx = Fa \mp \alpha \cdot \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right) \right] + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^2 \right]}{da} \right.} \right) (\alpha)$$

dá o desenvolvimento em serie convergente de uma raiz da equação

$$fx \pm \alpha \cdot \varphi x = 0$$

em função de uma raiz simples  $a$  da equação reduzida

$$fx = 0.$$

Esta fórmula comprehende, como caso particular, a de Lagrange. Com effeito quando fôr

$$fx = x - a$$

resulta

$$x - a \pm \alpha \varphi x = 0,$$

ou

$$x = a \mp \alpha \varphi x,$$

que é a equação de Lagrange; e, por ser, n'este caso,  $f'a=1$ , deduz-se da fórmula (α) a fórmula de Lagrange

$$Fx = Fa \mp \alpha [F'a \cdot \varphi a] + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{d[F'a \cdot (\varphi a)^2]}{da} \mp \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2[F'a \cdot (\varphi a)^3]}{da^2} + \dots \quad (\beta)$$

Esta fórmula notavel dá o desenvolvimento em serie convergente de uma raiz de modulo inferior a  $r$  da equação

$$x = a \mp \alpha \cdot \varphi x,$$

e a fórmula (α) dá o desenvolvimento em serie convergente de tantas raizes da equação

$$fx \pm \alpha \cdot \varphi x = 0$$

quantas forem as raizes simples da equação

$$fx = 0,$$

e a sua função generatriz

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a + re^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta$$

ou

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \cdot F'(a + re^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta \quad (\alpha')$$

$$- \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{-\theta i})}{f(a + re^{-\theta i})} \right] \cdot F'(a + re^{-\theta i}) \cdot e^{-\theta i} d\theta$$

exprime a geração d'estas raizes por integraes definidos.

Se n'esta funcção generatriz introduzirmos a hypothese de ser

teremos

$$fx = x - a$$

$$f(a + re^{bi}) = re^{bi}$$

e, por consequencia, a funcção generatriz do theorema de Lagrange será

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \frac{\alpha}{r} \cdot e^{-bi} \varphi(a + re^{bi}) \right] \right) \cdot F'(a + re^{bi}) e^{bi} d\theta$$

ou

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left( l \left[ 1 \pm \frac{\alpha}{r} \cdot e^{-bi} \varphi(a + re^{bi}) \right] \right) \cdot F'(a + re^{bi}) e^{bi} d\theta \quad (\beta')$$

$$- \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left( l \left[ 1 \pm \frac{\alpha}{r} \cdot e^{+bi} \varphi(a + re^{-bi}) \right] \right) \cdot F'(a + re^{-bi}) \cdot e^{-bi} d\theta$$

Estas fórmulas, casos particulares das precedentes, exprimem pois a geração por integraes definidos de uma funcção da raiz de modulo inferior a r da equação de Lagrange

$$x = a \mp \alpha \varphi x.$$

As funcções generatrizes ( $\alpha'$ ) e ( $\beta'$ ) dos theoremas ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) gosam de uma propriedade característica que se traduz no theorema seguinte.

THEOREMA IV. A funcção generatriz ( $\alpha'$ ) da serie

$$Fx - Fa = \mp \alpha \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right) \right] + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^2 \right]}{da} \mp \dots$$

é o coeficiente de  $\frac{1}{z}$  no desenvolvimento da função

$$-F'(a+z) \cdot l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right].$$

Com efeito, esta função desenvolve-se n'uma serie convergente segundo as potencias positivas e negativas de  $z$  se for

$$\text{mod. max.} \left[ \alpha \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right]$$

para um valor  $r$  do modulo; seja pois

$$\begin{aligned} -F'(a+z) \cdot l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots \\ &+ C_1 \cdot \frac{1}{z} + C_2 \cdot \frac{1}{z^2} + C_3 \cdot \frac{1}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

Ora, como é sabido, o coeficiente de  $z^m$  no desenvolvimento de uma função  $fz$  em serie convergente, segundo as potencias ascendentes positivas e negativas de  $z$ , é igual ao valor medio de  $\frac{fz}{z^m}$ ; logo

$$\text{coeff. de } \frac{1}{z} = \text{val. med.} \left\{ -zF'(a+z) \cdot l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] \right\},$$

mas pelo theorema de Cauchy

$$\begin{aligned} &\text{val. med.} \left\{ -zF'(a+z) \cdot l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] \right\} \\ &= -\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \frac{\varphi(a+re^{i\theta})}{f(a+re^{i\theta})} \right] \right) \cdot F'(a+re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta, \end{aligned}$$



logo

$$\text{coeff. de } \frac{1}{z} = \text{função geratriz}$$

ou

$$C_1 = -\frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \frac{\varphi(a + re^{i\theta})}{f(a + re^{i\theta})} \right] \cdot F'(a + re^{i\theta}) \cdot e^{i\theta} d\theta, \right.$$

como se queria demonstrar.

**THEOREMA V.** Se  $fz$  for uma função bem determinada e contínua de uma variavel imaginaria  $z = \rho e^{i\theta}$  para um valor  $r$  do modulo será

$$Fz = F(0) - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \right] \right) \cdot F'(re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

a geração de uma função contínua de uma raiz de modulo inferior a  $r$  da equação

$$fz = 0.$$

Seja  $z_1$  uma raiz simples d'esta equação de modulo inferior a um determinado valor  $r_1$  do modulo de  $z$ ; será

$$fz = (z - z_1) \cdot \psi z,$$

d'onde

$$l \left[ \frac{fz}{z} \right] = l \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right) + l \psi z$$

e

$$zF'z \cdot l \left[ \frac{fz}{z} \right] = zF'z l \left( 1 - \frac{z_1}{z} \right) + zF'z \cdot l \psi z.$$

Procedendo pois como no *theoremata* II será

$$zF'z \cdot l \psi z = \sum M_n z^n,$$

$$zF'z l \left(1 - \frac{z_1}{z}\right) = -[Fz_1 - F(0)] - \sum N_n z^n - \sum P_n z^{-n},$$

por consequencia

$$zF'z \cdot l \left[\frac{fz}{z}\right] = -[Fz_1 - F(0)] + \sum Q_n z^n - \sum P_n z^{-n},$$

onde

$$Q_n = M_n - N_n.$$

Fazendo pois

$$z = r_1 e^{\theta i},$$

substituindo e integrando, vem

$$Fz_1 = F(0) - \frac{r_1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ \frac{f(r_1 e^{\theta i})}{r_1 e^{\theta i}} \right] \right) \cdot F'(r_1 e^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta.$$

Logo é

$$Fz = F(0) - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ \frac{f(re^{\theta i})}{re^{\theta i}} \right] \right) \cdot F'(re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta$$

ou

$$Fz = F(0) - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left( l \left[ \frac{f(re^{+\theta i})}{re^{+\theta i}} \right] \right) \cdot F'(re^{+\theta i}) \cdot e^{+\theta i} d\theta$$

$$- \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left( l \left[ \frac{f(re^{-\theta i})}{re^{-\theta i}} \right] \right) \cdot F'(re^{-\theta i}) \cdot e^{-\theta i} d\theta$$

a geração por integraes definidos de uma funcção Fz de uma raiz simples de modulo inferior a r da equação

$$x_1 x_2 + \dots + x_{p-1} x_p + x = 0$$

$$fz = 0.$$

As fórmulas (α') e (β') são casos particulares das precedentes, como facilmente se vê, e entre a multiplicidade de fórmulas que póde tomar a funcção f as mais notaveis são as que correspondem á equação de Lagrange

$$x = a + \alpha \varphi x$$

e á equação

$$fx \pm \alpha \varphi x = 0.$$

As fórmulas

$$fx + \alpha \varphi x = 0$$

$$Fx = Fa + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} \left[ F'a \cdot \left( \frac{\varphi a}{f'a} \right)^p \right]}{da^{p-1}} \right\} \quad (\alpha)$$

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{i\theta})}{f(a + re^{i\theta})} \right] \cdot F'(a + re^{i\theta}) \cdot e^{i\theta} d\theta$$

conduzem immediatamente á deducção de muitas outras, determinando convenientemente a fórma das funcções φx e fx.

Seja

$$\alpha = 1$$

e

$$\varphi x = x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \dots + x_n f_n x,$$

onde

$$x_1 = \varphi_1(\xi), \quad x_2 = \varphi_2(\xi), \quad \dots \quad x_n = \varphi_n(\xi)$$

são funções de uma variável  $\xi$  independente de  $x$ : resulta a equação

$$0 = fx + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \dots + x_n f_n x,$$

e a geração de uma função  $Fx$  da variável  $x$  definida por esta equação será pois

$$Fx = Fa + \sum \left\{ \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} \left[ F'a \cdot \left( \frac{x_1 f_1 a + \dots + x_n f_n a}{f'a} \right)^p \right]}{da^{p-1}} \right\}$$

ou

$$Fx = Fa + \sum \left\{ \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} [F'a \cdot (x_1 \psi_1 a + \dots + x_n \psi_n a)^p]}{da^{p-1}} \right\}$$

onde

$$\psi_1 a = \frac{f_1 a}{f'a}, \quad \psi_2 a = \frac{f_2 a}{f'a}, \quad \dots, \quad \psi_n a = \frac{f_n a}{f'a}.$$

Ora o termo geral do desenvolvimento do polynomio

$$P = (x_1 \psi_1 a + x_2 \psi_2 a + \dots + x_n \psi_n a)^p$$

pela lei do binomio de Newton é, como se sabe,

$$T = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \dots \Gamma(p_n+1)} \cdot (x_1 \psi_1 a)^{p_1} \cdot (x_2 \psi_2 a)^{p_2} \dots (x_n \psi_n a)^{p_n}$$

ou

$$T = \Gamma(p+1) \cdot \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \dots \Gamma(p_n+1)} \cdot (\psi_1 a)^{p_1} \cdot (\psi_2 a)^{p_2} \dots (\psi_n a)^{p_n}$$

sendo  $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$  numeros inteiros e positivos que devem satisfazer á equação

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n;$$

por consequencia

$$P = \Gamma(p + 1) \cdot \sum \left[ \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1 + 1) \cdot \Gamma(p_2 + 1) \dots \Gamma(p_n + 1)} \right. \\ \left. \times (\psi_1 a)^{p_1} \cdot (\psi_2 a)^{p_2} \dots (\psi_n a)^{p_n} \right]$$

ou

$$P = \Gamma(p + 1) \cdot T_p$$

sendo

$$T_p = \sum \left[ \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3} \dots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1 + 1) \cdot \Gamma(p_2 + 1) \dots \Gamma(p_n + 1)} \right. \\ \left. \times (\psi_1 a)^{p_1} \cdot (\psi_2 a)^{p_2} \cdot (\psi_3 a)^{p_3} \dots (\psi_n a)^{p_n} \right]; \dots \dots (n)$$

logo

$$F_x = F_a + \sum \left\{ \frac{(-1)^p}{\Gamma(p + 1)} \cdot \frac{d^{p-1} [F'a \times \Gamma(p + 1) \cdot T_p]}{da^{p-1}} \right\}$$

ou

$$F_x = F_a + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{d^{p-1} [F'a \cdot T_p]}{da^{p-1}} \right\}.$$

Como os valores de  $p$  são os numeros da serie natural a partir da unidade, resulta

$$F_x = F_a - [F'a \cdot T_1] + \frac{d[F'a \cdot T_2]}{da} - \frac{d^2[F'a \cdot T_3]}{da^2} + \dots (m)$$

e os valores de  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  correspondentes aos valores de

$$p = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

são dados pelas equações

$$1 = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

$$2 = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

$$3 = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

$$\dots \dots \dots$$

Conhecidas as soluções inteiras e positivas de cada uma d'estas equações, determinaremos os valores correspondentes de  $T_1, T_2, T_3, \dots$  pela fórmula (n).

Teremos assim

$$T_1 = x_1\psi_1a + x_2\psi_2a + x_3\psi_3a + x_4\psi_4a + \dots$$

$$T_2 = \frac{x_1^2}{1.2} (\psi_1a)^2 + x_1x_2 (\psi_1a) \cdot (\psi_2a) + x_1x_3 (\psi_1a) \cdot (\psi_3a) + \dots$$

$$+ \frac{x_2^2}{1.2} (\psi_2a)^2 + x_2x_3 (\psi_2a) \cdot (\psi_3a) + x_2x_4 (\psi_2a) \cdot (\psi_4a) + \dots$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$T_3 = \frac{x_1^3}{1.2.3} (\psi_1a)^3 + \frac{x_1^2 \cdot x_2}{1.2} (\psi_1a)^2 \cdot (\psi_2a) + \frac{x_1x_2^2}{1.2} (\psi_1a) \cdot (\psi_2a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{x_2^3}{1.2.3} (\psi_2a)^3 + \frac{x_2^2 \cdot x_3}{1.2} (\psi_2a)^2 \cdot (\psi_3a) + \frac{x_2x_3^2}{1.2} (\psi_2a) \cdot (\psi_3a)^2 + \dots$$

$$+ \dots \dots \dots ;$$

por consequencia, substituindo estas expressões na serie (m) e attendendo a que

$$\psi_n(a) = \frac{f_n(a)}{f'(a)},$$

resulta o desenvolvimento definitivo da função Fx, a saber:

$$Fx = Fa - x_1 \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_1 a}{f' a} \right) \right] + \frac{x_1^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_1 a}{f' a} \right)^2 \right]}{da}$$

$$- \frac{x_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_1 a}{f' a} \right)^3 \right]}{da^2} + \dots$$

$$- x_2 \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_2 a}{f' a} \right) \right] + \frac{x_1 x_2}{1 \cdot 1} \cdot \frac{d \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_1 a}{f' a} \right) \cdot \left( \frac{f_2 a}{f' a} \right) \right]}{da}$$

$$- \frac{x_1^2 \cdot x_2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_1 a}{f' a} \right)^2 \cdot \left( \frac{f_2 a}{f' a} \right) \right]}{da^2} + \dots$$

$$- x_3 \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_3 a}{f' a} \right) \right] + \frac{x_2^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_2 a}{f' a} \right)^2 \right]}{da}$$

$$- \frac{x_2 \cdot x_2^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_1 a}{f' a} \right) \cdot \left( \frac{f_2 a}{f' a} \right)^2 \right]}{da^2} + \dots$$

\*

$$\begin{aligned}
 & -, \text{ etc. } + \frac{x_2 x_3}{1.1} \cdot \frac{d \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_2 a}{f'a} \right) \cdot \left( \frac{f_3 a}{f'a} \right) \right]}{da} \\
 & - \frac{x_2^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2 \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_2 a}{f'a} \right)^3 \right]}{da^2} + \dots \\
 & + \text{ etc. } - \frac{d^2 \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_2 a}{f'a} \right)^2 \cdot \left( \frac{f_3 a}{f'a} \right) \right]}{da^2} + \dots
 \end{aligned}$$

A lei de geração d'esta serie será pois

$$\begin{aligned}
 T_p &= (-1)^p \cdot \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3} \dots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1 + 1) \cdot \Gamma(p_2 + 1) \cdot \Gamma(p_3 + 1) \dots \Gamma(p_n + 1)} \\
 & \times \frac{d^{p-1} \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_1 a}{f'a} \right)^{p_1} \cdot \left( \frac{f_2 a}{f'a} \right)^{p_2} \cdot \left( \frac{f_3 a}{f'a} \right)^{p_3} \dots \left( \frac{f_n a}{f'a} \right)^{p_n} \right]}{da^{p-1}},
 \end{aligned}$$

onde

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n;$$

por consequencia o desenvolvimento em serie de uma função  $Fx$  da variavel  $x$  definida pela equação

$$0 = fx + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \dots + x_n f_n x$$

será pois

$$\left. \begin{aligned}
 Fx &= Fa + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3} \dots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1 + 1) \cdot \Gamma(p_2 + 1) \dots \Gamma(p_n + 1)} \right\} \quad (p) \\
 & \times \frac{d^{p-1} \left[ F'a \cdot \left( \frac{f_1 a}{f'a} \right)^{p_1} \cdot \left( \frac{f_2 a}{f'a} \right)^{p_2} \cdot \left( \frac{f_3 a}{f'a} \right)^{p_3} \dots \left( \frac{f_n a}{f'a} \right)^{p_n} \right]}{da^{p-1}} \left. \right\}
 \end{aligned}$$



onde

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n.$$

Se na fórmula

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \cdot F'(a + re^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta$$

que exprime por um integral definido a geração de uma função de uma raiz de modulo inferior a  $r$  da equação

$$fx + x\varphi x = 0$$

introduzirmos a determinação da função  $\varphi$

$$\varphi x = x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \dots + x_n f_n x$$

correspondente á equação  $(p)$ , resulta a fórmula

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + x_1 \frac{f_1(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} + \dots + x_n \frac{f_n(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \cdot F'(a + re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta, \dots \dots \dots (p')$$

função geratriz da serie precedente.

Seja

$$fx = a - x;$$

as fórmulas  $(p)$  e  $(p')$  dão immediatamente

$$x = a + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \dots + x_n f_n x \dots \dots \dots (q)$$

onde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são funcções de uma variavel  $\xi$  independente de  $x$ , e

$$F_x = Fa + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \dots \Gamma(p_n+1)} \right. \\ \left. \times \frac{d^{p-1} [F'a \cdot (f_1 a)^{p_1} \cdot (f_2 a)^{p_2} \dots (f_n a)^{p_n} \cdot (-1)^{-p}]}{da^{p-1}} \right\}$$

por ser  $f'a = -1$ ; portanto

$$F_x = Fa + \sum \left\{ \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3} \dots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \dots \Gamma(p_n+1)} \right. \\ \left. \times \frac{d^{p-1} [F'a \cdot (f_1 a)^{p_1} \cdot (f_2 a)^{p_2} \dots (f_n a)^{p_n}]}{da^{p-1}} \right\} \dots \dots (q')$$

fórmula que dá o desenvolvimento em serie de uma funcção de uma raiz da equação (q), e a sua funcção generatriz será pois

$$F_x = Fa - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 - e^{-\theta i} \left( \frac{x_1}{r} f_1(a + re^{\theta i}) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x_n}{r} f_n(a + re^{\theta i}) \right) \right] \cdot F'(a + re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta \dots \dots (q'')$$

As funcções  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são funcções indeterminadas de  $\xi$ ; supponhamos agora o caso particular em que

$$x_n = \xi^n;$$

as fórmulas precedentes dão

$$(p) \dots \dots x = a + \xi f_1 x + \frac{1}{2} \xi^2 f_2 x + \dots + \xi^n f_n x \dots \dots (r)$$

e

$$F_x = Fa + \sum \left\{ \frac{\xi^{p_1 + 2p_2 + \dots + np_n}}{\Gamma(p_1 + 1) \cdot \Gamma(p_2 + 1) \dots \Gamma(p_n + 1)} \right. \\ \left. \times \frac{d^{p-1} [F'a \cdot (f_1 a)^{p_1} \cdot (f_2 a)^{p_2} \dots (f_n a)^{p_n}]}{da^{p-1}} \right\}$$

ou

$$F_x = Fa + \sum \left\{ \frac{\xi^q}{\Gamma(p_1 + 1) \cdot \Gamma(p_2 + 1) \dots \Gamma(p_n + 1)} \right. \\ \left. \times \frac{d^{p-1} [F'a \cdot (f_1 a)^{p_1} \cdot (f_2 a)^{p_2} \dots (f_n a)^{p_n}]}{da^{p-1}} \right\} \dots \dots (r'')$$

onde

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

e

$$q = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + np_n$$

que é a fórmula do sr. Dr. Gomes Teixeira.

A função geratriz d'esta serie será pois

$$F_x = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left[ 1 - e^{-\theta i} \left( \frac{\xi}{r} f_1(a + re^{\theta i}) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\xi}{r} f_n(a + re^{\theta i}) \right) \right] \cdot F'(a + re^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta. \dots \dots (r''')$$

As fórmulas (α) e (p) podem conduzir a outros resultados interessantes, determinando convenientemente a forma das funções φ e f.

## III

A geração por integraes definidos das raizes das equações algebricas ou transcendentés é uma consequencia immediata das fórmulas ( $\alpha$ ).

Com effeito, quando a funcção  $Fx$  designar a propria variavel  $x$ , as fórmulas ( $\alpha$ ) dão immediatamente

$$x = a - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta$$

ou

$$x = a - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} l \left[ 1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta$$

$$- \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} l \left[ 1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta$$

... ( $\beta$ )

e

$$x = a + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} \left[ \left( \frac{\varphi a}{f' a} \right)^n \right]}{da^{p-1}} \right\}$$

que exprimem por integraes definidos e por um desenvolvimento em serie a geração de uma raiz de modulo inferior a  $r$  da equação algebrica ou transcendente

$$fx + \alpha \varphi x = 0$$

em funcção de uma raiz simples  $a$  da equação

$$fx = 0.$$

A applicação d'estas fórmulas á resolução das equações conduz aos seguintes theoremas.

THEOREMA I. Se  $fx=0$  tem  $m$  raizes simples, as  $m$  raizes correspondentes da equação

$$fx + \alpha\varphi x = 0$$

exprimem-se por integraes definidos, quando  $\varphi$  e  $f$  fazem funcões bem determinadas e continuas para as quaes

$$\text{mod. max.} \left[ \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)} \right] < 1, \dots \text{mod. max.} \left[ \alpha \cdot \frac{\varphi(a_m+z)}{f(a_m+z)} \right] < 1$$

para certos valores

$$r_1, r_2, r_3, \dots r_m$$

do modulo da variavel imaginaria  $z$ .

Com effeito, sejam

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_m$$

$m$  raizes simples da equação

$$fz = 0,$$

e

$$r_1, r_2, r_3, \dots r_m$$

os valores correspondentes do modulo de  $z$  que verificam as condições do theorema; pondo

$$x = a_n + z,$$

cada uma das equações

$$\left. \begin{aligned} f(a_1+z) + \alpha\varphi(a_1+z) &= 0, \\ f(a_2+z) + \alpha\varphi(a_2+z) &= 0, \\ f(a_3+z) + \alpha\varphi(a_3+z) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ f(a_m+z) + \alpha\varphi(a_m+z) &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (m)$$

têm, como demonstrámos, uma raiz unica de modulo inferior ao modulo correspondente de  $z$ .

Ora, a fórmula

$$x = a - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \alpha \frac{\varphi(a + re^{i\theta})}{f(a + re^{i\theta})} \right] \cdot e^{i\theta} d\theta$$

exprime uma raiz da equação

$$fx + \alpha\varphi x = 0$$

em função de uma raiz simples  $a$  da equação

$$fx = 0;$$

por consequencia, mudando  $x$  em  $a + z$ , a fórmula

$$z = -\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \alpha \frac{\varphi(a + re^{i\theta})}{f(a + re^{i\theta})} \right] \cdot e^{i\theta} d\theta \dots \dots \dots (\beta')$$

é a expressão de uma raiz da equação

$$f(a + z) + \alpha\varphi(a + z) = 0,$$

como devia ser, em virtude do *theorema II*.

Applicando pois esta fórmula ( $\beta'$ ) a cada uma das equações ( $m$ ), resultam as  $m$  raizes

$$z_1 = -\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \alpha \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{i\theta})}{f(a_1 + r_1 e^{i\theta})} \right] \cdot e^{i\theta} d\theta, \dots,$$

$$z_m = -\frac{r_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \alpha \frac{\varphi(a_m + r_m e^{i\theta})}{f(a_m + r_m e^{i\theta})} \right] \cdot e^{i\theta} d\theta;$$

mas

$$0 = (x = a_n + z, (z = a_n + z))$$

logo

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 - \frac{r_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta, \\ x_2 &= a_2 - \frac{r_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a_2 + r_2 e^{\theta i})}{f(a_2 + r_2 e^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta, \\ &\dots \dots \dots \\ x_m &= a_m - \frac{r_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a_m + r_m e^{\theta i})}{f(a_m + r_m e^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta \end{aligned} \right\} \dots (m')$$

exprimem a geração por integraes definidos de  $m$  raizes da equação algebraica ou transcendente

$$fx + \alpha \varphi x = 0$$

em função de  $m$  raizes simples da equação

$$fx = 0,$$

e as fórmulas

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} \left[ \left( \frac{\varphi a_1}{f' a_1} \right)^p \right]}{da_1^{p-1}} \right\} \\ x_2 &= a_2 + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} \left[ \left( \frac{\varphi a_2}{f' a_2} \right)^p \right]}{da_2^{p-1}} \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ x_m &= a_m + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} \left[ \left( \frac{\varphi a_m}{f' a_m} \right)^p \right]}{da_m^{p-1}} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (m'')$$

dão o seu desenvolvimento em serie.

THEOREMA II. As raízes da equação algebraica

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0 = 0$$

exprimem-se por integraes definidos em funcção das raízes da equação binomia

$$x^n + A_0 = 0.$$

A equação

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0 = 0$$

reduz-se á fórma

$$fx + \varphi x = 0,$$

pondo

$$fx = x^n + A_0$$

e

$$\varphi x = A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \dots + A_2x + A_1x.$$

Sejam

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$$

as raízes da equação binomia

$$x^n + A_0 = 0;$$

é sempre possível determinar  $n$  quantidades

$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$$

para valores do modulo de  $z$  que tornem respectivamente

$$\text{mod.} \left[ \frac{\varphi(a_0+z)}{f(a_0+z)} \right] < 1, \text{mod.} \left[ \frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)} \right] < 1, \dots, \text{mod.} \left[ \frac{\varphi(a_{n-1}+z)}{f(a_{n-1}+z)} \right] < 1$$



ou

$$\frac{R_0}{R'_0} < 1, \quad \frac{R_1}{R'_1} < 1, \quad \dots, \quad \frac{R_{n-1}}{R'_{n-1}} < 1.$$

Com effeito, seja  $a$  uma raiz qualquer da equação

$$fx = 0;$$

será

$$\varphi(a+z) = P_0 + P_1z + P_2z^2 + \dots + P_{n-1}z^{n-1}$$

e

$$f(a+z) = Q_1z + Q_2z^2 + \dots + Q_{n-1}z^{n-1}.$$

Ora

$$z = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

$$P_n = p_n (\cos \alpha_n + i \operatorname{sen} \alpha_n),$$

$$Q^n = q_n (\cos \beta_n + i \operatorname{sen} \beta_n),$$

por consequencia, designando por  $S_m$  e  $S'_m$  as sommas dos modulos

$$S_m = p_0 + p_1\rho + p_2\rho^2 + \dots + p_{n-1}\rho^{n-1}$$

$$S'_m = q_1\rho + q_2\rho^2 + \dots + q_{n-1}\rho^{n-1},$$

resulta

$$\operatorname{mod.} \varphi(a+z) < S_m$$

$$\operatorname{mod.} f(a+z) < S'_m,$$

ou

$$R < S_m \quad \text{e} \quad R' < S'_m,$$

portanto será

$$R = S_m - s \quad \text{e} \quad R' = S'_m - s'$$

Como o modulo da variavel é uma quantidade indeterminada podemos dispôr d'elle convenientemente para que seja

$$S_m - s < S'_m - s',$$

e então será necessariamente

$$R < R'.$$

Ora  $s - s'$  pôde ser uma quantidade positiva ou negativa; seja pois

$$s - s' = \pm s'';$$

a desigualdade

$$S_m - S'_m < s - s'$$

desdobra-se portanto em duas

$$S_m - S'_m < +s'',$$

$$S_m - S'_m < -s'',$$

ou

$$S_m - S'_m < s'',$$

$$S'_m - S_m > s'',$$

e como  $s''$  é uma quantidade essencialmente positiva segue-se que estas desigualdades serão satisfeitas quando houver um valor de  $\varphi$  que satisfaça às inequações

$$S_m - S'_m < 0$$

$$S'_m - S_m > 0,$$

as quaes se reduzem a uma só

$$S_m - S'_m < 0.$$

Substituindo pois n'esta expressão os valores de  $S_m$  e  $S'_m$  conclue-se que todo o valor de  $\rho$ ,  $\rho = r$  que fôr raiz da inequação

$$(p_{n-1} - q_{n-1})\rho^{n-1} + (p_{n-2} - q_{n-2})\rho^{n-2} + \dots + (p_1 - q_1)\rho + p_0 < 0$$

ou

$$\rho^{n-1} + p'_{n-1} \cdot \rho^{n-2} + \dots + p'_1 \cdot \rho + p'_0 < 0 \dots (m)$$

sendo

$$p'_{n-1} = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}}{p_{n-1} - q_{n-2}}, \dots, p'_1 = \frac{p_1 - q_1}{p_{n-1} - q_{n-1}}, p'_0 = \frac{p_0}{p_{n-1} - q_{n-1}},$$

torna

$$R < R'$$

ou

$$\text{mod.} \left[ \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] < 1.$$

Esta desigualdade (m) é pois a inequação dos modulos, e vê-se que se a equação proposta é do grão  $n$ , a inequação modular é do grão  $n-1$ .

Logo é sempre possível determinar  $n$  quantidades

$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$$

correspondentes ás raizes

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$$

da equação binomia

$$x^n + A_0 = 0$$

para valores do modulo de  $z$  que tornam

$$\text{mod.} \left[ \frac{\varphi(a_0 + z)}{f(a_0 + z)} \right] < 1, \dots, \text{mod.} \left[ \frac{\varphi(a_{n-1} + z)}{f(a_{n-1} + z)} \right] < 1.$$

Por consequencia, verificando-se todas estas condições, cada uma das equações

$$\left. \begin{aligned} f(a_0 + z) + \varphi(a_0 + z) &= 0 \\ f(a_1 + z) + \varphi(a_1 + z) &= 0 \\ f(a_2 + z) + \varphi(a_2 + z) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ f(a_{n-1} + z) + \varphi(a_{n-1} + z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (n)$$

tem, em virtude do *theorem* I, uma raiz unica de modulo inferior ao modulo respectivo de  $z$ .

Estas equações dão pois  $n$  raizes pela applicação immediata da fórmula ( $\beta'$ ), a saber:

$$z_0 = -\frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \frac{\varphi(a_0 + r_0 e^{\theta i})}{f(a_0 + r_0 e^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta, \dots,$$

$$z_{n-1} = -\frac{r_{n-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \frac{\varphi(a_{n-1} + r_{n-1} e^{\theta i})}{f(a_{n-1} + r_{n-1} e^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta;$$

mas

$$x = a_n + z,$$

logo as fórmulas

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a_0 - \frac{r_0}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \frac{\varphi(a_0 + r_0 e^{\theta i})}{f(a_0 + r_0 e^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta, \\ x_1 &= a_1 - \frac{r_1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta, \\ x_2 &= a_2 - \frac{r_2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \frac{\varphi(a_2 + r_2 e^{\theta i})}{f(a_2 + r_2 e^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-1} &= a_{n-1} - \frac{r_{n-1}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l \left[ 1 + \frac{\varphi(a_{n-1} + r_{n-1} e^{\theta i})}{f(a_{n-1} + r_{n-1} e^{\theta i})} \right] \cdot e^{\theta i} d\theta, \end{aligned} \right\} (n')$$

exprimem a geração por integraes definidos das raizes da equação algebraica

$$x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0$$

em funcção das raizes da equação binomia

$$x^n + A_0 = 0,$$

e cujos modulos são respectivamente inferiores ás quantidades

$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$$

determinadas pela inequação modular para cada uma das raizes da sobredicta equação binomia.

As fórmulas precedentes exprimem por integraes definidos todas as raizes de uma equação algebraica de qualquer gráo; por consequencia exprimem a ligação entre o problema proprio da

Algebra, a resolução das equações, e um problema de Calculo Integral, consistindo na investigação das propriedades d'uma classe de integraes definidos, comprehendidos na fórmula geral

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left( l \left[ 1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \right) \cdot F'(a + re^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta$$

A ligação entre estes dois problemas mostra claramente que todos os progressos ulteriores d'um concorrem para o desenvolvimento progressivo do outro.

Applicando a cada uma das equações (n) a fórmula (3) resulta o desenvolvimento em serie das raizes da proposta

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 + \sum \left\{ \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} \left[ \left( \frac{\varphi a_1}{f' a_1} \right)^p \right]}{da_1^{p-1}} \right\} \\ x_2 &= a_2 + \sum \left\{ \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} \left[ \left( \frac{\varphi a_2}{f' a_2} \right)^p \right]}{da_2^{p-1}} \right\} \dots (n'') \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= a_n + \sum \left\{ \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1} \left[ \left( \frac{\varphi a_n}{f' a_n} \right)^p \right]}{da_n^{p-1}} \right\} \end{aligned} \right\}$$

Estas fórmulas constituem um methodo geral para a resolução numerica das equações de todos os grãos.

**THEOREMA III.** A forma geral das raizes de uma equação algebrica

$$x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0$$

é

$$x = \frac{1}{n} \left[ \zeta_0 + \rho \omega \sqrt[n]{\zeta_1} + \rho \omega^2 \sqrt[n]{\zeta_2} + \dots + \rho \omega^{n-1} \sqrt[n]{\zeta_{n-1}} \right],$$

onde

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_{n-1}$$

são as raizes d'uma equação do grão  $n - 1$

$$\zeta^{n-1} + R_{n-2} \zeta^{n-2} + \dots + R_1 \zeta + R_0 = 0,$$

cujos coefficients são funcções racionaes dos integraes definidos que exprimem as raizes da proposta.

A equação

$$x_n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0$$

reduz-se á fórma da equação (p)

$$0 = f x + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \dots + x_m f_m x,$$

pondo

$$f x = x^n + A_0$$

$$x_n = A_n \quad \text{e} \quad f_n x = x^n,$$

o que dá

$$f x + A_1 f_1 x + A_2 f_2 x + \dots + A_{n-1} f_{n-1} x = 0.$$

O desenvolvimento em serie das raizes d'esta equação em funcção das raizes da equação

$$f x = x^n + A_0 = 0$$

\*

será pois dado pela fórmula ( $p'$ ), a saber:

$$x = a + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \dots A_{n-1}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \dots \Gamma(p_{n-1}+1)} \right. \\ \left. \times \frac{d^{p-1} [(a)^{p_1} \cdot (a^2)^{p_2} \dots (a^{n-1})^{p_{n-1}} \times (na^{n-1})^{-p}]}{da^{p-1}} \right\}$$

ou

$$x = a + \sum \left\{ P_p \cdot \frac{d^{p-1}(a^q)}{da^{p-1}} \right\} \dots \dots \dots (v)$$

onde

$$P_p = \left( -\frac{1}{n} \right)^p \cdot \frac{A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \cdot A_3^{p_3} \dots A_{n-1}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \cdot \Gamma(p_3+1) \dots \Gamma(p_{n-1}+1)}$$

e

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

$$q = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + (n-1)p_{n-1} - (n-1)p$$

ou

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

$$q = m - (n-1)p$$

$$m = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + (n-1)p_{n-1}.$$

Ora a quantidade  $a$  designa uma raiz qualquer da equação

$$x^n \pm A_0 = 0,$$

onde supponho explicito o signal do ultimo termo da equação proposta; por consequencia será

$$a = \sqrt[n]{\mp A_0} = \sqrt[n]{A_0} \cdot \sqrt[n]{\mp 1}$$



ou

$$a = \alpha \rho \omega,$$

sendo  $\alpha$  o valor arithmetico do radical  $\sqrt[p]{A_0}$  e  $\rho \omega$  uma raiz da equação

$$\rho^n \pm 1 = 0.$$

As raizes da equação binomia

$$x^n \pm A_0 = 0$$

que devemos substituir a  $a$  na fórmula (v) para obter o desenvolvimento em serie de todas as raizes da proposta são pois

$$a_0 = \alpha \rho^0, \quad a_1 = \alpha \rho^1, \quad a_2 = \alpha \rho^2, \quad \dots, \quad a_{n-1} = \alpha \rho^{n-1}.$$

Ora

$$\frac{d^{p-1}(a^q)}{da^{p-1}} = \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \cdot \rho \omega^{q-p+1}$$

mas

$$q = m - (n - 1)p,$$

por consequencia

$$\frac{d^{p-1}(a^q)}{da^{p-1}} = \mp \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \cdot \rho \omega^{m+1},$$

pois que

$$\rho \omega^{np} = \mp 1;$$

logo a fórmula (v) transforma-se em

$$x = \alpha \rho \omega + \sum \left\{ \mp P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \cdot \rho \omega^{m+1} \right\}, \dots \dots (v')$$

onde  $\rho \omega$  designa uma raiz da unidade positiva ou negativa, segundo o ultimo termo da proposta é negativo ou positivo,

As raízes da unidade reproduzem-se periodicamente, e em virtude d'esta propriedade característica o desenvolvimento da fórmula (v') toma uma fôrma muito notavel.

Assim para todos os valores de  $m$  que satisfazem á equação

$$m + 1 = kn + r,$$

onde  $k$  é um inteiro positivo qualquer e  $r$  o resto da divisão de  $m + 1$  pelo grão da equação, temos

$$\rho\omega^{m+1} = \rho\omega^{nk} \cdot \rho\omega^r,$$

mas

$$\rho\omega^n = \mp 1,$$

portanto

$$\rho\omega^{m+1} = \mp \rho\omega^r;$$

logo

$$x = \alpha\rho\omega + \sum \left\{ P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \cdot \omega^r \right\} \dots \dots \dots (v')$$

onde

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

$$q = m - (n - 1)p$$

e

$$m + 1 \equiv r \pmod{n}.$$

Pondo

$$T_p = \rho\omega^r \cdot F(p)_r$$

$$F(p)_r = P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}}$$

e substituindo em (v'), resulta

$$x = \alpha\rho\omega + \sum T_p \dots \dots \dots (v'')$$

Ora para um dado valor de  $p$  resultam para  $m$  um certo numero de valores que devem satisfazer á equação de congruencia

$$m + 1 \equiv r \pmod{n};$$

mas os valores do residuo  $r$  são

$$r = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 1),$$

por consequencia os valores de  $m$ , correspondentes a um dado valor de  $p$ , devem ser raizes das congruencias

$$m + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$m + 1 \equiv 1 \pmod{n}$$

$$m + 1 \equiv 2 \pmod{n}$$

.....

$$m + 1 \equiv n - 1 \pmod{n};$$

logo a expressão do termo geral  $T_p$  será

$$T_p = \sum \rho \omega^r F(p)_p$$

ou

$$T_p = F(p)_0 + \rho \omega F(p)_1 + \rho \omega^2 F(p)_2 + \dots + \rho \omega^{n-1} F(p)_{n-1};$$

por consequencia, substituindo em  $(v''')$ , resulta

$$x = \alpha \rho \omega + \sum F(p)_0 + \rho \omega \sum F(p)_1 + \rho \omega^2 \sum F(p)_2 + \dots$$

$$+ \rho \omega^{n-1} \sum F(p)_{n-1}.$$

A expressão geral do desenvolvimento em serie das raizes de uma equação algebraica de qualquer gráo é pois

$$x = X_0 + \rho\omega X_1 + \rho\omega^2 X_2 + \dots + \rho\omega^{n-1} X_{n-1} \dots \dots (w)$$

onde

$$X_0 = \sum \left\{ P_p \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\}$$

$$X_1 = \alpha + \sum \left\{ P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\}$$

$$X_2 = \sum \left\{ P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\}$$

.....

$$X_{n-1} = \sum \left\{ P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\}$$

sendo

$$P_p = \left( -\frac{1}{n} \right)^p \cdot \frac{A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \cdot A_3^{p_3} \dots A_{n-1}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \cdot \Gamma(p_3+1) \dots \Gamma(p_{n-1}+1)}$$

e

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

$$q = m - (n-1)p$$

$$m = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + (n-1)p_{n-1}$$

Para obter o desenvolvimento das funcções

$$X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}$$

devemos combinar respectivamente a equação

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

com cada uma das equações de congruencia

$$m + 1 \equiv 0 \pmod{= n}$$

$$m + 1 \equiv 1 \pmod{= n}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$m + 1 \equiv n - 1 \pmod{= n} :$$

logo a fórmula geral das raizes de uma equação algebraica

$$x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x \pm A_0 = 0$$

é

$$x = X_0 + \rho\omega X_1 + \rho\omega^2 X_2 + \dots + \rho\omega^{n-1} X_{n-1}$$

onde

$$X_r = \sum \left\{ \left( -\frac{1}{n} \right)^p \cdot \frac{A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \cdot A_3^{p_3} \dots A_{n-1}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1 + 1) \cdot \Gamma(p_2 + 1) \dots \Gamma(p_{n-1} + 1)} \right.$$

$$\left. \times \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\} \quad (w)$$

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}$$

$$q = m - (n - 1)p$$

$$1 + p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + (n - 1)p_{n-1} \equiv r \pmod{= n}$$

por consequencia

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= X_0 + \rho_0 X_1 + \rho_0^2 X_2 + \dots + \rho_0^{n-1} X_{n-1} \\ x_1 &= X_0 + \rho_1 X_1 + \rho_1^2 X_2 + \dots + \rho_1^{n-1} X_{n-1} \\ x_2 &= X_0 + \rho_2 X_1 + \rho_2^2 X_2 + \dots + \rho_2^{n-1} X_{n-1} \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-1} &= X_0 + \rho_{n-1} X_1 + \rho_{n-1}^2 X_2 + \dots + \rho_{n-1}^{n-1} X_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots (w')$$

são as raizes da proposta em função dos coeficientes e das raizes da unidade por meio das funções  $X_r$ .

As funções  $X_r$  definidas pela fórmula (w) em função dos coeficientes gosam de propriedades notaveis. Assim, multiplicando as expressões precedentes (w') por

$$\begin{aligned} &\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \\ &\rho_0^2, \rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_{n-1}^2, \\ &\dots \dots \dots \\ &\rho_0^{n-1}, \rho_1^{n-1}, \rho_2^{n-1}, \dots, \rho_{n-1}^{n-1}, \end{aligned}$$

e sommando vem

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= \frac{1}{n} (x_0 \rho_0 + x_1 \rho_1 + x_2 \rho_2 + \dots + x_{n-1} \rho_{n-1}) \\ X_{n-2} &= \frac{1}{n} (x_0 \rho_0^2 + x_1 \rho_1^2 + x_2 \rho_2^2 + \dots + x_{n-1} \rho_{n-1}^2) \\ &\dots \dots \dots \\ X_1 &= \frac{1}{n} (x_0 \rho_0^{n-1} + x_1 \rho_1^{n-1} + x_2 \rho_2^{n-1} + \dots + x_{n-1} \rho_{n-1}^{n-1}) \\ X_0 &= \frac{1}{n} (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) \end{aligned}$$

por ser

$$\rho_0^m + \rho_1^m + \rho_2^m + \dots + \rho_{n-1}^m = 0,$$

quando

$$m < n$$

e

$$\rho_0^n + \rho_1^n + \rho_2^n + \dots + \rho_{n-1}^n = n.$$

Ora, sendo  $\rho_\omega$  uma raiz qualquer da unidade, temos

$$\rho_\omega = \cos\left(\frac{\omega}{n} \cdot \pi\right) + \text{sen}\left(\frac{\omega}{n} \cdot \pi\right) \cdot \sqrt{-1}$$

ou

$$\rho_\omega = \left( \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sqrt{-1} \right)^\omega;$$

mas

$$\rho_\omega^m = \left( \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sqrt{-1} \right)^{m\omega}$$

$$= \left( \cos\left(\frac{m}{n} \cdot \pi\right) + \text{sen}\left(\frac{m}{n} \cdot \pi\right) \cdot \sqrt{-1} \right)^\omega$$

por consequencia

$$\rho_\omega^m = \rho_{m\omega};$$

logo a expressão geral das funcções  $X_r$

$$X_{n-\omega} = \frac{1}{n} (x_0 \rho_0^\omega + x_1 \rho_1^\omega + x_2 \rho_2^\omega + \dots + x_{n-1} \rho_{n-1}^\omega)$$

transforma-se em

$$X_{n-\omega} = \frac{1}{n} (x_0 + x_1 \rho_\omega + x_2 \rho_\omega^2 + \dots + x_{n-1} \rho_\omega^{n-1});$$

logo, pondo

$$t = nX_{n-\omega}$$

resulta immediatamente e *à priori* a *função resolvente* de Lagrange

$$t = x_0 + x_1 \rho^\omega + x_2 \rho^{2\omega} + \dots + x_{n-1} \rho^{\omega(n-1)}$$

ou

$$t = x_0 + \rho x_1 + \rho^2 x_2 + \dots + \rho^{n-1} x_{n-1}$$

onde  $\rho$  designa uma raiz da unidade.

As funções  $X_r$  acham-se pois ligadas com a *função resolvente*, e possuem portanto as mesmas propriedades.

A *função resolvente* de Lagrange goza de propriedades muito importantes na theoria geral das equações, e principalmente na theoria das *equações abelianas*; e, como estas propriedades estão já bem estudadas e definidas, podemos deduzir muito facilmente as das funções  $X_r$ .

Assim, a *função resolvente* toma  $n$  valores distintos pela substituição das raizes da equação

$$\rho^n - 1 = 0,$$

por consequencia a *função*  $X_{n-\omega}$  toma tambem  $n$  valores distintos por essa substituição, como devia ser.

A *função resolvente* depende pois de uma equação do gráo

$$1.2.3 \dots n,$$

a qual, como é sabido, se abaixo ao gráo

$$1.2.3 \dots (n-1),$$

pondo

$$\xi = t^n;$$

por consequencia resulta

$$nX_{n-\omega} = \sqrt[n]{\xi};$$



mas, substituindo na função

$$\xi = (x_0 + \rho x_1 + \rho^2 x_2 + \dots + \rho^{n-1} x_{n-1})^n$$

$\rho$  pelas raízes da equação

$$\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = 0$$

resultam para  $\xi$  os  $n-1$  valores distintos

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1},$$

logo

$$X_{n-\omega} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_\omega}$$

ou

$$X_1 = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_1}, \quad X_2 = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_2}, \quad X_3 = \sqrt[n]{\xi_3}, \quad \dots,$$

$$X_{n-1} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_{n-1}}.$$

Logo a fórmula geral das raízes de uma equação algebraica de qualquer gráo é

$$x = \frac{1}{n} \left[ \xi_0 + \rho \omega \sqrt[n]{\xi_1} + \rho \omega^2 \sqrt[n]{\xi_2} + \dots + \rho \omega^{n-1} \sqrt[n]{\xi_{n-1}} \right]$$

como immediatamente se deduz, substituindo na fórmula acima demonstrada

$$x = X_0 + \rho \omega X_1 + \rho \omega^2 X_2 + \dots + \rho \omega^{n-1} X_{n-1},$$

as expressões precedentes das funções  $X_r$ , e pondo

$$\xi_0 = -A_{n-1}.$$

Lagrange demonstrou que as quantidades

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}$$

eram raízes de uma equação de gráo  $n-1$ , denominada *equação reduzida*

$$\xi^{n-1} + R_{n-1}\xi^{n-2} + \dots + R_1\xi + R_0 = 0 \dots \dots \dots (r)$$

cujos coeficientes se exprimem em função dos coeficientes da proposta por meio de uma equação do gráo

$$1.2.3 \dots (n-2);$$

logo as funções  $X_r$  são raízes do gráo  $n$  das raízes da equação reduzida

$$X_{n-\omega} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_\omega}$$

ou

$$X_r = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_{n-r}}$$

onde

$$r = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

Logo as raízes da equação reduzida exprimem-se em função dos coeficientes da proposta pelas fórmulas

$$\xi_{n-r} = (nX_r)^n$$

$$X_r = \sum \left\{ \left( -\frac{1}{n} \right)^p \cdot \frac{A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \dots A_{n-1}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \dots \Gamma(p_{n-1}+1)} \right. \\ \left. \times \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\},$$

onde

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}$$

$$q = m - (n-1)p$$

$$1 + p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + (n-1)p_{n-1} \equiv r \pmod{n}.$$

Conhecidas assim as raizes da rednzida podemos determinar a somma das suas potencias semelhantes, e pelas fórmulas de Newton calcular depois os coefficients da reduzida em funcção dos coefficients da proposta.

Os coefficients da equação reduzida podem calcular-se muito mais simplesmente.

Com effeito, as raizes da equação reduzida

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}$$

exprimem-se em funcção das raizes

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$$

pela fórmula

$$\xi = (x_0 + \rho x_1 + \rho^2 x_2 + \dots + \rho^{n-1} x_{n-1})^n,$$

onde  $\rho$  é dado pela equação

$$\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = 0;$$

desenvolvendo pois esta expressão e attendendo á periodicidade das raizes da unidade, a fórmula geral das raizes da equação reduzida em funcção das raizes da equação proposta será

$$\xi = X'_0 + \rho X'_1 + \rho^2 X'_2 + \dots + \rho^{n-1} X'_{n-1}$$

onde  $X'_r$  são funcções racionais e inteiras das raizes

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1};$$

mas estas raizes exprimem-se em funcção dos coefficients da proposta por meio dos integraes definidos ( $n$ ); logo, calculando as sommas das potencias semelhantes das raizes

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_{n-1},$$

determinam-se pelas fórmulas de Newton os coefficients da equação reduzida em funcção dos coefficients da proposta por meio de integraes definidos.

A fórma geral das raizes de uma equação algebraica de qualquer gráo

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0 = 0$$

é pois

$$x = \frac{1}{n} \left[ \xi_0 + \rho \sqrt{\xi_1} + \rho^2 \sqrt{\xi_2} + \dots + \rho^{n-1} \sqrt{\xi_{n-1}} \right],$$

onde

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_{n-1}$$

são as raizes da equação reduzida

$$\xi^{n-1} + R_{n-1}\xi^{n-2} + \dots + R_1\xi + R_0 = 0.$$

Este notavel theorema, demonstrado por Lagrange em 1771, foi a origem da theoria das equações abelianas.

**SOBRE UM PROBLEMA DE ALGEBRA ELEMENTAR**

POR

J. C. O'NEIL DE MEDEIROS

Deduzir o desenvolvimento de  $x^m + x^{-m}$  expresso em

$$z = x^1 + x^{-1}.$$

Esta relação entre  $x$  e  $z$  dá

$$x^1 = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$$

$$x^{-1} = \frac{z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$$

ou inversamente, isto é,

$$x^1 = \frac{z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$$

$$x^{-1} = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$$

e, fazendo por simplicidade

$$(d) \dots\dots\dots \frac{z}{2} = t,$$

$$x^1 = t + \sqrt{t^2 - 1}$$

$$x^{-1} = t - \sqrt{t^2 - 1}$$

ou inversamente.

Assim, pois, designando em geral por

$$\sum_a^{a+b} \{f(i)\}$$

a somma das determinações individuaes successivas de  $f(i)$ , correspondentes respectivamente aos valores inteiros e positivos de

$$i = a, a+1, a+2, \dots (a+b),$$

teremos, na supposição de ser  $m$  um numero inteiro,

$$x^m = (t + \sqrt{t^2 - 1})^m = \sum_0^m \left\{ (+1)^i [mCi] t^{m-i} (\sqrt{t^2 - 1})^i \right\}$$

$$x^{-m} = (t - \sqrt{t^2 - 1})^m = \sum_0^m \left\{ (-1)^i [mCi] t^{m-i} (\sqrt{t^2 - 1})^i \right\}$$

ou inversamente; mas, quer se tomem os valores de  $x^m$  e  $x^{-m}$  taes como estão escriptos, quer se attribua a  $x^m$  o de  $x^{-m}$  e reciprocamente, a sua somma é sempre a mesma.

Ora, como n'estes valores são eguaes e de signaes contrarios todos os termos, que correspondem a  $i$  impar, isto é, todos os termos d'ordem par, sendo os restantes identicos, claro está que

do dobro d'estes ultimos precisamente devera constar a somma dos mesmos valores. Podemos por conseguinte representar esta somma como se segue

$$x^m + x^{-m} = 2 \times \sum_0^{\frac{1}{2}\{m\}} [mC2i] t^{m-2i} (t^2-1)^i$$

onde se quer exprimir pela ambiguidade do limite superior  $\frac{1}{2}\{m\}$  a consideração dos casos respectivos de ser  $m$  par ou impar; de maneira que devera ser  $\frac{1}{2}m$  no primeiro caso e  $\frac{1}{2}(m-1)$  no segundo. E como pela notação adoptada é

$$(t^2-1)^i = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=i} \{(-1)^\alpha [iC\alpha] t^{2i-2\alpha}\},$$

a expressão precedente transforma-se em

$$x^m + x^{-m} = 2 \sum_0^{\frac{1}{2}\{m\}} \left\{ [mC2i] t^{m-2i} \cdot \sum_{\alpha=0}^{\alpha=i} \{(-1)^\alpha [iC\alpha] t^{2i-2\alpha}\} \right\}$$

ou

$$x^m + x^{-m} = \sum_0^{\frac{1}{2}\{m\}} \left\{ [mC2i] \cdot 2 \cdot \sum_{\alpha=0}^{\alpha=i} \{(-1)^\alpha [iC\alpha] t^{m-2\alpha}\} \right\}$$

ou, finalmente, attendendo a (d)

$$(s) \dots x^m + x^{-m} = \sum_0^{\frac{1}{2}\{m\}} \left\{ [mC2i] \cdot 2 \cdot \sum_{\alpha=0}^{\alpha=i} \{(-1)^\alpha [iC\alpha] \frac{z^{m-2\alpha}}{2^{m-2\alpha}}\} \right\}$$

\*

Tal é pois a fórmula que dá  $x^m + x^{-m}$  expresso em

$$z = x^1 + x^{-1}.$$

Para se obter este desenvolvimento, ordenado segundo as potências decrescentes de  $z$ , dar-se-hão successivamente a  $\alpha$  os valores  $0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}$  ou  $\frac{m-1}{2}$  (conforme for  $m$  par ou impar), e tomar-se-ha  $i$  respectivamente desde  $i=\alpha$  até  $i=\frac{1}{2}\binom{m}{m-1}$  (na mesma conformidade de ser  $m$  par ou impar); de maneira que, designando por

$$(q_\alpha) \dots \dots \dots A_\alpha = \frac{K_\alpha}{2^{m-2\alpha}}$$

o coefficiente d'um termo d'ordem qualquer  $\alpha + 1$ , será

$$(n_\alpha) \dots \dots \dots K_\alpha = (-1)^\alpha \sum_0^{\frac{1}{2}\binom{m}{m-1}} \{2 \cdot [iC\alpha] \cdot [mC2i]\}.$$

Ora a construcção d'este valor, e por conseguinte do valor de  $A_\alpha$  é na verdade assás complicada; mas é muito de presumir que se torne mais simples fazendo-o depender do valor precedente  $K_{\alpha-1}$ , visto ser

$$K_0 = \sum_0^{\frac{1}{2}\binom{m}{m-1}} \{2 \cdot [mC2i]\} = 2^m,$$

e portanto,  $[(q_\alpha)]$

$$(q_0) \dots \dots \dots A_0 = 1.$$



Para o conseguir notaremos primeiro que, sendo, como se sabe,

$$2 [iC\alpha] = \frac{2i}{\alpha} [(i-1) C (\alpha-1)]$$

$$[mC2i] = \frac{m}{2i} [(m-1) C (2i-1)]$$

será

$$2 [iC\alpha] \cdot [mC2i] = \frac{m}{\alpha} [(i-1) C (\alpha-1)] \cdot [(m-1) C (2i-1)],$$

e portanto,  $[(n_\alpha)]$

$$(n'_\alpha) K_\alpha = (-1)^\alpha \frac{m}{\alpha} \sum_{\alpha}^{\frac{1}{2} \binom{m}{m-1}} \{ [(i-1) C (\alpha-1)] \cdot [(m-1) C (2i-1)] \}.$$

Mudando  $\alpha$  em  $\alpha-1$ , tanto em  $(n_\alpha)$  como em  $(n'_\alpha)$ , obter-se-ha

$$K_{\alpha-1} = (-1)^{\alpha-1} \sum_0^{\frac{1}{2} \binom{m}{m-1}} \{ 2 [iC (\alpha-1)] \cdot [mC2i] \}$$

$$K_{\alpha-1} = (-1)^{\alpha-1} \frac{m}{\alpha-1} \sum_{\alpha-1}^{\frac{1}{2} \binom{m}{m-1}} \{ [(i-1) C (\alpha-2)] \cdot [(m-1) C (2i-1)] \}.$$

Sendo agora, como tambem é sabido,

$$\begin{aligned} [mC2i] &= \frac{m-2i+1}{2i} [mC(2i-1)] = \\ &= \frac{m+1}{2i} [mC(2i-1)] - [mC(2i-1)]. \end{aligned}$$

será

$$\begin{aligned}
 2 [iC(\alpha-1)] \cdot [mC2i] &= \frac{m+1}{i} [iC(\alpha-1)] \cdot [mC(2i-1)] \\
 &\quad - 2 [iC(\alpha-1)] \cdot [mC(2i-1)] \\
 &= \frac{m+1}{\alpha-1} [(i-1)C(\alpha-2)] \cdot [mC(2i-1)] - 2(iC(\alpha-1)) \cdot [mC(2i-1)]
 \end{aligned}$$

que pela substituição de

$$[iC(\alpha-1)] = [(i-1)C(\alpha-1)] + [(i-1)C(\alpha-2)]$$

se transforma em

$$\begin{aligned}
 2 [iC(\alpha-1)] \cdot [mC2i] &= \frac{m-2\alpha+3}{\alpha-1} [(i-1)C(\alpha-2)] \cdot [mC(2i-1)] \\
 &\quad - 2 [(i-1)C(\alpha-1)] \cdot [mC(2i-1)]
 \end{aligned}$$

ou, finalmente, mudando  $m$  em  $m-1$

$$\begin{aligned}
 2 [iC(\alpha-1)] \cdot [(m-1)C2i] &= \frac{m-2\alpha+2}{\alpha-1} [(i-1)C(\alpha-2)] \\
 \times [(m-1)C(2i-1)] &- 2 [(i-1)C(\alpha-1)] \cdot [(m-1)C(2i-1)].
 \end{aligned}$$

Se tomarmos o somatório d'ambos os membros d'esta equação, desde  $i = \alpha - 1$  até  $i = \frac{1}{2} \begin{cases} m \\ m-1 \end{cases}$ , e multiplicarmos por  $(-1)^{\alpha-1} = -(-1)^{\alpha}$ , obteremos (attendendo a  $(n_{\alpha-1})$ ,  $(n'_{\alpha-1})$ ,  $(n'_{\alpha})$ , e representando por

$${}^m(K_{\alpha-1})_{m-1}$$

aquillo em que se torna  $K_{\alpha-1}$  pela mudança de  $m$  em  $m-1$ , obteremos, repito, o resultado seguinte

$$(K_{\alpha-1})_{m-1} = \frac{m-2\alpha+2}{m} K_{\alpha-1} + \frac{2\alpha}{m} K_{\alpha},$$

d'onde se deduz

$$K_{\alpha} = \frac{-K_{\alpha-1}(m-2\alpha+2) + m(K_{\alpha-1})_{m-1}}{2\alpha}$$

e finalmente  $[(q_{\alpha})$  e  $(q_{\alpha-1})]$

$$(Q_{\alpha}) \dots A_{\alpha} = \frac{-2A_{\alpha-1}(m-2\alpha+2) + m(A_{\alpha-1})_{m-1}}{\alpha}$$

Por meio d'este symbolo geral, ficando subintendido o valor inicial  $(q_0)$ , se acham successivamente

$$A_1 = \frac{-2m+m}{1} = -\frac{m}{1}$$

$$A_2 = \frac{+2m(m-2) - m(m-1)}{1.2} = +\frac{m(m-3)}{1.2}$$

$$A_3 = \frac{-2m(m-3)(m-4) + m(m-1)(m-4)}{1.2.3} = -\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}$$

$$A_4 = \frac{+2m(m-4)(m-5)(m-6) - m(m-1)(m-5)(m-6)}{1.2.3.4}$$

$$= +\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4}$$

e assim por deante.

Observa-se porém que cada uma d'estas determinações individuais se obtem sem dependencia da precedente, dando a  $\alpha$  os valores 1, 2, 3, ...  $\frac{1}{2} \binom{m}{m-1}$ , na expressão

$$A_{\alpha} = (-1)^{\alpha} \frac{m(m-\alpha-1)(m-\alpha-2) \dots (m-2\alpha+1)}{1.2.3 \dots \alpha},$$

que ficará completamente generalizada, se se demonstrar que, sendo verdadeira para  $\alpha$ , tambem é verdadeira para  $\alpha+1$ . Ora, segundo a fórmula ( $Q_{\alpha}$ ), temos

$$\begin{aligned} A_{\alpha+1} &= \frac{-(-1)^{\alpha} \cdot 2m(m-\alpha-1) \dots (m-2\alpha+1)}{1.2.3 \dots \alpha(\alpha+1)} \\ &+ \frac{(-1)^{\alpha} m(m-1)(m-\alpha-2) \dots (m-2\alpha)}{1.2.3 \dots \alpha(\alpha+1)} = \\ &= (-1)^{\alpha+1} \frac{m(m-\alpha-2)(m-\alpha-3) \dots (m-2\alpha)(2m-2\alpha-2-m+1)}{1.2.3 \dots (\alpha+1)} \\ &= (-1)^{\alpha+1} \frac{m[m-(\alpha+1)-1][m-(\alpha+1)-2] \dots [m-2(\alpha+1)+1]}{1.2.3 \dots (\alpha+1)} \end{aligned}$$

expressão que se fórma como a precedente, pois não é mais do que esta mesma depois da mudança de  $\alpha$  em  $\alpha+1$ .

D'esta observação resulta transformar-se definitivamente a fórmula (s) n'est'outra

$$x^m + x^{-m} = z^m + \sum_1^{\frac{1}{2} \binom{m}{m-1}} \left\{ (-1)^{\alpha} \frac{m(m-\alpha-1)(m-\alpha-2) \dots (m-2\alpha+1)}{1.2.3 \dots \alpha} z^{m-2\alpha} \right\}$$

que já não oferece dificuldade alguma de construcção.

## BIBLIOGRAPHIA

*M. da Terra Pereira Vianna. — Influencia das cargas em movimento sobre as vigas rectas. — Lisboa, 1882.*

A doutrina de que se occupa o sr. Terra Vianna no seu opusculo é importante pela applicação que tem na construcção das pontes metalicas.

No primeiro capitulo vem o estudo das vibrações das vigas rectas, suppondo a sobrecarga concentrada n'um ponto, tanto para o caso da viga estar apoiada em dous pontos, como para o caso de estar encastrada. O problema, n'estas condições, foi resolvido pelo sr. Phillips. O sr. Terra Vianna emprega o methodo d'este engenheiro, sem desprezar, como elle fez, a inercia de toda a carga permanente e a inercia proveniente das rotações em sentidos alternadamente oppostos das secções normaes da viga. No caso da viga encastrada as rotações das secções normaes têm uma influencia importante, pois que mostra o sr. Terra Vianna que é da ordem dos termos que o sr. Philipps conservou na solução. Os calculos do sr. Terra Vianna differem dos do sr. Phillips porque aquelle rectifica um erro d'este engenheiro, erro que não introduziu differença no resultado final, mas complicou o calculo e obrigou a desprezar de termos que influiam na ordem da approximação escolhida.

No capitulo segundo do seu opusculo tracta o sr. Terra Vianna da vibração das vigas quando a sobrecarga está uniformemente distribuida, no caso de a viga estar simplesmente apoiada, no caso de estar encastrada, e no caso de estar apoiada n'uma extremidade e encastrada na outra. O primeiro caso tinha já sido tractado pelo sr. Renaudot, desprezando a inercia devida ás oscillações das secções transversaes e a força da inercia centrifuga composta da sobrecarga. O sr. Terra Vianna no seu estudo não faz estes desprezos, e o seu calculo é mais simples do que o do sr. Renaudot, porque este engenheiro commetteu o mesmo erro que o sr. Phillips.

Por esta rapida noticia se vê quanto interesse offerece o livro do nosso illustre engenheiro.

Accrescentaremos ainda que este livro foi escripto para o curso a uma cadeira da eschola polytechnica do Porto, onde o auctor é actualmente professor.

*Hermite (Ch.). — Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris pendant le 2.<sup>e</sup> semestre de 1881 à 1882. Rédigé par M. Andoyer. — Librairie A. Hermann, 1882.*

O sr. Andoyer fez um grande serviço á sciencia colligindo as sabias preleções feitas pelo sr. Hermite na Faculdade das Sciencias de Paris. Aquelles que não tiveram a felicidade de ouvir este grande mathematico, poderão pela leitura d'esta obra fazer idéa da altura do ensino do illustre professor n'aquelle estabelecimento de instrucção.

Para vêr o cuidado que o sr. Hermite teve em pôr os seus ouvintes ao corrente das ultimas descobertas feitas na sciencia, vamos dar uma noticia rapida dos assumptos de que elle se occupa.

As primeiras cinco lições são destinadas á applicação do calculo integral á rectificação das curvas, á quadratura das áreas planas e á determinação das áreas e volumes dos corpos, questão de que elle já tractára no seu *Curso d'Analyse*.

Passa em seguida á doutrina das funcções de variaveis imaginarias. A lição 6.<sup>a</sup> é destinada aos primeiros principios d'esta doutrina. Ahí tracta da representação geometrica das funcções de variaveis imaginarias e das consequencias d'esta representação.

Passa depois (lição 7.<sup>a</sup>) á definição de integral definido, que estende primeiro ás funcções imaginarias e depois ás funcções de variaveis imaginarias. Dá alguns theoremas, devidos ao sr. Darboux, sobre os integraes definidos das funcções imaginarias, e applica esses theoremas para estender ás funcções imaginarias o theorema de Taylor.

Vem em seguida (lição 8.<sup>a</sup>) a theoria, devida a Cauchy, dos integraes definidos quando os limites são imaginarios, que elle expõe seguindo o caminho aberto por Riemann.

Na lição 9.<sup>a</sup> faz applicação da importante fórmula de Cauchy,

que dá as funcções expressas debaixo da fórma de integraes curvilíneos, á deducção da fórmula de Taylor no caso das variaveis imaginarias.

Nas lições seguintes (10.<sup>a</sup>, 11.<sup>a</sup> e 12.<sup>a</sup>) expõe as admiraveis descobertas feitas n'estes ultimos tempos pelos srs. Weierstrass e Mittag-Leffler sobre a theoria difficil das funcções uniformes. Vem primeiro a decomposição em *factores primarios* das funcções *holomorphas*, decomposição devida ao sr. Weierstrass. Em seguida vem a expressão analytica de uma funcção uniforme tendo pólos e *pontos essenciaes* em numero qualquer, finito ou infinito.

Passa depois ao integral euleriano de segunda especie, que considera como uma funcção analytica, e ao qual applica os principios anteriormente estudados (lições 13.<sup>a</sup>, 14.<sup>a</sup> e 15.<sup>a</sup>).

Na lição 15.<sup>a</sup> mostra que a noção de *linhas de descontinuidade* (*coupures*), a que Riemann chegou pela consideração dos integraes tomados entre limites imaginarios, apparece naturalmente logo no principio do Calculo integral pela consideração de integraes definidos das funcções racionaes.

Na lição 16.<sup>a</sup> applica a noção das linhas de descontinuidade á determinação de alguns integraes definidos, os quaes acha tambem pela applicação do theorema de Cauchy relativo ao integral de uma funcção uniforme tomado ao longo de um contórno fechado.

Na lição 17.<sup>a</sup> mostra a existencia, reconhecida pelo sr. Weierstrass, de linhas de descontinuidade nas funcções, e de espaços lacunares. N'esta mesma lição e na seguinte tracta da resolução da equação  $G(z) = 0$ , onde o primeiro membro é uma funcção holomorpha da incognita. Apresenta a doutrina de Cauchy relativa á separação das raizes, e a expressão d'estas por meio de integraes definidos. Depois vem a serie de Lagrange demonstrada pelo caminho seguido pelo sr. Rouché, e a sua applicação ao problema de Kepler. A proposito d'este problema vêm por incidente os polynomios de Legendre.

Passa em seguida aos theoremas de Eisenstein e de Tchebitcheff, que dão condições a que devem satisfazer as series que satisfazem a uma equação algebrica, e as series que resultam de funcções compostas de funcções algebricas, logarithmicas e exponentiaes.

Segue-se o estudo das funcções multiformes, provenientes da integração das funcções uniformes e multiformes.

As ultimas lições são consagradas ao estudo das funcções ellipticas, e estas são tanto mais interessantes que o sr. Hermite tem sido um dos que tem concorrido efficazmente para a constituição d'esta doutrina importante e difficil.

*H. Brocard. — Etude d'un nouveau cercle du plan du triangle.*

Se n'um triangulo ABC tomarmos dous pontos O e O' deferidos pelas igualdades

$$OBA = OCB = OAC,$$

$$O'AB = O'BC = O'CA;$$

e se tirarmos depois as linhas que os unem aos vertices do triangulo, estas rectas, cortando-se, determinam tres novos pontos. Estes tres pontos, os pontos O e O', o centro do circulo circumscripto a ABC e o centro das medianas anti-parallelas são sete pontos do mesmo circulo.

O sr. Brocard estuda as propriedades d'este circulo n'este interessante trabalho, que foi publicado nas Actas da *Associação franceza para o progresso das sciencias* (Congresso d'Argel).

*F. Frenet. — Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal. — 4<sup>me</sup> édition. — Paris, 1882.*

A primeira parte d'esta obra traz trezentos e trinta e seis exercicios, relativos ao Calculo differencial e suas applicações analyticas e geometricas. A segunda parte consta de seiscentos e trinta e quatro exercicios relativos ao Calculo integral. A terceira parte consta de cincoenta e um exercicios relativos a questões que pertencem indifferentemente aos dous ramos da Analyse.

A maior parte dos exercicios que o sr. Frenet escolheu são relativos a fórmulas ou theoremas que têm importancia na Analyse, de modo que quem fizer estes exercicios, ao mesmo tempo que se desenvolve nos principios do Calculo infinitesimal, que tem



de applicar, fica com uma collecção preciosa de resultados importantes.

Muitos dos exercicios são relativos a questões celebres na historia das sciencias mathematicas, e n'este caso o sr. Frenet tem sempre o cuidado de dar indicações a este respeito.

Por esta circumstancia, e pela elegancia da maior parte das soluções, torna-se muito recommendavel o livro do sr. Frenet.

*P. Mansion. — Introduction à la théorie des déterminants. — Gand, 1882 (2<sup>me</sup> édition).*

O fim do sr. P. Mansion n'este livro, escripto para uso dos Institutos de instrucção secundaria, é preparar os alumnos para comprehenderem a theoria geral dos determinantes pelo estudo anterior de alguns casos particulares. Para isso expõe com toda a clareza a doutrina relativa aos determinantes de duas e de tres columnas. O objecto de cada capitulo é o seguinte:

Capitulo I. Definições e propriedades.

Capitulo II. Calculo dos determinantes.

Capitulo III. Applicações.

No capitulo das applicações tracta da eliminação entre equações do primeiro gráo a duas e tres incognitas, e entre algumas equações de gráo superior.

G. T.

## SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 21

Achar as soluções inteiras da equação  $x^\gamma = \gamma^x$  sem recorrer aos logarithmos.

Ha primeiro um numero infinito de soluções correspondentes á egualdade  $x = y$ .

Para as outras, representemos por  $m$  um coefficiente arbitrario, differente da unidade, e façamos

$$x = m\gamma,$$

o que dá

$$\gamma^{m\gamma} = m^\gamma \cdot \gamma^\gamma,$$

d'onde

$$m\gamma = \gamma^{(m-1)\gamma},$$

ou, pela extracção da raiz do grau  $\gamma$  nos dois membros

$$m = \gamma^{m-1},$$

d'onde tambem

$$x = \gamma^m;$$

por consequencia

$$\begin{cases} \gamma = m^{\left(\frac{1}{m-1}\right)} \\ x = m^{\left(\frac{1}{m-1}\right)}. \end{cases}$$

Como a equação dada deve ser resolvida em numeros inteiros,

achamos facilmente, pelos differentes valores que arbitramos a  $m$ , as seguintes soluções unicas que resolvem a questão proposta:

$$m = 2$$

$$x = 4$$

$$y = 2.$$

MARTINS DA SILVA.

QUESTÕES PROPOSTAS N.ºs 22, 23, 24

N.º 22. Provar syntheticamente que as superficies empenadas, geradas por uma recta que se move apoiando-se sobre tres directrizes rectilineas, são de segunda ordem; e deduzir as propriedades principaes d'estas superficies, especialmente sob o ponto de vista d'este modo de geração.

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

N.º 23. Sommar a serie

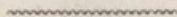
$$\sum_0^{\infty} \frac{2^i x}{e^{2^i} \cdot x + 1}.$$

G. T.

N.º 24. Provar que ha um numero infinito de modos de desenvolver uma fracção simplesmente periodica em uma serie da fórma

$$a10^{-b} + ma10^{-2b} + m^2a10^{-3b} + m^3a10^{-4b} + \dots$$

BIRGER HANSTED.



# INDICE

- Sur quelques formules nouvelles relatives aux racines des équations algébriques, par J. A. Martins da Silva, pag. 3.
- Sobre a divisão em partes eguaes da distancia entre dois pontos e da circumferencia empregando o compasso ordinario, por A. Schiappa Monteiro, pag. 39.
- Généralisation de la fonction  $X_n$  de Legendre, par M. Birger Hansted, pag. 53.
- Algumas propriedades das conicas, por F. da Ponte Horta, pag. 63.
- Sobre alguns integraes indefinidos, por Duarte Leite Pereira da Silva, pag. 87.
- Note sur la génération d'une conique au moyen du cercle ou d'une autre conique, et sur autres études géométriques, par A. Schiappa Monteiro, pag. 95.
- × Derivadas de ordem qualquer de  $y$  em ordem a  $x$ , quando é  $f(x,y) = 0$ , por Duarte Leite Pereira da Silva, pag. 109.
- Sobre a fórmula de Lagrange, por J. M. Rodrigues, pag. 121.
- Sobre um problema de algebra elementar, por J. C. O'Neil de Medeiros, pag. 177.
- Solução da questão proposta n.º 21, pag. 190.
- Questões propostas n.º 22, 23, 24, pag. 191.
- Bibliographia, pag. 62, 94, 119, 185.