II

Voici une question du même genre qui se résout par la même méthode.

Dans le nombre N considérons le nombre Q_p formé par les p premiers chiffres à droite, et le nombre P_p formé par les chiffres restants. Nous aurons

$$N = P_p\, 10^p + Q_p.$$

Posons

$$\delta_p(N) = P_p + Q_p,$$

et cherchons la somme

$$S_p(N) = \delta_p(1) + \delta_p(2) + \ldots + \delta_p(N-1) + \delta_p(N).$$

Il est évident d'abord que jusqu'au nombre $10^p - 1$ inclusivement, on a

$$\delta_p(k) = k.$$

Donc

$$S_p(10^p - 1) = \frac{(10^p - 1)\,10^p}{2}.$$

La somme des 10^p nombres δ_p suivants sera, d'après cela,

$$10^p + \frac{(10^p - 1)\,10^p}{2};$$

celle des 10^p suivants

$$2 \times 10^p + \frac{(10^p - 1)\,10^p}{2};$$

et ainsi de suite; de sorte que

$$S_p(a\,.\,10^p - 1) = \frac{(a-1)\,a}{2}\,10^p + a\,\frac{(10^p - 1)\,10^p}{2}$$

ou

$$(3) \qquad S_p(a \,.\, 10^p - 1) = \frac{a \,.\, 10^p}{2}(a + 10^p - 2).$$

Cela posé, et désignant par la notation $S(N)$ la somme

$$1 + 2 + \ldots + (N-1) + N = \frac{N(N+1)}{2},$$

remarquons que

$$S_p(N) = S_p(P_p \,.\, 10^p - 1) + P_p(Q_p + 1) + S(Q_p),$$

ou, en vertu de la formule (3),

$$(4) \quad S_p(N) = \frac{P_p \,.\, 10^p}{2}(P_p + 10^p - 2) + P_p(Q_p + 1) + \frac{Q_p(Q_p + 1)}{2}.$$

Cette formule résout le problème que nous nous étions proposé.

En particulier, on a

$$S_1(N) = 5P_1(P_1 + 8) + P_1(Q_1 + 1) + \frac{Q_1(Q_1 + 1)}{2}.$$

ou

$$S_1(N) = P_1(5P_1 + Q_1 + 41) + \frac{Q_1(Q_1 + 1)}{2}.$$

D'ailleurs on a

$$S(N) = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$= \frac{(10P_1 + Q_1)(10P_1 + Q_1 + 1)}{2}$$

$$= 5P_1(10P_1 + 2Q_1 + 1) + \frac{Q_1(Q_1 + 1)}{2}.$$

Par conséquent,

$$S(N)-S_1(N)=9P_1(5P_1+Q_1-4).$$

De cette expression on tire les propositions suivantes:

La différence entre la somme des N *premiers nombres et la somme des* δ_1 *de ces nombres est divisible par* 9 *fois le nombre de dizaines contenues dans* N.

Si le chiffre des unités de N *est* 4 *ou* 9, *cette différence est divisible par* 5.

Si le chiffre des unités de N *est* 4, *cette différence est divisible par le carré du nombre de dizaines contenues dans* N, *et le quotient est égal à la somme des* 9 *premiers nombres.*

etc...... etc......

La formule

$$S(N)=\frac{N(N+1)}{2}$$

peut s'écrire

$$S(N)=\frac{(P_p\,.\,10^p+Q_p)(P_p\,.\,10^p+Q_p+1)}{2}$$

$$=\frac{P^2{}_p\,10^{2p}+P_p\,10^p(2Q_p+1)+Q_p(Q_p+1)}{2},$$

et la formule (4)

$$S_p(N)=\frac{P^2{}_p\,10^p+P_p[10^p(10^p-2)+2(Q_p+1)]+Q_p(Q_p+1)}{2}.$$

De là on tire

$$\frac{S(N)}{S_p(N)}=\frac{10^{2p}+\dfrac{10^p(2Q_p+1)}{P_p}+\dfrac{Q_p(Q_p+1)}{P^2{}_p}}{10^p+\dfrac{10^p(10^p-2)+2(Q_p+1)}{P_p}+\dfrac{Q_p(Q_p+1)}{P^2{}_p}}.$$

Lorsque l'on fait croître N indéfiniment, Q_p qui est toujours égal à l'un des $10^p - 1$ premiers nombres reste fini, et P_p croît indéfiniment. Donc,

$$\operatorname{Lim} \frac{S(N)}{S_p(N)} = 10^p.$$

La limite du rapport de la somme des N *premiers nombres à la somme des* $\mathfrak{S}_p$ *de ces nombres tend, lorsque* N *croît indéfiniment, vers le nombre* 10^p.

III

Voici encore une question qu'on peut rattacher aux précédentes:

Combien y a-t-il de chiffres dans la suite des nombres de 1 *à* N?

Nous représenterons ce nombre par la notation C (N).

Premier procédé. — Pour résoudre cette question nous établirons d'abord un lemme:

Étant données une progression arithmétique

$$a_0 \quad a_0 + r \quad a_0 + 2r \quad \ldots \quad a_0 + nr$$

et une progression géométrique d'un même nombre de termes

$$b_0 \quad b_0 q \quad b_0 q^2 \quad \ldots \quad b_0 q^n,$$

on multiplie ces progressions terme à terme, et l'on demande la somme des termes de la suite ainsi formée, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{i=n} (a_0 + ir)\, b_0 q^i =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 + r)\, b_0 q + (a_0 + 2r)\, b_0 q^2 + \ldots + (a_0 + nr)\, b_0 q^n.$$

Cette question est bien facile à résoudre.

On a

$$\sum_{i=0}^{i=n} (a_0 + ir)\, b_0 q^i =$$

$$= b_0 [a_0 (1 + q + \ldots + q^n) + rq(1 + 2q + \ldots + nq^{n-1}].$$

Or,

$$1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Dérivons les deux membres de cette identité par rapport à q; il vient

$$1 + 2q + \ldots + nq^{n-1} = \frac{q^n [n(q-1) - 1] + 1}{(q-1)^2}.$$

Dès lors la formule précédente se transforme en celle-ci

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{i=n} (a_0 + ir)\, b_0 q^i = \\ &= b_0 \left[a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + rq \frac{q^n [n(q-1) - 1] + 1}{(q-1)^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, soit p la plus haute puissance de 10 contenue dans le nombre N, c'est-à-dire, supposons que le nombre N ait $p + 1$ chiffres.

Dans la suite

de 1 à 9 inclusivement il y a $10 - 1 = 9$ chiffres

de 10 à 99 inclusivement il y a $2 \times 100 - 2 \times 10$
$= 2 \times 10 \times 9$ chiffres

de 100 à 999 inclusivement il y a $3 \times 1000 - 3 \times 100$
$= 3 \times 100 \times 9$ chiffres

. . . .

de 10^{p-1} à 10^p-1 inclusivement il y a $p \times 10^p - p \times 10^{p-1}$
$= p \times 10^{p-1} \times 9$ chiffres

enfin

de 10^p à N inclusivement il y a $(p+1)(N-10^p+1)$ chiffres.

Par conséquent

$$C(N)=9(1+2.10+3.10^2+\ldots+p.10^{p-1})+(p+1)(N-10^p+1).$$

Or, si dans la formule (4) on fait

$$a_0=1 \quad b_0=1 \quad r=1 \quad q=10 \quad n=p-1,$$

on obtient

$$1+2.10+3.10^2+\ldots+p.10^{p-1}=\frac{10^p(9p-1)+1}{81}.$$

Donc

$$C(N)=\frac{10^p(9p-1)+1}{9}+(p+1)(N-10^p+1),$$

formule qui se transforme immédiatement en celle-ci

$$(5) \qquad C(N)=(p+1)(N+1)-\frac{10^{p+1}-1}{9}.$$

Exemple. Combien y a-t-il de chiffres dans la suite des nombres de 1 à 365?

Ici $p=2$; donc

$$C(365)=3\times 366-\frac{1000-1}{9}$$
$$=1098-111$$
$$=987.$$

Cet exemple numérique fait naître l'idée d'énoncer la règle suivante bien facile à retenir:

Pour avoir le nombre des chiffres compris dans la suite des N *premiers nombres, il faut multiplier le nombre* N *augmenté d'une unité par le nombre des chiffres qui entrent dans le nombre* N, *et retrancher du produit un nombre formé d'autant de* 1 *qu'il y a de chiffres dans le nombre* N.

Second procédé. — Nous avons tenu à exposer le procédé ci-dessus à cause de l'intérêt de la formule (4), et aussi parce que c'est celui qui se présente tout d'abord à l'esprit lorsqu'on aborde le problème. Mais en voici un autre beaucoup plus simple:

Écrivons les uns au-dessous des autres les N premiers nombres. N étant supposé avoir $p+1$ chiffres, complétons tous les nombres du tableau en leur ajoutant des zéros sur la gauche de façon à les composer tous de $p+1$ caractères. Enfin, ajoutons en tête de cette liste une ligne de $p+1$ zéros.

Pour avoir le nombre cherché il faut évaluer le nombre total des caractères figurant au tableau ainsi formé et en retrancher le nombre de zéros qu'on a ajoutés.

Or, le premier de ces deux nombres est évidemment

$$(p+1)\,(\mathrm{N}+1)).$$

Passons au nombre des zéros.

De 10^p à N nous n'en avons point ajouté. Maintenant, au-dessous de 10^p, dans la première colonne de gauche, nous avons ajouté 10^p zéros; au-dessous de 10^{p-1}, dans la deuxième colonne, nous en avons ajouté 10^{p-1}; etc. . . . . .; au-dessous de 10, dans la deuxième colonne de droite, nous en avons ajouté 10; au-dessous de 1, dans la première colonne de droite, nous en avons ajouté 1. Nous en avons donc ajouté en tout

$$10^p+10^{p-1}+\ldots+10+1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{10^{p+1}-1}{9},$$

et le nombre cherché est

$$(p+1)(N+1)-\frac{10^{p+1}-1}{9}.$$

Nous retrouvons ainsi le résultat précédemment obtenu.

SU UNA PROPRIETÁ DEL DETERMINANTE DI UNA SOSTITUZIONE ORTOGONALE

DI

GINO LORIA

TEOREMA. — *Se nel determinante di una sostituzione ortogonale, si sottrae l'unità da tutti gli elementi principali e si prendono poscia i complementi di questi, tali complementi sono tutti eguali e valgono ciascuno la metà del determinante ridotto cambiato di segno.*

Questa proposizione fu enunciata dal Prof. Siacci nel *Giornale di matematiche* diretto dal Prof. Battaglini (vol. x, p. 360) per il caso di un determinante d'ordine pari. Mi propongo in questa nota di mostrare che essa vale independentemente dalla parità del determinante.

Sia $|a_{ik}|$ il determinante di una sostituzione ortogonale di ordine n; sarà

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} a_{ri}\, a_{rk} = \begin{cases} 1 \text{ se } i=k \\ 0 \text{ se } i \gtrless k \end{cases}.$$

Poniamo

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

e chiamiamo $D_1, D_2, \dots, D_n$ i suddeterminanti principali di D.

Avremo anzitutto, per le (1),

$$(2)\qquad D^2=\begin{vmatrix} 2-2a_{11} & -(a_{12}+a_{21}) & \ldots & -(a_{1n}+a_{n1}) \\ -(a_{21}+a_{12}) & 2-2a_{22} & \ldots & -(a_{2n}+a_{n2}) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -(a_{n1}+a_{1n}) & -(a_{n2}+a_{2n}) & \ldots & 2-2a_{nn} \end{vmatrix}$$

Poi, esegnendo il prodotto per orizzontali, si ottiene

$$DD_1=\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-1 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -(1-a_{11}) & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ -(a_{21}+a_{12}) & 2-2a_{22} & \ldots & -(a_{n2}+a_{2n}) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -(a_{n1}+a_{1n}) & -(a_{n2}+a_{2n}) & \ldots & 2-2a_{nn} \end{vmatrix};$$

infine, esegnendo il prodotto per verticali, si trova:

$$
DD_1 = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-1 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} -(1-a_{11}) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -(a_{21}+a_{12}) & 2-2a_{22} & \dots & -(a_{n2}+a_{2n}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -(a_{n1}+a_{1n}) & -(a_{n2}+a_{2n}) & \dots & 2-2a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Addizionando membro a membro queste due ultime eguaglianze, avremo, pel teorema di addizione dei determinanti,

$$
(3) \quad 2DD_1 = \begin{vmatrix} -(2-2a_{11}) & a_{12}+a_{21} & \dots & a_{1n}+a_{n1} \\ -(a_{21}+a_{12}) & 2-2a_{22} & \dots & -(a_{2n}+a_{n2}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -(a_{n1}+a_{1n}) & -(a_{n2}+a_{2n}) & \dots & 2-2a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Ora, se confrontiamo le equazioni (2) e (3), concluderemo

$$
2DD_1 = -D^2.
$$

*

Siccome D non è nullo, così da questa si deduce

$$D_1 = -\frac{1}{2} D.$$

Il teorema è così dimostrato pel primo suddeterminante principale di D. Similmente si proverebbe per gli altri.

Mantova, 7 settembre 1886.

SUR CERTAINES FONCTIONS SYMÉTRIQUES; APPLICATION AU CALCUL DE LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE

Ingénieur des ponts et chaussées.

Soit

$$U = z^p + A_1 z^{p-1} + \ldots + A_{p-1} z + A_p = 0,$$

une équation algébrique dont les racines, supposées toutes inégales, sont $z_1, z_2, \ldots, z_p$. Proposons-nous d'exprimer, au moyen de U, la fonction

$$\frac{1}{(z-z_1)^n} + \frac{1}{(z-z_2)^n} + \ldots + \frac{1}{(z-z_p)^n}$$

que nous écrirons plus simplesment

$$\sum \frac{1}{(z-z_\alpha)^n}.$$

Nous avons

$$D_z l U = \sum \frac{1}{z-z_\alpha}.$$

Dérivons $n-1$ fois les deux membres de cette identité par rapport à z; il vient

$$D_z^n l U = (-1)^{n-1} . 1 . 2 \ldots (n-1) \sum \frac{1}{(z-z_\alpha)^n},$$

d'où

$$(1) \qquad \sum \frac{1}{(z-z_\alpha)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{1 . 2 \ldots (n-1)} . D_z^n l U.$$

En vertu de la formule connue qui donne la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction, on a

$$D_z^n l U = K_n D_U^n l U + K_{n-1} D_U^{n-1} l U + \ldots + K_1 D_U l U$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1.2\ldots(n-1) K_n}{U^n} + (-1)^{n-2} \frac{1.2\ldots(n-2) K_{n-1}}{U^{n-1}} + \ldots + \frac{K_1}{U}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} 1.2\ldots(n-1) K_n + (-1)^{n-2} 1.2\ldots(n-2) K_{n-1} U + \ldots + K_1 U^{n-1}}{U^n},$$

les coefficients K étant donnés par la formule

$$K_i = \frac{1}{1.2\ldots i}\Big[D_z^n U^i - C_i^1 U . D_z^n U^{i-1} + C_i^2 U^2 . D_z^n U^{i-2} - \ldots$$
$$+ (-1)^{i-1} C_i^{i-1} U^{i-1} . D_z^n U\Big]$$

où C_i^k représenta, suivant l'habitude, le nombre des combinaisons de i objets pris k à k.

Dès lors

$$D_z^n l U = \frac{1}{U^n}\left\{\begin{array}{l}
\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big[D_z^n U^n - C_n^1 U . D_z^n U^{n-1} + \ldots \\
+ (-1)^{n-2} C_n^{n-2} U^{n-2} . D_z^n U^2 + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} U^{n-1} . D_z^n U\Big] \\
+ \frac{(-1)^{n-2}}{n-1}\Big[U . D_z^n U^{n-1} - C_{n-1}^1 U^2 . D_z^n U^{n-2} + \ldots \\
+ (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} U^{n-1} . D_z^n U\Big] \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- \frac{1}{2}\Big[U^{n-2} . D_z^n U^2 - C_2^1 U^{n-1} . D_z^n U\Big] \\
+ U^{n-1} . D_z^n U.
\end{array}\right\}.$$

L'expression mise entre crochets peut encore s'écrire

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} D_z^n U^n + (-1)^{n-2}\left(\frac{C_n^1}{n}+\frac{1}{n-1}\right) U . D_z^n U^{n-1}$$

$$+(-1)^{n-3}\left(\frac{C_n^2}{n}+\frac{C_{n-1}^1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\right) U^2 . D_z^n U^{n-2} + \ldots$$

$$+\left(\frac{C_n^{n-1}}{n}+\frac{C_{n-1}^{n-2}}{n-1}+\ldots+1\right) U^{n-1} . D_z^n U$$

ou

$$\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{n-i}\left(\frac{C_n^{i-1}}{n}+\frac{C_{n-1}^{i-2}}{n-1}+\ldots+\frac{C_{n-i+1}^{o}}{n-i+1}\right) U^{i-1} . D_z^n U^{n-i+1},$$

en convenant, comme d'habitude de prendre $C_m^{o'} = 1$.

Or, on a

$$\frac{C_n^{i-1}}{n}+\frac{C_{n-1}^{i-2}}{n-1}+\ldots+\frac{C_{n-i+1}^{o}}{n-i+1}$$

$$=\frac{C_n^{n-i+1}}{n}+\frac{C_{n-1}^{n-i+1}}{n-1}+\ldots+\frac{C_{n-i+1}^{n-i+1}}{n-i+1}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)\ldots i}{1.2\ldots(n-i+1)}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots(i-1)}{1.2\ldots(n-i+1)}+\ldots$$

$$+\frac{1}{n-i+1}\cdot\frac{(n-i+1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-i+1)}$$

$$=\frac{1}{n-i+1}\left(\frac{(n-1)(n-2)\ldots i}{1.2\ldots(n-i)}+\frac{(n-2)(n-3)\ldots(i-1)}{1.2\ldots(n-i)}+\ldots+\frac{(n-i)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-i)}\right)$$

$$=\frac{1}{n-i+1}\left(C_{n-1}^{n-i}+C_{n-2}^{n-i}+\ldots+C_{n-i}^{n-i}\right)$$

$$=\frac{1}{n-i+1} C_n^{n-i+1} = \frac{1}{n-i+1} C_n^{i-1}.$$

La somme précédente peut donc s'écrire

$$\sum_{i-1}^{i=n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^{i-1}}{n-i+1}U^{i-1}\,.\,D_z^n U^{n-1+i},$$

et la formule (1) devient

$$\sum\frac{1}{(z-z_\alpha)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{U^n}\cdot\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^{i-1}}{n-i+1}U^{i-1}\,.\,D_z^n U^{n-i+1}$$

ou

$$(2)\qquad \sum\frac{1}{(z-z_\alpha)^n}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{U^n}\cdot\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(-1)^{i+1}C_n^{i-1}}{n-i+1}U^{i-1}\,.\,D_z^n U^{n-i+1}.$$

Cette formule résout le problème que nous nous sommes proposé en commençant. Elle peut s'écrire symboliquement

$$\sum\frac{1}{(z-z_\alpha)^n}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{(t-U)^n-(-1)^n U^n}{U^n},$$

si l'on convient de remplacer, dans le développement du binôme $(t-U)^n$, t^λ (pour $\lambda=1, 2, 3, \ldots$) par $\frac{D_z^n U^\lambda}{\lambda}$.

Nous placerons ici une remarque: Si n est supposé pair, et les z_α réelles, tous les termes du premier membre sont positifs. Ce premier membre ne peut donc, si les racines $z_1, z_2, \ldots z_p$ sont toutes réelles, s'annuler pour aucune valeur réelle finie de z. Il en est, par suite, de même pour le second membre, et nous pouvons énoncer ce théorème:

Si l'équation $U=0$ *a toutes ses racines réelles, et inégales, l'équation obtenue en égalant à* 0, *le développement de* $(t-U)^{2m}-U^{2m}$ *où l'on a remplacé* t^λ (pour $\lambda=1, 2, 3, \ldots$) *par* $\frac{D_z^n U^\lambda}{\lambda}$, *n'a aucune racine réelle.*

En particulier, pour $m=1$, on a

$$(t-\mathrm{U})^2-\mathrm{U}^2=t^2-2t\mathrm{U},$$

et

$$\frac{\mathrm{D}_z^2\mathrm{U}^2}{2}-2\mathrm{D}_z^2\mathrm{U}.\mathrm{U}=\mathrm{U}'^2-\mathrm{UU}''.$$

Donc, *si l'équation* $\mathrm{U}=0$ *a toutes ses racines réelles et inégales, l'équation* $\mathrm{U}'^2-\mathrm{UU}''=0$ *n'a aucune racine réelle.*

Revenons à la formule (2), et faisons, dans cette formule, $z=0$, en convenant de représenter par U_0 et par $\mathrm{D}_z^n\mathrm{U}_0^\lambda$, ce que deviennet U et $\mathrm{D}_z^n\mathrm{U}^\lambda$ par cette substitution. Nous avons

$$(-1)^n\sum\frac{1}{z_a^n}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{\mathrm{U}_0^n}\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i+1}\frac{\mathrm{C}_n^{i-1}}{n-i+1}\mathrm{U}_0^{i-1}.\mathrm{D}_z^n\mathrm{U}_0^{n-i+1}.$$

Cherchons à exprimer le second membre de cette égalité au moyen des coëfficients $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p$ de l'équation $\mathrm{U}=0$.

Il est d'abord évident que

$$\mathrm{U}_0^k=\mathrm{A}_k^p.$$

Quant à $\mathrm{D}_z^n\mathrm{U}_0^\lambda$ c'est, d'après la formule de Maclaurin, le produit de $1.2\ldots n$ par le coëfficient de x^n dans le développement de U^λ. Or, il est bien aisé de voir que ce coëfficient est égal à

$$\Sigma\,\mathrm{A}_{p-q_1}\mathrm{A}_{p-q_2}\ldots\mathrm{A}_{p-q_\lambda},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des indices $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda$ susceptibles de vérifier l'équation

$$q_1+q_2+\ldots+q_\lambda=n.$$

Pour rappeler cette dernière condition, nous affecterons le signe Σ de l'indice $n : \sum\limits_n$.

Il faut remarquer aussi que l'on doit prendre.

$$A_{p-q_k} = 0 \quad \text{pour} \quad p < q_k$$

$$A_{p-q_k} = 1 \quad \text{pour} \quad p = q_k.$$

Ainsi donc

$$D_z^n U_0^\lambda = 1 \,.\, 2 \ldots n \sum_n A_{p-q_1} A_{p-q_2} \ldots A_{p-q_\lambda}.$$

Par suite,

$$(3) \quad \sum \frac{1}{z_\alpha^n} = (-1)^n n \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+1} \frac{C_n^{i-1}}{n-i+1} \cdot \frac{\sum\limits_n A_{p-q_1} A_{p-q_2} \ldots A_{p-q_{n-i+1}}}{A_p^{n-i+1}}.$$

Nous avons ainsi une expression de la somme des inverses des puissances semblables des racines d'une équation en fonction des coefficients de cette équation.

Soit

$$z^p + A'_1 z^{p-1} + A'_2 z^{p-2} + \ldots + A'_{p-1} z + A'_p = 0$$

l'équation dont les racines $z'_1, z'_2, \ldots z'_p$ sont les inverses des racines de l'équation proposée. On a, d'une manière générale,

$$A'_i = \frac{A_{p-i}}{A_p}.$$

La formule (3) peut donc s'écrire, en effaçant les accents des racines z' et des coefficients A',

$$(4) \quad \sum z_\alpha^n = (-1)^n n \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+1} \frac{C_n^{i-1}}{n-i+1} \cdot \Sigma A_{q_1} A_{q_2} \ldots A_{q_{n-i+1}}$$

le signe $\sum\limits_n$ s'étendant, pour chaque valeur de i, à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des indices $q_1, q_2, \ldots, q_{n-i+1}$ susceptibles de vérifier la condition

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-i+1} = n.$$

On doit prendre d'ailleurs

$$A_{q_k} = 1 \quad \text{pour} \quad q_k = 0$$

$$A_{q_k} = 0 \quad \text{pour} \quad q_k > p.$$

La formule (4) donne une expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation en fonction des coëfficients de cette équation, différente de celle qui constitue la formule de Waring.

Celle-ci est plus élégante sans doute, mais d'une démonstration moins facile. La comparaison des deux formules fait apparaître l'identité remarquable que voici (*)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{(-1)^{n-i+1} C_n^{i-1}}{n-i+1} \sum_n A_{q_1} A_{q_2} \ldots A_{q_{n-i+1}}$$

$$= \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2 \ldots \lambda_p} \Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p)}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1) \ldots + \Gamma(\lambda_p+1)} A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \ldots A_p^{\lambda_p},$$

le signe Σ s'étendant, dans le second membre, à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des exposants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ susceptibles de vérifier la condition

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + p\lambda_p = n.$$

(*) Voir l'*Algébre Supérieure* de Serret, 5.e édit., t. I, pag. 449.

Si l'on arrivait à démontrer directement cette identité, la méthode précédente aboutirait à la formule élégante de Waring, mais une pareille démonstration ne semble pas chose facile, et nous ne l'avons même pas tentée.

BIBLIOGRAPHIA

J. A. Serrasqueiro. — *Tratado de Geometria elementar,* 4.ª edição. — Coimbra, 1886.

—— *Tratado elementar de Arithmetica,* 7.ª edição. — Coimbra, 1886.

—— *Elementos de Algebra,* 2.ª edição. — Coimbra, 1886.

Continúa a merecer a attenção do publico a excellente collecção de compendios de Mathematica do sr. Serrasqueiro, como prova a rapidez com que se esgotam as edições.

Dos dois primeiros livros fallámos na pag. 122 do tomo v d'este jornal, e nada temos hoje a accrescentar.

No terceiro o auctor expõe a parte da Algebra elementar que é exigida para o 3.º anno do Curso dos Lyceus; isto é, a theoria das operações algebricas, a resolução das equações do primeiro grão a uma e a muitas incognitas, a resolução das desigualdades do primeiro grão, a resolução das equações do segundo grão, e finalmente a doutrina dos juros compostos e das annuidades.

L. P. da Motta Pegado. — *Tratado elementar de Arithmetica,* 4.ª edição. — Lisboa, 1886.

Clareza, boa ordem na distribuição das doutrinas, rigor nas demonstrações, são dotes que tornam recommendavel o livro do illustre professor da Escola Polytechnica de Lisboa, cujo nome é bem conhecido por trabalhos publicados nas collecções da Academia das Sciencias.

No primeiro livro o auctor tracta das operações sobre inteiros, fazendo notar logo as propriedades combinatorias das operações, preparando assim os alumnos para comprehenderem as generalisações successivas da noção do numero.

No livro segundo vêem os caracteres de divisibilidade, as theorias do maior divisor commum e do menor multiplo commum de dois ou mais numeros, e a decomposição dos numeros em factores primos; e no livro quarto a doutrina das fracções e da dizima, sendo os theoremas relativos á dizima periodica tractados com todo o rigor e clareza.

No livro seguinte tracta o auctor das raizes dos numeros inteiros e fraccionarios. N'este livro é exposta rapidamente a theoria das quantidades incomensuraveis, que o auctor considera como limites de quantidades comensuraveis.

Segue-se, no livro quinto, a doutrina das proporções, progressões e logarithmos.

Termina aqui a primeira parte, destinada ao estudo dos numeros abstractos; e principia a segunda, dedicada aos numeros concretos, onde o auctor se occupa das medidas e moedas legaes de Portugal, das operações sobre numeros concretos, das applicações da Arithmetica aos problemas de regra de trez, de reducção de moedas, de juros simples e compostos, de cambio, de companhia, etc.

Termina o livro com um appendice importante, onde o auctor estuda os diversos systemas de numeração, algumas propriedades menos elementares dos numeros, e finalmente a questão importantissima das approximações numericas e das operações abreviadas.

Cada doutrina é acompanhada de numerosos e bem escolhidos exercicios para os alumnos se desenvolverem no calculo arithmetico.

Aarão F. de Lacerda. — *Equações geraes de Thermodynamica.* — Coimbra, 1886.

O assumpto bello e difficil que o auctor escolheu para a sua Dissertação inaugural, para obter o grão de doutor em philosophia, tem sido tractado por muitos geometras e physicos eminentes em trabalhos espalhados pelas collecções scientificas mais importantes da Europa. Era, pois, da maior utilidade formar com estes trabalhos uma monographia, onde o leitor os encontrasse reunidos com boa ordem e expostos com clareza. É o que o auctor fez no seu excellente opusculo.

No primeiro capitulo vêem as fórmulas relativas ao movimento estacionario, a significação mechanica provavel das equações fundamentaes da thermodynamica, e as equações differenciaes do movimento radiante no ether livre.

No capitulo segundo deduz o auctor as principaes relações que ligam os coefficientes thermicos, e faz applicação das formulas achadas ao calculo do equivalente mechanico do calor, aos phenomenos de dissolução e ao estudo do escoamento dos fluidos.

No capitulo terceiro vêem as hypotheses de Rankine, Hirn e Clausius relativas á relação entre a pressão de um gaz, o volume e a temperatura.

Finalmente no ultimo capitulo vêem as applicações dos estudos anteriores á machina a vapor.

E. N. Legnazzi. — *Del catasto romano e di alcuni strumenti antichi di Geodesia.* — Padova, 1886.

Contém este volume o discurso pronunciado pelo sabio professor da Universidade de Padua, no dia da inauguração dos estudos, e ahi expõe os resultados a que chegou, depois de longas indagações, a respeito da historia do cadastro romano, e dos instrumentos antigos de Geodesia, principalmente dos empregados para a formação d'este cadastro. Ao discurso seguem-se 114 notas interessantes, desenvolvendo pontos que o auctor no discurso só podéra indicar.

Gino Loria. — *Studi sulla teoria delle coordinate triangolari et sulla Geometria analitica di un piano nello spazio* (*Giornale de Battaglini*, t. XXIV).

Generalisando um methodo devido ao eminente geometra allemão Joachimsthal, o sr. G. Loria, bem conhecido dos leitores d'este jornal por alguns artigos com que o tem illustrado, dá um methodo geometrico fundado no theorema: *as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer d'um plano são exprimiveis como funcções lineares de tres dos seus pontos.*

No primeiro capitulo é demonstrado este theorema, e é definido o systema de coordenadas tringulares a que elle dá origem. Nos seguintes são estudadas a recta, o circulo e as secções conicas, terminando por algumas applicações das formulas achadas a alguns problemas de Geometria.

Dr Novarese. — *Di una analogia fra la teorica delle velocità et la teorica delle forze* (*Atti della Accademia di Torino,* t. XXI).

Gino Loria. — *Sur une démonstration du théorème fundamental de la théorie des équations algébriques* (*Acta Mathematica,* t. IX).

E. Cesàro. — *La rutura del diamante* (*Giornale de Battaglini,* t. XXIV).

——*Intorno ad una pretesa dimostrazione di termodynamica* (*Giornale de Battaglini,* t. XXIV).

G. T.

SOBRE A FÓRMULA DE TAYLOR

POR

J. Bruno de Cabedo

(Professor na Universidade de Coimbra)

O fim da presente nota é demonstrar com toda a generalidade a observação de Cauchy relativa ao facto de uma serie convergente nem sempre representar a funcção que a originou, e, como consequencia, substituir nas applicacões da fórmula de Taylor a formação e discussão do resto por uma analyse mais facil.

Theorema I. — *Se no intervallo de* x_1 *a* x_2, $f(x)$ *é uma funcção finita e determinada como todas as suas derivadas successivas e é, além d'isto,*

$$\lim_{n=\infty} \frac{(x-x_1)}{1.2...n} f^n[x_1+\theta(x-x_1)] = \lim_{n=\infty} R_n = 0;$$

dentro do mesmo intervallo a serie

$$f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+\ldots+\frac{(x-x_1)^i}{1.2\,..i} f^i(x_1)+\ldots$$

será convergente e terá por somma $f(x)$.

Com effeito, tendo logar n'este caso a fórmula

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+\ldots+\frac{(x-x_1)^{n-1}}{1.2...(n-1)}f^{n-1}(x_1)+R_n$$

ou, para mais simplicidade,

$$f(x)=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+R_n \ldots\ldots\ldots (1)$$

qualquer que seja n, teremos

$$f(x)=\lim_{n=\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})+\lim_{n=\infty} R_n \ldots\ldots (2)$$

Se a parcella $\lim\limits_{n=\infty} R_n$ é nulla, poderemos pôr, e só então

$$f(x)=\lim_{n=\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})=\Sigma u_i.$$

Para demonstrar agora a convergencia da serie precedente, a equação (1) dá-nos successivamente

$$f(x)=u_0+u_1+\ldots+u_{j-1}+R_j$$

$$f(x)=u_0+u_1+\ldots+u_{j-1}+u_j+u_{j+1}+\ldots+u_{j+k-1}+R_{j+k},$$

d'onde se tira

$$u_j+u_{j+1}+\ldots+u_{j+k-1}=R_j-R_{j+k}.$$

Posto isto, para que a serie considerada seja convergente, é necessario e sufficiente que, dada uma quantidade de valor absoluto ε, tão pequeno quanto se queira, se possa determinar um inteiro j para o qual se tenha

$$\mathrm{mod}\,(u_j+u_{j+1}+\ldots+u_{j+k-1})=\mathrm{mod}\,(R_j-R_{j+k})<\varepsilon$$

por maior que seja k.

Ora esta determinação é possivel, pois, se j verificar a desegualdade $\mathrm{mod}\, R_j < \frac{1}{2}\varepsilon$, será *a fortiori* $\mathrm{mod}\, R_{j+k} < \frac{1}{2}\varepsilon$, e, consequentemente, satisfeita a relação precedente.

Theorema II. — *A convergencia da serie Σu_i não envolve em si a existencia da equação* $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$, visto que $\mathrm{mod}\,(R_j - R_{j+k})$ póde convergir para zero á medida que j cresce sem que a mesma convergencia tenha logar para R_j e R_{j+k}.

Observação de Cauchy. — *Se Σu_i é uma serie convergente nem sempre será* $f(x) = \Sigma u_i$; pois, pelo que precede, este caracter não é sufficiente para na equação (2) se considerar nulla a parcella $\lim\limits_{n=\infty} R_n$.

Para definirmos as funcções a que se applica esta observação, considere-se a condição de convergencia $\lim\limits_{j=\infty} (R_j - R_{j+k}) = 0$, que dará

$$R_j = (\rho + r)_j = \rho_j + r_j,$$

sendo ρ_j, para qualquer valor inteiro e positivo do seu indice incluindo zero, constantemente egual a uma funcção determinada $\varphi(x)$, e r_j um infinitamente pequeno ao mesmo tempo que $\frac{1}{j}$.

Posto isto, sendo na nossa decomposição $\rho_0 = \rho_j$, a parte de $f(x)$ d'onde provém ρ_j será $\varphi(x)$ e ter-se-ha o systema de equações

$$\varphi(x) = \rho_0,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + \rho_1,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + (x - x_1)\varphi'(x_1) + \rho_2,$$

. . . .

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + (x - x_1)\varphi'(x_1) + \ldots + \frac{(x - x_1)^{j-1}}{1.2\ldots(j-1)}\varphi^{j-1} + \rho_j,$$

*

das quaes se tira

$$\varphi(x_1)=0,\ \varphi'(x_1)=0,\ \ldots\ \varphi^{j-1}(x_1)=0.$$

Como j é tão grande quanto se quer, as equações precedentes mostram que $\varphi(x)$ será uma funcção com um numero infinito de zeros eguaes a x_1.

Relativamente ao termo complementar r_j, elle provém de uma funcção susceptivel de ser desenvolvida em serie segundo a fórmula de Taylor.

Convém advertir que a existencia da funcção $\varphi(x)$ não só é sufficiente mas tambem necessaria, porque outra qualquer decomposição de R_j é sempre reductivel á que adoptámos.

Podemos portanto enunciar o seguinte

THEOREMA III. — *Se Σu_i é uma serie convergente no intervallo de x_1 a x_2, e nenhuma das parcellas de $f(x)$ admitte um numero infinito de raizes eguaes a x_1, no mesmo intervallo será $f(x)=\Sigma u_i$.*

A applicação da fórmula de Taylor ao desenvolvimento em serie de uma funcção torna-se agora muito simples. A analyse de cada uma das parcellas $\psi_n(x)$ de $f(x)$ reduzir-se-ha á determinação facil do verdadeiro valor de $\frac{\psi_n(x)}{(x-x_1)^n}$ para $x=x_1$ e $n=\infty$. Relativamente á determinação do limite x_2 de convergencia, para as series a que nos conduz esta fórmula, faz-se pelos theoremas geraes com a mesma facilidade.

Para exemplificar esta doutrina, consideremos a menor determinação da funcção arc tang x. Como a serie

$$\Sigma \frac{1}{1.2\ldots n} f^n(0)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

é convergente para todos os valores de x comprehendidos entre -1 e $+1$, n'este intervallo será

$$\text{arc tang}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,$$

por ser a partir de $n=1$

$$\left(\frac{\text{arc tang}\, x}{x^n}\right)_0 = \infty .$$

Nota. — A discussão da serie Σu_i exige, é verdade, o conhecimento da derivada da ordem de $f(x)$ para o valor particular $x=x_1$; mas, como se sabe, a solução d'este problema é muito mais extenso que para um valor qualquer x.

APPLICAÇÕES DA FORMULA QUE DÁ AS DERIVADAS DE ORDEM QUALQUER DAS FUNCÇÕES DE FUNCÇÕES

POR

F. GOMES TEIXEIRA

Sejam dadas as funcções

$$(1) \qquad y=f(u), \quad u=\varphi(x).$$

É bem conhecida a fórmula que dá a expressão da derivada de ordem n de y relativamente a x:

$$(3) \qquad y^{(n)}=\Sigma \frac{n!\,\frac{d^iy}{du^i}(u')^a(u'')^b\ldots(u^{(n)})^l}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b(3!)^l\ldots(n!)^l},$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$a+2b+3c+\ldots+nl=n,$$

e onde é

$$i=a+b+\ldots+l.$$

O fim d'este artigo é deduzir por meio d'esta fórmula algumas fórmulas conhecidas de analyse, que é costume obter por processos diversos.

Em outro artigo faremos algumas applicações de outra fórmula mais geral relativa á derivada de ordem n das funcções compostas, que publicámos no *Giornale di Matematiche* de Battaglini (t. XVIII).

I

Polynomios de Legendre

I. Sabe-se que os polynomios de Legendre são os coefficientes X_0, X_1, X_2, etc. do desenvolvimento em serie

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 u + X_2 u^2 + \ldots + X_k u^k + \ldots,$$

que é convergente quando u é, em valor absoluto, menor do que a menor das raizes da equação

$$1 - 2ux + u^2 = 0.$$

Applicando á funcção y a fórmula (2), vem

$$y^{(k)} = \Sigma \frac{k!\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-i+1\right)}{a!\,b!\,2^b}(-2x+2u)^a.2^b.y^{-\frac{1}{2}-i}$$

$$= \Sigma(-1)^b.\frac{k!\,1.3.5\ldots(2i-1)\,(x-u)^a}{a!\,b!\,2^b}y^{-\frac{1}{2}-i},$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$a + 2b = k,$$

e onde é

$$i = a + b.$$

Pondo $u = 0$, vem a fórmula

$$X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!} = \Sigma(-1)^b \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{a!\,b!\,2^b}x^a$$

ou

$$(3)\qquad X_k = \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{1.3.5\ldots(2k-2b-1)}{(k-2b)!\,b!\,2^b} x^{k-2b},$$

que serve para calcular os polynomios de Legendre.

II. Derivando k vezes a identidade

$$(x^2-1)^k = \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{k(k-1)\ldots(k-b+1)}{b!} x^{2k-2b},$$

vem

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$$

$$= \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{k(k-1)\ldots(k-b+1).(2k-2b)(2k-2b-1)\ldots(k-2b+1)}{b!} x^{k-2b}$$

$$= \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{k(k-1)\ldots(k-b+1).(2k-2b)!}{b!\,(k-2b)!} x^{k-2b},$$

ou, separando os factores pares dos impares no producto $(2k-2b)!$,

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$$

$$= \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{1.3.5\ldots(2k-23-1).2^{k-b}.k!}{b!\,(k-2b)!} x^{k-2b}.$$

Comparando esta fórmula com a fórmula (3) acha-se a formula conhecida

$$X_k = \frac{1}{k!\,2^k} \cdot \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k.$$

II

Fórmula de Jacobi

Procuremos a derivada de ordem $n-1$ da funcção

$$y=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

Applicando a fórmula (3), vem

$$y^{(n-1)}=\Sigma\frac{(n-1)!\left(n-\frac{1}{2}\right)\dots\left(n-\frac{1}{2}-i+1\right)(-2x)^a(-2)^b(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}-i}}{a!\,b!\,(2!)^b},$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$a+2b=n-1,$$

e onde é

$$i=a+b.$$

Temos pois a fórmula

$$y^{(n-1)}=\Sigma\frac{(-1)^{n-1-b}(n-1)!\,(2n-1)\dots(2b+3)\,x^{n-1-2b}(1-x^2)^{b+\frac{1}{2}}}{(n-1-2b)!\,b!\,2^b}$$

$$=(-1)^{n-1}.\frac{1.3\dots(2n-1)}{n}\Sigma(-1)^b.\frac{n!\,x^{n-1-2b}(1-x^2)^{b+\frac{1}{2}}}{1.3\dots(2b+1)(n-1-2b)!\,b!\,2^b},$$

que, por ser

$$2^b\times1.2.3\dots b\times1.3\dots(2b+1)=(2b+1)!$$

dá

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n}$$

$$\times \Sigma (-1)^b \cdot \frac{(n-2b) \ldots n x^{n-1-2b} (1-x^2)^{b+\frac{1}{2}}}{(2b+1)!}.$$

Pondo agora $x = \cos \omega$, vem

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n}$$

$$\times \Sigma (-1)^b \cdot \frac{(n-2b) \ldots n \cos^{n-1-2b} \omega \operatorname{sen}^{b+\frac{1}{2}} \omega}{(2b+1)!},$$

ou, em virtude de uma fórmula bem conhecida de Trigonometria,

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n} \operatorname{sen} n (\operatorname{arc} \cos x),$$

resultado devido a Jacobi.

III

Desenvolvimento em serie de arc (tang x).

A funcção

$$y = \operatorname{arc} (\operatorname{tang} x)$$

dá

$$y' = (1 + x^2)^{-1},$$

e portanto, applicando a fórmula (3), vem

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(n-1)!\, i!\, (2x)^a (1+x^2)^{-1-i}}{a!\, b!},$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$a+2b=n-1,$$

e onde é

$$i=a+b.$$

Temos pois

$$y^{(n)}=\Sigma\left\{\begin{matrix}(-1)^{n-1-b}\cdot\dfrac{(n-1)!\,(n-1-b)!}{(n-1-2b)!\,b!}\\ \times(2x)^{n-1-2b}\,(1+x^2)^{b-n}\end{matrix}\right\},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de β, desde zero até ao maior inteiro contido em $\frac{n-1}{2}$.

Pondo agora $x=0$, temos:

1.º Se *n é impar*, todos os termos da fórmula se annullam, excepto aquelle que corresponde a $n-1-2\beta=0$; e teremos portanto

$$y_0{}^{(n)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot(n-1)!$$

2.º *Se n é par*, o expoente $n-1-2\beta$ não póde ser nullo e portanto teremos

$$y_0{}^{(n)}=0.$$

Applicando agora a fórmula de Maclaurin, vem

$$\text{arc}\,(\text{tang}\,x)=x-\frac{x^3}{3}+\ldots\pm\frac{x^{n-1}}{n-1}+\text{R}_n,$$

onde

$$\text{R}_n=\frac{x^n}{n}\,\Sigma\left\{\begin{matrix}(-1)^{n-1-b}\cdot\dfrac{(n-1-b)!}{(n-1-2b)!\,b!}\\ \times(2\theta x)^{n-1-2b}\,(1+\theta^2x^2)^{b-n}\end{matrix}\right\}.$$

Temos pois

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{b!} \cdot \frac{(2\theta x)^{n-1-2b}}{(1+\theta^2 x^2)^{n-b}}$$

ou

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{b!} \cdot \frac{1}{(2\theta x)^{b+1}} \cdot \left(\frac{2\theta x}{1+\theta^2 x^2}\right)^{n-b}.$$

A primeira d'estas desegualdades, no caso de ser $x < \frac{1}{2}$ (em valor absoluto), e a segunda no caso de ser $x > \frac{1}{2}$ e < 1 (em valor absoluto) dão

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{b!} < \frac{x^n}{n} e,$$

d'onde se conclue que o resto R_n tende para zero quando n tende para o infinito.

IV

Desenvolvimento em serie de sen (sen x), cos (sen x), *etc.*

Seja

$$y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x),$$

ou

$$y = \operatorname{sen} u, \quad u = \operatorname{sen} x,$$

e portanto, em virtude da formula (3),

$$\frac{y^{(n)}}{n!} = \Sigma \frac{\operatorname{sen}\left(u + i\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}^a\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}^b\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \dots}{a!\, b! \dots l!\, (2!)^b \dots (n!)^l}$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação

$$a + 2b + \dots + nl = n,$$

e onde é

$$i=a+b+\ldots+l.$$

Pondo $x=0$, vem

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}=\Sigma\frac{\operatorname{sen} i\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}^a\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}^b 2\frac{\pi}{2}\ldots}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l}$$

onde o producto

$$\operatorname{sen} i\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}^a\frac{\pi}{2}\ldots\operatorname{sen}^l n\frac{\pi}{2}$$

é egual a zero, ou a $+1$, ou a -1.

Esta fórmula dá os coefficientes do desenvolvimento de sen (sen x) em serie ordenada segundo as potencias de x. O resto é dado pela fórmula

$$R_n=x^n\Sigma\frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\theta x+i\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^a\left(\theta x+\frac{\pi}{2}\right)\ldots}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l}$$

e vê-se que tende para zero á medida que n tende para o infinito, quando é $x<1$ (em valor absoluto), por ser

$$R_n<\frac{x^n}{n!}\Sigma\frac{n!}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l},$$

e

$$\frac{1}{n!}\Sigma\frac{n!}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l}$$

tender para o limite zero (*).

Do mesmo modo se desenvolvem as funcções sen (cos x), cos (cos x) e cos (sen x).

(*) Ve-a pag. 41 d'este volume.

V

Desenvolvimento em serie de e^{e^x}.

A funcção

$$y = e^{e^x},$$

ou

$$y = e^u, \quad u = e^x,$$

dá, em virtude da fórmula (3),

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!\, e^u\, e^{ix}}{a!\, b! \ldots l!\, (2!)^b \ldots (n!)^l},$$

onde é

$$a + 2b + \ldots + nl = n$$

$$i = a + b + \ldots + l.$$

Pondo $x = 0$, vem

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!} = e\, \Sigma \frac{1}{a!\, b! \ldots l!\, (2!)^b \ldots (n!)^l}.$$

Esta fórmula dá os coefficientes do desenvolvimento em serie da funcção considerada; o resto é dado pela fórmula

$$R_n = \Sigma \frac{e^{e^{\theta x}}\, e^{i\theta x}}{a!\, b! \ldots l!\, (2!)^b \ldots (n!)^l}\, x^n,$$

e tende para zero á medida que n tende para o infinito, quando é $xe^x < 1$, por ser

$$R_n < e^{e^{\theta x}} \cdot \frac{(xe^x)^n}{n!} \Sigma \frac{n!}{a!\, b! \ldots l!\, (2!)^b \ldots (n!)^l},$$

e os factores

$$(xe^x)^n, \quad \Sigma \frac{1}{a!b!\ldots l!(2!)^b\ldots(n!)^l},$$

tenderem para zero.

VI

Numeros de Bernoulli

Consideremos a funcção

$$y=(1+e^x)^{-1}$$

e procuremos primeiro o valor que toma $y^{(2n-1)}$ quando é $x=0$. Temos, applicando a fórmula (3),

$$y^{(2n-1)}=\Sigma \frac{(-1)^i(2n-1)!\,i!\,e^{ix}(1+e^x)^{-i-1}}{a!b!\ldots l!(2!)^b(3!)^c\ldots(2n-1\,!)^l}$$

onde a, b, ..., l representam todas as soluções inteiras positivas da equação

$$a+2b+\ldots+(2n-1)l=2n-1$$

e onde é

$$i=a+b+\ldots+l;$$

e portanto, pondo $x=0$,

$$y_0{}^{(2n-1)}=\Sigma \frac{(-1)^i(2n-1)!\,i!}{2^{i+1}a!b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(2n-1\,!)^l}.$$

Os *numeros de Bernoulli* estão ligados com $y_0{}^{(2n-1)}$ por meio da relação

$$B_{2n-1}=(-1)^n\cdot\frac{2n}{2^{2n}-1}\,y_0{}^{(2n-1)},$$

de modo que temos

$$B^{2n-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}-1} \Sigma (-1)^{i+n} \frac{i!}{2^{i+1} a! b! \ldots l! (2!)^b \ldots (2n-1!)^l}.$$

Por esta fórmula póde-se calcular os numeros de Bernoulli, ou achar uma fórmula mais propria para o mesmo fim.

Com effeito, applicando a fórmula (3) á funcção

$$\frac{1}{i!} \left(\frac{d^{2n-1} (e^x - 1)^i}{dx^{2n-1}} \right)_{x=0}$$

vem o resultado

$$\Sigma' \frac{(2n-1)!}{a! b! \ldots l! (2!)^b \ldots (2n-1)^l},$$

onde o sommatorio Σ' se refere aos valores de $a, b, \ldots, l$ que satisfazem ás equações simultaneas

$$a + 2b + \ldots + (2n-1) l = 2n-1, \quad a + b + \ldots + l = i.$$

Temos pois

$$B_{2n-1} = \frac{n}{2^{2n}-1} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i+n} \cdot \frac{i!}{2^i} \Sigma' \frac{(2n-1)!}{a! b! \ldots l! (2!)^b \ldots (2n-1!)^l}$$

$$= \frac{n}{2^{2n}-1} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i+n} \cdot \frac{1}{2^i} \left(\frac{d^{2n-1} (e^x - 1)}{dx^{2n-1}} \right)_{x=0};$$

ou, pondo

$$(e^x - 1)^i = e^{ix} - e^{(i-1)x} + \binom{i}{2} e^{(1-2)x} - \ldots,$$

$$B_{2n-1} = \frac{n}{2^{2n}-1} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i+n}$$

$$\frac{1}{2^i} [i^{2n-1} - i (i-1)^{2n-1} + \binom{i}{2} (i-2)^{2n-1} - \ldots].$$

VII

Numeros de Euler

I. Applicando a fórmula (3) á funcção

$$y=(\cos x)^{-1}$$

vem

$$y^{(n)}=\Sigma(-1)^i.\frac{n!\,i!\cos^a\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos^b\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)\dots\cos^l\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}{a!\,b!\dots l!\,(2!)^b\dots(n!)^l\cos^{i+1}x}.$$

Os *numeros de Euler* são os valores que toma esta derivada quando se faz $x=0$, e temos portanto a fórmula

$$C_{2n}=\Sigma(-1)^i.\frac{(2n)!\,i!\cos^a\frac{\pi}{2}\cos^b 2\frac{\pi}{2}\dots\cos^l 2n\frac{\pi}{2}}{a!\,b!\dots l!\,(2!)^b\dots(2n!)^l},$$

onde é

$$a+2b+\dots+2nl=2n,\quad i=a+b+\dots+l,$$

que serve para calcular estes numeros. N'esta fórmula é evidentemente

$$\cos^a\frac{\pi}{2}.\cos^b 2\frac{\pi}{2}\dots\cos^l 2n\frac{\pi}{2}=0,\ \text{ou}\ +1,\ \text{ou}\ -1,$$

segundo os valores que tiverem a, b, c, etc.

II. Consideremos agora a funcção mais geral

$$y=(\cos x)^{-p}.$$

Applicando a fórmula (3) vem

$$y^{(n)}=\Sigma(-1)^i.\frac{n!p(p+1)\dots(p+i-1)\cos^a\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\dots\cos^l\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}{a!b!\dots l!(2!)^b\dots(n!)^l\cos^{i+p}x};$$

e pondo $x=0$ e chamando C_{2n} o coefficiente de $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ no desenvolvimento de $(\cos x)^{-p}$ em serie, vem

$$C_{2n}=\Sigma(-1)^i.\frac{(2n)!p(p+1)\dots(p+i-1)\cos^a\frac{\pi}{2}\dots\cos^l 2n\frac{\pi}{2}}{a!b!\dots l!(2!)^a\dots(2n!)^l},$$

onde

$$a+2b+\dots+2nl=2n,\quad i=a+b+\dots+l.$$

D'esta fórmula vamos tirar um theorema que demonstrámos no nosso artigo — *Sur les nombres de Bernoulli* (*American Journal of Mathematics*, t. VII).

Pondo $p=p'+1$ e notando que o numero

$$\frac{(2n)!}{a!b!\dots l!(2!)^b\dots(2n!)^l}$$

é inteiro, e que

$$p(p+1)\dots(p+i-1)=(p'+1)(p'+2)\dots(p'+i)$$

$$=\text{multiplo de } p'+i!,$$

vem

$$C_{2n} = \text{multiplo de } p' + E_{2n}$$

ou

$$C_{2n} \equiv E_{2n} \pmod{p-1}.$$

VIII

Derivadas do quociente de duas funcções

Seja dada a funcção

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \varphi(x)\,[\psi(x)]^{-1}.$$

Applicando a fórmula de Leibnitz, virá

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{h!\,(n-h)!}\,\varphi^{n-h}(x) \,.\, \frac{d^h[\psi(x)]^{-1}}{dx^h};$$

mas temos

$$\frac{d^h[\psi(x)]^{-1}}{dx^h} = \Sigma(-1)^i \,.\, \frac{l!\,i!\,[\psi'(x)]^a[\psi''(x)]^b \ldots [\psi^{(n)}(x)]^l}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(h!)^l}\,[\psi(x)]^{1-i}$$

onde

$$a + 2b + \ldots + lh = h, \quad i = a + b + \ldots + l.$$

Logo teremos

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{(n-h)!}\,\Sigma\,\varphi^{n-h}(x)\,\Sigma(-1)^i \frac{i!\,[\psi'(x)]^a \ldots [\psi^l(x)]^l\,[\psi(x)]^{n-1}}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(h!)^l}.$$

*

IX

Derivadas das funcções inversas

Se for

$$y = f(x), \quad x = F(y)$$

virá

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'[F(y)]} = \frac{1}{\psi(y)}$$

e portanto

$$\frac{d^n x}{dy^n} = \Sigma (-1)^i \frac{(n-1)!\, i!\, [\psi'(y)]^a [\psi''(y)]^b \ldots [\psi^{n-1}(y)]^l}{a!\, b! \ldots l\, (2!)^b \ldots (n-1!)^l [\psi(y)]^{-1-i}},$$

onde a somma designada por Σ se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$a + 2b + \ldots + (n-1)\, l = n - 1$$

e onde é

$$i = a + b + \ldots + l.$$

X

Mudança da variavel independente

Seja

$$u = f(x), \quad y = F(x),$$

e procuremos a derivada de ordem n de u relativamente a y.

A fórmula (3) dá, derivando u relativamente a y considerando x como funcção de y,

$$\frac{d^n u}{dy^n} = \Sigma \frac{n!\, f^n(x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^{a'} \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{b'} \cdots \left(\frac{d^nx}{dy^n}\right)^{l'}}{a'!\, b'! \ldots l'!\, (2!)^{b'} \ldots (n!)^{l'}},$$

onde é

$$a' + 2b' + \ldots nl' = n, \quad i = a' + b' + \ldots + l',$$

onde se deve substituir $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, etc. pelos seus valores obtidos no paragrapho anterior.

BIBLIOGRAPHIA

Ligação do observatorio astronomico de Lisboa com a triangulação fundamental. — *Lisboa, 1886.*

Contém esta importante memoria, publicada pela *Direcção geral dos trabalhos geodesicos*, a descripção da serie de operações feitas debaixo da direcção intelligente do sr. Brito Limpo, para ligar o observatorio astronomico de Lisboa á triangulação fundamental portugueza, e portanto á triangulação que se extende sem interrupção sobre toda a superficie da Europa.

Além das tabellas das observações feitas para o fim que se tinha em vista, enriquecem este bello trabalho as descripções dos methodos empregados nas observações e nos calculos posteriores.

No primeiro capitulo descreve-se a triangulação empregada e o methodo seguido nas observações. Em seguida vêem desenvolvidamente expostos o methodo para achar as direcções mais provaveis dos pontos observados de uma estação geodesica; e o methodo empregado para a compensação da rêde trigonometrica, isto é, o methodo para fazer as correcções das direcções observadas de modo a satisfazer ás condições proprias das figuras geometricas que entram na rêde, e do systema polygonal que todas junctas constituem.

No segundo capitulo vem exposto o methodo pelo qual se acharam as differenças de nivel das estações, as tabellas d'estas observações, e o methodo para d'estas observações tirar os valores mais provaveis das differenças de nivel procuradas.

Finalmente, no terceiro capitulo vem a deducção dos resultados a que se pretendia chegar, isto é, a determinação das differenças entre as coordenadas geographicas do observatorio astronomico de Lisboa e o vertice — *Observatorio do Castello de S. Jorge* — da triangulação fundamental do reino.

G. Guccia. — Formole analitiche di alcune trasformazioni cremoniane delle figure plane (R. del Circolo Matematico di Palermo, t. I).

—— *Teoremi sulle trasformazioni cremoniane nel piano (Item).*

—— *Generalizzasione di un theorema di Nöether (Item).*

O objecto d'estas notas interessantes é o estudo da transformação geometrica, conhecida pelo nome de transformação cremoniana, do nome do geometra illustre que primeiro a estudou.

Na primeira o sr. Guccia, depois de enunciar o problema algebrico correspondente á transformação bi-racional entre dois espaços do mesmo numero de dimensões, considera especialmente o caso dos espaços com duas dimensões e dá a solução d'este problema para algumas soluções geometricas das equações indeterminadas a que conduz a transformação de ordem qualquer.

Na segunda nota o auctor occupa-se tambem da transformação cremoneana de ordem qualquer no caso dos espaços de duas dimensões, e ahi apresenta uma serie de proposições geometricas importantes, de que não se póde dar idéa em pequeno espaço.

Na terceira nota o illustre geometra extende aos systemas lineares do genero zero um theorema importante devido a Nöther, em virtude do qual toda a transformação bisracional entre dois planos se póde resolver em um numero finito de transformações quadraticas.

M. d'Ocagne. — Étude géométrique sur l'ellipse. — Paris, 1886.

Destina-se principalmente aos engenheiros este excellente opusculo do sr. d'Ocagne, onde a ellipse é estudada debaixo do ponto de vista da applicação que d'ella se faz muitas vezes para o intradorso dos arcos das pontes de pedra. N'este caso, para traçar as junctas na estampa que se é obrigado a fazer, é necessario construir muitas normaes á ellipse, e para esta construcção o auctor dá um processo ao mesmo tempo muito simples e que nunca póde sahir dos limites destinados ao desenho.

J. Deruyts. — *Sur une classe de polynômes analogues aux fonctions de Legendre* (*Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, t. XIV).

São estudados n'este bello trabalho os polynomios comprehendidos na formula

$$P_n = \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-p+1}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-q+1} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n+p-1}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{n+q-1}\right\}$$

onde a e b são constantes reaes differentes de zero, e p e q são quantidades positivas. Estes polynomios, que comprehendem como casos particulares os polynomios de Jacobi e os do sr. Hermite, têem propriedades analogas ás dos polynomios de Legendre.

Dr. Fr. Engel. — *Ueber die Definitions gleichungen der continuirlichen Transformations gruppen.* — *Leipzig. 1886.*

—— *Zur theorie der Berührungs transformationen* (*Mathematischen Annalen*, t. XXII).

O objecto da primeira memoria é a exposição d'um novo methodo para a determinação de grupos de transformações infinitesimaes, por meio das suas equações de definição. Esta ordem de transformações foi introduzida na analyse por Sophus Sie, que escreveu sobre o assumpto numerosas memorias. O auctor propõe-se generalisar os processos e os resultados do analysta dinamarquez, sem se preoccupar com a determinação dos typos de grupos de transformações, nem com a das suas fórmas normaes. A memoria começa por um resumo das principaes noções e proposições relativas á theoria d'estes grupos, em especial dos de transformações infinitesimaes; segue-se-lhe desenvolvidamente o estudo d'estas, nos aggregados simples e de ordem superior, terminando por alguns casos especiaes no espaço a 2 e n dimensões.

A segunda memoria, publicada nos *Mathematische Annalen*, refere-se ás transformações de contacto, cuja importancia para a theoria das equações differenciaes foi primeiro posta em relevo por Sophus Sie. O auctor teve em vista preencher uma lacuna, que até aqui havia n'esta theoria, e evidenciar a ligação intima que existe entre as differentes classes d'estas transformações. Para este fim estuda primeiro as transformações de 1.ª ordem e ordens superiores no espaço a 2 dimensões, e generalisa os seus resultados ao espaço de n dimensões.

M. d'Ocagne. — *De la déviation dans l'ellipse* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ème série, t. v).

—— *Sur certaines suites de fractions irréductibles* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. x).

—— *Sur les sous invariants des formes binaires* (*Item*).

E. Guccia. — *Sur les transformations Cremona dans le plan* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1885*).

—— *Sur les transformations géométriques planes birationelles* (*Item*).

—— *Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes* (*Item, 1886*).

F. Engel. — *Ueber die Abel'schen Relationen für die Theilwerthe der elliptischen functionen* (*Berichte der K. Sächs Gesellschaft der Wissenschaften, 1885*).

—— *Zur theorie der Zusammensetzung endlichen continuirlichen Transformationgruppen* (*Item, 1886*).

J. Deruyts. — *Sur le calcul approché de certaines intégrales definies* (*Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 1886*).

M. Lerch. — *Prispervky k theorii funkci elliptikych.* — *Prag, 1886.*

G. Eneström. — *Brevis för satsen, att den fullständiga integralen till en differensegvation of* n: *te ordningen innehaller* n *arbitrara konstanter.* — *Stockholm, 1886.*

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES SÉRIES

(Extraits d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

E. CESARO

Professeur à l'université de Palermo

.... Relativement aux limites des expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$, pour n infini, on sait déjà que, *si elles existent*, elles sont égales. Depuis Cauchy on sait en outre que, *si la première limite existe*, il en est de même de la seconde. M. Lerch vient de faire voir (pag. 79) que l'on ne peut affirmer, inversement, que, *si la seconde limite existe*, il doive en être nécessairement de même de la première; mais l'exemple qu'il cite est tellement compliqué qu'il me permettra, sans doute, d'y substituer le suivant:

$$q^2 + q^2 + q^4 + q^4 + q^6 + q^6 + q^8 + \ldots.$$

La série est convergente, si q est moindre que l'unité, en valeur absolue. On a, d'ailleurs, *lim.* $\sqrt[n]{u_n} = q$; mais le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne tend pas vers une limite déterminée, puisqu'il est égal à 1 ou à q^2, suivant que n est impair ou pair. De même, pour la série

$$q + q^2 + q^4 + q^5 + q^7 + q^8 + q^{10} + \ldots,$$

le rapport en question est q ou q^2, suivant la parité de n, mais $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $q\sqrt{q}$; .... Il est vra que M. Lerch se propose de montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut augmenter au-delà de toute limite, malgré la convergence de la série; mais alors je puis, à sa série, substituer celle-ci:

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\beta}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\beta}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\beta}+\ldots,$$

où $\beta>\alpha>1$. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers zéro ou vers l'infini, suivant que n est pair ou impair. Cependant la série est convergente, et l'on a *lim.* $\sqrt[n]{u_n}=1$ ....

.... En général, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers ν limites différentes, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$, suivant la forme de n, on peut affirmer que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite déterminée, et que cette limite est

$$\lambda_1^{\varpi_1}\lambda_2^{\varpi_2}\lambda_3^{\varpi_3}\ldots\lambda_\nu^{\varpi_\nu},$$

où ϖ_i représente la *fréquence,* dans le système des nombres entiers, de la forme de n, pour laquelle le rapport considéré tend vers λ_i, de sorte que l'on a toujours

$$\varpi_1+\varpi_2+\varpi_3+\ldots+\varpi_\nu=1.$$

On obtient, pour $\nu=1$, le théorème de Cauchy: pour $\nu=2$, et $\varpi_1=\varpi_2$, on voit que, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers deux limites différentes, λ et μ, suivant que n est pair ou impair, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\sqrt{\lambda\mu}$: c'est ce que l'on vérifie pour les deux premières séries, citées ci-dessus. Soient encore λ et μ les deux différentes limites de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; mais supposons que, pour faire tendre ce rapport vers μ, il faille attribuer à n des valeurs, dont la fréquence soit infiniment petite dans le système de nombres entiers. Alors $\sqrt[n]{u_n}$ tend

vers λ. C'est le cas de la série de M. Lerch ....
.... La remarque de M. Lerch me semble digne d'entrer dans l'enseignement, et je l'ai effectivement introduite dans le cours que je donne, cette année, à l'Université de Palermo: j'ai exposé, en outre, à la suite de la règle de Raabe, l'intéressant théorème que M. Cahen vient de faire connaître dans les *Nouvelles Annales* (novembre, 1886). Ce théorème n'est pas essentiellement nouveau, en ce sens qu'il est contenu dans la proposition générale, donnée par M. Tannery à la page 82 de son *Introduction à la théorie des fonction d'une variable;* mais il a cela de bon qu'il est plus accessible aux commençants ....
.... Revenant à la remarque de M. Lerch, j'ajouterai qu'une série peut être convergente, sans qu'il existe une limite pour $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ni pour $\sqrt[n]{u_n}$. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la série

$$\alpha+\beta^2+\alpha^3+\beta^4+\alpha^5+\beta^6+\alpha^7+\ldots,$$

où $\beta<\alpha<1$. On voit, d'une part, que $\sqrt[n]{u_n}$ est égal à α ou à β, suivant que n est impair ou pair. D'autre part, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0 ou vers $+\infty$, suivant que n est impair ou par. Il n'y a pas de contradiction avec la généralisation du théorème de Cauchy, donné plus haut, parce que, dans le cas actuel, l'expression trouvée pour la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ devient indéterminée, à cause de $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\infty$, ...
.... Permettez-moi encore de faire observer que, pour une forme convenable de u_n, le théorème de Cauchy équivaut à dire que, si la fonction $f(n)$ tend vers une limite déterminée, lorsque l'entier n augmente indéfiniment, on a

$$lim.\frac{1}{n}[f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)]=f(\infty).$$

Mais, d'après M. Lerch, le premier membre peut avoir une limite déterminée, sans qu'il en soit de même pour $f(n)$. Il suffit de faire, pour s'en convaincre, $f(n) = (-1)^n$. Si les valeurs de $f(n)$, pour n infini, sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$, suivant la forme de n, on a

$$lim. \frac{1}{n}[f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)] = \sum_{i=1}^{i=\nu} \lambda_i \tilde{\omega}_i,$$

où $\tilde{\omega}_i$ est la probabilité qu'un nombre entier, pris au hasard, appartienne au système de valeurs, pour lequel $f(n)$ tend vers λ_i, lorsque n devient infini. Je développerai, une autre fois, les conséquences arithmétiques de ce théorème. . . . .

. . . .

. . . .

. . . . . . Parmi les séries qui empêchent d'énoncer la réciproque du théorème de Cauchy, je puis encore citer de nombreuses séries arithmétiques. Ainsi, par exemple, $\theta(n)$ étant le *nombre des diviseurs* de n, nous savons que la série

$$\frac{\theta(1)}{1^m}+\frac{\theta(2)}{2^m}+\frac{\theta(3)}{3^m}+\frac{\theta(4)}{4^m}+\ldots$$

est convergente, si $m>1$, et qu'il en est de même, pour $m>2$, de la série

$$\frac{\int 1}{1^m}+\frac{\int 2}{2^m}+\frac{\int 3}{3^m}+\frac{\int 4}{4^m}+\ldots,$$

où $\int n$ représente la *somme des diviseurs* de n. Pour ces deux séries, $\sqrt[n]{u_n}$ a l'unité pour limite. Mais, dans la première, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend à ne pas rester au-dessous de 2, lorsque n parcourt la série des nombres premiers. Si, au contraire, c'est à $n+1$ qu'on attribue des valeurs premières, le rapport dont il s'agit est inférieur à $\frac{1}{2}$. Le contraire a lieu lorsqu'on remplace $\theta(n)$ par la fonction de Gauss, $\varphi(n)$. Quant à la seconde série, on remarquera que la fonction $\frac{1}{n}\int n$ est toujours supérieure à 1, qu'elle devient égale à 2, lorsque n est un *nombre parfait;* mais qu'elle peut être rendue plus grande que toute quantité donnée, N, bien que cela devienne de moins en moins probable, à mesure que N croît. Dans les conditions qui ont été envisagées pour la première série, le rapport de deux termes consécutifs tend à ne pas rester au-dessous de $\frac{3}{2}$, ou, suivant les cas, à rester moindre que $\frac{2}{3}$. Du reste, dans les deux séries, le rapport en question peut devenir aussi grand qu'on le veut, ou bien s'approcher de zéro autant qu'on le désire. . . . . Dans l'égalité

$$lim. \frac{1}{n}[f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)]=f(\infty),$$

où, naturellement, on admet que $f(\infty)$ ait une valeur déterminée, supposons que $f(n)$ soit la somme S_n des n premiers termes d'une série convergente. On a, pour n infini,

$$lim. \frac{1}{n}(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n)=S,$$

d'où l'on déduit

$$lim. \frac{1}{n}(u_1+2u_2+3u_3+\ldots+nu_n)=0.$$

De même, pour $f(n)=nu_n$, *si* nu_n *tend vers une limite* λ, on a, en vertu du dernier résultat, $\lambda=0$. Ainsi, *dans toute série convergente,* nu_n *ne peut tendre vers une limite différente de zéro.* Ce théorème est mal énoncé par quelques auteurs, qui semblent ne pas se douter qu'une série peut être convergente, sans que nu_n ait une limite. Il est évidemment possible que cela arrive lorsque la fonction nu_n est soumise, pour n croissant à l'infini, à des oscillations convenables, qui lui permettent *sans cesse* de s'approcher indéfiniment de zéro, ou bien d'atteindre cette valeur. On voit, en outre, que, contrairement à ce que l'on suppose dans les traités, il n'est pas indispensable que la série soit *à termes positifs*. De sorte que, si l'on trouve, dans une série *quelconque*, que le produit nu_n tend vers une limite finie et déterminée, autre que zéro, ou bien qu'il oscille dans un intervalle qui ne contient ni zéro, ni des quantités indéfiniment voisines de zéro, on peut affirmer que la série proposée n'est pas convergente............ .... Il est très-facile qu'une série soi convergente, malgré que la limite de nu_n n'existe pas: il suffit de citer les séries simplement convergentes, déduites de la série harmonique. Cela arrive plus difficilement pour les séries absolument convergentes. Ainsi, par exemple, dans une série convergente, *à termes positifs*, le produit nu_n doit osciller, s'il ne tend pas à zéro, entre 0 et un nombre positif α. Soit ε un nombre positif, inférieur à α. Soient n', n'', n''', ... les valeurs de n, pour lesquelles $nu_n < \varepsilon$. Il est clair que la *fréquence* de ce système de valeurs, dans le système des nombres entiers, diminue avec ε. Si elle peut être rendue inférieure à une fraction proprement dite, la série donnée ne peut être convergente. Si, au contraire, quelque petit que soit ε, la fréquence dont il s'agit ne cesse de différer infiniment peu de l'unité, la série considérée peut être convergente. Je ne dis pas qu'elle le sera nécessairement. Cela tient, pour peu qu'on y réfléchisse, à ce que la série

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\ldots,$$

où les dénominateurs constituent un système arbitraire de nombres entiers, inégaux, est divergente, si la fréquence de ce système n'est pas infiniment petite. On sait, en effet, que la fréquence en question est la limite, pour $m=1$, de

$$(m-1)\left(\frac{1}{u_1^m}+\frac{1}{u_2^m}+\frac{1}{u_3^m}+\ldots\right).$$

Il faut remarquer, ici, que la fréquence du système n', n'', n''', ..., lorsque ε tend à zero, n'a pas généralement pour limite la valeur qu'elle prend pour $\varepsilon=0$: cette dernière valeur est d'ailleurs zéro,

dans le cas actuel ....
.... Il nous reste le doute que, dans le cas où la fréquence du système n', n'', n''', ... diffère infiniment peu de l'unité, la série soit *nécessairement* convergente. Il n'en est rien; car nous pouvons imaginer une infinité de séries à termes positifs, satisfaisant à la condition que l'on vient de rappeler, et pour les quelles nu_n ne tend pas à zero. Cependant, quelques-unes de ces séries sont convergentes: d'autres sont divergentes. Soit, en effet, u_n égal à $\frac{1}{n}$ ou à $\frac{1}{n^2}$, suivant que n appartient ou n'appartient pas à un certain système *illimité*, Ω, de nombres entiers, dont la fréquence, dans le système des nombres entiers, soit ϖ. Il est visible que la fréquence du système n', n'', n''', ..., tend vers $1-\varpi$. Pour nous trouver dans les conditions prescrites, il faut donc, avant tout, que ϖ soit un infiniment petit, c'est-à-dire que les éléments de Ω soient infiniment peu fréquents parmi les nombres entiers. On reconnaît, alors, que la série proposée est divergente ou convergente, en même temps que la série des inverses des éléments de Ω. Ainsi, par exemple, si Ω est le système des nombres premiers, la série proposée est divergente. Si Ω est le système des carrés parfaits, la série proposée est convergente: sa somme est $\frac{\pi^2}{3}\left(1-\frac{\pi^2}{30}\right)$. Cependant, le produit nu_n s'écarte continuellement de la limite 0, pour redevenir égal à l'unité......
Quelque soit le système Ω, ces suites offrent un nouvel exemple de séries, pour lesquelles $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers l'unité, tandis que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut devenir plus grand ou plus petit que tout nombre positif donné, ou se rapprocher de l'unité autant qu'on le désire.....
....
....

Palerme, 30 janvier, 1887.

SUR LES ARCS D'ELLIPSE RECTIFIABLES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE

... Je prends la liberté de vous signaler une petite remarque au sujet de l'intéressant article de M. R. Guimarães sur les arcs d'ellipse rectifiables.

Si φ et φ_1 sont les anomalies excentriques des points (x', y') et (ξ, ζ), on a

$$x' = a \cos \varphi \quad \xi = a \cos \varphi_1$$

$$y' = b \sin \varphi \quad \zeta = b \sin \varphi_1,$$

et la formule (C) de M. Guimarães s'écrit

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \pm \operatorname{tang} \varphi \frac{\sqrt{2c^2 \sin^2 \varphi - b^2 (1 \pm \cos \varphi)^2}}{b(1 \pm \cos \varphi)}.$$

Si $\varphi_1 = \varphi$, on a donc

$$2c^2 \sin^2 \varphi - b^2 (1 \pm \cos \varphi)^2 = b^2 (1 \pm \cos \varphi)^2,$$

ou

$$c \sin \varphi = b(1 \pm \cos \varphi).$$

Si on prend le signe $+$, cette équation devient, en posant alors $\varphi = \varphi'$,

$$2c \sin \frac{\varphi'}{2} \cos \frac{\varphi'}{2} = 2b \cos^2 \frac{\varphi'}{2},$$

ou

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi'}{2} = \frac{b}{c};$$

si on prend le signe —, et que l'on pose $\varphi = \varphi''$

$$2c \sin \frac{\varphi''}{2} \cos \frac{\varphi''}{2} = 2b \sin^2 \frac{\varphi''}{2},$$

ou

$$\operatorname{cotg} \frac{\varphi''}{2} = \frac{b}{c}.$$

Par suite

$$\varphi' + \varphi'' = \pi,$$

et les points B'_1 et B''_1 correspondant respectivement à φ' et à φ'' sont symétriques par rapport au petit axe OB.

Si la perpendiculaire menée par le foyer F au grand axe OA coupe la tangente en B au point I, on a

$$\widehat{IOA} = \frac{\varphi'}{2};$$

ce qui permet de construire immédiatement le point B'_1.

Si

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \varphi' = 90°;$$

si

$$b = \frac{a}{2}, \quad \varphi' = 60°.$$

. . . .

*

SUR LA PARTIE TRANSCENDANTE DE L'INTÉGRALE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

PAR

DUARTE LEITE

(Professeur à l'Ecole Polytechnique de Porto)

C'est un fait bien connu maintenant que pour obtenir la partie algébrique de l'intégrale d'une fraction rationnelle il n'est pas besoin de connaître les infinis de celle-ci. Au moyen de la seule division algébrique on parvient à déterminer les coefficients de la variable dans la fraction intégrale en fonction rationnelle de ceux de la différentielle (*).

L'objet de cette note est de montrer qu'une circonstance analogue se présente dans beaucoup de cas dans la détermination de la partie logarithmique de l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Soit

$$y=\int \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}\,dx,$$

et supposons que le dénominateur $\mathrm{F}(x)$ ait n racines simples, que je designerai par a_i.

(*) Il suffit d'employer un des élégants procédés indiqués par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse*, pag. 265 et suiv.

Ce fait avait été prévu par Liouville, dans un mémoire publié dans le cahier XXII du *Journal de l'École Polytechnique*, pag. 136, note. Il paraît même résulter d'un mémoire de Crelle, dans le tome 9 de son journal, pag. 231, que cela n'était pas inconnu à Euler.

Voyez aussi, sur ce sujet, deux notes de Mr. Gomes Teixeira, dans les *Rendiconti della Reale Academia dei Lincei*, serie 4.ª, vol. 1.º, marzo e aprile 1885.

On a

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{A_i}{x - a_i},$$

où (Serret. Calcul diff. 2e vol.)

$$A_i = \frac{f(a_i)}{F'(a_i)},$$

d'où

$$y = \sum_1^n A_i \log(x - a_i).$$

Admettons maintenant qu'on ait trouvé des fonctions $\varphi_j(x)$ telles que les valeurs $\varphi_j(a_i)$ soient des nombres entiers positifs non égaux.

Si l'on pose alors

$$A_i = \sum_1^n B_j \varphi_j(a_i) = \frac{f(a_i)}{F'(a_i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

les B_j étant des quantités qui ne dependent que de j, on aura

$$y = \sum_1^n \left[\sum_1^n B_j \varphi_j(a_i) \right] \log(x - a_i)$$

$$= \sum_1^n B_j \left[\sum_1^n \varphi_j(a_i) \log(x - a_i) \right]$$

$$= \sum_1^n B_j \log \prod_1^n (x - a_i)^{\varphi_j(a_i)}.$$

Les produits

$$F_j(x) = \prod_1^n (x - a_i)^{\varphi_j(a_i)}$$

sont des polynômes, dont les coefficients se déterminent rationnellement en fonction des sommes de puissances semblables de ses racines.

Or la somme des puissances k de celles-ci est de la forme

$$\Sigma\, \varphi_j(a_i) \,.\, a_i^k,$$

c'est donc une fonction symétrique des a_i, calculable partant en fonction rationnelle des coefficients de $F(x)$.

Pour compléter la démonstration annoncée, il suffit de remarquer que le système des équations (1), détermine les B_j eux aussi en fonction symétrique des a_i.

Lorsque les a_i sont des nombres entiers et positifs, les fonctions $\varphi_j(x)$ les plus simples sont des puissances de x. Le calcul se fait facilement par le procédé suivant.

Au moyen de l'équation

$$F(x) = 0$$

l'expression

$$A = \frac{f(x)}{F'(x)}$$

peut prendre la forme d'un polynôme

$$A = \sum_0^{n-1} B_j x^j.$$

On a, alors,

$$A_i = \sum_0^{n-1} B_j a_i^j$$

et, par conséquent,

$$y = \sum_0^{n-1} B_j \log \prod_1^n (x - a_i)^{a_i^j}.$$

Le coefficient d'une puissance quelconque de chacun des produits du sommatoire peut s'exprimer, par les formules de Newton, en fonction des sommes de puissances semblables des racines, dont la forme est

$$S_{k,j} = \Sigma\, a_i^k \,.\, a_i^j = \Sigma\, a_i^{k+j}.$$

Si les racines a_i sont commensurables, mais fractionnaires ou négatives, on pourra retomber sur le cas précédent en faisant dans la différentielle donnée une substitution linéaire convenablement choisie.

Mais il suffit dans le second cas de choisir pour fonctions $\varphi_j(x)$ des puissances paires de x.

— Les procédés ordinaires supposent qu'on ait trouvé les racines a_i, pour en conclure après la valeur des coefficients A_i.

On peut intervestir l'ordre de ces opérations en cherchant d'abord les A_i, comme je vais le montrer.

En formant le résultant du système

$$\left.\begin{array}{c} F(x)=0 \\ \\ A=\dfrac{f(x)}{F'(x)}=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

on aura, il est facile de le voir, une équation de degré n en A, dont les racines sont les A_i. Il se pourra qu'elle soit résoluble plus facilement que

$$F(x)=0;$$

mais si celle-ci ne l'est pas algébriquement, l'équation en A ne le sera non plus, car le système (2) donne x en fonction rationnelle de A, et par conséquent on connaîtrait autant de racines a_i que de coefficients A_i.

NOTE SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SOLLICITÉ PAR UN CENTRE FIXE

PAR

H. LE PONT

(à Caen)

Considérons un point matériel sollicité par un centre fixe O, origine des coordonnées polaires r et θ, et soumis à l'action d'une force R fonction de ses coordonées:

$$R = F(r, \theta).$$

Le principe des aires donne immédiatement

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c.$$

Combinant cette première intégrale avec celle des forces vives, et posant

$$\frac{1}{r} = \rho, \quad -\frac{r^2}{c^2} F(r, \theta) = f(\rho, \theta)$$

nous avons la formule analogue à celle de Binet

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = f(\rho, \theta), \qquad (a)$$

équation différentielle de la trajectoire.

Cette équation (a) est toujours intégrable lorsque son second membre est indépendant de θ, c'est-à-dire lorsque la force R est fonction du rayon vecteur r seulement, et Mr. Bertrand a démontré qu'alors les seules forces qui imposent au mobile un orbite fermé sont, ou proportionnelles à r, ou inversement proportionnelles à r^2 (*); elle s'intègre encore lorsque son second membre est de la forme

$$(\lambda+1)\rho+f(\theta)$$

λ étant une constante et $f(\theta)$ une fonction quelconque de θ; la force R ayant pour expression

$$(b) \qquad -\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{\lambda+1}{r}+f(\theta)\right].$$

Cette équation (a) devient alors

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2}=\lambda\rho+f(\theta)$$

et nous avons, en l'intégrant:

1° pour $\lambda>0$:

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta}&=\frac{1}{2}\left[e^{\sqrt{\lambda}\theta}\int e^{-\sqrt{\lambda}\theta}f(\theta)\,d\theta+e^{-\sqrt{\lambda}\theta}\int e^{\sqrt{\lambda}\theta}f(\theta)\,d\theta\right]\\ &\qquad +\sqrt{\lambda}\left(\mathrm{A}e^{\sqrt{\lambda}\theta}-\mathrm{B}e^{-\sqrt{\lambda}\theta}\right)\\ \rho&=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[e^{\sqrt{\lambda}\theta}\int e^{-\sqrt{\lambda}\theta}f(\theta)\,d\theta-e^{-\sqrt{\lambda}\theta}\int e^{\sqrt{\lambda}\theta}f(\theta)\,d\theta\right]\\ &\qquad +\mathrm{A}e^{\sqrt{\lambda}\theta}+\mathrm{B}e^{-\sqrt{\lambda}\theta}. \end{aligned}\right.$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1873.

2° pour $\lambda < 0$:

$$(\beta_2)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{1}{2} \times \\
&\left[\cos\sqrt{-\lambda}\,\theta \int \cos\sqrt{-\lambda}\,\theta\, f(\theta)\, d\theta + \sin\sqrt{-\lambda}\,\theta \int \sin\sqrt{-\lambda}\,\theta\, f(\theta)\, d\theta\right] \\
&\qquad + \sqrt{-\lambda}\,(A\cos\sqrt{-\lambda}\,\theta - B\sin\sqrt{-\lambda}\,\theta) \\
&\rho = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \times \\
&\left[\sin\sqrt{-\lambda}\,\theta \int \cos\sqrt{-\lambda}\,\theta\, f(\theta)\, d\theta - \cos\sqrt{-\lambda}\,\theta \int \sin\sqrt{-\lambda}\,\theta\, f(\theta)\, d\theta\right] \\
&\qquad + A\sin\sqrt{-\lambda}\,\theta + B\cos\sqrt{-\lambda}\,\theta.
\end{aligned}\right.$$

A et B désignant les constantes d'intégration.

Il est facile de voir quelles sont les forces R pour lesquelles la trajectoire du mobile est une courbe fermée: il faut et il suffit, en effet, pour cela que la différence entre deux valeurs quelconques θ_p et θ_q de θ pour les quelles on a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 0$$

soit commensurable avec π, c'est-à-dire, en supposant que l'axe polaire soit dirigé suivant un rayon vecteur maximum ou minimum, que les seconds membres des premières équations (β_1) et (β_2) soient de la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^{n+1}\theta \sin^{n_1+1}\left(\theta - \frac{\pi}{m}\right) \mathrm{S}m^{n_2+1}\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right)\ldots \\
&\sin^{n_{m-1}+1}\left(\theta - \frac{m-1}{m}\pi\right)^{\mathrm{F}(\theta)}
\end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

m étant un nombre entier, $n, n_1, n_2, \ldots n_{m-1}$ des nombres positifs et $F(\theta)$ une fonction qui ne devient ni nulle ni infinie pour les valeurs $0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\pi$ de θ. Les trajectoires définies par les dernières équations (β_1) et (β_2) sont des courbes fermées ayant pour axes de symétrie les m droites

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{m}, \quad \theta = \frac{2\pi}{m}, \quad \ldots \quad \theta = \frac{m-1}{m}\pi.$$

Il est alors facile de déterminer la fonction $f(\theta)$ de façon que le point considéré décrive une courbe fermée

$$(\delta) \qquad \rho = F(\theta)$$

ayant pour axes de symétrie un faisceau donné concentrique au pôle.

Deux cas sont particulièrement remarquables, le premier qui a été étudié par Jacobi (*) où on a

$$\lambda = -1$$

la force R est alors

$$R = -c^2 \frac{f(\theta)}{r^2};$$

le second, où on a

$$\lambda = 0$$

la force R étant

$$R = -\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + f(\theta)\right].$$

C'est ce cas que nous allons considérer.

(*) Darboux, note 11 du *Cours de Mécanique* de Despeyrous.

L'équation (α) devient

$$(1) \qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = f(\theta)$$

et donne immédiatement

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{d\theta} = \int f(\theta)\, d\theta$$

$$(3) \qquad \rho = \int\left[\int f(\theta)\, d\theta\right] d\theta.$$

Nous voyons alors que, en prenant

$$f(\theta) = -k^2 \cos\theta$$

k^2 désignant un coefficient constant, le mobile décrit l'ellipse

$$\rho = C + k^2 \cos\theta.$$

La force central

$$-\frac{c^2}{r^3} + \frac{k^2\cos\theta}{r^2} \qquad (f_1)$$

impose donc aussi des arbitres planétaires. Mais, il y a plus: la troisième loi de Képler subsiste dans ce cas comme dans le cas de l'attraction newtonienne

$$-\frac{\mu^2}{r^2} \qquad (f_2)$$

et, en choisissant convenablement les constantes, le mobile décrira, dans les deux cas, la même trajectoire, avec les mêmes particularités dans son mouvement.

On pourrait multiplier à l'infini le nombre de problèmes aux quels donne lieu cette question des forces centrales; nous avons choisi celui-ci à cause de son importance.

Si, en effet, on suppose le coefficient c suffisamment petit, la loi d'attraction diffère infiniment peu de celle de Newton.

INDICE