JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc

VOLUME XIV

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1900

NOTICIA BIOGRAPHICA SOBRE F. DA PONTE HORTA

O homem illustre cujo nome vem de ser mencionado e cuja perda a sciencia portugueza soffreu ha menos de um anno, representou um dos principaes papeis entre os mathematicos do nosso paiz na segunda metade do seculo que vem de terminar. Este jornal, que elle illustrou com valiosos trabalhos, julga do seu dever dar aos seus leitores uma noticia da sua vida e da sua obra scientifica, e é este dever que hoje cumpre, prestando assim a sua homenagem ás altas qualidades de talento e caracter do illustre extincto.

Francisco da Ponte Horta nasceu em Faro em 6 de março de 1818 e era filho do brigadeiro Francisco da Ponte Horta e de D. Julia Maxima Horta. Resolvendo seguir, como seu pae, a carreira das armas, assentou praça como voluntario no regimento de Artilheria n.º 2 em 24 de dezembro de 1832, fazendo logo depois as campanhas de 1833 e 1834 no deposito de artilheria de Faro e no 3.º batalhão de Artilheria. Em outubro de 1835 matriculou-se no 1.º anno da Academia de Marinha, e em outubro de 1836 no 2.º anno da mesma Academia, que concluiu na Escola Polytechnica. Continuou depois a frequentar esta ultima escola até 27 de junho de 1840, data em que terminou o curso preparatorio para a matricula no curso de Artilheria da Escola do Exercito. Era n'esta occasião 2.º tenente de Artilheria, posto a que havia sido promovido em 7 de setembro de 1837. Nos annos lectivos de 1840 a 1841 e de 1841 a 1842 frequentou o curso de Artilheria da Escola do Exercito, sendo depois promovido a 1.º tenente d'esta arma em 7 de outubro de 1845. Voltou depois ainda á Escola Polytechnica para estudar algumas cadeiras que não faziam parte do curso preparatorio de Artilheria, que anteriormente tinha concluido, fazendo exame de principios de Metalurgia em junho de 1843 e de Astronomia em junho de 1849.

O seu curso tanto na Escola Polytechnica como na Escola do Exercito foi muito distincto. São prova d'isso os premios que recebeu nas cadeiras de Mecanica e Astronomia da primeira d'estas escolas e na cadeira de Resistencia de Materiaes da outra.

Munido de documentos tão honrosos e preferindo á vida agitada das armas o serviço socegado da sciencia e do ensino, concorreu a uma vaga de lente substituto da cadeira de Mecanica e Artilheria da Escola naval, sendo despachado para este logar em 9 de janeiro de 1848, e mais tarde a uma vaga de lente substituto de Mathematicas da Escola Polytechnica, sendo despachado para esse logar em 12 de janeiro de 1852. Na primeira d'estas escolas foi promovido a lente proprietario de Astronomia e navegação em 1868, e na segunda foi promovido a lente proprietario de Mechanica em 28 de janeiro de 1854. Era então capitão de Artilheria, posto a que havia sido promovido em 29 de abril de 1851.

F. Horta conservou-se na regencia da sua cadeira da Escola naval até 1869 e na da Escola Polytechnica até 17 de maio de 1883, annos em que lhe foi concedida a respectiva jubilação, sendo entretanto promovido a major em 23 de junho de 1867, a tenente coronel em 18 de dezembro de 1872, a coronel em 1 de fevereiro de 1878, e finalmente reformado no posto de general de divisão em 9 de maio de 1883. Do modo levantado como exerceu a sua missão, do zelo e intelligencia com que regeu as suas cadeiras dão testemunho os que tiveram a felicidade de o ter como professor.

F. Horta não foi só um professor excellente. Foi tambem um geometra distincto. Esta qualidade chamou para elle a attenção da Academia Real das Sciencias de Lisboa, que o elegeu socio effectivo em 6 de maio de 1858, sendo relator do respectivo parecer o dr. Thomaz d'Aquino de Carvalho, e servindo de base á candidatura um trabalho sobre uma curva a que deu o nome de quadrifolio balistico, depois publicado nos *Annaes de Sciencias* da mesma Academia. Os deveres d'este cargo honroso cumpriu-os elle com grande zelo e talento notavel, como o provam as collecções academicas, onde se encontram muitos trabalhos valiosos sobre diversos pontos das sciencias mathematicas, que elle ahi publicou. D'estes trabalhos e dos que publicou fóra das collecções academicas vamos apresentar uma lista, onde são enumerados, segundo a ordem, em que foram publicados, e acompanhados de uma indicação succinta do seu objecto:

1.° *Quadrifolio balistico* (*Annaes de Sciencias*, t. I, 1857).

O auctor dá o nome de *quadrifolio balistico* á curva a que hoje se dá o nome de *espiral siuusoide de quatro folhas*, e estuda n'elle as suas propriedades. N'este trabalho merece especial attenção a descoberta de uma relação entre esta curva e a curva notavel a que hoje se dá o nome de *astroide*.

2.° *Parallelogrammo das forças* (*Annaes de Sciencias*, t. I, 1857).

Versa este artigo sobre a demonstração analytica do theorema relativo á composição das forças concorrentes.

3.° *Formula symbolica do sr. Daniel* (*Annaes de Sciencias*, t. I, 1857).

O auctor dá n'este artigo uma demonstração de uma formula symbolica notavel de que Daniel Augusto da Silva fez uso na sua memoria sobre as congruencias binomias.

4.° *Outra formula symbolica* (*Annaes de Sciencias*, t. I, 1857).

N'este artigo são demonstradas por meio de uma analyse symbolica as formulas conhecidas que dão a somma dos senos e a dos cosenos de uma serie de angulos em progressão arithmetica.

5.° *Uma propriedade dos coefficientes do binomio* (*Annaes de Sciencias*, t. II, 1858).

N'este artigo demonstra F. Horta algumas relações conhecidas, pertencentes á theoria das differenças, e demonstra tambem o seguinte theorema geral que as contém:

Multiplicando os termos do desenvolvimento do binomio $(1-1)^m$ por $h_1, h_1-b_1, h_1-2b_1, \ldots h_1-mb_1$, os termos da somma resultante por $h_2, h_2-2b_2, \ldots h_2-mb_2$, e assim successivamente, vem sempre zero, excepto no fim de m multiplicações, em que vem $1.2\ldots mb_1 b_2 \ldots bm$.

6.° *Parecer da commissão que propõe o sr. Daniel Augusto da Silva para o logar de socio de merito da 1.ª classe* (*Annaes de Sciencias*, t. II, 1858).

N'este parecer, muito bem feito, do qual foi relator F. Horta, presta-se uma alta e justa homenagem aos meritos scientificos do geometra eminente a que é consagrado.

7.° *Estudo synthetico sobre as secções conicas (Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa, nova serie,* t. III, parte 2.ª, 1865).

Esta bella e importante memoria é a mais notavel dos trabalhos de F. Horta N'ella applica o illustre geometra os methodos geometricos de Chasles ao estudo das propriedades das curvas que representam o logar geometrico das intersecções dos raios homologos de dois feixes homographicos. Estas curvas coincidem com as conicas, cuja theoria é assim estabelecida de um modo muito elegante. Notam-se n'este trabalho alguns theoremas novos de muito interesse e methodos elegantes para resolver alguns problemas importantes relativos ás curvas consideradas.

8.° *Nota sobre a possibilidade de assentar uma conica dada sobre um cone egualmente dado (Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa, nova serie,* t. III, parte 2.ª, 1865).

Dá-se n'esta memoria uma solução geometrica simples do problema que tem por fim, dado um cone de base circular, achar a secção plana d'este cone que é egual a uma conica dada.

9.° *Nota sobre a egualdade dos polygonos (Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes,* t. I, 1866).

10.° *Nota sobre alguns theoremas de Geometria (Item, 1886).*

N'estes artigos são demonstrados alguns theoremas de Geometria elementar e são resolvidos, por meio d'elles, alguns problemas interessantes.

11.° *Exercicios de Geometria analytica (Item,* t. I, 1866).

12.° *Nota sobre algumas proposições arithmeticas (Item,* t. I, 1866).

N'este artigo são demonstradas algumas proposições relativas á reducção das fracções ordinarias a dizima.

13.° *Nota sobre uma proposição de Statica (Item,* t. II, 1870).

N'este artigo dá F. Horta uma elegante demonstração analytica da proposição seguinte, da qual Bresse dera anteriormente uma demonstração geometrica:

No equilibrio do frio flexivel e inextensivel a tensão varía na razão composta do raio osculador e componente normal das forças.

14.° *Nota sobre um problema de Geometria (Item,* t. II, 1870).

N'este artigo o auctor dá um meio de resolver o problema que tem por objecto determiuar qualquer diametro d'uma hyperbole definida por suas asymptotas e pelo eixo real.

15.º *Nota sobre algumas proposições de Geometria* (*Item*, t. II, 1870).

N'este trabalho interessante o auctor deduz de uma fórmula de Chasles um theorema conhecido da theoria das cordas supplementares da ellipse e meios para reconhecer se uma curva dada é uma conica e, no caso de o ser, qual a sua especie.

16.º *Algumas propriedades das conicas deduzidas da sua geração parallelogrammica* (*Item*, tom. III, 1870).

N'este artigo continua F. Horta a estudar a theoria das conicas pelo methodo geometrico empregado na memoria intitulada — *Estudo synthetico das secções conicas*, anteriormente citada.

17.º *Nota sobre um problema de Cinematica* (*Item*, t. V, 1874).

O movimento de uma figura plana no seu plano póde ser produzido pelo rolamento de uma curva, ligada á figura, sobre uma curva fixa no espaço. F. Horta mostra como se pode determinar uma d'estas curvas quando é dada a outra e a trajectoria de um ponto da figura movel.

18.º *Um subsidio á Cinematica* (*Item*, t. VII, 1877).

N'este artigo demonstra F. Horta algumas proposições de Geometria necessarias para explicar um mechanismo por meio do qual se faz a transmissão do movimento de rotação, n'uma razão constante de velocidades, entre dois eixos situados no mesmo plano.

19.º *Sobre a divisibilidade dos numeros* (*Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, t. I, 1877).

Encerra este artigo demonstrações das regras de divisibilidade por 3, 7, 9, 11 e 13 fundadas na egualdade

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} = \text{inteiro}$$

e alguns theoremas relativos á divisibilidade dos numeros por estes factores.

20.º *Sobre o movimento de um ponto actuado por uma força perpendicular ao raio vector* (*Item*, t. I, 1877).

O auctor deduz as equações differenciaes do movimento considerado e integra-as.

21.° *Estudo sobre o problema proposto no n.° 10* (*Item*, t. I, 1877 e t. II, 1878).

F. Horta estuda n'este artigo com todo o desenvolvimento, por meio de Geometria analytica, o problema proposto n'este jornal por Amorim Vianna, que consiste em determinar um circulo que corte dois circulos dados debaixo de angulos dados.

22.° *Nota sobre um problema de Geometria* (*Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, t. VIII, 1881).

N'este artigo é estudado o problema seguinte: Dadas tres rectas em um plano, conduzir uma secante n'uma direcção dada de modo que as partes interceptadas tenham uma razão dada.

23.° *Algumas propriedades das conicas* (*Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, t. IV, 1882).

Continuação do estudo das conicas feito no artigo intitulado — *Algumas propriedades das conicas deduzidas da sua geração parallelogrammica*, anteriormente mencionado.

24.° *Estudo elementar dos determinantes, seguida de uma parte complementar relativa principalmente aos determinantes funccionaes*, Lisboa, 1889.

25.° *Nota sobre os determinantes* (*Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, 2.ª serie, t. II, 1890).

Nos tomos IX (paginas 51) e X (pag. 20) d'este jornal deu-se noticia dos dous trabalhos de F. Horta que vimos de mencionar ultimamente. O primeiro é um livro excellente para o estudo da theoria dos determinantes, onde esta theoria importante é exposta com muita clareza, elegancia e bom methodo. O segundo trabalho encerra algumas notas a respeito do livro anterior, onde são consideradas algumas questões de grande interesse relativas ás alterações que soffrem os determinantes por meio do movimento de rotação á roda do centro ou das diagonaes, e depois algumas especies de symetria dos determinantes.

Os trabalhos de F. Horta sobre a theoria dos determinantes mereceram a approvação do illustre professor inglez T. Muir, auctor de trabalhos importantes relativos a esta theoria. Foi-nos permittido ver cartas dirigidas pelo sabio analysta inglez ao nosso illustre geometra a respeito d'estes trabalhos. N'uma d'estas cartas T. Muir referindo-se a um theorema de F. Horta relativo ao desenvolvimento dos determinantes segundo os elementos da primeira diagonal, publicado no segundo dos trabalhos referidos, diz que este theorema deve figurar em todos os livros de texto para o estudo dos determinantes e que elle o ha de mencionar no seu *Treatise on the theory of determinants*, quando publicar uma nova edição d'esta obra.

26.° *Dois theoremas de Geometria elementar* (*Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, t. XI, 1892).

N'este trabalho é demonstrado o theorema seguinte: Se tres circumferencias de circulo se interceptarem no mesmo ponto, e as suas tres outras intersecções estiverem em linha recta, os centros d'estas circumferencias estarão n'outra circumferencia que passará pelo ponto commum das tres primeiras.

Os trabalhos scientificos de F. Horta foram todos publicados por elle em idade já bastante avançada. Tinha 39 annos quando publicou o primeiro e 74 quando publicou o ultimo. Depois da publicação d'este ultimo, viveu ainda alguns annos, fallecendo finalmente em Lisboa no dia 24 de março de 1899.

Porto, outubro de 1899.

GOMES TEIXEIRA.

BIBLIOGRAPHIA

M. d'Ocagne: Traité de Nomographie. Paris, Gauthier-Villars, 1899.

Depois do trabalho de invenção não ha trabalho mais util que possa fazer um homem de sciencia, do que coordenar e expôr didacticamente os assumptos a que se referem as suas descobertas. É o que vem de fazer o sr. M. d'Ocagne para o ramo de sciencias mathematicas que trata dos abacos (ao qual chamou Nomographia) de que elle é um dos principaes fundadores e a respeito do qual tem publicado importantes indagações em varias publicações periodicas e ainda em um volume especial, intitulado — *Les calculs usuels effectués au moyen des abaques* (Paris, 1891), que contém os seus primeiros ensaios sobre este assumpto. Os leitores d'este jornal conhecem de certo estes trabalhos que têm aqui sido analysados ou pelo menos indicados.

Graças a estes trabalhos e aos trabalhos d'outros auctores que se occuparam d'este assumpto, a Nomographia tomou rapidamente um grande desenvolvimento, e utilisada pelos engenheiros, que lhe reconheceram a grande utilidade na practica da sua arte, vulgarisou-se tambem em breve tempo. N'estas circumstancias tornava-se necessario um livro didactico que contivesse tudo o que existe de essencial n'esta theoria, e, para o fazer, ninguem estava em melhores condições do que o sr. M. d'Ocagne. Este livro vem felizmente de apparecer, e o seu titulo é o que vem indicado no principio d'esta noticia.

Na redacção da sua bella obra o auctor teve em vista um duplo fim: apresentar aos engenheiros uma obra util, offerecer aos mathematicos um trabalho interessante. Conseguiu este duplo fim.

Os primeiros encontrarão nos primeiros capitulos tudo o que necessitam saber para usar d'este meio precioso de fazer os calculos a que o exercicio da sua profissão os obriga; os segundos estudarão com vivo interesse o ultimo capitulo, onde é considerado o problema geral da representação plana das equações com um numero qualquer de variaveis.

As doutrinas consideradas pelo sr. d'Ocagne estão distribuidas por seis capitulos segundo a ordem que consiste em passar de casos mais simples para casos cada vez mais complicados. Com esta disposição dos assumptos procurou o auctor ser util aos technicos. O capitulo 1.° é consagrado á theoria da representação das equações de duas variaveis e aos diversos abacos d'estas equações. O capitulo 2.° é consagrado ao estudo da representação das equações de tres variaveis pelo methodo dos crusamentos. Encontram-se n'estes capitulos os resultados de Lalanne sobre o principio da anamarphose. O capitulo 3.° é consagrado ainda á representação das equações de tres variaveis, sendo n'elle considerado o methodo inventado pelo sr. d'Ocagne, a que elle chamou primeiramente *methodo dos pontos isoplethos* e actualmente *methodo dos pontos alinhados*. No capitulo 4.° são considerados os systemas de duas equações e são applicados os resultados achados ao calculo dos aterros e desaterros. No capitulo 5.° são consideradas equações de mais de tres variaveis. Em todos estes cinco capitulos encontram-se muitas e importantes applicações das doutrinas expostas a varias questões technicas.

Todos os methodos de representação das equações por meio de abacos descobertos pelos que se occuparam d'esta doutrina antes do sr. d'Ocagne e tambem os que descobriu este illustre geometra estão subordinados a uma theoria unica. Esta theoria que foi descoberta pelo proprio auctor do livro que estamos considerando, é exposta com toda a generalidade no bello e interessantissimo capitulo (capitulo 6.°) que fecha, com chave de ouro, a obra notavel a que nos estamos referindo.

Ernest Lebon: Histoire abrégée de l'Astronomie. Paris, Gauthier-Villars, 1899.

Não ha ramo algum da historia das sciencias que interesse a maior numero de pessoas do que o que se refere á Astronomia. Que póde, com effeito, haver de mais attrahente do que a narração dos esforços que tantos homens de genio fizeram, desde a antiguidade até aos nossos tempos, para descobrir os segredos do Universo? A historia da Astronomia é todavia vasta e era porisso desejavel um livro onde aquelles que não podem dispôr de tempo para a leitura de trabalhos extensos possam tomar conhecimento do que n'ella ha de mais essencial. A este fim satisfaz plenamente o excellente livro que vem de publicar o sr. E. Lebon, o qual encerra uma exposição das grandes descobertas e dos trabalhos importantes da Astronomia acompanhada de curtas biographias dos principaes astronomos.

O auctor divide a historia da Astronomia em tres periodos. O periodo antigo, que vae até ao meio do seculo XVI; o periodo moderno, que vae até ao meio do seculo XIX; o periodo contemporaneo que comprehende a segunda metade d'este seculo.

A parte do livro relativa ao periodo antigo é dividida em dois capitulos, um consagrado ás primeiras observações dos Chaldeos, Phenicios e Gregos, o segundo consagrado á historia do systema de Ptolomeo.

A parte do livro relativa ao periodo moderno é dividida em nove capitulos com as epigraphes seguintes: I Systema de Copernico. II. Systema dos torbilhões. III Lei da attracção universal. IV Figura da Terra. V Problema dos tres corpos. VI Mecanica celeste. VII Aperfeiçoamento da Astronomia physica. VIII Geodesia. IX Meteorologia.

Encontram-se n'esta parte do livro as biographias de Copernico, Thyco-Brahe, Kepler, Galileu, Huygens, Newton, Bradley, Lagrange, Laplace, Gauss, W. Herschel, Bessel, Arago, etc.

A parte da obra do sr. Lebon consagrada ao periodo contemporaneo está dividida em dez capitulos, onde são considerados os assumptos: I Progressos dos methodos da Mecanica celeste. II Progressos da Astronomia estellar. III Experiencias, observações e hypotheses. IV Analyse espectral em Astronomia. V Geodesia. VI Meteorologia. VII A photographia em Astronomia. VIII Descobertas de pequenos planetas e satelites. Siderostatō de oculo. X Mecanica celeste no fim do seculo XIX.

Encerra esta parte do livro as biographias de Cauchy, Delaunay, Leverrier, Argelander, W. Struve, Perrier, Gould, Monchez, Tisserand, Gylden, etc.

Terminaremos esta noticia aconselhando vivamente a leitura d'este bello livro a toda a pessoa culta que desejar conhecer o que ha de mais importante na historia da Astronomia. Accrescentaremos ainda que elle é adornado com retratos de Copernico, Kepler, Galileu, Newton, Laplace, W. Herschel, Arago, Janssen, Perrier, M. Loevy, S. Newcomb, S. Kovalewsky, Tisserand, Poincaré e Faye.

E. Duporcq: Premiers principes de Géometrie moderne. Paris, Gauthier-Villars, 1899.

O pequeno livro, cujo titulo vem de ser escripto, não encerra um tratado de Geometria moderna, mas sim uma exposição, feita com muita clareza e precisão, de que é fundamental e mais essencial nesta Geometria, para uso dos que a querem estudar pela primeira vez. Esta exposição é acompanhada de applicações muito bem escolhidas, proprias a habilitar os alumnos a applicar os methodos fecundos que são estudados no livro.

O livro está dividido em seis capitulos. No primeiro capitulo occupa-se o auctor do uso dos imaginarios em Geometria e dá as primeiras noções sobre as transformações. No capitulo segundo são estudadas as divisões e os feixes homographicos e faz-se applicações d'elles á geração das conicas e das superficies de segunda ordem. O capitulo terceiro é consagrado ás transformações homographicas e correlativas. No capitulo quarto são estudadas pelos methodos da Geometria moderna as principaes propriedades das conicas. No capitulo quinto são estudadas pelos mesmos methodos as propriedades das quadricas. Finalmente no capitulo sexto encontram-se applicações das transformações homographicas, um estudo geometrico da inversão, o estudo das transformações quadraticas planas e algumas indicações rapidas sobre as transformações de contacto de S. Lie.

Com a publicação d'este livro de leitura facil e agradavel, prestou o sr. Duporcq um bom serviço aos que quizerem estudar os methodos com que Poncelet e Chasrles enriqueceram a Geometria.

Henri Pinet: Mémoire sur une nouvelle méthode pour la résolution das équations numeriques. Paris, Nony et C.ie, 1899.

N'esta memoria interessante o auctor apresenta um methodo para calcular as raizes inteiras das equações algebricas, que obriga a menos tentativas do que o methodo classico que se emprega para este fim. É acompanhada por um appendice onde o sr. E. Krauss dá a indicação de todas as operações que é necessario fazer para resolver uma equação numerica dada pelo methodo dado na memoria do sr. Pinet.

G. Pirondini: Proiezione stereografica e sua applicazione allo studio di alcune linee sferiche (Periodico di Matematica, 1899).
—— Sur la spirale logarithmique (Mathesis, 1899).

G. Pesci: Application de la Nomographie au jaugeage des tonneaux (Le Génie civil, 1899).

G. Vivanti: Sulle funzioni transcendenti intere (Rend. del R. Istituto Lombardo, 1899).
—— Sul concetto di derivata nella teoria elementare delle funzioni analitiche (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1899).

Bettazzi: Sulla definizione del numero (Periodico di Matematica, 1899).

G. Loria : Aperçu sur le développement historique de la théorie des courbes planes (Verhandlungen der ersten internationalen Mathematiker Kongresses, 1898).

G. Vailati : Le speculazioni di Giovani Benedetti sur moto dei gravi (Rend. della R. Accademia di Torino, 1897-1898).

M. Lerch : Sur quelques propriétés d'une transcendante uniforme (Comptes rendus du quatrième Congrès scientifique des catholiques tenu à Fribourg, 1898).

Die integratoren, Systeme B. Rülf (Der Mechaniken. Berlin, 1898).

Eugene et François Cosserat : Sur les équations de la théorie de l'élasticité (Comptes rendus de l'Académie de Paris, 1898).

—— Sur les fonctions potentielles de la théorie dé l'élasticité. (Ibidem).

—— Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoide élastique. (Ibidem).

J. Duran Loriga : Sur les triples de cercles associés (Mathesis, 1898).

R. Guimarães: Calculo do volume de um segmento espherico independentemente do conhecimento do volume dos corpos esphericos (Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa, 1898).

— — *Sobre uns problemas de Topographia (Revista de Obras publicas, 1899).*

G. T.

DE L'ACTION D'UNE FORCE ACCÉLÉRATRICE SUR LA PROPAGATION DU SON

PAR

OTTO D'ALENCAR SILVA

(à Rio de Janeiro)

On nous adressa, il y a quelque deux ans, une question que nous pouvons résumer ainsi :

1.° La vitesse du son, dans un milieu indéfini, souffre-t-elle quelque modification, si l'on tient compte des forces accélératrices de la pesanteur ?

2.° Et cette influence pourra-t-elle se révéler dans la formule usuelle ?

3.° Si elle existe, en quoi consiste cette modification ?

Á la deuxième partie, nous répondîmes qu'il était incohérent de prétendre trouver cette influence dans une formule, dont la déduction suppose le milieu impondérable.

Mais, en restituant au gaz son poids propre, devrait-on modifier l'équation connue de Laplace, comme on le fit pour celle de Newton, qui ne supposait pas la distension adiabatique des fluides ? Nous ne pûmes pas la dire. La réponse dépendait, en effet, d'une équation aux derivées partielles, bien plus complexe que celles de la chaleur, bien plus compliquée même que les équations habituelles du son. Et cela depassait tout ce que nous savions de ces eas difficiles. Conséquence de la fonction des forces extérieurs, de nouveaux termes s'introduisent dans l'équation ; elle perd ainsi ce caractère de simplicité qui permit à Kirchhoff d'énoncer son beau théorème.

Voilà pourquoi les fonctions plus qu'harmoniques, définies par l'équation de Poisson, quoique bien étudiées, ne nous furent d'aucun secours, dans le cas que nous allons traiter.

Heureusement, de plus récentes lectures nous éclaircirent; et ce fut presque par hasard, avoûons-le, que nous arrivâmes à la solution de cet admirable problème de philosophie naturelle.

Ce qui nous semblait plein de sérieuses difficultés d'analyse, nons apparut simple, dans les travaux de Gomes de Souza: les obstacles cedèrent, sous la main puissante du maître. Les «Mélanges de Calcul Intégral», si injustement oubliés, et dont le renom est celui d'épouvantables hiéroglyphes, sont cependant l'indestructible attestation de la profundeur des vues de notre illustre compatriote.

Ce livre, et tout spécialement le mémoire sur le son, fut la source où nous allâmes pouiser l'essence de notre travail.

Avant d'entrer en matière, faisons cependant au lecteur une utile observation: il ne trouvera pas ici une dissertation sur l'Analyse, avec cet examen rigoureux, auquel l'ont habitué les livres de Cauchy, Abel et, dernièrement, les oevres de M. Poincaré; il n'y trouvera nullement une dissertation «à la moderne». Mais ce manque apparent de rigueur n'aura point de fâcheuses conséquences. Ce qui est vraiment utile — et c'est là la pensée de Gomes de Souza — ne dépend point de la détermination des fonctions inconnues sous les signes d'intégration. Son théorème nous épargne d'autres details.

Cela posé, soient φ le potentiel des vitesses et V la fonction des forces extérieures. Dans les cas ordinaires, on néglige les puissances supérieures des dérivées de φ, et les termes qui dédependent de V. La première hypothèse suppose la vitesse des molecules très-petites,— ce qui parfois est faux; — la deuxième, que le milieu est impondérable.

On trouve alors, avec la correction de Laplace,

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2}=a^2\left(\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta z^2}\right) \tag{1}$$

ou

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2} = a^2 \Delta\varphi,$$

Δ étant le paramètre de Lamé et a la constante $\sqrt{\dfrac{pc}{\rho c_1}}$, où p, ρ, c, c_1 sont la pression, la densité et les chaleurs spécifiques du gaz.

Les conditions initiales doivent donner, comme l'on sait, les vitesses composantes des molecules et la condensation pour $t=0$: on aura donc

$$\varphi = \Phi(x, y, z),$$

$$(2) \qquad \frac{\delta\varphi}{\delta t} = \Psi(x, y, z),$$

pour $t=0$.

Disons rapidement comment on intègre l'équation (1).

Écrivons

$$\varphi = \varphi' + \varphi'',$$

φ' et φ'' étant deux solutions de l'équation (1).

Supposons que pour φ' les conditions initiales soient $\varphi = 0$ et $\dfrac{\delta\varphi'}{\delta t} = \Psi(x, y, z)$, et que pour φ'' ces conditions soient $\varphi'' = \Phi(x, y, z)$, $\dfrac{\delta\varphi''}{\delta t} = 0$; φ satisfera aux équations (2) et à l'équation (1).

Or, il est facile de vérifier, qu'on aura une solution de l'équation (1) avec la première condition initiale de φ, en écrivant

$$(3) \quad \varphi = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{F(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} . \cos\left[u(x-\xi) + v(y-\eta) + \right.$$

$$\left. + w(z-\zeta)\right] \sin\left[a\sqrt{u^2+v^2+w^2} . t\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta\, du\, dv\, dw.$$

..

Les intégrations sont étendues à tout l'espace.
Posons

$$\xi = x + r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1,$$

$$\eta = y + r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1,$$

$$\zeta = z + r_1 \cos \theta_1,$$

$$u = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2,$$

$$v = r_2 \sin \theta_2 \sin \theta_2,$$

$$w = r_2 \cos \theta_2.$$

On suppose implicitement que $\xi - \omega$, $\eta - y$, $\zeta - z$, u, v, w sont les coordonnées cartésiennes des points m et m'. On peut encore disposer des systèmes sphériques $r_1\, \theta_1\, \varphi_1$, $r_2\, \theta_2\, \varphi_2$, de manière que

$$r_1 r_2 \cos \theta_2 = u(\xi - x) + v(\eta - y) + w(\zeta - z).$$

D'un autre coté, on a

$$du\, dv\, dw = r_2^2 \sin \theta_2\, dr_2\, d\theta_2\, d\varphi_2$$

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = r_1^2 \sin \theta_1\, dr_1\, d\theta_1\, d\varphi_1.$$

L'intégrale devient

$$(4) \qquad \int_{r_1=0}^{r_1=\infty}\int_{r_2=0}^{r_2=\infty}\int_{\varphi_1=0}^{\varphi_1=2\pi}\int_{\varphi_2=0}^{\varphi_2=2\pi}\int_{\theta_1=0}^{\theta_1=\pi}\int_{\theta_2=0}^{\theta_2=\pi}$$

$$\mathrm{F}.\cos(r_1 r_2 \cos\theta_2).\sin(ar_2 t)\, r_1^2 \sin\theta_1\, dr_1\, d\theta_1\, d\varphi_1\, r_2 \sin\theta_2\, dr_2\, d\theta_2\, d\varphi_2$$

$$= 4\pi \int_{r_1=0}^{r_1=\infty}\int_{r_2=0}^{r_2=\infty}\int_{\theta_1=0}^{\theta_1=\pi}\int_{\varphi_1=0}^{\varphi_1=2\pi} \mathrm{F} r_1 \sin(r_1 r_2)\sin(ar_2 t)\, dr_1$$

$$dr_2 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1$$

$$= 2\pi \int_{r_1=0}^{r_1=\infty}\int_{r_2=0}^{r_2=\infty}\int_{\theta_1=0}^{\theta_1=\pi}\int_{\varphi_1=0}^{\varphi_1=2\pi} \mathrm{F} r_1\,[\cos r\,(r_1 - at) -$$

$$- \cos r_2\,(r_1 + at)]\sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1\, dr_1\, dr_2.$$

Faisons

$$\mathrm{F}(r_1) = \frac{1}{4\tau}\Psi\,(x + r_1 \sin\theta_1 \cos\varphi_1,\ y + r_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1,\ z + r_1 \cos\theta_1).$$

Ψ, on le voit, doit être nulle pour les valeurs négatives quelconques de r_1.

L'intégrale précédente peut être mise sous la forme

$$(5) \qquad \varphi = 2\pi \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1 \int_{r_2=0}^{r_2=\infty}\int_{r_1=-\infty}^{r_1=\infty} r_1 . \frac{1}{4\pi}$$

$$\Psi\,[\cos r_2\,(r_1 - at) - \cos r_2\,(r_1 + at)]\, dr_1\, dr_2.$$

On transformera encore cette expression, en intégrant par rapport à r_1 et r_2, à l'aide de la formule de Fourier (*).

On aura donc

$$(6)\quad \varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x + at\sin\theta_1\cos\varphi_1, y + at\sin\theta_1\sin\varphi_1,$$
$$z + at\cos\theta_1)\sin\theta_1\, td\varphi_1\, d\theta_1.$$

Cette expression s'annulle pour $t=0$, et sa derivée est, pour la même valeur,

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x, y, z)\sin\theta_1\, d\varphi_1\, d\theta_1 = \Psi(x, y, z).$$

φ est donc capable de satisfaire aux conditions de φ'.

Par un calcul analogue, on trouvera

$$\varphi'' = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x + at\sin\theta_1\cos\varphi_1, y + at\sin\theta_1\sin\varphi_1,$$
$$z + at\cos\theta_1)\sin\theta_1\, td\varphi_1\, d\theta_1.$$

Pour $t=0$, cette expression se réduit à

$$\Phi(x, y, z),$$

et sa dérivée est nulle pour la même valeur de t.

(*) Voir Fourier, *Théorie de la chaleur*, pag. 408; Mathieu, *Physique Mathématique*, pag. 85.

La solution complète, donnée par Poisson, sera

$$(7)\qquad \varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\,\Psi(x + at\sin\theta\cos\varphi, y + at\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z + at\cos\theta)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\,\Phi(x + at\sin\theta\cos\varphi, y + at\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z + at\cos\theta)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Supposons que l'agitation, à l'instant initial, existe seulement dans la sphère de rayon très petit ε, ayant le centre à l'origine des coordonnées.

Pour les points satisfaisant à la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 > \varepsilon^2,$$

on aura, à cette époque,

$$\Phi(x_1\, y_1\, z) = 0,$$

$$\Psi(x_1\, y_1\, z) = 0.$$

Il est facile de montrer qu'à la fin du temps t, il n'y aura de mouvement que dans une couche d'épaisseur ε, située sur la surface de la sphère de rayon at.

En effêt, si l'on écrit

$$x+at\sin\theta\cos\varphi \leqq \varepsilon\cos\lambda,$$

$$y+at\sin\theta\sin\varphi \leqq \varepsilon\cos\mu,$$

$$z+at\cos\theta \leqq \varepsilon\cos\nu,$$

les fonctions, qui se trouvent sous les signes d'intégration, serout constamment nulles pour toutes les valeurs de x, y, z qui ne satisfont pas aux relations précedentes. Le mouvement n'existera pas aux points où l'on aura

$$(x+at\sin\theta\cos\varphi)^2+(y+at\sin\theta\sin\varphi)^2+(z+at\cos\theta)^2>\varepsilon^2$$

Si donc on décrit une sphère de rayon at et de centre à l'origine, le mouvement n'existera qu'aux points situées à une distance inférieure à ε de la surface de cette sphère. Une telle surface est celle de l'onde sonore.

D'un autre coté, ε étant très petit, on a

$$r^2=x^2+y^2+z^2=a^2t^2. \tag{8}$$

Le son se propage avec une vitesse constante égale à a. C'est un résultat connu.

Supposons mointenant que les molecules soient sollicitées par des forces dérivées d'un potentiel, et tel est le cas de la nature.

Nous aurons, pour définir la condensation

$$(9) \qquad a^2\gamma = U - \frac{\delta\varphi}{\partial t}.$$

Mais l'équation de continuité des fluides nous donne

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

où $\rho = \rho_0(1+\gamma)$.

Comme nous l'avons dit plus haut, les forces extérieures dérivent d'une fonction de forces

$$U = \int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

On verra facilement qu'en négligeant toujours les carrés des composantes de la vitesse, le mouvement sera réprésenté par

$$(10) \quad \frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2} = a^2\Delta\varphi + \frac{\delta U}{\delta x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ (*);$$

équation plus complexe que celle qui suppose le milieu impondérable.

(*) Pour plus de détails, voir la *Mécanique analytique de Lagrange*, tome II, pag. 330.

Admettons d'abord le cas très simple, où

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial z}=y,$$

comme le fait Gomes de Souza, à la page 258 de son Recueil.

L'équation (10) devient

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\Delta\varphi+y\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{11}$$

Celle est, dit l'auteur, l'expression analytique du mouvement vibratoire, *dans l'hypothèse de la gravité constante et égale à* y.

Il y a ici, ce nous semble, une erreur: non seulement on ne peut pas admettre la constance de la gravité, dans ce sens; mais il est encore impossible de trouver une fonction de forces qui satisfasse aux conditions

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial z}=y.$$

La marche même suivie par l'auteur pour transformer l'équation (11) ne nous paraît pas admissible. Ecrivons en effet

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\,\Delta\varphi+y\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Cette équation, dit Gomes de Souza, est une transformée de la suivante

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\Delta\varphi+b^2\varphi,$$

où l'on doit faire

$$b = \frac{y}{2a}\sqrt{-1}$$

et

$$\varphi = {}^{\frac{y^2}{2a^2}}\psi.$$

Cela est faux, parce que l'on trouve facilement, en effectuant les calculs,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\,\Delta\psi + 2y\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi + \frac{y^2}{a^2}\,\psi - \frac{y^2}{4a^2}\,\psi.$$

Supposons cependant qu'il y ait là des fautes typographiques — quoique M.r Edourd Lucas en ait revu les calculs — et l'accord sera possible.

En effet, imaginons la gravité constante et égale á g, l'axe des z vertical et dirigé du zenith au nadir positivement; négligeons, d'un autre çoté, l'influence de la chaleur. On aura alors, dans cette hypothèse

(11 bis) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi + g\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Considérons maintenant l'équation

(a) $$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\,\Delta\psi + b^2\psi,$$

et faisons

$$b = \frac{g}{2a}\sqrt{-a},$$

$$\psi = e^{\frac{gz}{2a^2}}\,\varphi.$$

On en deduira

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=e^{\frac{gz}{2a^2}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=e^{\frac{gz}{2a^2}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=e^{\frac{gz}{2a^2}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=e^{\frac{gz}{2a^2}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{g}{a^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{g^2\varphi}{4a^4}\right).$$

En faisant les substitutions dans l'équation (a), on aura

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\,\Delta\varphi+g\,\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

identique à celle que nous avons proposée.

Soit I l'intégrale de (a). On en déduira la solution de (11 bis), à savoir:

$$\varphi=e^{\frac{gz}{2a^2}}\,.\,\mathrm{I}.$$

Le problème se reduira donc à trouver l'intégrale de (a). C'est sur ce point que nous reviendrons plus tard, avec des développements plus intimement liés à l'objet de ce travail.

Considerons, en second lieu, le cas d'une force inversement proportionnelle à l'ordonnée verticale.

Nous aurons alors

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\,\Delta\varphi + \frac{k^2}{z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{12}$$

Cette équation est un cas particulier de la suivante (*).

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\,\Delta\varphi + \frac{\alpha}{z}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\beta}{z^2}\,\varphi. \tag{13}$$

Nous allons l'intégrer par la méthode de la page 128 de l'oeuvre citée.

Posons, avec l'auteur,

$$\varphi = e^{amt+nx+py}\,.\,\mathrm{J}\,; \tag{14}$$

m, n, p sont des constantes e J une fonction de z seulement.

(*) Voir Gomes de Souza *Mélanges de Calcul Intégral*, page 98.

On aura

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 m^2 e^{amt+nx+py} . \mathrm{J},$$

$$\Delta\varphi = \left[\mathrm{J}(p^2+n^2) + \frac{d^2\mathrm{J}}{dz^2}\right] e^{amt+nx+py},$$

$$\frac{\partial\varphi}{dz} = e^{amt+nx+py} . \frac{d\mathrm{J}}{dz}.$$

L'équation deviendra

$$a^2 m^2 \mathrm{J} = a^2 \left[\mathrm{J}(p^2+n^2) + \frac{d^2\mathrm{J}}{dz^2}\right] + \frac{\alpha}{z}\frac{d\mathrm{J}}{dz} + \frac{\beta}{z^2}\mathrm{J},$$

ou

$$(15) \qquad z^2 \frac{d^2\mathrm{J}}{dz^2} + \frac{\alpha}{a^2} z \frac{d\mathrm{J}}{dz} + \left[\frac{\beta}{a^2} + (p^2+n^2-m^2) z^2\right] \mathrm{J} = 0,$$

ou, en faisant, pour simplifier,

$$p^2 + n^2 - m^2 = -h^2,$$

$$(16) \qquad z^2 \frac{d^2\mathrm{J}}{dz^2} + \frac{\alpha}{a^2} z \frac{d\mathrm{J}}{dz} + \left(\frac{\beta}{a^2} - h^2 z^2\right) \mathrm{J} = 0.$$

Cette équation est de celles qu'on intègre par fonctions cylindriques.

Posons

$$(17) \qquad J = z^{\delta} u$$

et faisons, dans la transformée,

$$(18) \qquad \delta(\delta - 1) + \frac{\alpha}{a^2}\delta + \frac{\beta}{a^2} = 0.$$

L'équation deviendra

$$(16 \text{ bis}) \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2k}{z}\frac{du}{dz} - h^2u = 0,$$

où l'on a

$$2k = 2\delta + \frac{\alpha}{a^2}.$$

On intègre immédiatement l'équation (16 bis), sans recourir, comme l'auteur, à la méthode de Laplace.

Son intégrale est la solution connue de l'équation de Bessel

$$u = C_1 \int_0^{\pi} \cos\left(zh \cos\theta \sqrt{-1}\right) \sin^{2k-1}\theta d\theta +$$

$$+ C_2 z^{1-2k} \int_0^{\pi} \cos\left(zh \cos\theta \sqrt{-1}\right) \sin^{-2k+1}\theta d\theta.$$

Pour ne point limiter les valeurs positives de $2k$, prenons la première integrale, c'est-à-dire la solution particulière

$$u = C_1 \int_0^\pi \cos\left(zh \cos\theta \sqrt{-1}\right) \sin^{2k-1} \theta d\theta,$$

ou bien, ce qui est la même chose,

$$u = C \int_0^\pi e^{zh\cos\theta} . \sin^{2k-1} \theta d\theta, \tag{19}$$

expression qui coincide, à part les notations, avec la formule **216** de la page 129 du *Recueil.*

Nous avons donc, pour la solution de l'équation (13),

$$\varphi = G\, e^{amt+nx+py} \int_0^\pi z^\delta\, e^{zh\cos\theta} \sin^{2k-1} \theta d\theta$$

et, en remarquant que

$$m = \pm \sqrt{n^2 + p^2 + h^2},$$

$$\varphi = C\, e^{nx+py} \int_0^\pi z^\delta\, e^{zh\cos\theta} \sin^{2k-1} \theta d\theta\, e^{\pm\sqrt{n^2+p^2+h^2}\,.at}.$$

On aura encore une autre solution de la même équation, en écrivant

$$\varphi = C\, e^{nx+py} z^\delta \int_0^\pi e^{zh\cos\theta} \sin^{2k-1} \theta d\theta \tag{20}$$

$$\left\{ e^{-at\sqrt{n^2+p^2+h^2}} - e^{+at\sqrt{n^2+p^2+h^2}} \right\}.$$

SUR LA FONCTION $\zeta(s)$ POUR LES VALEURS IMPAIRES DE L'ARGUMENT

NOTE DE

M. LERCH

Professeur à l'Université de Fribourg (Suisse)

Les valeurs de la fonction

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots, \tag{1}$$

que Riemann a désignée par $\zeta(s)$, sont connues sous forme finie, si l'argument s est un entier pair, et on a, comme on sait,

$$2\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_n, \tag{2}$$

en désignant par $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$,... les nombres de Bernoulli.

Quant aux quantités $\zeta(s)$ pour les valeurs impaires $s=3, 5, 7$, etc., on ne sait rien sur leur nature arithmétique, qui semble être fort compliquée ; on s'est borné à établir des séries à convergence plus rapide qui permettent les calculer, objet bien secondaire puisque on parvient au même but à l'aide du développement semiconvergent. Nous resterons cependant dans ce problème, dont nous avons donné autre fois une solution à l'aide d'une catégorie des séries, présentant beaucoup d'analogie avec certains développements de la théorie des fonctions elliptiques :

$$\Phi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta'_{2s-1}(n)}{n^{s+k}} e^{-n\pi},$$

où $\Theta'_{2s-1}(n)$ représente la somme des puissances d'ordre $2s-1$ de tous les diviseurs impairs de l'entier n; la quantité $\zeta(s)$, pour s impair, s'exprime sous forme finie à l'aide des quantités Φ_k, la complication de l'expression augmentant d'ailleurs avec la valeur de s.

Cette fois nous allons considérer les entiers de la forme $4k-1$, pour lesquels nous allons donner une solution beaucoup plus simple et très élémentaire dans son exposition. En partant de l'identité

$$\frac{1+x^{2k-1}}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots + x^{2k-2}$$

prenons $x = \dfrac{m^2}{n^2}$ en divisant en même temps par $n^2 m^{4k-2}$; nous aurons

$$\frac{1}{(m^2+n^2)\, m^{4k-2}} + \frac{1}{(m^2+n^2)\, n^{4k-2}} = \sum_{\nu=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{n^{2\nu}\, m^{4k-2\nu}}.$$

Les séries à double entrée qu'on obtient en prenant la somme pour $m, n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ sont évidemment convergentes et l'on aura

$$\sum_{m,n} \frac{1}{m^{4k-2}(m^2+n^2)} + \sum_{m,n} \frac{1}{n^{4k-2}\;(m^2+n^2)}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2k-1} (-1)^{\nu-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu}} \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{1}{m^{4k-2\nu}}.$$

Les deux séries au premier membre sont identiques, et les termes du second membre sont les produits de deux valeurs $\zeta(2\nu)$ et $\zeta(4k-2\nu)$ et sont égaux deux à deux, sauf le terme moyen $\nu = k$. On aura donc l'équation

$$(3) \qquad \sum_{m,n} \frac{1}{m^{4k-2}(m^2+n^2)} = \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^{\nu-1} \zeta(2\nu)\,\zeta(4k-2\nu)$$

$$+ (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} \zeta^2(2k),$$

dont nous allons simplifier le premier membre. On a en effet

$$2\eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta^2+n^2} = \frac{2\pi}{e^{2\pi\eta}-1} - \frac{1}{\eta} + \pi,$$

et si l'on pose $\eta = m$, on aura en divisant par m^{4k-1} et prenant la somme,

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-2}(m^2+n^2)}=2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}\,\frac{1}{e^{2m\pi}-1}$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k}}+\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}.$$

Au moyen de cette équation la formule (3) devient

$$\frac{\pi}{2}\zeta(4k-1)=\frac{1}{2}\zeta(4k)+(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\zeta^2(2k)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^{\nu-1}\zeta(2\nu)\zeta(4k-2\nu)$$

$$-\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}\,\frac{1}{e^{2m\pi}-1},$$

résultat qui d'après (2) peut s'écrire comme il suit

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}=\frac{(2\pi)^{4k-1}}{(4k)!}\Big[&\mathrm{B}_{2k}+(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\binom{4k}{2k}\mathrm{B}_k^2\\&+\sum_{\nu=1}^{k-1}(--1)^{\nu-1}\binom{4k}{2\nu}\mathrm{B}_\nu\mathrm{B}_{2k-\nu}\Big]\\&-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}\,\frac{1}{e^{2m\pi}-1}.\end{aligned}\right.$$

A l'aide de cette formule le calcul numérique de la quantité $\zeta(4k-1)$ est réduit à la sommation d'une série à convergence rapide dont les coefficients sont les inverses des quantités $e^{2\pi}-1$, $e^{4\pi}-1$, $e^{6\pi}-1$ et se calculent une fois pour toutes.

Si pour la pratique cette formule présente quelque avantage, son importance théorique me semble apparaître plutôt dans la forme suivante

$$(5)\begin{cases} (4k)!\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m\pi)^{4k-1}}\operatorname{cothyp}(2m\pi) \\ = B_{2k}+(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\binom{4k}{2k}B_k^2+\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^{\nu-1}\binom{4k}{2\nu}B_\nu BB_{2k-\nu} \end{cases}$$

exprimant que le premier membre est un nombre rationnel dont il est aisé d'obtenir le denominateur a priori.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE TROIS CERCLES CONCENTRIQUES Á UNE ELLIPSE

PAR

JORGE F. D'AVILLEZ

Vicomte de Reguengo

Dans son mémoire «Sur les courbes parallèles à l'ellipse» (*), M. Gomes Teixeira donne (p. 19), le theorème suivant:

«*Si un point* (x, y) *parcourt une circonférence concentrique avec une ellipse, la somme des carrés des distances du point* $\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$ *aux pieds des normales à l'ellipse tirées par le point* (x, y) *reste constante*». On a dans ce cas

$$\Sigma \delta^2_1 = x^2 + y^2 + 2(a^2 + b^2).$$

Nous allons considérer trois cas particuliers:

Supposons d'abord que le cercle soit le cercle orthoptique

(*) Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, t. LVIII, 1898.

(cercle de Monge); on a alors

$$\Sigma d^2 = 3\,(a^2 + b^2).$$

Si le cercle est le premier ou le second cercle de Chasles, ou trouve respectivement

$$\Sigma\Delta^2 = 3\,(a^2 + b^2) + 2\,ab$$

$$\Sigma\delta^2 = 3\,(a^2 + b^2) - 2\,ab.$$

On a alors les égalités suivantes :

$$\Sigma\Delta^2 - \Sigma\delta^2 = 4\,ab \tag{1}$$

$$\Sigma\delta^2 - \Sigma d^2 = 2\,ab \tag{2}$$

$$\Sigma\alpha^2 - \Sigma d^2 = 2\,ab \tag{3}$$

$$\Sigma\Delta^2 + \Sigma\delta^2 = 2\,\Sigma d^2. \tag{4}$$

Les trois premières égalités donnent les théorèmes suivants :

« *Si un point* (x', y') *parcourt le premier cercle de Chasles, et un point* (x'', y'') *situé sur le même rayon, parcourt le second cercle de Chasles, la somme des carrés des distances du point* $\left(\frac{1}{2}\,x', \frac{1}{2}\,y'\right)$ *aux pieds des normales à l'ellipse tirées par le point* (x', y'), *diminuée de la somme des carrés des distances du point*

$\left(\frac{1}{2}x'', \frac{1}{2}y''\right)$ *aux pieds des normales à l'ellipse tirées par le point* (x'', y''), *est égale au rectangle des axes de l'ellipse».*

Si un point (x', y') *parcourt le premier cercle de Chasles, et si un point* (x''', y'''), *situé sur le même rayon, parcourt le cercle orthoptique, la somme des carrés des distances du point* $\left(\frac{1}{2}x', \frac{1}{2}y'\right)$ *aux pieds des normales à l'ellipse tirées par le point* (x', y'), *diminuée de la somme des carrés des distances du point* $\left(\frac{1}{2}x''', \frac{1}{2}y'''\right)$ *aux pieds des normales à l'ellipse tirées par le point* (x'', y'''), *est égale au double du rectangle des demi-axes».*

«Si un point (x''', y''') *parcourt le cercle orthoptique, et si un point* (x'', y''), *situé sur le même rayon, parcourt le second cercle de Chasles, la somme des carrés des distances du point* $\left(\frac{1}{2}x''', \frac{1}{2}y'''\right)$ *aux pieds des normales à l'ellipse tirées par le point* (x''', y'''), *diminuée de la somme des carrés des distances du point* $\left(\frac{1}{2}x'', \frac{1}{2}y''\right)$ *aux pieds des normales à l'ellipse tirées par le point* (x'', y''), *est égale au double du rectangle des demi-axes».*

Si l'on considère un rayon central de l'ellipse, O étant le centre, les distances de O aux points $P'(x', y')$, $P''(x'', y'')$, $P'''(x''', y''')$ vérifient les relations

$$\frac{\overline{OP'''}^2}{OP'\,OP''} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

$$\overline{OP'}^2 + \overline{OP''}^2 = 2\overline{OP'''}^2.$$

Comme l'on sait, le cercle orthoptique est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à l'ellipse, et la courbe de sixième ordre

$$(a^2-b^2)^2(a^2y^2-b^2x^2)=(a^2+b^2)(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2)^2$$

est le lieu des points d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires à l'ellipse.

On sait que l'aire de cette courbe est égale à l'aire du second cercle de Chasles ; donc

$$U=\pi(a-b)^2.$$

D'autre part, l'aire de la podaire centrale de la développée de l'ellipse est donnée par l'expression (*)

$$W=\frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

On a donc le théorème suivant :

« *L'aire de la courbe, lieu des points d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires à l'ellipse, est égale au double de l'aire de la podaire centrale de la développée de l'ellipse* ».

La podaire centrale de l'ellipse a pour aire

$$W'=\frac{\pi}{2}(a+b)^2.$$

(*) Barisien, Mathesis, 1896, pag. 265 ; *Nouvelles Annales*, 1895, pag. 210.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

«L'aire de la courbe, lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à l'ellipse, est égale au double de l'aire de la podaire centrale de l'ellipse».

Si l'on appelle U l'aire du cercle orthoptique, on trouve alors

$$\frac{U}{U'} = \frac{W}{W'}. \tag{5}$$

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES

NOTE DE

GEMINIANO PIRONDINI

(à Parme)

I. Soient: (A, B), (C, C_0) deus couples de points fixes, placés respectivement sur les axes coordonnés Ox, Oy et définis par les égalités:

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = m, \quad OC_0 = n;$$

et (M, N) deux points de AB mobiles de façon à vérifier constamment la condition:

$$(1) \qquad (ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN} = h,$$

h étant une constante quelconque. Les droites CM, C_0N ont pour équations:

$$Y - y = \frac{y-m}{x}(X-x),$$

$$Y - y = \frac{y-n}{x}(X-x),$$

(x, y) étant les coordonnés du point P de leur rencontre. Et comme on dérive d'ici :

$$\mathrm{OM} = -\frac{mx}{y-m}, \quad \mathrm{ON} = -\frac{nx}{y-n},$$

la condition (1) développée démontre que *le lieu du point* P *est la conique* K *définie par l'équation :*

$$(2)\begin{cases} mn(1+h)x^2 + [an+bm-h(am+bn)]xy + ab(1-h)y^2 - \\ -mn(a+b)(1-h)x - ab(m+n)(1-h)y + abmn(1-h) = 0. \end{cases}$$

On aperçoit sans peine :

1.° que la conique K passe par les points A, B, C, C_0.

2.° que le lieu du point Q, commun aux droites CN, C_0N est une autre conique K_1 passant par les quatre points dits, et représentée par l'équation qu'on dérive de (2), en permutant les lettres m, n entre elles.

On peut donc énoncer le théorème précédent sous la forme :

«*Si dans la déformation d'un quadrangle complet* MNPQ, *deux points-diagonaux* C, C_0 *demeurent fixes et deux sommets opposés* M, N *se déplacent sur une droite* AB *de façon à vérifier constamment la condition* (1), *les autres sommets opposés*, P, Q, *qui ne sont pas sur la droite* AB, *se déplacent sur deux coniques* K, K_1 *passant par les quatre points fixes* A, B, C, C_0».

Les deux coniques K, K_1, dans la généralité des cas, ont seulement quatre points communs, car pour leur coïncidence on doit avoir :

$$(1+h)(a-b)(m-n) = 0.$$

Il suit que *les coniques* K, K_1 *coïncident quand les ensembles* ABMN *sont harmoniques, ou bien quand les points* A, B, *ou les autres* C, C_0, *sont symétriques par rapport à* O.

L'équation :

$$Y = n + \lambda X,$$

(λ étant un paramètre arbitraire) représente une droite passant par le point C_0. Elle coupe la droite AB, la conique K et les droites BC, CA aux points C_1, E, A_1, B_1 ayant pour abscisses :

$$p_1 = -\frac{n}{\lambda},\ p_2 = \frac{ab(m-n)(1-h)\lambda + n(m-n)(a-bh)}{mn(1-h)+[an+bm-h(am+bn)]\lambda + ab(1-h)\lambda^2},$$

$$p_3 = \frac{b(m-n)}{m+b\lambda},\quad p_4 = \frac{a(m-n)}{m+a\lambda}.$$

Et comme on dérive d'ici :

$$(3) \qquad (C_1EA_1B_1) = \frac{p_3-p_1}{p_3-p_2} : \frac{p_4-p_1}{p_4-p_2} = h = (ABMN),$$

on voit que *la valeur du rapport anharmonique* $(C_1EA_1B_1)$ *ne depend nullement de la position de la transversale issue du point fixe* C_0.

II. On peut se donner arbitrairement la conique K, le triangle inscrit ABC et le point C_0 et déterminer ensuite la valeur qu'on doit attribuer à la constante h, pour qu'il ait lieu la propriété qu'on vient de démontrer.

Menons, en effet, CM arbitraire, coupant la conique K en P ; menons ensuite le rayon C_0P, en le prolongeant jusqu'à la rencontre N avec AB. Il suffit alors d'envisager le problème du § I, en plaçant les points fixes en A et B, les centres de projection en C et C_0 et en attribuant à h la valeur du rapport anharmonique (ABMN), pour tomber sur la conique K.

Le lieu de P, en effet, est une conique H passant par les cinq points A, B, C, C_0, P, ce qui entraine évidemment l'identité des coniques H, K. On a donc, en vertu de la relation (3) :

«*Toutes les transversales issues d'un point fixe d'une conique coupent les côtés d'un triangle inscrit fixe et la conique, suivant une infinité d'ensembles de quatre points, ayant un rapport anharmonique constant*».

La même relation (3) démontre que:

«*Pour un triangle déterminé* ABC, *inscrit dans une conique* K, *on peut fixer le point* C_0 *de sorte que les transversales issues de* C_0 *coupent* AB, K, BC, CA *suivant une infinité d'ensembles de quatre points* C_1, E, A_1, B_1, *dont le rapport anharmonique est un nombre constant, choisi arbitrairement d'avance*».

Le point C_0 est unique, si, dans la considération des côtés du triangle ABC, on garde l'ordre qu'on vient de considérer. Mais si l'on effectue toutes les permutations possibles, on trouve deux autres points B_0, A_0 jouissant de la même propriété du point C_0.

Ces points sont placés sur la conique de sorte que *les droites* AA_0, BB_0, CC_0 *concourent à un même point*.

L'hypothèse $h = -1$, dans tout ce qu'on vient d'exposer, constitue une particularisation très remarquable.

Si, par exemple, on suppose que, dans ce cas, la droite NPC_0 soit tangente en P à la conique, la polaire du point N est la droite PC, et conséquemmet la droite EC est l'autre tangente à la conique issue de N. On a ainsi le théorème:

«*Si d'un point* N *extérieur à une conique on mène les tangentes* NP, NC, *et une transversale quelconque* NBA, *la conique donnée et les côtés du triangle ayant la base* BA *et le sommet en un des points de contact, sont coupés suivant quatre points harmoniques par tout rayon issu de l'autre point de contact*».

III. Soit:

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0 \tag{4}$$

l'équation d'une conique L rapportée à deux axes coordonnés Ox, Oy arbitraires.

A $(0, h)$ étant un point donné de Oy, on demande de *déterminer une ligne* K *de façon que tout rayon issu de* A *coupe la coni-*

que L, *la droite* Ox *et la ligne* K *suivant quatre points* M, N, P, Q *constituant un ensemble harmonique*».

En désignant par x, y les coordonnées de K, l'équation de la droite AQ est :

$$Y - y = \frac{y-h}{x}(X - x).$$

Celle-ci, combinée avec (4), donne :

$$[Ax^2 + 2Bx(y-h) + C(y-h)^2]Y^2 + [-2Ahx^2 - 2Bhx(y-h) +$$

$$+ Dx(y-h) + E(y-h)^2]Y + Ah^2x^2 - Dhx(y-h) - F(y-h)^2 = 0.$$

Si donc λ_1, λ_2 sont les ordonnées des points M, N où la transversale AQ coupe la conique L, on a :

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{Ah^2x^2 - Dh(y-h)x + F(y-h)^2}{Ax^2 + 2B(y-h)x + C(y-h)^2}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2Ahx^2 + 2Bh(y-h)x - D(y-h)x - E(y-h)^2}{Ax^2 + 2B(y-h)x + C(y-h)^2}.$$

D'ailleurs les ordonnées λ_3, λ_4 des points P, Q sont : $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = y$. Conséquemment la condition :

$$\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 = 0,$$

exprimant que les quatre points considérés sont harmoniques, se réduit à l'autre:

$$(h-y)[2Ahx^2+(2Bh-D)xy-Ey^2+2Dhx+(Eh-2F)y+2Fh]=0.$$

Celle-ci représente l'ensemble de la droite:

$$y=h$$

et de la conique:

$$(5) \quad 2Ahx^2+(2Bh-D)xy-Ey^2+2Dhx+(Eh-2F)y+2Fh=0.$$

Et comme la droite, dans la question dont il s'agit, n'a pas d'importance, on conclut que *la ligne* K *cherchée est une conique.*

On reconnaît sans peine que *cette conique* K *passe par le point fixe* A, *par les points* B, C *(réels ou imaginaires) où la conique donnée* L *est coupée par la droite fixe* Ox, *par les points* D, E *(réels ou imaginaires) où la conique donnée* L *est coupée par la polaire du point* A, *par le milieu de la corde (réelle ou imaginaire) tirée, dans la conique donnée* L, *du point* A, *parallèlement à la droite fixe* Ox.

Que l'on décrive deux coniques L, H ayant quatre points B, C, D, E communs et placées de façon que les tangentes à L en D, E se coupent dans un point A de l'autre conique K.

Si l'on résout le problème précédent, en prenant L pour conique donnée, A comme point fixe et BC comme droite fixe, on arrive à la conique K.

Par conséquent: *Toute transversale issue de* A *coupe la droite* BC, *la conique* K *et la conique* L *en quatre points harmoniques.*

En particulier, en supposant BC tangente à la conique L:

«*Si l'on circonscrit un triangle à une conique quelconque* L, *et l'on décrit une deuxième conique* K *passant par le sommet* A, *par les points de contact* D, E *et tangente au troisième côté en* B, *toute transversale issue de* A *coupe la tangente en* B, *la conique* K *et la conique* L *en quatre points harmoniques*».

Remarque.—Si dans les résultats de ce paragraphe, on suppose que la conique donnée L soit réduite à une couple de droites, on tombe sur les propriétés déduisibles de celles du § II, en supposant $h = -1$.

On pourrait aussi avoir bien d'autres propriétés remarquables, en appliquant le principe de dualité aux résultats qu'on vient d'exposer.

Parme, avril 1900.

BIBLIOGRAPHIA

H. Andoyer: Leçons sur la théorie des formes et la Géométrie analytique supérieure, t. I. Paris, G. Villars, 1900.

A theoria das fórmas póde ser considerada debaixo de dois pontos de vista differentes: ou debaixo de um ponto de vista puramente analytico, ou debaixo de um ponto de vista analytico-geometrico, em que a sua representação geometrica representa um papel essencial. Para fazer esta representação tornou-se necessario crear uma Geometria analytica mais geral do que a ordinaria, a que o sr. Andoyer chama *Geometria analytica superior*. É o segundo modo de considerar a theoria das fórmas que o sabio professor emprega na excellente obra, cujo titulo antecede esta noticia, na qual é exposta didacticamente, com a maior clareza, elegancia e riqueza de informações, aquella theoria.

A obra constará de dois volumes. O primeiro vem de ser publicada e é consagrada á theoria das fórmas binarias e ternarias, e á Geometria correspondente dos espaços a uma e a duas dimensões. O segundo volume será consagrado, como diz o auctor, ás fórmas quaternarias e á Geometria correspondente dos espaços a tres dimensões.

O volume que vem de ser publicado está dividido em duas partes ou livros. O primeiro consagrado á Geometria binaria, contém dez capitulos, onde são estudados os assumptos seguintes: I Theoria geral dos invariantes dos systemas binarios. II As formações invariantes geraes. III Os systemas lineares. IV As resultantentes e os descriminantes. V As fórmas bilineares. VI Os systemas quadraticos. VII As fórmas canonicas em geral. A fórma cubica, a fórma biquadratica e a fórma quintica. VIII A fórma lineo-quadratica e a fórma duplamente quadratica. IX Estudo directo das fórmas com duas series de variaveis. X A Geometria metrica binaria.

A segunda parte do primeiro volume, consagrado á Geometria ternaria, divide-se em 16 capitulos, onde são estudados os assumptos seguintes: I Theoria geral dos invariantes dos systemas ternarios. II Os systemas lineares. III Os elementos communs a duas ou muitas series. IV As propriedades geraes das series. V Gerações diversas das series ternarias. VI A fórma bilinear e a homographia. VII A serie quadratica. VIII O systema de duas fórmas quadraticas. IX A correspondencia reciproca entre dois espaços coincidentes. X O systema de duas fórmas bilineares. A correspondencia quadratica biracional. XI Estudo geometrico da rêde de series quadraticas. XII A serie cubica. XIII A fórma trilinear. XIV A serie quartica. XV A Geometria analytica ternaria geral. XVI. A Geometria metrica ternaria especial.

Por esta simples indicação das materias mal se póde fazer ideia de quanto é rica em assumptos a obra a que nos estamos referindo; nem é facil dar d'isso ideia em pequeno espaço. O nosso fim porém com esta noticia foi só chamar a attenção para esta excellente obra, onde é exposta a theoria das fórmas debaixo do seu aspecto mais util e mais adequado ás applicações importantes a que dá logar.

L. P. da Motta Pegado: Curso de Geometria descriptiva da Escola Polytechnica. Lisboa, 1899.

O unico tratado de Geometria descriptiva que até agora existia em lingua portugueza foi impresso no Rio de Janeiro em 1812 e é devido a José Victorino dos Santos. Nenhum outro foi publicado depois d'esta epocha remota: e porisso o ensino d'esta sciencia é ha muito feito, nas escolas do nosso paiz, por meio de livros estrangeiros. Felizmente esta lacuna da nossa litteratura scientifica vem de ser preenchida, e é com o maior prazer que damos noticia d'este facto, pelo sr. Motta Pegado, que vem de publicar uma excellente obra sobre o referido assumpto, a qual se póde collocar na lista das melhores, que são empregadas hoje nos diversos paizes, para o ensino d'aquella sciencia. Redigido por quem tem excellentes qualidades de geometra, como o tem provado por bellos trabalhos, e larga pratica do ensino, ao qual tem consagrado toda a sua vida, o novo livro reflecte estas qualidades do auctor pela fórma original com que estão redigidas algumas passagens, pela clareza e precisão com que são expostos todos os assumptos tratados n'elle, pela boa escolha dos mesmos assumptos e pela ordem com que estão dispostos.

Passando a dar uma rapida noticia das materias que o illustre professor reuniu na obra, principiaremos por notar que ella não encerra só a Geometria descriptiva propriamente dicta. Convencido, e com razão, o auctor das vantagens que tiram os alumnos de estudar junctamente com a Geometria de Monge algumas noções da bella e importante sciencia a que se dá o nome de *Geometria projectiva* ou de *Geometria superior*, consagrou a esta sciencia uma *introducção* de 41 paginas e alguns capitulos do livro, que reunidos todos formam um pequeno tratado d'esta sciencia. Para apreciar a utilidade da reunião d'estes dois ramos da Geometria na mesma obra, basta notar que nas escolas portuguezas não existe cadeira alguma consagrada especialmente á Geometria projectiva, e que por isso é indispensavel que ella seja estudada na cadeira destinada á Geometria descriptiva, onde tem logo as suas primeiras applicações. Para redigir estes elementos de Geometria projectiva inspirou-se o sr. Pegado, como era natural, nos importantes trabalhos que Chasles consagrou a este assumpto, extraindo d'elles as doutrinas mais essenciaes, que conseguiu resumir sem em ponto algum lhe fazer perder a clareza.

Os assumptos que se referem á Geometria descriptiva estão dispostos em cinco partes, ou livros, em que está dividida a obra, pela ordem que vamos vêr.

O primeiro livro é consagrado aos primeiros principios e á Geometria da recta e do plano. Está dividido em oito capitulos, onde são respectivamente considerados os assumptos seguintes:

I Sobre a representação graphica das figuras em geral e do ponto em particular. II Representação das rectas e dos planos sobre dois planos de projecção. III Intersecção de planos e de rectas. IV Mudanças de planos de projecção. Rotações e rebatimentos. V Distancia entre dois pontos. Angulos de rectas e planos. VI Rectas e planos perpendiculares entre si. Menor distancia de um ponto a um plano. Menor distancia de duas rectas. VII Resolução do angulo triedro. VIII Projecções cotadas.

O livro segundo é consagrado ás theorias geraes relativas a curvas e a superficies, e á determinação dos planos tangentes e das secções planas das superficies cylindricas e conicas e das superfices de revolução. Está dividido em seis capitulos, sendo o primeiro e o terceiro consagrado a varias questões geraes relativas ás curvas e ás superficies, o quarto á representação dos cylindros e cones, determinação dos seus planos tangentes, etc., o quinto á determinação das secções planas d'estes solidos, o sexto á representação das superficies de revolução, determinação dos seus planos tangentes e das suas secções planas. Contém ainda um capitulo de Geometria projectiva consagrado á theoria pas conicas.

No livro terceiro occupa-se o auctor das intersecções das superficies curvas. É dividido em quatro capitulos, onde são respectivamente consideradas as intersecções das superficies conicas; as intersecções das superficies cylindricas, as intersecções de duas superficies de revolução, e as intersecções de uma superficie de revolução com uma superficie cylindrica ou conica.

O livro quarto é consagrado á theoria das superficies empenadas. O objecto de cada um dos quatro capitulos em que se divide é o seguinte: I Quadricas empenadas. Planos tangentes e secções planas. II Das superficies empenadas em geral e da sua concordancia. Pontos centraes e parametros de geratriz. Linhas de estricção das quadricas empenadas. III Exemplos de superficies empenadas (cylindroide, conoides, etc.) IV Superficies helicoides. Dos helicoides regrados.

É objecto do livro quinto a curvatura das superficies, a determinação das linhas de sombra, e a representação das superficies topographicas.

Eis, em traços largos, os pontos de que se occupou o sr. Pegado na sua obra. Cada um d'elles abrange muitas questões de que não podemos dar noticia n'este logar, devendo comtudo observar que ha n'ella riqueza de informações e que o illustre professor não deixou de mencionar questão alguma que seja essencial conhecer.

Lendo o livro com attenção encontram-se muitas demonstrações differentes das que são empregadas nos outros manuaes de Geometria descriptiva, que conhecemos, e que nos pareceram novas. A este respeito pareceu-nos offerecer principal interesse o capitulo 1.° do livro 5.°, consagrado á theoria da curvatura das superficies, onde o auctor apresenta uma bella relação entre as curvaturas de quatro secções planas de uma superficie e os angulos diedros que formam entre si estes planos, a qual lhe serve de fundamento para chegar aos theoremas classicos relativos a esta theoria por um modo elegante e original.

H. Brocard: Notes de Bibliographie des courbes géométriques. Bar-le-Duc, 1897.

—— Notes de Bibliographie des courbes géométriques. Partie complementaire. Bar-le-Duc, 1899.

A Geometria das curvas notaveis tem attrahido muito nos ultimos tempos a attenção dos geometras. Chamou esta attenção para ellas, em primeiro logar, a Real Academia das Sciencias de Madrid com o seu programma de concurso a premio para 1894, em que pedia um catalogo ordenado de todas as curvas de qualquer classe, que tenham recebido nome especial, acompanhado de uma ideia succinta da fórma, equações e propriedades geraes de cada uma e com noticia das obras ou auctores que primeiro a deram a conhecer. Mais tarde chamou tambem a attenção para este assumpto o sr. Haton de la Goupillière no *Intermédiaire des mathématiciens* (t. I. pag. 37), em que se refere ao interesse e utilidade que teria uma obra em que fossem estudadas as theorias das curvas notaveis por qualquer conceito ou por suas applicações. Ao primeiro concurso aberto pela Academia de Madrid não houve concorrentes, por isso a questão foi de novo proposta no concurso para 1897. Dando o primeiro passo para a realisação dos desejos expressos no programma de Madrid e na questão do *Intermédiaire*, resolveu o sr. Brocard publicar um vocabulario, onde se encontram dispostos pela ordem alphabetica, não só os nomes das curvas conhecidas por designações especiaes, mas tambem certos nomes que exprimem determinadas relações das curvas umas com as outras e ainda os nomes que certas curvas tomam nas applicações ou em diversas circumstancias em que se apresentam. Este trabalho é uma parte de outro, de maior alcance, em que o sabio mathematico trabalha ha muitos annos, e no qual tem em vista apresentar um vocabulario geral das sciencias mathematicas.

No trabalho presente cada vocabulo é seguido das indicações necessarias para se saber o que significa e o papel que representa a curva ou curvas a que elle se refere; e, quando se trata de uma curva com nome especial, da equação, a indicação da fórma e das propriedades principaes. É tambem seguido de resumidas indicações historicas e de preciosas indicações bibliographicas.

A edição das *Notes de Bibliographie*, etc., é lithographada. O sr. Brocard, desejando que o seu trabalho seja o mais completo e o mais perfeito possivel, considera esta edição como provisoria, e pretende fazel-a seguir mais tarde da edição definitiva. E, para que esta ultima seja o mais completa e perfeita possivel, convida aquelles a quem estes assumptos interessam a dar-lhe as indicações que julgam concorrer para o aperfeiçoamento da obra. Aqui tomaremos por isso a liberdade de lhe fazer uma indicação a respeito do vocabulo *Conchoide parabolique* ou *Parabole de Descartes*. Diz a este respeito o auctor, seguindo A. Conte:

Le pôle de cette conchoide est le foyer de la parabole. Son équation est donc

$$r = \frac{p}{1 + \cos \alpha} - k.$$

(Voir N. A. 1894, page 414, A. Conte).

Considera pois o auctor a *Conchoide* parabolica de Descartes como o logar geometrico dos pontos que se obtêm tirando pelo foco de uma parabola rectas, e tomando sobre ellas, a partir das suas intersecções com a curva, um segmento de comprimento constante e egual a k. Ora a curva assim obtida é differente d'aquella que Descartes considerou na sua célebre *Geometria*, como podendo ser gerada por um modo analogo a um dos modos de gerar a *Conchoide de Nicomedes*, e á qual Montucla (*Histoire des mathématiques*, t. II, pag. 340), deu o nome de *Conchoide de Descartes* e Charles (*Aperçu historique*, 2.ª ed., pag. 60) o nome de *parabola de Descartes*. A equação d'esta ultima curva é, com effeito,

$$x = \frac{(y + c)(y^2 - ah)}{ay},$$

e coincide por isso com um *tridente* de Newton, em quanto que a equação da curva considerada pelo sr. Brocard é

$$4(x^2 + y^2 + kx)^2 = (p - k - x)^2 (x^2 + y^2).$$

Julgamos pois que á curva considerada pelo sr. Brocard se póde dar o nome de *Conchoide parabolica*, mas não o nome de *Conchoide parabolica de Dascartes* nem o de *Parabola de Descartes*.

Vamos terminar esta noticia, já um pouco longa, mas antes d'isso devemos dizer que os dois volumes que o sr. Brocard vem de publicar a respeito das curvas notaveis revelam a vasta e notavel erudição do geometra illustre que as escreveu, e exprimindo o nosso desejo de que brevemente seja publicada a edição definitiva d'este trabalho, ou melhor ainda o vocabulario geral das mathematicas, que tantos e valiosos serviços póde prestar aos estudiosos, e para a realisação do qual o sr. Brocard tem uma competencia muito especial.

H. Fehr: Application de la méthode victorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale. Paris, Carré et Naud, 1899.

O ramo importante das sciencias mathematicas descoberto por Grassmann e a que elle deu o nome de *Ausdehnungslehr*, ou sciencia das grandezas extensivas, tem sido nos tempos modernos objecto de muitos trabalhos importantes, uns destinados a expol-o e vulgarisal-o, outros destinados a fazer d'elle novas applicações. O trabalho excellente que o sr. H. Fehr vem de consagrar a este assumpto é destinado a este ultimo fim. O auctor faz, com effeito, n'elle applicação do calculo geometrico de Grassmann á Geometria infinitesimal, expondo os trabalhos já consagrados a este objecto por Herm. Grassmann, filho do eminente geometra do mesmo nome, e desenvolvendo e continuando estes trabalhos.

O livro abre por uma introducção onde se encontra uma exposição resumida, muito bem escripta, da parte essencial do calculo de Grassmann, de que o auctor tem de fazer uso. São depois expostos em cinco capitulos os assumptos a que o livro é expressamente consagrado, sendo o capitulo 1.º consagrado a questões relativas á curvatura e torsão das curvas empenadas; o capitulo 2.º a algumas questões geraes relativas á theoria das superficies; o capitulo 3.º á curvatura das curvas traçadas sobre uma superficie; o capitulo 4.º á curvatura media e curvatura total das superficies, o capitulo 5.º finalmente ao estudo das linhas particulares traçadas sobre uma superficie.

A exposição de todos os assumptos é feita com elegancia e simplicidade, o que torna a leitura do livro muito agradavel.

S. Ortu Carboni: Sunto di Geometria elementare. Planimetria. — Livorno, R. Giusti, 1900.

Este pequeno volume faz parte de uma collecção de pequenos livros que, com o titulo de *Bibliotheca dos estudantes*, tem publicado a casa editora de R. Giusti, de Livorno. É consagrado á Geometria plana e, apesar do seu pequeno formato (116 paginas), tem tudo o que é necessario conhecerem os que estudam esta sciencia com o fim de adquirirem uma cultura scientifica geral. Aos que pretendem estudar a Geometria elementar como preparatorio para estudos mathematicos mais desenvolvidos póde este livro prestar tambem bons serviços, como livro inicial dos seus estudos. Para este fim o auctor supprimiu certas doutrinas mais delicadas, que se encontram em livros de Geometria elementar mais extensos, as quaes os alumnos não intendem quando fazem o seu primeiro estudo. Fez porém a exposição e a escolha das doutrinas que apresenta de modo que esta omissão não represente uma lacuna nem dê logar a um estudo incompleto da sciencia a que é consagrado. Pelo contrario as doutrinas apresentadas seguem-se ligadas e ordenadas de modo a formarem um todo harmonico. Accrescentaremos ainda que a exposição dos assumptos é feita com muita clareza, como era necessario, tratando-se de um livro destinado aos primeiros estudos da sciencia a que é consagrado.

S. Stéphanos: Sur une extension du calcul des substitutions linéaires (Journal des mathématiques, 1900).

N'esta bella memoria faz o sabio professor da Universidade de Athenas duas extensões importantes de um calculo symbolico de multiplicação associativa, de muita vantagem na theoria das substituições lineares applicadas ao estudo das formas bilineares e quadraticas.

E. Pascal: Repertorio di Matematiche Superiori, vol. II. Milano, U. Hoegli, 1900.

Deu-se já n'este jornal noticia do primeiro volume d'esta importante publicação. Dissemos então qual era a indole da obra e referimos-nos ás excellentes qualidades do volume a que essa noticia dizia respeito. Hoje temos a accrescentar que vem de ser publicado o volume segundo da mesma obra, o qual é consagrado á Geometria, e que este tem as mesmas boas qualidades que o anterior. Pela seguinte indicação do summario de cada capitulo pode-se vêr quaes os assumptos de que o sr. Pascal se occupa no presente volume da sua obra:

I Geometria das fórmas continuas fundamentaes. II Geometria das fórmas discontinuas. III Geometria invariantiva das fórmas algebricas connexas. IV As conicas. V As quadricas. VI Theoria geral das curvas planas algebricas. VII As cubicas planas. VIII As quarticas planas. IX Theoria geral das superficies e curvas empenadas algebricas. X As curvas empenadas de diversas ordens. XI As superficies de terceira ordem. XII As superficies de quarta ordem. XIII Superficies de ordem superior á quarta. Superficies regradas. XIV A Geometria das rectas no espaço e a Geometria da esphera. XV Geometria numerativa. XVI Theoria infinitesimal das curvas e superficies. XVII Principaes gerações e transformações metricamente especialisadas de curvas e superficies. A Geometria de curvas especiaes. XVIII Analisis situs. Theoria dos polyedros. Connexão das superficies de Riemann. XIX Geometria projectiva dos hyperespaços. XX A Geometria infinitesimal e intrinseca nos hyperespaços lineares e nos espaços de curvatura constante. XXI A Geometria absoluta e especialmente a Geometria não euclideana no plano e no espaço. XXII A Geometria moderna do triangulo.

A respeito da utilidade d'esta obra temos a accrescentar ao que dissemos na noticia anterior, que a publicação a que se está procedendo de traducções em lingua allemã e polaca mostram como ella tem sido reconhecida.

Ch. André: Traité d'Astronomie stellaire. Deuxième Partie. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Deu-se já n'este jornal noticia da Primeira parte d'esta formosa e importante obra, e n'essa occasião dissémos quanto era agradavel a sua leitura. A Segunda parte vem de ser publicada, e é, como a anterior, vivamente interessante. Occupa-se n'ella o sr. André das estrellas duplas e multiplas e das nebulosas.

Quando se observa o céo com um telescopio distinguem-se grupos compostos de duas estrellas, que vistos a olho nu ou com telescopios de menor força parecem reunidas e formar uma estrella unica. Estes binarios de estrellas foram estudados pela primeira vez por W. Herschel, que mostrou que uma d'ellas se move á roda da outra considerada como fixa, e a elles são consagrados os primeiros capitulos do livro a que nos estamos referindo. A historia de sua descoberta, os meios empregados para as observar e para achar as suas orbitas apparentes, os methodos para se deduzir d'estas orbitas as suas orbitas reaes, o modo de determinar as suas dimensões, massas e distancias, são o objecto dos primeiros dois capitulos do livro, aos quaes se segue um terceiro consagrado á historia e descripção de alguns dos mais importantes, O movimento irregular de algumas estrellas tem levado os astronomos a descobrir outras que constituem com as primeiras systemas binarios e que são a causa d'aquellas perturbações, antes que o telescopio as revele. A Bessel é devido a primeira descoberta de uma estrella por este processo, e outras foram depois feitas por outros astronomos. A esta bella e importante questão é consagrado um largo capitulo do livro, com a epigraphe de *Astronomia do invisivel*, onde são expostos os methodos para determinar a orbita da estrella desconhecida, e a descripção dos systemas binarios que têm sido descobertos por este meio.

Muito interessantes tambem são os tres capitulos seguintes, consagrados o primeiro ás estrellas duplas espectroscopicas, isto é, ás estrellas duplas cujo desdobramento não póde ser feito por meio do telescopio, em virtude da proximidade das duas estrellas componentes, mas cuja duplicidade foi reconhecida por uma duplicação periodica do seu espectro; e os outros dois ás estrellas duplas photometricas, isto é, ás estrellas de brilho variavel, o qual é devido ao eclipse que produz uma estrella do grupo quando passa deante da outra.

Ao estudo das estrellas duplas segue-se o das estrellas triplas, quadruplas, etc., e o das aglomerações de estrellas e das nebulosas. São consagrados a este assumpto tres capitulos, onde é exposto o que se conhece actualmente a respeito d'estes corpos celestes. Depois vem um capitulo consagrado ás estrellas coradas.

Fecham o livro dois capitulos do mais alto interesse, nos quaes, como epilogo natural a tudo o que precede, se procuram as relações geraes entre todos os corpos do nosso systema sideral. Um d'elles é destinado a expôr e examinar a theoria de Mädler a respeito da existencia e posição do centro dynamico do nosso systema sideral; e o outro a algumas considerações sobre o mundo celeste.

C. de Freycinet: Les planètes télescopiques. Application de la théorie de Laplace. Paris, G. Villars, 1900.

É bem conhecida a bella hypothese cosmogonica que Laplace publicou na Nota VII da sua celebre *Exposition du système du monde*. Segundo esta hypothese, a nebulosa solar contrahindo-se abandonou anneis. Cada um d'estes partiu-se depois, e os seus fragmentos, reunindo-se, formaram um ou mais planetas. Ora o sr. Freycinet estuda, no seu interessante trabalho, a disposição das orbitas e o agrupamento de 428 planetas telescopicos, para mostrar que, em concordancia com a hypothese de Laplace, parecem ter pertencido a um pequeno numero de anneis, fixando mesmo em cinco o numero de anneis a que parecem ter pertencido 401 d'estes pequenos astros.

Walter F. Wislicenus: Astronomischer Jahresbericht. I Band-Berlin. G. Reiner, 1900.

É consideravel o numero de livros, memorias, notas, etc., relativas a assumptos astronomicos, que todos os annos são publicadas. O Annuario que o sr. Wislicenus vem de fundar, e cujo titulo vem de ser escripto, tem por fim dar a lista de todas ellas e noticias mais ou menos resumidas do objecto de cada uma. Os trabalhos considerados são dispostos no Annuario ordenadamente, segundo os assumptos de que tratam, e cada volume contém os trabalhos relativos a um anno. Assim o volume que vem de ser publicado, e que é o primeiro da obra, refere-se aos trabalhos publicados em 1899.

A utilidade de uma publicação d'esta natureza é tão evidente que é desnecessario recommendal-a, e basta indicar o seu apparecimento. É indispensavel a todos os observatorios e a todas as pessoas que se occupam de trabalhos astronomicos, que serão, estamos certos d'isso, vivamente reconhecidos ao sabio astronomo que a fundou, pelo valioso serviço que com ella lhes presta.

Rodolpho Guimarães: Les mathématiques en Portugal au XIX.e siècle. Coimbre, 1900.

Contém este opusculo um catalogo de todos os trabalhos de auctores portuguezes publicados em Portugal ou no estrangeiro durante o seculo XIX. Cada um dos trabalhos indicados é seguido por uma pequena noticia em que é rapidamente indicado o seu objecto. Na classificação e disposição d'elles seguiu o sr. Guimarães os preceitos adoptados pela commissão organisadora do *Répertoire de Bibliographie mathématique*, assim como, para indicar o objecto de cada um, os signaes recommendados pela mesma commissão.

O catalogo é precedido de uma rapida noticia sobre o movimento de progresso das sciencias mathematicas, primeiro na Europa, e depois em especial, no nosso paiz, durante o referido seculo.

Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (Acta mathematica, t. 23).

Á lista dos seus trabalhos, hoje celebres, sobre a theoria das funcções analyticas, vem de junctar o eminente geometra sueco um da maior importancia. Trata-se n'elle de dar uma representação analytica dos *ramos* uniformes das funcções monogeneas, a extensão do ramo sendo tão grande quanto possivel. Esta representação é feita por uma serie de funcções inteiras que o auctor ensina a determinar.

E. Lampe: Die reine Mathematik in den Jahren 1884-1899. Berlin, 1899.

N'este opusculo muito interessante, escripto pelo auctor para commemorar o centenario da fundação da Escola technica superior de Berlin, é descripto a traços largos o movimento progressivo das mathematicas nos annos de 1884 a 1899. Encerra tambem o opusculo varios documentos relativos ao professor da mesma Escola S. Aronhold, e um retrato d'este eminente geometra.

C. Juel: Indledning i Laeven om de grafiske Kurver (Mémoires de l'Académie des Sciences de Copenhague, 1899).

Esta memoria, escripta em lingua dinamarqueza, é seguida por um resumo, escripto em francez, cujo titulo é — *Introduction à l'étude des courbes graphiques*. O auctor chama curvas graphicas as curvas planas traçadas por meio de um lapis no papel e demonstra a respeito d'ellas um principio, que elle chama — *principio graphico de correspondencia*, por meio do qual faz o estudo das curvas graphicas de segunda, terceira e quarta ordem. Este principio conduz, em especial, o auctor a uma enumeração completa das fórmas possiveis das curvas de quarta ordem.

Juan Duran-Loriga: Sur les cercles remarquables du triangle (Association française. Congrès de Nantes, 1898).

Este interessante trabalho é a continuação de um outro, apresentado pelo auctor no Congresso de Saint-Etienne, o qual já foi mencionado n'este jornal. Põe-se n'elle em evidencia o papel importante do centro de gravidade na sua relação com os differentes circulos do plano do triangulo e consideram-se alguns circulos e rectas novas cuja importancia se faz notar.

D. Antonio Tarrazona: Memoria sobre el eclipse total de Sol de 28 de mayo de 1900. Madrid, 1899.

N'este importante trabalho, publicado pelo Observatorio astronomico de Madrid, o auctor dá noticia das particularidades mais notaveis que ha de offerecer o eclipse total de Sol que ha de ter logar em 28 de maio de 1900, dá a explicação das diversas phases do phenomeno e suas causas, e dá elementos para que se possam calcular em cada localidade as circumstancias particulares que n'ella offerece o phenomeno. Encerra ainda o livro duas cartas geographicas onde estão representados, na primeira, os logares da terra que verão as principaes phases do eclipse, e, na segunda os logares da nossa peninsula que verão as diversas phases do mesmo.

Quando esta noticia for publicada já de certo terá passado o dia do eclipse. Todavia pareceu-nos dever fazer aqui menção d'este livro, por causa das suas relações com o problema da predição dos eclipses e porque é elle, para assim dizer, o primeiro capitulo da historia d'aquelle a que se refere.

G. T.

CONDIÇÕES DE ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa-Cabral.

CONDIÇÕES DE ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa-Cabral.
