UNIVERSIDADE DE COIMBRA

REVISTA

DA

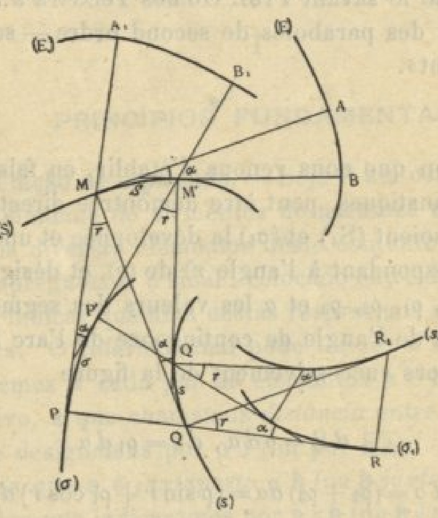
FACULDADE DE CIÊNCIAS

VOL. IV — N.º 1

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1934

Sur une propriété des arcs de développoïdes

La développoïde (σ) d'une courbe plane (S) peut-être considérée comme sa diacaustique par rapport aux rayons incidents complanaires avec (S) et normaux à une de ses développantes (E), habituellement nommée caustique secondaire d'incidence.



En effet, l'angle d'incidence, dans ce cas, étant constant et égal à $\frac{\pi}{2}$, l'angle de réfraction sera aussi constant tout le long de (S) et ne dépendra que de la valeur, supérieure à l'unité, attribuée à l'indice de réfraction.

Or, un théorème bien connu, dû à Quetelet, nous apprend que la diacaustique de la courbe (S) est la développée (σ) de l'enveloppe (E_1) des circonférences centrées sur (S) et dont les rayons sont aux distances de leurs centres à la caustique secondaire d'incidence (E) dans le rapport constant du sinus de l'angle de réfraction au sinus de l'angle d'incidence, ici égal à l'unité.

Si l'on tient compte de ce théorème on tire de la figure:

$$\sigma = A\,M\,.\,\sin r + M\,P - B\,M'\,.\,\sin r - M\,P'$$

et par suite, puisque P et P' sont les projections, sur les deux rayons réfractés M P et M P', des points Q et Q':

$$\sigma = S\sin r + s\cos r$$

De cette relation très simple on peut déduire que: «la développoïde d'une courbe plane algébrique n'est rectifiable algébriquement que si la courbe donnée l'est elle même».

Et plus particulièrement que: «les paraboles demi-cubiques obliques — que le savant Prof. Gomes Teixeira a montré ètre les dévellopoïdes des paraboles de second ordre — sont rectifiables algébriquement».

*

La relation que nous venons d'établir, en faisant appel à la théorie des caustiques, peut être démontrée directement (1).

En effet, soient (S_1) et (σ_1) la développée et une développoïde (celle-ci correspondant à l'angle r) de (s), et désignonts respectivement par ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 et α les valeurs des segment M Q, Q R, P Q et Q R et de l'angle de contingence de l'arc S.

On tire alors successivement de la figure

$$d\,S = \rho\,d\,\alpha,\; d\,s = \rho_1\,d\,\alpha$$

$$d\,\sigma = (\rho_2 + \rho_3)\,d\alpha = (\rho\sin r + \rho_1\cos r)\,d\,\alpha$$

d'où

$$d\,\sigma = d\,S\,.\,\sin r + d\,s\,.\,\cos r$$

En intégrant et en choisissant les origines des arcs σ, S et s sur les trois courbes de façon qu'elles se correspondent on retrouve enfin la relation cherchée.

Porto, Mars, 1920.

RODRIGO S. DE BEIRES.

---

(1) Cette démonstration nous a été proposée par Mr. le Prof. d'Ocagne a qui nous avons communiqué la propriété en question en 1920.

Contribuição para o estudo da teoria das funções

CAPÍTULO I

NOÇÃO DE ESPAÇÓIDE

I

PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

1. Definição de espaçóide. — Seja **P** um conjunto constituído por uma infinidade de elementos de natureza qualquer. Representemos os diversos elementos dêste conjunto pelas letras **a**, **b**, **c**,... e empreguemos o sinal | colocado entre duas letras quando quisermos indicar que uma destas respresenta o mesmo elemento que a outra. O referido sinal pode ler-se: *o mesmo que*.

Associemos a cada par de elementos **a** e **b** um número real não negativo, a que chamamos *distância* entre **a** e **b** (ou entre **b** e **a**) e que designamos por $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ (ou por $\overline{\mathbf{b}\,\mathbf{a}}$).

Diremos que **a** é *juxtaposto* a **b** (ou **b** *juxtaposto* a **a**) quando fôr $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} = 0$, o que indicaremos por **a** ‖ **b** (ou **b** ‖ **a**). Por convenção um elemento juxtapõe-se a si próprio, isto é, de **a** | **b** resulta **a** ‖ **b**; porém de **a** ‖ **b** pode não resultar necessàriamente **a** | **b**.

Consideremos agora um *subconjunto* **A** de **P**, ou seja um conjunto formado por elementos de **P** (1). Damos o nome de diâmetro de **A** ao limite superior das distâncias entre os elementos dêste conjunto tomados dois a dois de qualquer modo. O diâmetro dum elemento considera-se igual a zero.

(1) A definição de subconjunto não exclui o caso de **A** ser o próprio **P** ou de se reduzir excepcionalmente a um só elemento dêste conjunto.

Chamemos *conjunto limitado* a todo o conjunto **A** com o diâmetro finito.

Chamemos ainda *conjunto pròpriamente infinito* a todo o conjunto **A** que admita um subconjunto infinito de elementos não juxtapostos, dois quaisquer dêles.

Estabelecidas estas primeiras noções, suponhamos que tal definição de distância entre os elementos de **P** é determinada de forma que sejam verdadeiras as seguintes propriedades:

1) *Verifica-se a relação*

$$\overline{\mathrm{ac}} \leqslant \overline{\mathrm{ab}} + \overline{\mathrm{bc}} \tag{1}$$

para quaisquer elementos **a**, **b** e **c**.

2) *A cada sucessão infinita de elementos*

$$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_i, \ldots,$$

na qual seja $lim\,\overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}} = 0$ (1), *corresponde um elemento* **a** *que satisfaz à condição* $lim\,\overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}} = 0$.

3) *Podemos dividir qualquer subconjunto de* **P**, *que seja limitado, num número finito de conjuntos* (2) *de diâmetros menores do que um número positivo qualquer prèviamente dado* (3).

(1) Subentende-se, nesta notação, que i e i' tendem para infinito. Logo, dizer que é $lim\,\overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}} = 0$, é dizer que tende para zero qualquer sucessão de distâncias $\overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}}$ quando as sucessões correspondentes dos índices i e i' tendem para infinito. Noutros têrmos: o símbolo $lim\,\overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}} = 0$ exprime que a todo o número $\delta > 0$ corresponde um número inteiro $k > 0$ de modo que seja $\overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}} < \delta$ para quaisquer valores de i e i' superiores a k.

(2) Considera-se um conjunto dividido em novos conjuntos quando a soma dêstes reproduz aquêle.

(3) Importa observar que é possível dar outras formas às presentes condições. Podemos, por exemplo, substituir a condição 2) pelo enunciado de Bolzano-Weierstrass, como veremos numa observação no n.º 6. Mais adiante [n.º 83] também veremos que a condição 3) é equivalente a um enunciado de Borel-Lebesgue e ainda a um enunciado de Riesz-Sierpinski.

Notemos também que as hipóteses 2) e 3) convertem-se em teoremas quando o conjunto **P** não é pròpriamente infinito. Estes teoremas demonstram-se fàcilmente tendo em vista a proposição da *p.* 6, *l.* 21, e atendendo a que um conjunto não pròpriamente infinito é todo aquêle que pode dividir-se num número finito de conjuntos de diâmetros nulos.

Apresentadas as condições a que sujeitamos a definição do distância, chamemos *conjunto espaçado*, ou, mais simplesmente, *espaçóide*, a todo o sistema constituído por um conjunto infinito **P** e por uma definição de distância (nas referidas condições) entre os elementos dêste conjunto.

Assim, dizemos que o conjunto dos números dum certo intervalo fechado, o conjunto de todos os números reais e, mais geralmente, o conjunto dos pontos do espaço ordinário de n dimensões são espaçóides. Na verdade, conhecemos a definição de distância $\overline{pp'}$ entre dois pontos p e p' dêsse espaço e tal definição goza das propriedades seguintes: 1) é sempre verdadeira a relação $\overline{pp''} \leqq \overline{pp'} + \overline{p'p''}$; 2) dada a sucessão de pontos $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, a condição $lim\, \overline{p_i p_{i'}} = 0$ assegura a existência dum ponto p (limite da sucessão) de modo que se tenha $lim\, \overline{p_i p} = 0$; sabemos, emfim, dividir qualquer conjunto de pontos, que seja limitado, num número finito de partes de diâmetros tão pequenos quanto quisermos. O conjunto de todos os números reais e imaginários, bem como qualquer conjunto infinito e fechado, constituído por números ou por pontos dum espaço ordinário de n dimensões, são outros espaçóides (1).

Convencionemos representar sempre um espaçóide pela letra **P**, afectada ou não de um ou mais índices. Um conjunto do tipo **P** é, pois, qualquer conjunto infinito (de elementos de natureza não especificada) associado a uma definição de distância entre os seus elementos nas condições citadas anteriormente.

2. Primeiras conseqüências. — Da relação (1) concluímos que *dois elementos juxtapostos a um terceiro são juxtapostos entre si*, isto é, de $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ resulta $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$. Se diversos elementos são juxtapostos a um mesmo elemento **a**, dois quaisquer dêles são, pois, juxtapostos um ao outro. Dizemos, então, que os elementos considerados *juxtapõem-se entre si*.

Como vemos, a *juxtaposição* de elementos satisfaz às condições

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \;\therefore\; \mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b},\ \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \;\therefore\; \mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$$

(1) Encontraremos depois novos exemplos de espaçóides.

correspondentes às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da igualdade entre números.

A mesma relação (1) pode generalizar-se, anàlogamente ao que sucede no caso dos elementos serem números. Com efeito, considerando m elementos quaisquer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ..., $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dum determinado espaçóide $\mathbf{P}$, temos

$$\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{v}} \lesssim \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{b}\,\mathbf{v}} \lesssim \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{b}\,\mathbf{c}} + \overline{\mathbf{c}\,\mathbf{v}}$$

e, por indução, vem

$$(2) \qquad \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{v}} \lesssim \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{b}\,\mathbf{c}} + \ldots + \overline{\mathbf{u}\,\mathbf{v}}.$$

Se efectuarmos permutações circulares na sucessão dos elementos considerados, fàcilmente se concluirá, da presente relação, que:

Dada uma sucessão de m elementos de $\mathbf{P}$, *considerando as distâncias entre cada dois elementos consecutivos e entre o primeiro e o último, uma qualquer destas m distâncias não excede a soma das restantes.*

Por conseguinte:

A diferença de duas das m distâncias (em valor absoluto) não é maior do que a soma das outras.

Daqui resulta que:

Se fôr $\mathbf{a} \parallel \mathbf{a}'$ *e* $\mathbf{b} \parallel \mathbf{b}'$, *também será* $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a}'\,\mathbf{b}'}$.

Com efeito, basta escrever

$$|\,\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} - \overline{\mathbf{a}'\,\mathbf{b}'}\,| \lesssim \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}'} + \overline{\mathbf{b}\,\mathbf{b}'}$$

e notar que é $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}'} = 0$ e $\overline{\mathbf{b}\,\mathbf{b}'} = 0$.

A distância entre dois elementos não se altera, pois, quando estes se substituem por outros que sejam juxtapostos aos primeiros.

Como segunda aplicação mostremos que:

É limitado qualquer conjunto soma dum número finito de conjuntos limitados de elementos de $\mathbf{P}$.

Suponhamos, em primeiro lugar, que **A** é a soma de dois conjuntos limitados **B** e **C**, e comecemos por fixar dois elementos $\mathbf{b}'$ e $\mathbf{c}'$ de **B** e **C** respectivamente. Podemos escrever

$$\overline{\mathbf{b}\,\mathbf{c}} \lessgtr \overline{\mathbf{b}\,\mathbf{b}'} + \overline{\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'} + \overline{\mathbf{c}'\,\mathbf{c}}$$

para elementos quaisquer **b** e **c** dos conjuntos **B** e **C**, donde resulta, designando por Δ' e Δ'' os diâmetros dêstes conjuntos,

$$\overline{\mathbf{b}\,\mathbf{c}} \lessgtr \Delta' + \Delta'' + \overline{\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'}.$$

Logo o conjunto **A** é limitado, porque a distância entre dois quaisquer dos seus elementos não excede o número $\Delta' + \Delta'' + \overline{\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'}$.

Notemos que é

$$\Delta \lessgtr \Delta' + \Delta'' + \overline{\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'}, \tag{3}$$

onde Δ representa o diâmetro do conjunto **A**; esta relação deduz-se da anterior, visto **b** e **c** representarem elementos quaisquer de **B** e **C** respectivamente.

Por ser limitada a soma de dois conjuntos limitados também é limitada a soma de três, de quatro, etc.

O seguinte enunciado permite-nos dar outra forma à definição de conjunto limitado:

Um conjunto **A** *é limitado ao mesmo tempo que o conjunto das distâncias* $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ *entre cada elemento* **a** *de* **A** *e um determinado elemento* **b**.

Com efeito, vimos há pouco que a soma de dois conjuntos limitados é igualmente limitada; logo, se **A** é limitado, o mesmo acontece ao conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$. O recíproco resulta da relação

$$\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}'} \lessgtr \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}'\,\mathbf{b}}$$

onde **a** e $\mathbf{a}'$ são elementos quaisquer de **A**.

3. Observação. — Consideremos um conjunto infinito $\mathfrak{Q}$ submetido a uma definição de distância entre os seus elementos. Admitamos que esta definição de distância obedece às condições fundamentais 1) e 3), excepto à condição 2) que supomos não ser verdadeira em todos os casos; como vemos, o conjunto Q não se encontra *espaçado* com tal definição de distância.

A presente observação, que pretendemos justificar, consiste no seguinte:

O conjunto Q *pode considerar-se um subconjunto dum espaçóide* P, *sendo a definição de distância entre os elementos de* P *que pertencem a* Q *a mesma que adoptámos no conjunto* Q.

Seja

$$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_i, \ldots$$

uma sucessão de elementos de Q tal que se tenha $lim\, \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{a}_{i'}} = 0$ e que, no entanto, não satisfaça à condição 2). Consideremos tôdas as sucessões de elementos de Q que se encontrem neste caso e façamos a convenção seguinte: dar uma sucessão nestas condições é dar (ou definir) um *novo elemento*. Adicionemos ao conjunto Q todos estes novos elementos e designemos por Q' o conjunto assim constituído. Para maior simplicidade na exposição, também diremos que um elemento a de Q é dado pela sucessão $\mathsf{a}, \mathsf{a}, \ldots, \mathsf{a}, \ldots$. A qualquer elemento de Q' corresponde, pois, uma determinada sucessão de elementos de Q que, por convenção, define êsse elemento.

Eis a nova definição de distância: em geral, a distância entre dois elementos a' e b' de Q' definidos pelas sucessões

$$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_i, \ldots$$

$$\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \ldots, \mathsf{b}_i, \ldots$$

é o número $\overline{\mathsf{a}' \mathsf{b}'} = lim\, \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{b}_i}$; êste limite existe, de facto, porque da relação

$$|\, \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{b}_i} - \overline{\mathsf{a}_{i'} \mathsf{b}_{i'}} \,| \lesssim \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{a}_{i'}} + \overline{\mathsf{b}_{i'} \mathsf{b}_i} \quad [p.\ 6,\ l.\ 18]$$

resulta

$$lim\ |\, \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{b}_i} - \overline{\mathsf{a}_{i'} \mathsf{b}_{i'}} \,| = 0.$$

Temos assim definida a distância entre dois elementos novos, assim como entre um elemento novo e um elemento de Q: a distância entre o elemento a' e um elemento b de Q é, afinal,

$\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}} = lim\,\overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}}$. Depois, esta definição generaliza evidentemente a definição de distância, que supomos conhecida, entre dois elementos de $\mathfrak{Q}$. Temos definidas, em particular, as distâncias

$$\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_i} \quad (i=1, 2, \ldots)$$

entre o elemento $\mathfrak{a}'$ e os têrmos da sucessão que o define.

Dadas estas noções, demonstremos que é $lim\,\overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}'} = 0$.

A um número dado $\delta > 0$ corresponde um inteiro $k > 0$ de modo que seja $\overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_{i'}} < \frac{\delta}{2}$ para todos os valores de i e i' superiores a k. Depois de escolhermos para i um valor qualquer superior a k, sujeitemos i' à mesma condição mas com um valor suficientemente grande para que se tenha

$$\overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}'} < \overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_{i'}} + \frac{\delta}{2},$$

o que é possível visto a distância $\overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}'}$ ser o limite de $\overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_{i'}}$ quando i' tende para infinito. Temos, então,

$$\overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}'} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

sendo esta desigualdade verdadeira para qualquer valor de i superior a k, o que nos dá $lim\,\overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}'} = 0$.

Em resumo, a introdução dos *novos elementos* no conjunto considerado $\mathfrak{Q}$ implica a *convergência* (como diremos no parágrafo seguinte) de tôdas as sucessões

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_i, \ldots$$

de elementos de $\mathfrak{Q}$ que satisfaçam à condição $lim\,\overline{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_{i'}} = 0$. Além disso o novo conjunto $\mathfrak{Q}'$ constitui um espaçóide; é o que passamos a demonstrar:

1) *Dados os elementos* $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ *e* $\mathfrak{c}'$ *de* $\mathfrak{Q}'$ *verifica-se a relação*

$$\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'} \lesseqgtr \overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'} + \overline{\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'}.$$

Com efeito, se estes elementos são dados respectivamente pelas sucessões

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i, \ldots$$

$$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots,$$

como temos

$$\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{c}_i} \lesssim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} + \overline{\mathbf{b}_i \mathbf{c}_i},$$

resulta

$$lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{c}_i} \lesssim lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} + lim\, \overline{\mathbf{b}_i \mathbf{c}_i},$$

isto é,

$$\overline{\mathbf{a}'\mathbf{c}'} \lesssim \overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} + \overline{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}.$$

2) *A qualquer sucessão de elementos de* $\mathbf{Q}'$,

$$\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_i, \ldots,$$

na condição de ser $lim\, \overline{\mathbf{a}'_i \mathbf{a}'_{i'}} = 0$, *corresponde um elemento* $\mathbf{a}'$ *para o qual é* $lim\, \overline{\mathbf{a}'_i \mathbf{a}'} = 0$.

Esta propriedade foi há pouco verificada no caso particular dos elementos da sucessão pertencerem todos a $\mathbf{Q}$. Na hipótese contrária façamos corresponder a cada elemento $\mathbf{a}'_i$ um elemento $\mathbf{a}_i$ de $\mathbf{Q}$ que satisfaça à desigualdade $\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}'_i} < \frac{1}{i}$ (1). A sucessão

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

é tal que $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}'_i} = 0$. Temos ainda

$$\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} \lesssim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}'_i} + \overline{\mathbf{a}'_i \mathbf{a}'_{i'}} + \overline{\mathbf{a}'_{i'} \mathbf{a}_{i'}} \quad [p.\ 6,\ l.\ 13],$$

donde vem $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} = 0$. Esta última sucessão define, portanto, um elemento $\mathbf{a}'$, e da relação

$$\overline{\mathbf{a}'_i \mathbf{a}'} \lesssim \overline{\mathbf{a}'_i \mathbf{a}_i} + \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}'}$$

concluímos que é $lim\, \overline{\mathbf{a}'_i \mathbf{a}'} = 0$, como desejávamos provar.

---

(1) Se $\mathbf{a}'_i$ fôr um elemento de $\mathbf{Q}$, o elemento $\mathbf{a}_i$ poderá ser o próprio $\mathbf{a}'_i$.

3) *É possível dividir qualquer subconjunto de* Q', *que seja limitado, num número finito de partes de diâmetros inferiores a qualquer número positivo prèviamente dado.*

Seja A' um subconjunto de Q', limitado, e consideremos um número $\varepsilon > 0$. A cada elemento a' de A' corresponde sempre um elemento a de Q para o qual é $\overline{\mathsf{a\,a}'} < \frac{\varepsilon}{3}$. Designemos por A o conjunto dos elementos a *correspondentes* dos diversos elementos a' de A'. A um subconjunto de A corresponde um subconjunto de A' e a uma divisão de A em partes corresponde igualmente uma divisão de A' em partes.

O conjunto A é limitado porque, se a e b são dois dos seus elementos e a' e b' correspondentes deles em A', temos

$$\overline{\mathsf{a\,b}} \leqq \overline{\mathsf{a\,a}'} + \overline{\mathsf{a}'\,\mathsf{b}'} + \overline{\mathsf{b}'\,\mathsf{b}},$$

donde vem

$$\overline{\mathsf{a\,b}} < \frac{2}{3}\varepsilon + \overline{\mathsf{a}'\,\mathsf{b}'}.$$

Se dividirmos agora o conjunto A num número finito de partes de diâmetros menores do que $\frac{\varepsilon}{3}$, obteremos por correspondente uma divisão de A' em partes de diâmetros menores do que ε porque, para dois elementos a' e b' duma destas partes, temos, designando por a e b os correspondentes dêsses elementos no conjunto A,

$$\overline{\mathsf{a}'\,\mathsf{b}'} \leqq \overline{\mathsf{a}'\,\mathsf{a}} + \overline{\mathsf{a\,b}} + \overline{\mathsf{b\,b}'} < \varepsilon.$$

Em conclusão, podemos dizer que: *o conjunto proposto* Q *é um subconjunto dum espaçóide* $\mathsf{P} \mid \mathsf{Q}'$ *no qual se conserva a mesma definição de distância entre os elementos de* Q. Êsse espaçóide poderá chamar-se *prolongamento do conjunto* Q (1).

---

(1) Existe um perfeito paralelismo entre a exposição que seguimos nesta nota e a que podemos seguir nos princípios da teoria dos números irracionais quando, no estudo dêstes números, adoptamos o método de Bruno de Cabedo. (Veja-se Pacheco de Amorim, *Aritmética Racional*, p. 337 e segs.).

II

CONCEITO DE LIMITE DUMA SUCESSÃO DE ELEMENTOS DUM ESPAÇÓIDE

4. Definição de limite. — A definição de limite duma sucessão infinita

$$(1) \qquad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

de elementos dum espaçóide $\mathbf{P}$ baseia-se na definição de distância: dizemos que a sucessão (1) *converge* ou *tende para o elemento* $\mathbf{a}$ quando se verifica a condição $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} = 0$, isto é, quando a cada número $\delta > 0$ corresponde de tal forma um inteiro positivo k que se tenha $\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} < \delta$ para qualquer $i > k$. O elemento $\mathbf{a}$ chama-se um *limite* da sucessão e esta diz-se, neste caso, *convergente.*

É evidente que uma sucessão (1) na qual todos os têrmos são juxtapostos a um determinado elemento $\mathbf{a}$ converge necessàriamente para o mesmo elemento $\mathbf{a}$. Em particular, a sucessão

$$\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{a}, \ldots$$

converge para o elemento $\mathbf{a}$.

Uma sucessão que não é convergente chama-se *divergente.*

A condição $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} = 0$ *é necessária para a convergência da sucessão* (1).

Com efeito, se a sucessão (1) converge para o limite $\mathbf{a}$, temos $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} = 0$, e de

$$\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} \lesssim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} + \overline{\mathbf{a}_{i'} \mathbf{a}}$$

resulta $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} = 0$.

A mesma condição assegura, por outro lado, a convergência da sucessão (1): é a hipótese 2), *p.* 4.

É necessàriamente limitado o conjunto dos têrmos duma sucessão convergente.

Na verdade, se a sucessão (1) converge para o limite $\mathbf{a}$, temos $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}}=0$; logo é limitado o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}}$ e o mesmo acontece ao conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}_{i'}}$ [*p.* 7, *l.* 19].

Os limites duma sucessão convergente são juxtapostos entre si.

Porque, se **a** e **b** são dois limites da sucessão convergente (1), as condições $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}}=0$ e $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{b}}=0$ dão

$$\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} \lesssim lim(\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{b}})=0\,,$$

donde vem $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Se uma sucessão converge para um limite **a**, *também converge para qualquer elemento juxtaposto a* **a**.

Com efeito, sendo $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}}=0$ e $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, como é então $\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}}=\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{b}}$ (visto-que a distância entre dois elementos não se altera quando estes se substituem por elementos juxtapostos aos primeiros), temos

$$lim\,\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{b}}=lim\,\overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}}=0\,,$$

e a sucessão dada também converge para o limite **b**.

Convencionemos designar qualquer limite da sucessão convergente (1) por meio do símbolo $lim\,\mathbf{a}_i$. Atendendo agora aos dois últimos enunciados, vemos que basta escrever $lim\,\mathbf{a}_i \parallel \mathbf{a}$, ou $\mathbf{a} \parallel lim\,\mathbf{a}_i$, para exprimir que o elemento **a** é um limite da sucessão convergente (1).

5. Elemento limite dum conjunto. Extensão do teorema de Bolzano-Weierstrass. — Chamemos *subsucessão* duma dada sucessão (1) de elementos de **P** a qualquer outra

(2) $$\mathbf{a}_r\,,\ \mathbf{a}_s\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{a}_u\,,\ \ldots$$

que seja formada por têrmos da primeira, sem repetições e pela ordem em que nela se encontram. Os índices $r\,,\ s\,,\ \ldots\,,\ u\,,\ \ldots$ são, pois, números inteiros positivos e crescentes.

Dizemos que uma sucessão de elementos de **P** é *pròpriamente infinita* quando o conjunto dos têrmos é pròpriamente infinito, isto é, quando admite uma subsucessão na qual dois têrmos quaisquer não sejam juxtapostos.

Para que uma sucessão de elementos seja pròpriamente infinita *é suficiente que não admita uma subsucessão de têrmos juxtapostos entre si.*

Consideremos, com efeito, uma sucessão que não admita uma infinidade de têrmos juxtapostos entre si. Suprimamos todos os têrmos juxtapostos ao primeiro (excepto êste têrmo), suprimamos em seguida à sucessão restante os têrmos juxtapostos ao segundo (excepto êste), etc. Podemos continuar assim indefinidamente, visto suprimirmos, de cada vez, apenas um número finito de têrmos ou nenhum. Os têrmos não suprimidos constituem evidentemente uma subsucessão em que dois têrmos quaisquer não se juxtapõem um ao outro.

Por conseguinte *qualquer sucessão que não seja pròpriamente infinita admite uma subsucessão de têrmos juxtapostos entre si* (1).

---

(1) A proposição que acabámos de demonstrar é susceptível de tomar um aspecto mais geral, como vamos ver.

Consideremos uma sucessão infinita de elementos abstractos

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots.$$

Admitamos que certa propriedade pode verificar-se ou não entre dois dêsses elementos dados arbitràriamente, e demonstremos a proposição seguinte:

A sucessão proposta admite uma subsucessão tal que: ou dois quaisquer dos seus têrmos satisfazem à referida propriedade, ou dois quaisquer deles não satisfazem.

Convencionemos dizer que diversos têrmos da sucessão considerada são *relacionados* ou *irrelacionados* uns com os outros, conforme dois quaisquer dêsses têrmos satisfazem ou não à propriedade de que nos ocupamos.

Suponhamos agora que a sucessão proposta não admite uma subsucessão de têrmos relacionados uns com os outros. Neste caso admite necessàriamente uma subsucessão $a_r, a_s, a_t, \ldots$ tal que o seu primeiro têrmo a_r seja irrelacionado com cada um dos seguintes, porque, se assim não fôsse, se suprimíssemos à sucessão proposta os têrmos irrelacionados com o primeiro (excepto êste), se suprimíssemos em seguida à sucessão obtida os têrmos irrelacionados com o segundo desta sucessão (excepto êste) e se continuássemos assim sucessivamente, os têrmos restantes (que seriam em número infinito porque suprimiríamos, de cada vez, apenas um número finito dêles ou nenhum) constituïriam uma subsucessão de têrmos relacionados uns com os outros.

Pelo mesmo motivo a sucessão $a_s, a_t, \ldots$ admite uma subsucessão $a_{r'}, a_{s'}, a_{t'}, \ldots$ tal que o seu primeiro têrmo $a_{r'}$ seja irrelacionado com cada um dos seguintes, pois aquela sucessão ainda se encontra nas condições

Para que uma sucessão convergente seja pròpriamente infinita é necessário e suficiente que admita uma subsucessão de têrmos não juxtapostos a um limite $\mathbf{a}$ *da mesma sucessão.*

A condição é manifestamente necessária porque, se a sucessão proposta admite uma subsucessão em que dois têrmos quaisquer não sejam juxtapostos um ao outro, entre estes últimos têrmos apenas poderá encontrar-se um que seja juxtaposto ao elemento $\mathbf{a}$.

Recìprocamente, suponhamos que uma dada sucessão convergente (1) admite uma subsucessão de têrmos não juxtapostos a um dos seus limites $\mathbf{a}$. Suprimindo todos os têrmos juxtapostos a $\mathbf{a}$, caso existam, obtemos uma sucessão que já não admite uma infinidade de têrmos juxtapostos entre si, em virtude da condição $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}} = 0$. Esta nova sucessão é, pois, pròpriamente infinita [*prop. prec.*], e o mesmo acontece à proposta.

Dizemos que um elemento $\mathbf{a}$ é *limite dum conjunto* $\mathbf{A}$ quando

---

da proposta. A sucessão $\mathbf{a}_{s'}, \mathbf{a}_{t'}, \ldots$ admite, por sua vez, uma subsucessão $\mathbf{a}_{r''}, \mathbf{a}_{s''}, \mathbf{a}_{t''}, \ldots$ em idênticas condições, e assim indefinidamente.

Os primeiros têrmos $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r'}, \mathbf{a}_{r''}, \ldots$ das subsucessões mencionadas são evidentemente irrelacionados uns com os outros e constituem uma subsucessão da sucessão proposta. Por conseguinte, se esta não admite uma subsucessão de têrmos relacionados uns com os outros, como estamos a supor, é porque admite uma subsucessão de têrmos irrelacionados, e assim demonstramos a proposição que tínhamos em vista.

Como aplicação temos que:

Qualquer sucessão de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ *admite necessàriamente uma subsucessão monótona.*

Efectivamente, dois têrmos quaisquer a_h e a_k $(h < k)$ ou satisfazem à propriedade de ser $a_h < a_k$ ou não satisfazem.

Em particular, tôda a sucessão convergente de números reais admite uma subsucessão monótona, a qual ainda tende para o mesmo limite que a primeira, como é sabido.

Eis uma simples demonstração do teorema de Bolzano-Weierstrass baseada nestas considerações:

Qualquer conjunto A *de números reais, que seja limitado e infinito, admite um ponto limite.*

Com efeito, podemos extrair do conjunto A uma sucessão infinita de números reais todos diferentes, e a mesma sucessão ou admite uma subsucessão de números crescentes ou então de números decrescentes, subsucessão esta que tende necessàriamente para um limite.

é nulo o limite inferior das distâncias entre o elemento **a** e os elementos de **A** não juxtapostos a **a**. Em virtude da última proposição que demonstrámos, podemos dar a esta definição a forma seguinte, geralmente mais cómoda nas aplicações:

Elemento limite dum conjunto **A** *é todo o elemento de* **P** *que seja limite duma sucessão convergente pròpriamente infinita de elementos de* **A**.

Por fôrça dêste enunciado e da condição 2), *p*. 4, a existência dum elemento limite dum conjunto **A** reduz-se à existência duma sucessão pròpriamente infinita de elementos de **A** tal que seja $lim\, \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}_{i'}} = 0$. A-propósito desta questão demonstremos o teorema seguinte:

Um conjunto **A**, *limitado e pròpriamente infinito, admite um elemento limite.*

Observemos, primeiro, que é possível extrair dum conjunto limitado e pròpriamente infinito um subconjunto nas mesmas condições, mas de diâmetro menor do que um número positivo dado δ. Com efeito, se dividirmos o conjunto considerado num número finito de conjuntos parciais de diâmetros menores do que δ, um dêles, pelo menos, será pròpriamente infinito.

Pôsto isto, consideremos um conjunto **A**, limitado e pròpriamente infinito. Seja $\mathbf{A}_1$ um subconjunto de **A**, pròpriamente infinito e de diâmetro menor do que 1. Seja $\mathbf{A}_2$ um subconjunto de $\mathbf{A}_1$, pròpriamente infinito e de diâmetro menor do que $\frac{1}{2}$. Continuemos assim indefinidamente, designando por $\mathbf{A}_i$, em geral, um subconjunto de $\mathbf{A}_{i-1}$, própriamente infinito e de diâmetro menor do que $\frac{1}{i}$. Obtemos assim uma sucessão infinita de conjuntos

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots$$

cada um dos quais contém o conjunto imediatamente seguinte e de diâmetros que tendem para zero.

Consideremos agora um elemento $\mathbf{a}_1$ de $\mathbf{A}_1$, depois um elemento $\mathbf{a}_2$ de $\mathbf{A}_2$ mas não juxtaposto a $\mathbf{a}_1$, e assim sucessivamente. O elemento considerado $\mathbf{a}_i$, em geral, pertence ao conjunto $\mathbf{A}_i$ e não se juxtapõe a nenhum dos elementos anteriormente escolhidos (o que podemos conseguir, visto $\mathbf{A}_i$ ser pròpriamente infinito).

Construímos, dêste modo, uma sucessão pròpriamente infinita de elementos de **A**,

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots,$$

e que é convergente, porque da relação $\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} < \frac{1}{i''}$, onde i'' é o menor dos inteiros i e i', resulta $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} = 0$.

Um conjunto ilimitado pode não admitir elemento limite algum. Apenas podemos afirmar, em geral, que é possível extrair dum conjunto ilimitado uma sucessão de elementos cujas distâncias a um elemento dado tendam para infinito, como fàcilmente reconhecemos.

A êste respeito completemos a proposição anterior dizendo:

Para que um conjunto admita um elemento limite é necessário e suficiente que contenha um subconjunto limitado pròpriamente infinito.

A condição é necessária visto ser limitado o conjunto dos têrmos duma sucessão convergente, e é suficiente em virtude do teorema anterior.

6. Derivado duma sucessão de elementos. — Chamemos, dum modo geral, *limite duma sucessão* (1) de elementos de **P** a qualquer elemento que seja limite duma subsucessão convergente da mesma sucessão (1).

Chamemos *derivado duma sucessão* ao conjunto dos respectivos limites.

Chamemos ainda *sucessão limitada* a qualquer sucessão cujos têrmos constituam um conjunto limitado.

Uma sucessão limitada admite necessàriamente um derivado.

Tal afirmação é evidente se a sucessão dada contém uma infinidade de têrmos que sejam juxtapostos entre si; não sendo assim, é uma aplicação do teorema de Bolzano-Weierstrass

(1) Notemos que um limite duma sucessão pode não ser limite do conjunto dos respectivos têrmos. Em caso de convergência, um limite da sucessão só será limite do conjunto dos têrmos se êste conjunto fôr pròpriamente infinito.

porque a sucessão é, neste caso, pròpriamente infinita [*p.* 13, *l.* 32].

Uma sucessão ilimitada poderá não admitir derivado mas, visto tôda a sucessão convergente ser limitada, podemos afirmar, em conseqüência da proposição precedente, que:

Para a existência do derivado duma sucessão é necessário e suficiente que esta admita uma subsucessão limitada.

Para que uma sucessão limitada (1) *convirja para um limite* $\mathbf{a}$ *é necessário e suficiente que os elementos do derivado sejam justapostos a* $\mathbf{a}$.

Com efeito, se a sucessão (1) converge para o limite $\mathbf{a}$, todos os elementos do derivado são juxtapostos a $\mathbf{a}$, como é fácil reconhecer [*p.* 13, *l.* 3].

Recìprocamente, suponhamos que os elementos do derivado duma sucessão limitada (1) são juxtapostos a um elemento $\mathbf{a}$. Se não fôsse $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}}=0$, existiria um número positivo ε e uma subsucessão (2) da sucessão (1) que verificassem as desigualdades

$$\overline{\mathbf{a}_u\mathbf{a}} > \varepsilon \quad (u=r,\, s,\, \ldots).$$

Por conseguinte nenhuma subsucessão de (2) convergiria para o limite $\mathbf{a}$, e qualquer dos elementos do derivado da sucessão (2) não seria juxtaposto a $\mathbf{a}$ [*p.* 13, *l.* 8].

Observação. — *A hipótese* 2), *p.* 4, *converter-se-ia em teorema se tivéssemos admitido para hipótese o enunciado de* Bolzano-Weierstrass.

Com efeito, supondo que na sucessão (1) é $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i'}}=0$, verifica-se a desigualdade $\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i'}}<1$ para quaisquer valores de i e i' superiores a certo número inteiro $k>0$. A sucessão

$$\mathbf{a}_{k+1},\ \mathbf{a}_{k+2},\ \cdots$$

é, por conseguinte, limitada e o mesmo acontece à sucessão (1) [*p.* 6, *l.* 29]. Por êste motivo, e admitindo agora o enunciado de Bolzano-Weierstrass, podemos afirmar que existe uma subsucessão convergente (2) da sucessão (1) [*p.* 17, *l.* 26]. Seja $\mathbf{a}$ um limite desta sucessão convergente. Por ser

$$\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}} \leqq \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}_u}+\overline{\mathbf{a}_u\mathbf{a}}$$

e porque o segundo membro desta relação tende para zero quando i e u crescem para infinito(1), temos $\lim \overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}} = 0$. A sucessão (1) converge, pois, para o limite $\mathbf{a}$ (2).

7. Algumas proposições sôbre limites. — Da definição de limite duma sucessão de elementos de $\mathbf{P}$ também se conclui, como para o caso dos limites de números, que:

Se uma dada sucessão converge para um limite, qualquer outra sucessão formada de todos ou parte dos têrmos da primeira e dispostos por qualquer ordem, converge ainda para o mesmo limite.

Mais geralmente:

Converge para um limite $\mathbf{a}$ *qualquer sucessão formada de têrmos de sucessões dadas, em número finito, que convergem para o mesmo limite* $\mathbf{a}$.

Devemos acrescentar, nestes enunciados, que um têrmo qualquer de qualquer das sucessões dadas e que figure na sucessão assim construída, pode repetir-se como têrmo desta, mas apenas um número finito de vezes.

Para a demonstração dêste caso mais geral consideremos m sucessões de elementos

$$\mathbf{a}_{h,1}\,,\ \mathbf{a}_{h,2}\,,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{h,i}\,,\ \ldots \qquad (h = 1,\, 2,\, \ldots,\, m)$$

que convirjam para o mesmo limite $\mathbf{a}$. A estas m sucessões correspondem outras tantas de números

$$\overline{\mathbf{a}_{h,1}\,\mathbf{a}}\,,\ \overline{\mathbf{a}_{h,2}\,\mathbf{a}}\,,\ \ldots,\ \overline{\mathbf{a}_{h,i}\,\mathbf{a}}\,,\ \ldots \qquad (h = 1,\, 2,\, \ldots,\, m),$$

cada uma das quais tende para zero. Logo o enunciado é verdadeiro, visto assim ser para o caso de sucessões de números.

Outra maneira de proceder na demonstração consiste em notar que, dadas as condições do enunciado, são juxtapostos a $\mathbf{a}$

(1) Entende-se que i e u crescem para infinito através dos valores $i = 1, 2, \ldots$ e $u = r, s, \ldots$.

(2) Uma vez demonstrado o teorema de Bolzano-Weierstrass sôbre conjuntos de números quaisquer ou de pontos dum espaço de n dimensões odemos seguir precisamente o caminho acima indicado para justificar o oem conhecido teorema de Cauchy sôbre limites de sucessões de números ou de pontos.

todos os elementos do derivado da sucessão construída daquele modo [*p.* 18, *l.* 8], como é fácil reconhecer.

Consideremos agora duas sucessões quaisquer

$$(3) \qquad \begin{matrix} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots \\ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i, \ldots \end{matrix}$$

Se existem os limites $\lim \mathbf{a}_i \parallel \mathbf{a}$ *e* $\lim \mathbf{b}_i \parallel \mathbf{b}$, *temos* $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$.

Porque, da relação

$$|\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} - \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} \,| \lessgtr \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}_{i'} \mathbf{b}}$$

e das condições $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} = 0$ e $\lim \overline{\mathbf{b}_i \mathbf{b}} = 0$, resulta que é

$$\lim \,|\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} - \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} \,| = 0,$$

ou $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$.

Temos, em particular, supondo ainda que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são limites das sucessões convergentes (3), $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$; mais particularmente, para um elemento qualquer $\mathbf{c}$, vem $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{c}}$. Êste resultado pode enunciar-se dizendo que:

A distância entre dois elementos é uma função contínua dos mesmos elementos.

Podemos afirmar, por conseguinte, que, se dois quaisquer dos limites $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}$ de m determinadas sucessões convergentes não são juxtapostos entre si, o mesmo acontece aos têrmos correspondentes destas sucessões, a partir de certa ordem.

Se fôr $\lim \mathbf{a}_i \parallel \lim \mathbf{b}_i$, *será* $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = 0$.

Com efeito, supondo que as sucessões (3) convergem para os limites $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, a igualdade já deduzida $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ dá $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = 0$ no caso de ser $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Nesta condição podemos escrever, em particular, $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$.

Se fôr $\lim \mathbf{a}_i \parallel \mathbf{a}$ *e* $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$, *existirá* $\lim \mathbf{b}_i$ *e teremos* $\lim \mathbf{b}_i \parallel \mathbf{a}$.

Na verdade, por ser $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} = 0$, $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$ e

$$\overline{\mathbf{b}_i \mathbf{a}} \lessgtr \overline{\mathbf{b}_i \mathbf{a}_i} + \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}},$$

temos $\lim \overline{\mathbf{b}_i \mathbf{a}} = 0$.

Dêstes últimos enunciados deduzem-se, por evidência, os seguintes:

Se as sucessões (3) *forem convergentes, será necessário e suficiente para que seja* $lim\, \mathbf{a}_i \parallel lim\, \mathbf{b}_i$ *que se verifique a condição* $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$.

Convergem ou divergem ao mesmo tempo duas sucessões de elementos (3) *tais que seja* $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$; *o derivado duma das sucessões é, então, o derivado da outra.*

Um caso particular desta proposição é a seguinte:

Se os têrmos correspondentes de duas sucessões são juxtapostos entre si, estas convergem ou divergem ao mesmo tempo e o derivado duma das sucessões é o derivado da outra.

Logo, combinando êste enunciado com o da *p.* 13, *l.* 8, podemos dizer que:

A condição $lim\, \mathbf{a}_i \parallel \mathbf{a}$ *continuará verdadeira se substituirmos todos os elementos* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{a}_i$, *ou apenas parte deles, por outros juxtapostos aos primeiros.*

III

LUGAR DUM CONJUNTO. — CONJUNTOS FECHADOS

8. Definições. — Chamemos *lugar* dum subconjunto **A** de **P** ao conjunto dos limites de tôdas as sucessões convergentes formadas com elementos de **A**. O lugar do conjunto **A** será representado pelo símbolo [**A**]. Da definição resulta imediatamente que o lugar de **A** é constituído pelos elementos dêste conjunto, pelos elementos que lhes são juxtapostos e pelos elementos limites do mesmo conjunto, visto considerarmos na definição de [**A**] tôdas as sucessões convergentes de elementos de **A**, quer sejam ou não pròpriamente infinitas.

Dizemos que um conjunto **A** é *fechado* quando qualquer elemento do lugar [**A**] se juxtapõe a um elemento dêsse conjunto. Por outras palavras, um conjunto **A** é fechado quando qualquer sucessão convergente formada com elementos de **A** tende para um elemento dêste mesmo conjunto.

Para nos certificarmos de que um dado conjunto **A** é fechado, basta verificar que as sucessões pròpriamente infinitas, convergentes e formadas com elementos de **A**, caso existam, tendem para elementos dêste conjunto. De facto, cada uma das outras sucessões convergentes formadas com elementos de **A** tende para um dêstes elementos, pois os têrmos duma tal sucessão juxtapõem-se, a partir de certa ordem, a um elemento de **A** [*p*. 15, *l*. 1]. Logo podemos ainda dizer, por definição, que os conjuntos fechados são os que não admitem elementos limites (os finitos por exemplo) e aquêles em que os elementos limites se juxtapõem a elementos do mesmo conjunto.

Dizemos que um conjunto **A** é *totalmente fechado* quando coincide com o respectivo lugar: $\mathbf{A} \mid [\mathbf{A}]$. Um conjunto totalmente fechado é, pois, todo aquêle a que pertencem os limites das sucessões convergentes construídas com os seus próprios elementos.

Para que um conjunto fechado seja totalmente fechado é necessário e suficiente que contenha todos os elementos que são juxtapostos aos seus próprios elementos, como é evidente em virtude destas definições.

O lugar dum conjunto **A** *é um conjunto totalmente fechado.*

Com efeito, demonstremos que um limite $\mathbf{a}'$ duma sucessão convergente

$$\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_i, \ldots$$

de elementos de $[\mathbf{A}]$ pertence a êste conjunto. A cada elemento $\mathbf{a}'_i$ façamos corresponder um elemento $\mathbf{a}_i$ de **A** tal que seja $\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}'_i} < \frac{1}{i}$, o que é possível visto $\mathbf{a}'_i$ ser limite duma sucessão de elementos de **A**. Resulta que é $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}'_i} = 0$ e a sucessão

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

converge para o elemento $\mathbf{a}'$ [*p*. 20, *l*. 28]. Logo o elemento $\mathbf{a}'$ pertence ao lugar $[\mathbf{A}]$ que é, portanto, um conjunto totalmente fechado.

Também podemos dizer que o *lugar dum conjunto* **A** *é o* *menor conjunto totalmente fechado*(1) *a que pertence* **A**. Na verdade, vimos que [**A**] é um conjunto totalmente fechado a que pertence **A**; depois, qualquer outro conjunto que se encontre nestas condições também contém, por definição de conjunto totalmente fechado, os limites de tôdas as sucessões convergentes construídas com elementos de **A**, isto é, contém [**A**].

O lugar dum conjunto limitado também é limitado.

Consideremos, com efeito, um determinado elemento **b** e seja **a**′ um elemento qualquer do lugar [**A**] dum dado conjunto limitado **A**. Para um elemento **a** de **A** tal que se tenha $\overline{a'a} < 1$, vem

$$\overline{a'b} \lesssim \overline{a'a} + \overline{ab} < 1 + \overline{ab}.$$

Ora, esta relação mostra que, sendo limitado o conjunto das distâncias $\overline{ab}$ [*p.* 7, *l.* 19], o mesmo acontece ao conjunto das distâncias $\overline{a'b}$.

Da definição de lugar dum conjunto resulta por evidência que, dados dois conjuntos **A** e **B**, se fôr **A** |> **B** (2) será igualmente [**A**] |> [**B**].

Também já sabemos que, da relação [**A**] | [**B**], resultam as seguintes: [**A**] |> **B** e **A** |< [**B**]; recìprocamente, se estas duas relações se verificarem, teremos [**A**] | [**B**], visto ser então [**A**] |> [**B**] e [**A**] |< [**B**].

---

(1) Por definição, o *menor conjunto*, se existe, duma dada colecção de conjuntos é o que está contido em cada um dos outros da mesma colecção; o *maior conjunto*, se existe, é o conjunto da colecção a que pertencem todos os restantes. Noutros têrmos: o menor conjunto duma colecção de conjuntos é o produto de todos êles, se êste produto existe e se faz parte da colecção; o maior conjunto é a soma de todos, se esta soma é um conjunto da colecção.

(2) Por meio de **A** | **B** indicamos que os conjuntos **A** e **B** são *coincidentes*, isto é, são constituídos pelos mesmos elementos. Generalizamos, dêste modo, uma notação já estabelecida a princípio.

Para indicar que os elementos de **A** são elementos de **B**, mas que estes dois conjuntos não coincidem, escrevemos **A** < **B** (ou **B** > **A**) e dizemos: **A** *é menor que* **B** (ou **B** *é maior que* **A**).

Quando **A** é um subconjunto de **B** escrevemos **A** |< **B** (ou **B** |> **A**) e dizemos: **A** *é o mesmo ou menor que* **B** (ou **B** *é o mesmo ou maior que* **A**). Tem igual significado qualquer das seguintes frases: **B** *contém* **A**, **A** *pertence a* **B**, **A** *está situado em* **B**, etc.

Observação. — É manifesto que todo o subconjunto infinito e fechado **A** dum espaçóide **P** é um outro espaçóide no qual a definição de distância entre os elementos é a mesma que em **P**.

Logo podemos afirmar que o lugar dum conjunto infinito constitui um espaçóide, pois já sabemos que o lugar dum conjunto é necessàriamente fechado.

9. Lugar duma soma e lugar dum produto de conjuntos. — É evidente que *a soma dum número finito de conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado* e que *o lugar da soma dum número finito de parcelas (conjuntos) é a soma dos lugares das parcelas:* se **A**, **B**, ..., **V** são subconjuntos quaisquer de **P**, temos

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}+\ldots+\mathbf{V}] \mid [\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]+\ldots+[\mathbf{V}].$$

A operação por meio da qual formamos o lugar dum conjunto é, pois, distributiva em relação à soma dum número finito de parcelas.

No caso duma infinidade de parcelas apenas se pode afirmar, em geral, que o *lugar da soma contém a soma dos lugares das parcelas*. Mas, se numa infinidade de conjuntos houver um **A** maior do que todos os outros, o lugar da soma será evidentemente o lugar de **A**, quere dizer, ainda será a soma dos lugares das parcelas.

Também se reconhece fàcilmente que *o lugar da soma será a soma dos lugares das parcelas se esta última soma fôr um conjunto fechado.*

Uma soma de conjuntos e a soma dos respectivos lugares são conjuntos que admitem o mesmo lugar.

Com efeito, sejam **S** e **S**$'$ respectivamente a soma de diversos conjuntos dados e a soma dos lugares dêstes conjuntos. Da relação $\mathbf{S} \mid< \mathbf{S}'$ vem $\mathbf{S} \mid< [\mathbf{S}']$. Por outro lado já dissemos que é $[\mathbf{S}] \mid> \mathbf{S}'$. Logo temos $[\mathbf{S}] \mid [\mathbf{S}']$.

Como corolário podemos afirmar que *o lugar duma soma de conjuntos não se altera quando substituímos alguns dêstes conjuntos por outros que admitam os mesmos lugares que os primeiros.*

O lugar da parte comum a diversos conjuntos, ou produto dêstes, quando existe, nem sempre é a parte comum aos lugares dos mesmos conjuntos. É o que sucede: com dois intervalos abertos sem pontos interiores comuns mas com um extremo comum; com o conjunto dos números racionais dum intervalo e o conjunto dos números irracionais do mesmo intervalo; com a infinidade numerada de conjuntos de números que se obtém juntando o número 1 a cada intervalo $\left(0, \frac{1}{i}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, excluindo em todos o número zero.

Todavia, quando numa colecção de conjuntos houver um A menor do que todos os outros, o lugar do produto será o lugar de A, isto é, o produto dos lugares dos factores.

Imediatamente verificamos, como regra geral, que *o lugar do produto está contido no produto dos lugares dos factores.* Na verdade, um limite duma sucessão de elementos da parte comum a diversos conjuntos é elemento comum aos lugares dos mesmos conjuntos.

Pode, em particular, afirmar-se que: *o produto, caso exista, de diversos conjuntos totalmente fechados, em número finito ou infinito, é ainda um conjunto totalmente fechado.* Com efeito, o lugar do produto de diversos conjuntos totalmente fechados está contido no próprio produto que é, por isso, totalmente fechado.

Acêrca da existência do produto duma infinidade de conjuntos desta natureza, registemos a seguinte proposição:

Para que exista o produto duma infinidade de conjuntos totalmente fechados, um dos quais, pelo menos, supomos limitado, é necessário e suficiente que exista o produto de quaisquer dos mesmos conjuntos tomados em número finito.

Esta proposição, que adiante demonstraremos [n.^{os} 43 e 83], é a correspondente extensão dum teorema de Riesz-Sierpinski para os conjuntos que estamos considerando (1).

10. Esferóide situado num espaçóide P. — Chamemos *esferóide* F *de centro num elemento* c *e de raio igual ao número* $\rho > 0$, ao conjunto dos elementos f de P que satisfaçam à condição $\overline{\mathsf{fc}} \lessgtr \rho$.

(1) Veja-se Frechet, *Les Espaces Abstraits*, p. 232.

O diâmetro dum esferóide não excede o dôbro do raio, como é evidente.

Os *elementos exteriores a* **F** são os de **P** — **F**, caso existam, e o seu conjunto chama-se o *exterior de* **F**.

Os elementos de **F** que não são limites de elementos exteriores chamam-se *interiores* e o seu conjunto é o *interior do esferóide* **F**.

Os elementos de **F**, quando existem, que são limites de elementos exteriores chamam-se *elementos extremos de* **F**, e ao seu conjunto damos o nome de *estrema do esferóide* **F**. Como vemos, a estrema de **F** é o produto dos conjuntos **F** e [**P** — **F**].

Diremos que um conjunto é interior, exterior ou extremo em relação a um dado esferóide, conforme pertencer ao interior, ao exterior ou à estrema do mesmo esferóide.

Um esferóide é um conjunto totalmente fechado.

Com efeito, se o elemento **a** é limite duma sucessão convergente de elementos

$$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_i, \ldots$$

do esferóide **F**, as relações

$$\overline{\mathbf{f}_i \mathbf{c}} \leqq \rho \quad (i=1,\, 2,\, \ldots)$$

dão

$$lim \overline{\mathbf{f}_i \mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{c}} \leqq \rho \quad [p.\ 20,\ l.\ 17].$$

Logo o elemento **a** pertence a **F** que é, portanto, um conjunto totalmente fechado.

Por tal motivo um elemento exterior a **F** só é limite de elementos que a partir de certa ordem são exteriores ao mesmo esferóide.

A estrema dum esferóide é um conjunto totalmente fechado.

Na verdade, a estrema **T** dum esferóide **F** é o produto dos conjuntos **F** e [**P** — **F**], e sabemos que um produto de conjuntos totalmente fechados é um conjunto que ainda satisfaz a esta condição.

Logo um elemento interior a **F** só é limite de elementos que a partir de certa ordem são interiores a êste esferóide.

Os elementos $\mathbf{t}$ *da estrema* $\mathbf{T}$ *do esferóide* $\mathbf{F}$ *satisfazem à condição* $\overline{\mathbf{t}\mathbf{c}} = \rho$.

Com efeito, um elemento $\mathbf{t}$ de $\mathbf{T}$ é limite duma sucessão convergente

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

de elementos exteriores a $\mathbf{F}$. Mas, como é

$$\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{c}} > \rho \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

temos

$$lim\, \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{t}\mathbf{c}} \geqq \rho,$$

donde vem $\overline{\mathbf{t}\mathbf{c}} = \rho$ porque $\mathbf{t}$ é um elemento de $\mathbf{F}$.

Daqui resulta que são necessàriamente interiores a $\mathbf{F}$ os elementos $\mathbf{f}$ tais que seja $\overline{\mathbf{f}\mathbf{c}} < \rho$.

Conhecida a definição de esferóide situado num certo espaçóide $\mathbf{P}$, podemos dar as formas seguintes a algumas definições já estabelecidas anteriormente:

Um conjunto é limitado quando todos os seus elementos pertencem a um determinado esferóide.

Uma sucessão de elementos converge para um limite $\mathbf{a}$ *quando a cada esferóide de centro* $\mathbf{a}$ *corresponde uma ordem a partir da qual todos os têrmos da sucessão pertencem ao mesmo esferóide.*

Um elemento $\mathbf{a}$ *é limite duma sucessão de elementos quando qualquer esferóide de centro* $\mathbf{a}$ *contém uma infinidade de têrmos da sucessão.*

Um elemento $\mathbf{a}$ *pertence ao lugar de* $\mathbf{A}$ *quando existe o produto do conjunto* $\mathbf{A}$ *por qualquer esferóide de centro* $\mathbf{a}$.

Um elemento $\mathbf{a}$ *é limite dum conjunto* $\mathbf{A}$ *quando existe e é pròpriamente infinito o produto dêste conjunto por qualquer esferóide de centro* $\mathbf{a}$.

Um elemento é interior a um esferóide $\mathbf{F}$ *quando é centro dum esferóide contido no primeiro.*

Um elemento é extremo dum esferóide **F** *quando qualquer esferóide de centro neste elemento contém elementos de* **F** *e de* **P — F**.

Um elemento é exterior a um esferóide **F** *quando é centro dum esferóide contido em* **P — F**.

As demonstrações por meio das quais provamos que estas definições são equivalentes às que enunciámos mais atrás, não apresentam dificuldade alguma.

CAPITULO II

ESPAÇÓIDES COMPOSTOS

I

COMPOSIÇÃO DE ESPAÇÓIDES

11. Definições. — Consideremos um sistema de n espaçóides quaisquer dispostos numa sucessão

(1) $$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

e enunciemos algumas definições relativas a êste sistema.

Elemento composto é tôda a sucessão de n elementos pertencentes respectivamente aos espaçóides (1). Representemos por a^n o elemento composto

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

isto é, façamos

$$a^n \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Ao número inteiro n damos o nome de *ordem do elemento composto* a^n. Os elementos componentes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ chamam-se *coordenadas do elemento composto;* a_1 é a primeira coordenada de a^n, a_2 a segunda coordenada, etc.

As coordenadas do elemento a^n também se chamam *projecções* *simples* ou *projecções de primeira ordem* do mesmo elemento; $\mathbf{a}_1$ é a primeira projecção simples, $\mathbf{a}_2$ a segunda, etc.

Uma *projecção dupla* ou *projecção de segunda ordem do elemento* $\mathbf{a}^n$ é qualquer elemento composto, de segunda ordem, que admita por coordenadas duas das coordenadas do elemento $\mathbf{a}^n$ dispostas pela ordem em que se encontram neste elemento. Assim, a projecção dupla de $\mathbf{a}^n$ indicada pelos números inteiros r e s $(0 < r < s < n+1)$ é o elemento de segunda ordem $(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s)$ onde a primeira e segunda coordenadas são respectivamente as coordenadas de ordem r e de ordem s de $\mathbf{a}^n$.

Em geral, a *projecção de ordem* k $(k < n)$ *do elemento* $\mathbf{a}^n$ representada pelos k índices

$$r, s, \ldots, u \quad (0 < r < s < \ldots < u < n+1)$$

é o elemento composto de ordem k

$$(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s, \ldots, \mathbf{a}_u)$$

que tem por coordenadas respectivamente a de ordem r, a de ordem s, etc. do elemento $\mathbf{a}^n$. Um elemento composto de ordem n admite $\binom{n}{k}$ projecções de ordem k.

Consideremos agora n subconjuntos

$$(2) \qquad \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$$

dos espaçóides (1) respectivamente. Chamemos *conjunto composto* dos conjuntos (2) (conjuntos componentes), o qual representaremos por

$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n),$$

ao conjunto de todos os elementos compostos de ordem n e de coordenadas pertencentes aos conjuntos (2) respectivamente. O número inteiro n é a *ordem* dêste conjunto composto.

Se os conjuntos (2) forem somas de vários conjuntos, é evidente que o respectivo composto será a soma dos conjuntos que se obtêm *compondo,* de tôdas as maneiras possíveis, cada parcela de A_1, com cada parcela de A_2, etc.

Designemos por P^n, em particular, o conjunto composto dos espaçóides (1):

$$\mathsf{P}^n \mid (\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_n).$$

Um subconjunto de P^n diz-se um *conjunto de ordem* n e será representado por A^n (1). Êste conjunto admite projecções correspondentes às dos seus elementos: as *projecções simples* ou *de primeira ordem de* A^n são os conjuntos das primeiras coordenadas, das segundas coordenadas, etc. dos elementos de A^n; dum modo geral, a *projecção de ordem* k *do conjunto* A^n expressa pelos índices $r, s, \ldots, u$ é o conjunto das projecções dos elementos de A^n expressas pelos mesmos índices. Também dizemos que esta é a *projecção de* A^n *sôbre o espaçóide*

$$\mathsf{P}^k \mid (\mathsf{P}_r, \mathsf{P}_s, \ldots, \mathsf{P}_u)$$

(considerando desde já *espaçado* qualquer conjunto composto de espaçóides [*n.º seguinte*]). Em particular, sabemos o que se entende por *projecção do elemento* a^n *sôbre o espaçóide* P^k.

Chamemos projecção duma dada sucessão de subconjuntos de P^n sôbre o aludido espaçóide P^k, à sucessão das projecções dêstes subconjuntos sôbre o mesmo espaçóide P^k. Conforme fôr $k = 1, 2, \ldots$, assim diremos que essa projecção é simples, dupla, etc.

Temos definido, em particular, o que seja uma determinada projecção duma sucessão de elementos de P^n.

Empregaremos algumas vezes a frase «*correspondentes projecções*» quando nos quisermos referir a projecções (de elementos ou de conjuntos, ou de sucessões de elementos ou de conjuntos, ou de uns e de outros) sôbre um determinado espaçóide P^k, isto é, relativas a um determinado sistema de índices crescentes $r, s, \ldots, u$, positivos mas inferiores a $n+1$.

12. Espaçamento de P^n. — Vejamos agora como *espaçar* o

---

(1) É claro que um conjunto de ordem n não é necessàriamente um conjunto composto.

conjunto P^n, a que daremos, então, o nome de *espaçóide composto de ordem n* (1).

Generalizando a definição de distância entre dois pontos do espaço euclidiano de coordenadas cartesianas rectangulares, chamemos distância entre os elementos

$$a^n \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{e} \quad b^n \mid (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

do conjunto P^n ao número

$$\overline{a^n b^n} = \left(\overline{a_1 b_1}^2 + \overline{a_2 b_2}^2 + \ldots + \overline{a_n b_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (2).}$$

A distância $\overline{a^n b^n}$ não é excedida pela distância entre duas correspondentes projecções de a^n e b^n, quaisquer que estas sejam.

Também é evidente que, se fôr

$$a_1 \parallel b_1, \; a_2 \parallel b_2, \; \ldots, \; a_n \parallel b_n,$$

será $a^n \parallel b^n$ e reciprocamente. Em particular, se fôr $a^n \mid b^n$, será $a^n \parallel b^n$, quere dizer, um elemento de P^n é juxtaposto a si mesmo. Correspondentes projecções de elementos juxtapostos entre si são igualmente juxtapostas uma à outra, como é evidente.

Notemos que, se um dos conjuntos componentes admitir um subconjunto limitado e pròpriamente infinito, o mesmo acontecerá ao respectivo conjunto composto. Assim, se o primeiro conjunto componente P_1 admitir um subconjunto A_1 limitado e pròpriamente infinito, encontrar-se-á nestas mesmas condições, por exemplo, o subconjunto de P^n constituído por todos os elementos

$$(a_1, a'_2, \ldots, a'_n),$$

sendo a_1 qualquer elemento de A_1, e $a'_2, \ldots, a'_n$ determinados elementos dos conjuntos $P_2, \ldots, P_n$ respectivamente. Também serve de exemplo o caso mais geral dum conjunto A^n composto

(1) Preferimos dizer «espaçóide (e conjunto) *de ordem n*», e não «*de n dimensões*», porque esta última expressão tem sido tomada em sentidos inteiramente diferentes do nosso.

(2) Consideramos apenas o valor aritmético de cada raiz quadrada.

de conjuntos limitados, sendo um dêstes, pelo menos, pròpriamente infinito; na verdade, o conjunto $\mathbf{A}^n$ é pròpriamente infinito, como é evidente, e é limitado em virtude da seguinte proposição:

É condição necessária e suficiente para que um conjunto $\mathbf{A}^n$ *seja limitado, que sejam limitadas as suas projecções simples.*

Com efeito, supondo que

$$\mathbf{a}^n \mid (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{b}^n \mid (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$$

são dois elementos quaisquer dum conjunto $\mathbf{A}^n$, as relações

$$\overline{\mathbf{a}_h \mathbf{b}_h} \lessgtr \left(\overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1}^2 + \overline{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2}^2 + \cdots + \overline{\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \lessgtr \overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1} + \overline{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2} + \cdots + \overline{\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$\overline{\mathbf{a}_h \mathbf{b}_h} \lessgtr \overline{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^n} \lessgtr \overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1} + \overline{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2} + \cdots + \overline{\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n}$$

mostram que, se fôr limitado o conjunto $\mathbf{A}^n$, também serão limitadas as projecções simples e reciprocamente. Notemos, ainda, que é limitada qualquer projecção dum conjunto limitado $\mathbf{A}^n$.

As propriedades fundamentais a que deve satisfazer a definição de distância $\overline{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^n}$, decorrem, como vamos verificar, das mesmas propriedades a que submetemos a distância $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ entre elementos de cada conjunto $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ (1).

---

(1) Poderíamos adoptar, nesta teoria, para definição de distância $\overline{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^n}$ uma das expressões

$$\left(\overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1} + \cdots + \overline{\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1} + \cdots + \overline{\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n}$$

bem como outras funções não negativas das distâncias

$$\overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1}, \overline{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2}, \ldots$$

(funções necessàriamente contínuas e nulas com estas distâncias). Mas também não haveria vantagem em nos afastarmos da generalização mais natural da definição de distância geométrica entre dois pontos do espaço euclidiano de coordenadas cartesianas rectangulares.

Depois, a expressão que preferimos para distância $\overline{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^n}$ permite-nos

1) *Dados os elementos*

$$a^n \,|\, (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ b^n \,|\, (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ e } c^n \,|\, (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

verifica-se a relação

$$\overline{a^n c^n} \leqq \overline{a^n b^n} + \overline{b^n c^n}.$$

Para demonstrar que assim é, basta atender às relações

$$\overline{a^n c^n} = \left(\overline{a_1 c_1}^2 + \ldots + \overline{a_n c_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left[\left(\overline{a_1 b_1} + \overline{b_1 c_1}\right)^2 + \ldots + \left(\overline{a_n b_n} + \overline{b_n c_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\left[\left(\overline{a_1 b_1} + \overline{b_1 c_1}\right)^2 + \ldots + \left(\overline{a_n b_n} + \overline{b_n c_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\overline{a_1 b_1}^2 + \ldots + \overline{a_n b_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\overline{b_1 c_1}^2 + \ldots + \overline{b_n c_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \overline{a^n b^n} + \overline{b^n c^n} \text{ (1)}.$$

---

demonstrar algumas proposições sôbre conjuntos de pontos dum hiperespaço e sôbre funções dêstes pontos quando, nos assuntos que adiante desenvolveremos, cada conjunto componente fôr constituído por números reais.

(1) Façamos

$$\overline{a_1 b_1} = \alpha_1,\ \overline{a_2 b_2} = \alpha_2,\ \ldots,\ \overline{a_n b_n} = \alpha_n,\ \overline{b_1 c_1} = \beta_1,\ \overline{b_2 c_2} = \beta_2,\ \ldots,\ \overline{b_n c_n} = \beta_n$$

e demonstremos que é

$$[(\alpha_1 + \beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)^2]^{\frac{1}{2}} \leqq (\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n)^{\frac{1}{2}} + (\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n)^{\frac{1}{2}}.$$

A presente relação deduz-se da seguinte:

$$(\alpha_1 + \beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)^2 \leqq (\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n) + (\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n) +$$

$$+ 2\,(\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n)^{\frac{1}{2}} (\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Se desenvolvermos os quadrados que figuram no primeiro membro da última relação, imediatamente reconheceremos que ela é, por sua vez, uma conseqüência desta outra:

$$\alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n \leqq (\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n)^{\frac{1}{2}} (\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta relação depende da seguinte

$$(\alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n)^2 \leqq (\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n)(\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n),$$

As proposições que enunciámos no n.º 2, mas agora relativas ao conjunto P^n, deduzem-se da relação fundamental que acabámos de verificar.

2) *A qualquer sucessão de elementos de* P^n,

$$\mathbf{a}^n{}_1\,,\ \mathbf{a}^n{}_2\,,\ \ldots,\ \mathbf{a}^n{}_i\,,\ \ldots,$$

onde seja $lim\,\overline{\mathbf{a}^n{}_i\,\mathbf{a}^n{}_{i'}} = 0$, *corresponde um elemento* $\mathbf{a}^n$ *tal que temos* $lim\,\overline{\mathbf{a}^n{}_i\,\mathbf{a}^n} = 0$.

Com efeito, façamos

$$\mathbf{a}^n{}_i \mid (\mathbf{a}_{1,i}\,,\ \mathbf{a}_{2,i}\,,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{n,i}) \quad (i=1,\,2,\,\ldots).$$

Da condição

$$lim\,\overline{\mathbf{a}^n{}_i\,\mathbf{a}^n{}_{i'}} = lim\left(\overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_{1,i'}}^2 + \ldots + \overline{\mathbf{a}_{n,i}\,\mathbf{a}_{n,i'}}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

resultam as seguintes

$$lim\,\overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_{1,i'}} = 0\,,\ \ldots,\ lim\,\overline{\mathbf{a}_{n,i}\,\mathbf{a}_{n,i'}} = 0\,.$$

Existem, portanto, elementos

$$\mathbf{a}_1\,,\ \mathbf{a}_2\,,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n\,,$$

respectivamente de

$$\mathsf{P}_1\,,\ \mathsf{P}_2\,,\ \ldots,\ \mathsf{P}_n\,,$$

tais que seja

$$lim\,\overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_1} = 0\,,\ \ldots,\ lim\,\overline{\mathbf{a}_{n,i}\,\mathbf{a}_n} = 0\,,$$

---

ou

$$(\alpha^2{}_1 + \ldots + \alpha^2{}_n)\,(\beta^2{}_1 + \ldots + \beta^2{}_n) - (\alpha_1\,\beta_1 + \ldots + \alpha_n\,\beta_n)^2 \geq 0\,,$$

e que é verdadeira como mostra a identidade de Lagrange:

$$\begin{aligned}(\alpha^2{}_1 + \alpha^2{}_2 + \ldots + \alpha^2{}_n)\,(\beta^2{}_1 + \beta^2{}_2 + \ldots + \beta^2{}_n) - (\alpha_1\,\beta_1 + \alpha_2\,\beta_2 + \ldots + \alpha_n\,\beta_n)^2 =\\ = (\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1)^2 + (\alpha_1\,\beta_3 - \alpha_3\,\beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_1\,\beta_n - \alpha_n\,\beta_1)^2 +\\ + (\alpha_2\,\beta_3 - \alpha_3\,\beta_2)^2 + \ldots + (\alpha_2\,\beta_n - \alpha_n\,\beta_2)^2 +\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ + (\alpha_{n-1}\,\beta_n - \alpha_n\,\beta_{n-1})^2.\end{aligned}$$

e, se fizermos

$$\mathbf{a}^n \mid (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n),$$

virá

$$\lim \overline{\mathbf{a}^n{}_i \mathbf{a}^n} = \lim \left(\overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_1}^2 + \ldots + \overline{\mathbf{a}_{n,i}\,\mathbf{a}_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 .$$

3) *É possível dividir qualquer conjunto limitado* $\mathbf{A}^n$ *num número finito de conjuntos de diâmetros inferiores a todo o número positivo prèviamente dado.*

Para a demonstração dêste enunciado já vimos que são limitadas as projecções simples

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$$

dum dado conjunto limitado $\mathbf{A}^n$. Podemos, portanto, dividir cada conjunto projecção

$$\mathbf{A}_h \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

num número finito de conjuntos

$$\mathbf{A}_{h,i} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

de diâmetros menores do que $n^{-\frac{1}{2}}\delta$, sendo δ é um número positivo prèviamente dado.

A estas divisões dos conjuntos $\mathbf{A}_h$ corresponde a seguinte divisão do conjunto considerado $\mathbf{A}^n$ num número finito de conjuntos parciais: cada conjunto parcial é constituído por todos os elementos de $\mathbf{A}^n$ de coordenadas pertencentes respectivamente a determinados dos conjuntos

$$\mathbf{A}_{1,i}, \mathbf{A}_{2,i'}, \ldots .$$

Os conjuntos parciais obtidos dêste modo têm os diâmetros menores do que δ porque, se

$$\mathbf{a}^n \mid (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{b}^n \mid (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$$

são dois elementos dum mesmo conjunto parcial, temos

$$\overline{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^n} = \left(\overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1}^2 + \overline{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2}^2 + \ldots + \overline{\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(n\, n^{-1} \delta^2\right)^{\frac{1}{2}} = \delta .$$

13. Espaçóides compostos de origem P. — Os resultados precedentemente obtidos permitem-nos *espaçar*, por indução, uma infinidade de conjuntos que se formam por meio da *composição de conjuntos* aplicada sucessivamente a partir dum determinado componente **P**.

Na verdade, se, nas considerações que fizemos ùltimamente, imaginarmos, em primeiro lugar, que é

$$\mathbf{P}_1 \mid \mathbf{P}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{P}_n \mid \mathbf{P},$$

teremos espaçado o conjunto de tôdas as sucessões de n elementos dum dado espaçóide **P**. Obteremos assim os espaçóides $\mathbf{P}^n$ mais simples $(n = 2, 3, \ldots)$, de *origem* no conjunto **P**, a que podemos chamar *espaçóides compostos de primeira espécie em relação à origem* **P** ou, mais simplesmente, espaçóides $\mathbf{P}'$.

Se supusermos agora que os componentes

$$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$$

são conjuntos $\mathbf{P}'$ ou conjuntos **P** e $\mathbf{P}'$, obteremos novos conjuntos $\mathbf{P}^n$, a que chamamos *espaçóides compostos de segunda ordem em relação à origem* **P**, ou espaçóides $\mathbf{P}''$.

Em geral, damos o nome de espaçóides $\mathbf{P}^{(i)}$, ou *espaçóides* $\mathbf{P}^n$ *de espécie* i *em relação à origem* **P**, aos conjuntos espaçados compostos de ordem n $(n = 2, 3, \ldots)$ que não são das espécies inferiores a i, mas que têm por componentes conjuntos destas espécies (1). Claro está que, entre os componentes dum espaçóide composto de espécie i, deve figurar necessàriamente um, pelo menos, que seja de espécie $i-1$; de outro modo êsse espaçóide composto seria de espécie inferior a i.

Chamemos *espaçóides numéricos compostos* aos conjuntos espaçados que se constroem da maneira indicada, mas tomando para origem, em particular, o conjunto de todos os números reais e imaginários. Tais espaçóides são classificados em espécies, como acima dissemos.

É sabido que um espaçóide **P** admite diversos outros espa-

---

(1) O espaçóide **P** tomado para origem é considerado de espécie inferior à primeira.

çóides por subconjuntos: são os conjuntos infinitos e fechados contidos em P. A qualquer espaçóide contido num espaçóide numérico também damos esta mesma designação. Dêste modo, o conjunto dos números reais, o conjunto dos números dum intervalo fechado, o conjunto dos pontos duma circunferência, o conjunto dos números imaginários de afixos dum dado círculo, o conjunto dos pontos do espaço ordinário de n dimensões e o conjunto dos pontos duma recta ou duma esfera dêste espaço, são mais exemplos de espaçóides numéricos. Outro tanto podemos dizer dos conjuntos compostos dêstes, de primeira espécie ou de espécie superior à primeira.

Sob esta designação de espaçóides numéricos ainda incluiremos outros conjuntos, que mais adiante serão estudados, tais como: o conjunto dos conjuntos limitados de pontos do espaço ordinário de n dimensões, o conjunto dos conjuntos limitados de conjuntos limitados de pontos do espaço ordinário de n dimensões, etc. Duma maneira geral, *espaçaremos* o conjunto dos conjuntos limitados de elementos dum espaçóide dado, qualquer que êste seja.

14. Limite duma sucessão de elementos de P^n. — Demonstrámos no n.º 12 que a definição adoptada para distância entre os elementos dum dado conjunto composto de espaçóides satisfaz aos requisitos indicados no n.º 1. *Espaçado* assim o conjunto composto P^n, podemos afirmar que têm lugar, a respeito dêste conjunto, tôdas as definições e propriedades já estabelecidas, duma maneira geral, no primeiro capítulo.

Importa conhecer, a-propósito dos limites de elementos de P^n, mais as seguintes proposições:

Se a sucessão

$$(3) \qquad \mathrm{a}^n_1,\ \mathrm{a}^n_2,\ \ldots,\ \mathrm{a}^n_i,\ \ldots$$

de elementos de P^n *converge para o limite* a^n, *as projecções simples desta sucessão* [*p.* 30, *l.* 22] *convergem para as correspondentes projecções de* a^n, *e recìprocamente.*

Com efeito, façamos

$$\mathrm{a}^n \mid (\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2,\ \ldots,\ \mathrm{a}_n) \quad \text{e} \quad \mathrm{a}^n_i \mid (\mathrm{a}_{1,i},\ \mathrm{a}_{2,i},\ \ldots,\ \mathrm{a}_{n,i}) \quad (i=1,2,\ldots).$$

Em virtude das relações

$$\overline{\mathbf{a}_{h,i}\,\mathbf{a}_h} < \overline{\mathbf{a}^n_i\,\mathbf{a}^n} < \overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_1} + \overline{\mathbf{a}_{2,i}\,\mathbf{a}_2} + \dots + \overline{\mathbf{a}_{n,i}\,\mathbf{a}_n}$$

$$(h = 1, 2, \dots, n) \quad [p.\ 32,\ l.\ 12]$$

resulta que, se fôr $lim\,\overline{\mathbf{a}^n_i\,\mathbf{a}^n} = 0$, será

$$lim\,\overline{\mathbf{a}_{h,i}\,\mathbf{a}_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

e recìprocamente.

Dêste resultado concluímos a seguinte proposição mais geral:

Para a convergência da sucessão (3) *é necessário e suficiente que as suas projecções sejam convergentes; os limites das projecções são as correspondentes projecções dos limites da mesma sucessão* (3).

A segunda parte desta proposição pode exprimir-se dizendo que *as projecções dum elemento composto são funções contínuas dêsse elemento.*

Qualquer elemento limite duma projecção dum conjunto limitado $\mathbf{A}^n$ *é a correspondente projecção dum elemento limite de* $\mathbf{A}^n$.

Efectivamente, qualquer elemento limite $\mathbf{a}^k$ duma dada projecção $\mathbf{A}^k$ de $\mathbf{A}^n$ é limite duma sucessão convergente, pròpriamente infinita, de elementos de $\mathbf{A}^k$,

$$(4) \qquad \mathbf{a}^k_1,\ \mathbf{a}^k_2,\ \dots,\ \mathbf{a}^k_i,\ \dots,$$

e é evidente que uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}^n$,

$$\mathbf{a}^n_1,\ \mathbf{a}^n_2,\ \dots,\ \mathbf{a}^n_i,\ \dots,$$

de que aquela seja projecção, também é pròpriamente infinita. Esta sucessão é limitada, visto supormos $\mathbf{A}^n$ limitado, e admite, por isso, uma subsucessão convergente, pròpriamente infinita,

$$(5) \qquad \mathbf{a}^n_r,\ \mathbf{a}^n_s,\ \dots,\ \mathbf{a}^n_u,\ \dots \quad [p.\ 17,\ l.\ 26].$$

A correspondente projecção desta última é a subsucessão

$$\mathbf{a}^k_r,\ \mathbf{a}^k_s,\ \dots,\ \mathbf{a}^k_u,\ \dots$$

da sucessão (4). Ora, o enunciado precedente diz-nos que o limite $\mathbf{a}^k$ desta sucessão [*p.* 19, *l.* 7] é a correspondente projecção dum limite da sucessão (5), ou seja dum elemento limite de $\mathbf{A}^n$.

15. Projecções dum esferóide situado em $\mathbf{P}^n$. — *As projecções dum esferóide situado num espaçóide composto são novos esferóides do mesmo raio e de centros nas correspondentes projecções do centro do esferóide dado.*

Consideremos uma das projecções do conjunto $\mathbf{P}^n$, por exemplo a projecção

$$\mathbf{P}^k \mid (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k).$$

Seja $\mathbf{F}^n$ o esferóide de $\mathbf{P}^n$ de centro no elemento

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$$

e de raio ρ. Seja ainda $\mathbf{F}^k$ o esferóide de $\mathbf{P}^k$ de centro

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k)$$

e do mesmo raio ρ, e provemos que $\mathbf{F}^k$ é a projecção de $\mathbf{F}^n$ sôbre o espaçóide $\mathbf{P}^k$.

A projecção

$$\mathbf{f}^k \mid (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k)$$

dum elemento

$$\mathbf{f}^n \mid (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$$

de $\mathbf{F}^n$ é um elemento de $\mathbf{F}^k$, porque da condição

$$\overline{\mathbf{f}_1\mathbf{c}_1}^2 + \overline{\mathbf{f}_2\mathbf{c}_2}^2 + \ldots + \overline{\mathbf{f}_n\mathbf{c}_n}^2 \lesseqgtr \rho^2$$

resulta

$$\overline{\mathbf{f}_1\mathbf{c}_1}^2 + \overline{\mathbf{f}_2\mathbf{c}_2}^2 + \ldots + \overline{\mathbf{f}_k\mathbf{c}_k}^2 \lesseqgtr \rho^2.$$

Reciprocamente, um elemento

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k)$$

do F^k satisfaz à condição

$$\overline{\mathsf{f}_1\,\mathsf{c}_1}^2 + \cdots + \overline{\mathsf{f}_k\,\mathsf{c}_k}^2 + \overline{\mathsf{c}_{k+1}\,\mathsf{c}_{k+1}}^2 + \cdots + \overline{\mathsf{c}_n\,\mathsf{c}_n}^2 < \rho^2$$

e é, por isso, projecção do elemento

$$(\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_k, \mathsf{c}_{k+1}, \ldots, \mathsf{c}_n)$$

do esferóide F^n. Logo F^k é a projecção de F^n.

A projecção do interior de F^n *está contida no interior de* F^k; *a projecção da estrema de* F^n *contém a estrema de* F^k.

Com efeito, um elemento f^n interior a F^n é centro dum esferóide F'^n contido em F^n, e a projecção de F'^n é, como vimos, um esferóide contido em F^k e de centro na projecção f^k de f^n. Logo f^k é interior a F^k, e o mesmo se diz das projecções de todos os elementos interiores a F^n.

Daqui concluímos que um dado elemento da estrema de F^k só é projecção de elementos da estrema de F^n (todos juxtapostos entre si, evidentemente), quere dizer, a projecção da estrema de F^n contém a estrema de F^k.

II

A-PROPÓSITO DO LUGAR DUM CONJUNTO A^n

16. Lugares das projecções dum conjunto A^n. Lugar dum conjunto composto. — Consideremos um espaçóide composto de ordem n, seja A^n um dos seus subconjuntos e demonstremos as seguintes proposições:

Correspondentes projecções dos conjuntos A^n *e* $[\mathsf{A}^n]$ *admitem os mesmos lugares.*

Com efeito, seja A^k uma determinada projecção do conjunto A^n, e B^k a projecção (1) do respectivo lugar $[\mathsf{A}^n]$. Um elemento

(1) Subentende-se que as aludidas projecções são correspondentes umas das outras [*p.* 30, *l.* 24].

qualquer $\mathbf{b}^k$ de $\mathbf{B}^k$ é a projecção dum limite duma sucessão convergente de elementos de $\mathbf{A}^n$ e, portanto, limite da projecção da mesma sucessão [*p.* 38, *l.* 9]. Logo o elemento $\mathbf{b}^k$ (que é limite duma sucessão de elementos de $\mathbf{A}^k$) pertence ao lugar $[\mathbf{A}^k]$.

Temos assim demonstrado que é $[\mathbf{A}^k] \mid > \mathbf{B}^k$, visto $\mathbf{b}^k$ representar um elemento qualquer de $\mathbf{B}^k$. Por outro lado também temos a relação $\mathbf{A}^k \mid < [\mathbf{B}^k]$, por ser $\mathbf{A}^k \mid < \mathbf{B}^k$. Daqui resulta $[\mathbf{A}^k] \mid [\mathbf{B}^k]$ [*p.* 23, *l.* 19].

As projecções dum conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}^n$ *são ainda conjuntos fechados.*

Consideremos uma determinada projecção $\mathbf{A}^k$ dum conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}^n$. Qualquer elemento limite $\mathbf{a}^k$ de $\mathbf{A}^k$ é projecção dum elemento limite $\mathbf{a}^n$ de $\mathbf{A}^n$, como já demonstrámos [*p.* 38, *l.* 14]. Mas, por definição de conjunto fechado, $\mathbf{a}^n$ juxtapõe-se a um elemento de $\mathbf{A}^n$, donde concluímos que $\mathbf{a}^k$ juxtapõe-se a um elemento de $\mathbf{A}^k$ [*p.* 31, *l.* 15]. Logo o conjunto $\mathbf{A}^k$ é fechado [*p.* 22, *l.* 10].

Notemos que, *se o conjunto limitado* $\mathbf{A}^n$ *fôr totalmente fechado, as respectivas projecções também serão totalmente fechadas,* como fàcilmente se reconhece [*p.* 22, *l.* 19], pois já sabemos que estas projecções são conjuntos fechados.

Os lugares das projecções dum conjunto limitado $\mathbf{A}^n$ *são as correspondentes projecções do lugar de* $\mathbf{A}^n$.

Na verdade, se $\mathbf{A}^k$ e $\mathbf{B}^k$ são correspondentes projecções de $\mathbf{A}^n$ e $[\mathbf{A}^n]$, temos $[\mathbf{A}^k] \mid [\mathbf{B}^k]$ como já demonstrámos; mas $[\mathbf{A}^n]$ é um conjunto limitado [*p.* 23, *l.* 7] e totalmente fechado, donde resulta que $\mathbf{B}^k$ também é totalmente fechado em virtude do que acima dissemos. Logo temos $[\mathbf{A}^k] \mid \mathbf{B}^k$.

Correspondentes projecções dos conjuntos $\mathbf{A}^n$ *e* $[\mathbf{A}^n]$ *são limitadas ao mesmo tempo.*

Êste enunciado resulta imèdiatamente da relação já justificada $[\mathbf{A}^k] \mid [\mathbf{B}^k]$, porque o lugar dum conjunto limitado também é limitado.

O recíproco do segundo enunciado não é sempre verdadeiro, quere dizer, um conjunto limitado que admita conjuntos fechados por projecções pode não ser um conjunto fechado. Podemos dizer, no entanto, que:

Qualquer conjunto $\mathbf{A}^n$ *composto de conjuntos fechados também é um conjunto fechado.*

Com efeito, seja $\mathbf{A}^n$ um conjunto composto de conjuntos fechados

$$(1) \qquad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n,$$

limitados ou não. Um limite $\mathbf{a}^n$ duma sucessão convergente de elementos de $\mathbf{A}^n$ tem por coordenadas limites de sucessões de elementos dos conjuntos (1) respectivamente. Logo $\mathbf{a}^n$ tem por coordenadas elementos juxtapostos a elementos daqueles conjuntos e é, por isso, elemento juxtaposto a um elemento de $\mathbf{A}^n$. O conjunto $\mathbf{A}^n$ é, pois, fechado.

De maneira análoga se demonstra que: *todo o conjunto* $\mathbf{A}^n$ *composto de conjuntos totalmente fechados é ainda totalmente fechado.*

O lugar dum conjunto composto é o conjunto composto dos lugares dos conjuntos componentes.

Sejam

$$\mathbf{A}^n \mid (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^n \mid ([\mathbf{A}_1], [\mathbf{A}_2], \ldots, [\mathbf{A}_n]).$$

É evidente a relação $\mathbf{A}^n \mid< \mathbf{B}^n$, donde vem $[\mathbf{A}^n] \mid< \mathbf{B}^n$, visto $\mathbf{B}^n$ ser um conjunto totalmente fechado, como acima dissemos. Além disso também é verdadeira a relação $[\mathbf{A}^n] \mid> \mathbf{B}^n$, porque um elemento de $\mathbf{B}^n$ admite por coordenadas limites de sucessões de elementos dos conjuntos (1) respectivamente e é, por tal motivo, limite duma sucessão de elementos do conjunto composto $\mathbf{A}^n$. As duas relações precedentes mostram que é $[\mathbf{A}^n] \mid \mathbf{B}^n$, como pretendíamos demonstrar.

17. Lugar das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto de segunda ordem. — Consideremos um espaçóide composto de segunda ordem

$$\mathbf{P}^2 \mid (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2).$$

Suponhamos que é $\mathbf{P}_1 \mid \mathbf{P}_2$ ou, mais geralmente, que um dos espaçóides componentes é um subconjunto do outro. Tomemos um subconjunto qualquer $\mathbf{A}^2$ de $\mathbf{P}^2$ e demonstremos as seguintes proposições:

O conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento de $\mathbf{A}^2$ *e o conjunto análogo relativo a* $[\mathbf{A}^2]$ *admitem o mesmo lugar.*

Representemos por D o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento de $\mathbf{A}^2$ e por D_1 o conjunto obtido da mesma forma a partir de $[\mathbf{A}^2]$. Justifiquemos primeiro a relação $[D] \mid > D_1$, e para isso mostremos que a distância $\overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}$ entre as coordenadas dum elemento $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ de $[\mathbf{A}^2]$ pertence ao lugar $[D]$. Êste elemento é limite duma sucessão convergente de elementos

$$(\mathbf{a}_{1,1}, \mathbf{a}_{2,1}), (\mathbf{a}_{1,2}, \mathbf{a}_{2,2}), \ldots, (\mathbf{a}_{1,i}, \mathbf{a}_{2,i}), \ldots$$

pertencentes a $\mathbf{A}^2$. Mas, por ser $lim\, \mathbf{a}_{1,i} \parallel \mathbf{a}_1$ e $lim\, \mathbf{a}_{2,i} \parallel \mathbf{a}_2$ [*p.* 37, *l.* 29], temos $\overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} = lim\, \overline{\mathbf{a}_{1,i} \mathbf{a}_{2,i}}$ [*p.* 20, *l.* 12], isto é, a distância $\overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}$ pertence ao lugar $[D]$, e assim estabelecemos a relação $[D] \mid > D_1$.

As duas relações $[D] \mid > D_1$ e $D \mid < [D_1]$, a última das quais resulta de $D \mid < D_1$, mostram que é $[D] \mid [D_1]$.

É fechado o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto fechado $\mathbf{A}^2$, *supondo limitada uma das suas projecções.*

Seja D o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto fechado $\mathbf{A}^2$, no qual supomos limitada uma das projecções. Para considerar um limite d duma sucessão convergente de elementos de D, construa-se uma sucessão de elementos do conjunto $\mathbf{A}^2$,

$$(2) \qquad (\mathbf{a}_{1,1}, \mathbf{a}_{2,1}), (\mathbf{a}_{1,2}, \mathbf{a}_{2,2}), \ldots, (\mathbf{a}_{1,i}, \mathbf{a}_{2,i}), \ldots,$$

determinada de fórma que exista $lim\, \overline{\mathbf{a}_{1,i} \mathbf{a}_{2,i}} = d$. Supondo limitada a primeira projecção de $\mathbf{A}^2$, por exemplo, também é limitado o conjunto das primeiras coordenadas dos têrmos de (2), assim como o conjunto das segundas coordenadas em virtude da relação

$$\overline{\mathbf{a}_{2,i}\,\mathbf{a}_{2,i'}} < \overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_{2,i}} + \overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_{1,i'}} + \overline{\mathbf{a}_{1,i'}\,\mathbf{a}_{2,i'}}$$

e da condição de existir $lim\,\overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_{2,i}}$. Logo a sucessão (2) é limitada [*p.* 32, *l.* 4], e, por êste motivo, admite uma subsucessão convergente [*p.* 17, *l.* 26], que representamos por

$$(\mathbf{a}_{1,r}\,,\ \mathbf{a}_{2,r})\,,\ (\mathbf{a}_{1,s}\,,\ \mathbf{a}_{2,s})\,,\ \ldots,\ (\mathbf{a}_{1,u}\,,\ \mathbf{a}_{2,u})\,,\ \ldots.$$

Seja $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)$ um limite desta sucessão escolhido entre os elementos do conjunto fechado A^2. Temos

$$d = lim\,\overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_{2,i}} = lim\,\overline{\mathbf{a}_{1,u}\,\mathbf{a}_{2,u}} = \overline{\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2} \quad [p.\ 37,\ l.\ 29],$$

donde concluímos que o número d pertence a D. Êste conjunto é, por conseguinte, fechado.

O conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento de A^2 *admite por lugar o conjunto análogo relativo a* $[\mathsf{A}^2]$, *supondo limitada uma das projecções de* A^2.

Com efeito, usando as mesmas notações que anteriormente, o primeiro enunciado dêste *n.º* diz que é $[D] \mid [D_1]$ e o segundo diz que D_1 é um conjunto fechado [*p.* 41, *l.* 30] (1). Logo temos $[D] \mid D_1$ como desejávamos provar.

18. Lugar das distâncias entre cada elemento dum conjunto A e cada elemento dum conjunto B. — Sejam **A** e **B** dois subconjuntos quaisquer dum mesmo espaçóide **P**. Como consequências dos últimos enunciados temos mais os seguintes que passamos a demonstrar:

O conjunto das distâncias entre cada elemento de **A** *e cada elemento de* **B** *e o conjunto análogo relativo a* [**A**] *e* [**B**] *admitem o mesmo lugar.*

---

(1) Tratando-se de conjuntos de números ou de pontos do espaço de n dimensões, um conjunto fechado pode considerar-se totalmente fechado.

O conjunto das distâncias entre cada elemento de **A** e cada elemento de **B** é o conjunto D já definido e relativo ao conjunto composto (**A**, **B**). O conjunto obtido da mesma maneira a partir de [**A**] e de [**B**] é o conjunto D_1 também já definido e relativo ao mesmo conjunto composto [*p.* 42, *l.* 17]. Temos, então, $[D] \mid [D_1]$, como demonstrámos mais atrás [*p.* 43, *l.* 5].

Se um dos conjuntos **A** *ou* **B** *fôr limitado e se ambos forem fechados, também será fechado o conjunto das distâncias entre cada elemento de* **A** *e cada elemento de* **B**.

Com efeito, neste caso o conjunto (**A**, **B**) é fechado [*p.* 42, *l.* 3], e o mesmo acontece ao conjunto D das distâncias entre cada elemento de **A** e cada elemento de **B** [*p.* 43, *l.* 22].

O conjunto das distâncias entre cada elemento de **A** *e cada elemento de* **B** *admite por lugar o conjunto análogo relativo a* [**A**] *e* [**B**], *supondo limitado um dos conjuntos* **A** *ou* **B**.

Efectivamente, se fôr limitado um dos conjuntos **A** ou **B**, teremos $[D] \mid D_1$ [*p.* 44, *l.* 13].

19. Algumas aplicações. — Admitindo agora que é **A** | **B**, das últimas proposições resultam imediatamente os seguintes casos particulares:

O conjunto das distâncias entre os elementos de **A** *e o conjunto análogo relativo a* [**A**] *admitem o mesmo lugar.*

É fechado o conjunto das distâncias entre os elementos dum conjunto limitado e fechado **A**.

O conjunto das distâncias entre os elementos de **A** *admite por lugar o conjunto análogo relativo a* [**A**], *supondo limitado o conjunto* **A**.

Esta proposição mostra que:

O diâmetro dum conjunto limitado é o diâmetro do respectivo lugar e representa a distância entre dois elementos dêste lugar convenientemente determinados.

Na verdade, podemos dizer que o limite superior dum conjunto de números reais, limitado superiormente, é o maior número do lugar dêsse conjunto (1); logo, designando por D o conjunto das distâncias entre os elementos de **A** e por D_1 o conjunto das distâncias entre os elementos de [**A**], o diâmetro de **A** é o limite superior de D, ou o limite superior de [D] | D_1, ou o diâmetro de [**A**], ou a maior distância entre dois elementos dêste lugar, porque D_1 é um conjunto fechado.

O diâmetro dum conjunto limitado e fechado é a distância entre dois dos seus elementos convenientemente determinados.

Demonstremos finalmente, como aplicação do penúltimo enunciado, que:

O diâmetro da soma dum número finito de conjuntos limitados é o diâmetro da soma de dois deles convenientemente determinados.

Com efeito, consideremos a soma

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\ldots+\mathbf{V}$$

dum número finito de conjuntos limitados

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{V}.$$

O diâmetro desta soma é a distância $\overline{\mathbf{ab}}$ entre dois elementos **a** e **b** convenientemente determinados no lugar

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}+\ldots+\mathbf{V}].$$

Mas, devido à relação

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}+\ldots+\mathbf{V}] \mid [\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]+\ldots+[\mathbf{V}],$$

os elementos **a** e **b** pertencem à soma de dois dos lugares

$$[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], \ldots, [\mathbf{V}];$$

(1) Da mesma forma podemos definir o limite inferior dum conjunto de números reais, limitado inferiormente, como sendo o menor número do lugar dêsse conjunto.

suponhamos que são $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$. O diâmetro da soma $[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]$ é precisamente $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$, visto não exceder o diâmetro de

$$[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]+\ldots+[\mathbf{V}].$$

Logo o diâmetro da soma considerada é o de $[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]$ ou de $[\mathbf{A}+\mathbf{B}]$, que é o diâmetro de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Se a soma duma infinidade de conjuntos fôr limitada e se a soma dos respectivos lugares fôr fechada, o diâmetro daquela soma será o diâmetro da soma de dois dêsses conjuntos convenientemente determinados.

Para a demonstração podemos seguir o mesmo caminho que ùltimamente, não esquecendo que o lugar da soma duma infinidade de conjuntos será a soma dos respectivos lugares se esta última soma fôr um conjunto fechado.

Observação. — Consideremos um conjunto $\mathbf{A}^n$ de ordem n, um conjunto $\mathbf{A}^2$ de segunda ordem e dois conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ pertencentes a um mesmo espaçóide. Consideremos ainda uma segunda colecção de conjuntos assim constituída: uma projecção qualquer de $\mathbf{A}^n$, o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento de $\mathbf{A}^2$, o das distâncias entre cada elemento de $\mathbf{A}$ e cada elemento de $\mathbf{B}$, o das distâncias entre os elementos de $\mathbf{A}$ e o das distâncias reduzidas entre $\mathbf{B}$ e cada elemento $\mathbf{A}$ [*n.º* 20]. As três primeiras proposições que enunciámos em cada *n.º* do presente parágrafo, assim como as do *n.º* 24, resumem-se da seguinte maneira (particularizando, como vamos ver, a 2.ª e a 3.ª de cada *n.º* 17, 18 e 24):

Os conjuntos da segunda colecção e os que se obtêm de igual modo a partir dos lugares dos conjuntos da primeira admitem os mesmos lugares respectivamente.

Se os conjuntos da primeira colecção forem limitados e fechados, os da segunda serão fechados.

Se os conjuntos da primeira colecção forem limitados, a operação por meio da qual formamos o lugar dum conjunto será permutável com cada uma das operações por meio das quais *formamos os conjuntos da segunda colecção a partir dos da primeira.*

Emfim, mais tarde ver-se-á [*cap.* VIII] que estes resultados podem considerar-se aplicações de teoremas gerais sôbre funções contínuas que então enunciaremos.

(Continua).

LUÍS BEDA NETO.

Contribuição para o estudo de influências lunares sôbre fenómenos geofísicos

Animado dos bons desejos de contribuir, na medida das nossas possibilidades, para o estudo das influências lunares, pensámos, após a publicação do nosso trabalho, — *Influências lunares sôbre o magnetismo terrestre* —, na *Revista da Faculdade de Ciências* (vol. II — n.º 3 de 1932), prosseguir na mesma ordem de investigações, na intenção de verificar se se encontra qualquer relação entre o comportamento das variações lunares magnéticas e o das variações lunares barométricas.

Na página 190 da referida *Revista* escrevemos nós: «Êste movimento, sobremaneiramente evidente sobretudo nas curvas relativas ao ano e às estações quentes, toma um comportamento que nos oferece grande analogia com o das marés oceânicas, o que nos autoriza a suspeitar da possibilidade de produção de marés atmosféricas idênticas àquelas e por via das quais o movimento das variações diurnas lunares do magnetismo terrestre fôsse uma resultante do maior ou menor espessamento da camada diamagnética. Conveniente seria, pois, conjugar êste estudo com o das variações da pressão atmosférica para se verificar se algum paralelismo existirá entre os dois fenómenos...».

Perante tal suspeita, não pudemos ficar inactivo, pelo que resolvemos tomar nova posição de trabalho que nos permitisse obter mais esclarecimentos sôbre o assunto.

É já do domínio da meteorologia o comportamento da evolução diária da curva da pressão atmosférica, com o seu mínimo e o seu máximo barométrico térmico, respectivamente de manhã e à tarde, e o seu mínimo e o seu máximo, de causa ainda ignorada, respectivamente nas horas da madrugada e da noite. Nas médias dos 5 anos (1921-1925) que aproveitámos para começo de trabalho, verificámos, em Coimbra, que os dois valores mínimos e máximos supra-mencionados, alternando, se registavam nas horas seguintes: 4 às 5 da madrugada, 9 às 10 da manhã, 3 da tarde e 9 às 11 da noite. É isto o que nos revelam o Quadro I e os correspondentes gráficos (Fig. 1), em que, a par da curva da evolução barométrica diurna, apresentamos também as curvas da evolução diurna da Declinação e da Componente horizontal referentes ao mesmo grupo de 5 anos (1921-1925).

Verifica-se, pela aproximação dessas três curvas, uma notável coincidência entre os mínimos barométricos e os máximos magnéticos, e, vice-versa, entre os mínimos magnéticos e os máximos barométricos. Há, emfim, uma inversão da ondulação, sensìvelmente nítida, sobretudo, quando confrontamos as curvas da Declinação e da pressão atmosférica, inversão na qual se marcam, para aquela, um mínimo e um máximo principal, respectivamente, às 9 horas da manhã e às 2 horas da tarde, e um mínimo e um máximo secundários, respectivamente, das 0 às 2 horas e das 3 às 5 horas. Na Componente horizontal não é êste movimento tão regular; encontramo-lo, entretanto, perfeitamente delineado.

Como resultante dos factos mencionados, parece devermos concluir que haja qualquer relação de causa entre os dois fenómenos, das variações diárias magnética e barométrica.

Corroborando em parte as nossas presunções, encontra-se num pequeno opúsculo de D. G. Dalgado (1), de cuja existência fomos informados por S. Ex.ª o Director do Instituto Geofísico, um estudo acêrca do clima de Coimbra, em que o autor aproveita os dados que neste estabelecimento lhe foram fornecidos pelo falecido observador Adriano de Jesus Lopes, e que dizem respeito a uma já respeitável série de anos (1866 a 1910).

Visa-se nesse trabalho, — D. G. Dalgado o afirma —, «*estudar as correspondências entre a pressão e a chuva dum lado e os quatro dias das quatro fases da lua, e os quatro períodos correspondentes a cada um dêles, do outro*».

Para êsse fim dispôs, o autor os seus dados por forma a corresponderem a cada período sete dias: «*o da lua nova (1.º período) começa no quarto octante e acaba no primeiro, isto*

---

(1) Consulte os «*Apontamentos acêrca da influência da lua no clima de Coimbra*», de D. G. Dalgado, publicados em 1914 na Imprensa da Universidade de Coimbra, *separata* da *Revista da Universidade de Coimbra* (vol. III, n.º 3, Setembro de 1914).

é, três dias antes e três dias depois da lua nova; o do quarto crescente (2.º período) começa no primeiro octante e acaba no segundo; e do mesmo modo o da lua cheia, e o do quarto minguante (3.º e 4.º períodos)».

Seguindo êste critério, organizou o autor a tabela que reproduzimos no Quadro II, na qual «*os números correspondentes às fases representam a média anual, e os dos períodos, a média anual da média diária de cada período*» e em que «*os números da chuva representam o total das médias anuais dos quatro dias das quatro fases, e o total anual da média diária dos quatro períodos*».

Por essa estatística, e pelos respectivos gráficos com que ilustra o seu trabalho, chega D. G. Dalgado às seguintes conclusões:

1.º — Que as pressões são *mais* e as chuvas são *menos* no quarto crescente e no quarto minguante do que na lua nova e na lua cheia. Êste é um ponto admitido como certo por quási todos os observadores.

2.º — Que a pressão e a chuva são *mais* no dia da lua nova e no primeiro período, do que no dia da lua cheia e no terceiro período.

3.º — Que a pressão e a chuva são *menos* no quarto crescente e no segundo período, do que no quarto minguante e no quarto período.

4.º — Que as *máximas* da pressão correspondem ao quarto minguante (95) e ao quarto período (88), e as *mínimas* à lua cheia (68) e ao terceiro período (71), sendo a diferença entre o quarto minguante e a lua cheia de 27, e entre o quarto período e o terceiro de 17.

5.º — Que as máximas da chuva correspondem à lua nova (126.1) e ao primeiro período (129.8); e as *mínimas* ao quarto crescente (102.9) e ao segundo período (108.3); sendo a diferença entre a lua nova e o quarto crescente de 23.2, e entre o primeiro período e o segundo de 21.0.

6.º — Que as *máximas* da chuva seguem as *máximas* da pressão; e as *mínimas* da chuva precedem as *mínimas* da pressão.

7.º — Que há uma notável *graduação* entre a máxima e mínima da pressão nos quatro períodos, isto é, 88, 76, 74 e 71. Exceptuando a quarto crescente, nota-se também uma graduação igual nas quatro fases.

8.º — E que a *máxima irradiação* lunar corresponde à mínima pressão.

Referindo-se êste estudo de D. G. Dalgado a dados colhidos em Coimbra, julgámos conveniente aproximá-lo daquele que encetamos, motivo por que, para serem comparáveis, resolvemos seguir a mesma orientação, apenas com a diferença de que, em vez de aproveitarmos os valores médios da pressão, achámos preferível, para o que temos em vista, recorrer, como fizemos para os elementos magnéticos, às médias da variação diurna.

Assim, pois, dividindo o período da revolução lunar em 4 períodos de 7 dias, correspondendo, em cada um deles, a fase respectiva ao quarto dia, ou seja, ao que equidista do primeiro e do sétimo, organizámos, além dos mapas das variações diárias mensais, os quadros da variação média referente ao dia de cada uma das fases e os da média da variação para cada uma dos seus períodos.

Como no nosso anterior estudo acêrca das variações diurnas lunares dos elementos magnéticos nos houvéssemos cingido ao período de 5 anos (1921-1925), correspondentes ao mínimo de actividade solar (1923), o mesmo resolvemos ao iniciar êste trabalho de confronto entre o comportamento daquelas e o da variação diurna lunar da pressão atmosférica, ficando desde logo animado ao verificarmos, pelos mapas e gráficos gerais (Quadro III e Estampa II), uma inversão notável no movimento das curvas da variação diurna lunar da pressão atmosférica em relação ao das curvas da variação diurna lunar da Declinação e da Componente horizontal, inversão sensìvelmente paralela à que acima pusemos em evidência relativamente aos seus respectivos valores horários (v. Quadro I e Fig. 1).

Perante estes factos mais se arreigou no nosso espírito a suspeita, que já nutríamos, quanto à existência de qualquer relação entre os dois fenómenos, sendo-nos, como conseqüência, sugerida a seguinte plausível explicação: *que a atmosfera possìvelmente desempenhe, a respeito do magnetismo terrestre, um papel de isolador*. Êste parecer não discorda sensìvelmente, e na sua essência, da opinião de Schuster, quando sugeriu (1) que «*os movimentos atmosféricos de convecção, indicados pelas oscilações*

(1) «*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*», Séries A, vol. 218, Pp 1-118, pág. 3.

barométricas diurnas, eram os responsáveis das oscilações magnéticas diárias».

Reforçando ainda a nossa suspeita, lê-se na pág. 4 da mesma comunicação de Sir F. W. Dyson (1) o seguinte, que julgamos oportuno reproduzir: «*As variações magnéticas diurnas lunares são incontestàvelmente devidas apenas à oscilação atmosférica semi-diurna.* As grandezas relativas dos vários componentes harmónicos da variação magnética ilucidam-nos se tomarmos em consideração a condutibilidade das camadas atmosféricas em que se produzem. Parece que as correntes fluem principalmente no hemisfério iluminado pelo Sol, sendo muito pequena a condutibilidade no hemisfério sombrio».

Evocando-se a conductibilidade atmosférica, parece-nos fàcilmente explicável a inversão da correspondência entre as oscilações da pressão e as do magnetismo terrestre, tornando-se assim compreensível que os valores da variação diurna da declinação e da Componente horizontal hajam de subir, quando desçam os da variação diurna da pressão atmosférica, e, vice-versa, hajam de diminuir aqueles, quando estes se elevem.

Àparte alguns atrasos de coincidências e, bem assim, outras anomalias devidas, por certo, a causas estranhas àquela que focamos, — e às quais não serão indiferentes os movimentos do globo terrestre —, é interessante notar a correspondência que existe entre os valores máximo e mínimo da variação diurna lunar da pressão atmosférica, dum lado, e o mínimo e o máximo das variações diurnas lunares da declinação e da Componente horizontal, do outro. É assim que, exceptuando a anomalia que nesta se observa, na passagem do quarto minguante para a lua nova, anomalia que, por demasiado acentuada, não pode deixar de obedecer a qualquer outra causa estranha à influência da lua, se nota, ao confrontarmos as curvas de 1921-1925 correspondentes ao período de menor actividade solar, que, emquanto os valores máximo e mínimo da variação da pressão atmosférica se avizinham respectivamente do quarto crescente e da lua cheia, o inverso se produz na declinação e na Componente horizontal, mas, muito mais nìtidamente naquela, isto é, avizinhar o máximo da variação da lua cheia e o mínimo do quarto crescente.

(1) «*Philosophical Transactions of the Royal Society of Londo*», Séries A, vol. 218, Pp 1-118, pág. 3.

Conclui, como acima dissemos, D. G. Dalgado (1.ª conclusão), que *as pressões são mais elevadas no quarto crescente e no quarto minguante do que na lua nova e na lua cheia*. Não notando nós nas curvas da variação diurna lunar da pressão atmosférica, para o grupo de anos de 1921-1925, um comportamento paralelo àquele, pois que, como se verifica pela análise do Quadro IV e dos respectivos gráficos da Fig. 2, se elevam êsses valores na passagem do quarto minguante para a lua nova, — e isso observa-se tanto no gráfico relativo aos dias das fases, como no que se refere aos períodos lunares —, resolvemos pesquisar o que se observaria no período de 11 anos (1915-1925) correspondente a um período solar completo, sendo então reconhecível que o paralelismo entre a evolução das médias das pressões enunciada por D. G. Dalgado e a das nossas curvas da variação da pressão atmosférica começava a acentuar-se; e assim se nota que, no grupo de 11 anos (1915-1925), as variações lunares diurnas da pressão apresentam os seus maiores valores no quarto crescente e no quarto minguante, bem como nos períodos lunares (2.º e 4.º) que correspondem à sua influência, e os seus menores valores, no novilúnio e plenilúnio, e respectivos períodos (1.º e 3.º).

Confrontando os gráficos das variações diurnas lunares da pressão atmosférica, com os que representam as variações diurnas lunares da declinação magnética e da Componente horizontal, observa-se que, em confirmação do que notamos pela análise das curvas gerais da 1.ª a 5.ª da Fig. 2, as variações diurnas lunares da Declinação e da Componente horizontal sobem, quando desce a variação diurna lunar da pressão atmosférica, e, inversamente, descem, quando sobe a variação da pressão.

Referindo-se os dados dos elementos magnéticos ao grupo dos 5 anos de menor actividade solar, parece que seria mais rigoroso o confronto com os dados da variação atmosférica referentes a êsse mesmo período (1921-1925), do que ao período total dos 11 anos (1915-1925). Aproximando, porém, os dados do período de menor actividade (1921-1925) dos do período de maior actividade (1915-1919), notam-se algumas divergências que deverão atribuir-se à sobreposição da influência do Sol. Assim poderá talvez explicar-se, no plenilúnio, a maior acentuação da descida da variação da pressão no período de menor actividade do que no de maior actividade, pelo acréscimo da influência solar oposta à influência lunar; equivalentemente acentuar-se-á mais na passagem para o novilúnio, como se verifica, a descida da variação no período de maior actividade, por virtude do acréscimo da influência solar que, nesta fase, se conjuga à influência lunar.

Perante essas divergências, resultantes, como parece, duma causa diferente daquela que mais nos interessa estudar neste momento, julgamos possível amaciá-la, fundindo num só os dois grupos de anos, o de maior e o de menor actividade, e adicionando-lhe os dados do ano de 1920 que se lhes interpõe. Distribuída assim equitativamente a acção resultante da influência do Sol pelo período completo de (11 anos) da actividade solar, salientar-se-á melhor, parece-nos, a influência isolada da Lua. Eis porque achámos preferível confrontar com as médias de 1921-1925 das variações magnéticas as médias de 1915-1925 da variação barométrica.

Por esta forma não se consegue, é certo, eliminar os efeitos da influência do Sol nas oscilações atmosféricas, devendo a isso atribuir-se, segundo cremos, outras anomalias que ainda vêm a verificar-se; entretanto parece-nos mais proveitoso proceder assim, motivo por que nos utilizamos dêsse confronto das curvas da pressão de 1915-1925 com as das variações magnéticas de 1921-1925 com as das variações magnéticas de 1921-1925, para tirarmos algumas deduções que, como se vê pelos respectivos mapas e gráficos, poderemos assim formular:

1.ª — As variações da pressão são menores e as magnéticas maiores no plenilúnio e no novilúnio do que nos quartos;

2.ª — As variações da pressão e das componentes magnéticas, — abstraindo do salto brusco do dia 26, na Componente horizontal, que reputamos anómalo —, são menores na vizinhança da lua nova do que na da lua cheia;

3.ª — As variações magnéticas na vizinhança do quarto crescente e no 2.º período são menores do que na vizinhança do quarto minguante e no 4.º período; inversamente as variações da pressão são maiores naqueles do que nestes;

4.ª — Aos dois máximos da variação da pressão nos quartos, ou na sua vizinhança, e nos períodos 2.º e 4.º, correspondem os dois mínimos da variação magnética; inversamente, aos dois máximos da variação magnética que se registam no novilúnio e no plenilúnio, ou suas vizinhanças, e no 1.º e 3.º períodos, correspondem os dois mínimos da variação da pressão atmosférica.

5.ª — A máxima variação da pressão regista-se nas vizinhanças do quarto crescente, embora o seu valor seja menor no próprio dia dêste quarto do que no minguante, e a variação mínima regista-se na lua nova; nos elementos magnéticos encontra-se o máximo valor da variação nas visinhanças da lua cheia embora na Declinação êsse valor seja maior no dia do novilúnio do que no do plenilúnio, e o valor mínimo nas vizinhanças do quarto crescente, se bem que, na Componente horizontal, seja menor êsse valor no dia do quarto minguante do que no dia do crescente;

6.º — As médias periódicas da variação atingem na pressão o valor máximo no 4.º período, antecedendo assim a média máxima da declinação magnética (1.º período) e sucedendo-se à média máxima da Componente horizontal (3.º período); essas mesmas médias atingem na pressão o valor mínimo no 3.º período, sucedendo-se assim aos valores mínimos da média periódica das variações da Declinação magnética e da Componente horizontal (2.º período).

Artur Dias Pratas.

Observador do Instituto Geofísico.

---

(1) Abstraímos da anomalia a que já nos referimos, anotada na Componente horizontal.

QUADRO I

Valores horários da Pressão atmosférica, da Declinação e da Componente horizontal

Anos		1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	12^h	13^h	14^h	15^h	16^h	17^h	18^h	19^h	20^h	21^h	22^h	23^h	24^h
1921	Pressão . .	0,49	0,38	0,24	0,18	0,24	0,38	0,60	0,81	1,08	1,03	0,88	0,67	0,30	0,10	0,00	0,01	0,15	0,26	0,52	0,73	0,90	0,90	0,85	0,70
	Declinação .	11	13	15	14	13	11	7	2	0	4	17	37	53	62	61	53	48	34	26	21	18	15	13	11
	C. horizontal.	8	8	8	8	9	10	9	7	3	0	0	3	7	8	6	6	6	7	7	8	9	9	9	10
1922	Pressão . . .	0,50	0,36	0,21	0,16	0,18	0,34	0,56	0,75	1,01	1,02	0,89	0,63	0,29	0,09	0,00	0,00	0,08	0,23	0,46	0,68	0,87	0,85	0,80	0,65
	Declinação .	8	8	9	9	10	7	5	1	0	3	15	34	47	54	53	46	34	25	20	14	10	8	7	6
	C. horizontal.	7	6	6	6	7	7	6	5	2	0	1	4	6	7	5	2	2	3	5	6	6	6	7	8
1923	Pressão . . .	0,51	0,35	0,21	0,15	0,20	0,37	0,63	0,79	1,06	1,03	0,91	0,64	0,35	0,11	0,00	0,04	0,14	0,30	0,57	0,80	0,98	0,97	0,90	0,73
	Declinação .	10	11	12	13	12	10	6	2	0	3	16	35	47	54	53	46	35	28	23	19	17	14	12	11
	C. horizontal.	3	3	0	0	4	4	4	4	2	0	0	3	5	5	3	2	2	3	5	5	5	5	5	4
1924	Pressão . . .	0,57	0,43	0,31	0,21	0,24	0,36	0,61	0,74	0,99	0,99	0,87	0,63	0,33	0,14	0,00	0,09	0,19	0,32	0,57	0,76	0,93	0,91	0,87	0,73
	Declinação .	12	11	11	11	10	7	4	1	0	3	17	37	48	57	56	48	38	31	25	20	17	15	13	13
	C. horizontal.	5	4	4	5	6	5	5	4	2	0	0	5	8	9	7	5	4	5	6	6	6	6	5	5
1925	Pressão . . .	0,57	0,42	0,30	0,22	0,29	0,43	0,70	0,86	1,10	1,08	0,94	0,66	0,40	0,15	0,00	0,08	0,17	0,32	0,55	0,80	0,94	0,97	0,93	0,78
	Declinação .	13	14	15	14	14	12	7	2	0	2	16	39	53	65	63	56	44	36	28	24	21	18	15	14
	C. horizontal.	8	8	9	9	8	8	8	6	4	1	0	4	7	8	8	6	7	8	9	9	9	8	9	8
Média dos 5 anos	Pressão . . .	0,53	0,39	0,26	0,19	0,23	0,38	0,62	0,79	1,05	1,03	0,90	0,65	0,34	0,12	0,00	0,05	0,15	0,29	0,54	0,76	0,93	0,92	0,87	0,72
	Declinação .	11	11	12	12	12	9	6	2	0	3	16	36	50	58	57	50	39	31	24	19	17	14	12	11
	C. horizontal.	6	6	5	5	7	7	6	5	2	0	0	4	6	7	6	4	4	5	6	7	7	7	7	7

Nota — Cada linha vai diminuida do menor valor.

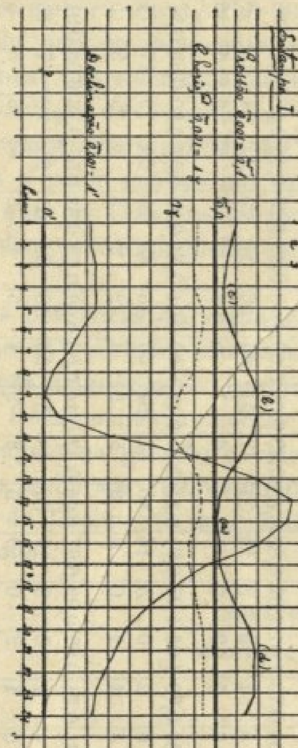


Fig. 1

Curvas dos valores horários médios da pressão atmosférica, e da Componente horizontal e Declinação magnética (1921-1925)

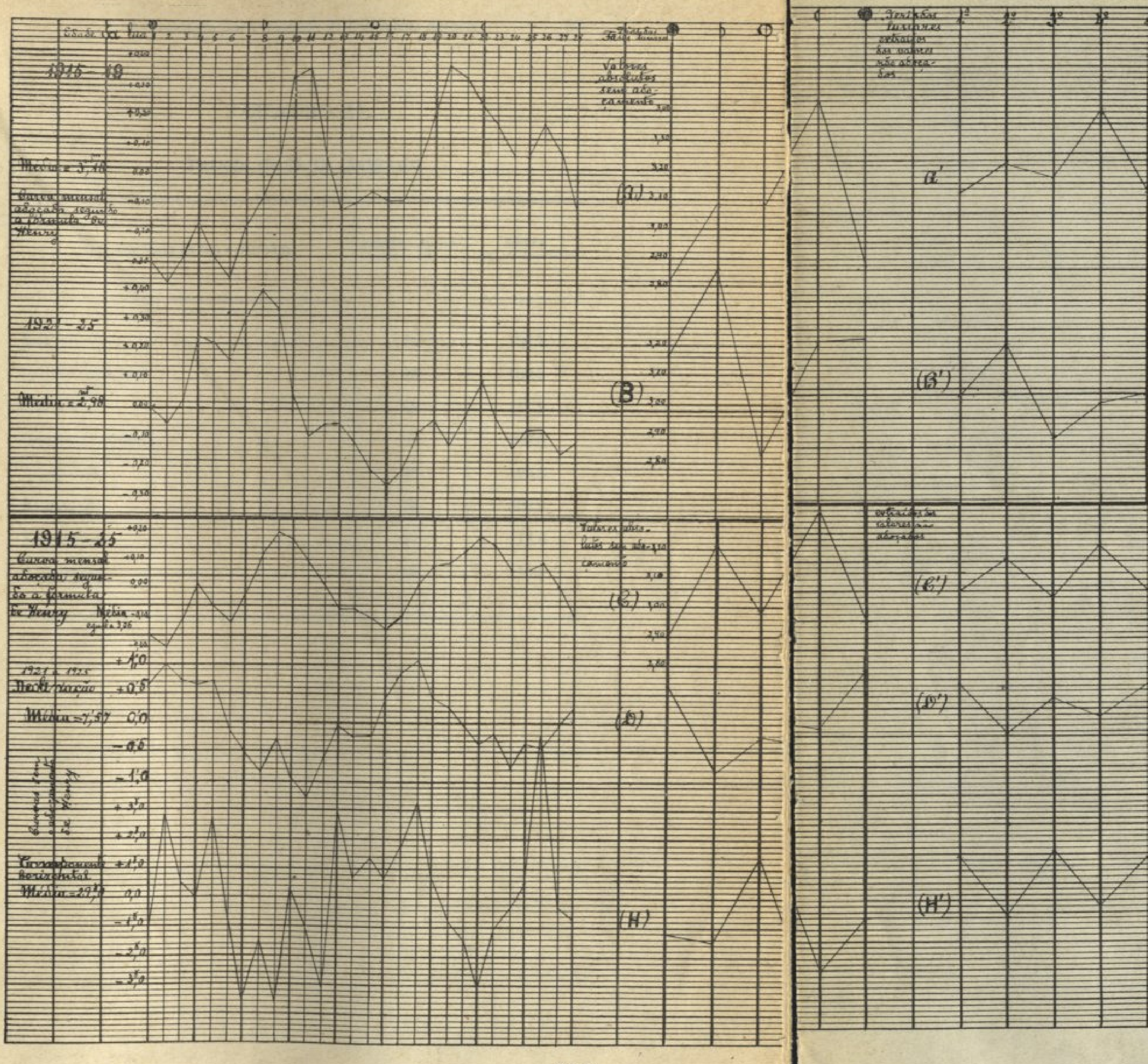


Fig. 2

Curvas: 1.ª, 2.ª e 3.ª, da variação diurna lunar da pressão atmosférica (1915-19), (1921-25) e (1915-25);
4.ª, e 5.ª, da variação diurna lunar da Declinação e da Componente horizontal magnética (1921-2·).

Curvas (a), (b) e (c), (a′) (b′) e (c′), da variação diurna lunar da pressão atmosférica (Quadro IV).
Curvas (D), (H), (D′) e (H′), da variação diurna lunar da Declinação e da Componente horizontal (Quadro V).

QUADRO II

Tabela de D. G. Dalgado

Dias das fases da lua e períodos	Pressão atmosférica, 750 +	Chuva em milímetros
Lua nova	74	126.1
Quarto crescente	89	102.9
Lua cheia	68	117.2
Quarto minguante	95	108.8
1.º período	76	129.3
2.º período	74	108.3
3.º período	71	118.8
4.º período	88	119.9

QUA

Variação diurna lunar

	1 ●	2	3	4	5	6	7	8 ⌓	9	10	11	12	13	14
1915	+ 0,2	− 0,6	− 0,3	− 0,5	− 0,4	− 0,7	+ 1,0	− 0,2	+ 0,7	+ 0,4	+ 0,4	0,0	− 0,6	− 0,1
1916	− 0,4	+ 0,1	+ 0,3	− 0,2	0,0	− 0,3	− 0,1	− 0,4	+ 0,6	− 0,1	+ 0,1	− 0,7	− 1,2	− 0,4
1917	− 1,1	0,0	− 0,5	− 0,1	− 0,6	− 0,4	− 0,5	− 0,7	− 1,0	− 0,5	+ 0,1	+ 0,5	+ 1,3	+ 1,5
1918	− 0,0	− 0,6	− 0,4	+ 0,1	0,0	− 0,3	+ 0,1	+ 0,4	− 0,3	+ 0,3	+ 1,4	− 0,1	0,0	− 0,6
1919	− 0,4	− 0,7	− 0,8	+ 0,8	− 0,4	− 0,8	− 0,6	+ 0,5	− 0,1	+ 2,0	+ 0,6	− 0,1	− 0,3	− 0,6
1920	− 0,2	− 0,1	− 0,4	− 0,7	− 0,3	− 0,4	− 1,1	− 0,3	+ 0,1	+ 0,2	− 0,1	− 0,1	+ 0,2	+ 0,1
1921	− 0,5	+ 0,9	0,0	+ 1,0	+ 0,6	+ 0,4	− 0,7	+ 0,3	+ 0,4	+ 0,1	− 0,2	0,0	− 0,2	− 0,6
1922	+ 0,1	− 1,0	− 0,1	+ 0,8	− 0,4	+ 0,5	− 0,1	+ 0,9	+ 0,8	0,0	− 1,1	− 0,9	+ 0,2	+ 0,1
1923	+ 0,2	0,0	− 0,2	− 0,2	− 0,6	+ 0,3	+ 1,1	+ 0,3	+ 0,3	− 0,9	− 0,2	− 0,6	− 0,4	− 0,3
1924	+ 0,1	− 0,5	− 0,1	+ 0,1	0,0	− 0,1	+ 0,6	+ 0,8	+ 0,7	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,5	− 0,6	+ 0,2
1925	+ 0,2	− 0,1	− 0,3	+ 0,8	+ 0,6	0,0	− 0,3	0,0	+ 0,3	− 0,5	0,0	+ 0,7	+ 0,7	− 0,1
1915-19 (*a*)	−0,36	−0,38	−0,36	+0,00	−0,30	−0,52	−0,04	−0,10	−0,04	+0,40	+0,56	−0,06	−0,18	−0,06
1915-19 (*b*)	−0,30	−0,37	−0,28	−0,17	−0,28	−0,35	−0,18	−0,07	+0,05	+0,33	+0,36	+0,06	−0,12	−0,10
1921-25 (*c*)	+0,19	−0,13	−0,13	+0,52	+0,06	+0,24	+0,12	+0,48	+0,52	−0,15	−0,07	−0,06	0,00	−0,15
1921-25 (*b*)	0,00	−0,05	+0,03	+0,[illegible]4	+0,24	+0,16	+0,29	+0,40	+0,34	+0,04	−0,09	−0,05	−0,05	−0,11
1915-25 (*d*)	−0,16	−0,23	−0,20	+0,18	−0,13	−0,16	−0,04	+0,15	+0,23	+0,14	+0,16	−0,05	−0,08	−0,07
1915-25 (*b*)	−0,16	−0,20	−0,11	+0,01	−0,06	−0,12	−0,02	+0,12	+0,19	+0,17	+0,10	+0,01	−0,07	−0,07

(*a*) Período de 5 anos de maior actividade solar.
(*b*) Variações adoçadas pela fórmula de Henry $\beta = \frac{\alpha + 2\beta + \gamma}{4}$.
(*c*) Período de 5 anos de menor actividade solar.
(*d*) Ciclo de 11 anos iniciado dois anos antes do de maior actividade (1917) e findando 2 anos

DRO III

da pressão atmosférica

15 ○	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	Médias
														m/m
− 0,3	+ 0,7	+ 0,1	0,0	+ 0,3	+ 0,9	− 0,1	+ 0,4	− 0,1	− 0,1	− 0,1	+ 0,5	− 0,3	0,0	**3,2**
− 0,4	− 0,1	− 0,7	− 0,3	− 0,4	+ 0,2	+ 0,1	+ 0,3	− 0,1	+ 0,5	+ 0,6	+ 1,3	+ 0,5	0,0	**3,3**
+ 0,5	+ 0,3	− 0,4	0,0	− 0,1	+ 0,5	− 0,1	− 0,2	+ 0,6	+ 0,1	+ 0,5	+ 0,3	0,0	− 0,3	**3,1**
+ 0,3	0,0	− 0,1	+ 0,7	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,4	− 0,1	− 0,5	− 0,2	− 0,8	+ 0,5	+ 0,3	+ 0,3	**2,9**
− 0,5	− 0,7	− 0,5	+ 0,9	0,0	+ 1,5	+ 1,0	+ 0,7	+ 1,6	− 0,1	− 0,5	− 0,6	− 0,4	− 0,3	**3,3**
+ 0,3	− 0,4	+ 0,7	+ 0,3	0,0	− 0,6	− 0,2	+ 0,5	+ 1,0	+ 1,2	+ 0,8	+ 0,3	0,0	+ 0,6	**2,9**
− 0,2	− 0,4	0,0	+ 0,1	+ 0,1	− 0,9	+ 0,2	0,0	− 0,2	0,0	+ 0,2	− 0,3	− 0,2	− 0,4	**2,7**
0,0	− 0,6	− 0,4	+ 0,1	+ 1,2	+ 0,5	− 0,6	− 0,2	− 0,3	0,0	+ 0,3	− 0,1	+ 0,2	− 0,8	**3,1**
− 0,1	− 0,2	0,0	− 0,8	− 0,8	− 0,4	+ 0,5	+ 1,2	+ 0,9	− 0,1	+ 0,1	0,0	− 0,2	− 0,4	**3,1**
+ 0,1	− 0,4	+ 0,1	0,0	0,0	− 0,3	− 0,8	0,0	− 0,3	− 1,0	+ 0,1	0,0	− 0,5	− 0,2	**3,0**
− 0,5	− 0,3	− 0,4	− 0,4	+ 0,3	− 0,7	+ 0,7	− 0,2	− 0,4	− 0,5	− 0,7	− 0,1	+ 0,1	+ 0,3	**3,1**
−0,10	+0,02	−0,30	+0,24	0,02	+0,64	+0,24	+0,20	+0,28	+0,02	−0,08	+0,38	0,00	−0,06	**3,18**
−0,06	−0,09	−0,09	+0,04	+0,21	+0,37	+0,33	+0,23	+0,17	+0,06	+0,06	+0,17	+0,07	−0,13	**3,18**
−0,15	−0,37	−0,14	−0,19	+0,20	−0,35	+0,04	+0,18	−0,02	−0,25	+0,02	−0,08	−0,12	−0,26	**2,98**
−0,21	−0,26	−0,21	−0,08	−0,04	−0,12	−0,02	+0,09	−0,03	−0,13	−0,07	−0,07	−0,15	−0,11	**2,98**
−0,08	−0,19	+0,12	+0,06	+0,08	+0,09	+0,10	+0,22	+0,20	−0,01	+0,05	+0,17	−0,04	−0,11	**3,06**
−0,10	−0,14	−0,02	+0,02	+0,08	+0,09	+0,13	+0,18	+0,15	+0,06	+0,06	+0,09	−0,00	−0,10	**3,06**

depois do de actividade menor (1923).

QUADRO IV

Variação diurna lunar da Pressão atmosférica referida aos dias que coincidem com as fases e aos seus períodos respectivos

Anos	Dias das fases lunares				Períodos lunares			
	Lua nova	Quarto crescente	Lua cheia	Quarto minguante	1.º período	2.º período	3.º período	4.º período
1915	3,4	3,0	2,9	3,6	3,2	3,4	3,0	3,3
1916	2,9	2,9	2,9	3,6	3,5	3,3	2,8	3,5
1917	2,0	2,4	3,6	2,9	2,9	2,6	3,7	3,3
1918	2,9	3,3	3,2	2,8	2,9	3,1	2,9	2,8
1919	2,9	3,8	2,8	4,0	3,0	3,5	3,0	3,9
1920	2,7	2,6	3,2	3,4	2,7	2,6	3,1	3,3
1921	2,2	3,0	2,5	2,7	2,8	2,8	2,5	2,6
1922	3,2	4,0	3,1	2,9	3,0	3,2	2,9	3,2
1923	3,3	3,4	3,0	4,3	3,0	3,1	2,8	3,3
1924	3,1	3,8	3,1	3,0	2,8	3,4	3,0	2,7
1925	3,3	3,1	2,5	2,9	3,2	3,1	3,0	2,9
1915-1919	2,82	3,08	3,08	3,38	3,07	3,17	3,12	3,36
1921-1925	3,17	3,46	2,83	3,16	2,98	3,15	2,83	2,95
1915-1925	2,90	3,21	2,98	3,28	3,00	3,11	2,98	3,16

QUADRO V

Variação diurna lunar da Declinação e da Componente horizontal (média dos 5 anos 1921 a 1925)

Dias	Declinação, variação média = 7',57		Componente horizontal, varição média = 29^{γ},0	
L. nova, 1	+ 0,65		— 1,2	
2	0,99	1.º período, + 0,41	+ 2,8	1.º período, + 0,9
3	0,73		0,5	
4	0,65		0,0	
5	+ 0,71		+ 2,7	
6	— 0,15		— 0,8	
7	0,51		3,5	
Q. cresc., 8	0,83	2.º período, — 0,45	1,5	2.º período, — 1,1
9	0,27		— 3,6	
10	0,95		+ 0,3	
11	1,29		— 1,0	
12	— 0,59		— 3,1	
13	+ 0,03		+ 3,0	
14	— 0,23		0,7	
L. cheia, 15	— 0,21	3.º período, + 0,17	1,4	3.º período, + 1,1
16	+ 0,43		0,7	
17	0,87		1,8	
18	1,07		3,3	
19	0,43		+ 0,7	
20	+ 0,29		— 0,8	
21	— 0,03		1,4	
Q. ming., 22	0,35	4.º período, — 0,13	3,0	4.º período, — 0,8
23	0,17		1,1	
24	0,77		— 0,3	
25	0,35		+ 0,5	
26	0,41		+ 5,5	
27	— 0,01	1.º período, + 0,41	— 0,3	1.º período, + 0,9
28	+ 0,25		— 0,7	

Aproveitamento da energia cósmica [1]

No comêço do actual ano lectivo, o Prof. Pereira Forjaz fêz publicar nos nossos jornais uma carta em que declarou ter descoberto o aproveitamento da energia cósmica, que êste facto tinha sido pela primeira vez anunciado por êle à Academia das Ciências de Lisboa, em 20 de Julho de 1933, e que os trabalhos de Tesla, nos Estados Unidos, eram posteriores aos seus.

Lemos ainda nos jornais que, numa das sessões da Academia das Ciências de Lisboa, o referido professor falou na acção das ondas electromagnéticas sôbre a marcha das reacções químicas, em *mecânica química ondulatória,* e na acção das ondas curtas e ultra-curtas sôbre determinadas reacções.

Foi grande o nosso interêsse em conhecer os trabalhos do Prof. Forjaz. Fizemos diligências para conseguir uma exposição desenvolvida dêsses trabalhos, que nos permitisse apreciar e criticar, nas nossas reüniões, a anunciada descoberta, mas não alcançámos mais do que resumidas comunicações.

Os trabalhos do Prof. Forjaz estavam para nós envolvidos em mistério. Na carta que escreveu para os jornais fala em energia cósmica, e nós supusemos que esta energia era a dos raios cósmicos, porque entendemos que o referido professor se não referiria à energia universal, sob as suas diferentes formas.

Na acta da sessão da A. das C. de Lisboa, que mencionámos, faz-se referência vaga às radiações electromagnéticas, o que não nos fêz pôr de parte os raios cósmicos que a carta do Prof. Forjaz nos sugeriu. Mas, a consideração especial de

---

(1) Êste artigo foi prèviamente apresentado e discutido numa reünião dos professores da 2.ª secção (Física e Química) da Faculdade de Ciências de Coimbra.

ondas curtas e ultra-curtas desorientou-nos. E mais nos encheu de curiosidade o fazer-se menção da mecânica química ondulatória, completamente desconhecida para nós.

No primeiro número da revista *Scientia*, dos estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa, de Janeiro de 1934, o Prof. Forjaz publica um artigo intitulado «Energia Radiante e Energia Química» que, a-pesar-de muito resumido, veio satisfazer o nosso desejo.

Ficámos sabendo, se não nos enganamos, que a energia cósmica a que o Prof. Forjaz se referia na sua carta é a energia das radiações hertzianas, e que as radiações electromagnéticas em que o referido professor falou na A. das C. de Lisboa são as radiações hertzianas. É a acção destas ondas sôbre a marcha das reacções químicas o facto descoberto pelo Prof. Forjaz; foi no estudo da influência dessas ondas que fundou a sua mecânica química ondulatória.

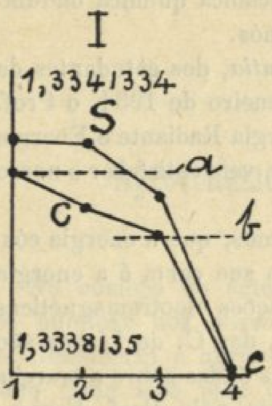
A-pesar-de a exposição das experiências feitas estar extremamente resumida, a leitura do artigo do Prof. Pereira Forjaz sugere-nos as considerações que se seguem.

*

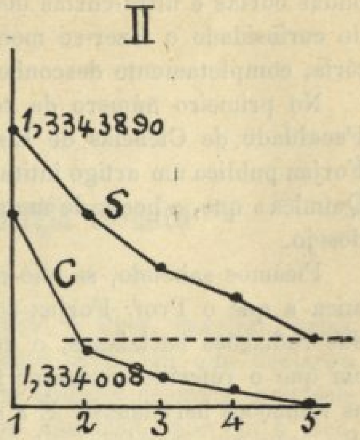
O Prof. Forjaz prepara duas soluções aquosas iguais de uma mistura dum alcool e dum ácido orgânico, e compara, determinando índices de refracção, a marcha da esterificação nas duas soluções, quando uma delas está sujeita à acção de determinadas radiações hertzianas.

As determinações são feitas de 24 em 24 horas, é indicada a temperatura, o comprimento de onda das radiações, e não diz qual a concentração das soluções. Nada diz sôbre as disposições experimentais.

Apresenta cinco quadros com os resultados obtidos. Com estes resultados organizámos cinco gráficos correspondentes, marcando nos eixos das ordenadas os valores dos índices de refracção, e nos eixos das abscissas o tempo expresso em dias. Em cada gráfico há uma linha, designada pela letra S, que representa o modo como varia o índice de refracção, com o tempo, na solução que não está sujeita à acção das ondas, e outra linha, designada pela letra C, que se refere à solução sujeita à acção das ondas hertzianas.



Alcool etilico e ácido acético
Temp. 24,5°
Compr. de onda 1,256^{m}



Alcool metilico e ácido fórmico
Temp. 24°
Compr. de onda 1,256^{m}

Na interpretação dos gráficos, suponhamos primeiramente, como o Prof. Forjaz supõe, que os êrros de medida cometidos não podem alterar sensìvelmente os resultados obtidos.

Chegamos então às seguintes conclusões:

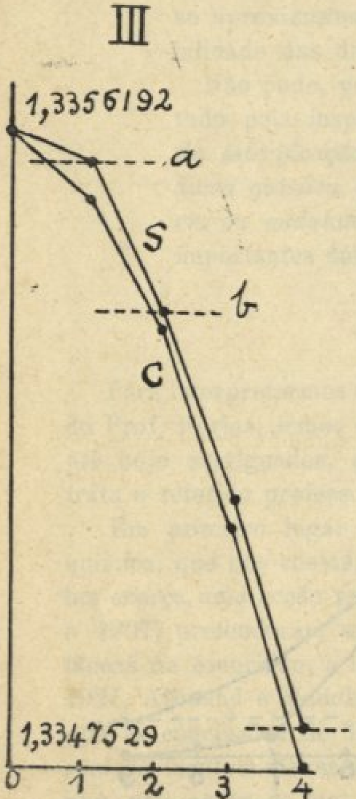
1) As radiações hertzianas, dum modo geral, aceleram a esterificação. Nalguns casos, o avanço da esterificação *com ondas* é muito pequeno relativamente à esterificação *sem ondas*.

O gráfico I mostra que, no fim de 4 dias, o estado dos dois sistemas comparados é quási o mesmo; o gráfico III mostra que, no fim de 4 dias, a esterificação *sem ondas* está atrasada de poucas horas.

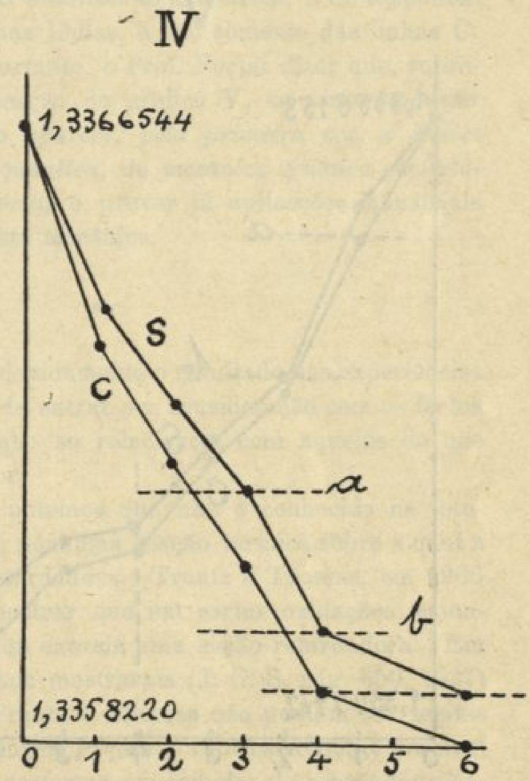
O gráfico V mostra que, no fim de 4 dias, a esterificação *sem ondas* está atrasada de poucas horas, e, no fim de 9 dias, está atrasada de pouco mais de dois dias; o gráfico IV mostra que, no fim de 6 dias, a esterificação sem ondas está atrasada de dois dias; estes dois últimos atrasos são pouco importantes porque na parte final dos dois intervalos de tempo correspondentes a composição dos sistemas varia lentamente.

No caso do gráfico II, a acção das ondas hertzianas parece maior.

2) Nos casos gráficos I, III, IV e V, passa-se dos estados *a* para os estados *b*, e, no caso do gráfico I, mesmo



Alcool etílico e ácido fórmico
Temp. 16,7°
Compr. de onda 1,268m



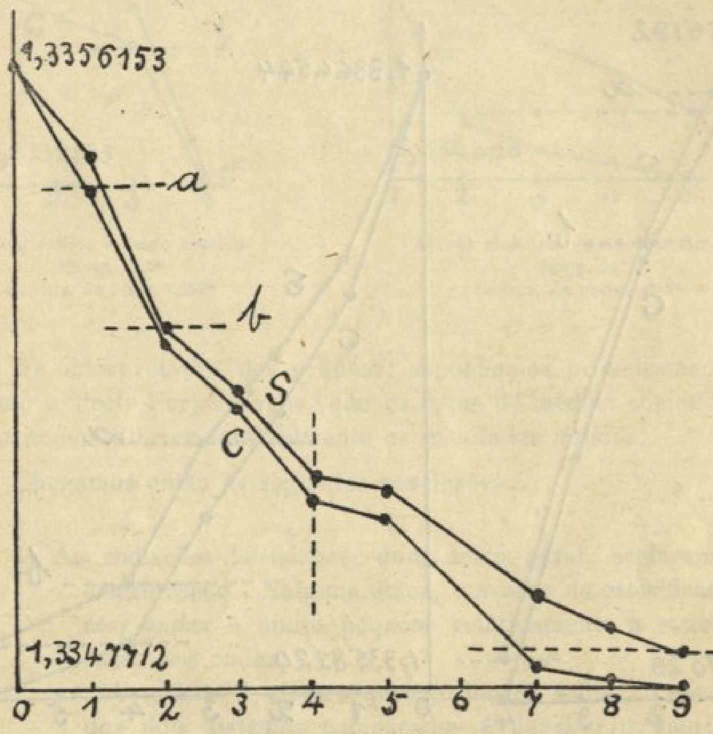
Alcool etílico e ácido propriónico
Temp. 13,2°
Compr. de onda 1,256m

de *a* para *c*, mais ràpidamente *sem ondas* do que *com ondas*. As radiações hertzianas exercem, portanto, dentro dos intervalos de tempo correspondentes, uma acção retardadora.

3) Os gráficos III e V referem-se a soluções com a mesma composição inicial. A forma das linhas C e S são muito diferentes nos dois gráficos. A temperatura é superior no caso do primeiro gráfico de 0,1°, o que não

deve influir sensìvelmente nas velocidades de reacção. Porém, a velocidade de esterificação, *sem ondas* e *com ondas,* é muito maior no caso do gráfico III; o índice de refracção a que se chega, sem ondas, no fim de 4

V



Alcool etílico e ácido fórmico
Temp. 16,6º
Compr. de onda 0,754^m

dias, no caso do gráfico III, só é atingido no fim de 9 dias, apròximadamente, no caso do gráfico V. Notemos, porém, que o comprimento de onda das radiações incidentes é, no caso do gráfico V, quási metade do que corresponde ao gráfico III.

4) Dum modo geral, as duas curvas, C e S, ora se aproximam, ora se afastam. Desta circunstância conclui o Prof. Forjaz que a acção das ondas hertzianas faz

com que a marcha da esterificação adquira carácter periódico. Os gráficos que apresentamos mostram bem que, se há carácter oscilante nas linhas C, o mesmo carácter se observa também, e até mais pronunciado, nas linhas S. O facto das linhas C e S umas vezes se aproximarem e outras se afastarem, é da responsabilidade das duas linhas, e não sòmente das linhas C.

Não pode, portanto, o Prof. Forjaz dizer que, sobretudo pela inspecção do gráfico V, *na cinematografia da esterificação aparece, pela primeira vez, o índice duma química quântica, ou mecânica química oscilatória ou ondulatória,* e prever já aplicações industriais importantes desta mecânica.

*

Para interpretarmos devidamente o resultado das experiências do Prof. Forjaz, temos de entrar em consideração com os factos até hoje averiguados, que se relacionem com aqueles de que trata o referido professor.

Em primeiro lugar notemos que não é conhecida na fotoquímica, que nos conste, nenhuma reação térmica sôbre a qual a luz exerça uma acção retardadora. Trautz e Thomas, em 1906 e 1907, pretenderam mostrar que em certas oxidações espontâneas na escuridão, a luz exercia uma acção retardadora. Em 1927, Allmand e Maddison mostraram (J. C. S. pág. 650, 1927) que as conclusões de Trautz e Thomas não podiam ser aceites sem se fazerem novas investigações. Teòricamente, é possível que, pela acção da luz, se forme um inibidor de reação térmica, ou se destrua um catalista fotoquímico. Pràticamente, porém, que saibamos, ainda não foi, com certeza, reconhecida a acção retardadora da luz sôbre as reacções térmicas.

A acção retardadora das radiações hertzianas é, portanto, altamente improvável. E é incompreensível que as referidas radiações exerçam sôbre uma determinada reacção térmica, em marcha, uma acção aceleradora em certos intervalos de tempo, e retardadora noutros.

Mas, nós permitimo-nos mesmo pôr em grande dúvida a acção das ondas hertzianas sôbre a esterificação.

Tem-se discutido se existe ou não uma *freqüência limite* para as reacções fotoquímicas, isto é, se existe um comprimento de onda acima do qual o rendimento quântico ràpidamente cai para zero. Embora a freqüência limite tenha de variar com as condições experimentais em que se passa uma determinada reacção, a sua existência, teòricamente justificável, é geralmente aceite, ou, pelo menos, considerada muito provável.

Têm sido determinadas para várias reacções químicas as freqüências limites. Assim, Weigert e Nicolai, em 1926, no caso da combinação do hidrogénio com o cloro, verificaram que o comprimento de onda limite é próximo de 590 $\mu\mu$. Mais recentemente, Rao e Dhar (*The J. of Physical Chemistry,* 1932, pág. 646) determinaram o comprimento de onda limite no caso de algumas reacções que se dão na escuridão, baseados na hipótese de radiação estabelecida por Dhar. Encontraram os seguintes resultados:

Reacção	Comprimento de onda limite
Ácido cítrico e ácido crómico ...	12.200×10^{-8} cm.
Oxalato de potássio e bromo ...	9.600×10^{-8} cm.
Inversão da sacarose	10.600×10^{-8} cm.

Quere dizer, as reacções consideradas só podem ser aceleradas pelas radiações com menor comprimento de onda do que os encontrados, desde que sejam absorvidas.

As radiações que correspondem a êstes comprimentos de onda limites pertencem ao infra-vermelho.

Não está determinada a freqüência limite em esterificações. Os resultados obtidos até hoje, quer experimentais quer teóricos, mostram, porém, que devemos considerar como extraordinàriamente improvável que as radiações hertzianas, com comprimento de onda de ordem de grandeza de um metro, exerçam qualquer influência na marcha duma esterificação.

Tendo em vista o que actualmente sabemos sôbre a influência da energia radiante na marcha das reacções químicas, vemos que a interpretação que demos aos resultados obtidos pelo Prof. Forjaz, na hipótese de os êrros de medida não poderam alterar sensìvelmente êsses resultados, não é admissível.

Basta o facto de a acção das radiações hertzianas, em certos intervalos, aparecer como retardadora, para termos de admitir êrros de medida importantes. O facto de as linhas C e S representaram variações irregulares, e ora se aproximarem, ora se afastarem, imediatamente nos sugere a existência de êrros fortuitos, ora actuando num sentido, ora em sentido contrário. E, comparando os gráficos III e V, que se referem a sistemas quìmicamente idênticos, quási à mesma temperatura, era de esperar que a maior acção aceleradora correspondesse ao menor comprimento de onda, contràriamente ao que os gráficos mostram.

Não conhecemos as condições experimentais dos trabalhos do Prof. Forjaz, a maneira como preparou as soluções a comparar, de modo que no instante inicial as suas composições fôssem perfeitamente iguais, o rigor com que manteve a temperatura, que indica, nas referidas soluções, etc., etc. Seja, porém, como fôr, somos levados a atribuir a êrros de medida o facto de as linhas C e S não se confundirem. As linhas C aparecem sempre abaixo das linhas S; ou, devido ao pequeno número de observações feitas, se deu a casualidade de êrros fortuitos terem actuado no mesmo sentido, ou há êrros sistemáticos que importa descobrir.

Esta é que é, supomos nós, a interpretação razoável dos trabalhos do Prof. Forjaz. E só consideramos como fantasia a revolucionária afirmação de que, sob a acção de radiações hertzianas, cujo período é da ordem de grandeza de 10^{-9} segundos, a velocidade de esterificação adquire *carácter periódico,* sendo êste período considerado, supomos nós, da ordem de grandeza de dias.

Julgamos ter mostrado que as experiências que analisámos estão longe de permitir a imprevista concepção da *mecânica química ondulatória ou oscilatória* do Prof. Forjaz.

Faraday disse: « The world little knows how many of the thoughts and theories which have passed throuth the mind of a scientific investigator have been crushed in silence and secrecy by his own severe cristicism and adverse examination; that in most successful instances not a tenth of the suggestions, the hopes, the wishes, the preliminary conclusions have been realised ». A imaginação é indispensável na Ciência, mas, como Karl Pearson diz, deve ser disciplinada.

*

Permitimo-nos ainda discordar do emprêgo de certas denominações usadas pelo Prof. Forjaz. À Química que imaginou chama *Química quântica;* hoje, a Química é tôda essencialmente quântica, visto que nas hipóteses que fazemos sôbre a constituïção da matéria intervém a teoria dos quanta. Julgamos que não foi o Prof. Forjaz quem, como afirma, viu «pela primeira vez, o índice duma *química quântica*».

A existência da *Química absoluta* do Prof. Forjaz é também sòmente uma fantasia. Não há no Universo nenhum sistema previlegiado com respeito à energia radiante, em relação ao qual se possa imaginar uma Química absoluta. Em qualquer sistema, quer na estratosfera, quer nos espaços interestelares, existe energia radiante, e não vemos a razão por que deve ser considerada absoluta a química dum determinado sistema, qualquer que seja. Também não compreendemos a razão por que o Prof. Forjaz chama *pura* à Química do espaço interestelar, onde Millikan supõe que se formam átomos, e não é *pura*, por exemplo, a química do Sol, ou das estrêlas, onde Eddington e Jeans supõem que se aniquilam átomos.

Diz ainda o Prof. Forjaz que os quadros com o resumo das suas experiências representam a *cinematografia* da esterificação. O têrmo cinematografia é hoje empregado numa acepção bem definida, e no caso considerado significaria o registo dos movimentos, de-certo fotográfico, que realizam as partículas constituintes de sistema onde se produz a esterificação. Ainda estamos muito longe de conseguir tal fim. Os quadros referidos pretendem representar apenas a maneira como varia o índice de refracção à medida que a esterificação prossegue.

EGAS F. PINTO BASTO.

AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida à Direcção da Faculdade de Ciências, com a indicação de que se refere à **REVISTA**.