JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Escola Polytechnica do Porto,
Antigo Professor na Universidade de Coimbra,
Socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. VII — N.º 1

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1886

CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão no fim do anno um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para Coimbra, rua da Calçada, n.° 50; ou para o Porto, rua de Costa-Cabral, n.° 132.

REMARQUES ARITHMÉTIQUES

PAR

ERNEST CESARO

IV

Conséquences arithmétiques d'une identité

1. Dans notre article «*Source d'identités*», publié dans le *Mathesis*, nous avons démontré l'identité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n}{1-z^n}, \qquad (1)$$

où

$$u_n = \frac{z^n x}{1-z^n x}.$$

Or, observons que, dans le développement du premier membre suivant les puissances croissantes de z, le coefficient de z^n est

$$X(n) = x^a + x^b + x^c + \ldots, \qquad (2)$$

$a, b, c, \ldots$ étant *tous les diviseurs de n*. Si, après multiplication des deux membres de (1) par $1-z$, on fait $z=1$, on obtient

$$X(\infty) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^n} = \log. \frac{1}{1-x}.$$

*

Il est vrai qu'on arrive plus simplement à ce résultat par application des principes exposés dans l'article précédent.

2. Pour $x=1$, la formule (1) fournit une intéressante transformation de la *série de Lambert*. On voit, en effet, que la série

$$S(z)=\frac{z}{1-z}+\frac{z^2}{1-z^2}+\frac{z^3}{1-z^3}+\dots \tag{3}$$

équivaut á

$$S(z)=\frac{z}{(1-z)^2}-\frac{z^3}{(1-z)(1-z^2)^2}+\frac{z^6}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)^2}-\dots \tag{4}$$

En d'autres termes, si l'on pose

$$v_n=\frac{z^{n-1}}{1-z^n},$$

on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} v_n = v^2{}_1-v_1v^2{}_2+v_1v_2v_3{}^2-v_1v_2v_3v_4{}^2+\dots$$

Pour z compris entre 0 et 1, on sait que la série (3) est convergente, et que son terme général u_n va constamment en décroissant, lorsque n augmente. Un calcul facile montre que, á partir d'une certaine valeur de n, dépendant de z, et précisément à partir de la valeur pour laquelle u_n devient inférieur à z, la série (4) est plus convergente que la série (3). La série (4), à termes alternativement positifs et négatifs, est donc fort utile pour l'évaluation approchée de $S(z)$.

3. D'après (2), on voit que, dans (3), le coefficient de z^n représente le *nombre des diviseurs de n*. Voyons quelle est l'expression du même coefficient dans la série (4). Dans le produit $u_1u_2u_3\dots u_\nu$, c'est-à-dire dans

$$(z+z^2+z^3+\dots)(z^2+z^4+z^6+\dots)\dots(z^\nu+z^{2\nu}+z^{3\nu}+\dots)$$

le coefficient de z^n est évidemment égal au *nombre* $\tau_\nu(n)$ *des solutions entières et positives de l'équation*

$$\xi_1+2\xi_2+3\xi_3+\ldots+\nu\xi_\nu=n. \tag{5}$$

Le coefficient de z^n dans le $\nu^{\text{ème}}$ terme de (4) est donc, au signe près,

$$\sigma_\nu(n)=\tau_\nu(n)+\tau_\nu(n-\nu)+\tau_\nu(n-2\nu)+\ldots.$$

Conséquemment, *l'expression*

$$\sigma_1(n)-\sigma_2(n)+\sigma_3(n)-\ldots$$

est égale au nombre des diviseurs de n.

4. Il est, d'ailleurs, facile de voir que $\sigma_\nu(n)$ représente aussi la somme des valeurs que prend la variable ξ_ν, dans la résolution de (5). Si l'on cherche à remplacer, dans le dernier énoncé, les fonction σ par les fonctions τ, on est conduit à poser

$$t_n(x)=(-1)^{a+1}\tau_a(x-n)+(-1)^{b+1}\tau_b(x-n)+(-1)^{c+1}\tau_c(x-n)+\ldots,$$

et l'on trouve alors que *la somme*

$$t_1(n)+t_2(n)+t_3(n)+\ldots$$
$$+\tau_1(n)-\tau_2(n)-\tau_3(n)-\ldots$$

est égale au nombre des diviseurs de n.

5. Reprenons la formule (1) dans toute sa généralité, et cherchons, dans le second membre, le coefficient de z^n. Ayant une solution particulière de (5), on trouve que z^n est multiplié par une puissance de x, dont l'exposant est la somme des ξ. Par conséquent, si $h_\nu(n,p)$ est le *nombre des solutions entières et positives des équations simultanées*

$$\begin{cases}\xi_1+2\xi_2+3\xi_3+\ldots\nu\xi_\nu=n\\ \xi_1+\ \xi_2+\ \xi_3+\ldots\ \xi_\nu=p,\end{cases}$$

et si l'on pose

$$H_\nu(n,p)=h_\nu(n,p)+h_\nu(n-\nu,p)+h_\nu(n-2\nu,p)+\ldots,$$

le coefficient de z^n provenant du $\nu^{\text{ème}}$ terme, est, en valeur absolue,

$$\sum_p x^p H_\nu(n,p).$$

Par comparaison avec (2), on voit que *la somme*

$$H_1(n,p)-H_2(n,p)+H_3(n,p)-\ldots,$$

est généralement nulle, sauf pour n *multiple de* p: *dans ce cas, elle est égale à l'unité.*

6. Après avoir posé

$$K_n(x,p)=$$
$$=(-1)^{a+1}h_a(x-n,p)+(-1)^{b+1}h_b(x-n,p)+(-1)^{c+1}h_c(x-n,p)+\ldots$$

on peut dire aussi que *la somme*

$$K_1(n,p)+K_2(n,p)+K_3(n,p)+\ldots$$
$$+h_1\ (n,p)-h_2\ (n,p)+h_3\ (n,p)-\ldots$$

est égale à l'unité ou à zéro, suivant que p *est ou n'est pas un diviseur de* n.

Dans un autre article nous utiliserons certaines recherches de MM. Sylvester et Trudi pour montrer comment on peut représenter analytiquement les symboles dont il vient d'être question. Nous en déduirons, naturellement, la *représentation analytique du caractère de divisibilité de deux nombres.* Cette représentation peut, d'ailleurs, être établie directement au moyen des fonctions trigonometriques, comme nous le ferons voir dans des recherches ultérieures sur certaines *éventualités arithmétiques.*

SOBRE A DECOMPOSIÇÃO DAS FUNCÇÕES CIRCULARES

POR

J. C. D'OLIVEIRA RAMOS

Sendo dada a fracção

$$\frac{f(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\operatorname{sen}^{\alpha}(x-a_1)\operatorname{sen}^{\beta}(x-a_2)\operatorname{sen}^{\gamma}(x-a_3)\ldots}$$

em que $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ é uma funcção inteira e homogenea do grau $n-1$, sendo $n=\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ o numero de factores do denominador, provar que é sempre possivel a decomposição seguinte:

$$\frac{f(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\operatorname{sen}^{\alpha}(x-a_1)\operatorname{sen}^{\beta}(x-a_2)\ldots}=\frac{A_\alpha \cos^{\alpha-1}(x-a_1)}{\operatorname{sen}^{\alpha}(x-a_1)}+$$

$$+\frac{A_{\alpha-1}\cos^{\alpha-2}(x-a_1)}{\operatorname{sen}^{\alpha-1}(x-a_1)}+\ldots+\frac{A_2\cos(x-a_1)}{\operatorname{sen}^2(x-a_1)}+\frac{A_1}{\operatorname{sen}(x-a_1)}+$$

$$+\frac{B^{\beta}\cos^{\beta-1}(x-a_2)}{\operatorname{sen}^{\beta}(x-a_2)}+\frac{B_{\beta-1}\cos^{\beta-2}(x-a_2)}{\operatorname{sen}^{\beta-1}(x-a_2)}+\ldots$$

$$+\frac{B_2\cos(x-a_2)}{\operatorname{sen}^2(x-a_2)}+\frac{B_1}{\operatorname{sen}(x-a_2)}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sendo A_α, $A_{\alpha-1}$, ... B_β, $B_{\beta-1}$, ... quantidades constantes.

Esta formula foi achada pelo sr. dr. Gomes Teixeira (*) d'um modo indirecto, resolvendo um problema d'interpolação.

Vamos agora deduzil-a directamente.

Com effeito, pondo

$$\operatorname{sen}^{\alpha}(x-a_1)\operatorname{sen}^{\beta}(x-a_2)\ldots=\psi(x)=\operatorname{sen}^{\alpha}(x-a_1)\,\psi_1(x)$$

em que

$$\psi_1(x)=\operatorname{sen}^{\beta}(x-a_2)\operatorname{sen}^{\gamma}(x-a_3)\ldots,$$

podemos sempre escrever

$$\left.\begin{array}{c} f(\operatorname{sen} x, \cos x)= \\ =\mathrm{A}_{\alpha}\cos^{\alpha-1}(x-a_1)\,\psi_1(x)+\operatorname{sen}(x-a_1)\,f_1(\operatorname{sen} x,\cos x)\end{array}\right\}\ldots (1)$$

o que dá

$$f_1(\operatorname{sen} x,\cos x)=\frac{f(\operatorname{sen} x,\cos x)-\mathrm{A}_{\alpha}\cos^{\alpha-1}(x-a_1)\,\psi_1(x)}{\operatorname{sen}(x-a_1)}\ldots (2)$$

Com effeito, como $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ é funcção inteira, por hypothese, para ter logar a egualdade (1) tambem o deve ser $f_1(\operatorname{sen} x, \cos x)$. Vamos, pois, determinar A_{α} de modo que a divisão (2) se effectue sem resto.

Para isso notemos que de ser $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ funcção homogenea do grau $n-1$, resulta

$$f(t\operatorname{sen} x, t\cos x)=t^{n-1}f(\operatorname{sen} x,\cos x)$$

ou

$$f(\operatorname{sen} x,\cos x)=\frac{1}{t^{n-1}}f(t\operatorname{sen} x, t\cos x).$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª série, t. IV (agôsto de 1885).

Fazendo $t = \frac{1}{\text{sen}\, x}$ e $u = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$, virá

$$f(\text{sen}\, x, \cos x) = \text{sen}^{n-1} x f(1, u). \dots\dots\dots \quad (3)$$

Egualmente, desenvolvendo $\cos(x - \alpha_1)$, $\text{sen}(x - \alpha_2)$, ..., expressões da fórma $a \,\text{sen}\, x + b \cos x$, e designando por a', a'', ... b', b'', ... os respectivos coefficientes de $\text{sen}\, x$ e $\cos x$, teremos

$$\cos^{\alpha-1}(x - a_1)\,\psi_1(x) = \cos^{\alpha-1}(x - a_1)\,\text{sen}^{\beta}(x - a_2)\dots =$$

$$= (a' \,\text{sen}\, x + b' \cos x)^{\alpha-1}(a'' \,\text{sen}\, x + b'' \cos x)^{\beta}\dots,$$

funcção homogenea do grau $\alpha + \beta + \dots - 1 = n - 1$, podendo portanto escrever-se

$$\cos^{\alpha-1}(x - a_1)\,\psi_1(x) = \text{sen}^{n-1} x \,\text{F}(u), \dots\dots \quad (4)$$

representando por F uma funcção inteira.

Vê-se d'aqui que, sendo o numerador da expressão (2) uma funcção homogenea do grau $n - 1$ e o denominador da fórma $a \,\text{sen}\, x + b \cos x$, funcção homogenea do 1.º grau, $f_1(\text{sen}\, x_1 \cos x)$ será funcção homogenea do grau $n - 2$.

Substituindo os valores (3) e (4) em (2), vem

$$f_1(\text{sen}\, x, \cos x) = \text{sen}^{n-1} x \frac{f(1, u) - \text{A}_\alpha \text{F}(u)}{\text{sen}\, x \cos a_1 - \cos x \,\text{sen}\, a_1} =$$

$$= \text{sen}^{n-2} x \frac{f(1, u) - \text{A}_\alpha \text{F}(u)}{\cos a_1 - u \,\text{sen}\, a_1}.$$

Effectuando a divisão d'esta ultima fracção e chamando Q o quociente e R o resto, será

$$f(1, u) - \text{A}_\alpha \text{F}(u) = (\cos a_1 - u \,\text{sen}\, a_1)\,\text{Q} + \text{R},$$

o que dá, para $x = a_1$,

$$f\left(1, \frac{\cos a_1}{\operatorname{sen} a_1}\right) - A_\alpha F\left(\frac{\cos a_1}{\operatorname{sen} a_1}\right) = R = 0$$

porque $f_1(\operatorname{sen} x, \cos x)$ deve ser inteira.

Ora as egualdades (3) e (4) dão respectivamente, para $x = a_1$

$$f\left(1, \frac{\cos a_1}{\operatorname{sen} a_1}\right) = \frac{f(\operatorname{sen} a_1, \cos a_1)}{\operatorname{sen}^{n-1} a_1},$$

$$F\left(\frac{\cos a_1}{\operatorname{sen} a_1}\right) = \frac{\psi_1(a_1)}{\operatorname{sen}^{n-1} a_1}.$$

Logo

$$A_\alpha = \frac{f(\operatorname{sen} a_1, \cos a_1)}{\psi_1(a_1)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Fica assim determinado o valor A_α que torna inteira $f_1(\operatorname{sen} x, \cos x)$, funcção homogenea do grau $n - 2$, e demonstrada, portanto, a egualdade (1).

Dividindo esta, membro a membro, pela egualdade

$$\psi(x) = \operatorname{sen}^\alpha(x - a_1)\,\psi_1(x)$$

obteremos o resultado

$$\frac{f(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\psi(x)} = \frac{A_\alpha \cos^{\alpha-1}(x - a_1)}{\operatorname{sen}^\alpha(x - a_1)} + \frac{f_1(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\operatorname{sen}^{\alpha-1}(x - a_1)\,\psi_1(x)}. \quad (a)$$

Se n'esta egualdade mudarmos $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ em $f_1(\operatorname{sen} x, \cos x)$ e α em $\alpha - 1$, o que transforma $\psi(x) = \operatorname{sen}^\alpha(x - a_1)\,\psi_1(x)$ em $\operatorname{sen}^{\alpha-1}(x - a_1)\,\psi_1(x)$, virá

$$\frac{f_1(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\operatorname{sen}^{\alpha-1}(x - a_1)\,\psi_1(x)} = \frac{A_{\alpha-1}\cos^{\alpha-2}(x - a_1)}{\operatorname{sen}^{\alpha-1}(x - a_1)} + \frac{f_2(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\operatorname{sen}^{\alpha-2}(x - a_2)\,\psi_1(x)}.$$

Continuando teriamos, depois de α decomposições,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{f(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\psi(x)}=\dfrac{A_\alpha \cos^{\alpha-1}(x-a_1)}{\operatorname{sen}^\alpha(x-a_1)}+\dfrac{A_{\alpha-1}\cos^{\alpha-2}(x-a_1)}{\operatorname{sen}^{\alpha-1}(x-a_1)}+\ldots \\ \qquad +\dfrac{A_1}{\operatorname{sen}(x-a_1)}+\dfrac{f_\alpha(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\psi_1(x)}\end{array}\right\}. \quad (b)$$

Pondo

$$\psi_2(x)=\frac{\psi_1(x)}{\operatorname{sen}^\beta(x-a_2)}=\operatorname{sen}^\gamma(x-a_3)\ldots$$

esta ultima fracção dá por decomposição

$$\frac{f_\alpha(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\psi_1(x)}=\frac{f_\alpha(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\operatorname{sen}^\beta(x-a_2)\,\psi_2(x)}=\frac{B_\beta \cos^{\beta-1}(x-a_2)}{\operatorname{sen}^\beta(x-a_2)}+\ldots,$$

em que

$$B_\beta=\frac{f_\alpha(\operatorname{sen} a_2, \cos a_2)}{\psi_2(a_2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Continuando a applicar o mesmo processo a todas as fracções que forem apparecendo, chega-se á decomposição annunciada.

D'este modo iamos determinando os coefficientes A_α, $A_{\alpha-1}$, ... B_β, $B_{\beta-1}$, ... á medida que se ia effectuando a decomposição, mas ha formulas que nos dão directamente o valor d'estes coefficientes em funcção das quantidades dadas. Estas formulas veem no artigo dos *Nouvelles Annales* atráz citado.

II. Se na egualdade demonstrada fizermos $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=1$, virá

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{f(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\operatorname{sen}(x-a_1)\operatorname{sen}(x-a_2)\ldots}=\dfrac{A_1}{\operatorname{sen}(x-a_1)}+ \\ \qquad +\dfrac{B_1}{\operatorname{sen}(x-a_2)}+\ldots\end{array}\right\}\ldots\ldots (c)$$

As expressões (5) e (6) de A_α e B_β dão-nos n'este caso

$$A_1 = \frac{f(\operatorname{sen} a_1, \cos a_1)}{\psi_1(a_1)} = \frac{f(\operatorname{sen} a_1, \cos a_1)}{\operatorname{sen}(a_1 - a_2)\operatorname{sen}(a_1 - a_3)\ldots},$$

$$B_1 = \frac{f_1(\operatorname{sen} a_2, \cos a_2)}{\psi_2(a_2)} = \frac{f_1(\operatorname{sen} a_2, \cos a_2)}{\operatorname{sen}(a_2 - a_3)\operatorname{sen}(a_2 - a_4)\ldots}.$$

Mas a expressão (2) de $f_1(\operatorname{sen} x, \cos x)$ dando-nos então, visto ser $\psi_1(a_2) = 0$,

$$f_1(\operatorname{sen} a_2, \cos a_2) = \frac{f(\operatorname{sen} a_2, \cos a_2)}{\operatorname{sen}(a_2 - a_1)},$$

o valor de B_1 será

$$B_1 = \frac{f(\operatorname{sen} a_2, \cos a_2)}{\operatorname{sen}(a_2 - a_1)\operatorname{sen}(a_2 - a_3)\ldots}.$$

Substituindo os valores de A_1 e B_1 em (c), vem finalmente

$$\frac{f(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\operatorname{sen}(x - a_1)\operatorname{sen}(x - a_2)\ldots} = \frac{f(\operatorname{sen} a_1, \cos a_1)}{\operatorname{sen}(a_1 - a_2)\operatorname{sen}(a_1 - a_3)\ldots} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x - a_1)} +$$

$$+ \frac{f(\operatorname{sen} a_2, \cos a_2)}{\operatorname{sen}(a_2 - a_1)\operatorname{sen}(a_2 - a_3)\ldots} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x - a_2)} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

que é a formula dada pelo sr. Hermite (*).

(*) *Cours d'Analyse*, page 331.

BIBLIOGRAPHIA

F. M. Costa Lobo. — Estudo de algumas equações de congruencia e indeterminadas. — Coimbra, 1885.

N'este trabalho, escripto para o concurso a uma cadeira de mathematica na universidade de Coimbra, o sr. Costa Lobo continúa o estudo das equações indeterminadas principiado na sua dissertação inaugural, de que se deu noticia na pag. 101 do tom. VI. Nas ultimas partes d'este primeiro trabalho tinha o auctor exposto o methodo de Wronski para a resolução d'aquellas equações. No actual faz applicação dos principios expostos no primeiro a algumas questões particulares, para os tornar mais claros e poder-se apreciar a sua importancia.

Brito Limpo. — Sobre os nivelamentos applicados á Geodesia. — Porto, 1885.

Principia este interessante artigo por algumas considerações a respeito da verdadeira figura da terra, que é differente da figura *media* obtida pelas triangulações geodesicas, por causa das attracções locaes. Em seguida apresenta e aprecia os dois methodos de Willarceau para obter aquella figura, e dá um processo novo para vencer uma difficuldade relativa á refracção que existe n'um d'elles.

Duarte Leite. — Integração das differenciaes algebricas. — Porto, 1886.

N'este importante trabalho, escripto para o concurso a uma cadeira da escola polytechnica do Porto, o auctor occupa-se dos integraes das funcções algebricas exprimiveis algebricamente ou por funcções logarithmicas.

No primeiro capitulo tracta dos integraes exprimiveis algebricamente, e ahi vem o theorema de Abel relativo á fórma d'estes integraes, o methodo de Liouville para os determinar, e alguns theoremas novos, tal é o seguinte: «Para que seja algebricamente integravel uma differencial racional $f(x, y)\,dx$ é necessario e sufficiente que o sejam separadamente os seus termos, depois de tornada inteira e irreductivel»; e o seguinte, generalisação de um theorema de Liouville: «Se designarmos por p_n e q_n duas funcções de ordem n, a egualdade

$$\int p_n^{\frac{1}{m}}\,dx = q_n\,p_n^{\frac{1}{m}}$$

tem sempre logar, se o integral for algebrico; e q_n é uma funcção racional de p_n».

No capitulo segundo tracta dos integraes expremiveis por logarithmos, e ahi vem o theorema de Abel relativo á relação algebrica mais geral e simples entre os integraes algebricos, e como consequencia a fórma dos integraes exprimiveis por logarithmos; em seguida um estudo muito desenvolvido do integral

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt[m]{R}},$$

principalmente do caso em que é exprimivel por um só logarithmo; finalmente uma applicação ao caso em que é $m=2$, onde o auctor emprega um processo novo mais simples do que os de Abel e Tchebicheff.

Tanto pelos theoremas novos que apresenta, como pelas demonstrações novas de theoremas conhecidos, é extremamente precioso o livro do sr. Duarte Leite.

Ch. Hermite. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. — Paris, 1885.

N'este importantissimo trabalho o eminente geometra faz um estudo profundo da equação de Lamé, e applica os resultados obtidos á rotação de um corpo solido em roda de um ponto fixo, quando não ha forças acceleratrizes, á determinação da figura de equilibrio de uma mola e á theoria do pendulo conico.

E. Cesàro. — Excursions arithmétiques à l'infini (*Annali de Matematica*, tomo XIII).

É objecto da bella memoria do sr. Cesàro o estudo de uma serie de questões de Arithmetica das mais interessantes, de que é difficil dar noticia em pequeno espaço.

A primeira questão de que se occupa é do estudo medio do maior divisor commum de dous numeros, e ahi vem uma serie de theoremas relativos ao numero medio de divisores communs de dois numeros, á somma media d'esses divisores, á quantidade de pares de numeros que admittem um menor multiplo commum dado, etc.

Em seguida occupa-se do maior divisor quadrado d'um numero.

No terceiro capitulo, intitulado *Eventualidades da divisão arithmetica*, o auctor resolve muitas questões interessantes relativas á probabilidade de que uma certa circumstancia se dê na divisão, como, por exemplo, que o quociente seja antes par do que impar, etc.

No capitulo quarto vem uma serie de questões de probabilidades relativas ao maior divisor commum de muitos numeros, e no capitulo quinto um estudo profundo da distribuição das quantidades commensuraveis, e como consequencia uma serie de questões relativas á probabilidade de que uma funcção de quantidades commensuraveis satisfaça a certas condições.

Nos capitulos sexto, setimo e oitavo estuda o sr. Cesàro o uso da funcção $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$ para sommar algumas series arithmeticas, e para achar algumas identidades arithmeticas importantes; estuda a funcção que representa o excesso das fracções sobre os maiores inteiros que ellas contêem; e estuda a funcção que representa a menor quantidade que é necessario ajunctar ou tirar a uma quantidade para obter um numero inteiro.

Finalmente no ultimo capitulo apresenta formulas da mais alta importancia para a reversão de certas series.

Pela breve noticia que vimos de dar se vê quanto é fecunda em resultados a bella memoria do joven geometra italiano, já muito conhecido por memorias importantes de Arithmetica, publicadas principalmente nas Memorias da Sociedade Real das Sciencias de Liège.

Ch. le Paige. — Correspondance de René François de Sluse (*Bulletino de Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche de B. Boncompagni*, tom. XVII).

Nasceu em Visé em 1622 e morreu em Liège em 1685 o sabio eminente de que se occupa o sr. Paige. Cultivador de muitos ramos da sciencia, tornou-se todavia principalmente notavel como mathematico, e a respeito d'esta sciencia teve correspondencia com Pascal, Huygens, Wallis, etc.

O sr. Paige, querendo tornar conhecido do mundo sabio o seu illustre compatriota, tractou de recolher toda a sua correspondencia, que estava espalhada por diversos paizes, e de procurar informações a respeito da sua familia, da sua vida e de seus trabalhos mathematicos.

A estes ultimos pontos são dedicadas as primeiras 67 paginas do trabalho do sr. Paige; á correspondencia são dedicadas as paginas seguintes.

Os trabalhos de Sluse referem-se a pontos importantes das mathematicas, e tiveram grande influencia no desenvolvimento d'estas sciencias; por isso grande serviço fez á historia da mathematica o sabio professor da universidade de Liège com a sua publicação.

Ch. le Paige. — Uber die Hesse'sche Fläche der Flächen dritter Ordnung (*Sitzb. der Wissench., 1885*).

H. le Pont. — Sur une transformation polaire des courbes planes (*Journal de Mathématiques spéciales, 1885*).

M. Lerch. — Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions. — Prag, 1885.

Neste artigo vem uma serie de exemplos muito interessantes de expressões analyticas, que em diversas partes do plano representam diversas funcções analyticas.

Mr. Lerch. — Expression analytique du plus grand diviseur de deux nombres entiers. — Prag. 1885.

— Bestimmung der Anzahl merkwürdiger Gruppen einer allgmeinen Involution n — ter Ordnung k — ter Stufe (Sitz. der böhm. Gesellschaft Wissenchaften, 1885).

J. M. Rodrigues. — Theoria da retrogradação das trajectorias. — Lisboa, 1885.

N'esta importante memoria o sr. Rodrigues estuda as condições para que os projecteis, no seu movimento no ar, em logar de cahirem seguindo uma curva de asymptota vertical, tenham movimento de retrogradação. Baseia-se a nova doutrina em alguns theoremas relativos á resistencia dos fluidos, que fazem parte de uma memoria ainda não publicada.

Principia por procurar as equações fundamentaes do problema e as condições para que haja retrogradação; e em seguida procura as diversas trajectorias que o projectil póde descrever segundo a posição do plano de resistencia, e as condições a que devem satisfazer os projecteis para que haja retrogradação.

J. M. Rodrigues. — Movimento do solido livre (Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa, n.º XLI).

O objecto d'este interessante artigo é o estudo do movimento do solido de revolução, quando a resultante das forças exteriores existe no plano do movimento determinado pelo eixo da figura e pela tangente á trajectoria e varía segundo uma dada funcção da obliquidade. Por uma analyse das mais elegantes reduz ás quadraturas o problema da integração das seis equações do movimento de translação e rotação, e considera o caso em que estas quadraturas se obtêem por meio das funcções ellipticas.

Tycho Brahe. — *Triangulorum planorum et sphericorum praxis arithmetica* — *1591.*

Existe na bibliotheca da universidade real de Praga um manuscripto com o titulo precedente, escripto pela propria mão de Tycho Brahe. Para tornar esta preciosidade conhecida, o illustre professor d'aquella universidade, sr. Studnika, mandou reproduzil-a por meio da photoleographia, de maneira a offerecer aos admiradores do grande astronomo uma imagem tão perfeita quanto podesse d'aquelle manuscripto.

Davide Besso. — *Periodico de Matematica per l'insegnamento secundario.* — *Roma.*

É este o titulo de um novo jornal dedicado ás Mathematicas elementares que o sr. D. Besso, professor no Instituto technico de Roma, vem de fundar. Publica-se um fasciculo cada dois mezes. O primeiro fasciculo traz um artigo importante do sr. Besso sobre o tetraedro de faces eguaes, um artigo do sr. Faifofer sobre uma proposição fundamental da theoria das equivalencias, etc.

G. T.

SUR CERTAINES DÉTERMINATIONS DE LIMITES; MOYENNES LIMITES DE DEUX NOMBRES

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE

Ingénieur des ponts et chaussées, à Rochefort-sur-Mer (France)

1. Nous allons d'abord établir une formule générale qui nous sera utile dans la suite de cette Note.

Etant donnée une fonction $y=\varphi(x)$, prenons arbitrairement deux nombres α et β, et considérons une progression arithmétique de n termes ayant α et β pour termes extrêmes, progression que nous représenterons par $x_1=\alpha$, x_2, x_3, ... x_{n-1}, $x_n=\beta$; puis, formons l'expression

$$F(n)=\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)}{n},$$

et proposons-nous de trouver la limite de $F(n)$, lorsque n croit indéfiniment.

A cet effet, supposons construite, en coordonnées rectangulaires, la courbe dont l'équation est $y=\varphi(x)$, et prenons sur cette courbe les points P_1, P_2, ... P_n, qui ont respectivement pour abscisses $Op_1=x_1=\alpha$, $Op_2=x_2$, ... $Op_{n-1}=x_{n-1}$, $Op_n=x_n=\beta$. Cela posé, nous pouvons écrire la valeur de $F(n)$ sous la forme

$$F(n)=\frac{\frac{y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}+\frac{y_n}{2}}{n},$$

*

ou, si $\beta - \alpha = (n-1)\varepsilon$, d'où l'on tire $n = \frac{\beta - \alpha + \varepsilon}{\varepsilon}$,

$$F(n) = \frac{\frac{y_1\varepsilon}{2} + \frac{(y_1+y_2)\varepsilon}{2} + \ldots + \frac{(y_{n-1}+y_n)\varepsilon}{2} + \frac{y_n\varepsilon}{2}}{\beta - \alpha + \varepsilon}.$$

Or, on voit que, d'une manière générale, la quantité $\frac{(y_i+y_{i+1})\varepsilon}{2}$ est égale à la surface du trapèze $P_i p_i p_{i+1} P_{i+1}$; en sorte que, si l'on représente par σ_n l'aire comprise entre le contour polygonal $P_1 P_2 \ldots P_{n-1} P_n$, l'axe Ox et les ordonnées extrèmes $P_1 p_1$, $P_n p_n$, on a

$$F(n) = \frac{\sigma_n + \frac{(y_1+y_n)\varepsilon}{2}}{\beta - \alpha + \varepsilon}.$$

y_1 et y_n, valeurs de $\varphi(x)$ pour $x=\alpha$ et $x=\beta$, sont des quantités fixes; de plus, lorsqu'on fait croître n indéfiniment, ε tend vers zéro, et σ_n a pour limite l'aire comprise entre la courbe $y=\varphi(x)$ et l'axe Ox, depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=\beta$, c'est-à-dire $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$. On a donc

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Lim} F_n(x) = \frac{\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx}{\beta - \alpha}.$$

Telle est la formule préliminaire que nous nous proposions d'établir.

2. Nous allons maintenant définir ce que nous entendons, d'une manière générale, par *moyenne limite* de deux nombres α et β $(\alpha < \beta)$. Considérons une série de n termes $x_1, x_2, \ldots x_n$, dont la loi de formation, d'ailleurs quelconque, sera désignée par une certaine lettre L, ces termes étant astreints aux conditions suivantes

$$x_1 = \alpha \qquad x_n = \beta \qquad x_i < x_{i+1},$$

quel que soit *i*; puis prenons les diverses moyennes, arithmétique, géométrique, harmonique, de ces termes, moyennes que nous désignerons par les notations $\overline{AL_n}$, $\overline{GL_n}$, $\overline{HL_n}$; dans chacune de ces notations la première lettre rappelle la nature de la moyenne considérée, la deuxième, la loi de formation de la série intercalée entre les nombres α et β, et l'indice, le nombre des termes de cette série, y compris α et β; en sorte que

$$\overline{AL_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

$$\overline{GL_n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n}$$

$$\frac{n}{\overline{HL_n}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}.$$

Les limites de $\overline{AL_n}$, $\overline{GL_n}$ et $\overline{HL_n}$, lorsque n croit indéfiniment, seront dites des *moyennes limites* des nombres α et β. Nous désignerons ces limites par les notations $\overline{AL}(\alpha, \beta)$, $\overline{GL}(\alpha, \beta)$, $\overline{HL}(\alpha, \beta)$.

On peut imaginer, en faisant varier la loi de formation représentée par la lettre L, un très-grand nombre de moyennes limites de deux nombres. Les cas les plus simples sont ceux où la série de définition est soit une progression arithmétique (pour laquelle nous ferons $L = A$), soit une progression géométrique (pour laquelle $L = G$).

Les moyennes $\overline{AA}(\alpha, \beta)$, et $\overline{GG}(\alpha, \beta)$ ne sont, bien visiblement, autre chose que la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique des nombres α et β.

Nous allons ici nous occuper des moyennes $\overline{GA}(\alpha, \beta)$, $\overline{HA}(\alpha, \beta)$, $\overline{AG}(\alpha, \beta)$ et $\overline{HG}(\alpha, \beta)$.

3. La définition particulière de la moyenne $\overline{GA}(\alpha, \beta)$ sera, d'après ce qui vient d'être dit, la suivante:

$\overline{GA}(\alpha, \beta)$ *est la limite de la moyenne géométrique des termes d'une progression arithmétique ayant pour termes extrêmes* α *et* β, *lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des termes de cette progression.*

Calculons cette limite. Nous avons

$$\overline{\mathrm{GA}}_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

ou, en prenant les logarithmes népériens des deux membres,

$$l\,\overline{\mathrm{GA}}_n = \frac{l x_1 + l x_2 + \ldots + l x_n}{n}.$$

Donc, en vertu de la formule (1), à la limite,

$$l\,\overline{\mathrm{GA}}(\alpha, \beta) = \frac{\int_\alpha^\beta l x \,.\, dx}{\beta - \alpha},$$

ou, puisque $\int l x \,.\, dx = x l x - x + \mathrm{C}$,

$$l\,\overline{\mathrm{GA}}(\alpha, \beta) = \frac{\beta \,.\, l\beta - \alpha \,.\, l\alpha}{\beta - \alpha} - 1,$$

d'où, en remontant des logarithmes aux nombres,

(2) $$\overline{\mathrm{GA}}(\alpha, \beta) = \frac{(\beta^\beta \times \alpha^{-\alpha})^{\frac{1}{\beta - \alpha}}}{e},$$

e désignant la base des logarithmes népériens. Si l'on suppose $\alpha = 1$, la formule devient

$$\overline{\mathrm{GA}}(1, \beta) = \frac{\beta^{\frac{\beta}{\beta - 1}}}{e}.$$

En particulier, pour $\beta=2$

$$\overline{\mathrm{GA}}\,(1,2)=\frac{4}{e}.$$

On peut donc dire que *le nombre* e *est égal ou quadruple de l'inverse de la moyenne* $\overline{\mathrm{GA}}$ *des nombres* **1** *et* **2**.

4. Passons à la seconde moyenne.

$\overline{\mathrm{HA}}\,(\alpha,\beta)$ *est la limite de la moyenne harmonique des termes d'une progression arithmétique ayant pour termes extrêmes* α *et* β, *lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des termes de cette progression.*

On a

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{HA}}_n}=\frac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}{n}.$$

Ici encore, $x_1, x_2, \ldots x_n$ formant une progression arithmétique, la formule (1) est applicable, et donne

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{HA}}\,(\alpha,\beta)}=\frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{l\beta-l\alpha}{\beta-\alpha},$$

d'où

$$\overline{\mathrm{HA}}\,(\alpha,\beta)=\frac{\beta-\alpha}{l\beta-l\alpha}.$$

Cette formule conduit à plusieurs énoncés. On peut dire que *la moyenne* $\overline{\mathrm{HA}}$ *de deux nombres est égale au quotient de la différence de ces nombres par la différence de leurs logarithmes népériens.*

On peut aussi, remarquant que pour $\alpha=1$, la formule devient

$\overline{\mathrm{HA}}\,(1,\beta)=\dfrac{\beta-1}{l\beta}$, dire que le *logarithme népérien d'un nombre est égal au quotient de l'excès de ce nombre sur l'unité par la moyenne* $\overline{\mathrm{HA}}$ *de ce nombre et de l'unité.*

Pour $\beta=e$, on a

$$\overline{\mathrm{HA}}\,(1,e)=e-1.$$

5. $\overline{\mathrm{AG}}\,(\alpha,\beta)$ *est la limite de la moyenne arithmétique des termes d'une progression geométrique ayant pour termes extrêmes* α *et* β, *lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des termes de cette progression.*

Si l'on pose $\dfrac{\beta}{\alpha}=q^{n-1}$, on a

$$\overline{\mathrm{AG}}_n=\frac{\alpha\,(1+q^2+\ldots+q^{n-1})}{n}$$

$$=\frac{\alpha\,(q^n-1)}{n\,(q-1)}.$$

Mais $n=\dfrac{l\beta-l\alpha}{lq}+1$; donc

$$\overline{\mathrm{AG}}_n=\frac{\alpha\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\,q-1\right)}{\left(\dfrac{l\beta-l\alpha}{lq}+1\right)(q-1)}$$

$$=\frac{\beta q-\alpha}{(l\beta-l\alpha)\,\dfrac{q-1}{lq}+q-1}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, q tend vers 1; de plus, les logarithmes étant pris dans le système népérien, la limite de $\frac{q-1}{lq}$ est égale, d'après la règle de L'Hopital, à celle de $\frac{1}{\frac{1}{q}}$ ou q, c'est-à-dire à 1. On a donc, en somme,

$$\overline{\mathrm{AG}}(\alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{l\beta - l\alpha}.$$

Il est très-remarquable que c'est précisément là l'expression que nous avons précédemment trouvée pour $\overline{\mathrm{HA}}(\alpha, \beta)$. Donc, *la moyenne* $\overline{\mathrm{AG}}$ *de deux nombres est égale à leur moyenne* $\overline{\mathrm{HA}}$.

6. Enfin, $\overline{\mathrm{HG}}(\alpha, \beta)$ *est la limite de la moyenne harmonique des termes d'une progression géométrique ayant pour termes extrêmes* α *et* β, *lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des termes de cette progression.*

Posant toujours $\frac{\beta}{\alpha} = q^{n-1}$, on a

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{HG}}_n} = \frac{\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\right)}{n}$$

$$= \frac{\frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)}{n\left(1 - \frac{1}{q}\right)}$$

$$= \frac{1}{\beta} \cdot \frac{q^n - 1}{n(q-1)}.$$

Or, nous avons trouvé, au paragraphe précédent, que

$$\lim \frac{q^n - 1}{n(q-1)} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha(l\beta - l\alpha)}.$$

Nous avons donc finalement

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{HG}}(\alpha, \beta)} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta(l\beta - l\alpha)}$$

ou

$$\overline{\mathrm{HG}}(\alpha, \beta) = \alpha\beta \cdot \frac{l\beta - l\alpha}{\beta - \alpha}. \tag{5}$$

Rapprochant cette formule de la formule (4), ou de la formule (3), on voit que *le produit de la moyenne* $\overline{\mathrm{AG}}$, *ou de la moyenne* $\overline{\mathrm{HA}}$ *de deux nombres, par leur moyenne* $\overline{\mathrm{HG}}$, *est égal au produit de ces deux nombres.*

Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne à F. Gomes Teixeira

...... Mon ami M. Ernest Cesàro, à qui j'avais communiqué les résultats de ma Note sur les *moyennes limites*, a trouvé l'idée de ces moyennes assez heureuse — ce dont je puis, à bon droit, me féliciter; — il a pénétré cette idée avec la puissance d'analyse qui lui est propre, et m'a communiqué ses résultats dans une lettre dont je vous adresse des extraits. M. Cesàro, à qui je n'avais pas dit de quelle façon j'étais parvenu à mes formules, les a établies de son côté précisément par la même méthode que moi, comme on le voit en se reportant à la formule (5) de sa lettre qui est la formule (1) de ma Note. Mais il a considérablement étendu la notion que j'ai imaginée, en la prenant pour base d'un calcul symbolique spécial au sujet duquel il nous promet de nouveaux développements. Aussi, quoique sur un point, M. Cesàro se soit rencontré avec ma Note dont, je la répète, il ne connaissait que les résultats, je crois qu'il y aura grand profit pour vos lecteurs à ce que vous publiez les extraits de sa lettre *in extenso*. Ils auront par là une preuve nouvelle de la singulière pénétration de ce brillant analyste, et seront préparés à lire les recherches ultérieures qu'il nous promet sur ce sujet. ......

Extraits d'une lettre de M. Ernest Cesàro à M. d'Ocagne

. . . . . . Dans votre intéressant article *«sur certaines déterminations de limites»*, vous considérez les moyennes *arithmétique, géométrique, harmonique,* d'un nombre indéfiniment croissant de termes, insérés entre a et b suivant une loi L. Ces moyennes, que vous appelez *moyennes limites* des nombres a et b, sont désignées par les symboles $\overline{AL}(a, b)$, $\overline{GL}(a, b)$, $\overline{HL}(a, b)$. En particulier, vous supposez que les termes intercalés forment une progression arithmétique, géométrique, ou harmonique, ce que vous exprimez en faisant successivement $L = A, G, H$. Les relations remarquables, qui existent entre tous ces symboles, semblent constituer un calcul symbolique spécial, dans lequel l'opération G serait *fondamentale,* tandisque les opérations A et H seraient *conjuguées.* Si l'on représente simplement par A, G, H, les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique, des nombres a et b, on a

$$\overline{AA} = A, \ \overline{GG} = G, \ \overline{HH} = H. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La corrélation des opérations A et H est basée sur ce que l'on peut transposer les facteurs dans chacun des symboles $\overline{AH}$, $\overline{HA}$, considérés comme des produits, à la condition de remplacer la première opération de chaque produit par l'opération fondamentale. Autrement dit:

$$\overline{AH} = \overline{HG}, \ \overline{HA} = \overline{AG}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

On a aussi

$$\overline{AG} \,.\, \overline{HG} = G^2, \ \overline{GA} \,.\, \overline{GH} = G^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Enfin, en vertu de (2), la première des égalités (3) devient

$$\overline{AH} \,.\, \overline{HA} = G^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Telles sont les relations que je voulais mettre en évidence, et que je me propose de généraliser.........................

....

.... Je généraliserai d'abord l'idée de *moyenne*, en appelant moyenne des nombres $y_1, y_2, \ldots y_\nu$, par rapport à la fonction φ, la quantité M définie par l'égalité

$$\nu\varphi(\mathrm{M}) = \varphi(y_1) + \varphi(y_2) + \varphi(y_3) + \ldots + \varphi(y_\nu).$$

Je suppose, d'autre part, que chacun des nombres y soit moyen, relativement à la fonction ψ, entre le terme qui le précède et celui qui le suit. Cela revient à supposer que les valeurs de la fonction ψ, correspondant aux nombres y, forment une progression arithmétique. En particulier, si ces nombres y sont insérés d'une manière continue entre a et b, la fonction $\psi(y)$ a nécessairement la forme $mx+n$, où x varie de a à b, et les constantes m, n, sont déterminées par les conditions

$$\psi(a) = ma + n, \quad \psi(b) = mb + n.$$

D'après cela, il est clair que

$$\varphi(\mathrm{M}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(y)\,dx, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

la fonction y étant définie par l'égalité

$$\psi(y) = \frac{b-x}{b-a}\psi(a) + \frac{x-a}{b-a}\psi(b) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

La quantité M peut être représentée, avec vos notations, par $\overline{\varphi\psi}$; mais je poserai, pour abréger,

$$\overline{\varphi\psi}(a,b) = \mathrm{M}, \quad \overline{\varphi\psi}(a,b) = \mathrm{N}.$$

Je m'occuperai, plus loin, de la relation existant entre M et N. Je remarque, pour le moment, que, si l'on veut appliquer la formule (5) au calcul des *moyennes limites*, que vous considérez dans votre article, on doit faire successivement $\psi = \mathrm{A}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$, en observant que

$$\mathrm{A}(x) = x, \quad \mathrm{G}(x) = \log x, \quad \mathrm{H}(x) = \frac{1}{x}.$$

On trouve:

$$\varphi(\overline{\varphi \mathrm{A}}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\, dx, \quad \varphi(\overline{\varphi \mathrm{G}}) = \frac{1}{\log \frac{b}{a}}\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x}\, dx,$$

$$\varphi(\overline{\varphi \mathrm{H}}) = \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx.$$

Par exemple, pour $\varphi(x) = x$, on obtient

$$\overline{\mathrm{AA}} = \frac{a+b}{2}, \quad \overline{\mathrm{AG}} = \frac{b-a}{\log \frac{b}{a}}, \quad \overline{\mathrm{AH}} = \frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}.$$

Remarquons aussi que, pour $\varphi = \psi$, la formule (5) donne

$$\overline{\varphi\varphi} = \varphi,$$

quelle que soit la fonction φ. Cela généralise les relations (1). . . . . Mais il est utile de transformer la formule (5), de manière à y introduire définitivement la condition (6). On trouve sans peine

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\mathrm{M}) &= \frac{1}{\psi(b)-\psi(a)}\int_a^b \varphi(x)\,\psi'(x)\, dx, \\ \psi(\mathrm{N}) &= \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b \psi(x)\,\varphi'(x)\, dx. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

Ces égalités montrent bien que les opérations φ et ψ ne jouent pas le même rôle dans le symbole $\overline{\varphi\cdot\psi}$. On voit que, si la fonction $\psi'(x)$ n'est pas constante, $\varphi(M)$ peut toujours être considérée comme la valeur moyenne de la fonction φ, dans l'acception habituelle du mot, mais à la condition de supposer que le chemin parcouru par la variable, de a à b, ne soit pas *uniformément dense:* la *densité* des valeurs possibles de la variable, autour de x, doit varier comme la fonction $\psi'(x)$. Il est aisé d'appliquer les égalités (7) à la généralisation de vos formules. Il suffit de prendre, dans ce but,

$$A(x)=f(x),\quad G(x)=\log f(x),\quad H(x)=\frac{1}{f(x)}.$$

Nous avons vu que les relations (1) ne cessent jamais d'être vérifiées. Quant aux relations (3) et (4), elles deviennent

$$f(\overline{AG})\,f(\overline{HG})=f^2(G),\quad f(\overline{GA})\,f(\overline{GH})=f^2(G),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ f(\overline{AH})\,.\,f(\overline{HA})=f^2(G).$$

Enfin, les relations (2) subsistent telles quelles. D'ailleurs, il est facile de voir, au moyen des formules (7), que l'on a, plus généralement,

$$\overline{f\cdot\varphi}=\overline{\frac{1}{f}\cdot\psi},$$

les fonctions f, φ, ψ, satisfaisant à la condition

$$f(x)\,\varphi'(x)+\psi'(x)=0.$$

Si, par exemple, on fait $\varphi(x)=f^r(x)$, on obtient

$$\overline{f\cdot f^r}=\overline{f^{-1}\cdot f^{r+1}},$$

en convenant que f^0 représente $\log. f$. On trouve ainsi, pour $r=-1, 0, 1, \ldots,$

$$\overline{f\cdot f^{-1}}=\overline{f^{-1}\,.\log f},\quad \overline{f\,.\log f}=\overline{f^{-1}\cdot f},\quad \overline{f\cdot f}=\overline{f^{-1}\cdot f^2},\ \ldots,$$

ou bien

$$\overline{AH} = \overline{HG}, \quad \overline{AG} = \overline{HA}, \quad \overline{AA} = \overline{HA^2}, \quad \overline{HH} = \overline{AH^2}, \ldots$$

Sans rien ôter de leur complète généralité aux fonctions φ et ψ, imaginons deux fonctions *inverses* quelconques, $\Phi'(x)$ et $\Psi'(x)$, de manière que l'on puisse écrire, simultanément,

$$\varphi(x) = \Phi'[\psi(x)], \quad \psi(x) = \Psi'[\varphi(x)].$$

Les relations (7) prennent alors la forme remarquable que voici:

$$\varphi(\overline{\varphi\psi}) = \frac{\Phi[\psi(b)] - \Phi[\psi(a)]}{\psi(b) - \psi(a)}, \quad \psi(\overline{\psi\varphi}) = \frac{\Psi[\varphi(b)] - \Psi[\varphi(a)]}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \quad (8)$$

. . . .

. . . . Quant à la relation existant entre $\overline{\varphi\psi}$ et $\overline{\psi\varphi}$, les formules (7) donnent immédiatement

$$[\psi(b) - \psi(a)]\varphi(M) + [\varphi(b) - \varphi(a)]\psi(N) = \varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a). \quad (9)$$

C'est ce que l'on déduit aussi des égalités (8), en remarquant que

$$\Phi[\psi(x)] + \Psi[\varphi(x)] = \varphi(x)\psi x).$$

Il est assez curieux que le premier membre de la relation (9) ne change pas lorsqu'on substitue, aux moyennes limites M et N des nombres a et b, les moyennes ordinaires de ces nombres, prises par rapport aux fonctions φ et ψ. D'après cette remarque, la relation (9) devient

$$\frac{\varphi(m) - \dfrac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}}{\varphi(b) - \varphi(a)} + \frac{\psi(n) - \dfrac{\psi(a) + \psi(b)}{2}}{\psi(b) - \psi(a)} = 0.$$

Il est donc permis de poser, simultanément,

$$\varphi(\mathrm{M}) = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} - \lambda[\varphi(b)-\varphi(a)],$$

$$\psi(\mathrm{N}) = \frac{\psi(a)+\psi(b)}{2} + \lambda[\psi(b)-\psi(a)].$$

Sous une autre forme:

$$\frac{\varphi(\mathrm{M})-\varphi(a)}{\frac{1}{2}-\lambda} = \frac{\varphi(b)-\varphi(\mathrm{M})}{\frac{1}{2}+\lambda} = \varphi(b)-\varphi(a),$$

$$\frac{\psi(\mathrm{N})-\psi(a)}{\frac{1}{2}+\lambda} = \frac{\psi(b)-\psi(\mathrm{N})}{\frac{1}{2}-\lambda} = \psi(b)-\psi(a).$$

D'après ces égalités, on voit que les valeurs de $\varphi(\underline{\varphi\psi})$ et $\psi(\underline{\psi\varphi})$ partagent dans un rapport inverse les intervalles $\varphi(b)-\varphi(a)$ et $\psi(b)-\psi(a)$. Quant à la valeur de λ, elle dépend de a et b, autant que de la forme des fonctions φ et ψ. Lorsque $\varphi=\psi$, on a $\lambda=0$, et il n'existe pas d'autre cas, où λ soit *constant*. Plus généralement, il est impossible que λ soit une combinaison linéaire d'une fonction de a avec une fonction de b. Il est utile, en vue de certaines recherches, de calculer les valeurs des dérivées partielles de λ. On trouve aisément

$$\frac{d\lambda}{da} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\varphi'(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} - \frac{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\psi'(a)}{\psi(b)-\psi(a)},$$

$$\frac{d\lambda}{db} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\varphi'(b)}{\varphi(b)-\varphi(a)} - \frac{\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\psi'(b)}{\psi(b)-\psi(a)}.$$

De même,

$$\frac{d^2\lambda}{da\,db}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\psi'(a)\,\varphi'(b)-\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\varphi'(a)\,\psi'(b)}{[\varphi(b)-\varphi(a)]\,[\psi(b)-\psi(a)]};$$

etc. . . . Je vous reparlerai de ces formules dans une autre lettre, quand j'aurai cherché à étendre davantage la notion de moyenne, en supposant que l'on prenne une fonction symétrique quelconque, et que l'on y remplace toutes les variables par une même lettre: celle-ci représente alors une *moyenne* des variables considérées. . . . .

. . . .

. . . . . . J'explique mieux ma pensée: la moyenne des nombres y, relativement à une fonction symétrique S, sera définie par la relation

$$S(M, M, \ldots, M)=S(y_1, y_2, \ldots, y_\nu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Le premier membre de cette égalité est une fonction F de M, et l'on peut être curieux de connaître, dans chaque cas particulier, la nature de cette fonction. Or, si l'on représente par S_i la dérivée partielle de S, par rapport à y_i, on a

$$F(M+dM)=S(M+dM, M+dM, \ldots, M+dM),$$

d'où l'on déduit

$$F'(M)=\sum_{i=1}^{i=\nu} S_i(M, M, \ldots, M), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

sans qu'il y ait besoin de supposer que S soit symétrique. J'ai été conduit à étudier les fonctions S, douées de la propriété suivante:

$$S(ky_1, ky_2, \ldots, ky_\nu)=R(k)\,S(y_1, y_2, \ldots, y_\nu).$$

On reconnaît d'abord que la fonction R doit satisfaire à l'égalité

$$R(xyz\ldots)=R(x)\,R(y)\,R(z)\ldots:$$

cela exige que l'on ait $R(x) = x^m$. Dès lors, la fonction S est *homogène*, de degré m, et le *théorème d'Euler* donne

$$m\,F(M) = \sum_{i=1}^{i=\nu} y_i\,S_i(y_1, y_2, \ldots, y_\nu).$$

En particulier:

$$m\,F(M) = M \, . \sum_{i=1}^{i=\nu} S_i(M, M, \ldots, M).$$

La comparaison de cette égalité avec (11) montre que l'on doit avoir

$$m\,F(x) = x\,F'(x),$$

d'où

$$F(x) = cx^m.$$

Si l'on applique cette conclusion à la moyenne M, on voit que celle-ci est une fonction homogène, du premier degré, des variables $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$. Revenons à nos *moyennes limites*.

Lorsque ν croît indéfiniment, tandis que les nombres y restent compris entre a et b, et qu'ils finissent par se suivre d'une manière continue, l'égalité (10) fera souvent dépendre la valeur de M d'une ou plusieurs intégrales de la forme

$$\int_a^b f(y)\,dx,$$

où y varie avec x suivant une certaine loi. Si cette loi est donnée, on la caractérise au moyen d'une fonction Δ, dont la dérivée est, à un certain point de vue, la *densité* du chemin parcouru par la variable, et qui doit être telle que l'on ait

$$\Delta(y) = \frac{b-x}{b-a}\,\Delta(a) + \frac{x-a}{b-a}\,\Delta(b). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Dès lors, les intégrales obtenues prennent la forme que voici:

$$\frac{b-a}{\Delta(b) - \Delta(a)} \int_a^b f(x)\,\Delta'(x)\,dx.$$

Or, je veux que la série des nombres y soit régie par la loi suivante: — chaque nombre y doit être moyen, par rapport à la fonction symétrique T, entre les deux termes qui l'environnent. Autrement dit:

$$T(y_i, y_i) = T(y_{i-1}, y_{i+1}).$$

Je me propose de rechercher l'expression générale de la *densité*, en supposant que les nombres y finissent par se succéder d'une manière continue entre a et b. On doit avoir

$$T(y + dy, y + dy) = T(y, y + 2dy + d^2y).$$

Donc, si l'on observe que l'ont peut poser

$$\frac{dT}{dy_1} = U(y_1, y_2), \quad \frac{dT}{dy_2} = U(y_2, y_1),$$

$$\frac{d^2T}{dy^2_1} = V(y_1, y_2), \quad \frac{d^2T}{dy^2_2} = V(y_2, y_1),$$

$$\frac{d^2T}{dy_1\, dy_2} = W(y_1, y_2) = W(y_2, y_1),$$

on voit, au moyen du théorème de Taylor, que l'on doit avoir

$$U(y, y) \cdot y'' + [V(y, y) - W(y, y)]\, y'^2 = 0.$$

Cela nous amène immédiatement la relation

$$\frac{\Delta''(x)}{\Delta'(x)} = \frac{V(x, x) - W(x, x)}{U(x, x)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

pourvu que l'on ait égard à l'égalité (12). On en déduit

$$\Delta'(x) = e^{\int \frac{V(x, x) - W(x, x)}{U(x, x)} dx}.$$

Telle est la *densité* cherchée. Elle dépend simplement de W et de T, lorsque cette dernière fonction est *homogène*, de degré $m \gtrless 0$. On a, en effet, dans cette hypothèse,

$$U(x, x) = \frac{m}{2} \cdot \frac{T(x, x)}{x},$$

$$V(x, x) + W(x, x) = \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{T(x, x)}{x^2}.$$

Par suite,

$$\Delta'(x) = x^{m-1} \cdot e^{-\frac{4}{m}\int \frac{W(x, x)}{T(x, x)} x dx}; \ldots\ldots\ldots (14)$$

mais il est possible de préciser davantage; car, en vertu de ce qui a été dit, plus haut, sur les fonctions homogènes, on peut écrire

$$T(x, x) = cx^m, \qquad W(x, x) = \frac{m(m-1)}{4}(1-\varepsilon) \cdot cx^{m-2},$$

$$U(x, x) = \frac{m}{2} \cdot cx^{m-1}, \quad V(x, x) = \frac{m(m-1)}{4}(1+\varepsilon) \cdot cx^{m-2}.$$

Conséquemment, la formule (14) devient

$$\Delta'(x) = x^{(m-1)\varepsilon}.$$

La densité, pour les fonctions homogènes, est donc toujours une puissance de x ....

.... Cela posé, je vais appliquer les considérations qui précèdent au calcul de la moyenne limite M, dans le cas où les fonctions S et T sont

$$S = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=\nu} P(y_i)\,\varphi(y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{i=\nu} P(y_i)}, \qquad T = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=\nu} Q(y_i)\,\psi(y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{i=\nu} Q(y_i)}.$$

On retrouve les expressions étudiées plus haut, lorsqu'on suppose que P e Q sont des *constantes*. Cela étant, on obtient à la limite

$$\varphi(\mathrm{M})=\frac{\int_a^b \mathrm{P}(y)\,\varphi(y)\,dx}{\int_a^b \mathrm{P}(y)\,dx}=\frac{\int_a^b \mathrm{P}(x)\,\varphi(x)\,\Delta'(x)\,dx}{\int_a^b \mathrm{P}(x)\,\Delta'(x)\,dx}\ldots(15)$$

Il nous reste à calculer $\Delta'(x)$. Or, les dérivations successives de la fonction T nous fournissent les résultats suivants:

$$\mathrm{T}(x,x)=\psi(x),\quad \mathrm{W}(x,x)=-\frac{\mathrm{Q}'(x)}{\mathrm{Q}(x)}\cdot\frac{\psi'(x)}{2},$$

$$\mathrm{U}(x,x)=\frac{\psi'(x)}{2},\quad \mathrm{V}(x,x)=\left[\frac{\mathrm{Q}'(x)}{\mathrm{Q}(x)}+\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\right]\frac{\psi'(x)}{2}.$$

Donc, d'après (13)

$$\frac{\Delta''(x)}{\Delta'(x)}=2\frac{\mathrm{Q}'(x)}{\mathrm{Q}(x)}+\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)};$$

puis, par intégration,

$$\Delta'(x)=\mathrm{Q}^2(x)\,\psi'(x),$$

abstraction faite des facteurs constants. En conséquence, la formule (15) devient

$$\varphi(\mathrm{M})=\frac{\int_a^b \mathrm{P}(x)\,\mathrm{Q}^2(x)\,\varphi(x)\,\psi'(x)\,dx}{\int_a^b \mathrm{P}(x)\,\mathrm{Q}^2(x)\,\psi'(x)\,dx}.$$

En employant nos premières notations, nous pouvons donc écrire

$$M = \overline{\varphi\chi}\,(a, b),$$

où

$$\chi'(x) = P(x)\,Q^2(x)\,\psi'(x).$$

Nous voyons aussi que tous les résultats obtenus en commençant subsistent dans le cas où les fonctions P et Q^2, au lieu d'être constantes, forment un produit constant; mais, pour bien faire, il faut supposer $P = Q$, et, alors, les formules qui précèdent se prêtent à des développements d'un certain intérêt, que je suis en train d'étudier.......................................
....

BIBLIOGRAPHIA

Gino Loria. — Su alcune proprietà metriche della cubia gobba osculatrice al piano all' infinito (*Rendiconti della R. Accademia di Napoli, 1885*).

E. Cesàro. — Considérations nouvelles sur le déterminant de Smith et Manrion (*Annales de l'École Normale Supérieure de Paris, 1885*).

M. Lerch. — Note sur les expressions qui, dans diverses parties du plan, représentent des fonctions distinctes (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2ème série, t. x).

F. Casorati. — Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. — Milan, 1885.

A. A. Pina Vidal. — Estudos de optica geometrica (*Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa*, n.º XL).

G. T.

SOBRE OS COEFFICIENTES DA FÓRMULA QUE DÁ A DERIVADA D'ORDEM QUALQUER DAS FUNCÇÕES COMPOSTAS

POR

J. C. D'OLIVEIRA RAMOS

E

CASIMIRO JERONYMO DE FARIA

(Estudantes na Escola Polytechnica do Porto)

THEOREMA. — *A somma*

$$\sum \frac{1}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\;(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda}}$$

onde $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *representam as soluções inteiras positivas da equação*

$$\alpha+2\beta+\ldots+n\lambda=n$$

tende para o limite zero quando n *augmenta indefinidamente* (*).

I. *Demonstração de Oliveira Ramos.* — A expressão analytica que nos dá a derivada d'ordem n d'uma funcção de funcção, definida pelas equações

$$y=f(u) \quad u=\varphi(x)$$

é

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\Sigma\mathrm{A}\,\frac{d^i y}{dx^i}(u')^{\alpha}(u'')^{\beta}\ldots(u^{(n)})^{\lambda}, \ldots\ldots\ldots (1)$$

(*) Este theorema é a resposta a uma questão proposta ao curso do 2.º anno de mathematica na Escola Polytechnica do Porto.

sendo (*)

$$A = \frac{n!}{\alpha!\beta!\dots\lambda!\,(2!)^\beta\dots(n!)^\lambda},$$

e havendo as relações

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n, \quad \alpha + \beta + \dots + \lambda = i.$$

Se em (1) fizermos

$$y = e^u \quad u = e^x - 1$$

virá, para $x = 0$,

$$\left(\frac{d^n\left(e^{e^x-1}\right)}{dx^n}\right) = \Sigma A,$$

que nos dá a somma de todos os coefficientes relativos á derivada d'ordem n.

Teremos

$$y = e^{e^x-1}, \quad y' = ye^x, \quad y'' = (y + y')e^x,$$

$$y''' = (y + 2y' + y'')e^x, \quad y^{\text{IV}} = (y + 3y' + 3y'' + y''')e^x.$$

Se continuassemos veriamos, como já se observa, que os coefficientes seguem a lei do binomio para a potencia inferior d'uma unidade á ordem da derivada. Somos assim levados por inducção a suppor, para a derivada d'ordem $n - 1$,

$$\left.\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \left[y + (n-2)y' + \dots + \binom{n-2}{i-1}y^{(i-1)} + \binom{n-2}{i}y^{(i)} + \dots\right]e^x = \\ &= e^x \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}y^{(i)} \end{aligned}\right\}. \quad (a)$$

(*) Bertrand, *Calcul différentiel*.
Gomes Teixeira, *Sur les dérivées d'ordre quelconque* (*Giornale di Matematiche*, tomo XVIII).

Para verificar a lei, derivemos. Virá

$$y^{(n)}=\left[y+(n-2)y'+...+\binom{n-2}{i}y^{(i)}+...+y'+...+\binom{n-2}{i-1}y^{(i)}+...\right]e^x,$$

que, por ser $\binom{n-2}{i}+\binom{n-2}{i-1}=\binom{n-1}{i}$, dá

$$\left.\begin{aligned}y^{(n)}=\left[y+(n-1)\,y'+\ldots+\binom{n-1}{i}y^{(i)}+\ldots\right]e^x=\\ =e^x\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}y^{(i)}.\end{aligned}\right\}\ldots(b)$$

Comparando com (a) reconhece-se que a lei é verdadeira.

A egualdade (b) póde-se escrever, destacando o termo correspondente a $i=n-1$,

$$y^{(n)}=e^x\left[y^{(n-1)}+\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}y^{(i)}\right].$$

Dividindo esta egualdade por (a) e fazendo $x=0$, vem

$$\frac{y_0{}^{(n)}}{y_0{}^{(n-1)}}=1+\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}y_0{}^{(i)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}y_0{}^{(i)}}.$$

Ora sabe-se desde a Algebra que a fracção $\frac{\Sigma a_i}{\Sigma b_i}$ está comprehendida entre o maior e o menor valor de $\frac{a_i}{b_i}$.

Aqui esta relação é, em geral,

$$\frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n-2}{i}}=\frac{n-1}{n-1-i},$$

em que o maior valor é o correspondente ao maior valor de i, isto é, a $i=n-2$ ou $\frac{n-1}{n-1-i}=n-1$, e o menor a $i=0$, o que dá $\frac{n-1}{n-1-i}=1$. Logo

$$\frac{y_0^{(n)}}{y_0^{(n-1)}}>2, \qquad \frac{y_0^{(n)}}{y_0^{(n-1)}}<n.$$

A primeira desegualdade mostra-nos que $y_0^{(n)}$ augmenta com n, como já se sabe; a segunda, por ser $n=\frac{n!}{(n-1)!}$, dá-nos immediatamente

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}<\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!},$$

isto é, $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ ou $\frac{\Sigma A}{n!}$ decresce quando n augmenta.

Vamos agora achar o limite d'esta relação.

Como $n=2$ dá $\frac{y''}{2!}=1$, será

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}<1$$

quando

$$n>2.$$

Mas (b) dá, para $x=0$,

$$y_0^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}y_0^{(i)};$$

logo

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n-1-i)!}\cdot\frac{y_0^{(i)}}{i!}<\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n-1-i)!}\cdots(c)$$

Consideremos esta expressão no limite. Escrevendo-a segundo os valores decrescentes de i, a somma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-i)!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}$$

transforma-se n'uma serie, que é convergente por ser $k! > 2^{k-1}$, d'onde

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}};$$

e como o segundo membro tende para o limite 2, vem

$$\lim \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right) < 3.$$

. . . .

D'aqui e de (c) se tira immediatamente

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!} < \frac{3}{n},$$

que dá para $n = \infty$

$$\lim \frac{y_0^{(n)}}{n!} = 0.$$

II. *Demonstração de C. J. de Faria.* — Temos

$$y = e^{e^x-1}$$

$$y' = e^{e^x-1} \cdot e^x = e^{x+e^x-1}$$

$$y'' = e^{x+e^x-1} \cdot (1+e^x) = e^{x+e^x-1} + e^{2x+e^x-1}$$

$$y''' = e^{x+e^x-1} \cdot (1+e^x) + e^{2x+e^x-1}(2+e^x) =$$
$$= e^{x+e^x-1} + 3e^{2x+e^x-1} + e^{3x+e^x+1}$$

$$y^{\text{IV}} = e^{x+e^x-1}(1+e^x) + 3e^{2x+e^x-1} \cdot (2+e^x) + e^{3x+e^x-1}(3+e^x) =$$
$$= e^{x+e^x-1} + 7e^{2x+e^x-1} + 6e^{3x+e^x-1} + e^{4x+e^x-1}$$

$$y^{\text{V}} = e^{x+e^x-1} + 15e^{2x+e^x-1} + 25e^{3x+e^x-1} + 10e^{4x+e^x-1} + e^{5x+e^x-1}$$

. . . .

$$y^{(n)} = e^{x+e^x-1} + ae^{2x+e^x-1} + be^{3x+e^x-1} + ce^{4x+e^x-1} + \dots$$
$$+ ke^{(n-2)x+e^x-1} + le^{(n-1)x+e^x-1} + e^{nx+e^x-1}.$$

Na formação d'estas derivadas observa-se:

1.° Que o coefficiente de cada termo é egual á somma que se obtem junctando ao coefficiente do termo correspondente da derivada antecedente multiplicado pelo coefficiente de x no expoente d'esse mesmo termo, o coefficiente do termo antecedente.

2.° Que em cada derivada a somma de todos os coefficientes dividida pelas permutações correspondentes á ordem da derivada é menor do que $\frac{3}{n}$ sendo n a ordem da derivada.

3.° Que a relação entre a somma dos coefficientes e as permutações correspondentes á ordem da derivada vai decrescendo indefinidamente.

Vamos demonstrar que estas leis são verdadeiras para a ordem $n+1$.

Para isso temos

$$y^{(n)} = e^{x+e^x-1} + ae^{2x+e^x-1} + be^{3x+e^x-1} + ce^{4x+e^x-1} + \ldots +$$
$$+ ke^{(n-2)x+e^x-1} + le^{(n-1)x+e^x-1} + e^{nx+e^x-1},$$

que dá

$$y^{(n+1)} = e^{x+e^x-1}.(1+e^x) + ae^{2x+e^x-1}(2+e^x) + be^{3x+e^x-1}(3+e^x) +$$
$$+ ce^{4x+e^x-1}(4+e^x) + \ldots +$$
$$+ ke^{(n-2)x+e^x-1}(n-2+e^x) + le^{(n-1)x+e^x-1}(n-1+e^x) +$$
$$+ e^{nx+e^x-1}(n+e^x) =$$
$$= e^{x+e^x-1} + (2a+1)\, e^{2x+e^x-1} + (3b+a)\, e^{3x+e^x-1} +$$
$$+ (4c+b)\, e^{4x+e^x-1} + \ldots +$$
$$+ [(n-1)\, l+k]\, e^{(n-1)x+e^x-1} + [n+l]\, e^{nx+e^x-1} + e^{(n+1)x+e^x-1}.$$

Logo a primeira lei é verdadeira.

Suppondo

$$\frac{1+a+b+c+\ldots+k+l+1}{n!} < \frac{3}{n}$$

ou

$$\frac{n+na+nb+nc+\ldots+nk+nl+n}{(n+1)!} < \frac{3}{n+1},$$

temos

$$\frac{1+(2a+1)+(3b+a)+(4c+b)+\ldots+[(n-1)\,l+k]+[n+l]+1}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{1+3a+4b+5c+\ldots+(n-1)\,k+nl+(n+1)+1}{(n+1)!} < \frac{3}{n+1}.$$

A segunda lei é pois verdadeira.

Sendo

$$\frac{1+a+b+c+\ldots+k+l+1}{n!}<\frac{1+\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda+1}{(n-1)!},$$

onde

$$a=2\alpha+1, \quad b=3\beta+\alpha, \quad \ldots,$$

temos

$$\frac{1+a+b+c+\ldots+k+l+1}{n!}=$$

$$=\frac{(n+1)+(n+1)a+(n+1)b+(n+1)c+\ldots+(n+1)k+(n+1)l+(n+1)}{(n+1)!}>$$

$$>\frac{1+3a+4b+5c+\ldots+(n-1)k+nl+(n+1)+1}{(n+1)!}.$$

Logo a terceira lei tambem é verdadeira.

Posto isto, por ser

$$y_0^{(n)}=\Sigma A=1+a+b+\ldots+k+l+1$$

e

$$\frac{1+a+b+\ldots+b+l+1}{n!}<\frac{3}{n},$$

será zero o limite para que tende $\frac{\Sigma A}{n!}$ á medida que n augmenta indefinidamente, como se pretendia demonstrar.

SOBRE A THEORIA DO HYPERBOLOIDE

POR

L. F. MARRECAS FERREIRA

Professor na Escola do exercito de Lisboa

O fim principal d'este trabalho é resolver a questão seguinte: «Provar syntheticamente que as superficies empenadas, geradas por uma recta que se move apoiando-se sobre tres directrizes rectilineas, são de segunda ordem; e deduzir as propriedades principaes d'estas superficies, especialmente sob o ponto de vista d'este modo de geração.»

Esta questão, proposta (*) pelo illustre mathematico, sr. Schiappa Monteiro, importa o estabelecimento da theoria do hyperboloide sobre considerações diversas das que suggere o parallelipipedo de Binet, do qual os geometras até hoje, que me conste, se teem soccorrido para aquelle fim.

A geometria elementar, como a superior, apresentam-nos caminhos diversos para alcançar o resultado que se deseja; e como se tracta agora de expôr de modo diverso uma theoria conhecida e fundada em principios de geometria superior, é claro que as soluções elementares, vulgarisando o que ainda não era accessivel á geometria elementar, devem ser preferidas ás outras.

Por tal motivo recorrerei ao methodo das projecções, empregando apenas um unico plano de projecção. Definida a superficie, desnecessaria é a apresentação d'uma extensa serie das suas propriedades, o que melhor cabimento tem n'uma monographia que lhe respeite; por isso ajunctarei á deducção dos caracteristicos d'ella quanto baste para indicar como póde ser explorado o methodo de que lanço mão, no estudo do hyperboloide, e no emprego d'esta superficie, como instrumento de pesquiza.

(*) *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, tom. IV, pag. 191.

I

Rectas situadas em planos differentes, não parallelas a qualquer plano. Hyperboloide de uma folha

1. *Geração de uma superficie contínua.* — Por cada ponto de uma das rectas e pelas outras duas podemos fazer passar dois planos, cuja intersecção, assentando sobre as tres linhas A, B e C, será uma geratriz.

A cada ponto de uma das directrizes corresponde, portanto, uma geratriz. As tres directrizes definem com o systema de geratrizes, assim achadas, uma superficie contínua.

1 *a. Outro processo.* — Fazendo gyrar um plano em tôrno de uma das directrizes, A por exemplo, elle cortará as outras duas em pontos β e γ; a recta $\beta\gamma$ intercepta A n'um ponto α, e estes tres pontos deslocar-se-hão sobre as directrizes respectivas, definindo uma superficie contínua.

Effectivamente a recta movel $\alpha\beta\gamma$, que passa por todos os pontos de uma directriz, não póde passar duas vezes pelo mesmo ponto em qualquer d'ellas sem que as duas outras geratrizes existam no mesmo plano, o que é contrario á hypothese. Assim, por cada ponto de qualquer das directrizes passa sempre uma geratriz e não mais que uma, sendo contínua a superficie gerada.

2. *Geratrizes parallelas ás directrizes.* — Projectando as tres rectas sobre um plano perpendicular a A, as projecções de B e C hão de cortar-se n'um ponto, diverso do da projecção de A, porque não encontram esta geratriz; não situado a distancia infinita, porque as directrizes não podem ser parallelas, por hypothese, a plano algum.

A projectante, no crusamento das projecções de B e C, será uma recta A′, que, encontrando aquellas duas e esta ultima, por lhe ser parallela, é uma geratriz.

Da mesma sorte se demonstra a existencia de geratrizes parallelas ás outras linhas B e C, podendo concluir-se que ha tres geratrizes, A′, B′, C′, respectivamente parallelas ás directrizes.

A fig. 1.ª representa a projecção da superficie, feita parallelamente a A e A′ sobre um plano perpendicular a esta direcção.

B' e C cortam-se em α, formando n'este ponto um plano tangente; do mesmo modo em β, cruzamento de B e C', haverá um plano tangente á superficie, determinado por estas duas linhas.

Uma geratriz será representada por uma recta, como Aao, que une os seus pontos de intersecção A, a, o, com as directrizes A, B e C.

3. *Na superficie regrada, directrizes* A', B', *e* C', *são as geratrizes parallelas ás da primeira:* A, B *e* C.

As geratrizes da superficie $A'B'C'$ existem todas n'um plano gyrante em tôrno de A', como as de ABC se acham n'um plano gyrante em tôrno de A. Se os dois planos moveis se conservam sempre parallelos obteremos grupos: ao, geratriz de ABC, e $a'o'$, geratriz de $A'B'C'$; de sorte que a uma geratriz corresponde na outra superficie uma segunda, situada em plano parallelo ao da primeira. Os pontos a e o' existem no plano $B'C$; a' e o no plano BC', parallelo ao precedente.

As projecções ao e $a'o'$ são eguaes, bem como as projectantes de a e o' (suppondo o plano $B'C$ mais elevado que BC'), comprehendidas entre os planos BC' e $B'C$. Os angulos entre as projectantes e estas projecções são eguaes por terem lados parallelos e aberturas no mesmo sentido.

Logo: são eguaes e parallelos os segmentos das geratrizes, projectados sobre ao e $a'o'$, parallelas estas mesmas geratrizes, e demonstrada fica a proposição.

4. *Identidade das superficies* ABC *e* $A'B'C'$ (fig. 2.ª).—Demonstra-se a proposição provando que uma geratriz ab da primeira superficie corta qualquer geratriz $a'b'$ da segunda. As rectas projectadas em aa' e bb' existem em planos $B'C$ e BC', parallelos. Demonstra-se facilmente que as projecções aa' e bb' são tambem parallelas (*). Logo: as duas rectas, assim projectadas, são

(*) Dos triangulos similhantes $A'\alpha b'$ e $A'a'\beta$ vem $\alpha b' \times \beta a' = A'\alpha \times A'\beta$; dos triangulos $A\beta a$ e $Ab\alpha$ vem $\alpha b \times \beta a = A'\alpha \times A'\beta$; d'onde: $\alpha b : \alpha b' :: \beta a' : \beta a$. Os triangulos $\alpha b' b$ e $\beta a' a$ são semelhantes, e $a'a$ parallela a bb'. Como se sabe, os pontos a' e b', a e b formam divisões homographicas, de que resultam para a superficie interessantes propriedades, que se deduzem pela geometria superior; mas podemos dispensar a noção de homographia para vencer o peior escolho, que se apresenta na deducção theorica do hyperboloide —a existencia de dois systemas de geratrizes rectilineas. A exposição ganha assim em clareza o que perde em alcance.

*

parallelas, existem ambas no mesmo plano com as geratrizes ab, $a'b'$ e estas cortam-se no ponto i.

Cada ponto, cada recta, de uma das superficies, existe na outra; as duas superficies são identicas, e a superficie unica, que assim nos apparece, admitte dois systemas de geratrizes rectilineas.

5. *Uma recta não póde cortar a superficie em mais de dois pontos.* — Suppondo que uma recta ab (fig. 2.ª) corta a superficie em tres pontos, considerem-se tres geratrizes, do mesmo systema, A, B e C, passando, respectivamente, por elles. Projectando sobre um plano perpendicular a A, como a figura indica, demonstra-se, á semelhança do que se fez em (4), que uma geratriz qualquer, do systema de A, B e C, encontra ab n'um ponto i, ou que a recta dada encontra todas as geratrizes d'esse systema e deve existir na superficie.

Como o que se diz a respeito de tres pontos se applica *a fortiori* a maior numero d'elles, conclue-se que nenhuma transversal póde cortar a superficie em mais de dois pontos. As secções planas serão curvas, que não podem, egualmente, ser cortadas em mais de dois pontos por uma recta.

6. *A superficie é de segunda ordem.* — Sendo, por definição, de ordem n as superficies, cujas secções planas são curvas, que podem ser cortadas por uma recta em n pontos (numero maximo), vê-se que a superficie achada é de segunda ordem. Esta proposição, que resulta ainda de diversas outras propriedades que hei de deduzir, póde ser estabelecida já. Resta agora conhecer se é um hyperboloide ou paraboloide.

7. *A superficie tem um centro.* — Na fig. 1.ª as geratrizes ao e $a'o'$ são parallelas, bem como as rectas ao' e $a'o$, intersecções do plano d'ellas com os dois planos parallelos B'C e BC'. A figura que se projecta em $oao'a'$ é um parallelogrammo, cujas diagonaes se interceptam, no espaço, n'um ponto equidistante dos planos B'C e BC'. As diagonaes aa' e oo' cortam-se sobre a vertical de O — ponto medio da recta AA' — tendo, portanto, este cruzamento uma posição invariavel, sejam quaes forem os grupos de geratrizes parallelas consideradas.

Ha, pois, para toda a superficie um ponto, o qual gosa a propriedade de dividir ao meio todas as rectas aa' e oo' ... que por elle passam. Este ponto é o centro.

D'esta proposição facilmente se deduzem as seguintes:

7 *a. O plano de duas geratrizes parallelas passa pelo centro da superficie.*

7 *b. As curvas, resultantes de secções feitas por planos que passem pelo centro, terão este ponto como centro commum.*

7 *c. Os planos, tangentes á superficie, nos extremos de uma recta que passe pelo centro, são parallelos.*

8. *A superficie é hyperboloide de segunda ordem e de uma folha.* — As unicas superficies de segunda ordem, que admittem dois systemas de geratrizes rectilineas, são: o paraboloide hyperbolico e o hyperboloide de uma folha. Em virtude da proposição (7) resulta, pois, evidentemente a proposição de que se tracta.

II

Rectas, situadas em planos differentes, parallelas ao mesmo plano. Paraboloide hyperbolico

9. *Geração de uma superficie contínua.* — Demonstra-se como anteriormente se fez.

10. *As geratrizes existem em planos parallelos.* — Como as tres directrizes A, B e C são parallelas a um plano, projectando-as sobre um outro, perpendicular áquelle, as tres projecções serão parallelas, o que se póde fazer por uma infinidade de modos diversos.

Escolhendo para plano de projecção um que seja perpendicular a A, por exemplo, reduz-se a um ponto a projecção d'esta directriz, e as das outras guardam ainda o parallelismo, como indica a fig. 3.ª

Sendo a proporcionalidade uma propriedade projectiva, e notando-se ella nos segmentos, separados pelas directrizes e geratrizes Acb, Ac_1b_1, Ac_2b_2, ..., segue-se que se dará ainda nos segmentos projectados, e, portanto, as geratrizes serão todas parallelas a um plano (*).

(*) Se projectarmos a superficie sobre um plano perpendicular a bc, no

11. *Ha dois systemas de geratrizes rectilineas.* — Um plano, parallelo a A, B e C, cortará bc, b_1c_1 nos pontos m e n; fica demonstrada a proposição, provando-se que a recta mn vai cortar qualquer geratriz b_2c_2 n'um ponto i. Com effeito, mn encontra o plano vertical de b_2c_2 n'um ponto x, tal que $mn : nx :: cc_1 : c_1c_2$.

O logar geometrico d'este ponto é, em virtude da proporção, o plano, levado por b_2c_2 parallelamente ás geratrizes bc e b_1c_1. Devendo, por outro lado, existir no plano vertical de b_2c_2, e, sendo a intersecção dos dois planos esta geratriz, segue-se que a recta mn cortará em i a geratriz b_2c_2; corta, pois, todas as geratrizes, existindo sobre a superficie.

As secções, feitas por planos parallelos a A, B e C, são linhas rectas; a superficie admitte dois systemas de geratrizes rectilineas, tendo cada um d'elles um plano director.

12. *Uma recta não póde cortar a superficie em mais de dois pontos.* — Se uma recta cortar a superficie em tres pontos, b_2, c_2, A (fig. 3.ª), considerando as tres geratrizes do mesmo systema A, B e C que passam respectivamente por elles, podemos projectar o systema d'estas tres linhas e a recta dada sobre um plano perpendicular a A. Obtem-se d'este modo a fig. 3.ª

Qualquer geratriz mn, do mesmo systema de A, encontra b_2c_2 n'um ponto i; logo: esta ultima recta estará toda sobre a superficie e fica assim demonstrada a proposição.

13. *A superficie obtida é de segunda ordem e um paraboloide hyperbolico.*

Conclue-se de (12) que é de segunda ordem e de (11) que é um paraboloide hyperbolico, por ser esta a unica superficie de segunda ordem que admitte dois planos directores para duas ordens de geratrizes rectilineas.

Esta ultima propriedade é caracteristica e bastava para definir a superficie.

---

ponto em que se projecta esta geratriz, cortam-se as projecções de A, B e C; as projecções de b_1c_1 e b_2c_2 serão parallelas em virtude da proporcionalidade notada. Com b_1c_1 e b_2c_2 dá-se o mesmo que se observou com bc; pois as rectas bc, b_1c_1, b_2c_2.... serão parallelas, e d'ahi a proposição: *Se tres rectas, em planos differentes e parallelas ao mesmo plano, forem cortadas por outras tres rectas, estas existem em planos parallelos.*

14. O que se concluiu ácerca do paraboloide podia ser deduzido da theoria do hyperboloide, considerando nas figuras 1.ª e 2.ª que a geratriz A′ se afastava para uma distancia infinita. Todas as geratrizes, do mesmo systema de B, C, se projectavam, segundo rectas, parallelas entre si, do que se deduzia immediatamente a existencia d'ellas em planos parallelos. E, como por cada ponto de uma geratriz *ao* (fig. 1.ª), passa uma outra geratriz do systema ABC, segue-se que, todos os planos parallelos a duas geratrizes B, C, cortarão a superficie segundo rectas, que serão geratrizes do segundo systema. Se o hyperboloide não póde ser cortado por uma recta em mais de dois pontos, da nova superficie, que pertence ao grupo dos hyperboloides, tambem se dirá o mesmo.

Estabelece-se assim a theoria do paraboloide por outro processo.

III

Rectas não situadas em planos differentes. Logares geometricos: planos e rectas (*)

15. Quando duas directrizes, A e B, por exemplo, se cortarem n'um ponto μ, o logar geometrico será o plano que passa por μ e C.

Se o ponto μ se achar a uma distancia infinita, ou A e B forem parallelos entre si, o logar é o plano, levado por C parallelamente ás outras linhas dadas.

Resulta o plano AC quando A for parallelo a C e B cortar A.

Exceptuando este ultimo caso, o logar geometrico apenas contém uma das rectas.

16. Se A encontrar B e C, estando estas ultimas linhas em planos differentes, o logar é composto de dois planos: AB e AC.

Existindo B e C n'um plano, este, em que se acha egualmente A, será o logar pedido.

(*) O que vai sob esta epigraphe não está comprehendido no enunciado da questão proposta, mas, conjunctamente com o antecedente, no d'esta: *Logar das rectas que encontram tres rectas dadas.*

Deduzida a theoria do hyperboloide e a do paraboloide, pouco e bem simples era o que faltava para responder completamente a esta ultima questão.

17. As directrizes podem cortar-se n'um ponto, sendo então o logar constituido pelo feixe de rectas que por elle passam.

IV

Secções do hyperboloide

18. *As secções feitas por planos parallelos a duas geratrizes quaesquer, de systemas differentes, são hyperboles similhantes.* — A fig. 4.ª representa em A e B as projecções de duas geratrizes parallelas sobre um plano perpendicular á direcção commum. AC e BD, BC e AD são dois grupos de geratrizes parallelas.

Um plano parallelo aos planos tangentes em C e D cortará a recta CD n'um ponto O, que supporei comprehendido entre C e D, podendo elle ficar, todavia, áquem de D, ou além de C, fazendo-se em qualquer d'estes dois ultimos casos a mesma demonstração que para o primeiro, do qual me vou occupar.

Uma geratriz AtW será cortada pelo plano secante n'um ponto x, tal que $tx:x\mathrm{W}::\mathrm{CO}:\mathrm{OD}$. Por O e no plano da secção tiro duas rectas OX e OY, parallelas ás quatros geratrizes que se cortam em C e D, considerando aquellas linhas como eixos de coordenadas, a que vou referir um ponto qualquer da secção x. Será $xy = \mathrm{Y}$; $xz = \mathrm{X}$, designando as coordenadas por X e Y.

Dos triangulos semelhantes tira se $tx:x\mathrm{W}::tv:v\mathrm{B}$; por hypothese é $tv:v\mathrm{B}::\mathrm{A}r:r\mathrm{D}$; logo: a recta rv passa por W. Ainda, por hypothese, $\mathrm{B}v':v'\mathrm{W}::\mathrm{O}s:\mathrm{O}r$; logo: a recta $\mathrm{O}v$ passa por v'. Virá, pois, $xv':xv::\mathrm{O}z:zv$; ou

$$\frac{xv' + \mathrm{O}z = \mathrm{C}}{xv + zv = \mathrm{X}} = \frac{\mathrm{O}z = \mathrm{Y}}{zv = \mathrm{C}'}$$

e

$$\mathrm{XY} = \mathrm{C}\,.\,\mathrm{C}' = \mathrm{K},$$

sendo C, C′ e K constantes.

A secção é, portanto, uma hyperbole, que a equação nos apresenta, referida ás rectas OX e OY, que são assymptotas e tendo por centro o ponto O.

Obtendo-se sempre o mesmo resultado, qualquer que seja a posição de O sobre CD, vê-se que todas as secções parallelas a duas geratrizes quaesquer do mesmo systema serão hyperboles semelhantes, existindo o respectivo centro sobre o diametro conjugado.

Sendo $C = Oq$; $C' = Os$, a curva projecta-se sobre os pontos A e B.

Visto serem hyperboles as curvas assim achadas, reconhece-se que a superficie admitte uma infinidade de modos de geração por meio da hyperbole.

19. *Um plano parallelo a qualquer dos que são determinados por duas geratrizes parallelas, corta a superficie segundo uma parabola.*

Um plano PP′ (fig. 5.ª) parallelo ás geratrizes A e A′ determina uma secção, que póde facilmente ser construida por pontos. As geratrizes $A\beta$ e $A'\beta$, que se cortam em β, dão os pontos h e h_1, situados n'uma corda, dividida ao meio pelo plano vertical de $O\gamma$. As geratrizes $A\alpha$ e $A'\alpha$, cortando-se em α e parallelas ás antecedentes, dão os pontos d e d_1, n'uma corda, parallela á anterior e dividida ao meio pelo mesmo plano vertical. Duas geratrizes, Aa_1 e $A'a$, passando por a e a_1, pontos situados n'uma recta do plano $A\beta A'$, parallela áquellas cordas, vão produzir dois pontos de intersecção c e c_1, n'uma corda, tambem parallela ás anteriores e dividida em duas partes eguaes pelo plano vertical $O\gamma$.

Obteremos, assim, os pontos da secção feita por PP′, dois a dois, ligados por cordas parallelas entre si e divididas ao meio pelo mesmo plano vertical.

A intersecção dos planos $O\gamma$ e PP′ será na secção procurada um diametro de todas as cordas obtidas.

Sem mais estudo podemos deduzir já o seguinte: tomando em vez das geratrizes $A\beta$ e $A'\beta$ duas outras que se cortem em δ, e procedendo para com estas como se fez para aquellas, obteremos na secção outra serie de cordas parallelas, tendo por diametro a intersecção do plano vertical $O\delta$ com PP′. Na curva resultante da secção todos os diametros são rectilineos, e esta é, portanto, uma conica. Sendo todos os diametros parallelos ás geratrizes A e A′ são por este facto parallelos entre si, e a curva é uma parabola, ficando assim demonstrada a proposição.

Pela fig. 5.ª se vê que cc_1, corda variavel da parabola, se conserva durante o movimento parallela a aa_1, corda variavel do angulo $A\beta A'$; portanto a tangente á secção na extremidade do diametro projectado em γ é parallela ás cordas conjugadas com este diametro, deduzindo-se por este modo uma bem conhecida propriedade da parabola.

A tangente na extremidade do diametro γ é obtida quando a corda variavel aa_1 desce abaixo de 6, tomando uma posição tt_1. Se a corda variavel descer ainda abaixo d'esta linha, vamos obtendo os mesmos pontos da secção anteriormente achados: o ponto c, por exemplo, obtido já por uma unica geratriz $A'ac$, é determinado tambem por outra geratriz $Ac\omega$, a qual vai cortar $A'b$ n'um ponto ω; da mesma sorte $A'c_1$ irá cortar Ab_1 n'um ponto ω_1, e a recta $\omega\omega_1$, parallela a aa_1, como foi demonstrado em (4), é corda do angulo $A6A'$ e está situada abaixo de tt_1.

Quando aa_1 coincidir com AA' os pontos c e c_1 vão para o infinito, determinando-se os pontos no infinito da secção parabolica.

Conclue-se ainda, fazendo variar a distancia de PP' a AA' e substituindo estas geratrizes por outras quaesquer, parallelas entre si, que a superficie admitte uma infinidade de modos de geração por meio da parabola.

20. *Um plano, não parallelo a qualquer das geratrizes, corta a superficie segundo uma ellipse.*

Se o plano PP' (fig. 5.ª), em vez de ser parallelo ao plano AA', gyrar em tôrno de uma parallela a este plano, tomando uma posição tal que não seja parallelo a nenhuma das geratrizes da superficie, como esta é gerada por uma recta movel em tôrno e sobre A, ou A', descrevendo a sua projecção 360°, segue-se que a curva de intersecção obtida será fechada.

A linha aa_1 origina, como em (19), pelo seu movimento, os pontos c e c_1, dispostos, dois a dois, nos extremos de cordas parallelas.

Cortando o plano secante as geratrizes A e A', a projecção da curva passará pelos pontos de projecção d'estas geratrizes, e por isso, quando a corda movel tomar a posição AA', não se obtém dois pontos no infinito, como no caso anterior. Resulta um ponto γ de um lado de AA' e outro do outro lado, unidos por um diametro, que se projecta segundo $O\gamma$, sendo deduzido este diametro do mesmo modo que em (19).

Todos os diametros obtidos são rectilineos e a curva é uma conica; passam pelo centro da curva fechada, que é uma ellipse, deduzindo-se ainda pela figura, que as tangentes nas extremidades dos diametros são parallelas ás cordas conjugadas com estes.

21. Tudo o que fica dicto ácerca das secções se deduz immediatamente de (5), restando apenas reconhecer se a curva tem, ou não, pontos no infinito, e n'este ultimo caso o numero d'elles. Em (18) duas geratrizes parallelas dão quatro pontos no infinito e a secção é hyperbolica; em (19) uma geratriz parallela dá dois pontos e vem uma parabola; em (20) não ha pontos no infinito e a secção é elliptica.

Para a proposição (18) podia-se ter adoptado um modo de demonstração analogo aos que se empregaram em (19) e (20), mostrando que as diversas cordas parallelas de uma secção hyperbolica são conjugadas com os diametros, e que estes são rectilineos. A demonstração adoptada é, todavia, muito breve; a equação da hyperbole obtida não póde deixar a minima duvida, e consegue-se sem sahir dos limites da geometria elementar, empregando apenas alguns triangulos semelhantes.

O estudo das secções, já feito, completa o que eu disse anteriormente sobre a definição dos logares geometricos da questão proposta.

Da proposição (18) conclue-se que para todas as secções de planos, passando pelo centro, parallelamente a duas geratrizes, as assymptotas tambem passarão por aquelle ponto. Transportado o cone director d'uma posição qualquer, e dando-lhe por vertice o centro da hyperboloide, as suas geratrizes serão assymptotas das hyperboles, secções d'aquella superficie por planos que passam pelo centro e o cone director tornar-se-ha assymptotico.

D'esta propriedade deriva o serem homotheticas as secções feitas n'elle e no hyperboloide por um mesmo plano, visto que os segmentos separados n'uma transversal qualquer pelo cone e hyperboloide, comprehendidos entre as duas superficies, são eguaes.

V

Diversas propriedades do hyperboloide

22. *Os grupos de geratrizes, convergentes para os extremos de cordas parallelas, em qualquer secção plana do hyperboloide,* *cortam-se respectivamente, além d'esta secção, segundo uma outra hyperbolica.*

Sendo $\omega\omega_1$ (fig. 6.ª), n'uma secção plana da superficie, uma corda qualquer, definida pelos seus extremos, haverá duas geratrizes, $A\omega$ e $B\omega$, concorrendo em ω; duas outras, $A\omega_1$ e $B\omega_1$, concorrendo em ω_1. $A\omega_1$ e $B\omega$ cortam-se n'um ponto δ_1; $A\omega$ e $B\omega_1$ cortam-se em δ.

Havendo sempre secções do cone director, homotheticas de secções feitas na superficie, ou, por outra, podendo tirar-se sempre ao cone director uma tangente parallela a qualquer das cordas do hyperboloide, podemos fazer em todos os casos AB parallela a $\omega\omega_1$.

As geratrizes $\delta A\omega$ e $\delta B\omega_1$, cortando-se em δ, definem um plano, e, sendo parallelas AB e $\omega\omega_1$, estarão em linha recta os pontos δ, O (medio de AB), μ (medio de $\omega\omega_1$). O plano $A\delta_1B$ contém os pontos ω e ω_1, estando n'elle em linha recta os pontos O, δ_1, μ.

Acham-se, pois, em linha recta os quatro pontos δ, O, δ_1, μ. δ e δ_1 estão no plano vertical, levado pelo diametro $O\mu$ das cordas $\omega\omega_1$ (18, 19 e 20), o qual plano é parallelo a uma geratriz A e a outra, cuja projecção passa por B, parallelamente a $O\mu$. O plano vertical $O\mu$, diametral de todas as cordas da secção, parallelas a $\omega\omega_1$, sendo parallelo a duas geratrizes do mesmo systema, está no caso da proposição (18), e os pontos δ e δ_1 acham-se n'uma hyperbole.

22 *a. N'um quadrilatero qualquer* $A\delta_1B\delta$ (fi. 6.ª), *no qual é* $AO=BO$, *o ponto medio* μ *da diagonal exterior* $\omega\omega_1$ *está sobre a diagonal interior* $\delta\delta_1$. $\omega\omega_1$ *é parallela á diagonal* AB.

Esta proposição conclue-se immediatamente da antecedente, considerando a figura como composta de projecções de geratrizes d'um hyperboloide. Existindo os pontos medios das diagonaes d'um quadrilatero n'uma linha recta, é claro que, passando uma das diagonaes pelo ponto medio de outra, aquella passará pelo ponto medio da terceira.

22 *b. Os grupos de geratrizes, convergentes para os extremos, de cordas parallelas a qualquer direcção, cortam-se, além d'aquelles pontos extremos, segundo uma hyperbole.*

Uma corda $\omega\omega_1$ com qualquer outra, que lhe seja parallela, determinam um plano, que vai cortar o hyperboloide. O centro da segunda corda está no plano diametral $O\mu$, o qual é constante para todas as cordas parallelas. Todos os pontos δ e δ_1, obtidos, existem n'esse plano, cuja secção sobre a superficie é uma hyperbole.

23. *Dadas sobre um plano duas rectas,* MA *e* MB, *bem como um ponto* O; *uma transversal, gyrante em tôrno d'este ponto, cortará a primeira linha n'um ponto* α, *a segunda em* β, *variaveis ambos de posição. O logar geometrico d'um ponto* x, *tomado sobre a transversal, de modo que* $\frac{x\alpha}{x\beta}$ = *constante, é uma hyperbole.*

O ponto O e as rectas MA e MB podem ser considerados como projecções de tres geratrizes do mesmo systema d'um hyperboloide; o ponto M e a transversal movel em tôrno de O, como projecções de geratrizes de systema differente do das primeiras, sendo α e β pontos de cruzamento d'umas com outras.

O ponto x existe n'um plano parallelo ás geratrizes projectadas em MA e MB, sendo a relação das suas distancias aos planos, levados por MA e MB parallelamente ao primeiro, a mesma que se dá entre os segmentos da transversal.

O ponto procurado, quer exista entre α e β, quer fóra, está n'um plano parallelo a duas geratrizes do mesmo systema da superficie, e, por conseguinte, n'uma hyperbole.

A cada relação dada correspondem duas hyperboles distinctas: uma para o caso de existir x entre α e β, outra quando está fóra d'este segmento. Em cada hyperbole um dos ramos passa em O, outro em M. Este ultimo, se o ponto x caminhava dentro do angulo BMA, estará tambem dentro do angulo até que aquelle ponto chegue ao vertice, a partir do qual passa para fóra de BMA, continuando n'um dos angulos supplementares e então representará o logar de x, para uma transversal, que vá cortar o angulo verticalmente opposto, na hypothese de estar o ponto situado exteriormente ao angulo dado.

D'aqui se vê que, posto analyticamente o problema, obteremos para um mesmo angulo dois ramos de curva, pertencendo a hyperboles distinctas, e cortando-se no vertice do angulo. Quer consideremos o ponto dentro do angulo, quer exterior, obtêm-se sempre como logar geometrico os mesmos ramos de hyperbole.

Cada ramo tem, pois, duas partes, contadas do vertice para cada um dos lados, tornando-se uma d'ellas parasita n'uma das hypotheses e a segunda parasita na segunda hypothese.

É claro que, indo para o infinito o ponto M, ou, tornando-se parallelas as linhas MA e MB, a figura representará a projecção de um paraboloide e o logar de x, projecção de uma das geratrizes da superficie, é uma recta parallela ás outras.

A construcção da curva é simples de fazer: sendo dados o ponto A e as rectas BC e BD (fig. 4.ª), constroe-se o parallelogrammo ACBD e sobre a diagonal CD escolhe-se um ponto O, tal que a relação dos segmentos CO e OD seja a dada. As rectas, tiradas por O, parallelamente a BC e BD, são as assymptotas de uma das hyperboles. Tomando sobre o segmento rectilineo CD outro ponto O′, tal que O′C e O′D guardem a mesma relação e por O′ parallelas áquellas rectas obteremos as assymptotas da outra hyperbole.

23 *a. Feixes de rectas e de planos.*—Se no problema (23) em logar de se definirem os pontos α e β, extremos dos segmentos que devem entrar no numerador, ou no denominador, da relação proposta, forem, simplesmente, pedidas as transversaes cortadas por x e as duas linhas dadas em segmentos continuos, na relação proposta, em vez de dois ramos de hyperboles distinctas acharemos quatro ramos, pertencendo cada um d'elles a sua hyperbole.

Sendo dadas tres rectas sobre um plano e um ponto, e desejando-se saber quaes são as transversaes, partindo d'este, cortadas pelas rectas em segmentos continuos, que mantenham uma dada relação, temos a considerar os angulos diversos que as rectas formam e resolver o problema em relação a cada um d'elles. Suppondo, primeiramente, que as linhas em vez de existirem n'um feixe são lados de um triangulo, o que é o caso mais geral, segundo as hypotheses feitas sobre os segmentos que devem entrar no numerador, ou denominador, da relação, assim as soluções que se obteem. Ha a considerar ainda a posição do ponto em relação ao triangulo. Se existe no interior d'este, para o caso de entrarem no numerador da relação os segmentos terminados nos lados do angulo, obteem-se seis soluções; outras seis, quando os segmentos terminados nos lados do triangulo entrarem no denominador.

Se o ponto existe fóra do triangulo haverá quatro soluções n'um caso e quatro no outro.

Não insisto mais n'esta questão, caso geral de uma outra de que me occupei no vol. I do *Jornal de Sciencias Mathematicas e*

Astronomicas, pag. 133. Sendo eguaes, como n'esta ultima questão, os segmentos separados sobre uma transversal pelas tres rectas, o numero de soluções obtido será a metade do que no problema agora sujeito se acha.

N'um feixe de tres rectas, se α tem de estar sobre uma determinada e β sobre outra, de cada lado do vertice obteremos uma solução e não mais do que uma, d'onde se deprehende que a relação dos segmentos, determinados pelo feixe sobre uma transversal que passe por um ponto qualquer, varía com a distancia d'ella ao vertice do feixe, não passando duas vezes pelo mesmo valor em qualquer dos lados que esta referencia nos permitte considerar.

Se o ponto x se deve considerar sobre a primeira recta que a transversal corta e α sobre a segunda, haverá ainda uma solução de cada lado do vertice, determinada cada uma d'ellas por um ramo de hyperbole, distincto do da outra. Facilmente se reconhece o modo porque n'este caso as duas soluções se acham relacionadas. Considerem-se (fig. 7.ª) duas rectas Va, Vb e um ponto O; sejam VM e VN duas rectas, respectivamente parallelas ás transversaes OM e ON. Pelo que se disse em (4) será

$$\mathrm{M}a \times \mathrm{N}d = \mathrm{M}b \times \mathrm{N}c;$$

$$\mathrm{M}a : \mathrm{M}b :: \mathrm{N}c : \mathrm{N}d$$

e, finalmente,

$$\mathrm{M}a : ab :: \mathrm{N}c : cd.$$

Se o ponto M da transversal Ob é uma solução podemos obter a outra N, tirando ON, parallelamente a VM, e a linha VN parallela a OM, sendo o cruzamento o ponto procurado.

Reputando como a projecção de um hyperboloide a figura, e considerando as geratrizes que se cortam em V, obtem-se immediatamente uma propriedade notavel, que liga todos os segmentos continuos, determinados pelas geratrizes OM e ON, do mesmo systema e as do outro, cujas projecções passam por V.

Não sendo possivel tirar do mesmo lado do vertice do feixe duas transversaes OM, satisfazendo á condição de ser Ma : Mb = constante (para o mesmo valor d'esta constante), segue-se que as rectas MN, ac, hd, não podem concorrer n'um ponto.

É claro que se as rectas dadas forem projecções de planos, perpendiculares ao de projecção, em vez de hyperboles haverá a considerar cylindros de bases hyperbolicas, e em logar de transversaes as soluções são dadas por planos.

23 *b*. *Applicação a diversos problemas.*—Em logar de tres rectas podem ser dadas simplesmente duas e uma curva qualquer; obtêm-se as transversaes que devem resolver o problema, intersectando a curva pela hyperbole. Só póde haver solução, pelo emprego da regua e compasso, quando fôrmos levados a cortar a hyperbole por uma recta.

Na hypothese de um ponto, dois planos e uma superficie, cortaremos esta pelo cylindro da base hyperbolica, e o cone, com o vertice no ponto dado, tendo a curva da intersecção por directriz, resolve o problema.

24. *Intersecção de hyperboloides que teem geratrizes communs.*—A e B (fig. 8.ª) representam as projecções de duas geratrizes parallelas de um hyperboloide sobre um plano que lhes é perpendicular; B e C as do outro.

a) *Caso de uma geratriz commum.*—Seja B, como indica a figura, esta geratriz. Não é possivel haver mais de dois pontos da curva de intersecção sobre uma transversal A*s* ou C*t*, porque qualquer d'estas linhas representa a projecção de uma geratriz da respectiva superficie, e as projecções da curva de intersecção, que existirem sobre ella, correspondem a pontos existentes sobre a propria geratriz. Ora, se houvesse tres pontos sobre a linha A*s*, por exemplo, além de A, a geratriz, que sobre ella se projecta, teria tres dos seus pontos sobre cada um dos dois hyperboloides, e, em virtude de (5), estaria em ambos, o que não é possivel.

Sobre BA projecta-se uma geratriz do hyperboloide BC, a qual vai ser cortada sobre a geratriz A por uma outra do mesmo hyperboloide, a qual se projecta sobre AC. Em C corta-se uma geratriz da superficie AB por uma outra da mesma superficie, projectando-se sobre AC. Assim, em A projectam-se dois pontos da intersecção, um dos quaes está no infinito; o mesmo em B. Sobre a linha AB, além dos pontos A e B, não póde projectar-se nenhum ponto da intersecção, visto o haver apenas uma geratriz da superficie BC projectada n'aquella linha. Sobre a recta BC, do mesmo modo, não póde projectar-se nenhum ponto de intersecção, a não ser em D e C.

D'aqui se conclue que as linhas AB e BC só podem ser cortadas pela curva de intersecção nos pontos A, B e C.

Na linha AC projectam-se duas geratrizes: uma da superficie AB, outra da BC; ellas podem eventualmente cortar-se sobre a geratriz A ou C, mas o caso mais geral é o cortarem-se fóra de qualquer d'estas linhas no plano projectante AC, ficando, portanto, esta recta com tres pontos da intersecção, o que é possivel, porque correspondem dois d'elles a uma geratriz; um d'estes e o outro á segunda geratriz.

Dado mesmo que se fizesse a intersecção sobre uma das geratrizes A ou C, imprimindo a um dos hyperboloides uma translação ao longo da geratriz commum B, as duas geratrizes existentes no plano projectante de AC n'elle se conservariam, e o seu cruzamento vinha a projectar-se fóra de A ou de C.

A projecção da intersecção é, pois, cortada pela recta AC em tres pontos, excepto em tres casos: quando as geratrizes, projectadas em AC, se cortam sobre A, sobre C, ou coincidem.

Quando ellas forem parallelas, a recta AC encontra no infinito a curva de intersecção. Do primeiro dos casos anteriores póde passar-se para o segundo por meio de uma translação, segundo a geratriz B, dada a uma das superficies; do terceiro caso — coincidencia — podemos passar para um quarto — parallelismo — por meio tambem de uma translação, segundo a mesma geratriz.

Uma transversal, gyrando em tôrno de B, não póde cortar a curva de intersecção em mais de um ponto, porque ella representa duas geratrizes, sendo cada uma d'estas de sua superficie; cada ponto de intersecção que a transversal encontrar deve pertencer a ambas as geratrizes, sendo a projecção do ponto de cruzamento d'ellas.

Por outro lado, cada transversal, excepto AB e BC, contendo as projecções de duas geratrizes de superficies differentes, deve necessariamente ter um ponto de intersecção, e não mais do que um.

A curva de intersecção não póde ser tangente a qualquer recta que passe por B, porque d'outro modo haveria secantes, passando tambem pelo ponto, o que corresponderia a haver transversaes, tiradas de B, contendo dois pontos de intersecção, o que é impossivel.

A curva tambem não póde ser tangente a AC, porque esta recta não póde conter mais de tres pontos, e um ponto de tangencia é duplo. Exceptua-se o caso de se reunirem dois dos pontos sobre A ou C, e a curva tangente n'um d'elles á recta AC será ainda cortada por esta linha n'um ponto. Póde, pois, concluir-se o seguinte:

Quando dois hyperboloides admittirem uma geratriz commum G *a curva de intersecção projecta-se n'um plano perpendicular a* G, *segundo uma curva do 3.º grau, excepto quando admittirem uma outra geratriz do mesmo ou de differente systema d'aquella.*

N'um d'estes casos a geratriz do systema de B (fig. 8.ª) projecta-se sobre AC; no outro ha uma transversal B*i*, cujo ponto de intersecção *i* está sobre AC. Deduz-se ainda:

Em duas posições differentes dos hyperboloides, que teem uma geratriz commum, o plano formado pelas duas geratrizes que nas superficies são parallelas áquella é tangente á curva de intersecção do 3.º grau.

A tangente em A, ou C, á curva de intersecção, tem dois pontos d'esta curva, e não póde em virtude de (5) ter mais algum.

Devendo o plano gyrante em tôrno de B conter uma geratriz de cada superficie, elle será tangente a ambas, em pontos distinctos, excepto quando estas duas geratrizes se cortarem sobre B, caso ao qual corresponde a passagem da curva de intersecção pela projecção da geratriz. Dá-se esta circumstancia com os pontos que B possue no infinito, sendo todavia distinctos os planos tangentes n'esses dois pontos, os quaes se cortam segundo a geratriz, tangente á curva de intersecção em ambos, e assymptota, portanto, da curva, do que resulta o perder esta dois ramos infinitos quando projectada sobre um plano perpendicular á geratriz commum. Deduz-se, pois:

A curva de intersecção tem dois ramos infinitos de que a geratriz commum é assymptota. Projectada a curva sobre um plano perpendicular á geratriz será a projecção d'esta um ponto duplo.

A tangente á curva de intersecção em B, no plano que temos considerado, não é a projecção da tangente, que a curva admitte no espaço, em consequencia de ser esta a projectante do ponto de tangencia, mas póde determinar-se pelo processo estabelecido por Chasles para todos os casos analogos.

Tirando por um ponto de B rectas parallelas ás geratrizes das duas superficies, formam-se dois cones, com a mesma geratriz B, tangente um d'elles ao plano vertical de AB, o outro ao plano vertical de BC, tendo ambos o mesmo vertice. Se não forem tangentes segundo a geratriz commum, devem cortar-se ainda segundo tres geratrizes, ou uma apenas. Sendo tangentes podem cortar-se segundo duas geratrizes.

A tangencia indica a existencia de duas geratrizes coincidentes e cortando B, ou a existencia d'uma geratriz do hyperboloide AB, parallela a outra do hyperboloide BC; porque d'um d'estes casos se passa para o outro por meio de uma translação segundo B.

Cada geratriz de intersecção dos cones indica egualmente que ha n'uma das superficies uma geratriz parallela a uma da outra. Em qualquer dos casos, do parallelismo de geratrizes resulta a existencia de pontos no infinito da curva de intersecção, de ramos infinitos.

Podemos pois estabelecer o seguinte:

Quando dois cones directores, do mesmo vertice, tiverem, além da geratriz commum dada, mais tres outras geratrizes communs, a projecção da curva de intersecção admittirá um triangulo assymptotico.

O numero de assymptotas é em qualquer caso egual ao numero de geratrizes communs áquelles cones.

As assymptotas só podem passar pela projecção da geratriz commum, quando os hyperboloides admittirem mais geratrizes communs de systema differente do d'aquella em cada uma das superficies.

Em todo o caso, duas geratrizes parallelas, cortando-se sobre B, determinam dois planos tangentes nos pontos que aquellas linhas teem no infinito, cortando-se segundo uma linha parallela áquella e assymptota da curva de intersecção. Além de B devem as superficies admittir, pelo menos, uma outra assymptota para a sua intersecção.

As curvas do 3.º grau admittem: ou tres pontos reaes e distinctos no infinito, correspondentes a tres ramos hyperbolicos — familia hyperbolica; ou um ponto real e simples, correspondendo a um ramo hyperbolico — familia elliptica; ou um ponto hyperbolico e um parabolico — familia parabolica.

A projecção da curva, que estou analysando, não póde pertencer á familia elliptica, porque n'esta, além de um ramo infinito ha uma oval. A existencia de um ramo fechado não permitte que haja qualquer ponto sobre o plano, gosando da propriedade possuida por B, do qual, visto ser duplo, todas as transversaes que dispartem, só podem encontrar a curva n'um unico ponto além d'aquelle.

*

Concluimos, portanto:

A curva tem, na sua projecção, ou tres pontos hyperbolicos no infinito, ou um só. Não póde pertencer á familia elliptica das curvas de 3.º grau.

Por isso, sendo D o discriminante da funcção homogenea de 3.º grau:

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^2,$$

devemos necessariamente obter na equação da curva sobre um plano perpendicular á geratriz commum

$$D < 0 \quad \text{ou} \quad D = 0.$$

Os ramos obtidos para a projecção da curva devem cortar-se sobre a projecção da geratriz commum.

b) *Caso de duas geratrizes communs.*—As geratrizes communs podem ser do mesmo ou de differente systema. Considerando (fig. 8.ª) como geratrizes communs B e B*i*, de differentes systemas, o que equivale a suppôr que as duas superficies admittem n'um ponto de B o mesmo plano tangente, será ainda, como anteriormente, B um ponto da projecção da curva de intersecção; as transversaes, que por elle passam, cortarão esta n'um ponto além de B.

As transversaes, que passam por A, ou por C, encontrando todas B*i*, não podem cortar a curva em mais de um ponto, a não representarem geratrizes communs ás duas superficies. B e B*i*, tangentes á curva de intersecção em pontos situados no infinito, são assymptotas d'ella, e d'aqui se vê que a curva de intersecção deve ter ramos infinitos. Projectando-se, porém, em B dois pontos d'ella, situados no infinito, este ponto deve ser duplo para a projecção d'essa curva. A projecção não póde ter nenhum dos seus pontos sobre os lados do triangulo ABC, excluindo os vertices, e, em virtude da propriedade das transversaes que passam por A, B e C, não póde ser de grau superior ao das conicas. Vê-se immediatamente que a hyperbole, unica d'estas linhas que admitte assymptotas, não póde resolver a questão, porque ella deveria existir no plano de B e B*i*, ou no plano tangente commum, e este só admitte duas geratrizes. Por outro lado deve existir evidentemente uma intersecção, por isso que um plano gyrante em tôrno da geratriz B contém duas geratrizes, uma de cada superficie, as quaes se cortam; os pontos A e C tambem devem existir na intersecção, não podendo por isso deixar de fazer parte d'esta uma geratriz commum, situada no plano projectante de AC e encontrando em i a geratriz commum Bi.

No plano, passando por B, parallelamente ao projectante de AC, devem existir duas geratrizes, uma de cada superficie, parallelas á geratriz commum, existente no plano vertical de AC; segue-se d'ahi que esta e cada uma das outras determinam planos tangentes á intersecção das superficies e em dois pontos situados no infinito sobre a geratriz AC, esta será, portanto, assymptota, em quanto os dois planos tangentes não se confundirem n'um só. As linhas communs B e Bi, que se interceptam e teem a propriedade de assymptotas, representam uma parte da intersecção: uma hyperbole que se reduziu ás assymptotas. A recta AC, visto não haver uma curva qualquer que represente a intersecção, ou não póde possuir essa propriedade, confundindo-se n'uma só as duas geratrizes existentes no plano vertical de B, parallelo a AC, ou reduzem-se a uma só duas das geratrizes que se cortavam sobre AC, havendo, portanto, uma nova linha, cortando esta e gosando da mesma propriedade que ella. Em qualquer dos casos podemos estabelecer a seguinte proposição:

Quando dois hyperboloides admittem duas geratrizes communs, de systemas differentes, devem admittir ainda duas outras geratrizes communs, tambem de systemas differentes.

As duas superficies serão, assim, formadas sobre o mesmo quadrilatero empenado.

Se tomarmos um ponto qualquer do espaço, ou da recta B, segundo o que precedentemente se fez, para vertice de cones directores das duas superficies, reconhece-se evidentemente que os dois cones só podem ter de commum duas ou quatro geratrizes.

O caso de duas geratrizes communs corresponde á intersecção dos hyperboloides, segundo uma hyperbole, quando a intersecção é conica; logo que os hyperboloides admittam duas geratrizes communs, do mesmo ou de differente systema, como vou provar, os cones directores devem ter quatro geratrizes communs.

Se as geratrizes communs forem do mesmo systema e B uma d'ellas, será a outra AC, porque esta é a unica linha do systema que encontra as geratrizes A e C. N'este caso as transversaes, que partem de B, não podem conter ponto algum de intersecção, além dos da recta AC, se ellas não representarem geratrizes communs ás duas superficies. B e AC teem propriedades de assymptotas, e como não póde a intersecção ser representada por uma curva que tenha ramos infinitos, e por outro lado estas duas geratrizes se não cortam em ponto algum, segue-se que deve haver duas outras geratrizes communs do segundo systema, e a intersecção das superficies, como no caso anterior, será representada por duas hyperboles reduzidas ás assymptotas.

Podemos, pois, estabelecer o seguinte:

Quando dois hyperboloides admittirem duas geratrizes communs, do mesmo systema, admittirão ainda duas outras do outro systema.

25. *Da intersecção de paraboloides que teem geratrizes communs.*—Se forem diversos nas duas superficies os planos directores dos systemas, ellas não podem admittir nenhuma outra geratriz commum, se tiverem uma n'este caso. Sendo P e P' os planos directores das duas superficies, aos quaes ella tem de ser parallela, vê-se que deve guardar ainda o parallelismo com a intersecção d'aquelles planos, e nenhuma outra geratriz em qualquer das paraboloides está n'este caso, por isso que no mesmo paraboloide não póde haver duas geratrizes parallelas á mesma direcção.

a) *Caso de uma geratriz commum.*—Partindo do principio de que a cada recta, traçada sobre um plano director, corresponde uma geratriz, do systema a que pertence esse plano director, que lhe é parallela, segue-se que, se os quatro planos directores forem diversos, havendo uma geratriz commum, necessariamente existirá outra, ou haverá no segundo systema de uma das superficies uma geratriz parallela a uma outra, existente no segundo systema do outro paraboloide. A primeira é parallela á intersecção dos planos P e P', que lhe respeitam; sobre cada superficie haverá, do segundo systema, uma geratriz parallela á intersecção dos outros planos directores P_1 e P'_1.

Os quatro planos determinam ainda quatro intersecções: as duas de P com P_1 e P'_1; as outras duas de P' com P_1 e P'_1; resulta d'aqui haver quatro geratrizes d'uma superficie, ainda, parallelas a quatro da outra.

Projectando os dois paraboloides sobre um plano perpendicular á geratriz commum (fig. 9.ª), as geratrizes do mesmo systema que esta, A, projectam-se segundo rectas parallelas. As projecções d'uma fazem-se segundo A, B, C, D, ...; e A_1, B_1, C_1, ... para a outra superficie. Uma transversal, partindo de A, representa as projecções de duas geratrizes d'um systema differente do de cada um dos grupos anteriores, pertencentes aos dois paraboloides. Sobre a transversal, além de A, não póde existir mais de um ponto de intersecção, porque esta deve ser dada pelas duas geratrizes que se projectam sobre a transversal, e ellas não podem cortar-se em mais de um ponto.

Sobre AH, parallela a B_1, C_1, . . . , projecta-se uma geratriz do segundo systema da superficie ABC, a qual deve ser parallela á geratriz do systema B_1C_1 da outra superficie, geratriz que existe no infinito; projecta-se tambem uma geratriz do segundo systema da superficie B_1C_1, que deve ser parallela a uma geratriz do segundo systema da superficie BC. A primeira d'estas rectas tambem existe no infinito.

O mesmo se diz ácerca das geratrizes projectadas sobre AI, parallela a B, C, . . .

Para evitar confusões póde dizer-se que a geratriz A, considerada como pertencendo á superficie B_1C_1, é cortada nos dois pontos do infinito por duas geratrizes, parallelas entre si e de systemas differentes, as quaes se projectam sobre AH; em AI projectam-se duas geratrizes de systemas differentes, existentes no infinito e da superficie BC. A geratriz A tem em cada um dos seus pontos do infinito um ponto de intersecção, determinado por duas d'estas ultimas linhas; para cada um d'elles a intersecção dos dois planos tangentes é representada pela geratriz A, e, portanto, esta linha será assymptota da intersecção, a qual passa, projectada, pelo ponto da projecção, tambem designado por A; sendo, por conseguinte, este um ponto duplo da intersecção.

Pela geratriz A e nos pontos do infinito passam, pois, duas geratrizes parallelas de um paraboloide, e duas outras, tambem parallelas, do outro; além d'isso deve passar, em virtude dos raciocinios precedentes, uma geratriz commum aos dois systemas da superficie BC, e uma outra commum aos dois systemas da superficie B_1C_1; a primeira d'estas, parallela ás geratrizes do infinito de B_1C_1, intercepta-as em dois pontos, correspondentes a ramos infinitos da curva de intersecção, cuja assymptota será a intersecção das duas geratrizes do infinito de B_1C_1 com o plano tangente no infinito da geratriz commum aos dois systemas de BC.

Do mesmo modo se determina outra assymptota pelas duas geratrizes do infinito de BC, que encontram a geratriz A.

Cada uma d'estas assymptotas será, portanto, parallela a duas geratrizes do infinito de uma das superficies e a uma geratriz da outra.

Ha ainda uma quarta assymptota, determinada pelas geratrizes parallelas á intersecção dos planos P_1 e P'_1; suppondo-se que A, geratriz commum, é parallela á intersecção de P e P'. Esta assymptota é a unica que não passa pelo ponto A da projecção.

As transversaes, tiradas pelo ponto A na projecção da superficie, teem além d'este ponto ainda um outro de intersecção, resultando por tal facto uma curva de 3.º grau, a qual admitte um triangulo assymptotico e tem um ponto duplo em A. Obtem-se, assim, um resultado analogo áquelle a que se chegou pela intersecção de dois hyperboloides, que admittem uma geratriz commum.

— Se os quatro planos directores, sendo differentes, se cortarem segundo rectas parallelas, e para isso basta que uma qualquer das seis intersecções seja parallela a outra, em vez de tres assymptotas haverá duas geratrizes communs no infinito.

— As geratrizes parallelas das duas superficies, não existentes no infinito, as quaes vão cortar a geratriz A, podem ser levadas á coincidencia, desapparecendo a quarta assymptota. N'este caso ha duas geratrizes communs: A e G (fig. 9.ª), e como as transversaes, que partem de A, devem ter um ponto commum com a intersecção, será esta uma hyperbole, tendo por assymptotas as linhas AH e AI. As duas rectas A e G, que se cortam, representam uma hyperbole reduzida ás assymptotas. A hyperbole seria cortada por uma transversal, partindo de A, em dois pontos, no caso de ella não estar reduzida ás assymptotas, que é o que se dá. A intersecção será composta de geratrizes.

— Quando os paraboloides admittem o mesmo plano director P, os systemas que lhe respeitam terão as suas geratrizes parallelas duas a duas.

Os dois outros planos directores P_1 e P_2 intersectam-se mutuamente e com aquelle, determinando tres intersecções, as quaes podemos considerar como as arestas d'um triedro. A geratriz commum póde ser parallela á intersecção de P_1 e P_2, ou á de qualquer d'estes planos com o plano director commum; no primeiro caso não pertence aos systemas d'este e a projecção executa-se como na figura antecedente, tendo as projecções parallelas de uma das superficies uma direcção differente das parallelas da outra, e a intersecção será ainda composta de geratrizes.

— Quando a geratriz commum fôr parallela a qualquer das intersecções de P_1 e P_2 com P, pertence ao systema d'este plano em cada um dos paraboloides, e todas as linhas do mesmo systema em cada superficie se projectam, tendo uma só direcção commum: BB_1, CC_1, DD_1, ..., como indica a fig. 10.ª Sobre uma transversal, que parta de A, ha um unico ponto de intersecção; o mesmo se diz a respeito de cada uma das parallelas. Duas geratrizes, do systema de P, são parallelas á intersecção d'este plano com aquelle dos dois P_1, P_2, a que não é parallela a geratriz commum; duas geratrizes do outro systema são parallelas á intersecção de P_1 com P_2. As primeiras projectam-se parallelamente a BB_1, CC_1, ...; as segundas sobre uma recta AM. As duas assymptotas resultantes são tambem parallelas a estas linhas, e a intersecção que d'aqui provém será uma hyperbole reduzida ás assymptotas. A intersecção será ainda composta de geratrizes.

— Quando os planos directores coincidirem, a cada geratriz de uma superficie corresponde uma parallela na outra, e teem sempre as duas superficies quatro geratrizes no infinito communs. A cada plano director commum correspondem sempre duas geratrizes do infinito communs. No caso sujeito, de serem communs os planos directores, tendo os paraboloides uma geratriz commum, além das quatro do infinito, podemos levar uma das superficies a coincidir com a outra em certos casos, mas não em todos.

Na fig. 10.ª a transversal gyrante AM contém n'este caso as projecções de duas geratrizes parallelas, e, portanto, sobre ella não se projecta ponto algum de intersecção, a não ser que as duas parallelas se confundam.

Do que fica dicto póde concluir-se o seguinte:

A intersecção de dois paraboloides, que teem só uma geratriz commum e planos directores differentes, é uma curva de 3.º grau, que admitte um triangulo assymptotico. Em todos os outros casos a intersecção compõe-se de linhas rectas.

b) Caso de duas geratrizes communs. — Duas geratrizes do mesmo systema: se os planos directores forem communs, é evidente que os dois paraboloides coincidem; se forem diversos admittirão ainda uma outra geratriz commum, parallela á intersecção dos dois planos directores, de systema diverso do d'aquellas geratrizes.

Duas geratrizes de systemas differentes: projectando as superficies sobre um plano perpendicular a qualquer das geratrizes communs, as do mesmo systema da escolhida projectam-se segundo rectas parallelas em cada superficie, podendo as de uma ter a mesma direcção das da outra, ou direcções differentes, como fica indicado pelas figuras respectivas ao paraboloide. É evidente pela simples inspecção d'essas figuras, e resulta ainda do que foi dicto a respeito do caso, em que ha uma unica geratriz commum, que as superficies podem não admittir nenhuma outra geratriz commum.

D'ahi as proposições:

Quando dois paraboloides admittirem duas geratrizes communs, do mesmo systema, ou coincidem, ou admittem outra geratriz commum, de systema differente do das primeiras.

Quando dois paraboloides admittirem duas geratrizes communs, de systemas differentes, ou não teem mais intersecção alguma, ou se cortam ainda segundo uma geratriz de qualquer dos systemas.

A circumstancia de não admittir esta superficie geratrizes parallelas, se excluirmos as do infinito, faz com que as proposições, estabelecidas para o hyperboloide, divirjam das do paraboloide.

A theoria da primeira d'estas superficies é inteiramente applicavel á segunda pela intervenção do infinito, e não é, portanto, rigorosamente indispensavel a consideração especial do paraboloide, em que entrei.

26. *Dadas duas geratrizes,* A *e* A_1, *do mesmo systema n'um paraboloide, um plano, gyrante em tôrno de* A, *corta* A_1 *em pontos* m, n, p, . . ., *pelos quaes passam geratrizes do outro systema; as perpendiculares, levantadas pelos pontos de intersecção, a estas geratrizes, existentes no plano movel, formam um paraboloide hyperbolico.*

Tome-se MN, parallela á geratriz A (fig. 11.ª), e por um ponto O tirem-se rectas parallelas ás geratrizes do systema a que não pertence A: *Or*, *Oq*, *Od*, . . .; estas linhas existem n'um plano, parallelo ao director do systema. No plano de OM e Or tire-se Oc, perpendicular a Or, e da mesma sorte no plano de CM e Oq a linha Ob, perpendicular a Oq, e por ultimo no plano de OM e Od a perpendicular a esta recta Oa. As linhas Oa, Ob e Oc são parallelas ás perpendiculares a que se refere o enunciado d'esta questão, por isso que Od, Oq e Or são parallelas a geratrizes de systema diverso do de A e Oa, Ob e Oc, que lhes são respectivamente perpendiculares, existem no plano movel, correspondendo cada uma d'ellas a uma posição d'este, como acontece ás linhas em questão.

Se as perpendiculares, de que falla o enunciado, existem n'um paraboloide, como geratrizes do mesmo systema n'este, são parallelas a um plano, e por isso Oa, Ob e Oc devem existir no mesmo plano. É o que facilmente se reconhece, tirando por M um plano perpendicular a MN, ou á geratriz A, o qual vai cortar Od, Oq e Or nos pontos d, q e r, situados em linha recta, visto que as linhas respectivas existem n'um plano. As rectas Oa, Ob e Oc serão cortadas em pontos a, b e c, e, para que ellas existam n'um plano, necessario é que estes pontos estejam em linha recta.

Dos triangulos aOd, bOq, cOr, rectangulos em O, deduz-se:

$$a\mathrm{M}\times \mathrm{M}d=\mathrm{M}b\times \mathrm{M}q=\mathrm{M}c\times \mathrm{M}r.$$

Os pontos a, b e c existem, portanto, n'uma recta anti-parallela de dr, o que demonstra a proposição, visto que todas as rectas, parallelas a um plano, que encontram no espaco as linhas rectas A e A_1, situadas em planos diversos, estão n'um paraboloide hyperbolico.

27. *Dadas quatro rectas, no espaço, parallelas a um plano, mas não existentes no mesmo paraboloide, um plano gyrante em tôrno de uma d'ellas,* G, *cortará as outras,* A, B e C, *em tres pontos moveis,* α, β, γ, *vertices de um triangulo variavel, cujo centro do circulo circumscripto percorre uma recta.*

Tres quaesquer das linhas dadas definem um paraboloide hyperbolico, e podemos, pois, considerar as tres superficies GAB, GAC, GBC da mesma directriz G, tendo a primeira por geratriz a linha $\alpha\beta$, a segunda $\alpha\gamma$, a terceira $\beta\gamma$.

Os pontos medios d'estes segmentos, lados do triangulo variavel, caminham sobre linhas rectas, que são geratrizes, do mesmo systema de G, nos paraboloides.

Se pelo ponto medio do lado $\alpha\beta$ e no plano movel levantarmos uma perpendicular a esta linha, ella descreverá um outro paraboloide (26), e, dando-se o mesmo com os outros lados do triangulo variavel, temos tres paraboloides $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\gamma}$, $P_{\beta\gamma}$.

Duas quaesquer d'estas superficies admittem como plano director commum o parallelo ás rectas G e ás que passam pelos pontos medios dos lados do triangulo, visto serem estas geratrizes dos tres primeiros paraboloides GAB, GAC, GBC.

Portanto: dois paraboloides $P_{\alpha\beta}$ e $P_{\alpha\gamma}$, por exemplo, teem uma geratriz commum G e um plano director commum; logo, em virtude de (25), só se podem cortar segundo geratrizes. As perpendiculares, levantadas sobre os segmentos nos pontos medios d'estes, em cada posição do triangulo variavel, determinam o centro do circulo circumscripto. O centro move-se sobre uma recta, que é a intersecção dos tres paraboloides $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\gamma}$, $P_{\beta\gamma}$.

28. *Um plano movel em tôrno a uma recta, exterior a um triedro, cortará este segundo um triangulo variavel, cujo centro do circulo circumscripto caminha n'uma recta.*

Chamando á recta G; ás arestas do triedro A, B e C; aos vertices do triangulos α, β, γ; vê-se que em logar dos paraboloides, precedentemente considerados, GAB, GAC, GBC, obteremos tres planos, os quaes podem ser designados do mesmo modo, suppondo-se ainda gerado o primeiro d'estes por $\alpha\beta$, o segundo por $\alpha\gamma$, o terceiro por $\beta\gamma$.

Os pontos medios d'estes segmentos existem sobre ramos de hyperboles, situados nas faces do triedro, representando as curvas as polares diametraes dos traços da recta G sobre as faces, em relação ás arestas.

As perpendiculares, situadas no plano movel, como em (27), existem n'um paraboloide, o que se vê bem, visto que é applicavel a este caso a demonstração feita em (26).

Designando os paraboloides das perpendiculares por $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\gamma}$ e $P_{\beta\gamma}$, reconhece-se que dois d'elles, $P_{\alpha\beta}$ e $P_{\alpha\gamma}$, por exemplo, teem a mesma geratriz G, e, visto ter a hyperbole da face AB, assymptotas parallelas ás arestas d'esta, como se dá na face AC, segue-se que em cada superficie ha uma geratriz do systema de G, parallela á aresta A.

Os dois paraboloides considerados, tendo um plano director commum e uma geratriz commum, segundo (25), só podem ter intersecções rectilineas.

O centro do circulo circumscripto caminha, pois, pela recta, intersecção de tres paraboloides, dos quaes é geratriz commum.

BIBLIOGRAPHIA

E. Cesàro. — *Alcune misure negli iperspazii* (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, t. XXIV).
—— *A preposito d'un problema sulla eliche* (*Item*).
—— *Sur la distribution mutuelle des nombres polygônes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª serie, t. V).

A. Marre. — *Notice sur la vie et les travaux de François-Joseph Lionnet* (*Bulletino de Bibliografia delle Scienze Matematiche*, t. XVIII).

M. d'Ocagne. — *Sur l'enveloppe de certaines droites variables* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª serie, t. V).
—— *Sur le cercle orthoptique* (*Item*).
—— *Sur une suite de polygônes, etc.* (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, t. IX).
—— *Sur un problème de limite* (*Mathesis*, t. VI).
—— *Transformation des propriétés barycentriques au moyen de la méthode des polaires reciproques* (*Item*).
—— *Monographie de la symédiane* (*Journal de Mathématiques élémentaires*).
—— *Sur une suite récurrente* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIV).

P. Mansion. — *Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss* (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3.ª serie, t. XI).

REMARQUE SUR LA THÉORIE DES SÉRIES

Extrait d'une lettre adressée á F. Gomes Teixeira

PAR

M. Lerch (à Prague)

... C'est une remarque sur la théorie élémentaire des séries que je me permets, Monsieur, de vous communiquer. Les commençants pensent presque toujours qu'une série infinie convergente

$$(0) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu + \ldots$$

formée avec des nombres positifs doit être telle que la limite

$$(1) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$$

a une valeur inférieure à l'unité ou au plus égale à l'unité. Je vous communiquerai, Monsieur, une série bien convergente, pour laquelle la limite (1) n'existe pas, et où le quotient sous le signe *lim.* peut devenir aussi grand que l'ont veut, si l'on donne á ν une valeur convenable. C'est la série de la forme (0) dont le terme général est

$$u_\nu = \delta^{\nu-(\lg\nu)} \cdot g^{\frac{1}{2}(\lg\nu)\{1+(\lg\nu)\}},$$

où j'ai désigné par $(\lg \nu)$ la partie entière du logarithme vulgaire de ν, et où les quantités δ, g sont positives, $\delta < 1$, $g > 1$, mais telles que $\delta\sqrt{g} < 1$.

On voit immédiatement que cette série est convergente; car on a

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{u_\nu} = \delta < 1.$$

De l'autre part vous voyez, Monsieur, que si ν n'est pas de la forme $10^{\mu}-1$, la quantité $[\lg(\nu+1)]$ étant égale à $(\lg \nu)$, on aura

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}=\delta<1,$$

et, si ν est de la forme indiquée, on aura

$$[\lg(\nu+1)]-(\lg\nu)=1,$$

et par conséquent

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}=g^{(\lg\nu)+1},$$

expression qui peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut.

Prague, le 30 mai 1886.

THEORIA DA ROTAÇÃO

POR

J. M. RODRIGUES
Primeiro tenente de Artilheria

As equações de Euler

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=L$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,pr=M$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=N$$

definem o movimento do solido invariavel em volta de um ponto fixo; mas não são integraveis senão em casos muito particulares.

Se o solido fôr inteiramente livre, estas equações definem o movimento de rotação em volta do seu centro de gravidade, como se fosse um ponto fixo; mas então só se sabem integrar quando forem nullos os momentos das forças exteriores.

N'este artigo vamos apresentar um novo caso de integrabilidade das equações de Euler, muito notavel pelas suas applicações á Balistica e á Mechanica Celeste, para definir o movimento dos projecteis oblongos na atmosphera, e o movimento dos planetas no espaço.

I

As equações differenciaes do movimento de rotação de um solido de revolução inteiramente livre são

$$A\frac{dp}{dt}+(C-A).qr=L$$

$$A\frac{dq}{dt}-(C-A).pr=M$$

$$C.\frac{dr}{dt}=N$$

sendo

$$p=\frac{d\psi}{dt}.\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta+\frac{d\theta}{dt}.\cos\varphi,$$

$$q=\frac{d\psi}{dt}.\cos\varphi\operatorname{sen}\theta-\frac{d\theta}{dt}.\operatorname{sen}\varphi,$$

$$r=\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}.\cos\theta,$$

as equações que ligam as componentes da rotação instantanea ás coordenadas angulares de Euler.

Os tres eixos principaes de inercia constituem um systema de eixos moveis ligados invariavelmente ao solido de revolução, com a sua origem no centro de gravidade. Concebamos pois um systema rectangular de eixos fixos

$$OX,\quad OY,\quad OZ$$

com a mesma origem dos eixos moveis, coincidindo o eixo dos Z com a tangente á trajectoria descripta pelo centro de gravidade no movimento de translação. O plano dos ZX será pois o plano do movimento, e o plano dos ZY o plano normal á trajectoria.

A intersecção do plano normal com o plano equatorial do solido de revolução determina a *linha dos nódos*, que fórma com OX o angulo ψ e com Ox o angulo φ. O angulo θ mede a *obliquidade* do plano equatorial com o plano normal, ou inclinação do eixo de figura com a direcção do movimento.

As tres coordenadas angulares de Euler

$$\theta, \quad \psi, \quad \varphi$$

determinam pois respectivamente a *nutação*, a *precessão* e a *ascensão recta* do movimento.

Determinando os tres angulos em funcção do tempo, obtem-se immediatamente em qualquer instante a posição dos eixos moveis em relação aos eixos fixos, e, por consequencia, a imagem sensivel do movimento de um solido de revolução em volta do seu centro de gravidade, em todos os pontos da sua trajectoria.

II

THEOREMA. — *Se a resultante das forças exteriores que actuam sobre um solido de revolução existir no plano determinado pelo eixo de figura e pela direcção do movimento, e fôr uma funcção da obliquidade, as equações de Euler*

$$A\frac{dp}{dt} + (C - A) \cdot qr = L$$

$$A\frac{dq}{dt} - (C - A) \cdot pr = M$$

$$C \cdot \frac{dr}{dt} = N$$

são integraveis pela reducção ás quadraturas.

Com effeito, transportando no seu plano a resultante das forças exteriores para o centro de gravidade gera-se um conjugado, cujo eixo coincide com a linha dos nódos.

*

Mas, sendo a força uma funcção da obliquidade

$$\rho = f(\theta),$$

será

$$G = F(\theta)$$

o movimento do binario resultante; por consequencia

$$L = \quad G \,.\, \cos\varphi,$$

$$M = -G \,.\, \operatorname{sen}\varphi,$$

$$N = 0,$$

são as projecções do eixo do conjugado sobre os eixos principaes de inercia: logo

$$A\frac{dp}{dt} + (C - A) \,.\, qr = \quad G \,.\, \cos\varphi,$$

$$A\frac{dq}{dt} - (C - A) \,.\, pr = -G \,.\, \operatorname{sen}\varphi,$$

$$C \,.\, \frac{dr}{dt} = 0,$$

são as equações differenciaes do movimento de rotação do solido.

A terceira equação dá immediatamente

$$r = r_0 = \text{const.},$$

d'onde se deduz o seguinte

THEOREMA. — *Se a resultante das forças exteriores, que actuam sobre um solido de revolução, existir no plano determinado pelo eixo de figura e pela tangente á trajectoria, a rotação do solido em volta do seu eixo de figura é sempre constante em toda a duração do movimento.*

As equações differenciaes do movimento de rotação são pois

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+r_0(C-A).q &= \quad G.\cos\varphi \\ A\frac{dq}{dt}-r_0(C-A).p &= -G.\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (a)$$

sendo

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{d\psi}{dt}.\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta+\frac{d\theta}{dt}.\cos\varphi \\ q &= \frac{d\psi}{dt}.\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta-\frac{d\theta}{dt}.\operatorname{sen}\varphi \\ r_0 &= \frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}.\cos\theta \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= p\cos\varphi-q.\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta.\frac{d\psi}{dt} &= p\operatorname{sen}\varphi+q.\cos\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= r_0-\frac{d\psi}{dt}.\cos\theta \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Multiplicando a primeira equação por p e a segunda por q e, sommando, vem

$$A\left(p\frac{dp}{dt}+q\frac{dq}{dt}\right)=G.(p\cos\varphi-q\operatorname{sen}\varphi);$$

multiplicando depois a primeira por *sen* φ e a segunda por *cos* φ e sommando, resulta

$$A\left(\frac{dp}{dt}\operatorname{sen}\varphi+\frac{dq}{dt}.\cos\varphi\right)-r_0(C-A).(p\cos\varphi-q\operatorname{sen}\varphi)=0;$$

mas

$$\frac{d\theta}{dt} = p \cos\varphi - q \operatorname{sen}\varphi,$$

por consequencia

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{A} \,.\, \frac{d(p^2+q^2)}{dt} = 2\mathrm{G} \,.\, \frac{d\theta}{dt} \\ &\mathrm{A}\left(\frac{dp}{dt} \,.\, \operatorname{sen}\varphi + \frac{dq}{dt}\cos\varphi + r_0\frac{d\theta}{dt}\right) = \mathrm{C}r_0 \,.\, \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}\right\}$$

são as equações differenciaes da rotação.

Ora

$$p^2+q^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \,.\, \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2,$$

$$\operatorname{sen}\theta \,.\, \frac{d\psi}{dt} = p \,.\, \operatorname{sen}\varphi + q \,.\, \cos\varphi,$$

e, derivando, resulta

$$\frac{d\left(\operatorname{sen}^2\theta \,.\, \dfrac{d\psi}{dt}\right)}{dt} = \operatorname{sen}\theta \,.\, \left(\frac{dp}{dt}\operatorname{sen}\varphi + \frac{dq}{dt}\cos\varphi + r_0\frac{d\theta}{dt}\right),$$

por consequencia, substituindo nas equações precedentes, resultam immediatamente as equações differenciaes do movimento de rotação:

$$\left.\begin{aligned} &d\left(\operatorname{sen}^2\theta \,.\, \frac{d\psi}{dt}\right) = r_0\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} \,.\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ &d\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \,.\, \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = \frac{2}{\mathrm{A}} \,.\, \mathrm{G} \,.\, d\theta \end{aligned}\right\};$$

mas

$$\mathrm{G} = \mathrm{F}(\theta),$$

logo, pondo

$$a=r_0\frac{C}{A},$$

e

$$b=\frac{2}{A},$$

resultam as equações differenciaes da *precessão* e *nutação* do movimento

$$\left.\begin{array}{r} d\left(\operatorname{sen}^2\theta\,.\,\dfrac{d\psi}{dt}\right)=-a\,.\,d\cos\theta \\ d\left[\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2+\operatorname{sen}^2\theta\,.\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\right]=b\mathrm{F}(\theta)\,d\theta \end{array}\right\}\;\ldots\ldots\;(p)$$

immediatamente integraveis pelos methodos elementares.

III

Contando o tempo a partir de uma dada epocha do movimento, teremos para

$$t=0$$

$$\frac{d\psi}{dt}=0 \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{dt}=0,$$

e por consequencia

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{sen}^2\theta\,.\,\dfrac{d\psi}{dt}=a\,.\,(\cos\theta_0-\cos\theta) \\ \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2+\operatorname{sen}^2\theta\,.\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2=b\,.\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta}\mathrm{F}(\theta)\,d\theta \end{array}\right\}$$

são os integraes de primeira ordem das equações do movimento de rotação.

As equações da precessão e nutação do movimento são pois

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{a' - a \cdot \cos\theta}{1 - \cos^2\theta} \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= f(\cos\theta) - \frac{(a' - a \cdot \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} \end{aligned}\right\}$$

onde

$$a' = a \cdot \cos\theta$$

$$f(\cos\theta) = b \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{F}(\theta) \cdot d\theta,$$

e a terceira das equações (b)

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos\theta$$

é a equação da ascensão recta

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - \frac{a' - a \cdot \cos\theta}{1 - \cos^2\theta} \cdot \cos\theta.$$

Estas tres equações definem o movimento de rotação e exprimem a nutação em funcção do tempo, a precessão e a ascensão recta em funcção da nutação.

Fazendo

$$u = \cos\theta$$

resulta

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{dt},$$

e pondo

$$\chi(u) = (1 - u^2) \cdot f(u) - (a' - a \cdot u)^2$$

reduzem-se estas equações a uma fórma muito simples:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sqrt{\chi(u)} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{a'-a.u}{1-u^2} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= r_0 - \frac{a'.u-a.u^2}{1-u^2} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (q)$$

logo

$$\left.\begin{aligned} t-t_0 &= \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\chi(u)}} \\ \psi-\psi_0 &= \int_{u_0}^{u} \frac{a'-au}{1-u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{\chi(u)}} \\ \varphi-\varphi_0 &= \int_{u_0}^{u} \frac{a'u-au^2}{1-u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{\chi(u)}} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (r)$$

são os tres integraes das equações de Euler, que definem respectivamente a nutação, a precessão e a ascensão recta do movimento de rotação, quando a resultante das forças exteriores fôr uma funcção da obliquidade e existir no plano determinado pelo eixo de figura e pela tangente á trajectoria.

As quadraturas reduzem-se ás funcções ellipticas nos dois casos seguintes:

1.° quando o momento resultante das forças exteriores fôr proporcional ao seno da obliquidade;

2.° quando fôr proporcional ao producto do seno pelo coseno da obliquidade.

Com effeito, se fôr

$$G = h.\operatorname{sen}\theta$$

resulta

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F(\theta)\, d\theta = h(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

e

$$f(u) = bh.(u - u_0);$$

portanto a funcção

$$\chi(u) = (1 - u^2).f(u) - (a' - au)^2$$

é um polynomio do terceiro grau; logo os integraes das equações de Euler reduzem-se ás funcções ellipticas.

Se fôr

$$G = h\cos\theta . \operatorname{sen}\theta$$

resulta

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F(\theta)\,d\theta = -h.\int_{\theta_0}^{\theta}\cos\theta . d\cos\theta$$

$$= \frac{h}{1}(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta)$$

e

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(u) = b\frac{h}{2}.(u^2_0 - u^2),$$

logo a funcção $\chi(u)$ é um polynomio do quarto grau, e por consequencia a nutação, a precessão e a ascensão recta do movimento exprimem-se em funcção do tempo por meio das funcções ellipticas.

A reducção ainda se verifica quando o momento resultante das forças exteriores fôr tal que seja

$$f(u) = \frac{(a' - a.u)^2}{1 - u^2} + R(u),$$

sendo R um polynomio do terceiro ou quarto grau, porque então teremos

$$\chi(u) = R(u).$$

A nutação, a precessão e a ascensão recta, exprimindo-se por meio de funcções ellipticas, variam periodicamente no movimento de rotação de um solido de resolução, inteiramente livre, quando o momento resultante das forças exteriores satisfizer ás condições precedentes.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

PAR

M. H. Le Pont

(à Caen)

1. Considérons dans le plan huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; prenons pour triangle de référence le triangle des trois diagonales du quadrilatère complet défini par quatre de ces points, les points 1, 3, 5, 7, par exemple, la diagonale (1, 5) étant l'axe des x, la diagonale (3, 7) l'axe des y. Nous avons alors pour équations des côtés du quadrilatère:

$$\begin{array}{ll}
(1,3) & z+px+qy=0 \\
(3,5) & z+px-qy=0 \\
(5,7) & z-px-qy=0 \\
(7,1) & z-px+qy=0
\end{array}$$

Pour équations des côtés de l'octogone, nous pouvons prendre:

$$\begin{array}{l}
\overline{(1,2)} \equiv z+\lambda px+\quad qy=0 \\
\overline{(2,3)} \equiv z+px\quad +\mu qy=0 \\
\overline{(3,4)} \equiv z+px\quad +\nu qy=0 \\
\overline{(4,5)} \equiv z-\rho px-\quad qy=0 \\
\overline{(5,6)} \equiv z-lpx-\quad qy=0 \\
\overline{(6,7)} \equiv z-px\quad -mqy=0 \\
\overline{(7,8)} \equiv z-px\quad -nqy=0 \\
\overline{(8,1)} \equiv z+rpx+\quad qy=0
\end{array}$$

λ, μ, ν, ρ, l, m, n, r désignant des constantes et les premiers membres de ces équations représentant, à des fauteurs numériques près, les distances à ces droites d'un point quelconque du plan.

Si nous exprimons qne ces distances δ satisfont à l'identité tangentielle de Mr. P. Serret:

$$\Sigma^8{}_1\, \theta_i \delta^3{}_i = 0 \tag{1}$$

le tableau des coefficients des θ dans les équations d'identification est:

$$\left\Vert \begin{array}{cccccccccc} \lambda^3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^2 & \lambda & \lambda \\ -l^3 & -1 & 1 & 1 & -1 & -l & l^2 & -l^2 & -l & l \\ r^3 & 1 & 1 & 1 & 1 & r & r^2 & r^2 & r & r \\ -\rho^3 & -1 & 1 & 1 & -1 & -\rho & \rho^2 & -\rho^2 & -\rho & \rho \\ 1 & \mu^3 & 1 & \mu^2 & \mu & 1 & 1 & \mu & \mu^2 & \mu \\ -1 & -m^3 & 1 & m^2 & -m & -1 & 1 & -m & -m^2 & m \\ 1 & \nu^3 & 1 & \nu^2 & \nu & 1 & 1 & \nu & \nu^2 & \nu \\ -1 & -n^3 & 1 & n^2 & -n & -1 & 1 & -n & -n^2 & n \end{array} \right\Vert . \tag{2}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette identité (1) soit satisfaite, c'est-à-dire que les côtés de l'octogone soient associés suivant le module 3, sont que tous les déterminants du huitième ordre contenus dans ce tableau (2) soient nuls.

Si nous faisons à la fois dans ce tableau:

$$\lambda = 1 \quad m = 1$$

avec:

$$l = 1 \quad \mu = 1$$

tous les déterminants s'annullent car ils ont quatre lignes identiques deux à deux; ce tableau s'annule donc en même temps que la fonction:

$$u = (1 - \lambda)(1 - m) - (1 - l)(1 - \mu).$$

Il s'annulle aussi en même temps que la fonction

$$v=(1+\rho)(1+n)-(1+r)(1+\nu),$$

car si on y fait á la fois:

$$\rho=-1 \quad n=-1$$

avec:

$$r=-1 \quad \nu=-1$$

quatre lignes deviennent encore identiques deux à deux. Par conséquent, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les côtés de l'octogone soient associés suivant le module 3 sont que nous ayons

$$u=0$$

et

$$v=0$$

c'est-à-dire

$$\frac{1-\lambda}{1-l}=\frac{1-\mu}{1-m} \qquad (3)$$

et

$$\frac{1+\nu}{1+n}=\frac{1+\rho}{1+r} \qquad (4)$$

Si nous introduisons ces relations dans les équations des diagonales $(\overline{2,6})$

$$\left\{\begin{array}{l} [(1-\lambda\mu)(1-l)+(1-lm)(1-\lambda)]\,px \\ -\ [(1-\lambda\mu)(1-m)+(1-lm)(1-\mu)]\,qy \\ -2\,[(1-\lambda)\ (1-m)-(1-l)\ (1-\mu)]\,z \end{array}\right.$$
$$=0$$

et $(\overline{4,8})$

$$\left\{\begin{array}{l} [(1-\nu\rho)(1+r)+(1-nr)(1+\rho)]\,px \\ +\ [(1-\nu\rho)(1+n)+(1-nr)(1+\nu)]\,qy \\ -2\,[(1+\rho)\ (1+n)-(1+r)\ (1+\nu)]\,z \end{array}\right.$$
$$=0.$$

Nous voyons qu'elles passent par l'intersection des diagonales (1, 5) et (3, 7) et de plus, qu'elles forment avec elles un faisceau harmonique.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

Théorème. — Lorsque huit droites sont associées suivant le module 3, c'est-à-dire telles que toute cubique tangente à sept d'entre elles touche nécessairement la huitième, les quatre diagonales qui joignent les sommets opposés de l'octogone formé par ces huit droites concourent au même point et sont conjuguées harmoniques.

Réciproquement:

Lors que les quatre droites qui joignent les sommets opposés d'un octogone forment un faisceau harmonique, les côtés de cet octogone sont associés suivant le module 3.

2. Correlativement:

Théorème. — Lorsque huit points sont associés suivant le module 3, c'est-à-dire, tels que toute cubique qui passe par sept de ces points passe aussi par le huitième, les points de concours des côtés opposés de l'octogone formé par ces huit points sont sur un même droite et tracent sur cette droite une division harmonique.

Réciproquement:

Lorsque les points de concours des côtés opposés d'un octogone sont en ligne droite et forment une division harmonique, les sommets de cet octogone sont huit points associés suivant le module 3.

Ce théorème peut du reste de démontrer directement sans aucune difficulté.

3. Signalons encore les théorèmes suivants:

Théorème. — Si les distances δ d'un point quelconque du plan à huit droites de ce plan satisfont à l'identité

$$\Sigma^8{}_1\, \theta_i\, \delta^3{}_i = 0 \qquad (a)$$

elles satisfont aussi à l'identité

$$\Sigma^8{}_1\, \gamma_i\, \delta^2{}_i = 0 \qquad (b)$$

et réciproquement.

Conservant les notations du § 1, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'identité (b) soit satisfaite sont que tous les déterminants du sixième ordre contenus dans le tableau

$$\left\|\begin{matrix} \lambda^2 & l^2 & r^2 & \rho^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mu^2 & m^2 & \nu^2 & n^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \mu & -m & \nu & -n \\ \lambda & -l & r & -\rho & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \lambda & l & r & \rho & \mu & m & \nu & n \end{matrix}\right\| \qquad (5)$$

soient nuls.

On verra en raisonnant comme précédemment que ces conditions sont celles qui annulent le tableau (2).

Corrélativement:

Théorème. — Lorsque les distances d de huit points d'un plan à une droite quelconque de ce plan satisfont à l'identité

$$\Sigma^8{}_1\, k_i\, d^3{}_i \equiv 0 \qquad (\alpha)$$

ils satisfont aussi à l'identité

$$\Sigma^8{}_1\, c_i\, d^2{}_i \equiv 0 \qquad (\beta)$$

et réciproquement.

4. Ces deux théorèmes nous donnent immédiatement les suivants:

Théorème. — Un groupe de huit points associés suivant le module 3 forme toujours les sommets de deux quadrangles conjugués à une même conique, et réciproquement, les sommets de deux quadrangles conjugués à une même conique forment toujours un groupe de huit points associés suivant le module 3.

Théorème. — Un groupe de huit droites associées suivant le module 3 forme toujours les côtés de deux quadrangles conjugués à une même conique, et réciproquement, les côtés de deux quadrangles conjugués à une même conique forment toujours un groupe de huit droites associées suivant le module 3.

Théorème. — Huit points et huit droites associés suivant le module 3 déterminent toujours un pentagone et un triangle conjugués à une même conique, et réciproquement, les sommets et les côtés d'un pentagone et d'un triangle conjugués à une même conique forment des groupes de huit points et de huit droites associés suivant le module 3.

THÉORÈME. — Etant donnés huit points associés suivant le module 3, deux quelconques de ces points et les traces de la droite qui les joint sur les côtés opposés des différents quadrangles, formés des côtés de l'hexagone qui a pour sommets les six autres points, et les diagonales qui joignent les sommets opposés de cet hexagone font cinq couples de points conjugués harmoniques par rapport à deux mêmes points, c'est-à-dire dix points en involution; et si on substitue à ces quadrangles les quadrangles complets correspondants, on a en tout vingt deux points en involution.

THÉORÈME. — Lorsque les côtés d'un angle et d'un hexagone sont associés suivant le module 3, les côtés de cet angle et les dix couples de droites qui joignent son sommets au sommets opposés de tous les quadrilatères complets formés avec les côtés de l'hexagone, font onze couples de droites en involution.

5. Huit points quelconques d'une cubique plane unicursale Γ forment toujours un groupe associé suivant le module 3. Prenons sur cette courbe six points H_i dont les distances à une droite Δ sont d_i, puis deux autres points m et M dont les distances à cette droite sont d et D. Nous avons l'identité

$$\Sigma^6{}_1\, \theta_i d^3{}_i \equiv d^3 + \Theta D^3$$

et l'identité équivalente

$$\Sigma^6{}_1\, c_i d^2{}_i \equiv d^2 - C^2 D^2$$

qui s'écrira

$$\Sigma^6{}_1\, k_i d^2{}_i \equiv pq$$

en posant

$$p = d + CD,$$

$$q = d - CD.$$

Si nous désignons par P e Q les points dont les distances à la droite Δ sont p et q, on voit que si l'un de ces points est sur la cubique, ce qu'il est toujours possible de faire en choisissant convenablement les points m et M, l'autre y est aussi, et que si le point M se rapproche indéfiniment du point m, il en est de même des points P et Q. Donc:

Théorème — Un hexagone étant inscrit à une cubique, les polaires d'un point m de la courbe se coupent au même point, et la droite qui joint ce point au point m est tangente en m à la cubique.

Autrement dit:

La tangente à une cubique unicursale en un point quelconque m est le lieu des points de concours des polaires de ce point par rapport aux trois couples de côtés opposés de tous les hexagones inscrits dans cette cubique.

Huit points 1, 2, 3, 4, 5 et O, O′, O″ d'une cubique unicursale forment d'après un théorème précédent un pentagone 1 2 3 4 5 et un triangle conjugués à une même conique; si les points O′ et O″ se rapprochent du point O, le pentagone et le triangle restent conjugués à la même conique dont le cercle diagonal est orthogonal au cercle circonscrit au triangle: cette propriété subsiste à la limite lorsque les points O′ et O″ sont confondus au point O et le cercle circonscrit au triangle infiniment petit O O′ O″, c'est-à-dire le cercle osculateur en O á la cubique est orthogonal au cercle diagonal de la conique. Donc:

Théorème. — Le cercle osculateur en un point O d'une cubique unicursale est la trajectoire orthogonale des cercles diagonaux des coniques conjuguées à tous les pentagones inscrits à la courbe, coniques qui sont de reste tangentes á la cubique au point O.

Mr. P. Serret a montré (*Géométrie de Direction*, pag. 389) que le cercle diagonal d'une conique conjuguée à un pentagone se construit indépendamment de cette conique, la construction du cercle osculateur en un point O d'une cubique unicursale dont on connait cinq autres points ne présente donc aucune difficulté.

DÉMONSTRATION NOUVELLE DU THÉORÈME DE CH. DUPIN

PAR

M. H. Le Pont

Soient trois surfaces S, S_1, S_2:

$$(a) \qquad \lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz = 0$$

$$(a_1) \qquad \lambda_1 dx + \mu_1 dy + \nu_1 dz = 0$$

$$(a_2) \qquad \lambda_2 dx + \mu_2 dy + \nu_2 dz = 0$$

où (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1,)$ $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2.)$ désignent les cosinus directeurs des normales à ces surfaces en leur point d'intersection (x, y, z), de sorte que:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

$$\lambda^2{}_1 + \mu^2{}_1 + \nu^2{}_1 = 1$$

$$\lambda^2{}_2 + \mu^2{}_2 + \nu^2{}_2 = 1$$

ou bien:

$$(b) \qquad \lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu + \nu\, d\nu = 0$$

$$(b_1) \qquad \lambda_1 d\lambda_1 + \mu_1 d\mu_1 + \nu_1 d\nu_1 = 0$$

$$(b_2) \qquad \lambda_2 d\lambda_2 + \mu_2 d\mu_2 + \nu_2 d\nu_2 = 0.$$

Supposons que ces trois surfaces se coupent à angle droit, c'est-à-dire que nous avons:

$$(c) \qquad \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0$$

$$(c_1) \qquad \lambda_2\lambda + \mu_2\mu + \nu_2\nu = 0$$

$$(c_2) \qquad \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = 0.$$

L'élimination de λ, μ, ν entre les équations (a), (c_1) et (c_2) donne:

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

L'élimination des mêmes variables entre les équations (b), (c_1) et (c_2) donne:

$$(\beta) \qquad \begin{vmatrix} d\lambda & d\mu & d\nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où nous tirons:

$$(\gamma) \qquad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{dy}{d\mu} = \frac{dz}{d\nu},$$

équations des lignes de courbure de la surface S.

D'une manière analogue, il vient

$$(\gamma_1) \qquad \frac{dx}{d\lambda_1} = \frac{dy}{d\mu_1} = \frac{dz}{d\nu_1}$$

*

et

$$(\gamma_2) \qquad \frac{dx}{d\lambda_2}=\frac{dy}{d\mu_2}=\frac{dz}{d\nu_2}.$$

Ces équations (γ), (γ_1) et (γ_2) démontrent le théorème de Ch. Dupin.

NOTA SULLA MOLTIPLICAZIONE DI DUE DETERMINANTI

DI

GINO LORIA

Quando si stabilise la teoria dei determinanti indipendentemente daquella delle equazioni lineari, il teorema di moltiplicazione di due determinanti si suol dimostrare in due modi, entrambi estendibili al teorema analago relativo a due matrici rettangolari. L'uno, che si può considerare come il più elementare perchè presuppone soltanto le prime proprietà dei determinanti, si fonda sulla decomposizione di un determinante ad elementi polinomii in una somma di determinanti ad elementi monomii. L'altro, che richiede la conosienza del teorema di Laplace almeno in un caso particolare, fu esposto per la prima volta — per quanto mi consta — dal Sig. Sardi or son quasi vent'anni (*), e venne poi riprodotta in trattati recenti (**).

Orbene, esaminando con qualiche attenzione questa seconda dimostrazione, non è difficile vedere che essa, lievemente modificata, conduce a pone il prodotto di due determinanti sotto la forma di un determinante d'ordine $n+1$ con i^2 elementi perfettamente arbitrari, ove i è un intero positivo compreso fra 0 e n, e però guida a un' estensione delle ordinarià regola di moltiplicazione. Siccome l'utilità pratica dei determinanti cresce in ragione del numero delle trasformazioni che si possono far loro subire senza alterarne il valore, cosi credo non inutile dedicare questa breve nota ad espone l'acennata estensione.

(*) *Giornale di Matematiche* ad uso degli studenti delle Università italiane, diretto dal Prof. Battaglini, vol. v (1867), p. 174–177.

(**) Si vegga p. e. Muir. — A Treatise on the theory of determinants, London, 1882, p. 117 e seg.; Gordan — Vorlesungen über Invariantentheorie. I Bd. Leipzig, 1855, p. 74 e seg.

Sano

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

due determinanti qualunque dell' n^{mo} ordine, sia i un numero intero non negativo ne superiore ad n e L_{pq} $(p, q = 1, 2, \dots, i)$ i^2 quantità arbitrarie.

In grazia del teorema di Laplace, abbiamo:

$$AB = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdot a_{1i} & a_{1i+1} & \cdot a_{1n} & L_{11} & L_{12} & \cdot L_{1i} & 0 & \cdot 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdot a_{2i} & a_{2i+1} & \cdot a_{2n} & L_{21} & L_{22} & \cdot L_{2i} & 0 & \cdot 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdot a_{ii} & a_{ii+1} & \cdot a_{in} & L_{i1} & L_{i2} & \cdot L_{ii} & 0 & \cdot 0 \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdot a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} & \cdot a_{i+1,n} & 0 & 0 & \cdot 0 & -1 & \cdot 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdot a_{ni} & a_{ni+1} & \cdot a_{nn} & 0 & 0 & \cdot 0 & 0 & \cdot -1 \\
0 & 0 & \cdot 0 & 0 & \cdot 0 & b_{11} & b_{21} & \cdot b_{i1} & b_{i+1,1} & \cdot b_{n1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \cdot 0 & 0 & \cdot 0 & b_{12} & b_{22} & \cdot b_{i2} & b_{i+1,2} & \cdot b_{n2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \cdot 0 & 0 & \cdot 0 & b_{1i} & b_{2i} & \cdot b_{ii} & b_{i+1,i} & \cdot b_{ni} \\
0 & 0 & \cdot 0 & 0 & \cdot 0 & b_{1i+1} & b_{2i+1} & \cdot b_{ii+1} & b_{i+1,i+1} & \cdot b_{ni+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \cdot 0 & 0 & \cdot 0 & b_{1n} & b_{2n} & \cdot b_{in} & b_{i+1,n} & \cdot b_{nn}
\end{vmatrix}$$

In questo determinante addizioniamo alla $\overline{n+s}^{\text{ma}}$ orizzontale la $\overline{i+r}^{\text{ma}}$ multiplicata per $b_{i+r,s}$ intendendo che r prenda successivamente tutti i valori $1, 2, \ldots, n-i$ e s i valori $1, 2, \ldots, n$. Se poniamo per brevità

$$(1) \qquad c_{hk} = a_{i+1,h} b_{i+1,k} + a_{i+2,h} b_{i+2,k} + \ldots + a_{nh} b_{nk}$$

ottenemo così:

$$AB = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdot\, a_{1i} & a_{1i+1} & \cdot\, a_{1n} & L_{11} & L_{12} & \cdot\, L_{1i} & 0 & \cdot\, 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdot\, a_{2i} & a_{2i+1} & \cdot\, a_{2n} & L_{21} & L_{22} & \cdot\, L_{2i} & 0 & \cdot\, 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdot\, a_{ii} & a_{ii+1} & \cdot\, a_{in} & L_{i1} & L_{i2} & \cdot\, L_{ii} & 0 & \cdot\, 0 \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdot\, a_{i+1,i} & a_{i+1,\,i+1} & \cdot\, a_{i+1,n} & 0 & 0 & \cdot\, 0 & -1 & \cdot\, 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdot\, a_{ni} & a_{ni+1} & \cdot\, a_{nn} & 0 & 0 & \cdot\, 0 & 0 & \cdot\, -1 \\
c_{11} & c_{21} & \cdot\, c_{i1} & c_{i+1\,1} & \cdot\, c_{n1} & b_{11} & b_{21} & \cdot\, b_{i1} & 0 & \cdot\, 0 \\
c_{12} & c_{22} & \cdot\, c_{i2} & c_{i+1\,2} & \cdot\, c_{n2} & b_{12} & b_{22} & \cdot\, b_{i2} & 0 & \cdot\, 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{1i} & c_{2i} & \cdot\, c_{ii} & c_{i+1\,i} & \cdot\, c_{ni} & b_{1i} & b_{2i} & \cdot\, b_{ii} & 0 & \cdot\, 0 \\
c_{1i+1} & c_{2i+1} & \cdot\, c_{ii+1} & c_{i+1\,i+1} & \cdot\, c_{ni+1} & b_{1i+1} & b_{2i+1} & \cdot\, b_{ii+1} & 0 & \cdot\, 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{1n} & c_{2n} & \cdot\, c_{in} & c_{i+1,n} & \cdot\, c_{nn} & b_{1n} & b_{2n} & \cdot\, b_{in} & 0 & \cdot\, 0
\end{vmatrix}$$

Osservando che in ognuna delle ultime $n-i$ verticali vi è un solo elemento non nullo, quest'ultima relazione si può semplificare e ridursi alla seguente:

$$AB = (-1)^{(n-i)i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{in} & L_{i1} & L_{i2} & \dots & L_{ii} \\ c_{11} & c_{21} & . & c_{n1} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1i} \\ c_{12} & c_{22} & . & c_{n2} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & . & c_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ni} \end{vmatrix}.$$

Facendo finalmente avanzare di $n+i$ posti cia suma delle primè i orizzontali ottoremo:

$$(2) \quad AB = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & . & c_{n1} & b_{11} & b_{12} & . & b_{1i} \\ c_{12} & c_{22} & . & c_{n2} & b_{21} & b_{22} & . & b_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & . & c_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & . & b_{ni} \\ a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & L_{11} & L_{12} & . & L_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & L_{21} & L_{22} & . & L_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{in} & L_{i1} & L_{i2} & . & L_{in} \end{vmatrix}.$$

L'eguaglianza (2), ni cui le n^2 quantiti c_{hk} hanno i valori dati dalle equazioni (1) e le L_{pq} sono perfettamente arbitrarie, esprime la generalizzazione a cui si alludeva nell'introduzione del presente scritto.

In particolare attribuendo a tutte le arbitrarie il valore zero, si ottiene l'altra formola

$$AB = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & . & c_{n1} & b_{11} & b_{12} & . & b_{1i} \\ c_{12} & c_{22} & . & c_{n2} & b_{21} & b_{22} & . & b_{2i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n} & c_{2n} & . & c_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & . & b_{ni} \\ a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & 0 & 0 & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & 0 & 0 & . & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{in} & 0 & 0 & . & 0 \end{vmatrix},$$

la quale esprime un teorema devuto a *Spottiswoode* (*) e che egli dimostrò in un modo che differisce daquello da noi tenuto, e che è più complicato.

Mantova, 4 Maggio 1886.

(*) *Elementary theorems relating to determinants.—Giornale di Crelle,* t. LI (1856), p. 247.

BIBLIOGRAPHIA

. . . .

A. Tartinville. — Théorie des équations et des inéquations. — Paris, 1886.

Nos primeiros dois capitulos vêm as definições preliminares, e os principios em que se funda a transformação das equações e das desegualdades a uma variavel n'outras equivalentes.

No capitulo terceiro vem a resolução das equações e das desegualdades do primeiro gráo, e no capitulo quarto e quinto vem um estudo completo das equações e das desegualdades do segundo gráo.

No capitulo seguinte vem a resolução do systema de duas desegualdades simultaneas, uma do primeiro gráo e outra do segundo.

No capitulo setimo tracta o auctor da comparação das raizes de duas equações do segundo gráo.

No capitulo oitavo vem a resolução de duas desegualdades simultaneas do segundo gráo, e no capitulo seguinte vem a resolução de um systema formado por uma equação do segundo gráo e uma ou muitas desegualdades.

No capitulo decimo e seguinte tracta o auctor da resolução de algumas equações e de algumas desegualdades particulares de gráo superior ao segundo.

Termina o livro pela resolução de muitos problemas que conduzem á applicação dos methodos anteriormente expostos.

Pela noticia resumida que vimos de dar vê-se que o livro do sr. Tartinville é importante, principalmente pelo desenvolvimento com que n'elle se estuda a theoria das desegualdades, a respeito das quaes os livros de Algebra elementar dão apenas rapidas indicações.

R. Guimarães. — *Fórmulas geraes para calcular a área lateral do tronco de cone circular recto* (*Instituto*, de Coimbra, 1886).

O auctor planifica o cône e acha a equação em coordenadas polares da transformada da sua secção plana. Em seguida applica as fórmulas de Calculo integral relativas ás áreas planas, ao sector que resulta da planificação do cône.

J. M. Rodrigues. — *Introducção á theoria da Balistica* (*Revista das Sciencias militares, 1886*).

Principia o sr. Rodrigues o seu interessante trabalho pelo estudo da lei da resistencia dos fluidos no movimento dos projecteis. Ahi veem expostas e discutidas a theoria de Newton e as formulas dos srs. Mayevski e Siacci, deduzidas de experiencias feitas na Inglaterra, na Russia, na Allemanha, na França e na Hollanda.

Em seguida estuda o auctor o problema da resistencia exercida por um fluido sobre um solido de revolução em movimento, reduzindo-o a um problema de quadraturas e dando uma serie de propriedades notaveis que nos não é possivel resumir em breve espaço. Dos resultados achados faz applicação ao cône, ao paraboloide e aos projecteis oblongos usados na artilheria.

J. M. Rodrigues. — *Integração das equações da Balistica* (*Revista das Sciencias militares, 1886*).

N'este jornal temos já muitas vezes dado noticia de trabalhos importantes do sr. Rodrigues a respeito da integração das equações da Balistica.

N'este trabalho o auctor expõe e discute o methodo de integração de Didion, deduz de um modo mais simples as formulas apresentadas nos seus trabalhos anteriores, e d'estas formulas tira aquellas mais simples que se devem empregar no tiro de altas trajectorias.

J. M. Braz de Sá. — *Novas noções sobre os numeros.* — *Porto, 1886.*

O auctor apresenta um novo methodo para effectuar a multiplicação e a divisão de dous numeros, e um meio para reconhenhecer da divisibilidade ou da indivisibilidade de um numero por outro.

D. R. G. de Galdeano. — *Tratado de Aritmética.* — *Toledo, 1884.*

Differe muito dos outros tratados de Arithmetica que conhecemos o livro do sr. Galdeano, tanto sob o ponto de vista philosophico, como pelas questões de que o auctor se occupa.

É dividido em duas partes, na primeira das quaes o auctor tracta do numero abstracto e na segunda do numero concreto.

Principia a primeira parte pelo calculo dos numeros abstractos, e ahi vêm a theoria da numeração e a theoria das operações relativas aos numeros inteiros, que é exposta de modo a preparar para o estudo dos imaginarios, caracterisando o auctor as propriedades fundamentaes de cada operação.

Em seguida vem a theoria do numero abstracto, e ahi o auctor estuda a decomposição do numero em factores, a theoria das congruencias e a theoria da divisibilidade. N'esta parte não veem só os theoremas que se encontram nos tractados ordinarios de Arithmetica, mas uma serie de theoremas interessantes menos elementares.

Na segunda parte (theoria do numero concreto) o auctor principia pelas operações sobre os numeros fraccionarios e complexos, e em seguida passa á theoria d'estes numeros e dos numeros incommensuraveis.

D. R. G. de Galdeano. — *Problemas de Aritmética y Algebra.* — *Toledo, 1885.*

Os problemas d'esta collecção vêm acompanhados dos methodos para resolver os differentes typos de problemas que se podem apresentar em Algebra e em Arithmetica, e de reflexões interessantes sobre a philosophia d'estas sciencias.

O livro primeiro contém os principios geraes de methodologia, e ahi vem um estudo desenvolvido do uso dos methodos analytico e synthetico na Arithmetica e na Algebra.

No livro segundo tracta o auctor das questões relativas ao calculo das probabilidades.

No livro terceiro principia por algumas noções geraes sobre a applicação da analyse á resolução dos problemas arithmeticos e algebricos, e em seguida dá uma collecção de problemas arithmeticos e outra de problemas algebricos.

Finalmente no livro quarto apresenta o auctor alguns principios de technica algebrica, e ahi apparece o estudo da linguagem algebrica, a theoria dos imaginarios, etc.

E. Cesàro. — *Sur l'étude des événements arithmétiques* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Belgique*, t. XLVII).

Este trabalho foi objecto de um relatorio do sr. Catalan, publicado no tomo XI dos *Bulletins* da Academia das Sciencias da Belgica.

—— *Fonctions énumératrices* (*Annali di Matematica*, serie 2.ª, tomo XIV).

—— *Sur les membres de Bernoulli et Euler* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1886).

—— *Sur un théorème de M. Lipschitz, et sur la partie fractionnaire des nombres de Bernoulli* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, t. XIV).

—— *Formes algébriques à liens arithmétiques* (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 1886).

—— *Intorno a taluni gruppi di operazioni (Item).*

—— *Source d'identités* (*Mathesis*, t. VI).

—— *Remarques sur une formule de Newton (Item).*

—— *Théorème d'Algèbre (Item).*

Davide Besso. — *Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, Roma, 1866).

Gino Loria. — *Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bi-circulaires du 4.ᵉ ordre* (*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1886).

M. d'Ocagne. — *Sur l'algorithme* $[a\,b\,c\,.\,.\,.\,l]^{(n)}$. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1886).

—— *Sur une quartique unicursale* (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1886).

G. T.

SOBRE UM THEOREMA RELATIVO Á COMPARAÇÃO DE ARCOS DE ELLIPSE

POR

RODOLPHO GUIMARÃES

Alumno da Escola Polytechnica do Porto

1. THEOREMA. — *Dado um quadrante de ellipse podemos achar sempre sobre elle um arco tal que o seu comprimento seja expresso por uma linha recta.*

Sobre este assumpto conhecemos os theoremas de Graves e de Fagnano, de que em seguida lançamos mão, os quaes, como se vê, exprimem por uma linha recta a differença de dois arcos de ellipse *não sobreponiveis.* O theorema que apresentamos dá-nos, egualmente expressa em uma linha recta, a differença de dois arcos sobreponiveis, ou, o que vale o mesmo, um arco.

Seja ABCD a ellipse dada (*). Pelas extremidades A e B dos eixos maior e menor tiremos-lhe tangentes, as quaes interceptarão qualquer das suas ellipses homofocaes nos pontos M e M′.

Tiremos por estes pontos tangentes MA, MB′, M′B, M′A′ á ellipse ABCD. Os pontos de tangencia B′ e A′ podem estar sobre o quadrante AB, em outro quadrante qualquer ou coincidirem com os pontos A e B. Ora, Graves demonstrou (**) que *se de um ponto qualquer* M *de uma ellipse homofocal de outra* ABCD, *conduzirmos tangentes* MA *e* MB′ *a esta, o arco* AB *comprehendido*

(*) Pede-se ao leitor que construa a figura.
(**) Ch. Hermite, *Cours d'Analyse*, pag. 414.

entre os pontos de tangencia diminuido da somma MA + MB′ *das tangentes é constante.* Temos pois

$$\widehat{AB'} - \widehat{BA'} = \widehat{BB'} - \widehat{AA'} = (AM - A'M') + B'M - BM') \ldots \text{(I)}$$

Esta relação é independente da posição sobre a ellipse dos pontos A′ e B′.

Supponhamos pois que A′ e B′ estão situados respectivamente no quarto e segundo quadrantes, e designemos por A'_1 e B'_1 as suas posições symetricas no quadrante AB. Por serem os arcos $\widehat{AA'}$ e $\widehat{BB'}$ eguaes respectivamente a $\widehat{AA'_1}$ e $\widehat{BB'_1}$, a relação (I) dá

$$\widehat{BB'_1} - \widehat{AA'_1} = (AM - A'M') + (B'M - BM') \ldots\ldots \text{(II)}$$

Por outro lado sabemos pelo theorema de Fagnano (*) que, *dado um arco de ellipse* AA'_1 *situado no quadrante* AB, *podemos achar sempre sobre elle um ponto* associado μ, *de modo que a differença dos arcos* $B\mu$ *e* AA'_1 *seja egual á perpendicular* p *baixada do centro* O *da ellipse sobre a normal nos pontos* A'_1 *ou* μ; isto é,

$$\widehat{B\mu} - \widehat{AA'_1} = p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

De (I) e (II) deduz-se a equação

$$\left.\begin{aligned} \pm \widehat{BB'_1} \mp \widehat{B\mu} = \pm \widehat{\mu B'_1} = \\ = \pm [(AM - A'M') + (B'M - BM')] \mp p \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots \text{(A)}$$

em que tomamos um ou outro signal, segundo o arco $\widehat{BB'_1}$ for maior ou menor que $\widehat{B\mu}$.

Esta equação demonstra o theorema proposto.

(*) Frenet, *Recueil d'exercices de calcul infinitésimal*, pag. 388.

2. O caso dos pontos A' e B' coincidirem com as extremidades A e B dos eixos maior e menor, tem sómente logar quando os pontos M e M' coincidem com a intersecção das tangentes conduzidas por A e B. Vejamos qual é n'este caso a expressão representativa da linha recta equivalente a um arco situado sobre o quadrante AB. Para isso conduzamos pelo ponto M de intersecção das tangentes AM e BM um ramo de hyperbole homofocal da ellipse ABCD, e seja A'_1 o ponto em que elle corta o quadrante AB.

Ora, sabemos que *a differença dos arcos* $\widehat{BA'_1}$ *e* $\widehat{AA'_1}$ *é egual á differença dos semi-eixos da ellipse* (*); isto é,

$$\widehat{BA'_1} - \widehat{AA'_1} = a - b. \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

De (IV) e (III) deduz-se a equação

$$\pm \widehat{BA'_1} \mp \widehat{B\mu} = \pm \widehat{\mu A'_1} = \pm (a-b) \mp p, \ldots\ldots \text{(B)}$$

onde tomamos um ou outro signal, segundo for $\widehat{BA'_1}$ maior ou menor que $\widehat{B\mu}$.

3. Observemos que sobre um mesmo quadrante de ellipse podemos achar uma infinidade de arcos cujos comprimentos sejam expressos pelas formulas (A) e (B). Com effeito, como uma mesma ellipse tem uma infinidade de ellipses homofocaes, e como as extremidades do arco dado variam com a posição d'essas ellipses, segue-se que temos tantos arcos quantas as ellipses homofocaes.

4. Vejamos agora a que condição devem satisfazer as coordenadas das extremidades B'_1 e μ de um arco $\widehat{B'_1\mu}$ situado no qua-

(*) Este theorema, devido a Fagnano (Salmon, *Traité de Sections coniques*, pag. 645), é um caso particular do seguinte theorema demonstrado por Chasles: *Se de um ponto qualquer* M, *situado sobre uma hyperbole homofocal de uma ellipse e que a encontra em um ponto* N, *conduzirmos a ella tangentes* MA *e* MB, *a differença dos arcos* NA *e* NB *é egual á differença das tangentes* MA *e* MB.

drante AB para que se possa rectificar. É evidente que se os pontos M e M′ de intersecção das tangentes conduzidas pelos pontos A, B′, A′, B ou pelos seus symetricos A'_1 e B'_1 estivessem sempre situados sobre uma mesma ellipse homofocal da ellipse ABCD, o arco $\widehat{B'_1\mu}$ podia sempre rectificar-se. Porém isso nem sempre succede, porque então era sempre possivel obrigar uma conica a passar por sete pontos.

Sejam pois (x', y') e (ξ, η) as coordenadas das extremidades B'_1 e μ do arco dado. As do ponto B′, symetrico de B'_1, serão $(-x', y')$. Representemos por (x, y) e $(x_1, -y)$ as do ponto A'_1 e do seu symetrico A′.

Temos pois que as coordenadas dos pontos M e M′ em que se cortam as tangentes B′M, AM e BM′, A′M′, e as dos pontos P e P′ onde se interceptam as tangentes BP, A'_1P e AP′ B'_1P′, são respectivamente, sendo a e b os semi-eixos da ellipse ABCD,

$$a)\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{a^2(b+y)}{bx} \\ y_1 &= b \end{aligned}\right. \qquad b)\left\{\begin{aligned} x'_1 &= a \\ y'_1 &= \frac{b^2(a+x')}{ay'} \end{aligned}\right.$$

$$c)\left\{\begin{aligned} x_2 &= \frac{a^2(b-y)}{bx} \\ y_2 &= b \end{aligned}\right. \qquad d)\left\{\begin{aligned} x'_2 &= a \\ y'_2 &= \frac{b^2(a-x')}{ay'}\cdot \end{aligned}\right.$$

Se c é metade da distancia focal, temos que as ellipses homofocaes da ellipse ABCD serão representadas pela equação

$$\frac{X^2}{\lambda^2}+\frac{Y^2}{\lambda^2-c^2}=1,$$

em que λ é um parametro variavel.

Ora, para que uma ellipse homofocal da ellipse dada passe simultaneamente pelos pontos M e M′, é necessario que as equações

$$\lambda^4-\lambda^2(c^2+x^2_1+y^2_1)+c^2x^2_1=0,$$

$$\lambda^4-\lambda^2(c^2+x'^2_1+y'^2_1)+c^2x'^2_1=0,$$

sejam compativeis. Ora, para que ellas o sejam, é necessario que os seus coefficientes satisfaçam ao *resultante*

$$c^2(x^2_1-x'^2_1)^2-[(y'^2_1-y^2_1)-(x^2_1-x'^2_1)]$$
$$.[c^2(x^2_1-x'^2_1)+(x^2_1y'^2_1-x'^2_1y^2_1)]=0;$$

e substituindo apenas x' e y_1 pelos seus valores, virá

$$2c^2(x^2_1-a^2)^2-(x^2_1-a^2)$$
$$.[y'^2(a^2-x^2_1)-b^2(y'^2-b^2)]-(y'^2_1-b^2)(x^2_1y'^2_1-a^2b^2)=0$$

ou

$$(x^2_1-a^2)^2(2c^2-y'^2_1)-x^2_1(y'^2_1-b^2)^2=0$$

ou finalmente

$$\frac{x^2_1-a^2}{y'^2_1-b^2}=\frac{x_1}{\sqrt{2c^2-y'^2_1}},$$

e substituindo x_1 e y_1 pelos seus valores vem, attendendo a que $a^2b^2=a^2y'^2+b^2x'^2$,

$$\frac{a^6yy'^2(b+y)}{b^6.x'.x^2(a+x')}=\frac{a^3y'(b+y)}{bx\sqrt{2a^2c^2y'^2-b^4(a+x')^2}}$$

ou

$$\frac{a^3yy'}{b^3xx'}=\frac{b^2(a+x')}{\sqrt{2a^2c^2y'^2-b^4(a+x')^2}}\ldots\ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

Ora, as abcissas x e ξ do ponto A'_1 e do seu associado μ estão ligadas pela relação

$$x\xi=\frac{ap}{k^2}=\frac{a^3p}{c^2},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

e se substituirmos na equação

$$x^4-(a^2k^2+p^2)\frac{x^2}{k^2}+\frac{a^2p^2}{k^4}=0,$$

*

da qual se deduz a relação (V), x^2 por $a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$, teremos

$$y^4-\frac{b^2}{c^2}(c^2-p^2)y^2+\frac{b^6p^2}{c^4}=0,$$

d'onde se deduz

$$y\eta=\frac{b^3p}{c^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII)}$$

De (VI) e (VII) tiramos

$$\frac{y}{x}=\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{\xi}{\eta}$$

o que dá substituindo em (V)

$$\frac{y'\cdot\xi}{x'\cdot\eta}=\frac{a+x'}{\sqrt{2\frac{a^2c^2}{b^4}y'^2-(a\pm x')}}.$$

Ora, como as coordenadas (*c*) e (*d*) se deduzem de (*a*) e (*b*) pela mudança de x' e de y em $-x'$ e $-y$, teremos

$$\frac{y'\cdot\xi}{x'\cdot\eta}=\frac{x'-a}{\sqrt{2\frac{a^2c^2}{b^4}y'^2-(a-x')^2}},$$

ou, reunindo em uma só as duas equações, temos

$$\frac{y'\cdot\xi}{x'\cdot\eta}\pm\frac{a\pm x'}{\sqrt{2\frac{a^2c^2}{b^4}y'^2-(a\pm x')^2}}=0.\ldots\ldots \text{(C)}$$

Tal é a equação de condição a que devem satisfazer as coordenadas das extremidades do arco dado para que se possa rectificar.

SUR CERTAINES SOMMATIONS ARITHMÉTIQUES

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE

I

Nous nous proposons d'abord de déterminer *la somme des chiffres des N premiers nombres,* somme que nous représenterons par la notation σ (N).

Nous indiquerons par un indice la plus haute puissance de 10 contenue dans le nombre N. Si cette puissance est p, le nombre N_p aura $p+1$ chiffres a_p, a_{p-1}, ... a_1, a_0 et s'écrira

$$a_p\, a_{p-1} \ldots a_1\, a_0;$$

de sorte que

$$N_p = a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Retranchons le dernier chiffre de gauche; nous obtenons le nombre

$$a_{p-1}\, a_{p-2} \ldots a_1\, a_0$$

que nous représenterons par N_{p-1}. De même

$a_{p-2}\, a_{p-3} \ldots a_0$ sera désigné par N_{p-2}

$a_{p-3} \ldots a_0$ » » » N_{p-3}

....

$a_1\, a_0$ » » » N_1

a_0 » » » N_0 .

Lemme. — Les sommes des chiffres des dix premières dizaines

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \ldots\ldots & 9 \\ 10 & 11 & 12 & \ldots\ldots & 19 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 90 & 91 & 92 & \ldots\ldots & 99 \end{array}$$

sont respectivement

$$\begin{array}{r} 45 \\ 10+45 \\ 2\times 10+45 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 9\times 10+45 \end{array}$$

et la somme totale

$$10\times 2\times 45.$$

D'après cela, les sommes des chiffres des dix premières centaines

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \ldots\ldots & 99 \\ 100 & 101 & 102 & \ldots\ldots & 199 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 900 & 901 & 902 & \ldots\ldots & 999 \end{array}$$

sont respectivement

$$\begin{array}{r} 10\times 2\times 45 \\ 100+10\times 2\times 45 \\ 2\times 100+10\times 2\times 45 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 9\times 100+10\times 2\times 45, \end{array}$$

et la somme totale

$$100\times 3\times 45.$$

La formule se généralise immédiatement, et l'on a

$$\sigma(10^p - 1) = 10^{p-1} \times p \times 45.$$

On déduit immédiatement de là que

$$\begin{aligned}\sigma(a_p \,.\, 10^p - 1) = {} & \qquad\qquad 10^{p-1} \times p \times 45 \\ & + \qquad\quad 10^p + 10^{p-1} \times p \times 45 \\ & + 2 \times 10^p \quad + 10^{p-1} \times p \times 45 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_p - 1)\, 10^p + 10^{p-1} \times p \times 45\end{aligned}$$

ou

$$\sigma(a_p \,.\, 10^p - 1) = 10^{p-1} \left[10 \frac{(a_p - 1)\, a_p}{2} + 45 p a_p \right]$$

ou encore

$$(1) \qquad \sigma(a_p \,.\, 10^p - 1) = 10^{p-1}\, 5\, a_p (a_p - 1 + 9p).$$

Tel est le lemme que nous voulions établir.

Solution. — Il est clair que la somme $\sigma(N_p)$ peut se décomposer ainsi

$$\sigma(N_p) = \sigma(a_p\, 10^p - 1) + (N_{p-1} + 1)\, a_p + \sigma(N_{p-1}).$$

Donc, en égard à la formule (1),

$$\sigma(N_p) - \sigma(N_{p-1}) = a_p [10^{p-1} \,.\, 5\, (a_p - 1 + 9p) + N_{p-1} + 1].$$

Par suite, de même,

$$\sigma(N_{p-1}) - \sigma(N_{p-2}) = a_{p-1} [10^{p-2} \,.\, 5 \{ a_{p-1} - 1 + 9(p-1) \} + N_{p-2} + 1]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma(N_1) - \sigma(N_0) = a_1 [5\, (a_1 - 1 + 9) + N_0 + 1].$$

Faisant la somme des p égalités précédentes, et remarquant que $\sigma(N_0) = \frac{a_0(a_0+1)}{2}$, on obtient

$$(2) \quad \sigma(N_p) = \frac{a_0(a_0+1)}{2} + \sum_{i=1}^{i=p} a_i[10^{i-1}5(a_i - 1 + 9i) + N_{i-1} + 1].$$

Telle est la formule qui résout la question proposée.

On peut, à l'occasion de cette formule, faire diverses remarques.

Par exemple: *Si le chiffre des unités du nombre* N *est* 0, 3, 4, 7 *ou* 8 *et si tous les autres chiffres sont pairs, la somme des chiffres des* N *premiers nombres est paire.*

Si le chiffre des unités du nombre N *est* 9, *la somme des chiffres des* N *premiers nombres est divisible par* 5.

etc...... etc.... ..

Exemples d'application de la formule (2):

1° Somme des chiffres des 19 premiers nombres.

$$p = 1 \quad N_1 = 19 \quad N_0 = 9 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = 9$$

$$\sigma(19) = 45 + 45 + 10$$
$$= 100.$$

2° Somme des chiffres des 100 premiers nombres.

$$p = 2 \quad N_2 = 100 \quad N_1 = 0 \quad N_0 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_0 = 0$$

$$\sigma(100) = 50 \times 18 + 1$$
$$= 901.$$

II

Voici une question du même genre qui se résout par la même méthode.

Dans le nombre N considérons le nombre Q_p formé par les p premiers chiffres à droite, et le nombre P_p formé par les chiffres restants. Nous aurons

$$N = P_p\, 10^p + Q_p.$$

Posons

$$\delta_p(N) = P_p + Q_p,$$

et cherchons la somme

$$S_p(N) = \delta_p(1) + \delta_p(2) + \ldots + \delta_p(N-1) + \delta_p(N).$$

Il est évident d'abord que jusqu'au nombre $10^p - 1$ inclusivement, on a

$$\delta_p(k) = k.$$

Donc

$$S_p(10^p - 1) = \frac{(10^p - 1)\, 10^p}{2}.$$

La somme des 10^p nombres δ_p suivants sera, d'après cela,

$$10^p + \frac{(10^p - 1)\, 10^p}{2};$$

celle des 10^p suivants

$$2 \times 10^p + \frac{(10^p - 1)\, 10^p}{2};$$

et ainsi de suite; de sorte que

$$S_p(a \,.\, 10^p - 1) = \frac{(a-1)\, a}{2} 10^p + a \frac{(10^p - 1)\, 10^p}{2}$$

ou

$$(3)\qquad S_p(a.10^p-1)=\frac{a.10^p}{2}(a+10^p-2).$$

Cela posé, et désignant par la notation S (N) la somme

$$1+2+\ldots+(N-1)+N=\frac{N(N+1)}{2},$$

remarquons que

$$S_p(N)=S_p(P_p.10^p-1)+P_p(Q_p+1)+S(Q_p),$$

ou, en vertu de la formule (3),

$$(4)\quad S_p(N)=\frac{P_p.10^p}{2}(P_p+10^p-2)+P_p(Q_p+1)+\frac{Q_p(Q_p+1)}{2}.$$

Cette formule résout le problème que nous nous étions proposé.

En particulier, on a

$$S_1(N)=5P_1(P_1+8)+P_1(Q_1+1)+\frac{Q_1(Q_1+1)}{2}.$$

ou

$$S_1(N)=P_1(5P_1+Q_1+41)+\frac{Q_1(Q_1+1)}{2}.$$

D'ailleurs on a

$$S(N)=\frac{N(N+1)}{2}$$

$$=\frac{(10P_1+Q_1)(10P_1+Q_1+1)}{2}$$

$$=5P_1(10P_1+2Q_1+1)+\frac{Q_1(Q_1+1)}{2}.$$

Par conséquent,

$$S(N) - S_1(N) = 9P_1(5P_1 + Q_1 - 4).$$

De cette expression on tire les propositions suivantes:

La différence entre la somme des N *premiers nombres et la somme des* δ_1 *de ces nombres est divisible par* 9 *fois le nombre de dizaines contenues dans* N.

Si le chiffre des unités de N *est* 4 *ou* 9, *cette différence est divisible par* 5.

Si le chiffre des unités de N *est* 4, *cette différence est divisible par le carré du nombre de dizaines contenues dans* N, *et le quotient est égal à la somme des* 9 *premiers nombres.*

etc...... etc......

La formule

$$S(N) = \frac{N(N+1)}{2}$$

peut s'écrire

$$S(N) = \frac{(P_p \cdot 10^p + Q_p)(P_p \cdot 10^p + Q_p + 1)}{2}$$

$$= \frac{P^2_p\, 10^{2p} + P_p\, 10^p(2Q_p + 1) + Q_p(Q_p + 1)}{2},$$

et la formule (4)

$$S_p(N) = \frac{P^2_p\, 10^p + P_p[10^p(10^p - 2) + 2(Q_p + 1)] + Q_p(Q_p + 1)}{2}.$$

De là on tire

$$\frac{S(N)}{S_p(N)} = \frac{10^{2p} + \dfrac{10^p(2Q_p + 1)}{P_p} + \dfrac{Q_p(Q_p + 1)}{P^2_p}}{10^p + \dfrac{10^p(10^p - 2) + 2(Q_p + 1)}{P_p} + \dfrac{Q_p(Q_p + 1)}{P^2_p}}.$$

Lorsque l'on fait croître N indéfiniment, Q_p qui est toujours égal à l'un des $10^p - 1$ premiers nombres reste fini, et P_p croît indéfiniment. Donc,

$$\operatorname{Lim} \frac{S(N)}{S_p(N)} = 10^p.$$

La limite du rapport de la somme des N *premiers nombres à la somme des* δ_p *de ces nombres tend, lorsque* N *croît indéfiniment, vers le nombre* 10^p.

III

Voici encore une question qu'on peut rattacher aux précédentes:

Combien y a-t-il de chiffres dans la suite des nombres de 1 *à* N?

Nous représenterons ce nombre par la notation C (N).

Premier procédé. — Pour résoudre cette question nous établirons d'abord un lemme:

Étant données une progression arithmétique

$$a_0 \quad a_0 + r \quad a_0 + 2r \quad \ldots \quad a_0 + nr$$

et une progression géométrique d'un même nombre de termes

$$b_0 \quad b_0 q \quad b_0 q^2 \quad \ldots \quad b_0 q^n,$$

on multiplie ces progressions terme à terme, et l'on demande la somme des termes de la suite ainsi formée, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{i=n} (a_0 + ir) b_0 q^i =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 + r) b_0 q + (a_0 + 2r) b_0 q^2 + \ldots + (a_0 + nr) b_0 q^n.$$

Cette question est bien facile à résoudre.

On a

$$\sum_{i=0}^{i=n} (a_0 + ir)\, b_0 q^i =$$

$$= b_0 [a_0 (1 + q + \ldots + q^n) + rq (1 + 2q + \ldots + nq^{n-1}].$$

Or,

$$1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Dérivons les deux membres de cette identité par rapport à q; il vient

$$1 + 2q + \ldots + nq^{n-1} = \frac{q^n [n(q-1) - 1] + 1}{(q-1)^2}.$$

Dès lors la formule précédente se transforme en celle-ci

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{i=n} (a_0 + ir)\, b_0 q^i = \\ &= b_0 \left[a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + rq \frac{q^n [n(q-1) - 1] + 1}{(q-1)^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, soit p la plus haute puissance de 10 contenue dans le nombre N, c'est-à-dire, supposons que le nombre N ait $p + 1$ chiffres.

Dans la suite

de 1 à 9 inclusivement il y a $10 - 1 = 9$ chiffres

de 10 à 99 inclusivement il y a $2 \times 100 - 2 \times 10$
$= 2 \times 10 \times 9$ chiffres

de 100 à 999 inclusivement il y a $3 \times 1000 - 3 \times 100$
$= 3 \times 100 \times 9$ chiffres

. . . .

de 10^{p-1} à 10^p-1 inclusivement il y a $p\times 10^p - p\times 10^{p-1}$
$= p\times 10^{p-1}\times 9$ chiffres

enfin

de 10^p à N inclusivement il y a $(p+1)(N-10^p+1)$ chiffres.

Par conséquent

$$C(N)=9(1+2.10+3.10^2+\ldots+p.10^{p-1})+(p+1)(N-10^p+1).$$

Or, si dans la formule (4) on fait

$$a_0=1 \quad b_0=1 \quad r=1 \quad q=10 \quad n=p-1,$$

on obtient

$$1+2.10+3.10^2+\ldots+p.10^{p-1}=\frac{10^p(9p-1)+1}{81}.$$

Donc

$$C(N)=\frac{10^p(9p-1)+1}{9}+(p+1)(N-10^p+1),$$

formule qui se transforme immédiatement en celle-ci

$$(5) \qquad C(N)=(p+1)(N+1)-\frac{10^{p+1}-1}{9}.$$

Exemple. Combien y a-t-il de chiffres dans la suite des nombres de 1 à 365?

Ici $p=2$; donc

$$C(365)=3\times 366-\frac{1000-1}{9}$$
$$=1098-111$$
$$=987.$$

Cet exemple numérique fait naître l'idée d'énoncer la règle suivante bien facile à retenir:

Pour avoir le nombre des chiffres compris dans la suite des N *premiers nombres, il faut multiplier le nombre* N *augmenté d'une unité par le nombre des chiffres qui entrent dans le nombre* N, *et retrancher du produit un nombre formé d'autant de* 1 *qu'il y a de chiffres dans le nombre* N.

Second procédé.—Nous avons tenu à exposer le procédé ci-dessus à cause de l'intérêt de la formule (4), et aussi parce que c'est celui qui se présente tout d'abord à l'esprit lorsqu'on aborde le problème. Mais en voici un autre beaucoup plus simple:

Écrivons les uns au-dessous des autres les N premiers nombres. N étant supposé avoir $p+1$ chiffres, complétons tous les nombres du tableau en leur ajoutant des zéros sur la gauche de façon à les composer tous de $p+1$ caractères. Enfin, ajoutons en tête de cette liste une ligne de $p+1$ zéros.

Pour avoir le nombre cherché il faut évaluer le nombre total des caractères figurant au tableau ainsi formé et en retrancher le nombre de zéros qu'on a ajoutés.

Or, le premier de ces deux nombres est évidemment

$$(p+1)\ (\mathrm{N}+1)).$$

Passons au nombre des zéros.

De 10^p à N nous n'en avons point ajouté. Maintenant, au-dessous de 10^p, dans la première colonne de gauche, nous avons ajouté 10^p zéros; au-dessous de 10^{p-1}, dans la deuxième colonne, nous en avons ajouté 10^{p-1}; etc. .....; au-dessous de 10, dans la deuxième colonne de droite, nous en avons ajouté 10; au-dessous de 1, dans la première colonne de droite, nous en avons ajouté 1. Nous en avons donc ajouté en tout

$$10^p+10^{p-1}+\ldots+10+1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{10^{p+1}-1}{9},$$

et le nombre cherché est

$$(p+1)(N+1)-\frac{10^{p+1}-1}{9}.$$

Nous retrouvons ainsi le résultat précédemment obtenu.

SU UNA PROPRIETÁ DEL DETERMINANTE DI UNA SOSTITUZIONE ORTOGONALE

DI

Gino Loria

Teorema. — *Se nel determinante di una sostituzione ortogonale, si sottrae l'unità da tutti gli elementi principali e si prendono poscia i complementi di questi, tali complementi sono tutti eguali e valgono ciascuno la metà del determinante ridotto cambiato di segno.*

Questa proposizione fu enunciata dal Prof. Siacci nel *Giornale di matematiche* diretto dal Prof. Battaglini (vol. x, p. 360) per il caso di un determinante d'ordine pari. Mi propongo in questa nota di mostrare che essa vale independentemente dalla parità del determinante.

Sia $|a_{ik}|$ il determinante di una sostituzione ortogonale di ordine n; sarà

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} a_{ri}\, a_{rk} = \begin{cases} 1 \text{ se } i=k \\ 0 \text{ se } i \gtrless k \end{cases}.$$

Poniamo

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

e chiamiamo $D_1, D_2, \dots, D_n$ i suddeterminanti principali di D.

Avremo anzitutto, per le (1),

$$(2)\qquad D^2=\begin{vmatrix} 2-2a_{11} & -(a_{12}+a_{21}) & \cdots & -(a_{1n}+a_{n1}) \\ -(a_{21}+a_{12}) & 2-2a_{22} & \cdots & -(a_{2n}+a_{n2}) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -(a_{n1}+a_{1n}) & -(a_{n2}+a_{2n}) & \cdots & 2-2a_{nn} \end{vmatrix}$$

Poi, esegnendo il prodotto per orizzontali, si ottiene

$$DD_1=\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -(1-a_{11}) & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ -(a_{21}+a_{12}) & 2-2a_{22} & \cdots & -(a_{n2}+a_{2n}) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -(a_{n1}+a_{1n}) & -(a_{n2}+a_{2n}) & \cdots & 2-2a_{nn} \end{vmatrix};$$

infine, esegnendo il prodotto per verticali, si trova:

$$DD_1 = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-1 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -(1-a_{11}) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -(a_{21}+a_{12}) & 2-2a_{22} & \dots & -(a_{n2}+a_{2n}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -(a_{n1}+a_{1n}) & -(a_{n2}+a_{2n}) & \dots & 2-2a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Addizionando membro a membro queste due ultime eguaglianze, avremo, pel teorema di addizione dei determinanti,

$$(3) \qquad 2DD_1 = \begin{vmatrix} -(2-2a_{11}) & a_{12}+a_{21} & \dots & a_{1n}+a_{n1} \\ -(a_{21}+a_{12}) & 2-2a_{22} & \dots & -(a_{2n}+a_{n2}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -(a_{n1}+a_{1n}) & -(a_{n2}+a_{2n}) & \dots & 2-2a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ora, se confrontiamo le equazioni (2) e (3), concluderemo

$$2DD_1 = -D^2.$$

*

Siccome D non è nullo, così da questa si deduce

$$D_1 = -\frac{1}{2} D.$$

Il teorema è così dimostrato pel primo suddeterminante principale di D. Similmente si proverebbe per gli altri.

Mantova, 7 settembre 1886.

SUR CERTAINES FONCTIONS SYMÉTRIQUES; APPLICATION AU CALCUL DE LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE

Ingénieur des ponts et chaussées.

Soit

$$U = z^p + A_1 z^{p-1} + \ldots + A_{p-1} z + A_p = 0,$$

une équation algébrique dont les racines, supposées toutes inégales, sont $z_1, z_2, \ldots, z_p$. Proposons-nous d'exprimer, au moyen de U, la fonction

$$\frac{1}{(z-z_1)^n} + \frac{1}{(z-z_2)^n} + \ldots + \frac{1}{(z-z_p)^n}$$

que nous écrirons plus simplesment

$$\sum \frac{1}{(z-z_\alpha)^n}.$$

Nous avons

$$D_z l U = \sum \frac{1}{z - z_\alpha}.$$

Dérivons $n-1$ fois les deux membres de cette identité par rapport à z; il vient

$$D_z^n l U = (-1)^{n-1} . 1 . 2 \ldots (n-1) \sum \frac{1}{(z-z_\alpha)^n},$$

d'où

$$(1) \qquad \sum \frac{1}{(z-z_\alpha)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{1 . 2 \ldots (n-1)} . D_z^n l U.$$

En vertu de la formule connue qui donne la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction, on a

$$\begin{aligned}
D_z^n\, l\mathrm{U} &= K_n D_U^n\, l\mathrm{U} + K_{n-1} D_U^{n-1}\, l\mathrm{U} + \ldots + K_1 D_U\, l\mathrm{U} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{1.2\ldots(n-1)K_n}{\mathrm{U}^n} + (-1)^{n-2}\frac{1.2\ldots(n-2)K_{n-1}}{\mathrm{U}^{n-1}} + \ldots + \frac{K_1}{\mathrm{U}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}1.2\ldots(n-1)K_n + (-1)^{n-2}1.2\ldots(n-2)K_{n-1}\mathrm{U} + \ldots + K_1\mathrm{U}^{n-1}}{\mathrm{U}^n},
\end{aligned}$$

les coefficients K étant donnés par la formule

$$\begin{aligned}
K_i = \frac{1}{1.2\ldots i}\Big[D_z^n \mathrm{U}^i - C_i^1 \mathrm{U}.D_z^n \mathrm{U}^{i-1} + C_i^2 \mathrm{U}^2.D_z^n \mathrm{U}^{i-2} - \ldots \\
+ (-1)^{i-1} C_i^{i-1} \mathrm{U}^{i-1}.D_z^n \mathrm{U}\Big]
\end{aligned}$$

où C_i^k représenta, suivant l'habitude, le nombre des combinaisons de i objets pris k à k.

Dès lors

$$D_z^n\, l\mathrm{U} = \frac{1}{\mathrm{U}^n}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\Big[D_z^n \mathrm{U}^n - C_n^1 \mathrm{U}\,.\,D_z^n \mathrm{U}^{n-1} + \ldots \\
+ (-1)^{n-2} C_n^{n-2} \mathrm{U}^{n-2}.D_z^n \mathrm{U}^2 + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \mathrm{U}^{n-1}.D_z^n \mathrm{U}\Big] \\
+ \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-1}\Big[\mathrm{U}.D_z^n \mathrm{U}^{n-1} - C_{n-1}^1 \mathrm{U}^2.D_z^n \mathrm{U}^{n-2} + \ldots \\
+ (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} \mathrm{U}^{n-1}\,.\,D_z^n \mathrm{U}\Big] \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- \dfrac{1}{2}\Big[\mathrm{U}^{n-2}\,.\,D_z^n \mathrm{U}^2 - C_2^1 \mathrm{U}^{n-1}\,.\,D_z^n \mathrm{U}\Big] \\
+ \mathrm{U}^{n-1}\,.\,D_z^n \mathrm{U}.
\end{array}\right\}.$$

L'expression mise entre crochets peut encore s'écrire

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} D_z^n U^n + (-1)^{n-2}\left(\frac{C_n^1}{n}+\frac{1}{n-1}\right) U . D_z^n U^{n-1}$$

$$+(-1)^{n-3}\left(\frac{C_n^2}{n}+\frac{C_{n-1}^1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\right) U^2 . D_z^n U^{n-2} + \ldots$$

$$+\left(\frac{C_n^{n-1}}{n}+\frac{C_{n-1}^{n-2}}{n-1}+\ldots+1\right) U^{n-1} . D_z^n U$$

ou

$$\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{n-i}\left(\frac{C_n^{i-1}}{n}+\frac{C_{n-1}^{i-2}}{n-1}+\ldots+\frac{C_{n-i+1}^{o}}{n-i+1}\right) U^{i-1} . D_z^n U^{n-i+1},$$

en convenant, comme d'habitude de prendre $C_m^{o'} = 1$.

Or, on a

$$\frac{C_n^{i-1}}{n}+\frac{C_{n-1}^{i-2}}{n-1}+\ldots+\frac{C_{n-i+1}^{o}}{n-i+1}$$

$$=\frac{C_n^{n-i+1}}{n}+\frac{C_{n-1}^{n-i+1}}{n-1}+\ldots+\frac{C_{n-i+1}^{n-i+1}}{n-i+1}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)\ldots i}{1.2\ldots(n-i+1)}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots(i-1)}{1.2\ldots(n-i+1)}+\ldots$$

$$+\frac{1}{n-i+1}\cdot\frac{(n-i+1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-i+1)}$$

$$=\frac{1}{n-i+1}\left(\frac{(n-1)(n-2)\ldots i}{1.2\ldots(n-i)}+\frac{(n-2)(n-3)\ldots(i-1)}{1.2\ldots(n-i)}+\ldots+\frac{(n-i)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-i)}\right)$$

$$=\frac{1}{n-i+1}\left(C_{n-1}^{n-i}+C_{n-2}^{n-i}+\ldots+C_{n-i}^{n-i}\right)$$

$$=\frac{1}{n-i+1}C_n^{n-i+1}=\frac{1}{n-i+1}C_n^{i-1}.$$

La somme précédente peut donc s'écrire

$$\sum_{i-1}^{i=n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^{i-1}}{n-i+1}U^{i-1}.D_z^n U^{n-1+i},$$

et la formule (1) devient

$$\sum\frac{1}{(z-z_\alpha)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{U^n}\cdot\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^{i-1}}{n-i+1}U^{i-1}.D_z^n U^{n-i+1}$$

ou

$$(2)\quad \sum\frac{1}{(z-z_\alpha)^n}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{U^n}\cdot\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(-1)^{i+1}C_n^{i-1}}{n-i+1}U^{i-1}.D_z^n U^{n-i+1}.$$

Cette formule résout le problème que nous nous sommes proposé en commençant. Elle peut s'écrire symboliquement

$$\sum\frac{1}{(z-z_\alpha)^n}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{(t-U)^n-(-1)^n U^n}{U^n},$$

si l'on convient de remplacer, dans le développement du binôme $(t-U)^n$, t^λ (pour $\lambda=1, 2, 3, \ldots$) par $\frac{D_z^n U^\lambda}{\lambda}$.

Nous placerons ici une remarque: Si n est supposé pair, et les z_α réelles, tous les termes du premier membre sont positifs. Ce premier membre ne peut donc, si les racines $z_1, z_2, \ldots z_p$ sont toutes réelles, s'annuler pour aucune valeur réelle finie de z. Il en est, par suite, de même pour le second membre, et nous pouvons énoncer ce théorème:

Si l'équation $U=0$ *a toutes ses racines réelles, et inégales, l'équation obtenue en égalant à* 0, *le développement de* $(t-U)^{2m}-U^{2m}$ *où l'on a remplacé* t^λ (pour $\lambda=1, 2, 3, \ldots$) *par* $\frac{D_z^n U^\lambda}{\lambda}$, *n'a aucune racine réelle.*

En particulier, pour $m=1$, on a

$$(t-U)^2-U^2=t^2-2tU,$$

et

$$\frac{D_z^2U^2}{2}-2D_z^2U.U=U'^2-UU''.$$

Donc, *si l'équation* $U=0$ *a toutes ses racines réelles et inégales, l'équation* $U'^2-UU''=0$ *n'a aucune racine réelle.*

Revenons à la formule (2), et faisons, dans cette formule, $z=0$, en convenant de représenter par U_0 et par $D_z^n U_0^\lambda$, ce que deviennet U et $D_z^n U^\lambda$ par cette substitution. Nous avons

$$(-1)^n\sum\frac{1}{z_a^n}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{U_0^n}\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i+1}\frac{C_n^{i-1}}{n-i+1}U_0^{i-1}.D_z^nU_0^{n-i+1}.$$

Cherchons à exprimer le second membre de cette égalité au moyen des coëfficients $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de l'équation $U=0$.

Il est d'abord évident que

$$U_0^k=A_k^p.$$

Quant à $D_z^n U_0^\lambda$ c'est, d'après la formule de Maclaurin, le produit de $1.2\ldots n$ par le coefficient de x^n dans le développement de U^λ. Or, il est bien aisé de voir que ce coefficient est égal à

$$\Sigma A_{p-q_1}A_{p-q_2}\ldots A_{p-q_\lambda},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des indices $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda$ susceptibles de vérifier l'équation

$$q_1+q_2+\ldots+q_\lambda=n.$$

Pour rappeler cette dernière condition, nous affecterons le signe Σ de l'indice $n : \sum\limits_n$.

Il faut remarquer aussi que l'on doit prendre.

$$A_{p-q_k}=0 \quad \text{pour} \quad p<q_k$$

$$A_{p-q_k}=1 \quad \text{pour} \quad p=q_k.$$

Ainsi donc

$$D_z^n U_0^\lambda = 1.2\ldots n \sum_n A_{p-q_1} A_{p-q_2}\ldots A_{p-q_\lambda}.$$

Par suite,

$$(3) \quad \sum \frac{1}{z_\alpha^n} = (-1)^n n \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+1} \frac{C_n^{i-1}}{n-i+1} \cdot \frac{\sum\limits_n A_{p-q_1} A_{p-q_2} \ldots A_{p-q_{n-i+1}}}{A_p^{n-i+1}}.$$

Nous avons ainsi une expression de la somme des inverses des puissances semblables des racines d'une équation en fonction des coefficients de cette équation.

Soit

$$z^p + A'_1 z^{p-1} + A'_2 z^{p-2} + \ldots + A'_{p-1} z + A'_p = 0$$

l'équation dont les racines $z'_1, z'_2, \ldots z'_p$ sont les inverses des racines de l'équation proposée. On a, d'une manière générale,

$$A'_i = \frac{A_{p-i}}{A_p}.$$

La formule (3) peut donc s'écrire, en effaçant les accents des racines z' et des coëfficients A',

$$(4) \quad \sum z_\alpha^n = (-1)^n n \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+1} \frac{C_n^{i-1}}{n-i+1} \cdot \sum A_{q_1} A_{q_2} \ldots A_{q_{n-i+1}}$$

le signe $\sum_n$ s'étendant, pour chaque valeur de i, à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des indices $q_1, q_2, \ldots, q_{n-i+1}$ susceptibles de vérifier la condition

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-i+1} = n.$$

On doit prendre d'ailleurs

$$A_{q_k} = 1 \quad \text{pour} \quad q_k = 0$$

$$A_{q_k} = 0 \quad \text{pour} \quad q_k > p.$$

La formule (4) donne une expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation en fonction des coëfficients de cette équation, différente de celle qui constitue la formule de Waring.

Celle-ci est plus élégante sans doute, mais d'une démonstration moins facile. La comparaison des deux formules fait apparaître l'identité remarquable que voici (*)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{(-1)^{n-i+1} C_n^{i-1}}{n-i+1} \sum_n A_{q_1} A_{q_2} \ldots A_{q_{n-i+1}}$$

$$= \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2 \ldots \lambda_p} \Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_p)}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)\ldots+\Gamma(\lambda_p+1)} A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \ldots A_p^{\lambda_p},$$

le signe Σ s'étendant, dans le second membre, à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des exposants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ susceptibles de vérifier la condition

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + p\lambda_p = n.$$

(*) Voir l'*Algèbre Supérieure* de Serret, 5.e édit., t. I, pag. 449.

Si l'on arrivait à démontrer directement cette identité, la méthode précédente aboutirait à la formule élégante de Waring, mais une pareille démonstration ne semble pas chose facile, et nous ne l'avons même pas tentée.

BIBLIOGRAPHIA

J. A. Serrasqueiro. — *Tratado de Geometria elementar*, 4.ª edição. — Coimbra, 1886.
—— *Tratado elementar de Arithmetica*, 7.ª edição. — Coimbra, 1886.
—— *Elementos de Algebra*, 2.ª edição. — Coimbra, 1886.

Continúa a merecer a attenção do publico a excellente collecção de compendios de Mathematica do sr. Serrasqueiro, como prova a rapidez com que se esgotam as edições.

Dos dois primeiros livros fallámos na pag. 122 do tomo v d'este jornal, e nada temos hoje a accrescentar.

No terceiro o auctor expõe a parte da Algebra elementar que é exigida para o 3.º anno do Curso dos Lyceus; isto é, a theoria das operações algebricas, a resolução das equações do primeiro grão a uma e a muitas incognitas, a resolução das desigualdades do primeiro grão, a resolução das equações do segundo grão, e finalmente a doutrina dos juros compostos e das annuidades.

L. P. da Motta Pegado. — *Tratado elementar de Arithmetica*, 4.ª edição. — Lisboa, 1886.

Clareza, boa ordem na distribuição das doutrinas, rigor nas demonstrações, são dotes que tornam recommendavel o livro do illustre professor da Escola Polytechnica de Lisboa, cujo nome é bem conhecido por trabalhos publicados nas collecções da Academia das Sciencias.

No primeiro livro o auctor tracta das operações sobre inteiros, fazendo notar logo as propriedades combinatorias das operações, preparando assim os alumnos para comprehenderem as generalisações successivas da noção do numero.

No livro segundo vêem os caracteres de divisibilidade, as theorias do maior divisor commum e do menor multiplo commum de dois ou mais numeros, e a decomposição dos numeros em factores primos; e no livro quarto a doutrina das fracções e da dizima, sendo os theoremas relativos á dizima periodica tractados com todo o rigor e clareza.

No livro seguinte tracta o auctor das raizes dos numeros inteiros e fraccionarios. N'este livro é exposta rapidamente a theoria das quantidades incomensuraveis, que o auctor considera como limites de quantidades comensuraveis.

Segue-se, no livro quinto, a doutrina das proporções, progressões e logarithmos.

Termina aqui a primeira parte, destinada ao estudo dos numeros abstractos; e principia a segunda, dedicada aos numeros concretos, onde o auctor se occupa das medidas e moedas legaes de Portugal, das operações sobre numeros concretos, das applicações da Arithmetica aos problemas de regra de trez, de reducção de moedas, de juros simples e compostos, de cambio, de companhia, etc.

Termina o livro com um appendice importante, onde o auctor estuda os diversos systemas de numeração, algumas propriedades menos elementares dos numeros, e finalmente a questão importantissima das approximações numericas e das operações abreviadas.

Cada doutrina é acompanhada de numerosos e bem escolhidos exercicios para os alumnos se desenvolverem no calculo arithmetico.

Aarão F. de Lacerda. — Equações geraes de Thermodynamica. — Coimbra, 1886.

O assumpto bello e difficil que o auctor escolheu para a sua Dissertação inaugural, para obter o grão de doutor em philosophia, tem sido tractado por muitos geometras e physicos eminentes em trabalhos espalhados pelas collecções scientificas mais importantes da Europa. Era, pois, da maior utilidade formar com estes trabalhos uma monographia, onde o leitor os encontrasse reunidos com boa ordem e expostos com clareza. É o que o auctor fez no seu excellente opusculo.

No primeiro capitulo vêem as fórmulas relativas ao movimento estacionario, a significação mechanica provavel das equações fundamentaes da thermodynamica, e as equações differenciaes do movimento radiante no ether livre.

No capitulo segundo deduz o auctor as principaes relações que ligam os coefficientes thermicos, e faz applicação das formulas achadas ao calculo do equivalente mechanico do calor, aos phenomenos de dissolução e ao estudo do escoamento dos fluidos.

No capitulo terceiro vêem as hypotheses de Rankine, Hirn e Clausius relativas á relação entre a pressão de um gaz, o volume e a temperatura.

Finalmente no ultimo capitulo vêem as applicações dos estudos anteriores á machina a vapor.

E. N. Legnazzi. — *Del catasto romano e di alcuni strumenti antichi di Geodesia.* — Padova, 1886.

Contém este volume o discurso pronunciado pelo sabio professor da Universidade de Padua, no dia da inauguração dos estudos, e ahi expõe os resultados a que chegou, depois de longas indagações, a respeito da historia do cadastro romano, e dos instrumentos antigos de Geodesia, principalmente dos empregados para a formação d'este cadastro. Ao discurso seguem-se 114 notas interessantes, desenvolvendo pontos que o auctor no discurso só podéra indicar.

Gino Loria. — *Studi sulla teoria delle coordinate triangolari et sulla Geometria analitica di un piano nello spazio* (*Giornale de Battaglini*, t. XXIV).

Generalisando um methodo devido ao eminente geometra allemão Joachimsthal, o sr. G. Loria, bem conhecido dos leitores d'este jornal por alguns artigos com que o tem illustrado, dá um methodo geometrico fundado no theorema: *as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer d'um plano são exprimiveis como funcções lineares de tres dos seus pontos.*

No primeiro capitulo é demonstrado este theorema, e é definido o systema de coordenadas tringulares a que elle dá origem. Nos seguintes são estudadas a recta, o circulo e as secções conicas, terminando por algumas applicações das formulas achadas a alguns problemas de Geometria.

Dr Novarese. — *Di una analogia fra la teorica delle velocità et la teorica delle forze* (*Atti della Accademia di Torino*, t. XXI).

Gino Loria. — *Sur une démonstration du théorème fundamental de la théorie des équations algébriques* (*Acta Mathematica*, t. IX).

E. Cesàro. — *La rutura del diamante* (*Giornale de Battaglini*, t. XXIV).

— *Intorno ad una pretesa dimostrazione di termodynamica* (*Giornale de Battaglini*, t. XXIV).

G. T.

SOBRE A FÓRMULA DE TAYLOR

POR

J. Bruno de Cabedo

(Professor na Universidade de Coimbra)

O fim da presente nota é demonstrar com toda a generalidade a observação de Cauchy relativa ao facto de uma serie convergente nem sempre representar a funcção que a originou, e, como consequencia, substituir nas applicacões da fórmula de Taylor a formação e discussão do resto por uma analyse mais facil.

Theorema I.— *Se no intervallo de* x_1 *a* x_2, $f(x)$ *é uma funcção finita e determinada como todas as suas derivadas successivas e é, além d'isto,*

$$\lim_{n=\infty} \frac{(x-x_1)}{1.2\ldots n} f^n[x_1+\theta(x-x_1)] = \lim_{n=\infty} R_n = 0;$$

dentro do mesmo intervallo a serie

$$f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+\ldots+\frac{(x-x_1)^i}{1.2\ldots i}f^i(x_1)+\ldots$$

será convergente e terá por somma $f(x)$.

Com effeito, tendo logar n'este caso a fórmula

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+\ldots+\frac{(x-x_1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(x_1)+R_n$$

ou, para mais simplicidade,

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + R_n \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

qualquer que seja n, teremos

$$f(x) = \lim_{n=\infty} (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) + \lim_{n=\infty} R_n \ldots\ldots \quad (2)$$

Se a parcella $\lim\limits_{n=\infty} R_n$ é nulla, poderemos pôr, e só então

$$f(x) = \lim_{n=\infty} (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) = \Sigma u_i.$$

Para demonstrar agora a convergencia da serie precedente, a equação (1) dá-nos successivamente

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_{j-1} + R_j$$

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_{j-1} + u_j + u_{j+1} + \ldots + u_{j+k-1} + R_{j+k},$$

d'onde se tira

$$u_j + u_{j+1} + \ldots + u_{j+k-1} = R_j - R_{j+k}.$$

Posto isto, para que a serie considerada seja convergente, é necessario e sufficiente que, dada uma quantidade de valor absoluto ε, tão pequeno quanto se queira, se possa determinar um inteiro j para o qual se tenha

$$\operatorname{mod}(u_j + u_{j+1} + \ldots + u_{j+k-1}) = \operatorname{mod}(R_j - R_{j+k}) < \varepsilon$$

por maior que seja k.

Ora esta determinação é possivel, pois, se j verificar a desegualdade $\mathrm{mod}\, R_j < \frac{1}{2}\varepsilon$, será *a fortiori* $\mathrm{mod}\, R_{j+k} < \frac{1}{2}\varepsilon$, e, consequentemente, satisfeita a relação precedente.

THEOREMA II. — *A convergencia da serie* Σu_i *não envolve em si a existencia da equação* $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$, visto que $\mathrm{mod}\,(R_j - R_{j+k})$ póde convergir para zero á medida que j cresce sem que a mesma convergencia tenha logar para R_j e R_{j+k}.

OBSERVAÇÃO DE CAUCHY. — *Se* Σu_i *é uma serie convergente nem sempre será* $f(x) = \Sigma u_i$; pois, pelo que precede, este caracter não é sufficiente para na equação (2) se considerar nulla a parcella $\lim\limits_{n=\infty} R_n$.

Para definirmos as funcções a que se applica esta observação, considere-se a condição de convergencia $\lim\limits_{j=\infty} (R_j - R_{j+k}) = 0$, que dará

$$R_j = (\rho + r)_j = \rho_j + r_j,$$

sendo ρ_j, para qualquer valor inteiro e positivo do seu indice incluindo zero, constantemente egual a uma funcção determinada $\varphi(x)$, e r_j um infinitamente pequeno ao mesmo tempo que $\frac{1}{j}$.

Posto isto, sendo na nossa decomposição $\rho_0 = \rho_j$, a parte de $f(x)$ d'onde provém ρ_j será $\varphi(x)$ e ter-se-ha o systema de equações

$$\varphi(x) = \rho_0,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + \rho_1,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + (x - x_1)\varphi'(x_1) + \rho_2,$$

. . . .

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + (x - x_1)\varphi'(x_1) + \ldots + \frac{(x - x_1)^{j-1}}{1.2\ldots(j-1)}\varphi^{j-1} + \rho_j,$$

*

das quaes se tira

$$\varphi(x_1)=0,\ \varphi'(x_1)=0,\ \ldots\ \varphi^{j-1}(x_1)=0.$$

Como j é tão grande quanto se quer, as equações precedentes mostram que $\varphi(x)$ será uma funcção com um numero infinito de zeros eguaes a x_1.

Relativamente ao termo complementar r_j, elle provém de uma funcção susceptivel de ser desenvolvida em serie segundo a fórmula de Taylor.

Convém advertir que a existencia da funcção $\varphi(x)$ não só é sufficiente mas tambem necessaria, porque outra qualquer decomposição de R_j é sempre reductivel á que adoptámos.

Podemos portanto enunciar o seguinte

Theorema III. — *Se Σu_i é uma serie convergente no intervallo de x_1 a x_2, e nenhuma das parcellas de $f(x)$ admitte um numero infinito de raizes eguaes a x_1, no mesmo intervallo será $f(x)=\Sigma u_i$.*

A applicação da fórmula de Taylor ao desenvolvimento em serie de uma funcção torna-se agora muito simples. A analyse de cada uma das parcellas $\psi_n(x)$ de $f(x)$ reduzir-se-ha á determinação facil do verdadeiro valor de $\frac{\psi_n(x)}{(x-x_1)^n}$ para $x=x_1$ e $n=\infty$. Relativamente á determinação do limite x_2 de convergencia, para as series a que nos conduz esta fórmula, faz-se pelos theoremas geraes com a mesma facilidade.

Para exemplificar esta doutrina, consideremos a menor determinação da funcção arc tang x. Como a serie

$$\Sigma\frac{1}{1.2\ldots n}f^n(0)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

é convergente para todos os valores de x comprehendidos entre -1 e $+1$, n'este intervallo será

$$\text{arc tang}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,$$

por ser a partir de $n=1$

$$\left(\frac{\text{arc tang}\, x}{x^n}\right)_0 = \infty .$$

Nota. — A discussão da serie Σu_i exige, é verdade, o conhecimento da derivada da ordem de $f(x)$ para o valor particular $x=x_1$; mas, como se sabe, a solução d'este problema é muito mais extenso que para um valor qualquer x.

APPLICAÇÕES DA FORMULA QUE DÁ AS DERIVADAS DE ORDEM QUALQUER DAS FUNCÇÕES DE FUNCÇÕES

POR

F. GOMES TEIXEIRA

Sejam dadas as funcções

$$(1) \qquad y=f(u), \quad u=\varphi(x).$$

É bem conhecida a fórmula que dá a expressão da derivada de ordem n de y relativamente a x:

$$(3) \qquad y^{(n)}=\Sigma \frac{n!\,\dfrac{d^i y}{du^i}(u')^a(u'')^b\ldots(u^{(n)})^l}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b(3!)^l\ldots(n!)^l},$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$a+2b+3c+\ldots+nl=n,$$

e onde é

$$i=a+b+\ldots+l.$$

O fim d'este artigo é deduzir por meio d'esta fórmula algumas fórmulas conhecidas de analyse, que é costume obter por processos diversos.

Em outro artigo faremos algumas applicações de outra fórmula mais geral relativa á derivada de ordem n das funcções compostas, que publicámos no *Giornale di Matematiche* de Battaglini (t. XVIII).

I

Polynomios de Legendre

I. Sabe-se que os polynomios de Legendre são os coefficientes X_0, X_1, X_2, etc. do desenvolvimento em serie

$$y=(1-2ux+u^2)^{-\frac{1}{2}}=X_0+X_1u+X_2u^2+\ldots+X_ku^k+\ldots,$$

que é convergente quando u é, em valor absoluto, menor do que a menor das raizes da equação

$$1-2ux+u^2=0.$$

Applicando á funcção y a fórmula (2), vem

$$y^{(k)}=\Sigma\frac{k!\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-i+1\right)}{a!\,b!\,2^b}(-2x+2u)^a.2^b.y^{-\frac{1}{2}-i}$$

$$=\Sigma(-1)^b.\frac{k!\,1.3.5\ldots(2i-1)\,(x-u)^a}{a!\,b!\,2^b}y^{-\frac{1}{2}-i},$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$a+2b=k,$$

e onde é

$$i=a+b.$$

Pondo $u=0$, vem a fórmula

$$X_k=\frac{y_0^{(k)}}{k!}=\Sigma(-1)^b\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{a!\,b!\,2^b}x^a$$

ou

$$(3) \qquad X_k = \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{1.3.5\ldots(2k-2b-1)}{(k-2b)!\,b!\,2^b} x^{k-2b},$$

que serve para calcular os polynomios de Legendre.

II. Derivando k vezes a identidade

$$(x^2-1)^k = \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{k(k-1)\ldots(k-b+1)}{b!} x^{2k-2b},$$

vem

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$$

$$= \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{k(k-1)\ldots(k-b+1).(2k-2b)(2k-2b-1)\ldots(k-2b+1)}{b!} x^{k-2b}$$

$$= \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{k(k-1)\ldots(k-b+1).(2k-2b)!}{b!\,(k-2b)!} x^{k-2b},$$

ou, separando os factores pares dos impares no producto $(2k-2b)!$,

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$$

$$= \sum_{b=0}^{k} (-1)^b . \frac{1.3.5\ldots(2k-2b-1).2^{k-b}.k!}{b!\,(k-2b)!} x^{k-2b}.$$

Comparando esta fórmula com a fórmula (3) acha-se a formula conhecida

$$X_k = \frac{1}{k!\,2^k} . \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k.$$

II

Fórmula de Jacobi

Procuremos a derivada de ordem $n-1$ da funcção

$$y=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

Applicando a fórmula (3), vem

$$y^{(n-1)}=\Sigma\frac{(n-1)!\left(n-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{1}{2}-i+1\right)(-2x)^a(-2)^b(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}-i}}{a!\,b!\,(2!)^b},$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$a+2b=n-1,$$

e onde é

$$i=a+b.$$

Temos pois a fórmula

$$y^{(n-1)}=\Sigma\frac{(-1)^{n-1-b}(n-1)!\,(2n-1)\ldots(2b+3)\,x^{n-1-2b}(1-x^2)^{b+\frac{1}{2}}}{(n-1-2b)!\,b!\,2^b}$$

$$=(-1)^{n-1}.\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}\Sigma(-1)^b.\frac{n!\,x^{n-1-2b}(1-x^2)^{b+\frac{1}{2}}}{1.3\ldots(2b+1)(n-1-2b)!\,b!\,2^b},$$

que, por ser

$$2^b\times1.2.3\ldots b\times1.3\ldots(2b+1)=(2b+1)!$$

dá

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}$$

$$\times \Sigma (-1)^b \cdot \frac{(n-2b)\ldots n x^{n-1-2b} (1-x^2)^{b+\frac{1}{2}}}{(2b+1)!}.$$

Pondo agora $x = \cos\omega$, vem

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}$$

$$\times \Sigma (-1)^b \cdot \frac{(n-2b)\ldots n \cos^{n-1-2b}\omega \operatorname{sen}^{b+\frac{1}{2}}\omega}{(2b+1)!},$$

ou, em virtude de uma fórmula bem conhecida de Trigonometria,

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n} \operatorname{sen} n (\operatorname{arc}\cos x),$$

resultado devido a Jacobi.

III

Desenvolvimento em serie de arc (tang x).

A funcção

$$y = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} x)$$

dá

$$y' = (1+x^2)^{-1},$$

e portanto, applicando a fórmula (3), vem

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(n-1)!\, i!\, (2x)^a (1+x^2)^{-1-i}}{a!\, b!},$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$a + 2b = n - 1,$$

e onde é

$$i = a + b.$$

Temos pois

$$y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{n-1-b} \cdot \dfrac{(n-1)!\,(n-1-b)!}{(n-1-2b)!\,b!} \\ \times (2x)^{n-1-2b}\,(1+x^2)^{b-n} \end{array} \right\},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de β, desde zero até ao maior inteiro contido em $\frac{n-1}{2}$.

Pondo agora $x = 0$, temos:

1.° Se *n é impar,* todos os termos da fórmula se annullam, excepto aquelle que corresponde a $n - 1 - 2\beta = 0$; e teremos portanto

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (n-1)!$$

2.° *Se n é par,* o expoente $n - 1 - 2\beta$ não póde ser nullo e portanto teremos

$$y_0^{(n)} = 0.$$

Applicando agora a fórmula de Maclaurin, vem

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tang} x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} + \mathrm{R}_n,$$

onde

$$\mathrm{R}_n = \frac{x^n}{n} \Sigma \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{n-1-b} \cdot \dfrac{(n-1-b)!}{(n-1-2b)!\,b!} \\ \times (2\theta x)^{n-1-2b}\,(1+\theta^2 x^2)^{b-n} \end{array} \right\}.$$

Temos pois

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{b!} \cdot \frac{(2\theta x)^{n-1-2b}}{(1+\theta^2 x^2)^{n-b}}$$

ou

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{b!} \cdot \frac{1}{(2\theta x)^{b+1}} \cdot \left(\frac{2\theta x}{1+\theta^2 x^2}\right)^{n-b}.$$

A primeira d'estas desegualdades, no caso de ser $x < \frac{1}{2}$ (em valor absoluto), e a segunda no caso de ser $x > \frac{1}{2}$ e < 1 (em valor absoluto) dão

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{b!} < \frac{x^n}{n} e,$$

d'onde se conclue que o resto R_n tende para zero quando n tende para o infinito.

IV

Desenvolvimento em serie de sen (sen x), cos (sen x), *etc.*

Seja

$$y = \text{sen}\,(\text{sen}\, x),$$

ou

$$y = \text{sen}\, u, \quad u = \text{sen}\, x,$$

e portanto, em virtude da formula (3),

$$\frac{y^{(n)}}{n!} = \Sigma \frac{\text{sen}\left(u + i\frac{\pi}{2}\right) \text{sen}^a\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{sen}^b\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \dots}{a!\,b! \dots l!\,(2!)^b \dots (n!)^l}$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação

$$a + 2b + \dots + nl = n,$$

e onde é

$$i=a+b+\ldots+l.$$

Pondo $x=0$, vem

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}=\Sigma\frac{\operatorname{sen} i\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}^a\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}^b 2\frac{\pi}{2}\ldots}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l}$$

onde o producto

$$\operatorname{sen} i\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}^a\frac{\pi}{2}\ldots\operatorname{sen}^l n\frac{\pi}{2}$$

é egual a zero, ou a $+1$, ou a -1.

Esta fórmula dá os coefficientes do desenvolvimento de sen (sen x) em serie ordenada segundo as potencias de x. O resto é dado pela fórmula

$$R_n=x^n\Sigma\frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\theta x+i\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^a\left(\theta x+\frac{\pi}{2}\right)\ldots}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l}$$

e vê-se que tende para zero á medida que n tende para o infinito, quando é $x<1$ (em valor absoluto), por ser

$$R_n<\frac{x^n}{n!}\Sigma\frac{n!}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l},$$

e

$$\frac{1}{n!}\Sigma\frac{n!}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l}$$

tender para o limite zero (*).

Do mesmo modo se desenvolvem as funcções sen (cos x), cos (cos x) e cos (sen x).

(*) Ve- a pag. 41 d'este volume.

V

Desenvolvimento em serie de e^{e^x}.

A funcção

$$y=e^{e^x},$$

ou

$$y=e^u, \quad u=e^x,$$

dá, em virtude da fórmula (3),

$$y^{(n)}=\Sigma\frac{n!\,e^u\,e^{ix}}{a!\,b!\,\ldots\,l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l},$$

onde é

$$a+2b+\ldots+nl=n$$

$$i=a+b+\ldots+l.$$

Pondo $x=0$, vem

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}=e\,\Sigma\frac{1}{a!\,b!\,\ldots\,l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l}.$$

Esta fórmula dá os coefficientes do desenvolvimento em serie da funcção considerada; o resto é dado pela fórmula

$$R_n=\Sigma\frac{e^{e^{\theta x}}\,e^{i\theta x}}{a!\,b!\,\ldots\,l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l}\,x^n,$$

e tende para zero á medida que n tende para o infinito, quando é $xe^x<1$, por ser

$$R_n<e^{e^{\theta x}}\cdot\frac{(xe^x)^n}{n!}\,\Sigma\frac{n!}{a!\,b!\,\ldots\,l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l},$$

e os factores

$$(xe^x)^n, \quad \Sigma \frac{1}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l},$$

tenderem para zero.

VI

Numeros de Bernoulli

Consideremos a funcção

$$y=(1+e^x)^{-1}$$

e procuremos primeiro o valor que toma $y^{(2n-1)}$ quando é $x=0$. Temos, applicando a fórmula (3),

$$y^{(2n-1)}=\Sigma \frac{(-1)^i(2n-1)!\,i!\,e^{ix}(1+e^x)^{-i-1}}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b(3!)^c\ldots(2n-1\,!)^l}$$

onde $a, b, \ldots, l$ representam todas as soluções inteiras positivas da equação

$$a+2b+\ldots+(2n-1)\,l=2n-1$$

e onde é

$$i=a+b+\ldots+l;$$

e portanto, pondo $x=0$,

$$y_0{}^{(2n-1)}=\Sigma \frac{(-1)^i(2n-1)!\,i!}{2^{i+1}\,a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(2n-1\,!)^l}.$$

Os *numeros de Bernoulli* estão ligados com $y_0{}^{(2n-1)}$ por meio da relação

$$B_{2n-1}=(-1)^n\cdot\frac{2n}{2^{2n}-1}\,y_0{}^{(2n-1)},$$

de modo que temos

$$B^{2n-1}=\frac{(2n)!}{2^{2n}-1}\Sigma(-1)^{i+n}\frac{i!}{2^{i+1}a!b!\ldots l!(2!)^b\ldots(2n-1!)^l}.$$

Por esta fórmula póde-se calcular os numeros de Bernoulli, ou achar uma fórmula mais propria para o mesmo fim.

Com effeito, applicando a fórmula (3) á funcção

$$\frac{1}{i!}\left(\frac{d^{2n-1}(e^x-1)^i}{dx^{2n-1}}\right)_{x=0}$$

vem o resultado

$$\Sigma'\frac{(2n-1)!}{a!b!\ldots l!(2!)^b\ldots(2n-1)^l},$$

onde o sommatorio Σ' se refere aos valores de $a, b, \ldots, l$ que satisfazem ás equações simultaneas

$$a+2b+\ldots+(2n-1)l=2n-1,\quad a+b+\ldots+l=i.$$

Temos pois

$$B_{2n-1}=\frac{n}{2^{2n}-1}\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i+n}\cdot\frac{i!}{2^i}\Sigma'\frac{(2n-1)!}{a!b!\ldots l!(2!)^b\ldots(2n-1!)^l}$$

$$=\frac{n}{2^{2n}-1}\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i+n}\cdot\frac{1}{2^i}\left(\frac{d^{2n-1}(e^x-1)}{dx^{2n-1}}\right)_{x=0};$$

ou, pondo

$$(e^x-1)^i=e^{ix}-e^{(i-1)x}+\binom{i}{2}e^{(1-2)x}-\ldots,$$

$$B_{2n-1}=\frac{n}{2^{2n}-1}\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i+n}$$

$$\frac{1}{2^i}\left[i^{2n-1}-i(i-1)^{2n-1}+\binom{i}{2}(i-2)^{2n-1}-\ldots\right].$$

VII

Numeros de Euler

I. Applicando a fórmula (3) á funcção

$$y=(\cos x)^{-1}$$

vem

$$y^{(n)}=\Sigma(-1)^i \cdot \frac{n!\, i! \cos^a\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos^b\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)\ldots\cos^l\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}{a!\, b! \ldots l!\, (2!)^b \ldots (n!)^l \cos^{i+1} x}.$$

Os *numeros de Euler* são os valores que toma esta derivada quando se faz $x=0$, e temos portanto a fórmula

$$C_{2n}=\Sigma(-1)^i \cdot \frac{(2n)!\, i! \cos^a\frac{\pi}{2}\cos^b 2\frac{\pi}{2} \ldots \cos^l 2n\frac{\pi}{2}}{a!\, b! \ldots l!\, (2!)^b \ldots (2n!)^l},$$

onde é

$$a+2b+\ldots+2nl=2n, \quad i=a+b+\ldots+l,$$

que serve para calcular estes numeros. N'esta fórmula é evidentemente

$$\cos^a\frac{\pi}{2} \cdot \cos^b 2\frac{\pi}{2} \ldots \cos^l 2n\frac{\pi}{2}=0, \text{ ou } +1, \text{ ou } -1,$$

segundo os valores que tiverem a, b, c, etc.

II. Consideremos agora a funcção mais geral

$$y = (\cos x)^{-p}.$$

Applicando a fórmula (3) vem

$$y^{(n)} = \Sigma(-1)^i \cdot \frac{n!\,p(p+1)\ldots(p+i-1)\cos^a\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ldots\cos^l\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(n!)^l\cos^{i+p}x};$$

e pondo $x=0$ e chamando C_{2n} o coefficiente de $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ no desenvolvimento de $(\cos x)^{-p}$ em serie, vem

$$C_{2n} = \Sigma(-1)^i \cdot \frac{(2n)!\,p(p+1)\ldots(p+i-1)\cos^a\frac{\pi}{2}\ldots\cos^l 2n\frac{\pi}{2}}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^a\ldots(2n!)^l},$$

onde

$$a+2b+\ldots+2nl=2n, \quad i=a+b+\ldots+l.$$

D'esta fórmula vamos tirar um theorema que demonstrámos no nosso artigo — *Sur les nombres de Bernoulli* (*American Journal of Mathematics*, t. VII).

Pondo $p=p'+1$ e notando que o numero

$$\frac{(2n)!}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b\ldots(2n!)^l}$$

é inteiro, e que

$$p(p+1)\ldots(p+i-1) = (p'+1)(p'+2)\ldots(p'+i)$$

$$= \text{multiplo de } p'+i!,$$

vem

$$C_{2n} = \text{multiplo de } p' + E_{2n}$$

ou

$$C_{2n} \equiv E_{2n} \pmod{p-1}.$$

VIII

Derivadas do quociente de duas funcções

Seja dada a funcção

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \varphi(x)\,[\psi(x)]^{-1}.$$

Applicando a fórmula de Leibnitz, virá

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{h!\,(n-h)!}\,\varphi^{n-h}(x) \cdot \frac{d^h [\psi(x)]^{-1}}{dx^h};$$

mas temos

$$\frac{d^h [\psi(x)]^{-1}}{dx^h} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{l!\,i!\,[\psi'(x)]^a [\psi''(x)]^b \ldots [\psi^{(n)}(x)]^l}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b \ldots (h!)^l}\,[\psi(x)]^{1-i}$$

onde

$$a + 2b + \ldots + lh = h, \quad i = a + b + \ldots + l.$$

Logo teremos

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{(n-h)!}\,\Sigma \varphi^{n-h}(x)\,\Sigma (-1)^i \frac{i!\,[\psi'(x)]^a \ldots [\psi^l(x)]^l\,[\psi(x)]^{n-1}}{a!\,b!\ldots l!\,(2!)^b \ldots (h!)^l}.$$

*

IX

Derivadas das funcções inversas

Se for

$$y=f(x), \quad x=F(y)$$

virá

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'[F(y)]}=\frac{1}{\psi(y)}$$

e portanto

$$\frac{d^n x}{dy^n}=\Sigma(-1)^i\frac{(n-1)!\,i!\,[\psi'(y)]^a[\psi''(y)]^b\ldots[\psi^{n-1}(y)]^l}{a!\,b!\ldots l\,(2!)^b\ldots(n-1\,!)^l\,[\psi(y)]^{-1-i}},$$

onde a somma designada por Σ se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$a+2b+\ldots+(n-1)l=n-1$$

e onde é

$$i=a+b+\ldots+l.$$

X

Mudança da variavel independente

Seja

$$u=f(x), \quad y=F(x),$$

e procuremos a derivada de ordem n de u relativamente a y.

A fórmula (3) dá, derivando u relativamente a y considerando x como funcção de y,

$$\frac{d^n u}{dy^n} = \Sigma \frac{n!\, f^n(x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^{a'} \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{b'} \cdots \left(\frac{d^nx}{dy^n}\right)^{l'}}{a'!\, b'! \ldots l'!\, (2!)^{b'} \ldots (n!)^{l'}},$$

onde é

$$a' + 2b' + \ldots nl' = n, \quad i = a' + b' + \ldots + l',$$

onde se deve substituir $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, etc. pelos seus valores obtidos no paragrapho anterior.

BIBLIOGRAPHIA

Ligação do observatorio astronomico de Lisboa com a triangulação fundamental. — *Lisboa, 1886.*

Contém esta importante memoria, publicada pela *Direcção geral dos trabalhos geodesicos,* a descripção da serie de operações feitas debaixo da direcção intelligente do sr. Brito Limpo, para ligar o observatorio astronomico de Lisboa á triangulação fundamental portugueza, e portanto á triangulação que se extende sem interrupção sobre toda a superficie da Europa.

Além das tabellas das observações feitas para o fim que se tinha em vista, enriquecem este bello trabalho as descripções dos methodos empregados nas observações e nos calculos posteriores.

No primeiro capitulo descreve-se a triangulação empregada e o methodo seguido nas observações. Em seguida vêem desenvolvidamente expostos o methodo para achar as direcções mais provaveis dos pontos observados de uma estação geodesica; e o methodo empregado para a compensação da rêde trigonometrica, isto é, o methodo para fazer as correcções das direcções observadas de modo a satisfazer ás condições proprias das figuras geometricas que entram na rêde, e do systema polygonal que todas junctas constituem.

No segundo capitulo vem exposto o methodo pelo qual se acharam as differenças de nivel das estações, as tabellas d'estas observações, e o methodo para d'estas observações tirar os valores mais provaveis das differenças de nivel procuradas.

Finalmente, no terceiro capitulo vem a deducção dos resultados a que se pretendia chegar, isto é, a determinação das differenças entre as coordenadas geographicas do observatorio astronomico de Lisboa e o vertice — *Observatorio do Castello de S. Jorge* — da triangulação fundamental do reino.

G. Guccia. — Formole analitiche di alcune trasformazioni cremoniane delle figure plane (*R. del Circolo Matematico di Palermo*, t. 1).
—— *Teoremi sulle trasformazioni cremoniane nel piano (Item).*
—— *Generalizzasione di un theorema di Nöether (Item).*

O objecto d'estas notas interessantes é o estudo da transformação geometrica, conhecida pelo nome de transformação cremoniana, do nome do geometra illustre que primeiro a estudou.

Na primeira o sr. Guccia, depois de enunciar o problema algebrico correspondente á transformação bi-racional entre dois espaços do mesmo numero de dimensões, considera especialmente o caso dos espaços com duas dimensões e dá a solução d'este problema para algumas soluções geometricas das equações indeterminadas a que conduz a transformação de ordem qualquer.

Na segunda nota o auctor occupa-se tambem da transformação cremoneana de ordem qualquer no caso dos espaços de duas dimensões, e ahi apresenta uma serie de proposições geometricas importantes, de que não se póde dar idéa em pequeno espaço.

Na terceira nota o illustre geometra extende aos systemas lineares do genero zero um theorema importante devido a Nöther, em virtude do qual toda a transformação bisracional entre dois planos se póde resolver em um numero finito de transformações quadraticas.

M. d'Ocagne. — Étude géométrique sur l'ellipse. — Paris, 1886.

Destina-se principalmente aos engenheiros este excellente opusculo do sr. d'Ocagne, onde a ellipse é estudada debaixo do ponto de vista da applicação que d'ella se faz muitas vezes para o intradorso dos arcos das pontes de pedra. N'este caso, para traçar as junctas na estampa que se é obrigado a fazer, é necessario construir muitas normaes á ellipse, e para esta construcção o auctor dá um processo ao mesmo tempo muito simples e que nunca póde sahir dos limites destinados ao desenho.

J. Deruyts. — *Sur une classe de polynômes analogues aux fonctions de Legendre* (*Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, t. XIV).

São estudados n'este bello trabalho os polynomios comprehendidos na formula

$$P_n=\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-p+1}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-q+1}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n+p-1}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{n+q-1}\right\}$$

onde a e b são constantes reaes differentes de zero, e p e q são quantidades positivas. Estes polynomios, que comprehendem como casos particulares os polynomios de Jacobi e os do sr. Hermite, têem propriedades analogas ás dos polynomios de Legendre.

Dr. Fr. Engel. — *Ueber die Definitions gleichungen der continuirlichen Transformations gruppen.* — *Leipzig. 1886.*

—— *Zur theorie der Berührungs transformationen* (*Mathematischen Annalen*, t. XXII).

O objecto da primeira memoria é a exposição d'um novo methodo para a determinação de grupos de transformações infinitesimaes, por meio das suas equações de definição. Esta ordem de transformações foi introduzida na analyse por Sophus Sie, que escreveu sobre o assumpto numerosas memorias. O auctor propõe-se generalisar os processos e os resultados do analysta dinamarquez, sem se preoccupar com a determinação dos typos de grupos de transformações, nem com a das suas fórmas normaes. A memoria começa por um resumo das principaes noções e proposições relativas á theoria d'estes grupos, em especial dos de transformações infinitesimaes; segue-se-lhe desenvolvidamente o estudo d'estas, nos aggregados simples e de ordem superior, terminando por alguns casos especiaes no espaço a 2 e n dimensões.

A segunda memoria, publicada nos *Mathematische Annalen*, refere-se ás transformações de contacto, cuja importancia para a theoria das equações differenciaes foi primeiro posta em relevo por Sophus Sie. O auctor teve em vista preencher uma lacuna, que até aqui havia n'esta theoria, e evidenciar a ligação intima que existe entre as differentes classes d'estas transformações. Para este fim estuda primeiro as transformações de 1.ª ordem e ordens superiores no espaço a 2 dimensões, e generalisa os seus resultados ao espaço de n dimensões.

M. d'Ocagne. — De la déviation dans l'ellipse (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ème série, t. v).
—— *Sur certaines suites de fractions irréductibles* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. x).
—— *Sur les sous invariants des formes binaires* (*Item*).

E. Guccia. — Sur les transformations Cremona dans le plan (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1885*).
—— *Sur les transformations géométriques planes birationelles* (*Item*).
—— *Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes* (*Item, 1886*).

F. Engel. — Ueber die Abel'schen Relationen für die Theilwerthe der elliptischen functionen (*Berichte der K. Sächs Gesellschaft der Wissenschaften, 1885*).
—— *Zur theorie der Zusammensetzung endlichen continuirlichen Transformationgruppen* (*Item, 1886*).

J. Deruyts. — Sur le calcul approché de certaines intégrales definies (*Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 1886*).

M. Lerch. — Prispervky k theorii funkci elliptikych. — Prag, 1886.

G. Eneström. — Brevis för satsen, att den fullständiga integralen till en differensequation of n: *te ordningen innehaller* n *arbitrara konstanter. — Stockholm, 1886.*

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES SÉRIES

(Extraits d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

E. Cesaro

Professeur à l'université de Palermo

.... Relativement aux limites des expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$, pour n infini, on sait déjà que, *si elles existent*, elles sont égales. Depuis Cauchy on sait en outre que, *si la première limite existe*, il en est de même de la seconde. M. Lerch vient de faire voir (pag. 79) que l'on ne peut affirmer, inversement, que, *si la seconde limite existe*, il doive en être nécessairement de même de la première; mais l'exemple qu'il cite est tellement compliqué qu'il me permettra, sans doute, d'y substituer le suivant:

$$q^2 + q^2 + q^4 + q^4 + q^6 + q^6 + q^8 + \ldots .$$

La série est convergente, si q est moindre que l'unité, en valeur absolue. On a, d'ailleurs, *lim.* $\sqrt[n]{u_n} = q$; mais le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne tend pas vers une limite déterminée, puisqu'il est égal à 1 ou à q^2, suivant que n est impair ou pair. De même, pour la série

$$q + q^2 + q^4 + q^5 + q^7 + q^8 + q^{10} + \ldots,$$

le rapport en question est q ou q^2, suivant la parité de n, mais $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $q\sqrt{q}$; .... Il est vra que M. Lerch se propose de montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut augmenter au-delà de toute limite, malgré la convergence de la série; mais alors je puis, à sa série, substituer celle-ci:

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\beta}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\beta}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\beta}+\ldots,$$

où $\beta>\alpha>1$. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers zéro ou vers l'infini, suivant que n est pair ou impair. Cependant la série est convergente, et l'on a *lim.* $\sqrt[n]{u_n}=1$ ....

.... En général, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers ν limites différentes, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$, suivant la forme de n, on peut affirmer que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite déterminée, et que cette limite est

$$\lambda_1^{\varpi_1}\,\lambda_2^{\varpi_2}\,\lambda_3^{\varpi_3}\ldots\lambda_\nu^{\varpi_\nu},$$

où ϖ_i représente la *fréquence,* dans le système des nombres entiers, de la forme de n, pour laquelle le rapport considéré tend vers λ_i, de sorte que l'on a toujours

$$\varpi_1+\varpi_2+\varpi_3+\ldots+\varpi_\nu=1.$$

On obtient, pour $\nu=1$, le théorème de Cauchy: pour $\nu=2$, et $\varpi_1=\varpi_2$, on voit que, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers deux limites différentes, λ et μ, suivant que n est pair ou impair, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\sqrt{\lambda\mu}$: c'est ce que l'on vérifie pour les deux premières séries, citées ci-dessus. Soient encore λ et μ les deux différentes limites de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; mais supposons que, pour faire tendre ce rapport vers μ, il faille attribuer à n des valeurs, dont la fréquence soit infiniment petite dans le système de nombres entiers. Alors $\sqrt[n]{u_n}$ tend

vers λ. C'est le cas de la série de M. Lerch ....
.... La remarque de M. Lerch me semble digne d'entrer dans l'enseignement, et je l'ai effectivement introduite dans le cours que je donne, cette année, à l'Université de Palermo: j'ai exposé, en outre, à la suite de la règle de Raabe, l'intéressant théorème que M. Cahen vient de faire connaître dans les *Nouvelles Annales* (novembre, 1886). Ce théorème n'est pas essentiellement nouveau, en ce sens qu'il est contenu dans la proposition générale, donnée par M. Tannery à la page 82 de son *Introduction à la théorie des fonction d'une variable;* mais il a cela de bon qu'il est plus accessible aux commençants ....
.... Revenant à la remarque de M. Lerch, j'ajouterai qu'une série peut être convergente, sans qu'il existe une limite pour $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ni pour $\sqrt[n]{u_n}$. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la série

$$\alpha+\beta^2+\alpha^3+\beta^4+\alpha^5+\beta^6+\alpha^7+\ldots,$$

où $\beta<\alpha<1$. On voit, d'une part, que $\sqrt[n]{u_n}$ est égal à α ou à β, suivant que n est impair ou pair. D'autre part, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0 ou vers $+\infty$, suivant que n est impair ou par. Il n'y a pas de contradiction avec la généralisation du théorème de Cauchy, donné plus haut, parce que, dans le cas actuel, l'expression trouvée pour la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ devient indéterminée, à cause de $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\infty$, ...
.... Permettez-moi encore de faire observer que, pour une forme convenable de u_n, le théorème de Cauchy équivaut à dire que, si la fonction $f(n)$ tend vers une limite déterminée, lorsque l'entier n augmente indéfiniment, on a

$$lim. \frac{1}{n}[f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)]=f(\infty).$$

Mais, d'après M. Lerch, le premier membre peut avoir une limite déterminée, sans qu'il en soit de même pour $f(n)$. Il suffit de faire, pour s'en convaincre, $f(n) = (-1)^n$. Si les valeurs de $f(n)$, pour n infini, sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$, suivant la forme de n, ou a

$$lim. \frac{1}{n}[f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)] = \sum_{i=1}^{i=\nu} \lambda_i \tilde{\omega}_i,$$

où $\tilde{\omega}_i$ est la probabilité qu'un nombre entier, pris au hasard, appartienne au système de valeurs, pour lequel $f(n)$ tend vers λ_i, lorsque n devient infini. Je développerai, une autre fois, les conséquences arithmétiques de ce théorème. . . . .

. . . .

. . . .

. . . . . . Parmi les séries qui empêchent d'énoncer la réciproque du théorème de Cauchy, je puis encore citer de nombreuses séries arithmétiques. Ainsi, par exemple, $\theta(n)$ étant le *nombre des diviseurs* de n, nous savons que la série

$$\frac{\theta(1)}{1^m} + \frac{\theta(2)}{2^m} + \frac{\theta(3)}{3^m} + \frac{\theta(4)}{4^m} + \ldots$$

est convergente, si $m > 1$, et qu'il en est de même, pour $m > 2$, de la série

$$\frac{\int 1}{1^m} + \frac{\int 2}{2^m} + \frac{\int 3}{3^m} + \frac{\int 4}{4^m} + \ldots,$$

où $\int n$ représente la *somme des diviseurs* de n. Pour ces deux séries, $\sqrt[n]{u_n}$ a l'unité pour limite. Mais, dans la première, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend à ne pas rester au-dessous de 2, lorsque n parcourt la série des nombres premiers. Si, au contraire, c'est à $n+1$ qu'on attribue des valeurs premières, le rapport dont il s'agit est inférieur à $\frac{1}{2}$. Le contraire a lieu lorsqu'on remplace $\theta(n)$ par la fonction de Gauss, $\varphi(n)$. Quant à la seconde série, on remarquera que la fonction $\frac{1}{n}\int n$ est toujours supérieure à 1,

qu'elle devient égale à 2, lorsque n est un *nombre parfait;* mais qu'elle peut être rendue plus grande que toute quantité donnée, N, bien que cela devienne de moins en moins probable, à mesure que N croît. Dans les conditions qui ont été envisagées pour la première série, le rapport de deux termes consécutifs tend à ne pas rester au-dessous de $\frac{3}{2}$, ou, suivant les cas, à rester moindre que $\frac{2}{3}$. Du reste, dans les deux séries, le rapport en question peut devenir aussi grand qu'on le veut, ou bien s'approcher de zéro autant qu'on le désire..........................
.... Dans l'égalité

$$lim. \frac{1}{n}[f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)]=f(\infty),$$

où, naturellement, on admet que $f(\infty)$ ait une valeur déterminée, supposons que $f(n)$ soit la somme S_n des n premiers termes d'une série convergente. On a, pour n infini,

$$lim. \frac{1}{n}(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n)=S,$$

d'où l'on déduit

$$lim. \frac{1}{n}(u_1+2u_2+3u_3+\ldots+nu_n)=0.$$

De même, pour $f(n)=nu_n$, *si* nu_n *tend vers une limite* λ, on a, en vertu du dernier résultat, $\lambda=0$. Ainsi, *dans toute série convergente,* nu_n *ne peut tendre vers une limite différente de zéro.* Ce théorème est mal énoncé par quelques auteurs, qui semblent ne pas se douter qu'une série peut être convergente, sans que nu_n ait une limite. Il est évidemment possible que cela arrive lorsque la fonction nu_n est soumise, pour n croissant à l'infini, à des oscillations convenables, qui lui permettent *sans cesse* de s'approcher indéfiniment de zéro, ou bien d'atteindre cette valeur. On voit, en outre, que, contrairement à ce que l'on suppose dans les traités, il n'est pas indispensable que la série soit *à termes positifs.* De sorte que, si l'on trouve, dans une série *quelconque*, que le produit nu_n tend vers une limite finie et déterminée, autre que zéro, ou bien qu'il oscille dans un intervalle qui ne contient ni zéro, ni des quantités indéfiniment voisines de zéro, on peut affirmer que la série proposée n'est pas convergente.. Il est très-facile qu'une série soi convergente, malgré que la limite de nu_n n'existe pas: il suffit de citer les séries simplement convergentes, déduites de la série harmonique. Cela arrive plus difficilement pour les séries absolument convergentes. Ainsi, par exemple, dans une série convergente, *à termes positifs*, le produit nu_n doit osciller, s'il ne tend pas à zéro, entre 0 et un nombre positif α. Soit ε un nombre positif, inférieur à α. Soient n', n'', n''', ... les valeurs de n, pour lesquelles $nu_n < \varepsilon$. Il est clair que la *fréquence* de ce système de valeurs, dans le système des nombres entiers, diminue avec ε. Si elle peut être rendue inférieure à une fraction proprement dite, la série donnée ne peut être convergente. Si, au contraire, quelque petit que soit ε, la fréquence dont il s'agit ne cesse de différer infiniment peu de l'unité, la série considérée peut être convergente. Je ne dis pas qu'elle le sera nécessairement. Cela tient, pour peu qu'on y réfléchisse, à ce que la série

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\ldots,$$

où les dénominateurs constituent un système arbitraire de nombres entiers, inégaux, est divergente, si la fréquence de ce système n'est pas infiniment petite. On sait, en effet, que la fréquence en question est la limite, pour $m=1$, de

$$(m-1)\left(\frac{1}{u_1^m}+\frac{1}{u_2^m}+\frac{1}{u_3^m}+\ldots\right).$$

Il faut remarquer, ici, que la fréquence du système n', n'', n''', ..., lorsque ε tend à zero, n'a pas généralement pour limite la valeur qu'elle prend pour $\varepsilon=0$: cette dernière valeur est d'ailleurs zéro, dans le cas actuel . . . . Il nous reste le doute que, dans le cas où la fréquence du système n', n'', n''', . . . diffère infiniment peu de l'unité, la série soit *nécessairement* convergente. Il n'en est rien; car nous pouvons imaginer une infinité de séries à termes positifs, satisfaisant à la condition que l'on vient de rappeler, et pour les quelles nu_n ne tend pas à zero. Cependant, quelques-unes de ces séries sont convergentes: d'autres sont divergentes. Soit, en effet, u_n égal à $\frac{1}{n}$ ou à $\frac{1}{n^2}$, suivant que n appartient ou n'appartient pas à un certain système *illimité*, Ω, de nombres entiers, dont la fréquence, dans le système des nombres entiers, soit ϖ. Il est visible que la fréquence du système n', n'', n''', ..., tend vers $1-\varpi$. Pour nous trouver dans les conditions prescrites, il faut donc, avant tout, que ϖ soit un infiniment petit, c'est-à-dire que les éléments de Ω soient infiniment peu fréquents parmi les nombres entiers. On reconnaît, alors, que la série proposée est divergente ou convergente, en même temps que la série des inverses des éléments de Ω. Ainsi, par exemple, si Ω est le système des nombres premiers, la série proposée est divergente. Si Ω est le système des carrés parfaits, la série proposée est convergente: sa somme est $\frac{\pi^2}{3}\left(1-\frac{\pi^2}{30}\right)$. Cependant, le produit nu_n s'écarte continuellement de la limite 0, pour redevenir égal à l'unité. . . . . . Quelque soit le système Ω, ces suites offrent un nouvel exemple de séries, pour lesquelles $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers l'unité, tandis que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut devenir plus grand ou plus petit que tout nombre positif donné, ou se rapprocher de l'unité autant qu'on le désire. . . . .

. . . .

. . . .

Palerme, 30 janvier, 1887.

SUR LES ARCS D'ELLIPSE RECTIFIABLES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. Maurice d'Ocagne

... Je prends la liberté de vous signaler une petite remarque au sujet de l'intéressant article de M. R. Guimarães sur les arcs d'ellipse rectifiables.

Si φ et φ_1 sont les anomalies excentriques des points (x', y') et (ξ, ζ), on a

$$x' = a\cos\varphi \qquad \xi = a\cos\varphi_1$$

$$y' = b\sin\varphi \qquad \zeta = b\sin\varphi_1,$$

et la formule (C) de M. Guimarães s'écrit

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \pm \operatorname{tang}\varphi \frac{\sqrt{2c^2\sin^2\varphi - b^2(1 \pm \cos\varphi)^2}}{b(1 \pm \cos\varphi)}.$$

Si $\varphi_1 = \varphi$, on a donc

$$2c^2\sin^2\varphi - b^2(1 \pm \cos\varphi)^2 = b^2(1 \pm \cos\varphi)^2,$$

ou

$$c\sin\varphi = b(1 \pm \cos\varphi).$$

Si on prend le signe $+$, cette équation devient, en posant alors $\varphi = \varphi'$,

$$2c\sin\frac{\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi'}{2} = 2b\cos^2\frac{\varphi'}{2},$$

ou

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} = \frac{b}{c};$$

si on prend le signe $-$, et que l'on pose $\varphi=\varphi''$

$$2c\sin\frac{\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi''}{2}=2b\sin^2\frac{\varphi''}{2},$$

ou

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi''}{2}=\frac{b}{c}.$$

Par suite

$$\varphi'+\varphi''=\pi,$$

et les points B'_1 et B''_1 correspondant respectivement à φ' et à φ'' sont symétriques par rapport au petit axe OB.

Si la perpendiculaire menée par le foyer F au grand axe OA coupe la tangente en B au point I, on a

$$\widehat{IOA}=\frac{\varphi'}{2};$$

ce qui permet de construire immédiatement le point B'_1.

Si

$$b=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad \varphi'=90^\circ;$$

si

$$b=\frac{a}{2},\quad \varphi'=60^\circ.$$

. . . .

*

SUR LA PARTIE TRANSCENDANTE DE L'INTÉGRALE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

PAR

DUARTE LEITE

(Professeur à l'Ecole Polytechnique de Porto)

C'est un fait bien connu maintenant que pour obtenir la partie algébrique de l'intégrale d'une fraction rationnelle il n'est pas besoin de connaître les infinis de celle-ci. Au moyen de la seule division algébrique on parvient à déterminer les coefficients de la variable dans la fraction intégrale en fonction rationnelle de ceux de la différentielle (*).

L'objet de cette note est de montrer qu'une circonstance analogue se présente dans beaucoup de cas dans la détermination de la partie logarithmique de l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Soit

$$y=\int \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}\,dx,$$

et supposons que le dénominateur $\mathrm{F}(x)$ ait n racines simples, que je designerai par a_i.

(*) Il suffit d'employer un des élégants procédés indiqués par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse*, pag. 265 et suiv.

Ce fait avait été prévu par Liouville, dans un mémoire publié dans le cahier XXII du *Journal de l'École Polytechnique*, pag. 136, note. Il paraît même résulter d'un mémoire de Crelle, dans le tome 9 de son journal, pag. 231, que cela n'était pas inconnu à Euler.

Voyez aussi, sur ce sujet, deux notes de Mr. Gomes Teixeira, dans les *Rendiconti della Reale Academia dei Lincei*, serie 4.ª, vol. 1.º, marzo e aprile 1885.

On a

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{A_i}{x - a_i},$$

où (Serret. Calcul diff. 2e vol.)

$$A_i = \frac{f(a_i)}{F'(a_i)},$$

d'où

$$y = \sum_1^n A_i \log(x - a_i).$$

Admettons maintenant qu'on ait trouvé des fonctions $\varphi_j(x)$ telles que les valeurs $\varphi_j(a_i)$ soient des nombres entiers positifs non égaux.

Si l'on pose alors

$$A_i = \sum_1^n B_j \varphi_j(a_i) = \frac{f(a_i)}{F'(a_i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

les B_j étant des quantités qui ne dependent que de j, on aura

$$y = \sum_1^n \left[\sum_1^n B_j \varphi_j(a_i) \right] \log(x - a_i)$$

$$= \sum_1^n B_j \left[\sum_1^n \varphi_j(a_i) \log(x - a_i) \right]$$

$$= \sum_1^n B_j \log \prod_1^n (x - a_i)^{\varphi_j(a_i)}.$$

Les produits

$$F_j(x) = \prod_1^n (x - a_i)^{\varphi_j(a_i)}$$

sont des polynômes, dont les coefficients se déterminent rationnellement en fonction des sommes de puissances semblables de ses racines.

Or la somme des puissances k de celles-ci est de la forme

$$\Sigma\, \varphi_j(a_i) \,.\, a_i^k,$$

c'est donc une fonction symétrique des a_i, calculable partant en fonction rationnelle des coefficients de $F(x)$.

Pour compléter la démonstration annoncée, il suffit de remarquer que le système des équations (1), détermine les B_j eux aussi en fonction symétrique des a_i.

Lorsque les a_i sont des nombres entiers et positifs, les fonctions $\varphi_j(x)$ les plus simples sont des puissances de x. Le calcul se fait facilement par le procédé suivant.

Au moyen de l'équation

$$F(x) = 0$$

l'expression

$$A = \frac{f(x)}{F'(x)}$$

peut prendre la forme d'un polynôme

$$A = \sum_0^{n-1} B_j x^j.$$

On a, alors,

$$A_i = \sum_0^{n-1} B_j a_i^j$$

et, par conséquent,

$$y = \sum_0^{n-1} B_j \log \prod_1^n (x - a_i)^{a_i^j}.$$

Le coefficient d'une puissance quelconque de chacun des produits du sommatoire peut s'exprimer, par les formules de Newton, en fonction des sommes de puissances semblables des racines, dont la forme est

$$S_{k,j} = \Sigma\, a_i^k \,.\, a_i^j = \Sigma\, a_i^{k+j}.$$

Si les racines a_i sont commensurables, mais fractionnaires ou négatives, on pourra retomber sur le cas précédent en faisant dans la différentielle donnée une substitution linéaire convenablement choisie.

Mais il suffit dans le second cas de choisir pour fonctions $\varphi_j(x)$ des puissances paires de x.

— Les procédés ordinaires supposent qu'on ait trouvé les racines a_i, pour en conclure après la valeur des coefficients A_i.

On peut intervestir l'ordre de ces opérations en cherchant d'abord les A_i, comme je vais le montrer.

En formant le résultant du système

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=0 \\ \\ A-\dfrac{f(x)}{F'(x)}=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

on aura, il est facile de le voir, une équation de degré n en A, dont les racines sont les A_i. Il se pourra qu'elle soit résoluble plus facilement que

$$F(x)=0;$$

mais si celle-ci ne l'est pas algébriquement, l'équation en A ne le sera non plus, car le système (2) donne x en fonction rationnelle de A, et par conséquent on connaîtrait autant de racines a_i que de coefficients A_i.

NOTE SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SOLLICITÉ PAR UN CENTRE FIXE

PAR

H. LE PONT

(à Caen)

Considérons un point matériel sollicité par un centre fixe 0, origine des coordonnées polaires r et θ, et soumis à l'action d'une force R fonction de ses coordonées:

$$R = F(r, \theta).$$

Le principe des aires donne immédiatement

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c.$$

Combinant cette première intégrale avec celle des forces vives, et posant

$$\frac{1}{r} = \rho, \quad -\frac{r^2}{c^2} F(r, \theta) = f(\rho, \theta)$$

nous avons la formule analogue à celle de Binet

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = f(\rho, \theta), \qquad (a)$$

équation différentielle de la trajectoire.

Cette équation (a) est toujours intégrable lorsque son second membre est indépendant de θ, c'est-à-dire lorsque la force R est fonction du rayon vecteur r seulement, et Mr. Bertrand a démontré qu'alors les seules forces qui imposent au mobile un orbite fermé sont, ou proportionnelles à r, ou inversement proportionnelles à r^2 (*); elle s'intègre encore lorsque son second membre est de la forme

$$(\lambda+1)\rho+f(\theta)$$

λ étant une constante et $f(\theta)$ une fonction quelconque de θ; la force R ayant pour expression

$$(b) \qquad -\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{\lambda+1}{r}+f(\theta)\right].$$

Cette équation (a) devient alors

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2}=\lambda\rho+f(\theta)$$

et nous avons, en l'intégrant:

1° pour $\lambda>0$:

$$(\beta)\begin{cases} \dfrac{d\rho}{d\theta}=\dfrac{1}{2}\left[e^{\sqrt{\lambda}\theta}\displaystyle\int e^{-\sqrt{\lambda}\theta}f(\theta)\,d\theta+e^{-\sqrt{\lambda}\theta}\displaystyle\int e^{\sqrt{\lambda}\theta}f(\theta)\,d\theta\right] \\ \qquad\qquad +\sqrt{\lambda}\left(Ae^{\sqrt{\lambda}\theta}-Be^{-\sqrt{\lambda}\theta}\right) \\ \rho=\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[e^{\sqrt{\lambda}\theta}\displaystyle\int e^{-\sqrt{\lambda}\theta}f(\theta)\,d\theta-e^{-\sqrt{\lambda}\theta}\displaystyle\int e^{\sqrt{\lambda}\theta}f(\theta)\,d\theta\right] \\ \qquad\qquad +Ae^{\sqrt{\lambda}\theta}+Be^{-\sqrt{\lambda}\theta}. \end{cases}$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1873.

2° pour $\lambda < 0$:

$$(\beta_2)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{1}{2}\times\\
&\left[\cos\sqrt{-\lambda}\,\theta\int\cos\sqrt{-\lambda}\,\theta f(\theta)\,d\theta+\sin\sqrt{-\lambda}\,\theta\int\sin\sqrt{-\lambda}\,\theta f(\theta)\,d\theta\right]\\
&\qquad+\sqrt{-\lambda}\,(A\cos\sqrt{-\lambda}\,\theta-B\sin\sqrt{-\lambda}\,\theta)\\
&\rho=\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\times\\
&\left[\sin\sqrt{-\lambda}\,\theta\int\cos\sqrt{-\lambda}\,\theta f(\theta)\,d\theta-\cos\sqrt{-\lambda}\,\theta\int\sin\sqrt{-\lambda}\,\theta f(\theta)\,d\theta\right]\\
&\qquad+A\sin\sqrt{-\lambda}\,\theta+B\cos\sqrt{-\lambda}\,\theta.
\end{aligned}\right.$$

A et B désignant les constantes d'intégration.

Il est facile de voir quelles sont les forces R pour lesquelles la trajectoire du mobile est une courbe fermée: il faut et il suffit, en effet, pour cela que la différence entre deux valeurs quelconques θ_p et θ_q de θ pour les quelles on a

$$\frac{d\rho}{d\theta}=0$$

soit commensurable avec π, c'est-à-dire, en supposant que l'axe polaire soit dirigé suivant un rayon vecteur maximum ou minimum, que les seconds membres des premières équations (β_1) et (β_2) soient de la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^{n+1}\theta\sin^{n_1+1}\left(\theta-\frac{\pi}{m}\right)\mathrm{S}\,m^{n_2+1}\left(\theta-\frac{2\pi}{m}\right)\ldots\\
&\sin^{n_{m-1}+1}\left(\theta-\frac{m-1}{m}\pi\right)F(\theta)
\end{aligned}\right\}\quad(\gamma)$$

m étant un nombre entier, $n, n_1, n_2, \ldots n_{m-1}$ des nombres positifs et $F(\theta)$ une fonction qui ne devient ni nulle ni infinie pour les valeurs $0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\pi$ de θ. Les trajectoires définies par les dernières équations (β_1) et (β_2) sont des courbes fermées ayant pour axes de symétrie les m droites

$$\theta=0,\quad \theta=\frac{\pi}{m},\quad \theta=\frac{2\pi}{m},\quad \ldots\quad \theta=\frac{m-1}{m}\pi.$$

Il est alors facile de déterminer la fonction $f(\theta)$ de façon que le point considéré décrive une courbe fermée

$$(\delta)\qquad \rho=F(\theta)$$

ayant pour axes de symétrie un faisceau donné concentrique au pôle.

Deux cas sont particulièrement remarquables, le premier qui a été étudié par Jacobi (*) où on a

$$\lambda=-1$$

la force R est alors

$$R=-c^2\frac{f(\theta)}{r^2};$$

le second, où on a

$$\lambda=0$$

la force R étant

$$R=-\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r}+f(\theta)\right].$$

C'est ce cas que nous allons considérer.

(*) Darboux, note 11 du *Cours de Mécanique* de Despeyrous.

L'équation (α) devient

$$(1) \qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = f(\theta)$$

et donne immédiatement

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{d\theta} = \int f(\theta)\, d\theta$$

$$(3) \qquad \rho = \int \left[\int f(\theta)\, d\theta \right] d\theta.$$

Nous voyons alors que, en prenant

$$f(\theta) = -k^2 \cos\theta$$

k^2 désignant un coefficient constant, le mobile décrit l'ellipse

$$\rho = C + k^2 \cos\theta.$$

La force central

$$-\frac{c^2}{r^3} + \frac{k^2 \cos\theta}{r^2} \qquad (f_1)$$

impose donc aussi des arbitres planétaires. Mais, il y a plus: la troisième loi de Képler subsiste dans ce cas comme dans le cas de l'attraction newtonienne

$$-\frac{\mu^2}{r^2} \qquad (f_2)$$

et, en choisissant convenablement les constantes, le mobile décrira, dans les deux cas, la même trajectoire, avec les mêmes particularités dans son mouvement.

On pourrait multiplier à l'infini le nombre de problèmes aux quels donne lieu cette question des forces centrales; nous avons choisi celui-ci à cause de son importance.

Si, en effet, on suppose le coefficient c suffisamment petit, la loi d'attraction diffère infiniment peu de celle de Newton.

INDICE