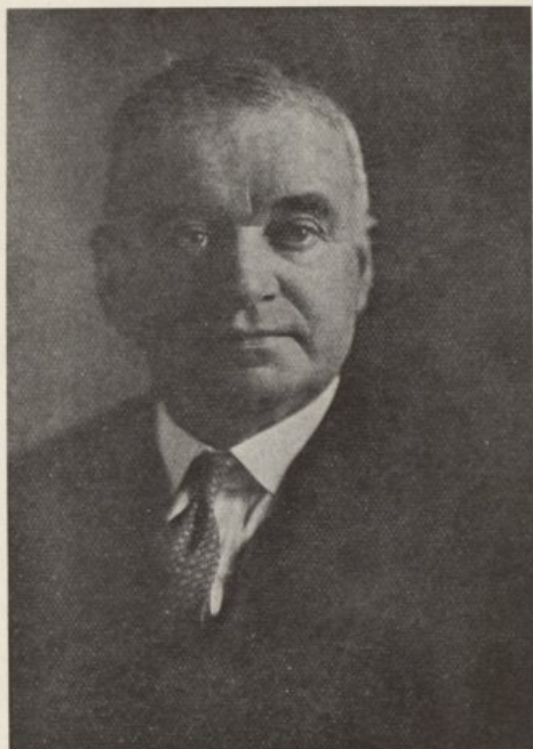


Vol. 2^o, fasc. 4



LIBRARY

A
9
13



PROF. R. FUETER

Quelques résultats de l'algèbre moderne (1)

Introduction. — La géométrie moderne fut créée dans la période dans laquelle les grands mathématiciens, GAUSS, LOBATCHEFSKI, BOLYAI, RIEMANN ont découvert la géométrie non-euclidienne. Ils ont fait la remarque très surprenante que les principaux théorèmes de la géométrie gardent leur valeur entièrement au cas où on ne suppose plus comme valable le célèbre axiome des parallèles. Depuis cent ans cette manière de voir a fait des progrès énormes. On a construit des géométries, dans lesquelles l'un ou l'autre des axiomes fondamentales de la géométrie euclidienne était exclu. Tous ces efforts étaient couronnés par le livre de M. Hilbert, sur les fondements de la géométrie, qui a paru en 1899. Les différentes géométries, traitées dans ce livre, gardent toute leur beauté, et les théorèmes restent d'une généralité étonnante. La crainte de voir tomber avec la validité des axiomes la géométrie comme discipline mathématique ne devait pas se réaliser. Au contraire une nouvelle géométrie plus générale et plus belle se forma.

L'algèbre, probablement aussi ancienne que la géométrie, a fait depuis une vingtaine d'années un développement analogue.

(1) Nos primeiros dias de Dezembro a Faculdade de Ciências recebeu, a seu convite, a honrosa visita do Presidente do Congresso Internacional de Matemáticas, o Senhor R. Fueter.

O ilustre Professor da Universidade de Zurich quiz deixar assinalada a sua vinda a Coimbra, fazendo no dia 5 de Dezembro na Sala dos Capelos uma interessante exposição sobre os novos campos de estudo da Álgebra Moderna. Dela, amavelmente, entregou para a nossa Revista o resumo que aqui se publica.

A Faculdade de Ciências confessa-se muito grata à distinção conferida pelo eminente matemático, que unicamente com esse intuito fez a sua viagem a Portugal.

On connaît depuis longtemps les axiomes de l'algèbre; car on en avait besoin pour démontrer l'indépendance des axiomes de la géométrie. Mais l'idée de traiter des algèbres, dans lesquelles certaines des axiomes ne sont pas valables, est moderne, et on peut dire que depuis ce moment seulement l'algèbre moderne a vu jour. Le résultat de cette manière de voir était pour l'algèbre le même que pour la géométrie. On observait, que la beauté de la théorie subsistait, et qu'un vaste et immense édifice, avec des problèmes excessivement importants, remplaçait l'algèbre classique. Un développement inouï a fait depuis vingt années de l'algèbre une des disciplines les plus importantes des mathématiques. Je rapelle seulement son influence primordiale sur la topologie moderne. Je chercherais, dans le courant de ma conférence, de vous donner un aperçu des idées et des résultats de l'algèbre moderne.

Historique. — Si la théorie moderne des algèbres n'existe que depuis une vingtaine d'années, les bases de cette théorie sont beaucoup plus anciennes. On peut dire que la découverte des quaternions par *Hamilton*, une des plus belles découvertes du dixneuvième siècle, est à l'origine.

Or *Hamilton* s'est occupé de géométrie et surtout du calcul des vecteurs; ses quaternions voulaient être un moyen simple pour embrasser la géométrie de l'espace. Voilà pourquoi *Hamilton* a tenu si fortement à démontrer l'utilité des quaternions pour la théorie des surfaces et des courbes gauches. Il ne se rendait peut-être pas assez compte de l'importance de sa découverte pour l'algèbre. Or toute l'histoire des mathématiques prouve que notre science progresse toujours de cette manière. À l'origine se trouve la découverte d'un cas *spécial*; et seulement après on remarque la notion *générale* contenue dans ce cas. Les quaternions sont encore aujourd'hui l'exemple le plus important d'un certain type d'algèbre; son importance pour les recherches modernes est toujours énorme, et la plupart des théorèmes de l'arithmétique des systèmes complexes, trouvés pendant les dernières dix années, se rapportaient premièrement aux quaternions. Aussi je me bornerai souvent à vous nommer les résultats seulement pour les quaternions.

Les successeurs de *Hamilton* ont généralisé les quaternions. Je vous nomme les si importants travaux de *Weierstrass*, de *Dede-*

kind, et de *Frobenius*. Mais on doit le point de départ de la formidable théorie moderne aux travaux de deux mathématiciens américains *Wedderburn* et *Dickson*. Voilà pourquoi je passe directement de Hamilton à ces travaux modernes.

Quelques notions élémentaires. — Je commence à vous rappeler quelques notions élémentaires de la théorie des algèbres. Une algèbre quelconque contient un ensemble de quantités, liées entre eux par des axiomes, semblable à la théorie des groupes. Or la théorie des groupes demande l'existence d'une seule opération entre deux quantités, pendant que l'algèbre en demande deux, qu'on nomme multiplication et addition. Voilà les deux premières axiomes. Les deux opérations sont liées entre eux par la loi distributive. On peut démontrer que la loi distributive et associative et l'existence d'une unité générale suffit pour que la loi commutative de l'addition doit avoir lieu. Voilà pourquoi on admet toujours la loi commutative de l'addition. Mais on ne suppose pas la loi commutative de la multiplication. On parle souvent d'une algèbre non-commutative. Par contre on introduit encore une multiplication scalaire avec des nombres d'un ensemble de nombres; cette multiplication scalaire est commutative et associative. Quant à la loi associative pour les quantités de l'algèbre on la suppose seulement pour l'addition, mais pas pour la multiplication.

En outre on complète ces suppositions avec une supposition d'une toute autre nature, et la question n'est pas encore résolue, si cette dernière supposition est nécessaire. On n'admet que des algèbres, où toutes les quantités peuvent être représentées par une base finie, c'est-à-dire dans la forme $x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$, où les u sont des quantités proprement choisies et les x des nombres scalaires.

Je me contente dans la suite de traiter les algèbres associatives. Le cas est assez général pour pouvoir introduire toutes les notions importantes: Je supposerai toujours, que la multiplication remplit la condition de la loi associative.

Structure des algèbres. — Dans l'algèbre ordinaire on ne possède qu'une structure: celle du *corps*. Aussi supposons-nous que les nombres scalaires admis forment un corps. Or pour les algèbres définies en haut il y a une grande variété de

structures différentes, et la première tâche est de donner les notions nécessaires pour grouper et pour caractériser ces structures. Ces notions ont beaucoup de ressemblance avec celles de la théorie des groupes.

On appelle l'algèbre B un facteur invariant de l'algèbre A , si toutes les quantités de B appartiennent à A et si le produit d'une quantité de A et d'une quantité de B appartient toujours à B . Un facteur invariant B est un facteur invariant maximum, si aucun autre facteur invariant CB de A existe, qui contient B . Dans le cas où A possède un facteur invariant maximum, on peut représenter A comme une somme directe de deux algèbres. Voilà la première réduction! Chaque algèbre A , qui contient une unité principale peut être représentée comme somme directe d'algèbres irréductibles. Une algèbre qui ne possède aucun facteur invariant s'appelle *simple*.

Dans le cas contraire, si l'algèbre contient aucune unité principale, elle possède un *radical*, c'est à dire un facteur invariant maximum, dont une puissance est nulle. Dans ce cas il faut déduire le radical de l'algèbre, et le reste possède une unité principale. Ce reste est nommé *demi-simple*.

Par ce procédé on arrive à décomposer 1) une algèbre A donnée comme somme d'un radical et d'une algèbre demi-simple; 2) l'algèbre demi-simple comme somme directe d'algèbres simples. Des critères existent pour constater, si une algèbre est demi-simple.

Ces théorèmes importants sur la structure conduisent à se borner aux algèbres simples. Pour connaître la structure de ces dernières on définit le produit direct de deux algèbres et on prouve le théorème fondamental que chaque algèbre simple est le produit direct d'une algèbre de matrices et d'une algèbre de division. Cela veut dire que chaque algèbre simple peut être représenté par des matrices, dont les coefficients appartiennent à une algèbre de division.

Nous voilà conduits à des algèbres de division! Quelles sont ces algèbres de division? Ce sont des algèbres où la multiplication est réversible, où le produit de deux quantités est seulement nul, si un des deux facteurs est nul. L'exemple de beaucoup le plus important d'une algèbre de division est l'algèbre des quaternions.

Arithmétique d'une algèbre. — Limitons nos déductions au cas d'une algèbre de division, et prenons pour fixer les idées les quaternions, avec composantes rationales. Cette restriction est d'autant plus permise que l'arithmétique des quantités hyper-complexes doit historiquement son développement aux quaternions.

La première question qui se pose est celle des quantités entières. La définition du domaine d'intégrité forme toujours l'origine de chaque arithmétique. Quelles sont les principes d'après lesquelles on définit ce domaine? 1) le domaine d'intégrité doit former un anneau, c'est à dire un domaine qui se reproduit par l'addition, la soustraction et la multiplication; 2) les quantités du domaine possèdent un base finie; 3) chaque quaternion peut être représenter par un quaternion du domaine d'intégrité, multiplié par un nombre rationnel entier.

Or ces conditions ne suffisent pas pour ériger le bâtiment de l'arithmétique; il y faut encore introduire la notion de domaine maximum d'intégrité. Ce dernier ne peut plus appartenir à un domaine d'intégrité plus vaste. Il existe un nombre infini de domaines d'intégrité maximum. Le plus simple est celui de *Hurwitz*, qui contient les quaternions avec composantes ou rationales entières, ou rationales avec nominateur impair et dénominateur 2.

La deuxième question est celle de la décomposition des quaternions en quaternions premiers, en se basant sur un domaine maximum d'intégrité donné. Pour résoudre ce problème il faut introduire la notion de l'*idéal*. Mais comme la loi commutative de la multiplication n'existe pas, il faut définir deux sortes d'idéaux: les idéaux gauches et droits. Mais ce qui est très étonnant, c'est que d'après les recherches nouvelles très belles de *M. Brandt*, chaque idéal gauche d'un domaine d'intégrité maximum donné est idéal droit dans un autre domaine d'intégrité maximum fixe. Les idéaux forment ce qu'on nomme un *groupe*, par rapport à la multiplication.

L'équivalence de deux idéaux gauches ou droits est définie de la manière ordinaire. Des idéaux équivalents forment une classe d'idéaux.

Les résultats sont d'une élégance spéciale pour les idéaux bilatéraux, qui sont et gauches et droits dans le même domaine d'intégrité maximum. Les idéaux bilatéraux peuvent se composer en

idéaux bilatéraux premiers, et la loi commutative est valable dans ce cas.

Pour le domaine de Hurwitz le nombre des classes est un, et chaque idéal peut être décomposé en idéaux premiers.

Troisième question :

Corps quadratiques imaginaires contenus dans les quaternions. — Chaque Unité 1 des quaternions appartient à un corps quadratique imaginaire. Le fait que les nombres de Gauss sont continus dans le domaine de Hurwitz est donc trivial. Mais il y a un infinié d'autres corps dans ce domaine: p. e. $\frac{1}{2}(-1 + i_1 + i_2 + i_3)$, où $1, i_1, i_2, i_3$ sont les quaternion-unités. La troisième puissance de ce quaternion est égale à 1, le quaternion représente donc la troisième racine de l'unité ou le corps $\sqrt{-3}$. Si m est somme de trois carrés, le corps $\sqrt{-m}$ est continu dans l'algèbre des quaternions. Cela est toujours possible, si $m \not\equiv 7 \pmod{8}$, d'après un théorème de Lagrange et Gauss.

Prenons maintenant un corps quadratique imaginaire $k(\sqrt{-m})$, contenu dans l'algèbre des quaternions, et posons la question de l'existence d'une base relative à k du domaine de Hurwitz. Nous appellons $\Omega_1 \Omega_2$ une base relative à k , si tous les quaternions entiers peuvent être représentés de la manière $\xi_1 \Omega_1 + \xi_2 \Omega_2$, où ξ_1, ξ_2 parcourent les entiers de k . On peut prouver qu'une telle base relative existe toujours, quand m n'est pas divisible par un nombre premier de la forme $8n + 5$ ou $8n + 7$.

Dans ce cas on définit facilement les anneaux de quaternions, relatifs à k , et l'arithmétique de ces anneaux devient d'une beauté et simplicité comparable à celle de la théorie classique des formes quadratiques binaires ou du corps quadratique. Elle est en rapport intime avec certaines formes d'*Hermite* et avec le groupe traité d'une manière magistrale par *Emile Picard*, comme je l'ai démontré l'été passé dans une note des comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. (T. 194, p. 2009, 1932).

J'ai terminé mon exposé. J'espère vous avoir montré que la théorie des algèbres et de leurs arithmétiques est en pleine période de découvertes, et a fait ces dernières années des progrès énormes. La clarté cristalline de cette théorie, la beauté de ses théorèmes sont fascinantes pour ceux qui s'en occupent. Peut-être mes modestes développements ont frappés votre curiosité. Nous serons excessivement heureux, si les mathématiciens

de la noble nation portugaise nous aideront à traiter cette partie abstraite des mathématiques; l'ancienne et toujours si vivante culture de votre race a donné à l'humanité des valeurs de la plus grande importance, et je ne doute pas que cette partie de la science progressera, elle aussi, par les soins des savants illustres de votre belle patrie.

R. FUETER.

Influência dos tactóides sôbre a tixotropia do sole de pentóxido de vanádio

Antes de tratar do assunto talvez seja conveniente explicar em poucas palavras os fenómenos da tixotropia e da formação dos tactóides:

É conhecido que alguns geles, como por exemplo o gele da gelatina se liquefaz por aquecimento. Depois de arrefecer, o sole líquido torna a formar o gele sólido. Mas, em muitos casos, não é preciso uma mudança de temperatura, bastam influências mecânicas, como a agitação, para liquefazer um gele, que depois de repousar durante algum tempo torna a solidificar-se. Êste efeito foi descoberto por Schalek e Szegvari em 1923. Estes autores juntaram a uma solução coloidal de hidróxido de ferro, com aproximadamente 5 0/0, uma certa quantidade de cloreto de sódio, o que provocou a formação duma pasta. Agitando, esta pasta liquefez-se, e, passado algum tempo, solidificou outra vez. Êste fenómeno pode-se repetir à vontade. O tempo de solidificação, em condições exteriores iguais, é sempre igual. Esta transformação sole-gele — isotérmica e reversível — é chamada *tixotropia*. Mas, nem sempre é preciso esta adição de electrólito. Há algumas substâncias orgânicas cujas suspensões aquosas mostram o mesmo efeito. Também um silicato natural — a bentonite — e algumas argilas formam uma pasta tixotrópica 1).

Examinando uma solução coloidal de pentóxido de vanádio entre nicóis cruzados, verifica-se que o sole é óticamente isotrópico. Depois de fazer redemoinhar o mesmo sole num cilindro de vidro com fundo plano, observa-se uma birrefringência provocada por essa agitação. Distingue-se bem a cruz negra, que, passado algum tempo e depois de não haver correntes no líquido, desaparece.

Um sole de hidróxido de ferro, por exemplo, não dá êste

efeito. Um exame ultramicroscópico, empregando um diafragma de azimute, mostra que o sole de pentóxido de vanádio tem partículas alongadas, enquanto que o sole de ferro tem partículas redondas. Duas condições devem ser respeitadas para que se observe a birrefringência.

Primeiro, as partículas coloidais devem ser constituídas por elementos anisotrópicos, ou, se elas são constituídas por elementos isotrópicos, o arranjo destes elementos deve ser tal que a partícula resultante tenha uma forma anisotrópica. Segundo a teoria de Wiener também estes sistemas podem apresentar uma anisotropia óptica; é então preciso que as partículas se orientem duma maneira regular, o que acontece quando no líquido se estabelecem correntes regulares pelas correntes provocadas pela agitação. No sole em repouso não se observa a birrefringência porque os efeitos birrefringentes das partículas desorientadas se anulam.

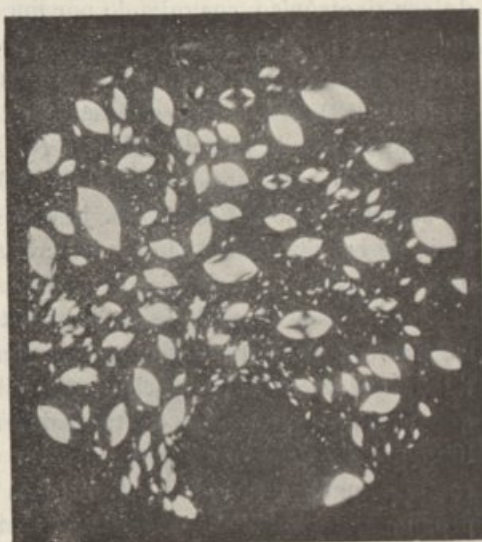


Fig. 1

No sole de pentóxido de vanádio, e em alguns outros soles com partículas alongadas, observa-se também uma orientação das partículas sem causa exterior aparente. Numa preparação deste sole, observada no microscópio de polarização entre nicóis cruzados, mostram-se regiões birrefringentes. Um exame destas regiões no ultramicroscópio, com diafragma de azimute, mostra bem o arranjo paralelo das partículas. Estas regiões constituídas por partículas anisotrópicas orientadas são chamadas tactóides (fig. 1) 2).

Estudando a tixotropia do sole de pentóxido de vanádio, verificou-se que a transformação sole-gele varia duma maneira muito irregular. Os tempos de solidificação (Ts.) do gele tixo-

trópico, dentro de uma série com quantidades crescentes de electrólito, diferem de tal maneira que nunca conseguimos obter valores iguais em determinações repetidas. A tixotropia do sole comporta-se também duma maneira imprevista comparada com a tixotropia de outros soles já estudados. Enquanto que no caso do sole de hidróxido de ferro o Ts., para uma determinada concentração do electrólito, vai diminuindo com o tempo até ter um valor constante, o Ts. do pentóxido de vanádio aumenta em consequência duma coagulação progressiva: o sole, a seguir, deixa de ser tixotrópico, coagulando por fim completamente. Nós fizemos estas experiências com um sole com a idade de 14 dias, preparado segundo o método de Biltz, modificado por Zocher-Jacobsohn 2). Êste sole era rico em tactóides e tinha um valor de coagulação de 30 milimoles de NaCl. Juntando 24 milimoles de NaCl, o sole tem, um dia depois da preparação, um Ts. de 90 segundos; no 2.º dia o Ts. já é de 3 minutos. Fazendo uma série de ensaios com quantidades crescentes de NaCl, verifica-se que apenas no próprio dia da preparação o Ts. é inversamente proporcional à quantidade de electrólito. No 2.º dia e nos dias seguintes o Ts. varia duma maneira irregular. Com uma quantidade de electrólito superior a 20 milimoles, a camada de sole que reveste as paredes do tubo de ensaio já não se apresenta límpida; da-se a *sinerese* e, passado uma semana, o sole está completamente coagulado. Soles com quantidades de electrólito próximas do valor de coagulação têm um Ts. muito pequeno, mas coagulam logo depois da primeira agitação (Tabela I). ¿Quais podem ser as razões desta irregularidade?

Tabela I

Tactosole antigo.
Electrólito NaCl n/5.

Milimoles NaCl	Ts. 1.º dia	Ts. 2.º dia	Ts. 3.º dia	Ts. 6.º dia
8	24 ^b	—	—	—
12,8	1 ^b	70'	70'	80'
17,6	15'	1'6	18'	19'
19,2	8'	8'	8'	8'
20,8	130''	130''		30'
22,4	75'	160''	170''	25'
24	65'	160''	160''	40'

Dado o carácter anfotérico do V_2O_5 pode-se pensar numa reacção química. Kargin e Rabinowitsch verificaram que, diluindo o sole, se dá uma dissolução das partículas bastante forte, formando-se ácidos polivanádicos. Mas nos nossos ensaios este facto não deve ter uma grande importância, porque a diluição pelo electrólito junto — raras vezes mais do que a quinta parte do sole empregado — não é tão grande como a usada nos ensaios dos autores mencionados. Além disso, não podemos verificar que a mudança mais forte da concentração hidrogeniônica tivesse uma influência notável sobre o Ts. Juntando HCl ou NaOH as mudanças do tempo de solidificação são tão pequenas que, dadas as anomalias de que falamos, podemos concluir que a influência é insignificante. Mas temos de considerar uma outra propriedade que possui o sole de V_2O_5 e que não tem nenhum dos soles até agora estudados sob o ponto de vista tixotrópico. Esta propriedade é a existência de tactóides. Admitindo que um sole de V_2O_5 livre de tactóides se comporta mais regularmente, tentamos preparar um sole nestas condições para repetir com ele as experiências de tixotropia. Como sabemos dos trabalhos de Zocher que os tactóides se depositam numa camada mais densa no fundo do vaso ao fim de algum tempo de repouso, preparamos uma grande quantidade de sole que deitamos num tubo de vidro de cerca de 1 metro de comprimento e de 2 centímetros de diâmetro, onde o deixamos em repouso durante mais de 3 meses. Ao fim deste tempo tiramos uma camada superficial de cerca de 12 centímetros de espessura, que se mostrou no microscópio de polarização completamente isenta de tactóides (*atactosole*). Este sole tinha uma concentração de 0,75 % de V_2O_5 . Diluimos um tactosole (um sole que tem tactóides) com 1,5 % até à mesma concentração de 0,75 %, e verificámos que ainda tinha uma grande quantidade de tactóides. Juntámos aos 2 soles 29 milimoles de NaCl. Verificamos que o tempo de solidificação no atactosole é muito mais pequeno. O atactosole no 1.º dia tem um Ts. de cerca de uma hora, enquanto que o tactosole ao fim do mesmo tempo não apresenta nenhum sinal de solidificação.

Passados dois dias o tactosole estava parcialmente coagulado, ao contrário do atactosole que se apresentava ainda límpido e com um Ts. de cerca de meia hora. Passados três dias o tactosole já estava tão coagulado que não havia solidificação, o atactosole continuava límpido e com um Ts. apenas de 10 minutos.

Ao fim de quatro dias o tactosole continuava límpido e com um Ts. de dois minutos, necessitando porém duma forte agitação para se dar a liquefacção. No 5.º dia, pelo seu aspecto e pelas suas propriedades, o gele é muito semelhante ao gele de $\text{Fe}(\text{OH})_3$, descrito por Freundlich e Rosenthal 4), podendo perceber-se a liquefacção apenas pelo ouvido; à vista não há transformação perceptível porque o Ts. é extremamente pequeno. Passadas duas semanas, o sole começa a coagular, mas isso deve ser um efeito das agitações muitas vezes repetidas. Um sole testemunha, preparado nas mesmas condições mas que não foi agitado, não mostrou qualquer mudança de aspecto, mesmo três meses depois.

É sabido que nos soles preparados de metavanadato de amónio não purificado, e que por isso contém uma certa quantidade de arsénio, não há formação de tactóides. Explica-se isso por uma diminuição considerável da velocidade de cristalização provocada pela absorção de arsenato-ões na superfície das partículas. Como Freundlich e Dannenberg 5) verificaram que uma percentagem pequena de arsénio não tem influência sobre o valor de coagulação, a tixotropia num sole que tem arsénio mas que está isento de tactóides deve ter um comportamento normal se a presença de tactóides é a causa das anomalias da tixotropia. Ensaíamos este sole e obtivemos este resultado.

Dada a grande quantidade de sole obtida, pudémos realizar algumas séries que mostravam bem que o Ts. é uma função da concentração de electrólito.

Tabela II

Sole recentemente preparado, sem tactóides, com arsénio;
electrólito NaCl 0,1n.

Milimoles NaCl	Ts.
4,8	1 ^a
9,1	4'
13	45''
16,7	15''
20	1'
23	momentâneo

A tabela seguinte mostra os resultados a que chegámos, estudando o mesmo sole ao fim de três meses de repouso durante os quais, a-pesar-da presença de arsénio, se formou uma quantidade apreciável de tactóides:

Tabela III

Electrólito NaCl O,2n.

Milimoles NaCl	Ts.
9,6	cêrca de 12 ^h
18,2	3'
26	40'
33,4	coagulado passadas 2 horas (o Ts. é mal definido)
40	coagula à primeira agitação
46	coagula

Os dois soles têm um valor de coagulação de cêrca de 28-30 milimoles. Como se vê, no caso do tactosole não é possível obter um Ts. tão curto como no do atactosole. O atactosole já tem, com quantidades muito inferiores ao valor de coagulação, tempos de solidificação bastante reduzidos, enquanto o tactosole necessita de quantidades superiores ao valor de coagulação. O facto de o sole não coagular imediatamente e passar a um estado tixotrópico temporário deve ter a seguinte razão: pela adição de electrólito são descarregadas primeiro as partículas na superfície dos tactóides e aquelas formam uma membrana difficilmente permeável para o electrólito. Com o tempo difunde-se mais electrólito por esta membrana, que descarrega tôdas as partículas. Pode-se acelerar êste processo por uma forte agitação que provoca a destruição da membrana e por isso a coagulação imediata. As tabelas mostram também que o comportamento do tactosole a respeito da tixotropia é uma consequência da presença dos tactóides e não da presença de arsenato-ões. O sole com tactóides e com arsénio comporta-se da mesma maneira que o antigo tactosole dialisado e isento de arsénio, sendo de notar que as

anomalias não são tão fortes como no caso do sole antigo porque, neste os tactóides são muito maiores.

Não podémos medir o pH do sole por falta dum eléctrodo de vidro apropriado. Certamente o pH tem alguma influência sobre as propriedades do sole, mas o contraste entre o tactosole e o atactosole é tão grande que se pode não tomar em conta essa influência, pelo menos numa primeira análise.

Qual será a explicação para o diferente comportamento da solução com tactóides e da solução sem tactóides? Segundo a opinião de Zocher a formação dos tactóides é uma espécie de coagulação; só difere quantitativamente. A aproximação das partículas não é tão grande. A coagulação é uma aproximação das partículas tão grande que já se não dá nenhum movimento molecular sensível.

A formação dos tactóides deve dar-se de maneira que haja equilíbrio entre forças atractivas e repulsivas. Estas devem-se procurar na carga eléctrica das partículas, aquelas nas forças da coesão.

Quando se junta electrólito o equilíbrio é destruído, as partículas descarregam-se e pela influência das forças da coesão podem-se formar agregados maiores. A estabilidade dum sole é atribuída por Haber à existência de camadas iónicas difusas que partem da superfície das partículas e penetram sensivelmente no líquido. Deve-se portanto supôr que a maior estabilidade dum sole se dá quando há uma distribuição homogênea destas forças, isto é, em soluções com superfícies de separação igualmente distribuídas. Quando se tem um sistema coloidal formado por pequenas partículas primárias e por agregados de partículas que têm dimensões quasi fora da região coloidal — resultantes da contracção dos tactóides pela adição de electrólito — estamos em presença de forças distribuídas tão heterogêneamente que a sua estabilidade se perde. Este estado de coisas deve passar-se no estado tixotrópico, que é um estado de transição, principalmente se atribuirmos com Zocher a tixotropia é um entrelaçamento de partículas coloidais. Não é contudo lícito colocar a tixotropia e a formação dos tactóides na mesma classe. No caso do sole de pentóxido de vanádio, os tactóides impedem a transformação sole-gele. Portanto, as nossas experiências não contradizem as de Heller⁶). Heller demonstrou que uma solução pouco concentrada de hidróxido de ferro depois de uma dialise de

14 dias se transforma num gele transparente muito sensível ao choque.

Este gele mostra no polariscópio uma cruz de dupla refração que nos leva a considerar uma orientação radial das partículas.

Esta dupla refração que se deve atribuir a uma acção mútua das partículas coloidais, corresponde a uma dupla refração de tactóides.

Sabe-se que os tactóides de hidróxido de ferro que são ilimitados segundo uma das dimensões, comportam-se como as partículas do tactóide de V_2O_5 . Quere dizer que existe aqui um equilíbrio instável entre a carga eléctrica e coesão. Também aqui basta um pequeno deslocamento do equilíbrio para destruir o sistema inteiro. A verdadeira tixotropia — uma transformação sole gele reversível — parece ser favorecida pela ausência de tactóides. Estas soluções contêm partículas cujas cargas não são influenciadas por outras forças, e portanto são muito menos sensíveis à acção dos electrólitos que a solução com tactóides. Aqui devem ser verdadeiras tôdas as hipóteses segundo as quais pela adição de quantidades crescentes de electrólito, todos os estados dum sistema coloidal, como dupla refração provocada pela agitação, tixotropia e coagulação completa, devem ser atingidas.

RÉSUMÉ

Nous avons recherché la tixotropie du sole de pentoxyde de vanadium et nous avons trouvé que la présence des tactoïdes exerce une grande influence sur la stabilité du gèle thixotropique. Il n'est pas possible de atteindre dans un tactosole un gèle aussi stable que dans un atactosole, parce qu'il se forme, en conséquence de la contraction des tactoïdes un mélange hétérogène des particules grandes et petites qui n'est pas capable de maintenir la stabilité du système. Les conséquences de ce phénomène sont des variations extraordinaires quand au temps de solidification. Nous avons vérifié que dans le tactosole les transitions sole-gèle sont peu prononcées et très irrégulières, pendant que le atactosole donne une thixotropie, qui est d'accord avec celle des autres sole déjà étudiés.

LITERATURA

- 1) Freundlich — *Koll. Ztschrft.*, 46, 286, 888, 1928.
- 2) Zocher und Jacobsohn — *id.*, *ibid.*, 41, 220, 1927.
- 3) Kargin und Rabinowitsch — *Ztschrft. fuer physik. Chemie*, 152, 24, 1931.
- 4) Freundlich und Rosenthal — *Koll. Zeitschrift*, 37, 129, 1925.
- 5) Freundlich und Dannenberg — *Ztschrft. fuer physik. Chemie*, 119, 87, 1926.
- 6) Zocher und Heller — *Ztschrft. fuer anorg. Chemie*, 186, 75, 1930.

CURT KOPPER.

Prof. contratado da Faculdade de Ciências

Sôbre alguns caracteres antropométricos da população portuguesa

No presente estudo utilizámos as mensurações efectuadas em 200 indivíduos do sexo masculino e 150 do sexo feminino, todos de idade superior a 20 anos e cujas naturalidades se distribuem por 17 distritos administrativos do continente português, sendo o distrito de Beja o único que não se encontra representado nas nossas observações.

Embora não sejam muito numerosas as séries que estudámos, não devemos, todavia, considerá-las destituídas do valor, dada a circunstância de incluírem representantes de tôdas as províncias de Portugal.

Pelo que se refere à série feminina, o nosso trabalho apresenta um interesse particular, se atendermos a que existem apenas raros estudos sôbre a antropometria da mulher portuguesa.

Tôdas as observações foram feitas no Instituto de Antropologia da Faculdade de Ciências de Coimbra, seguindo a técnica estabelecida na «Entente Internationale pour l'Unification des Mesures Céphalométriques et Antropométriques sur le vivant» realizada nos Congressos de Antropologia de Mónaco (1906) e Genebra (1912).

As mensurações incidiram sôbre a *Estatutura*, o *Busto*, a *Grande Envergadura* e os diâmetros cefálicos, antero-posterior máximo ou *Comprimento da cabeça* e transverso máximo ou *Largura da cabeça*, tendo sido determinados com os valores obtidos o *Índice Esquelético* e o *Índice Cefálico*, para cada um dos indivíduos observados.

ESTATURA

Os resultados que obtivemos para a *Estatuta*, são os seguintes:

	Série ♂	Série ♀
Valor médio.....	1648.15 ± 2.977	1523.50 ± 3.217
Desvio padrão....	62.42 ± 2.105	58.42 ± 2.274
Valor mínimo.....	1482	1343
Valor máximo....	1815	1680
N.º de Observações	200	150

As médias das séries masculina e feminina mostram-se ligeiramente inferiores aos valores encontrados por Topinard para a estatura média da humanidade, os quais são, 1^m.650 para o sexo masculino e 1^m.530 para o sexo feminino (1).

Pelo que se refere à série masculina o valor médio que obtivemos é sensivelmente igual à média obtida por Sant'Ana Marques (1^m.645 em 1.444 portugueses), últimamente ratificada pelo Professor Dr. Eusébio Tamagnini, no seu importante estudo *Sobre a distribuição geográfica de alguns caracteres fundamentais da população portuguesa actual* (2), apresentado ao XV Congresso Internacional de Antropologia, reunido em Coimbra, e cujos resultados referentes a 11.657 portugueses do sexo masculino, a seguir transcrevemos.

Valor médio.....	16.45 ± 0.32
Desvio padrão.....	50.75 ± 0.22
Valor mínimo.....	1385
Valor máximo.....	1865

A diferença sexual das médias nas nossas observações é igual a 124.65 ± 4.383 , o que corresponde sensivelmente à diferença de 120 milímetros que é habitual encontrar-se entre os

(1) Paul Topinard, *Éléments d'Antropologie Générale*, Paris, 1885, pág. 462.

(2) *Revista da Faculdade de Ciências*, vol. II, N.º 2, págs. 100-121.

valores médios das estaturas nos indivíduos dos sexos masculino e feminino das diversas populações.

Esta diferença sexual das médias tem significação estatística, visto exceder muito o triplo do seu desvio do padrão que é igual a 6.498 ± 3.099 .

Agrupando as nossas observações, segundo a classificação das estaturas — Baixas, Abaixo da média, Acima da média e Altas — estabelecida por Topinard(1), obtivemos os seguintes resultados.

Série ♂

Estaturas	Observações	%
Baixas (x — 1 599)	43	21.5
Abaixo da média (1.600 — 1.649)	59	29.5
Acima da média (1.650 — 1.699)	50	25.0
Altas (1.700 — x),	48	24.0
	200	100.0

Série ♀

Estaturas	Observações	%
Baixas (x — 1 479)	26	17.3
Abaixo da média (1.480 — 1.529)	50	33.3
Acima da média (1.530 — 1.579)	43	28.7
Altas (1.580 — x)	31	20.7
	150	100.0

Verifica-se pelos valores obtidos que na série masculina a distribuição se faz de uma maneira aproximadamente igual pelos

(1) Paul Topinard, *loc. cit.*, pág. 463.

quatro grupos de estaturas, enquanto que na série feminina predominam nitidamente as estaturas dos dois grupos médios, convindo, no entanto, acentuar, que nesta série, semelhantemente ao que se nota na série masculina, o número total de indivíduos que se encontram distribuídos pelos dois grupos inferiores é sensivelmente igual ao dos dois grupos superiores.

No quadro seguinte apresentamos as seriações dos valores da Estatura, agrupados em classes com o intervalo de 20 milímetros.

Série ♂		Série ♀	
Estaturas	Freqüências	Estaturas	Freqüências
1.490	1	1.350	3
1.510	4	1.370	1
1.530	3	1.390	0
1.550	4	1.410	3
1.570	13	1.430	3
1.590	25	1.450	4
1.610	15	1.470	19
1.630	28	1.490	19
1.650	27	1.510	22
1.670	20	1.530	18
1.690	13	1.550	16
1.710	22	1.570	18
1.730	12	1.590	12
1.750	6	1.610	5
1.770	2	1.630	5
1.790	4	1.650	0
1.810	1	1.670	2
Total	200	Total	150

GRANDE ENVERGADURA

Damos a seguir os resultados obtidos nas nossas observações.

	Série ♂	Série ♀
Valor médio.....	1681.95 ± 3.305	1524.90 ± 3.579
Desvio padrão....	69.30 ± 2.337	64.99 ± 2.531
Valor mínimo.....	1470	1345
Valor máximo....	1880	1694
N.º de observações	200	150

A diferença entre os valores médios das séries masculina e feminina é igual a 157.05 ± 4.870 , sendo o desvio padrão da diferença igual a 7.22 ± 3.444 , pelo que se deve atribuir significação estatística à diferença sexual das médias, visto ser muito superior a 3 vezes o seu desvio padrão.

Comparando os resultados obtidos para a Grande Envergadura com os resultados obtidos para a Estatura, verifica-se que na série masculina o valor médio da Envergadura excede em 33.80 o valor médio da Estatura, sendo apenas de 1.40 o valor dessa diferença no sexo feminino.

E determinando o valor da relação centesimal entre a Grande Envergadura e a Estatura, utilizando para essa determinação os valores médios obtidos para as duas mensurações, obtivemos 102.05 para a série masculina e 100.09 para a série feminina.

No quadro que a seguir apresentamos, agrupámos as diferentes observações, conforme a Envergadura é maior, igual ou menor do que a Estatura.

	♂	%	♀	%
Envergadura > Estatura	160	80.00	76	50.67
Envergadura < Estatura	37	18.50	70	46.67
Envergadura = Estatura	3	1.50	4	2.66
	200	100.00	150	100.00

Mostram-nos estes resultados que na série masculina, o número de indivíduos nos quais a Envergadura excede a Estatura é muito elevado (80.00%), enquanto que na série feminina esse número ligeiramente ultrapassa metade das observações (50.67%).

Os portugueses, e particularmente os indivíduos do sexo masculino, ficam, pois, compreendidos entre as populações de braços compridos (*long armed*), nas quais a Envergadura ultrapassa, normalmente, a Estatura.

Determinámos ainda, para os dois sexos, o coeficiente de correlação entre a Grande Envergadura e a Estatura, tendo obtido os seguintes valores.

Séries	N. de observações	Coefficiente de correlação
♂	200	$r = 0.83 \pm 0.014$
♀	150	$r = 0.82 \pm 0.018$

Êstes resultados indicam-nos que existe uma correlação directa muito elevada entre os dois caracteres considerados, sendo sensivelmente iguais nos dois sexos os valores de coeficiente de correlação.

Damos a seguir as seriações dos valores obtidos na mensuração da Grande Envergadura, agrupados em classes com o intervalo de 20 milímetros.

Série ♂		Série ♀	
Envergadura	Freqüências	Envergadura	Freqüências
1.470	1	1.350	2
1.490	1	1.370	1
1.510	2	1.390	2
1.530	0	1.410	5
1.550	3	1.430	4
1.570	7	1.450	6
1.590	12	1.470	17
1.610	9	1.490	12
1.630	14	1.510	20
1.650	26	1.530	19
1.670	21	1.550	17
1.690	21	1.570	18
1.710	23	1.590	12
1.730	28	1.610	5
1.750	12	1.630	4
1.770	5	1.650	3
1.790	8	1.670	1
1.810	1	1.690	2
1.830	1	—	—
1.850	4	—	—
1.870	1	—	—
Total	200	Total	150

BUSTO

Na mensuração do *Busto*, obtivemos os seguintes valores:

	Série ♂	Série ♀
Valor médio.....	875.40 ± 1.520	829.10 ± 1.693
Desvio padrão....	31.88 ± 1.075	30.76 ± 1.197
Valor mínimo.....	780	745
Valor máximo....	955	920
N.º de observações	200	150

A diferença sexual das médias (46.30 ± 2.273) tem valor estatístico, visto exceder o triplo do seu desvio padrão (3.37 ± 1.607).

Deduzindo à estatura a altura do busto, encontramos o comprimento dos membros inferiores, considerando como tal, a parte do corpo compreendida entre o plano horizontal bi-isquiático e o solo.

Deste modo, subtraindo o valor médio do busto, ao valor médio da estatura, obtivemos nas nossas séries, para comprimento médio dos membros inferiores, 772.75 para o sexo masculino e 694.40 para o sexo feminino.

As diferenças entre as dimensões médias do busto e as dimensões médias dos membros inferiores, são, 102.65 para o sexo masculino e 134.70 para o sexo feminino, o que significa que as mulheres portuguesas têm o busto proporcionalmente mais comprido do que os homens.

Pretendendo conhecer com rigor a maneira como, em cada um dos sexos, a altura do busto varia em relação à estatura, determinámos o valor do coeficiente de correlação entre as duas dimensões, tendo obtido os seguintes resultados.

Séries	N.º de observações	Coefficiente de correlação
♂	200	$r = 0.74 \pm 0.021$
♀	150	$r = 0.78 \pm 0.021$

Estes valores denunciam uma correlação directa bastante elevada entre as duas medidas, o que indica que as dimensões do busto aumentam à medida que a estatura se eleva, sendo, no entanto, esse aumento relativamente maior nos indivíduos do sexo feminino.

Registamos no quadro seguinte as seriações dos valores obtidos na mensuração do Busto, agrupados em classes com o intervalo de 10 milímetros.

Série ♂		Série ♀	
Busto	Freqüências	Busto	Freqüências
780	1	740	1
790	0	750	0
800	1	760	2
810	4	770	3
820	5	780	9
830	13	790	10
840	10	800	4
850	19	810	16
860	22	820	21
870	27	830	17
880	22	840	26
890	24	850	12
900	12	860	13
910	22	870	8
920	7	880	2
930	5	890	5
940	2	900	0
950	4	910	0
—	—	920	1
Total	200	Total	150

ÍNDICE ESQUÉLICO

O Índice Esquélico ou relação centesimal entre a altura do busto e a estatura de pé, facilitando o conhecimento das proporções relativas da parte superior do corpo (altura do tronco, do pescoço e da cabeça) e dos membros inferiores, é um dos caracteres físicos que nos pode dar ensinamentos úteis para a caracterização antropométrica dos diversos grupos étnicos.

Na população portuguesa adulta o estudo do índice esquélico está limitado a um número restrito de observações, havendo simplesmente a considerar a média (51.6) obtida pelo Professor Dr. Mendes Correia sobre 25 observações do Dr. Ferraz de Macedo, e os resultados colhidos pelo Dr. J. R. dos Santos Júnior (1) em 27 indivíduos do sexo masculino (51.93) e 19 do sexo feminino (51.82), pertencentes à população de S. Pedro, do concelho de Mogadouro, do distrito de Bragança.

Os resultados obtidos nas nossas observações, vão a seguir registados.

	Série ♂	Série ♀
Valor médio.....	53.19 ± 0.066	54.41 ± 0.075
Desvio padrão....	1.39 ± 0.047	1.37 ± 0.053
Valor mínimo....	47.66	50.16
Valor máximo....	56.49	59.79
N.º de observações	200	150

Pelos valores médios encontrados e adoptando a classificação de Giuffrida-Ruggeri, os portugueses dos dois sexos são ligeiramente braquiesquélicos, o que significa que têm os membros inferiores proporcionalmente curtos, porquanto o busto atinge 53.19% para o sexo masculino e 54.41% para o sexo feminino, da estatura total do indivíduo de pé, sendo, como se vê por estes resultados, o busto relativamente mais comprido nas mulheres do que nos homens, como já tínhamos notado quando estudámos as dimensões do busto nos dois sexos.

(1) *Trabalhos da Sociedade Portuguesa de Antropologia e Etnologia*, vol. II, fase. II, Porto 1924, págs. 103-104.

Distribuindo as diferentes observações pelos 3 grupos em que Giuffrida-Ruggeri divide o índice esquérico, obtivemos os seguintes resultados.

Série ♂

Índice Esquérico	Observações	%
Macroesquéricos ($x - 51$)	11	5.5
Mesatiesquéricos ($51.1 - 53$).	73	36.5
Braquiesquéricos ($53.1 - x$)	116	58.0
	200	100.0

Série ♀

Índice Esquérico	Observações	%
Macroesquéricos ($x - 52$).	7	4.7
Mesatiesquéricos ($52.1 - 54$).	50	33.3
Braquiesquéricos ($54.1 - x$)	93	62.0
	150	100.0

Verifica-se pelos valores obtidos que, nos dois sexos, a distribuição se faz em proporções aproximadamente iguais, predominando os braquiesquéricos e encontrando-se os macroesquéricos representados na série masculina apenas por 5.5% dos casos e na série feminina por 4.7%.

Atendendo, pois, aos valores médios das séries estudadas e

à distribuição das diferentes observações pelos 3 grupos considerados por Guiuffrida-Ruggeri, os portugueses adultos dos dois sexos devem considerar-se como *braqui-mesatiesquéllicos*.

As seriações dos valores do Índice Esquéllico, obtidos nas nossas observações, vão registadas no quadro seguinte.

Série ♂		Série ♀	
Índice Esquéllico	Freqüências	Índice Esquéllico	Freqüências
47.5	1	50	1
48	1	50.5	0
48.5	0	51	1
49	1	51.5	4
49.5	0	52	2
50	1	52.5	7
50.5	4	53	14
51	9	53.5	15
51.5	10	54	24
52	21	54.5	22
52.5	22	55	21
53	27	55.5	17
53.5	34	56	12
54	23	56.5	3
54.5	21	57	3
55	13	57.5	3
55.5	8	58	0
56	2	58.5	0
56.5	2	59	0
—	—	59.5	0
—	—	60	1
Total	200	Total	150

o Determinando ainda para cada sexo, o valor do coeficiente

de correlação entre a Estatura e o Índice esquelico, obtivemos os resultados a seguir indicados,

Série	N.º de observações	Coefficiente de correlação
♂	200	$r = -0.42 \pm 0.039$
♀	150	$r = -0.34 \pm 0.048$

Por estes valores se nota que existe uma franca correlação inversa entre a estatura e o índice esquelico o que significa que o valor do índice baixa à medida que a estatura aumenta, baixando, porém, mais acentuadamente o valor do índice nos indivíduos do sexo masculino.

Pretendendo ainda conhecer qual é, para estaturas iguais, o valor médio do índice esquelico nos dois sexos, agrupámos os diversos indivíduos observados em classes com intervalos de 50 milímetros no valor da estatura, tendo eliminado as classes extremas as quais compreendiam um número muito pequeno de observações e utilizando somente as classes cuja representação numérica fôsse pelo menos de 20 indivíduos para cada sexo.

As classes preenchendo estas condições que pudémos utilizar, foram apenas duas, e os valores médios obtidos vão a seguir registados.

Estaturas	Série ♂		Série ♀	
	N.º de observações	Índice esquelico	N.º de observações	Índice esquelico
1.555	20	53.83	39	54.01
1.605	53	53.70	22	54.02

Por estes resultados se conclui que, de um modo geral, para estaturas iguais o índice esquelico é mais elevado nos indivíduos do sexo feminino.

ÍNDICE CEFÁLICO

Os resultados obtidos nas nossas observações vão a seguir indicados.

	Série ♂	Série ♀
Valor médio.....	75.97 ± 0.142	76.42 ± 0.171
Desvio padrão....	2.98 ± 0.100	3.11 ± 0.121
Valor mínimo.....	69.90	68.21
Valor máximo....	85.16	87.06
N.º de observações	200	150

Pelos valores médios obtidos, verifica-se que, tanto a série masculina como a série feminina são dolicocefalas, mostrando-nos ainda os referidos valores médios que a população portuguesa é das mais dolicocefalas da Europa.

A diferença entre o valor médio da série masculina e o valor médio da série feminina é igual a 0.45 ± 0.222 , sendo o seu desvio padrão igual a 0.33 ± 0.157 , pelo que se não pode atribuir significação estatística à diferença sexual das médias, visto essa diferença não ser superior ao triplo do seu desvio padrão.

Transcrevemos a seguir os resultados obtidos pelo Professor Dr. Eusébio Tamagnini no seu estudo do índice cefálico em 11.685 portugueses adultos do sexo masculino (1).

Valor médio.....	76.39 ± 0.02
Desvio padrão....	3.08 ± 0.01
Valor mínimo. . .	63
Valor máximo....	93

Comparando estes resultados com os que obtivemos na nossa série masculina, nota-se que o valor médio e o desvio padrão, são sensivelmente iguais nas duas séries, não tendo significação estatística a diferença (0.42 ± 0.148) entre as duas médias; apenas a amplitude de variação do índice cefálico na série estudada pelo Professor Eusébio Tamagnini é maior do que a da nossa série, o que não é estranhável se atendermos a que as nossas observações abrangem apenas 200 indivíduos, enquanto que a

(1) *Loc. cit.*, pág. 103.

série estudada pelo Professor Tamagnini é formada por 11.658 observações.

Pelo que se refere à série feminina, o resultado que obtivemos (76.42), aproxima-se sensivelmente do valor médio obtido pelo Dr. Luiz de Pina (1) em uma série constituída por indivíduos do sexo feminino de todas as províncias do país (76.83).

Agrupando as nossas observações segundo a classificação do seu índice cefálico, encontramos os seguintes valores.

Índice Cefálico	♂	%	♀	%
Dolicocéfalos (x — 76.9)	131	65.50	89	59.33
Mesaticéfalos (77 — 81.9)	61	30.50	54	36.00
Braquicéfalos (82 — x)	8	4.00	7	4.67
	200	100.00	150	100.00

Estes resultados mostram-nos que são aproximadamente iguais nas séries masculina e feminina, as percentagens de distribuição das diferentes observações por cada um dos grupos em que se divide o índice cefálico, predominando nos dois sexos os indivíduos dolicocéfalos e havendo uma fraca percentagem de braquicéfalos.

Atendendo, pois, aos valores médios obtidos e à distribuição das diferentes observações pelos 3 grupos considerados, vê-se que as nossas séries são nitidamente *dolico-mesaticéfalas*.

A conclusão idêntica chegou o Professor Eusébio Tamagnini, no seu estudo do índice cefálico em 11.658 portugueses adultos do sexo masculino, tendo obtido para cada uma das classes em que se divide o índice cefálico, as seguintes percentagens de distribuição dos diferentes indivíduos observados.

Dolicocéfalos	53.33 %
Mesaticéfalos	41.26 %
Braquicéfalos	5.42 %
	<hr/> 100.01 %

(1) *Arq. da Rep. de Antrop. Crim. do Porto*, fascículo 11, Setembro de 1931, pág. 143.

Apresentamos a seguir as seriações dos valores obtidos para o Índice cefálico nas nossas observações.

Série ♂		Série ♀	
Índice cefálico	Frequências	Índice cefálico	Frequências
69.50	2	68.50	1
70.50	2	69.50	1
71.50	14	70.50	1
72.50	13	71.50	5
73.50	21	72.50	12
74.50	28	73.50	12
75.50	25	74.50	19
76.50	27	75.50	20
77.50	27	76.50	18
78.50	11	77.50	20
79.50	12	78.50	15
80.50	5	79.50	7
81.50	5	80.50	8
82.50	3	81.50	4
83.50	3	82.50	2
84.50	1	83.50	2
85.50	1	84.50	2
—	—	85.50	0
—	—	86.50	0
—	—	87.50	1
Total	200	Total	150

Calculando ainda o valor médio do índice cefálico para cada

um dos 4 grupos de estaturas considerados por Topinard, obtemos os resultados que a seguir registamos.

Série ♂

Estaturas	Observações	Valor médio	Valor mínimo	Valor máximo
Baixas	43	76.35	71.58	85.16
Abaixo da média . .	59	75.89	71.11	84.41
Acima da média . .	50	76.51	71.78	82.70
Altas	48	75.22	69.90	83.07

Série ♀

Estaturas	Observações	Valor médio	Valor mínimo	Valor máximo
Baixas	26	76.65	72.38	84.48
Abaixo da média . .	50	76.71	69.47	84.07
Acima da média . .	43	76.53	71.04	87.06
Altas	31	75.58	68.21	80.92

Estes resultados mostram que, nos dois sexos, os valores médios dos três primeiros grupos, são aproximadamente iguais, havendo entre si diferenças que se podem considerar insignificantes, apenas se notando entre o valor médio do grupo das estaturas altas e o valor médio obtido para as estaturas baixas, uma diferença que excede ligeiramente uma unidade.

A observação dos valores máximo e mínimo de cada um dos quatro grupos de estaturas, revela-nos que em todos os grupos se encontram indivíduos braquicéfalos e dolicocefalos, excepto no grupo das estaturas altas do sexo feminino, o qual não inclui indivíduos braquicéfalos.

Segundo a classificação da sua estatura, os diferentes indivi-

duos observados distribuem-se pelas 3 classes em que se divide o índice cefálico, do seguinte modo.

Série ♂

Estaturas	Dolicocéfalos		Mesaticéfalos		Braquicéfalos	
	N.º de casos	%	N.º de casos	%	N.º de casos	%
Baixas	25	58.14	15	34.88	3	6.98
Abaixo da média .	40	67.80	17	28.81	2	3.39
Acima da média . .	32	64.00	17	34.00	1	2.00
Altas	34	70.83	12	25.00	2	4.17

Série ♀

Estaturas	Dolicocéfalos		Mesaticéfalos		Braquicéfalos	
	N.º de casos	%	N.º de casos	%	N.º de casos	%
Baixas	14	53.85	9	34.61	3	11.54
Abaixo da média .	28	56.00	19	38.00	3	6.00
Acima da média . .	27	62.79	15	34.88	1	2.33
Altas	20	64.52	11	35.48	0	—

Por estes quadros se nota que os indivíduos dolicocéfalos predominam nos 4 grupos de estaturas, aumentando, de um modo geral, a sua percentagem à medida que a estatura se eleva, notando-se ainda que os indivíduos braquicéfalos são em pequeno número, diminuindo, no sexo feminino, as suas percentagens à medida que a estatura se eleva e sendo muito irregular, no sexo masculino, a sua distribuição pelos 4 grupos de estaturas.

Calculando, porém, os coeficientes de correlação entre a Estatura e o Índice cefálico, para com maior precisão conhecermos

da maneira como estes dois caracteres variam em relação um ao outro, obtivemos os seguintes resultados.

Séries	N.º de observações	Coefficiente de correlação
♂	200	$r = -0.12 \pm 0.047$
♀	150	$r = -0.08 \pm 0.054$

Os coeficientes de correlação são tão insignificantes e os seus erros prováveis, comparativamente, tão elevados, que podemos concluir que os dois caracteres considerados variam independentemente um do outro nos portugueses adultos dos dois sexos.

COMPRIMENTO E LARGURA DE CABEÇA

Os valores obtidos nas duas séries para o *diâmetro antero-posterior máximo da cabeça*, são os seguintes:

	Série ♂	Série ♀
Valor médio.....	193.865 ± 0.299	182.493 ± 0.354
Desvio padrão.....	6.27 ± 0.211	6.44 ± 0.251
Valor mínimo.....	177	166
Valor máximo.....	212	197
N.º de observações.	200	150

Estes resultados mostram-nos que o valor médio do comprimento da cabeça nos indivíduos do sexo masculino, excede o valor médio obtido para os indivíduos do sexo feminino em 11.372 ± 0.465 , sendo o desvio padrão desta diferença igual 0.69 ± 0.328 , pelo que se deve atribuir significação estatística à diferença sexual das médias, visto ser muito superior a três vezes o respectivo desvio padrão.

Os valores obtidos, nas duas séries, para o *diâmetro transversal máximo de cabeça*, vão a seguir registados.

	Série ♂	Série ♀
Valor médio.....	147.265 ± 0.238	139.354 ± 0.293
Desvio padrão.....	4.99 ± 0.168	5.32 ± 0.207
Valor mínimo.....	135	124
Valor máximo.....	158	153
N.º de observações.	200	150

Na série masculina, o valor médio do diâmetro transverso da cabeça excede o valor médio obtido para a série feminina em 7.911 ± 0.371 , sendo o desvio padrão desta diferença igual a 0.55 ± 0.262 , tendo, portanto, significação estatística a diferença sexual das médias.

As seriações dos valores obtidos nas duas séries, para o *Comprimento e Largura da cabeça*, constam dos seguintes quadros.

Determinámos ainda os valores do coeficiente de correlação entre a estatura e cada um dos dois diâmetros utilizados na determinação do índice cefálico, tendo obtido os resultados a seguir indicados.

Estatura e Diâmetro ântero-posterior

Séries	N.º de observações	Coefficiente de correlação
♂	200	$r = 0.34 \pm 0.042$
♀	150	$r = 0.35 \pm 0.048$

Estatura e Diâmetro transverso

Séries	N.º de observações	Coefficiente de correlação
♂	200	$r = 0.21 \pm 0.045$
♀	150	$r = 0.24 \pm 0.051$

Estes valores mostram-nos que existe uma pequena correlação directa entre a estatura e os diâmetros cefálicos, antero-posterior máximo e transverso-máximo, sendo, porém, mais importante do que a encontrada entre a estatura e o índice cefálico.

Os valores do coeficiente de correlação entre o diâmetro antero-posterior e a estatura, são contudo mais elevados do que os valores obtidos entre o diâmetro transverso e a estatura, o que significa que o desenvolvimento do diâmetro antero-posterior é mais proporcional ao desenvolvimento da estatura do que o desenvolvimento do diâmetro transverso.

Série ♂		Série ♀	
Comprimento da cabeça	Freqüências	Comprimento da cabeça	Freqüências
177	2	166	1
178	0	167	1
179	1	168	0
180	3	169	0
181	1	170	5
182	4	171	0
183	2	172	1
184	0	173	5
185	11	174	3
186	6	175	4
187	5	176	3
188	6	177	5
189	9	178	9
190	10	179	15
191	8	180	10
192	16	181	12
193	14	182	6
194	5	183	6
195	6	184	6
196	16	185	8
197	15	186	9
198	9	187	11
199	14	188	3
200	7	189	4
201	5	190	3
202	9	191	4
203	4	192	5
204	3	193	3
205	4	194	2
206	1	195	3
207	2	196	2
208	0	197	1
209	0	—	—
210	1	—	—
211	0	—	—
212	1	—	—
Total	200	Total	150

Série ♂		Série ♀	
Largura da cabeça	Frequências	Largura da cabeça	Frequências
135	1	124	1
136	1	125	0
137	4	126	0
138	4	127	0
139	7	128	1
140	6	129	0
141	4	130	5
142	8	131	2
143	10	132	5
144	13	133	8
145	15	134	7
146	10	135	8
147	14	136	7
148	15	137	6
149	18	138	18
150	22	139	9
151	6	140	16
152	15	141	8
153	6	142	9
154	6	143	9
155	5	144	7
156	2	145	6
157	7	146	4
158	1	147	3
—	—	148	2
—	—	149	1
—	—	150	4
—	—	151	2
—	—	152	1
—	—	153	1
Total	200	Total	150

CONCLUSÕES

I. — A estatura média dos portugueses que observámos, tanto nos indivíduos do sexo masculino (1^m.648) como nos indivíduos do sexo feminino (1^m.523), é ligeiramente inferior à média da estatura humana para cada um dos sexos.

II. — A diferença sexual das médias da estatura é igual a 125 milímetros, o que corresponde aproximadamente à diferença que é habitual encontrar-se entre as médias das estaturas nos indivíduos dos sexos masculino e feminino das diferentes populações.

III. — No sexo masculino a percentagem dos indivíduos de estaturas altas e baixas é aproximadamente igual à percentagem dos indivíduos pertencentes aos dois grupos de estaturas médias, enquanto que no sexo feminino predominam os indivíduos dos dois grupos de estaturas médias.

IV. — Nos portugueses do sexo masculino, a média da Grande Envergadura (1.682) excede em 34 milímetros a média da estatura, sendo nos portugueses do sexo feminino a média da Grande Envergadura (1.525) sensivelmente igual à média da estatura.

V. — Em 80 % dos portugueses do sexo masculino, a Envergadura é superior à estatura, enquanto que no sexo feminino os indivíduos nas mesmas condições compreendem apenas 51 %.

VI. — Os valores da relação centesimal entre as médias da Grande Envergadura e da Estatura nos portugueses dos dois sexos, são 102.05 para o sexo masculino e 100.09 para o sexo feminino.

VII. — Existe uma correlação directa muito elevada entre a Grande Envergadura e a Estatura, nos portugueses dos dois sexos.

VIII. — Os valores médios da altura do Busto, nos portugueses dos dois sexos, são, 875 milímetros para os indivíduos

do sexo masculino e 829 milímetros para os indivíduos do sexo feminino, sendo conseqüentemente os valores médios do comprimento dos membros inferiores, 773 milímetros para os indivíduos do sexo masculino e 694 milímetros para os indivíduos do sexo feminino.

IX. — As diferenças entre o valor médio do comprimento dos membros inferiores e o valor médio da altura do busto, nos portugueses que observámos, são, 102 milímetros para os indivíduos do sexo masculino e 135 milímetros para os indivíduos do sexo feminino, o que significa que as mulheres têm o busto proporcionalmente mais comprido do que os homens.

X. — Pelos valores do coeficiente de correlação entre o Busto e a Estatura, verifica-se que, nos portugueses dos dois sexos, as dimensões do Busto aumentam à medida que a Estatura se eleva, sendo no entanto êsse aumento relativamente maior nos indivíduos do sexo feminino.

XI. — Os valores médios do Índice Esquélico nos portugueses dos dois sexos, são, 53.19 para o sexo masculino e 54.41 para o sexo feminino.

XII. — A distribuição dos diferentes indivíduos observados pelos três grupos em que se divide o índice esquélico, mostra-nos que os portugueses dos dois sexos são *braqui-mesatíesquéllicos*, registando-se uma percentagem muito pequena de macroesquélicos.

XIII. — Pelos valores do coeficiente de correlação entre o Índice Esquélico e a Estatura, verifica-se que, nos portugueses dos dois sexos, o índice esquélico diminui à medida que a estatura aumenta, sendo, no entanto, a baixa do valor do índice, mais acentuada nos indivíduos do sexo masculino.

XIV. — Para estaturas iguais, o valor do índice esquélico é mais elevado nos indivíduos do sexo feminino.

XV. — Os valores médios do Índice Cefálico nos portugueses que observámos, são 75.97 para o sexo masculino e 76.42 para

o sexo feminino, não tendo significação estatística a diferença sexual das médias.

XVI. — A distribuição dos diferentes indivíduos observados pelos 3 grupos em que se divide o índice cefálico, mostra-nos que os portugueses dos dois sexos, são nitidamente *dolico-mesaticéfalos*, registando-se uma percentagem muito pequena de braquicéfalos.

XVII. — Existe uma correlação inversa insignificante, entre a Estatura e o Índice Cefálico, podendo, pois, dizer-se que estes dois caracteres, nos portugueses adultos dos dois sexos, variam independentemente um do outro.

XVIII. — Nos portugueses dos dois sexos, os valores médios do comprimento da cabeça, são 193.86 para o sexo masculino e 182,493 para o sexo feminino, tendo significação estatística a diferença sexual das médias.

XIX. — Nos portugueses dos dois sexos, os valores médios da largura da cabeça, são 147.265 para o sexo masculino e 139.354 para o sexo feminino, tendo igualmente significação estatística a diferença sexual das médias.

XX. — Existe uma pequena correlação inversa entre a estatura e cada um dos dois diâmetros cefálicos, ântero-posterior máximo e transverso-máximo, sendo, porém, mais elevada do que a correlação entre a estatura e o índice cefálico.

XXI. — Pelos valores do coeficiente de correlação entre a estatura e cada um dos dois diâmetros cefálicos, ântero-posterior máximo e transverso máximo, verifica-se que o desenvolvimento do diâmetro ântero-posterior é mais proporcional ao desenvolvimento da estatura do que o desenvolvimento do diâmetro transverso.

(Investigações subsidiadas pela Junta de Educação Nacional).

ANTÓNIO ARMANDO THEMIDO.

A propósito do índice cefálico dos portugueses

Questões de método

A necessidade de tratamento estatístico rigoroso dos dados antropométricos é universalmente reconhecida pelos investigadores científicos que se não limitam a uma exposição, mais ou menos grosseira, dos resultados dos seus estudos.

Muitos dos chamados caracteres quantitativos, são *caracteres polímeros*, cuja expressão fenotípica está na dependência da acção cumulativa de numerosos factores genéticos, e cuja variabilidade se traduz por curvas binomiais, definidas por equações cujos parâmetros é necessário determinar para podermos fazer uma idea exacta da maneira como os valores individuais se distribuem uns em relação aos outros.

Já passou o tempo em que os antropólogos se contentavam nas suas comparações étnicas com os *valores absolutos das médias empíricas*, quando muito subsidiadas pela análise comparativa das percentagens numéricas da distribuição dos valores observados pelas categorias estabelecidas, mais ou menos arbitrariamente, para a classificação dos caracteres.

Hoje, para se efectuar o estudo científico da distribuição dos valores quantitativos de qualquer carácter polímero duma população, torna-se absolutamente indispensável:

- a) Indicar a proveniência do material envolvido nos estudos de modo que haja sempre a certeza, quando se fazem comparações, de não se cometerem erros resultantes da *defeituosa composição das séries*.
- b) Efectuar as mensurações em *estreita obediência à técnica oficialmente recomendada* pelos congressos científicos da especialidade.

Quando, por motivos especiais, houver necessidade de

adoptar técnicas diferentes, deve fazer-se a declaração expressa desse facto, com a indicação precisa do método operativo seguido. Sem este cuidado será impossível apreciar o significado antropológico dos caracteres estudados.

- c) Efectuar a *seriação* dos valores individuais observados, indicando sempre rigorosamente quais os limites dos *intervalos das classes* e a *posição do pé da ordenada* que, na representação gráfica, *corresponde à frequência relativa a cada uma das classes*. O valor da média está com efeito na dependência da técnica seguida na *seriação*.

Suponhamos que se efectua o estudo do índice cefálico numa população qualquer, e que os valores individuais do índice se determinam, como correntemente se faz, com a aproximação até às centésimas.

Suponhamos também que, para efectuar a *seriação*, adoptamos uma unidade de índice como grandeza do intervalo das classes.

É evidente que poderemos efectuar a *seriação* de muitas maneiras diferentes, mas nem todas são estatisticamente admissíveis.

Assim, por exemplo, se o valor mais baixo observado for 64.51, poderemos fazer a *seriação*, com intervalos de classe iguais à unidade, da seguinte maneira:

1. ^a classe	de 64.50 a 65.49;
2. ^a classe	de 65.50 a 66.49;
3. ^a classe	de 66.50 a 67.49.
.

Mas também poderíamos *seriar* os valores do índice de outra forma:

1. ^a classe	de 64.00 a 64.99;
2. ^a classe	de 65.00 a 65.99;
3. ^a classe	de 66.00 a 66.99.
.

É evidente que há cem maneiras diferentes de efectuar a *seriação* conforme o valor que escolhermos para limite inferior da primeira classe.

Fixados os limites das classes, a seriação não fica ainda determinada pois, como é óbvio, cada uma das classes contém um certo número de indivíduos, que correspondem, em regra, a diferentes valores do carácter (*variantes*) e é indispensável representar cada classe por um só valor.

Desnecessário é demonstrar que a única solução admissível consiste em tomar, para representação de cada classe, o valor do carácter correspondente ao centro do intervalo respectivo.

Assim, na primeira seriação indicada, as classes seriam representadas pelos seguintes valores do índice:

1. ^a classe	65;
2. ^a classe	66;
3. ^a classe	67.
.	

Ao passo que, na segunda seriação, os valores representativos das classes se ordenariam destoutra forma:

1. ^a classe.	64.50;
2. ^a classe.	65.50;
3. ^a classe.	66.50.
.	

É também fácil verificar que, se as observações forem suficientemente numerosas, *a grandeza da média é independente dos valores que marcam os limites das classes*, sempre que o intervalo das classes esteja em harmonia com a amplitude da variação do carácter e *as classes sejam representadas pelos valores centrais dos intervalos respectivos*.

Suponhamos porém que resolvíamos tomar para representação das classes, não os valores centrais dos respectivos intervalos, mas qualquer dos valores que marcam os seus limites, o inferior ou o superior.

É fácil compreender que o valor da média se deslocará num sentido, ou no contrário, conforme o limite que escolhermos para representação das classes.

Com efeito, a representação de qualquer classe pelo valor

central do respectivo intervalo é um artifício, porque, de facto, atribuímos a êsse valor uma freqüência que é igual à soma das freqüências dos distintos valores occorrentes no intervalo em questão. O artifício é porém legítimo, se a seriação fôr suficientemente numerosa, porque, então, o acréscimo do valor que atribuímos às variantes situadas àquem do centro do intervalo, será sensivelmente compensado pelo decréscimo que resulta de darmos, às variantes situadas do outro lado dêsse centro, valores inferiores aos realmente observados.

Atribuir, porém, a tôdas as variantes contidas num dado intervalo o valor relativo a qualquer dos seus limites o mesmo é, de facto, que aumentar ou diminuir de meia unidade, aproximadamente, a grandeza da classe correspondente, conforme se toma o limite superior ou o inferior, respectivamente, para representar a classe em questão.

No primeiro caso, com efeito, tomando os limites superiores dos intervalos para representação das classes, as variantes contidas em cada intervalo sofrem um aumento de valor, variável com a sua posição, que, em média, será aproximadamente igual a meia unidade, pois tal aumento vai diminuindo à medida que nos aproximamos do limite superior do intervalo, que supomos de amplitude igual à unidade.

O contrário terá evidentemente lugar se, para representarmos as classes, tomarmos os limites inferiores dos respectivos intervalos.

Êste erro tem sido muitas vezes cometido por diferentes investigadores, e compreende-se facilmente a sua importância se reflectirmos em que a diferença de meia unidade no valor médio dum carácter é muito grande e pode ter significação estatística, quando se efectua comparações entre séries de valores do mesmo carácter, na mesma, ou em diferentes populações.

É o que se nota, por exemplo, nas seriações, publicadas pelo nosso saúdoso mestre, Dr. Álvaro Basto, relativas aos crânios estudados pelo Dr. Ferraz de Macedo (1).

(1) Dr. Álvaro Basto. — *Índices cefálicos dos portugueses*, pág. 59 e 60; Quadros V e VI.

Os índices médios calculados directamente a partir dos valores observados são: 74.46 (β) e 75.56 (φ).

Determinando, porém, os mesmos índices a partir das seriações publicadas obtêm-se os números 74.02 (β) e 75.07 (φ), facto que prova estarem os centros das classes, nas seriações, deslocados de 0,50, no sentido do limite inferior dos intervalos respectivos.

O mesmo erro foi cometido pelo Dr. Santana Marques, como já tivemos ocasião de notar (1). Os índices médios distributais publicados por este investigador são 0.50 mais altos do que os que se extraem das suas seriações (2).

d) O estudo da caracterização antropológica duma população é tarefa mais que suficiente para absorver a actividade de muitos investigadores. Desperdício de tempo e energia será organizar os relatórios dos estudos de forma tal que não seja possível ir incorporando umas nas outras as séries parciais das observações realizadas.

Impõe-se por isso a publicação sistemática das observações individuais ou, pelo menos, das seriações das frequências absolutas encontradas.

e) Finalmente, quando se trata de caracteres que manifestam diferenças sexuais indiscutíveis, ou prováveis, é indispensável efectuar, separadamente para cada sexo, a publicação das seriações respectivas.

* * *

As considerações que acabamos de expor foram-nos sugeridas pela leitura de alguns trabalhos, ultimamente publicados, sobre o índice cefálico dos portugueses, que, podendo ter uma alta importância para a resolução do problema da distribuição deste carácter na nossa população, perdem muito do seu valor comparativo pelo facto de não fornecerem elementos suficientes para adequada utilização pelos outros estudiosos do assunto.

(1) Dr. Eusébio Tamagnini. — *Sobre a distribuição geográfica dalguns caracteres fundamentais da população portuguesa*. — *Revista da Faculdade de Ciências*. — Vol. II, pág. 100 e seg.

(2) Dr. Santana Marques. — *Materiais para o estudo do Povo português*. — *O Instituto*. — Vol. LVI, pág. 338.

Assim o Sr. Dr. Luiz de Pina, exemplificando a proposta do Prof. Frassetto, da Universidade de Bolonha, para unificação dos métodos antropométricos, publicou um estudo sobre a *Distribuição do índice cefálico nos criminosos portugueses* que envolve 910 indivíduos (660 ♂ e 250 ♀), cujas fichas se encontram arquivadas na *Repartição de Antropologia Criminal do Porto* (1).

Na última reunião do *Congresso da Associação Luso-Espanhola para o progresso das Ciências*, realizado em Lisboa em Junho de 1932, tivemos oportunidade de nos pronunciarmos sobre as vantagens e os inconvenientes da adopção da proposta do Prof. Frassetto.

Como então mostrámos, a aparente simplificação e uniformização do método de classificação dos índices craniométricos, que se obteria com a proposta deste distinto professor, não compensa a inutilização, para efeitos comparativos, da enorme massa de dados já acumulados por outros observadores. Além do que o método proposto não se justifica suficientemente, nem no seu aspecto estatístico, nem no seu aspecto prático.

Assim, por exemplo, a substituição da *média aritmética* pela *moda* é inadmissível (2).

Com efeito, a primeira dificuldade está na determinação prática da variante que corresponde à frequência máxima da distribuição dos valores observados.

De nada serve tomar como moda a variante correspondente ao ponto mediano do intervalo da classe onde cai a frequência máxima, porque tal ponto está na completa dependência da escala adoptada para os intervalos das classes. Se, para evitarmos esta dificuldade, fazemos o intervalo das classes muito pequeno, então as frequências das classes tornam-se também muito pequenas e a sua distribuição muito irregular.

Esta dificuldade poderia evitar-se aumentando suficientemente,

(1) *Arquivo da Repartição de Antropologia Criminal, Psicologia experimental e Identificação do Porto*. — Fasc. 2.º, pág. 117.

(2) A *moda* representa, como se sabe, a variante de frequência máxima. O termo foi introduzido pelo Prof. Karl Pearson — *Skew correlation in Homogeneous Material, Phil. Trans. Roy. Soc. Series A, Vol. CLXXXVI, 1896, pág. 343.*

O Sr. Dr. Luiz de Pina chama, porém, *módulo* à classe de maior frequência (cf. *op. cit.*, pág. 125) o que não se justifica, além doutras razões, por não se respeitar o *princípio da prioridade*.

o número das observações, mas como na prática apenas dispomos de séries limitadas e, em regra, insuficientemente numerosas, impõe-se a recurso à *perequação* como meio prático de regularizar a distribuição e podermos determinar, com aproximação suficiente, o valor da moda.

Mas o único sistema de perequação aceitável, *se quisermos ter em consideração todas as observações efectuadas*, consiste em *ajustar os valores realmente observados a uma curva ideal de frequência*.

A moda pode ser então precisamente determinada; não é mais do que o valor de x correspondente ao máximo da curva, calculado por meio da equação respectiva.

Por outro lado, o método proposto pelo Prof. Frassetto pressupõe que os *caracteres antropométricos variam normalmente*, isto é, que a sua distribuição é simétrica para um e outro lado da média, que, nesta hipótese, será coincidente com a moda.

Mas tal pressuposição é puramente arbitrária e não está de acôrdo com a realidade dos factos. As populações humanas actuais são, em regra, agregados heterogêneos de indivíduos provenientes das mais variadas mestiçagens, e seria milagre que, na expressão fenotípica das suas características, se observasse sempre, ou mesmo com frequência apreciável, aquela regularidade de distribuição de valores que condiciona a *binomial simétrica*.

Como afirma Yule: « *The arithmetic mean should invariably be employed unless there is some very definite reason for the choice of another form of average* » (1).

Quanto aos inconvenientes práticos da introdução do método proposto pelo Prof. Frasseto, o próprio Sr. Dr. Luiz de Pina os reconhece ao pretender comparar os resultados a que chegou com os de outros estudiosos que anteriormente se ocuparam do mesmo assunto. Para poder concluir que os seus resultados se aproximam dos já conhecidos teve de calcular também a média aritmética.

Nesta comparação limitou-se apenas a considerar os valores absolutos das médias, pois não calculou os respectivos erros prováveis, quer das médias, quer das suas diferenças, o que é indispensável quando se pretende ser rigoroso e apreciar o valor estatístico de tais diferenças.

(1) *An introduction to the Theory of Statistics*, pág. 123.

Um ponto também importante diz respeito à composição das séries comparadas.

A série estudada pelo Sr. Prof. Mendes Correia é respeitante a 1509 criminosos do sexo masculino das várias províncias do país (1).

Não diz o autor como foram obtidos os dados respectivos; presumimos que provêm do Arquivo anexo à Cadeia Civil do Pôrto (2).

As séries estudadas pelos Srs. Drs. Carlos Lopes e Luiz de Pina foram estabelecidas com elementos fornecidos pela *Repartição de Antropologia criminal, Psicologia experimental e Identificação civil do Pôrto*.

Não sabemos porém se os indivíduos estudados pelo Senhor Dr. Carlos Lopes estão também compreendidos nas séries que serviram de objecto às investigações feitas pelo Sr. Dr. Luiz de Pina, cujos resultados estão publicados no fascículo 2.º do Arquivo da referida Repartição.

Não sabemos também se algum dos indivíduos que serviram de base ao estudo do Sr. Prof. Mendes Correia estão incluídos nas séries dos dois últimos investigadores, dúvida que é admissível pelo facto de terem sido transferidos para a referida Repartição os serviços que anteriormente competiam aos Postos antropométricos anexos às Cadeias Civis (3).

No caso dos três grupos de observações serem independentes, pena é que não tivessem sido publicadas tôdas as seriações porque se podiam constituir duas séries compostas, razoavelmente numerosas, uma para cada sexo, capazes de fornecerem preciosos elementos de informação nas comparações com indivíduos normais. Com efeito essas séries seriam formadas por 2.269 (♂) e mais de 350 (♀) (4).

(1) *Anais da Academia Politécnica do Pôrto*. — Vol. VII, pág. 214.

(2) Mendes Correia. — *Os criminosos portugueses*, pág. 132.

(3) Decreto n.º 5.023, de 3 de Dezembro de 1918, cit. em *Arquivo da Repartição de Antropologia Criminal, Psicologia experimental e Identificação civil do Pôrto*. — Fase. 1.º, pág. 9.

(4) O Sr. Prof. Mendes Correia publicou a seriação das suas 1 509 observações mas, além de não indicar a maneira como formou as classes, encurtou arbitrariamente o campo de variação de carácter, incluindo na 1.ª classe todos os indivíduos com valores do índice abaixo de 67, e na última todos aqueles cujo índice era igual ou superior a 86.

O Sr. Prof. Mendes Correia também não indica o número das mulheres

Vê-se bem como a falta de atenção a certas minúcias de técnica pode consideravelmente diminuir a importância prática de trabalhos valiosos.

O Sr. Dr. Luiz de Pina publicou também no fascículo 2.º do *Arquivo da Repartição de Antropologia Criminal, etc.*, pág. 143, um artigo sobre *A acentuada dolicocefalia dos naturais da cidade do Porto* (1).

Neste estudo chegou aos seguintes resultados:

Índice cefálico médio	Erro médio (2)	Desvio padrão
M	Σ_m	σ
200 ♂ 74.93;	0.185;	2.61;
150 ♀ 75.79;	0.282;	3.45.

E, comparando estes resultados com os correspondentes a uma série de 1.000 portugueses, vivos, originários de todas as províncias do país, conclui que «os homens originários do Porto acusam uma dolicocefalia mais marcada de que os portugueses em geral, sendo as mulheres menos dolicocefalas».

Em primeiro lugar, observaremos que o Sr. Dr. Luiz de Pina não publica as seriações respectivas, o que é de lastimar; assim não temos maneira de apreciar a sua composição, elemento in-

criminosas que estudou; apenas declara que o seu índice médio é igual a 74.1. — Cf. Mendes Correia, *Os criminosos portugueses*, pág. 158.

(1) O mesmo material serviu de base a um outro artigo — *O índice cefálico da população do Porto* — que o referido autor publicou nos «*Trabalhos da Sociedade Portuguesa de Antropologia*», vol. V, pág. 338.

(2) Os números sob esta rubrica referem-se, sem sombra de dúvida, ao erro médio e não ao erro provável, como vem indicado no artigo que veio a lume nos «*Trabalhos da Sociedade Portuguesa de Antropologia*», vol. V, pág. 341.

O valor do desvio padrão da série masculina (2.61), publicado no *Arquivo*, está errado; o valor exacto (2.61) deve ser o que se encontra no segundo artigo publicado nos *Trabalhos*.

O número que nos dois artigos se publica como valor do erro médio da média feminina, a não ser que o valor do desvio padrão não seja realmente o indicado, está também errado.

A fórmula geral do erro médio

$$\Sigma_m = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

dá para este caso,

$$\Sigma_m = 0.282.$$

dispensável para ajuizarmos com segurança da normalidade ou anormalidade da sua constituição.

Um facto nos faz imediatamente suspeitar da normalidade da série masculina; refere-se ao confronto do valor encontrado para o seu desvio padrão (2.61) com o da série feminina (3.45) (1).

Estes números indicam maior variabilidade da série feminina, o que está em desacôrdo com os factos geralmente observados; as mulheres são, em regra, nos seus diferentes caracteres morfológicos, menos variáveis que os homens, como tem sido verificado para os portugueses (Quadro I)

QUADRO I

Observadores	Número de casos	σ	
		♂	♀
Dr. Carlos Lopes (2) — (vivo)	100	3.20	—
Idem	100	—	3.00
Dr. Santos Júnior (3) — (vivo).	27	3.11	—
Idem	10	—	2.00
Dr. António Temido (4) — (vivo).	200	2.98	—
Idem	150	—	3.11
Dr. Barros e Cunha (5) — (crânio).	355	3.56	—
Idem	213	—	2.84
Dr. Ferraz de Macedo (6) — (crânio).	494	3.46	—
Idem	506	—	3.20

Por outro lado, seleccionando, dentre as observações que

(1) Como já acentuámos (cf. nota 2 da pág. anterior), não temos a certeza da exactidão do valor de σ para a série feminina (3.45). As dúvidas determinadas pela consideração da variabilidade comparada das duas séries (♂ e ♀), são condicionadas por este facto.

(2) *Arquivo da Repartição de Antropologia Criminal, etc.* — Fase. 1.º, pág. 44.

(3) *Trabalhos da Sociedade Portuguesa de Antropologia e Etnologia.* — Vol. II, pág. 106.

(4) *Sobre alguns caracteres antropométricos da população portuguesa.* — *Revista da Faculdade de Ciências.* — Vol. II, fase. 4.º.

(5) *Contribuições para o estudo da Antropologia Portuguesa*, IX, p. 212.

(6) Valores calculados pelo Sr. Dr. Barros e Cunha.

serviram de base ao nosso estudo sobre *A distribuição geográfica do índice cefálico dos portugueses*, os dados referentes à cidade do Pôrto, organizámos uma série com 295 ♂, que agora publicamos (Quadro III), cujas características são

$$M = 76.13 \pm 0.11; \quad \sigma = 2.91 \pm 0.08;$$

e não diferem estatisticamente dos valores relativos ao distrito do Pôrto, por nós anteriormente publicados (cf. *Sobre a distribuição, etc.*, *Revista da Faculdade de Ciências*, vol. II, Quadro III, pág. 113), facto que nos parece natural (1).

Estamos assim em presença de duas séries distintas de observações (a do Sr. Dr. Luiz de Pina e a nossa) referentes à mesma população (cidade do Pôrto) que não são concordantes nos resultados.

Mas a série que serviu para os estudos do Sr. Dr. Luiz de Pina não se pode considerar, sem ulterior confirmação, representativa da população da cidade do Pôrto.

Além das razões já indicadas, — a sua menor variabilidade em confronto com a da série feminina — podemos ainda acrescentar a sua *falta de precisão*, ou segurança. Juntando à série dos 200 portuenses do Sr. Dr. Luiz de Pina a série das nossas observações sobre 295 habitantes da mesma cidade, obtém-se uma série composta de 495 indivíduos, cujo índice cefálico médio, igual a 75.64, difere estatisticamente do que obteve este investigador (74.93).

Mas, qualquer média somente se pode considerar definitiva, quando a introdução de mais elementos extraídos da mesma população não alterar o seu valor dum modo estatisticamente significativo (2).

(1) Verifica-se também que o índice cefálico médio dos portuenses, extraído desta série, não difere estatisticamente do valor correspondente aos portugueses em geral ($M = 76.39 \pm 0.02$).

(2) A significação estatística da *diferença de tipo* entre uma população qualquer e um grupo dela extraído, no caso da variação normal, é dada pela expressão (*Revista da Universidade de Coimbra*. — Vol. IV, pág. 590).

$$\frac{m - M}{\sqrt{\frac{\Sigma^2}{N} + \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{2n}{N}\right) - \frac{n(m - M)^2}{N(N - n)}}};$$

Notaremos ainda que os números que o Sr. Dr. Luiz de Pina apresenta como representativos dos valores do *índice cefálico dos portugueses em geral*, dizem respeito a uma série de 1.000 indivíduos dos dois sexos «originários de tôdas as províncias do país» (*op. cit.*, pág. 143).

onde

M = média geral da população;
 Σ = desvio padrão respectivo;
 N = número total dos indivíduos;

e

m = média do grupo extraído;
 σ = o seu desvio padrão;
 n = número dos indivíduos que o constituem.

Como no nosso caso:

$$\begin{array}{ll} M = 75.64; & m = 74.93; \\ \Sigma = 2.85; & \sigma = 2.61; \\ N = 495; & n = 200; \end{array}$$

e

$$m - M = - 0.71;$$

aquela expressão toma o valor

$$-\frac{0.71}{0.1703} = - 4.58.$$

A diferença entre o valor médio do índice cefálico da população portuense (200 + 295) e o do grupo de indivíduos estudados pelo Sr. Dr. Luiz de Pina sendo sensivelmente igual 4,5 vezes o seu desvio padrão, é significativa. A média obtida pelo Sr. Dr. Luiz de Pina não merece por isso confiança.

O cálculo do desvio padrão Σ do grupo composto (200 + 295) efectua-se pela fórmula conhecida (Yule, *op. cit.*, pág. 142)

$$N \times \Sigma^2 = N_1 (\sigma_1^2 + \delta_1^2) + N_2 (\sigma_2^2 + \delta_2^2);$$

onde

N = número de indivíduos do grupo composto;
 Σ = seu desvio padrão;
 N_1 e N_2 = número dos indivíduos dos dois subgrupos;
 σ_1 e σ_2 = os desvios padrões respectivos;
 δ_1 e δ_2 = as diferenças entre as médias dos subgrupos e a média geral do grupo composto.

O autor não publica as seriações, limitando-se a indicar os valores médios que obteve para o índice, nos dois sexos, e abstraiu dos desvios padrões e erros prováveis dos respectivos valores.

As suas médias, pelo menos a referente ao sexo masculino, não podem ter a pretensão de representar os valores típicos da população portuguesa.

Numa das sessões do Congresso Internacional de Antropologia, realizado em Coimbra em Setembro de 1930, tivemos oportunidade de comunicar os resultados dos nossos estudos sobre a distribuição do índice cefálico nos portugueses. Êsses estudos abrangem 11.658 observações, número incomparavelmente maior do que aquele que serviu de base ao trabalho do Sr. Dr. Luiz de Pina.

Êsses resultados estão publicados, em resumo, nas actas do referido Congresso, e por extenso na *Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra*, vol. II, pág. 100 e seg.

O que ficou definitivamente estabelecido quanto ao índice cefálico, no vivo, dos portugueses do sexo masculino, corresponde aos seguintes valores característicos:

$$M = 76.39 \pm 0.02 \quad \text{e} \quad \sigma = 3.08 \pm 0.01.$$

As observações do Sr. Luiz de Pina não alteram estes resultados, pelo menos quanto ao valor médio do índice, como seria fácil de demonstrar.

* * *

Temos notado que, sistematicamente, alguns estudiosos de Antropologia, naturalmente com o intuito illusório de aumentarem o número das observações que servem de base às suas médias e, por conseguinte, o grau da sua precisão, costumam juntar as séries femininas com as masculinas.

Semelhante processo estatístico apenas é admissível nos casos em que os caracteres observados não manifestam *diferença sexual significativa*.

Já tivemos ocasião de nos referir aos erros, por vezes importantes, que resultam d'êste facto (cf. Dr. Eusébio Tamagnini, *O índice cefálico e a criminalidade — Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra*, vol. I, pág. 135).

É precisamente o caso do índice cefálico. As maiores auto-

ridades estão de acôrdo sôbre este ponto. Assim, por exemplo, R. Martin, *Lehrbuch der Anthropologie*, (1.^a edição, pág. 680), diz: « Deutlich ist den meisten Rassen auch die *sexuelle Differenz*, insofern als der weibliche Schädel einen etwas höheren Index besitzt, als der männlich, d. h. sich etwas mehr der Rundköpfigkeit nähert. Demgemäss ist auch die Verteilung der Individualwerte einer Reihe bei den beiden Geschlechtern etwas verschieden ».

Desta opinião é igualmente K. Saller, *Leitfaden der Anthropologie*, pág. 50, que propõe esquemas diferentes para a classificação do índice cefálico nos dois sexos.

Os mesmos resultados têm sido registados pelos observadores portugueses, entre os quais está o Sr. Dr. Luiz de Pina, como se reconhece pelo Quadro II

QUADRO II
Índice cefálico

	Número de observações	♂		Número de observações	♀	
		M	σ		M	σ
Ferraz de Macedo — (crânio)	(494)	74.50	3.46	(506)	75.58	3.20
Barros e Cunha — (crânio)	(355)	74.25 ± 0.13	3.56 ± 0.09	(213)	75.23 ± 0.13	2.83 ± 0.09
Carlos Lopes — (vivo)	(100)	74.96 ± 0.22	3.20	(100)	75.84 ± 0.20	3.00
Luiz de Pina — (vivo — Portugueses em geral)	(?)	75.82	?	(?)	76.83	?
Fonseca Cardoso — (vivo)	(150)	77.3	?	(65)	77.5	?
António Temido — (vivo)	(200)	75.97 ± 0.14	2.98 ± 0.10	(150)	76.42 ± 0.17	3.11 ± 0.12

Os dados conhecidos referentes à diferença sexual do índice cefálico dos criminosos revelam o mesmo facto; apenas o Sr. Prof. Mendes Correia (*Os criminosos portugueses*, pág. 158)

registra para uma série, cuja constituição nos é desconhecida, um valor do índice cefálico médio ($M = 74.41$) cêrca de duas unidades mais baixo do que o correspondente ao sexo masculino.

Pode admitir-se como muito provável a existência duma diferença sexual média de uma unidade, a favor das mulheres portuguesas, no valor do índice cefálico.

Por conseguinte, querendo juntar as séries masculinas com as femininas é prèviamente indispensável efectuar a correcção relativa à diferença sexual.

Um outro êrro freqüentemente cometido, está no processo empregado para o *cálculo da média das séries compostas a partir das médias das séries componentes.*

Consiste êsse processo em somar os valores médios das séries componentes, dividir a soma pelo número de séries reunidas, e considerar o resultado como representativo do valor médio da série total. Um tal procedimento apenas se legitima nos casos em que as séries componentes encerram igual número de observações.

Como se sabe a fórmula geral para o cálculo da média duma série composta, a partir dos valores médios de n séries parciais, é:

$$N \times M = \sum_{i=1}^n N_x \times M_x,$$

onde M e N representam, respectivamente, a média e o número total dos individuos da série composta; e N_x e M_x (para todos os valores de x desde 1 até n), os valores correspondentes das séries parciais.

Assim, por exemplo, o Sr. Dr. Luiz de Pina partindo das médias das duas séries (76.30 em 660 ♂ e 76.52 em 250 ♀), diz (*Arquivo da Repartição de Antropologia, etc.*, fasc. 2.º, pág. 126) que o valor médio do índice cefálico da série total dos criminosos que observou é 76.41, quando na realidade a média da série composta é 76.36.

O mesmo autor (*Arquivo da Repartição de Antropologia, etc.*, fasc. 2.º, pág. 144) diz que o índice cefálico médio dos portugueses (♂ e ♀) é 75.36, quando na realidade o valor médio que se obtêm a partir das séries iniciais é 75.30.

Esta divagação sôbre a maneira de calcular as médias das séries compostas tem unicamente por objectivo demonstrar a

necessidade imperiosa de sermos rigorosos nos nossos processos estatísticos, pois, é evidente que os erros que se cometem, quando não se usa das precauções convenientes, se nalguns casos são insignificantes, podem noutros casos ser muito grandes.

Concretizemos.

O Sr. Dr. Luiz de Pina para afirmar a maior dolicocefalia dos portuenses em geral, compara o valor médio do índice cefálico em 350 indivíduos (dos dois sexos), originários da cidade do Pôrto, com o de 1.000 portugueses (também dos dois sexos) das diferentes províncias do país.

Já demonstrámos que se comete um êrro estatístico quando se juntam as séries relativas aos dois sexos sem previamente se efectuar a correcção relativa à diferença sexual das médias.

Querendo efectuar a comparação do valor médio do índice cefálico dos portuenses com o dos portugueses em geral, separadamente para cada sexo, como o rigor científico impõe, é fácil mostrar, pelo menos para o sexo masculino, que a média (75.82), obtida nas suas observações sobre 1.000 portugueses das diferentes províncias, não pode ter a pretensão de representar o valor típico do índice cefálico dos portugueses.

Com efeito, a média proposta pelo Sr. Dr. Luiz de Pina para os portugueses em geral (75.82) difere estatisticamente da por nós obtida em 11.658 observações (76.39 ± 0.02), pois a diferença entre estas duas médias (0.57) é maior do que seis vezes o seu erro provável (1).

(1) O Sr. Dr. Luiz de Pina é o primeiro a reconhecer a necessidade de se publicar mais alguma coisa do que o simples valor médio dos caracteres estudados. No final do seu trabalho *O índice cefálico da população do Pôrto*. — *Trabalhos da Sociedade de Antropologia*. — Vol. V, pág. 346, diz com efeito: «Pena é, contudo, nada nos dizerem por vezes os diversos antropologistas sobre o número dos indivíduos observados nos dois sexos, nem tão pouco sobre a idade dos mesmos».

Estamos de acôrdo. Mas como o Sr. Dr. Luiz de Pina não indica nem o número dos indivíduos do sexo masculino incluídos nas suas 1.000 observações, nem o desvio padrão da série respectiva, não nos é possível calcular exactamente o erro provável da diferença das duas médias.

Admitindo que, pelo menos, metade das suas observações ($N = 500$) se referem a indivíduos do sexo masculino, e que a variabilidade do carácter é sensivelmente igual à que outros observadores têm registado ($\sigma = 3$ aproximadamente), verifica-se que o nosso cálculo deve corresponder com grande

Por outro lado, a estabilidade da nossa média (76.39) é tal que, a oscilação determinada pela inclusão na respectiva série de todas as observações efectuadas pelo Sr. Dr. Luiz de Pina, não altera estatisticamente o seu valor.

Com efeito as três séries de observações fornecem os seguintes números:

N	M
11.658	76.39
200	74.93
500 (?)	75.82
<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black; margin: 0;"/> 12.358	

Empregando a fórmula geral, já indicada, para o cálculo da média duma série composta a partir das médias das séries componentes, obtemos:

$$12358 \times M = 943450.62,$$

e, por isso, $M = 76.34$, que difere apenas 0.05 da nossa média geral; diferença que é estatisticamente insignificativa (1).

Por conseguinte o valor médio do índice cefálico dos portugueses deve reputar-se igual a 76.39 ± 0.02 , enquanto novas séries de observações, incluídas na série geral que serviu para o seu estabelecimento, não provoquem o aparecimento de diferenças estatisticamente significativas.

É claro que se empregarmos o método usado pelo Sr. Dr. Luiz de Pina, isto é, se somarmos as três médias e dividirmos o resultado por três, obteremos um número muito diverso (75.71) que manifesta, relativamente à média geral por nós estabelecida,

aproximação à realidade. Com efeito representando Σ_1 e Σ_2 os erros prováveis das duas médias e por Σ dif. o erro provável da sua diferença, será

$$\Sigma_1^2 = 0.0004, \quad \Sigma_2^2 = 0.0081; \quad \Sigma \text{ dif.} = \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} = \sqrt{0.0085} = 0.092;$$

e portanto

$$\frac{0.57}{\Sigma \text{ dif.}} = 6.1.$$

(1) Êste resultado não se altera ainda mesmo que o número das observações do sexo ζ da série do Sr. Dr. Luiz de Pina seja muito superior a 500.

uma diferença igual a 0.68, estatisticamente significativa. Mas como se disse um tal método de cálculo é erróneo.

Como a nossa média é mais elevada do que a obtida pelo Sr. Dr. Luiz de Pina para os portugueses do sexo masculino das várias províncias, é claro que a sua comparação com a média correspondente aos naturais do Pôrto, por mais fortes razões, aponta para uma dolicocefalia mais acentuada dos portuenses.

Como porém temos fundadas dúvidas sobre a normalidade da série dos portuenses estudados pelo Sr. Dr. Luiz de Pina, dúvidas a que já aludimos noutra passagem deste trabalho, deve considerar-se em suspenso a respectiva conclusão até que ulteriores estudos a confirmam ou refutem.

Um outro exemplo. O Sr. Dr. Luiz de Pina publicou nos *Trabalhos da Sociedade Portuguesa de Antropologia e Etnologia*, vol. V, pág. 243, uma nota sobre o *Índice cefálico nos Transmontanos*.

Reuniu observações suas (125 ♂) às do Sr. Dr. José Branco (50 ♂) e às do Sr. Dr. Santos Júnior (27 ♂) e formou uma série com 202 transmontanos, cujo índice médio calculou pelo já indicado processo da *média das médias*, achando o valor 74.66 (1).

A média exacta, que resulta da reunião das três referidas séries é porém muito diferente ($M=75.01$) e não difere estatisticamente da média por nós obtida em 1.570 indivíduos da província de Trás-os-Montes (75.08 ± 0.05).

Este facto confirma a conclusão a que nos nossos estudos chegamos: *A província de Trás-os-Montes é a zona de maior dolicocefalia de Portugal* (*Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra*, vol. II, pág. 108-114).

Juntando tôdas as seriações disponíveis, relativas a Trás-os-Montes, obtém-se o seguinte quadro:

(1) Na nota a que nos estamos referindo encontram-se alguns lapsos. Um diz respeito ao número de indivíduos a que corresponde o valor médio (74.66) que se afirma ser 374, quando de facto é apenas 202. O lapso resultou de atribuir ao Sr. Dr. José Branco o estudo de 107 vilarealenses, quando de facto são apenas 50 (Joaquim Rodrigues dos Santos Júnior. — *Trabalhos da Sociedade Portuguesa de Antropologia e Etnologia*. — Vol. II, pág. 107), e de incluir na soma o número total das suas observações próprias, quando apenas devia considerar os 125 homens.

Autores	Medias	Número de observações
Santana Marques — Vila Real	75.22	100
Santana Marques — Bragança	76.09	100
José Branco — Vila Real	75.50	50
Santos Júnior — S Pedro de Mogadouro, Bragança	73.30	27
Egídio Aires — Vila Real (1)	74.39	99
		376

Calculando a média da série composta, por meio da fórmula conhecida, obtém-se o valor:

$$M = 75.13,$$

que apenas difere por 0.05 da média por nós obtida (75.08 ± 0.05) em 1.570 observações referentes a indivíduos da província de Trás-os-Montes, diferença que por certo não é estatisticamente significativa.

Ao encerrarmos estas notas não queremos deixar de afirmar ao Sr. Dr. Luiz de Pina toda a nossa consideração pelo esforço que representa a sua actividade científica. Não nos move outro desejo que não seja o de, pela colaboração sistemática, coordenada e rigorosamente metódica de todos os investigadores deste campo, tornar possível a rápida organização do quadro morfológico definitivo da população portuguesa actual.

DR. EUSÉBIO TAMAGNINI.

(1) Num estudo nosso, anterior (*Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra*. — Vol. II, pág. 107), dá-se como valor médio do índice cefálico no concelho de Vila-Real, segundo as observações do Sr. Dr. Egídio Aires, o número 75.51. Este número não está certo. Um lamentável lapso cometido no cálculo do primeiro momento da distribuição é responsável pelo erro; o valor exacto da média é 74.39 (Quadro IV).

A diferença relativa aos 1.570 indivíduos por nós observados é portanto 2.65 e não 2.03, como então também se publicou, e embora seja elevada não tem significação estatística.

QUADRO III

O índice cefálico em 295 naturais do Pôrto,
segundo as observações do Dr. Eusébio Tamagnini

Classes	Freqüências	
68	1	
69	1	
70	4	
71	6	
72	16	
73	17	
74	41	
75	54	
76	40	
77	24	$M = 76.13 \pm 0.11$
78	29	$\sigma = 2.91 \pm 0.08$
79	22	
80	16	
81	11	
82	7	
83	2	
84	3	
85	-	
86	-	
87	1	
	N = 295	

QUADRO IV

O índice cefálico no concelho de Vila Real
de Trás-os-Montes,
segundo as observações do Dr. Egidio Aires

Classes	Freqüências	
69	2	
70	3	
71	8.5	
72	6.5	
73	21	
74	15	$M = 74.89 \pm 0.17$
75	8.5	$\sigma = 2.51 \pm 0.12$
76	13.5	
77	8	
78	5	
79	7	
80	1	
	$N = 99.0$	

La « Théorie physique basée sur les phénomènes de radioactivité » du Dr. F. M. da Costa Lôbo⁽¹⁾

I

Dans la *Revue de la Faculté des Sciences de l'Université de Coimbra*, vol. II, n.º 2, M. Costa Lôbo a publié un article ayant pour titre *Theories in Physics resulting from the Phenomena of Radioactivity*.

Cette théorie a été présentée, pour la première fois, au Congrès de Granada, en 1911, et très récemment à la «British Association for the Avancement of Science». À Coimbra, M. Costa Lôbo a exposé sa théorie dans une conférence faite, en 1930, à l'Institut du Radium de notre Faculté des Sciences. Cependant nous avons seulement maintenant des données suffisantes pour faire une critique assez étendue de cette théorie.

La théorie de M. Costa Lôbo a la prétention d'expliquer tous les phénomènes physiques. Cependant, malgré le gigantesque effort de l'intelligence humaine, développé ces derniers temps, la physique moderne a, à peine, réussi à esquisser la construction d'une théorie générale se rapportant à l'ensemble des phénomènes physiques; cette théorie commence à se développer mais très voilée encore par un formalisme mathématique trop étendu. Deux théories principales ont surtout contribué à l'édification de cette oeuvre formidable de l'esprit humain: la théorie de la relativité d'Einstein et la théorie des quanta de Planck.

Eh bien! Dans sa théorie des phénomènes physiques M. Costa Lôbo ne tient pas compte de la théorie des quanta et repousse la théorie de la relativité.

(1) Numa reunião dos professores da 2.ª secção (Física e Química) da Faculdade de Ciências de Coimbra foi discutida a *Teoria Física do Dr. Costa Lôbo*, publicada nesta «Revista» (vol. II, n.º 2). Resolveu-se publicar a crítica que segue.

Nous savons aujourd'hui que, pour comprendre les phénomènes microcosmiques, ceux qui se déroulent dans le monde des atomes, nous sommes forcés d'avoir recours à la théorie des quanta: la mécanique newtonienne est insuffisante pour l'étude de la structure atomique.

Malgré cela, M. Costa Lôbo affirme qu'un atome est un système tout-à-fait semblable à un système solaire et ne tient compte que des forces de gravitation qui jouent pour lui un rôle fondamental dans tous les phénomènes atomiques. Cependant, dans la théorie atomique moderne, on ne tient pas compte de ces forces de gravitation: il est très facile de montrer, en effet, que la valeur de ces forces est extrêmement petite, et l'on peut en conséquence les négliger. Du point de vue corpusculaire de l'atome, on ne considère que l'attraction de Coulomb et l'on admet les conditions mécanique et optique qui résultent de la théorie des quanta.

Il se peut que M. Costa Lôbo ait la prétention de considérer l'attraction de Coulomb comme un cas particulier de l'attraction newtonienne. Malheureusement, nous ne pouvons pas comprendre comment M. Costa Lôbo arrive à expliquer les phénomènes électriques et magnétiques. Une théorie unitaire des phénomènes électromagnétiques et de gravitation que des physiciens comme Weyl, Einstein, Eddington et d'autres n'ont pas encore réussi à établir, n'est pas non plus établie dans les onze obscures lignes de la page 71 où M. Costa Lôbo a condensé l'explication des phénomènes électriques, magnétiques et électromagnétiques.

En ce qui concerne la théorie de la relativité, M. Costa Lôbo n'a aucun respect à son égard: il dit que la théorie restreinte a abandonné l'éther et que, malgré cela, on peut supposer que la théorie générale l'utilise encore. M. Costa Lôbo, qui doit bien connaître la théorie de la relativité, n'a aucun doute certainement sur l'inutilité de l'éther dans la théorie de la relativité, soit sous sa forme restreinte, soit sous sa forme générale. En effet, si les physiciens font encore usage du mot «éther», sa signification, proposée par Einstein, est toute autre maintenant. M. Costa Lôbo ne veut pas accepter la variation de la masse avec la vitesse, un des résultats le plus important de la théorie restreinte, confirmé par les expériences de Kaufman, et très important, par exemple, dans l'étude de la constitution atomique. M. Costa Lôbo prétend que l'affirmation d'Einstein est le résultat d'une interprétation erronée de faits bien expliqués dans la mécanique

newtonienne. Il est facile de montrer, comme nous le ferons un peu plus loin, que c'est M. Costa Lôbo qui se trompe en interprétant faussement ces faits et que, de plus, quant il affirme que la masse ne change pas avec la vitesse, il profite de certains résultats qu'il obtient en admetant justement que cette variation n'a pas lieu.

A propos, il est utile de rappeler ce qui a été dit par E. N. da C. Andrade :

« Dans l'Astronomie et dans la Physique les hypothèses sont mises sous une forme adaptée à une expression mathématique précise et leurs conséquences peuvent en être déduites avec la rigueur du raisonnement mathématique.

Nous ne nous limitons pas à prévoir que quelque chose peut avoir lieu ; nous exigeons des formules qui nous permettent de calculer la grandeur exacte de l'effet que l'on prévoit, et l'observation et l'expérience consistent en de mesures précises dont les résultats sont comparés, chiffre à chiffre, avec les résultats de la théorie. Ainsi, en Astronomie, nous ne nous limitons pas à savoir que les planètes tournent autour du soleil ; nous devons avoir une théorie que nous permette de déduire la trajectoire exacte des planètes et des comètes, ayant en vue les perturbations que chaque planète subit de la part des autres planètes. La décision entre le système de Newton et celui d'Einstein peut seulement être prise après le calcul exact des conséquences des deux théories en des cas particuliers où l'on obtient une petite différence ; ensuite nous questionnons la nature au moyen de mesures exactes et nous acceptons son veredictum. Pendant la Grande Guerre, il y en a eu qui ont suggéré que les sous-marins pouvaient être attirés vers la côte par des électro-aimants puissants. Il est certain qu'un gros électro-aimant exerce sur un sous-marin une force, mais les lois de l'électro-magnétisme sont précises et permettent de calculer rapidement que l'effet du plus grand électro-aimant artificiel que l'on puisse s'imaginer aurait été encore insuffisant pour réaliser l'effet prétendu. Le calcul décide ».

Dans le travail de M. Costa Lôbo les hypothèses n'ont pas d'expression mathématique précise ; leurs conséquences ne sont donc pas déduites avec toute la rigueur désirable et ne peuvent pas être comparées ni avec les résultats exacts de l'observation et de l'expérience, ni avec les conséquences d'autres théories.

Dans le calcul des effets, il peut bien arriver exactement le même qu'à ceux qui ont voulu prendre des sous-marins avec des aimants, ou encore pire!

Dans les théories modernes, le monde physique a deux aspects : l'aspect corpusculaire et l'aspect ondulatoire ; chacun de ces aspects donne une vue partielle du monde physique ; ils représentent deux demi-mondes en connexion l'un avec l'autre mais s'expriment avec des langages différents. C. G. Darwin considère l'aspect ondulatoire correspondant au monde objectif et l'aspect corpusculaire au monde subjectif. La liaison entre ces deux demi-mondes est un des points de la théorie physique moderne où elle se trouve, plus qu'ailleurs, masquée par le formalisme mathématique. Pour M. Lôbo l'aspect corpusculaire correspond au monde objectif et l'aspect ondulatoire au monde subjectif. Ce dernier aspect résulte de la forme ellipsoïdal des corpuscules qui produisent dans la rétine des impressions ayant un caractère vibratoire. C'est ici que la théorie de M. Lôbo est surtout incompréhensible. Ce n'est plus maintenant le formalisme mathématique qui voile la liaison entre ces deux aspects ; c'est justement le manque de tout formalisme qui empêche de voir nettement cette liaison.

Dans un mouvement ondulatoire il y a une variation périodique d'une grandeur physique quelconque, S , qui se propage avec une certaine vitesse. En un point déterminé du champ de l'onde il y a une périodicité par rapport au temps et à cette périodicité correspond la période ou la fréquence ; d'autre part dans une direction déterminée il y a aussi une périodicité dans l'espace et celle-ci correspond à la longueur d'onde. L'équation la plus simple d'un mouvement ondulatoire est :

$$S = A \operatorname{sen} \left[2 \pi \nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

où A représente l'amplitude, ν la fréquence, u la vitesse de phase et x la distance, dans une direction déterminée, entre le point que l'on considère et un autre pris pour origine ($x=0$). Dans l'équation considérée, nous supposons que les vibrations transportées par les ondes sont, comme dans l'optique classique, des fonctions sinusoidales de la phase. Nous montrerons à M. Lôbo les difficultés qui apparaissent lorsqu'on cherche à décou-

vrir dans son système mécanique un mouvement ondulatoire bien défini, avec des vibrations sinusoïdales ou pas, une amplitude, une période ou fréquence, et une longueur d'onde. Nous devrions exiger de M. Lôbo une explication dans le cadre de sa théorie, d'un phénomène quelconque, par exemple, de la diffraction ou de la polarisation de la lumière; mais nous nous limitons à demander à M. Lôbo l'équation de ses ondes. Si l'on interprète la théorie proposée par M. Lôbo sous la forme qui nous semble la mieux adaptée à la pensée de l'auteur on arrive, comme nous le montrerons plus loin, à des résultats tout-à-fait inadmissibles.

M. Costa Lôbo prétend justifier son intervention par la nécessité d'éliminer de la physique l'action à distance: c'est défoncer une porte ouverte.

L'action à distance a disparu de l'électromagnétisme avec Maxwell (1874) et de la gravitation avec Einstein (1916). Mais M. Costa Lôbo veut faire comme si Maxwell et Einstein n'aient jamais existé. Pour lui la théorie de la gravitation est la loi de Newton, la théorie de l'électromagnétisme est la loi de Coulomb: des lois d'action à distance, en effet, pour lesquelles M. Costa Lôbo prétend ressusciter, sans l'avouer, la vieille explication mécanique de Lesage (1782) qui par son caractère simpliste et par les résultats absurdes auxquels elle conduit a été renvoyé depuis longtemps au musée des antiquités physiques vénérables.

L'attraction mutuelle de deux corps serait l'apparence de cette réalité: rapprochement de deux corps sous l'impulsion qui leur est communiquée par choc, par les particules élémentaires de l'éther qui sillonnent l'espace en toutes directions (les radiants, suivant l'expression de M. Costa Lôbo). Si l'on fait certaines hypothèses sur la structure de la matière et sur la nature des particules de l'éther, on obtient, il est vrai, la loi de Newton. Mais, malgré les perfectionnements qui ont introduit successivement dans cette théorie, Isenkrahe (1879), Rysanek (1887), Jarolimek (1883) et d'autres auteurs, la théorie a succombé sous le poids des objections.

Nous n'en parlerons que d'une seule: afin d'expliquer l'action de gravitation par choc des particules d'éther, il est nécessaire de supposer que les particules perdent leur vitesse pendant le choc; il en sera ainsi si le choc n'est pas élastique; mais alors que devient l'énergie perdue? Si l'on admet qu'elle reste dans les corps sous forme de chaleur, on calcule (Poincaré) que la

température de la Terre (par exemple) s'acroiterait de quelques millions de degrés par seconde!

En ce qui concerne le champ électrostatique, M. Costa Lôbo ne veut pas le considérer différent de celui de gravitation; la loi de Coulomb, en effet, a la même forme que la loi de Newton et pour cela M. Costa Lôbo ne voit aucun intérêt à considérer l'existence de radiants électrostatiques à coté de radiants de gravitation. On peut encore l'admettre pour l'attraction électrostatique; mais pour la répulsion électrostatique? En outre, M. Costa Lôbo agit comme s'il n'y eût aucune différence entre les champs de gravitation et électrostatique, différence qu'Einstein a souligné très bien dans sa théorie de gravitation: dans le cas d'un champ de gravitation la charge de gravitation est identique à la masse inerte; dans le cas d'un champ électrostatique il n'en est pas ainsi. Comment peut on attribuer au même mécanisme deux phénomènes qui sont très différents?

Les modernes théories physiques sont le résultat d'une évolution constante et continue; une théorie est seulement remplacée par une autre lorsque les conséquences de cette dernière théorie, deduities avec toute rigueur mathématique, sont en accord avec les mesures, le plus possible exactes, de l'observation et de l'expérience. Si l'on suit l'évolution des théories physiques, il est facile de voir qu'elles s'enchaînent les unes dans les autres, les dernières étant toujours un perfectionnement des premières; la théorie de la relativité, l'une des théories physiques les plus révolutionnaires, nous apparaît comme une conséquence naturel des doctrines de Lorentz. M. Costa Lôbo batit sa théorie comme s'il n'eût aucune connaissance des derniers progrès de la physique: il n'accepte pas les doctrines d'Einstein, il fait de vagues références à la radioactivité sur laquelle il prétend néanmoins baser sa théorie, met à coté les modernes mécaniques fondées sur la théorie des quanta, faisant seulement une transcription de de Broglie qu'il critique avec dédain; sa théorie étant corpusculaire, il n'établit aucun rapport entre ses corpuscules et les particules fondamentales de la nouvelle physique: photons, protons et électrons, dont il ne parle même pas.

On peut presque dire que la théorie de M. Costa Lôbo aurait pu être conçue au commencement du XVIII^e siècle. M. Costa Lôbo ne donne l'explication complète, qualitative et quantitative, d'aucun phénomène physique.

Il se peut que M. Costa Lôbo n'ait pas en réalité la prétention de présenter une nouvelle théorie physique ayant rapport avec toute la complexité du monde physique, négligeant les plus récentes théories, mais seulement présenter quelque nouvelle direction pouvant être utile aux physiciens à l'époque difficile que nous vivons. Dans la suite, nous allons faire une discussion détaillée de quelques conséquences des directions indiquées, et nous montrerons qu'elles conduisent malheureusement, à des résultats qui n'ont aucun intérêt.

Nous voulons encore faire ressortir que même à propos du deuxième principe de la thermodynamique M. Costa Lôbo montre qu'il n'a aucun respect à l'égard de la science faite. En quelques lignes seulement, pag. 70, il montre que ce principe résulte d'une erreur dans l'appréciation des phénomènes. Nous ne voulons pas nous arrêter dans l'analyse de ces lignes parce qu'elles n'ont aucun rapport avec le deuxième principe de la thermodynamique. Mais nous voulons faire rappeler ici ces mots de Sir A. S. Eddington :

«Le deuxième principe de la thermodynamique occupe une place suprême parmi les lois de la nature. Si un auteur montre dans sa théorie de l'Univers qu'il existe un désaccord entre sa théorie et les équations de Maxwell, ces équations peuvent en souffrir; s'il y a contradiction avec les résultats de l'expérience il y a encore à dire que parfois les expérimentateurs se trompent; mais si la théorie est contre le deuxième principe de la thermodynamique, nous ne pouvons donner aucun espoir à l'auteur de la théorie; celle-ci est vouée à la plus complète humiliation.

II

Dans cette partie de notre critique nous allons faire une analyse détaillée de quelques points de la théorie de M. Costa Lôbo, et montrer qu'ils sont inadmissibles.

Définitions. Voici la première définition de M. Costa Lôbo: *point matériel est la plus petite portion de matière que l'on puisse considérer indépendamment de toutes les autres propriétés que l'on puisse lui attribuer.*

Mais qu'est ce qu'il en reste de la matière si on lui enlève toutes ses propriétés? Rien, nous pensons. Mais M. Costa

Lôbo attribue du moins au point matériel une masse et des dimensions. Lorsqu'il dit que la *distance entre deux points est le minimum de points matériels indispensable pour établir la liaison entre eux, sans interruptions ou duplications*, il attribue évidemment à tous les points matériels les mêmes dimensions bien déterminées et la même orientation.

M. Costa Lôbo dit encore: *un phénomène est un ensemble de points caractérisés par leurs distance et orientations*. Cette définition est vague et suppose stabilité et non variation. Nous demandons: dans les phénomènes, le temps n'intervient-il pas?

M. Costa Lôbo dit ensuite: *module de temps est le temps minimum de tous les temps correspondants au changement d'un point matériel d'une position vers la position immédiate*.

Nous trouvons cette définition absolument incompréhensible. Elle nous rappelle les célèbres antinomies du philosophe grec Zénon contre le mouvement. Est-ce que M. Costa Lôbo pense comme Kant qu'il n'y a pas la position immédiate à une autre ou l'instant immédiat à un autre, parce que entre deux positions ou deux instants il y a toujours une autre position ou un autre instant ou, comme Whitehead, pense-t-il que la temporisation n'est pas un processus continu mais plutôt une succession atomique?

Chocs entre points matériels. Variation de la masse avec la vitesse. Masse des forces. Dans la théorie proposée, les chocs entre points matériels ont une importance fondamentale. Les conclusions qui en sont déduites par M. Costa Lôbo, résultent de l'application du principe de la conservation de la quantité de mouvement. Analysons la doctrine de M. Costa Lôbo:

Considérons le choc entre un point matériel et un autre point matériel, et les chocs entre un point matériel et les systèmes constitués par deux ou trois points. Dans le cas de deux points qui marchent dans la même direction, mais en sens contraires, tout en restant immobiles après le choc (fig. 1), on vérifie la conservation de la quantité de mouvement:

$$\overline{v \quad \xrightarrow{m} \quad m \quad \xleftarrow{v}}$$

Fig. 1

$$mV - mV = 0.$$

Dans le cas où les deux points se déplacent en directions différentes (fig. 2), se mouvant après le choc suivant la bissectrice, la loi de la conservation de la quantité de mouvement, donne :

$$mV_1 + mV_1 = 2mV_1$$

c. à d. — les deux points se déplacent ensemble ayant une vitesse $V_1 < V$. Si un point matériel, se déplaçant avec la vitesse V , rencontre suivant la même direction et sens, un groupe de deux points, avec la vitesse V_1 (fig. 3), il se forme un groupe de trois points qui se déplacent ensemble avec la vitesse V_2 ; la loi de la conservation de la quantité de mouvement donne :

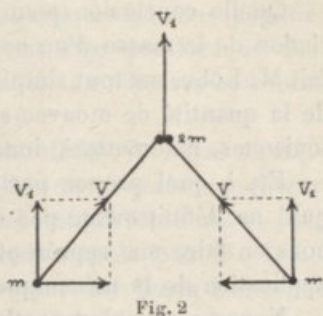


Fig. 2

$$mV + 2mV_1 = 3mV_2$$

d'où

$$V_2 = \frac{V + 2V_1}{3}$$

ou

$$V_2 = \frac{V + 3V_1 - V_1}{3} = V_1 + \frac{V - V_1}{3}$$

Dans le cas où un point matériel, avec la vitesse V , rencontre dans la même direction et sens le groupe de trois points matériels que nous venons de considérer, il se constituera un groupe de quatre points qui se déplacera avec la vitesse V_3 (fig. 3).

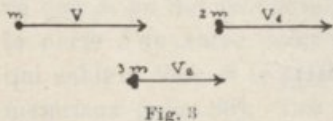


Fig. 3

On trouve facilement que :

$$V_3 = V_2 + \frac{V - V_2}{4}$$

Il résulte de ce que nous venons de dire que le choc d'un point produit dans un système un accroissement de vitesse qui est d'autant plus petit que la masse du système sera plus grande et d'autant plus grand que la différence entre la vitesse du point et celle du système sera plus grande.

L'expression $V_2 = V_1 + \frac{V - V_1}{3}$ et celle qui donne la valeur de V_3 , sont déduites en supposant que la masse ne change pas avec la vitesse.

Quelle conclusion peut donc en déduire M. Lôbo sur la variation de la masse d'un corps avec la vitesse? Aucune. Ce qui fait M. Lôbo, est tout simplement appliquer la loi de conservation de la quantité de mouvement, dans le cadre des conditions newtoniennes, n'admettant donc pas cette variation.

Et, à quel propos parle M. Lôbo de la masse d'une force qu'il ne définit même pas et que nous ne pouvons pas non plus nous en faire une représentation, pour interpréter une si simple application de la mécanique newtonienne?

Nous en reparlerons plus loin.

Conservation de l'énergie. Dans les problèmes considérés, on vérifie la conservation de la quantité de mouvement. Cependant, dans quel sens est-ce que M. Lôbo comprend la conservation de l'énergie?

Il est évident que le système qui se produit après un choc a, dans la doctrine de M. Lôbo, une énergie cinétique inférieure à la somme des énergies cinétiques des corps qui se choquent.

Considérons, par exemple, le cas où un point fait un choc contre un système constitué par deux points: l'énergie cinétique avant le choc est:

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mV_1^2$$

et l'énergie cinétique après le choc est:

$$\frac{1}{2}3mV_2^2 = \frac{1}{6}mV^2 + \frac{2}{3}mV^2_1 + \frac{2}{3}mVV_1;$$

elle est donc inférieure à la première. Dans le cas où des points se choquent et restent immobiles, l'énergie cinétique après le choc est nulle.

Donc, si l'on admet toujours le principe de la conservation de l'énergie, nous devons admettre que après le choc, il se constitue des systèmes formés par des points matériels avec un mouvement de rotation, dont l'énergie est égale à l'énergie cinétique perdue. Il est certainement à cette énergie de rotation que M.

Lôbo (pág. 64) appelle l'énergie interne; et, lorsqu'il dit que les énergies cinétique et interne se conservent invariables, il veut certainement dire que la somme des deux reste invariable.

Il est vrai que M. Lôbo considère des vitesses latentes (pág. 67), à l'état potentiel (pág. 65), et il peut dire que lorsque deux points font un choc et restent immobiles, les vitesses se conservent, en demeurant latentes.

S'il en est ainsi, comment M. Lôbo définit-il vitesse de façon que cette grandeur puisse prendre une valeur quelconque, entre zéro et infini (pág. 65), le point matériel étant arrêté? Alors on ne comprend pas la définition ordinaire acceptée par M. Lôbo: espace correspondant à l'unité de temps. M. Costa Lôbo peut dire que l'énergie cinétique perdue dans le choc se transforme en énergie cinétique interne (de rotation, pág. 67) mais il ne peut pas considérer non seulement l'énergie potentiel de points matériels sans tout d'abord la définir, de façon que l'on puisse la mesurer, mais aussi, la vitesse latente ou potentiel, notion qu'on ne peut pas comprendre si l'on accepte la notion ordinaire de vitesse.

L'existence d'énergie interne de rotation dans un système constitué, par exemple, par deux points matériels nous semble difficile de comprendre dans la théorie de M. Costa Lôbo. Les points matériels ne peuvent pas décrire des orbites fermées sans admettre l'existence des forces centrales, et ces forces ne peuvent pas pendre origine dans les chocs d'autres points matériels parce que si un des points matériels du système subit un choc de la part d'un autre point matériel celui-ci restera fixé au point qui subit le choc et le système restera constitué par trois points matériels (pág. 66). Les deux points du système considéré ne peuvent pas avoir non plus dans son ensemble, un mouvement de rotation autour d'un axe: les deux points ne pourraient rester liés. Il nous reste seulement l'hypothèse d'après laquelle chacun des points aurait pu prendre, après le choc, un *spin*. La transformation du mouvement de translation des points matériels en deux *spins* gémeaux nous semble impossible à comprendre; la transformation inverse des deux *spins* en mouvement de translation, lorsque les points sont séparés, est également incompréhensible. Et, comment peuvent être séparés les deux points si, lorsque un autre point les choque, celui-ci reste attaché au système?

Elasticité. Intégration de la matière. Si un point matériel, lors de sa rencontre avec un autre point ou un groupe de points, s'attache toujours au point ou au groupe, ainsi que le prétend M. Lôbo, il est évident que tous les points matériels ont une tendance à se grouper et ne se sépareront jamais. Lorsqu'un point matériel fait un choc qui est fait nécessairement avec un autre point, vu que toute la matière est constitué par des points matériels, le point doit perdre définitivement sa liberté. La théorie de M. Lôbo conduit ainsi à l'intégration de toute la matière; la désintégration sur laquelle pourtant il affirme baser sa théorie, devient incompréhensible.

Comment peut-on comprendre l'existence des particules élastiques, si, lorsque celles-ci se recontrent, il n'y a que des chocs entre points matériels qui ne sont pas élastiques?

Radiants secondaires et radiants dérivés. Tous les corps sont constitués par des points matériels. Il peut exister des points matériels isolés (radiants primaires) ou des groupes de points matériels.

Dans ces groupes l'auteur de la théorie établit la distinction entre radiants secondaires et radiants dérivés (ou matière inerte). Nous ne comprenons pas cette distinction. Il sont tous les deux, des groupes de points; comment peut-on les distinguer? Est-ce que les radiants secondaires sont toujours animés d'un mouvement et les dérivés sont en repos? Mais M. Lôbo dit que les radiants dérivés peuvent aussi se mouvoir. Lorsqu'il sont en mouvement, comment les distinguer des radiants secondaires? Nous ne comprenons pas la distinction.

Expérience des jets d'eau. L'auteur de la théorie prétend démontrer expérimentalement que, lorsque deux points font un choc ils suivent après le choc, la bissectrice de l'angle des deux directions de mouvement; pour cela il fait une expérience avec deux jets d'eau. Mais quel rapport peut exister entre la rencontre de deux points non élastiques par définition et celle de deux jets d'eau élastique et soumis aux lois compliquées de l'hydrodynamique?

Pourquoi l'auteur fait-il l'expérience avec deux jets liquides et non, par exemple, avec deux billes de billard? Quelle distinction peut-on établir dans la théorie de M. Lôbo, entre un

solide et un liquide? Pourquoi fait-il son expérience avec un liquide et non pas avec un solide?

Chaleur et désintégration de la matière. Quel rapport peut-on établir dans la théorie de M. Lôbo entre la température et le mouvement des points matériaux et leurs groupements?

M. Lôbo admet que l'Univers a été *ab initio* rempli de points matériaux se déplaçant en toutes directions, ayant une distribution uniforme et une vitesse maxima (pág. 65). Les groupements ont été obtenus à la suite des chocs des points matériaux.

Ces groupements devraient se trouver distribués uniformément dans tout l'espace, vu que la probabilité de sa formation est la même partout, et en ce qui concerne la masse, elle devrait croître indéfiniment à cause des nouveaux chocs entre les points matériaux.

Ces groupements même devraient se joindre les uns les autres, et cette façon l'Univers devrait tendre vers la jonction de tous les points matériaux.

Les phénomènes calorifiques qui se produisent dans un corps dépendent de la vitesse et de la quantité des radiations reçues par unité de temps et par unité de surface: Si l'on place un corps chaud devant un corps froid, le corps chaud émet des radiations qui sont reçues par le froid et vice-versa; le corps chaud émet plus de radiations que le corps froid; il se refroidit donc tandis que celui-ci se réchauffe.

Mais, nous insistons toujours, par quel mécanisme un corps émet de radiations? Cette émission est incompréhensible dans la théorie proposée.

Tous les corps sont des groupements de points matériaux et émettent, d'après M. Lôbo, des radiations constitués par des points matériaux ou groupements de point. L'auteur admet donc la désintégration continue de la matière. Nous avons déjà montré que la désintégration des systèmes de points matériaux n'est pas compréhensible; on ne peut comprendre que leur croissance continue. Si les atomes sont des systèmes de points matériaux analogues au système solaire (pág. 72), les points matériaux, ou systèmes de ces points, qui parcourent des orbites fermées, doivent subir constamment des chocs de la part d'autres points matériaux de façon que les orbites doivent se fermer toujours; il nous semble logique déduire de la théorie de M. Lôbo que

les points matériels qui font des chocs doivent rester fixés aux points qui subissent les chocs; l'atome doit en conséquence augmenter sans cesse.

On ne peut donc comprendre sa désintégration.

Constitution de l'atome. L'auteur suppose qu'un atome est un système analogue au système solaire où il n'y a que des forces de gravitation. Nous invitons M. Lôbo à démontrer avec des nombres ce qu'il affirme. Il est démontré aujourd'hui que l'attraction newtonienne ne peut pas expliquer la structure atomique. L'auteur dit que ce n'est pas vrai. Mais il ne suffit pas de le dire; il faut le prouver.

Si la mécanique de l'atome est la mécanique newtonienne, quelle particularité existe, d'après la théorie de M. Lôbo, dans la structure atomique qui permette d'expliquer des faits qui s'expliquent seulement aujourd'hui à l'aide de la mécanique quantique, si différent de la mécanique newtonienne?

Énergie radiante. Théorie de la lumière. Un corps lumineux émet des radiations; les corpuscules lumineux possèdent une forme ellipsoïdale bien déterminée et nous supposons que l'auteur admet qu'ils se déplacent dans le sens du grand axe. La sensation de couleur résulte de la forme ellipsoïdale des corpuscules; il en résulte le caractère ondulatoire de la lumière.

Nous faisons remarquer que:

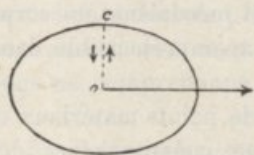


Fig. 4

1) Chaque point de la rétine déplacé par un corpuscule exécute une demie-vibration se déplaçant de la position d'équilibre O (fig. 4), vers c, et revenant ensuite vers o. Oc est égal au demi-petit axe de l'ellipsoïde.

2) Pendant qu'un point de la rétine exécute une demie-vibration, le corpuscule parcourt une distance égale à son grand axe.

3) Si nous appelons *période* l'intervalle de temps correspondant à une demie-vibration, il est naturel d'appeler *longueur d'onde* au grand axe du corpuscule.

4) Comme les longueurs d'onde des radiations spectrales du spectre visible sont comprises entre $4 \cdot 10^{-5}$ cm (violet) et 8×10^{-5} cm (rouge), la longueur du grand axe des corpuscules lumineux doit être comprise entre ces limites. Il en résulte que

les corpuscules lumineux sont beaucoup plus grands que l'atome normal d'hydrogène. L'on sait que l'ordre de grandeur du diamètre de l'atome normal d'hydrogène est de 2.10^{-8} cm.

Il y a donc dans la théorie de M. Lôbo des corpuscules lumineux qui sont 3000 fois plus grands que l'atome d'hydrogène.

Et quel sera le diamètre d'un corpuscule (!) d'une radiation hertzienne? Est-ce qu'il pourra avoir 300 mètres de longueur?

4) Pourquoi se déplacent les corpuscules dans la direction du grand axe? Si le corpuscule arrive incliné à la rétine (fig. 5), le point O_1 exécute la demie-vibration O_1c et le point O_2 la demie-vibration O_2d . La période de vibration est celle qui correspond au déplacement du corpuscule de O_1 à O_3 ; la longueur d'onde sera $O_1 O_3$. A chaque inclinaison du corpuscule correspond donc une couleur différente.

5) Dans la théorie de M. Lôbo, il y a un autre intervalle de temps à considérer: l'intervalle de temps entre deux vibrations du même point de la rétine, c'est-à-dire,

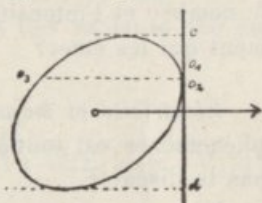


Fig. 5

l'intervalle correspond au passage par le même point de deux corpuscules successifs qui se déplacent dans la même direction. Dans la théorie classique, les vibrations d'un point se suivent sans interruptions. Dans la théorie de M. Lôbo il y a des intervalles. Quel rôle joue l'intervalle de temps sur la sensation provoquée par les radiations? Est-ce qu'il correspond à l'amplitude, donc à l'intensité lumineuse?

Si l'amplitude correspond au déplacement Oc pour des corpuscules orientés, l'amplitude est constante, égale au demi petit axe de l'ellipsoïde, donc l'intensité lumineuse correspondante à une certaine couleur doit être invariable.

6) Pour qu'un corpuscule produise sur la rétine les déplacements admis par l'auteur, il est nécessaire qu'il soit massif, car, évidemment, s'il est constitué par des particules relativement très éloignées les unes des autres (c'est ce qu'on l'admet pour les atomes, du point de vue corpusculaire) le choc d'un corpuscule est le groupe des chocs correspondants à ces particules.

7) Les radiations proviennent, d'après l'auteur, de la désintégration de la matière, donc de l'atome. Dans un corps lumineux, les atomes émettent des corpuscules plus grandes qu'eux,

massifs, et cependant l'atome ne perd pas ces propriétés; l'émission de lumière n'est pas suivie d'une transmutation des éléments!

8) Pourquoi l'auteur considère ses corpuscules ellipsoïdaux et pas sphériques?

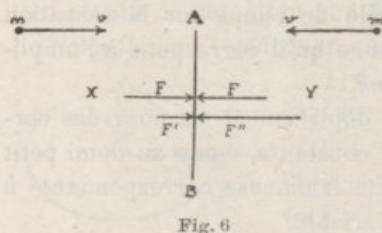
9) Nous prions M. Lôbo d'établir l'équation de ses ondes et d'expliquer, qualitativement et quantitativement, un phénomène quelconque de polarisation ou de diffraction de la lumière.

Spectres. L'auteur de la théorie dit que le nombre et l'intensité des raies spectrales doit augmenter avec l'imperméabilité de l'élément qui les émet. L'imperméabilité doit augmenter, avec la densité. Est-ce qu'il existe un rapport quelconque entre le nombre et l'intensité des raies spectrales et la densité de l'élément qui les émet?

Électricité et magnétisme. L'explication de l'auteur sur ces phénomènes est tout-à-fait incompréhensible. Nous ne pouvons pas la discuter.

Nous ne pouvons pas nous imaginer ce que c'est qu'une superconsolidation d'un corps électrisé. L'explication donnée est très condensée: elle est faite en onze lignes de l'article publié.

Variation de la masse avec la vitesse. Dans la dernière partie de son article, M. Lôbo nie à nouveau la variation de la masse avec la vitesse. Voyons pourquoi: Considérons un disque AB ayant la masse M (fig. 6). Considérons seulement les radiations normales à la surface du disque dans la direction XY et YX .



Supposons que tous les radiants ont la masse m un et la vitesse v . Supposons encore que les radiants sont élastiques et que le disque est imperméable aux radiations. Sur AB agissent deux forces égales et de sens contraires. On a.

$$2\Sigma mv = MU = F,$$

Σm étant la somme des masses des radiants qui incident sur AB par unité de temps. S'il n'y avait pas des radiants du côté de X , le disque devrait se mouvoir de Y vers X avec la vitesse U .

Supposons maintenant que le disque se déplace de X vers Y avec la vitesse V . On a :

$$2\Sigma_1 m (v + V) = M V_1 = F''$$

$$2\Sigma_2 m (v - V) = M V_2 = F',$$

$\Sigma_1 m$ étant la somme des masses des radiants qui par unité de temps incident sur le disque de Y vers X , et $\Sigma_2 m$ la somme des masses des radiants qui dans le même temps incident sur le disque de X vers Y . V_1 est la vitesse acquise par le disque s'il n'y avait des radiants que du côté droit avec la vitesse $v + V$, et V_2 est la vitesse acquise s'il n'y avait des radiants que du côté gauche avec la vitesse $v - V$.

On a .

$$F'' - F' = M (V_1 - V_2) = M V = 2\Sigma_1 m (v + V) - 2\Sigma_2 m (v - V) (1)$$

Ces égalités montrent que pour communiquer au disque la vitesse V , il est nécessaire de faire agir sur lui la force $F'' - F'$ qui, évidemment, sera d'autant plus grande que V sera plus grand.

Mais, M. Costa Lôbo, quel rapport trouvez-vous entre cette conséquence de la mécanique classique et la variation de la masse d'un corps avec la vitesse? Nous allons préciser la question :

Das la mécanique relativiste, les égalités (1) doivent être remplacées par les suivantes :

$$F''_1 - F'_1 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} V = 2 \frac{\Sigma_1 m}{\sqrt{1 - \frac{(v + V)^2}{c^2}}} (v + V) - 2 \frac{\Sigma_2 m}{\sqrt{1 - \frac{(v - V)^2}{c^2}}} (v - V) (2)$$

Ainsi donc, dans la mécanique classique aussi bien que dans celle d'Einstein, la force qu'on doit appliquer au disque pour obtenir une vitesse V est d'autant plus grande que V sera plus grand. Mais dans la mécanique relativiste, pour obtenir la même

vitesse V , il faut employer une force plus grande que dans la mécanique classique, car :

$$\sqrt{1 - \beta^2} < 1$$

La différence entre les forces considérées, la force newtonienne et la force relativiste, est d'autant plus grande que la vitesse sera plus grande.

Si M. Lôbo veut démontrer que la masse ne varie pas avec la vitesse, il doit démontrer que l'égalité (2) n'est pas vérifiée par les faits expérimentaux, mais si l'égalité (1).

M. Lôbo affirme que la masse ne change pas avec la vitesse, mais il n'en donne aucune démonstration; il ne fait que donner une interprétation erronée d'un problème simple de la mécanique classique.

On aurait pu montrer d'autres conséquences de la théorie proposée. Elles nous conduisent toutes à la conclusion que la théorie de M. Costa Lôbo est absolument inacceptable.

Les théories modernes, établies par des hommes si habiles, représentent un effort si considérable de l'intelligence pour comprendre le monde physique qu'elles ne sont comprises encore aujourd'hui que par un nombre assez restreint.

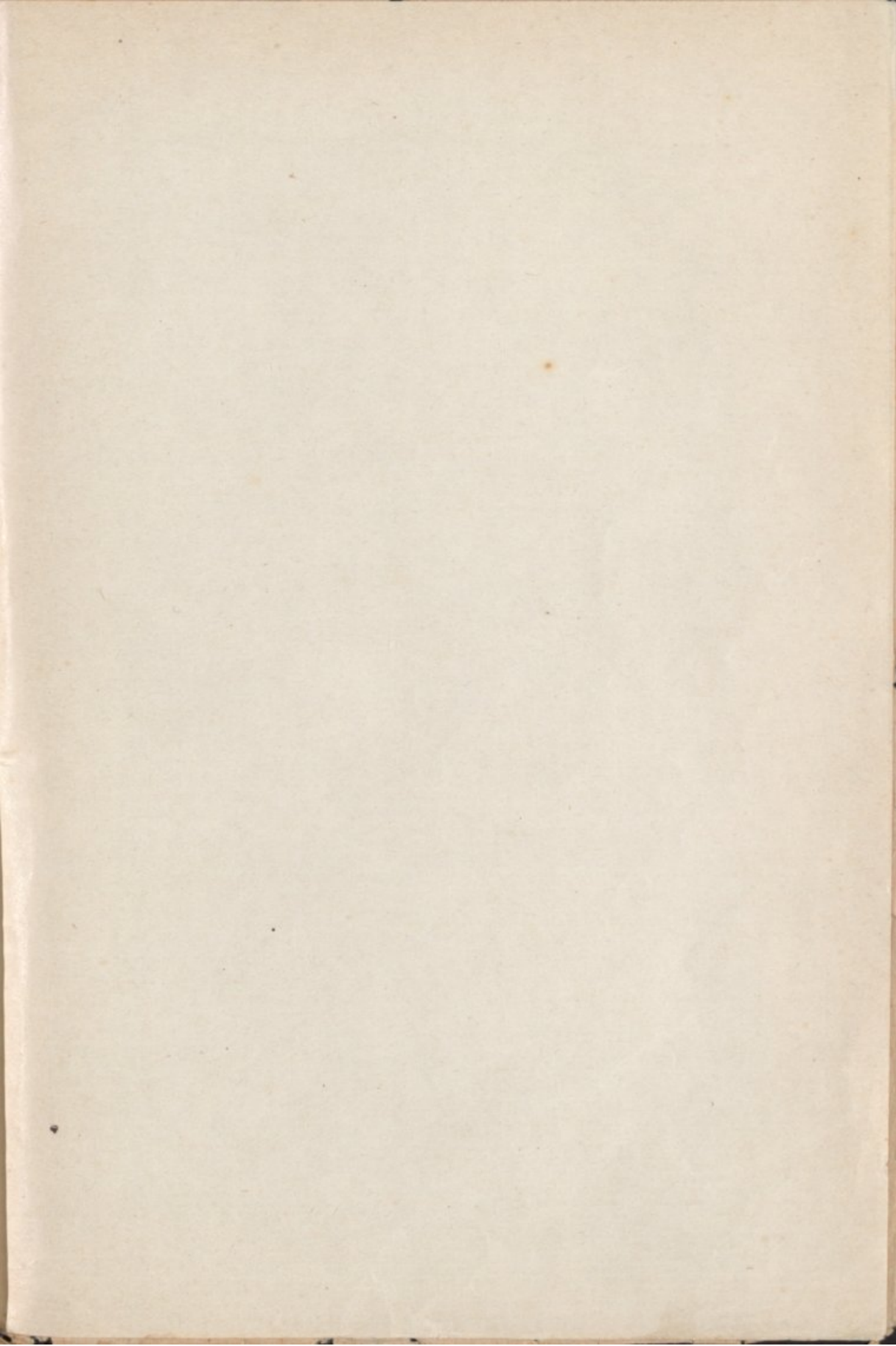
L'établissement d'une théorie physique acceptable ne tenant pas compte de toutes les théories actuelles est une œuvre qui surpasse la capacité de l'intelligence humaine.

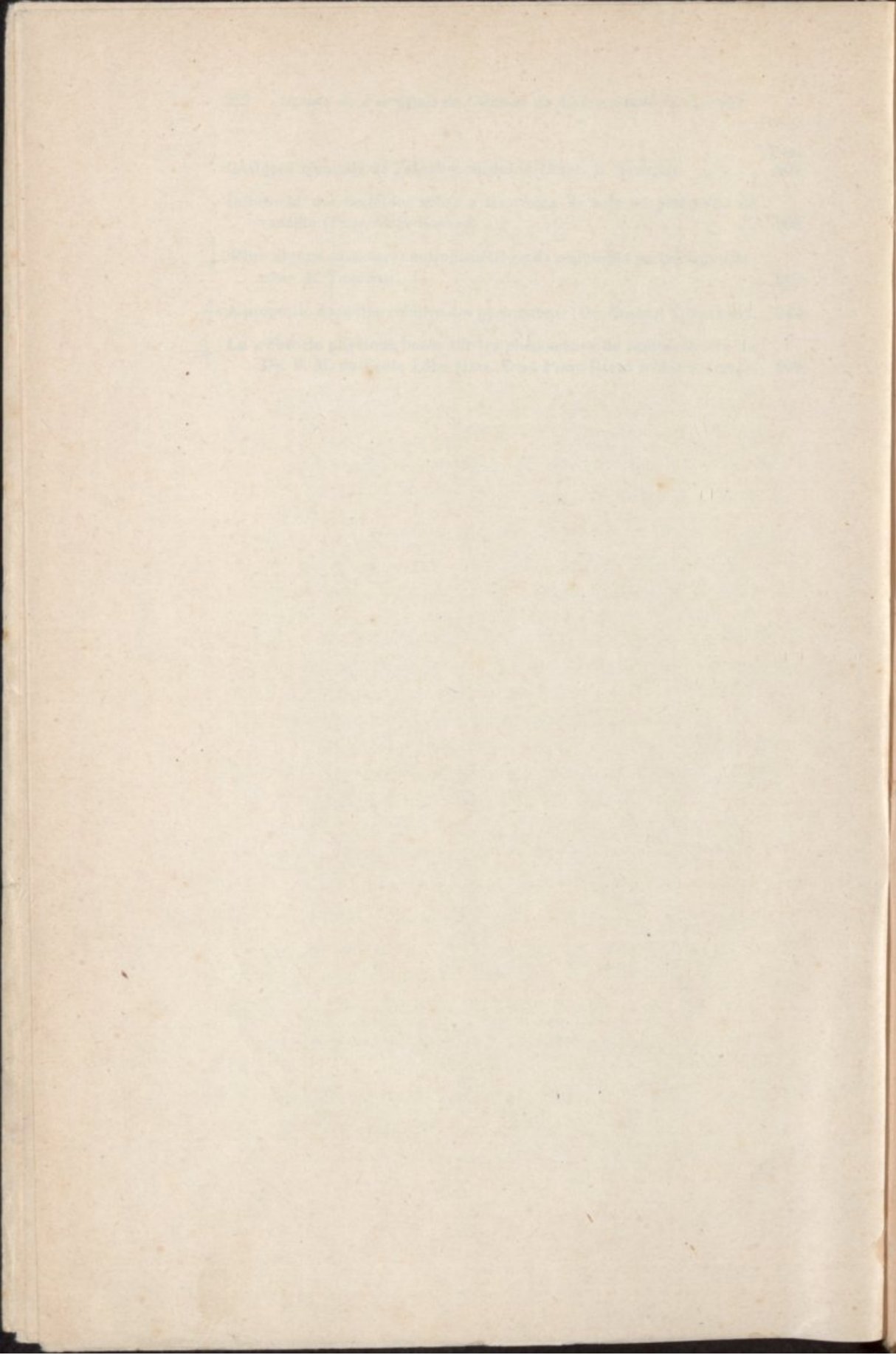
Índice

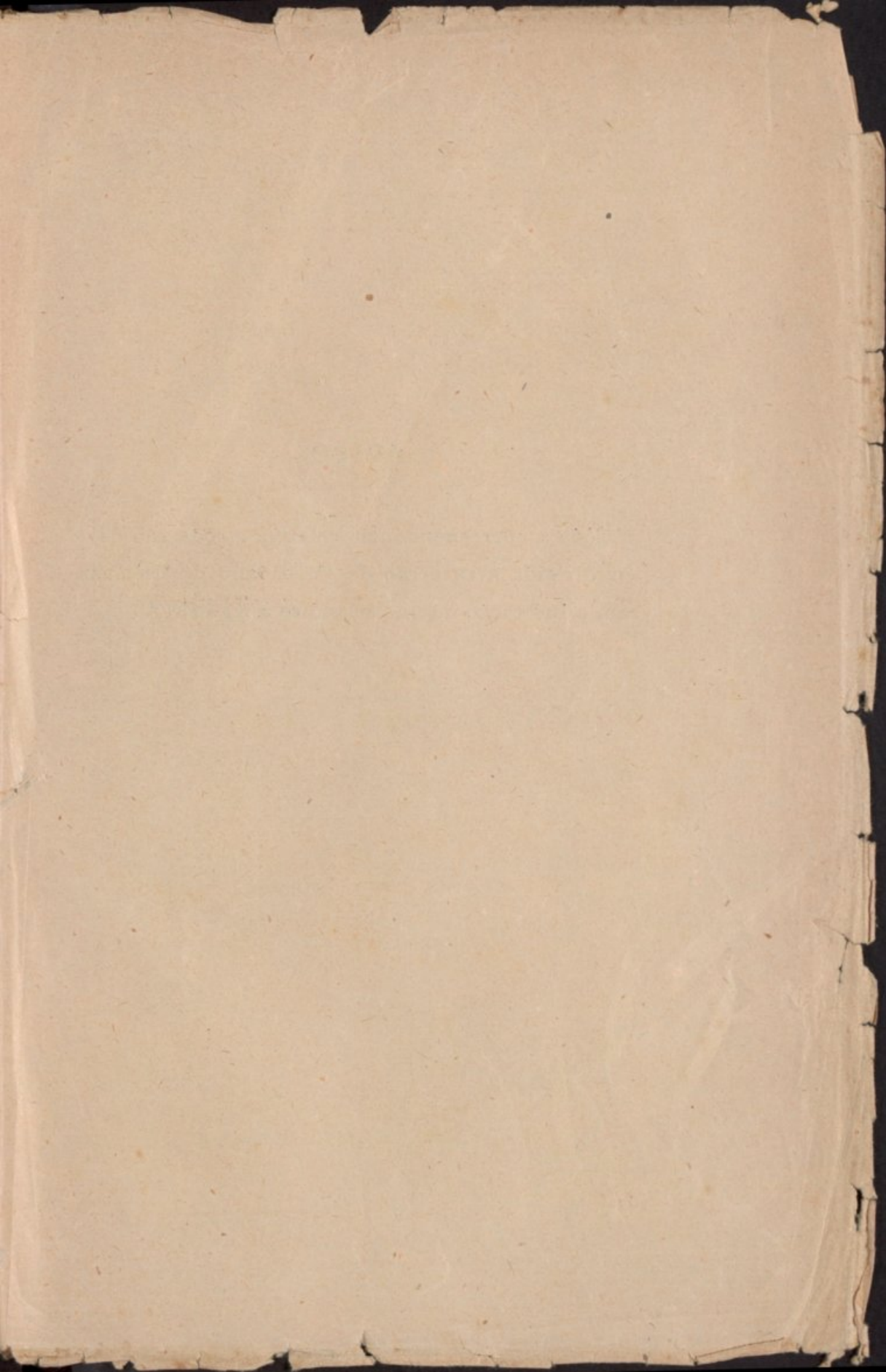
	Pág.
Comemoração promovida pela Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra em honra de Isaac Newton	2
Palavras do Ex. ^{mo} Sr. Embaixador de Inglaterra, abrindo a sessão . .	3
Discurso de Sir Frank Dyson	4
+ A obra matemática de Newton (DR. PACHECO DE AMORIM)	12
+ Newton e o ideal da ciência moderna (DR. JOAQUIM DE CARVALHO) . .	29
+ Newton, experimentador (DR. MÁRIO A. DA SILVA)	38
+ O princípio da gravitação universal (DR. F. M. DA COSTA LOBO) . . .	47
Discurso de encerramento, por SUA EX. ^a O EX. ^{mo} SR. EMBAIXADOR DE INGLATERRA	59
+ Theories in Physics resulting from the Phenomena of Radio-activity (DR. F. M. DA COSTA LOBO)	61
+ Instituto Botânico da Universidade de Coimbra — Coleção de fotografias diapositivas de Angola (DR. LUÍS W. CARRISSO)	75
+ Sôbre a distribuição geográfica de alguns caracteres fundamentais da população portuguesa actual (DR. EUSÉBIO TAMAGNINI)	100
+ O que são as ondas de T. S. F. (DR. MANUEL DOS REIS)	122
Evolução do conceito de grupo (DR. MIRA FERNANDES)	125
+ Astronomia prática — Determinação da inclinação do eixo de rotação do instrumento circular meridiano (ENG. ANTÓNIO MADEIRA) . . .	146
+ A antiga população das Canárias (DR. EUSÉBIO TAMAGNINI)	168
+ Relatório do DR. AURÉLIO QUINTANILHA, dirigido à Junta de Educação Nacional	181
?+ Influências lunares sôbre o magnetismo terrestre (ARTUR DIAS PRATAS) .	184
?+ Um afloramento do Silúrico na Beira Transmontana (Serra da Marofa) (JÚLIO GALHARDO DE ALMEIDA)	198

	Pág.
Quelques résultats de l'algèbre moderne (PROF. R. FUETER)	201
Influência dos tactóides sôbre a tixotropia do sole de pentóxido de vanádio (PROF. CURT KOPPER)	208
+ Sôbre alguns caracteres antropométricos da população portuguesa (ANTÓNIO A. THEMIDO)	217
+ A propósito do índice cefálico dos portugueses (DR. EUSÉBIO TAMAGNINI) .	242
+ La « Théorie physique basée sur les phénomènes de radioactivité » du Dr. F. M. da Costa Lôbo (DRS. EGAS PINTO BASTO e MÁRIO SILVA) .	263

v







AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida à Direcção da Faculdade de Ciências, com a indicação de que se refere à REVISTA.