IV. Biblioteca

O equipamento absolutamente insuficiente da biblioteca representava sem dúvida a falta mais poderosa que se opunha à investigação frutífera, e a mais difícil de superar. Faltavam quási completamente as mais importantes revistas científicas (ou existiam só em séries incompletas), faltava uma suficiente colecção de separatas, faltavam até os mais importantes compêndios ou monografias científicas. Já os anteriores chefes do Museu e Laboratório Zoológico e os seus colaboradores tinham reconhecido êste lamentável estado de coisas e haviam tentado corrigi-lo dentro dos limites restritos do orçamento. E isto em dois sentidos. Compraram-se ou assinaram-se em primeiro lugar compêndios (por exemplo o «Handbuch der Zoologie», a «Faune de France», os «Genera Insectorum»), iniciou-se em segundo lugar um largo serviço de troca com sociedades científicas, Museus e grémios estrangeiros, com o resultado de que a nossa biblioteca recebe actualmente cêrca de 400 revistas e outras publicações. O principal mérito no aperfeiçoamento dêste serviço de trocas, iniciado em 1924, cabe ao Sr. Dr. A. F. de Seabra. Mas como imediatamente vê qualquer especialista, trata-se, na maioria dêstes jornais, de publicações que não podem ser consideradas rigorosamente científicas ou nas quais se não reflecte, pelo menos, o trabalho de investigação do nosso tempo.

Para de certa maneira preencher as faltas existentes, nos limites das possibilidades actuais, atribuiu-se da quantia total disponível para a nova instalação do laboratório nada menos do que um quarto, a saber a quantia de 43.059$85, para a biblioteca. Também aqui pus mais uma vez as exigências do ensino em primeiro lugar, empregando quási metade da quantia citada na compra de compêndios, monografias e separatas de valor especial.

Não se tomaram em consideração exclusivamente livros que se referem à Zoologia geral; esforcei-me, pelo contrário, por tomar em consideração *todos* os ramos da Zoologia, também aqueles que actualmente podem não ser designados como em moda. Adquiriu-se sobretudo um número notável de estudos sôbre a sistemática e a distribuïção geográfica dos Invertebrados, que pareciam indispensáveis para o trabalho científico do Museu.

Aumentar também o número de revistas de carácter rigorosamente científico, isto é de revistas independentes e não publicadas por Museus, Sociedades etc., até ao grau desejável e necessário, adquirir sobretudo séries completas de revistas que se publicam já desde há muitos decénios — claro que isto não era possível com os meios à minha disposição. Neste campo só pouco a pouco se poderá alcançar resultado satisfatório, e só com a larga ajuda do Ministério da Educação Nacional ou do Instituto para a Alta Cultura. Tomei por conseqüência como objectivo complementar em primeiro lugar aquelas revistas de importância que existiam já na nossa biblioteca em colecções truncadas. Para êste fim gastou-se a verba parcial relativamente elevada de 10.500$ pouco mais ou menos. Renunciei, porém, por princípio, à substituïção de revistas já existentes em assinatura por outras que me interessariam talvez mais. Pois que nada me parece mais prejudicial a uma biblioteca do que submeter a escolha de revistas às inclinações e interêsses variáveis dos sucessivos directores. Por conseqüência, o número das revistas cuja assinatura se podia iniciar, ao lado das já existentes, tornou-se pequeno: trata-se de 5 revistas que me pareciam as mais desejáveis, aumentando assim o número total de revistas em assinatura de 10 para 15.

V. Aquisições várias

De aquisições que se não podem rubricar nos capítulos anteriores desejo enumerar as seguintes:

a) **Aquários.** — A qualquer laboratório zoológico pertence pròpriamente um aquário, instalado em aposentos especiais, visto um tal aquário ser indispensável para determinadas investigações fisiológicas e possibilitar além disso aos estudantes a observação de animais vivos, tão impressionante e valiosa. Para satisfazer a êste objectivo, pelo menos em parte, instalou-se uma série de aquários, colocados nos quartos de trabalho do laboratório. As despesas foram pequenas, pois já existia um certo número de aquários velhos que apenas precisavam de consêrto. Para os aquários marinhos comprou-se um aparelho eléctrico de compressão de ar, sistema «Elu», e um filtro de carvão. Êstes dois dispositivos deram o melhor resultado: temos animais marinhos que vivem já há um ano nestes aquários e que até se reproduziram neles. Tenho a intenção de colocar alguns aquários, dotados sobretudo de animais da costa portuguesa, também no Museu, para prazer e ensinamento dos seus numerosos visitantes.

b) **Excursões.** — Para as excursões à costa e às serras do país — pude levar a efeito 13 excursões mais largas — arranjaram-se as necessárias caixas, latas e frascos de transporte, uma rede de plancton e um bom altímetro.

VI. Melhoramentos do edifício

Pela Direcção Geral dos Edifícios e Monumentos Nacionais realizaram-se nestes dois anos os melhoramentos seguintes:

1) Receberam iluminação eléctrica a sala de aulas, a biblioteca, mais dois quartos do Laboratório e tôdas as divisões do Museu. Em outros dois gabinetes de trabalho instalou-se água corrente.

2) Na sala de aulas substituiu-se o quadro de pedra insuficiente por três grandes pedras móveis, que deixam ver, puxadas para baixo, uma superfície de projecção.

3) Efectuou-se em vários gabinetes a instalação necessária para a ligação dos novos aparelhos, sobretudo para os aparelhos de projecção na sala de aulas.

VII. Objectivos ainda não alcançados

Lancemos primeiro um olhar ao que se pôde alcançar. Julgo poder afirmar que o Laboratório Zoológico possúi hoje uma instalação que corresponde a tôdas as exigências do ensino moderno e que permite realizar, dentro de certos limites, também investigações frutíferas. Estou igualmente persuadido de que o orçamento do Museu e Laboratório, sobretudo se fôr aumentado segundo a minha proposta para o ano económico de 1940, garante um bom funcionamento e florescimento do Laboratório. Por isto me sinto muito obrigado a Sua Excelência o Senhor Ministro da Educação Nacional e ao Senhor Director Geral do Ensino Superior, que liberalmente concederam as verbas necessárias. Emquanto o orçamento (despêsas com o material) importava no ano de 1936 em 53.480$00, temos para o ano de 1939 um orçamento de 105.980$00.

Contudo, é evidente que existe ainda uma série de objectivos maiores ou menores a alcançar. O mais urgente, em minha opinião, é o seguinte:

1) Começando com as exigências de construção, seria muito urgente, em primeiro lugar, o consêrto ou renovação do telhado de algumas divisões do laboratório. Tenciono instalar numa destas divisões o laboratório fotográfico, reünindo nela todos os novos aparelhos para micro- e macrofotografia e para ampliação. Não posso realizar êste projecto, visto nesta e nas outras divisões citadas a água das chuvas correr pelas paredes abaixo ou, gotejando do tecto, formar grandes charcos no soalho. Isto parece-me ser um estado efectivamente indigno dum laboratório científico. É claro que em tais condições os valiosos aparelhos se estragariam dentro de poucos meses.

Seria desejável além disso instalar na sala de aulas um dispositivo para escurecimento de funcionamento eléctrico. Sem um tal dispositivo vemo-nos forçados a fechar e abrir continuamente as janelas, o que é incómodo para o ensino, ou a fazer tôda a aula de janelas fechadas e com luz artificial. Igual dispositivo seria conveniente também para a sala de aulas práticas.

Precisa-se além disso de instalação de água corrente naqueles gabinetes de trabalho onde ainda a não há. Agua corrente não representa nêste caso comodidade ou luxo, mas grande necessidade para determinados trabalhos científicos.

Muito agradecido ficaria a V. Ex.ª se se dignasse ajudar-me nas minhas aspirações, enviando à repartição competente um requerimento quanto às necessidades do edifício, sobretudo quanto à renovação o mais rápida possível do telhado.

2) Agora as necessidades de equipamento do laboratório. Aqui é sobretudo desejável o seguinte:

a) Aumento do número de microscópios. Estado actual: 28 lugares de trabalho, 20 microscópios utilizáveis. Faltam pois 8 microscópios para o pleno aproveitamento da sala. Os meios do orçamento ordinário permitirão a compra de 1-2 microscópios por ano.

b) Um aparelho de projecção para a sala de aulas práticas. Torna-se preciso só depois da instalação do dispositivo de escurecimento na respectiva sala. A vantagem de projecções para as aulas práticas é incontestável: o professor pode explicar tudo o que se observa na respectiva preparação microscópica antes de o estudante a examinar e desenhar.

c) Uma câmara de filmar, para filmes de 16^{mm}. O filme torna-se cada vez mais estimado e valioso para a investigação zoológica, sobretudo no campo da fisiologia dos sentidos e da psicologia animal. Além disso, a posse duma tal câmara tornaria muito menos dispendiosa a organização duma colecção de filmes para o ensino. Êste desejo só será realizável por meio dum subsídio extraordinário.

d) Aperfeiçoamento da aparelhagem fisiológica. Trata-se de aparelhos mais pequenos, adquiríveis pelos meios do orçamento ordinário.

e) Alargamento da biblioteca. Uma solução ideal não pode atingir-se só com as próprias fôrças dum laboratório isolado. O que se pode alcançar é o seguinte:

Tomando como base a verba actual para «aquisições de utilização permanente» (36.900$00) e atendendo ao facto de a instalação nova do laboratório estar agora essencialmente pronta, pode o quinhão do leão da verba citada, digamos 24.000$00, ser atribuído à biblioteca. Desta quantia cabem actualmente cêrca de 10.000$00 às revistas e compêndios de assinatura, 4.000$00 são reservados à compra de livros e separatas, de maneira que ficam disponíveis para outros fins 10.000$00. Esta quantia empregar-se-ia nos primeiros anos para completar as revistas já existentes em colecções truncadas até fechar as últimas lacunas, a partir dum ano determinado, digamos o ano de 1900. Serão precisos para êste fim 80.000$00 pouco mais ou menos. Chega-se pois ao fim dentro de dez anos. A partir de então os citados 10.000$00 podem ser utilizados para a assinatura de mais revistas. Calculo que o número das revistas assinadas poderá ser assim aumentado de 15 para 25.

Assim ficariam abrangidas, não todas as revistas de carácter predominantemente zoológico, mas em todo o caso as mais importantes. Se o orçamento para o ano 1940 fôr aumentado de 20.000$00, segundo a minha proposta, então o preenchimento destas lacunas será alcançado já dentro de três anos e o número de novas assinaturas poderá elevar-se consideràvelmente, ou poderá utilizar-se uma parte maior da verba para a compra de livros e separatas, ou para o apetrechamento aperfeiçoado do Laboratório e Museu.

3) Por fim um só desejo relativo ao pessoal do museu e laboratório, mas desejo êste que tenho de designar como muito urgente. À minha chegada a Coimbra o Laboratório Zoológico tinha um assistente jovem na pessoa do Dr. A. Xavier da Cunha. Visto o Dr. Xavier da Cunha ter ascendido entretanto a professor auxiliar e visto o lugar assim livre ter sido ocupado por um Assistente de Antropologia, ficou o Museu e Laboratório Zoológico sem qualquer auxiliar de quem possa esperar e exigir serviços como cabem a um assistente jovem. Esta falta foi em parte resolvida pela circunstância feliz de o Dr. Helling ter pôsto à disposição do laboratório todo o seu tempo livre e tôda a sua boa vontade de trabalho, e isto durante os primeiros dois anos sem qualquer gratificação. O Instituto para a Alta Cultura possibilitou-lhe, a seguir, a continuação do seu estágio em Portugal e com isto a dos seus trabalhos, tanto de organização como científicos, por mais um ano, concedendo-lhe um subsídio de investigação. Conseguiu-se obter um tal estipêndio também para os últimos cinco meses do ano corrente. Mas o Instituto para a Alta Cultura fez notar nesta altura, e, parece-me, com tôda a justiça, que não era das suas atribuïções mas sim das da Universidade de Coimbra, cuidar da gratificação de um auxiliar, quando falte a um laboratório da Universidade. Já não podendo contar, por conseqüência, com o auxílio do Instituto para a Alta Cultura, peço a V. Ex.ª se digne dedicar o seu melhor interêsse a êste assunto, requerendo da repartição competente a verba necessária para a gratificação dum assistente do Museu e Laboratório Zoológico para o ano económico de 1940. É evidente que um laboratório que se encontra em reorganização não pode dispensar a ajuda de um assistente jovem. Abstraindo mesmo da sua falta para a preparação das aulas teóricas e das projecções, queria mencionar só a colecção das preparações microscópicas que carece dum aumento notável quanto à Anatomia comparada dos Vertebrados — trata-se de 1000 preparações pouco mais ou menos —, a colecção das preparações anatómicas só agora iniciada e a dos diapositivos. Acaba de surgir mais uma tarefa, penosa e morosa, mas que não pode

protelar se: a organização dum catálogo geral da biblioteca, abrangendo livros, revistas e folhetos. Não chega para êste fim um empregado que saiba preencher as fichas, precisam-se também auxiliares com os convenientes conhecimentos científicos. Acresce também a circunstância de o infatigável auxiliar de naturalista do Museu, Sr. Rogério Nogueira de Carvalho, que, graças ao seu conhecimento íntimo da nossa biblioteca e ao real interêsse que o liga desde há 35 anos ao destino do nosso Instituto, nos poderia ser neste caso do maior valor, se encontrar ocupado temporàriamente nos Serviços de Contabilidade da Universidade.

Por fim, desejaria exprimir a V. Ex.ª e a todos os meus colaboradores que me ajudaram nestes três anos, os meus mais sinceros agradecimentos, esperando que me concedam também no futuro o seu valioso auxílio, de maneira que ao acabar a minha actividade em Coimbra se possa dizer: fez-se bom trabalho e não se deitou o dinheiro pela janela. É êste o meu objectivo único.

Coimbra, Museu e Laboratório Zoológico
da Universidade de Coimbra,
em 25 de Novembro de 1939.

Contribuïção para o estudo da teoria das funções

(CONTINUAÇÃO)

CAPITULO VIII

CONCEITO DE FUNÇÃO

I

TEOREMAS GERAIS

84. Vizinhança dum conjunto. — Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ conjuntos ligados entre si. Damos o nome de *vizinhança de* $\mathbf{B}$ *relativamente a* $\mathbf{A}$, *definida por um número positivo* ε, ao conjunto $\mathbf{U}$ dos elementos $\mathbf{u}$ de $\mathbf{A}$ tais que seja $\underline{\mathbf{u}\,\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$. Cada elemento de $\mathbf{U}$ é um elemento de $\mathbf{A}$ que se caracteriza por lhe corresponder um elemento de $[\mathbf{B}]$ cuja distância ao primeiro não excede o número ε [*v.* IV, *p.* 89, *l.* 24]. O conjunto $\mathbf{U}$ é a soma dos produtos de $\mathbf{A}$ pelos esferóides de centros nos diversos elementos de $[\mathbf{B}]$ e de raios iguais a ε.

Verifica-se evidentemente a relação $\overrightarrow{\mathbf{U}\,\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$. A vizinhança $\mathbf{U}$ ainda pode definir-se como sendo o maior subconjunto de $\mathbf{A}$ cujo desvio a $\mathbf{B}$ não excede o número ε.

Em particular, vizinhança dum elemento $\mathbf{b}$ de $[\mathbf{A}]$ relativamente a $\mathbf{A}$, definida pelo número positivo ε, é o produto de $\mathbf{A}$ pelo esferóide de centro $\mathbf{b}$ e raio ε.

Entendemos por vizinhança dum conjunto $\mathbf{B}$ definida por um número positivo ε, sem mais indicação, a vizinhança de $\mathbf{B}$ relativamente ao espaçóide de que tratamos e definida por ε, ou seja a soma dos esferóides de centros nos elementos de $[\mathbf{B}]$ e de raios iguais a ε.

Qualquer vizinhança de $\mathbf{B}$ em relação a $\mathbf{A}$ é um conjunto limitado quando $\mathbf{B}$ é limitado [*v.* IV, *p.* 95, *l.* 29], e é um conjunto fechado, totalmente ou não, ao mesmo tempo que o conjunto $\mathbf{A}$.

São manifestamente as mesmas as vizinhanças relativas a $\mathbf{A}$

de conjuntos juxtapostos a $\mathbf{B}$ quando definidas por um mesmo número ε [*v.* IV, *p.* 89, *l.* 1].

Dada uma vizinhança $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{B}$ *em relação a* $\mathbf{A}$, *os termos de qualquer sucessão de subconjuntos de* $\mathbf{A}$ *(ou de elementos, em particular)*

(1) $$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$$

para a qual seja $\lim \overrightarrow{\mathbf{X}_i\mathbf{B}} = 0$ *pertencem a* $\mathbf{U}$ *a partir da ordem em que temos* $\overrightarrow{\mathbf{X}_i\mathbf{B}} \leqq \overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{B}}$. *Quando* $\mathbf{B}$ *é limitado, os termos da sucessão precedente, a partir de certa ordem, constituem, pois, um conjunto limitado.*

Concluímos também que, *se o limite integral duma sucessão de subconjuntos de* $\mathbf{A}$, *de soma limitada, pertence a* $[\mathbf{B}]$, *os termos da mesma sucessão pertencem a* $\mathbf{U}$ *a partir de certa ordem* [*v.* IV, *p.* 123, *l.* 17].

Se $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{U}'$ *são as vizinhanças de* $\mathbf{B}$ *em relação a* $\mathbf{A}$ *definidas respectivamente pelos números* ε *e* ε' $(\varepsilon < \varepsilon')$, *o conjunto* $\mathbf{U}'$ *contém a vizinhança de* $\mathbf{U}$ *em relação a* $\mathbf{A}$ *definida pelo número* $\varepsilon' - \varepsilon$. Na verdade, se $\mathbf{u}$ é um elemento desta vizinhança de $\mathbf{U}$, temos $\overline{\mathbf{u}\mathbf{U}} \leqq \varepsilon' - \varepsilon$, e, como $\overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$, vem $\overline{\mathbf{u}\mathbf{B}} \leqq \overline{\mathbf{u}\mathbf{U}} + \overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon'$ [*v.* IV, *p.* 99, (6)].

Seja $\mathbf{U}$ *a vizinhança de* $\mathbf{B}$ *em relação a* $\mathbf{A}$ *definida pelo número* ε. *A vizinhança* $(\mathbf{V})$, *definida pelo mesmo número* ε, *do conjunto dos subconjuntos limitados de* $\mathbf{B}$ *em relação ao conjunto dos subconjuntos limitados de* $\mathbf{A}$ *é o conjunto* $(\mathbf{U}')$ *dos subconjuntos limitados* $\mathbf{U}'$ *de* $\mathbf{U}$. Com efeito, da relação $\overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$ conclui-se que a um subconjunto $\mathbf{U}'$ de $\mathbf{U}$ corresponde sempre um subconjunto $\mathbf{B}'$ de $[\mathbf{B}]$ tal que $\overline{\mathbf{U}'\mathbf{B}'} \leqq \varepsilon$ [*v.* IV, *p.* 110, *l.* 24] e por isso $\mathbf{U}'$ pertence à vizinhança $(\mathbf{V})$ [*v.* V, *p.* 136, *l.* 35]. Mas a cada conjunto $\mathbf{V}$ de $(\mathbf{V})$ corresponde um subconjunto $\mathbf{B}'$ de $[\mathbf{B}]$ tal que $\overline{\mathbf{V}\mathbf{B}'} \leqq \varepsilon$, sendo pois $\overrightarrow{\mathbf{V}\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{V}[\mathbf{B}]} \leqq \overrightarrow{\mathbf{V}\mathbf{B}'} \leqq \varepsilon$, donde $\overrightarrow{\mathbf{V}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$, razão porque $\mathbf{V}$ é um subconjunto de $\mathbf{U}$. Dá-se pois a coincidência $(\mathbf{U}') \mid (\mathbf{V})$.

Consideremos o caso particular de $\mathbf{B}$ ser um subconjunto de $[\mathbf{A}]$. A vizinhança $\mathbf{U}$ de $\mathbf{B}$ relativamente a $\mathbf{A}$, definida pelo número positivo ε, é tal que $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$, pois temos agora $\overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{U}} = 0$. A vizinhança $\mathbf{U}$ pode então definir-se como sendo o maior subconjunto de $\mathbf{A}$ que satisfaz àquela condição.

Neste caso os conjuntos $\mathbf{U}$ e $\mathbf{B}$ ou são ambos limitados ou ambos ilimitados [*v.* IV, *p.* 102, *l.* 10].

Quando é $\mathbf{B} < [\mathbf{A}]$, *converge para* $\mathbf{B}$ *qualquer sucessão de vizinhanças dêste conjunto relativas a* $\mathbf{A}$ *e definidas por números positivos que tendam para zero.*

Seja δ *a desconexão do conjunto* $\mathbf{B}$. *Quando é* $\mathbf{B} < [\mathbf{A}]$, *a vizinhança* $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{B}$ *relativa a* $\mathbf{A}$ *e definida por* ε *tem uma desconexão que não excede o maior dos números* δ *e* ε. Com efeito, os conjuntos $\mathbf{U} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{U}$ são nesse caso juxtapostos entre si, tendo por isso a mesma desconexão [*v.* VI, *p.* 318, *l.* 5], e é evidente que a do primeiro não excede o maior dos números δ e ε. Em particular, *quando* $\mathbf{B}$ *é conexo, a desconexão de* $\mathbf{U}$ *não excede* ε.

Seja $\mathbf{A}$ *um conjunto qualquer (um elemento, em particular). Seja* $\mathbf{C}$ *um conjunto tal que dois quaisquer dos seus elementos pertençam a um contínuo limitado contido em* $\mathbf{C}$. *Suponhamos que existe o produto* $[\mathbf{A}] \times \mathbf{C}$ *e que o conjunto* $\mathbf{C}$ *não é um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$. *Cada vizinhança* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{A}$ *relativa a* $\mathbf{C}$ *contém um contínuo ligado a* $\mathbf{A}$ *mas não contido neste conjunto.*

Tomemos dois elementos $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}$ de $\mathbf{C}$, sendo o primeiro um elemento de $[\mathbf{A}]$ e o segundo estranho a êste conjunto. Seja $\mathbf{K}$ um contínuo limitado contido em $\mathbf{C}$ a que pertençam os elementos $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}$. Unamos estes elementos por uma sucessão de elementos de $\mathbf{K}$, em número finito, tais que as distâncias entre cada um e o seguinte sejam inferiores ao número $\frac{1}{i}$. Designemos por $\mathbf{X}_i$ o conjunto dos elementos desta sucessão contidos na vizinhança considerada $\mathbf{V}$ mas que sejam consecutivos a partir de $\mathbf{x}'$. Ponhamos $i = 1, 2, \ldots$ e designemos por $\mathbf{X}$ um limite fechado, contido em $\mathbf{K}$, da sucessão

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$$

O conjunto $\mathbf{X}$ é um contínuo [*v.* VI, *p.* 319, *l.* 3]. Êste contínuo, manifestamente ligado a $\mathbf{A}$, pertence a $\mathbf{V}$; contém o elemento $\mathbf{x}'$ e alguns elementos de $\mathbf{K}$ distintos dos de $[\mathbf{A}]$.

Seja $\mathbf{C}$ *um conjunto tal que dois quaisquer dos seus elementos pertençam a um contínuo limitado contido em* $\mathbf{C}$. *Consideremos uma colecção constituída por alguns dêsses contínuos. Suponha-*

mos que um contínuo limitado qualquer contido em **C** *que se justaponha a uma soma de contínuos da colecção pertence à mesma colecção* [1]. *Admitamos também que um qualquer dos contínuos da colecção determina uma vizinhança* **V** *em relação a* **C** *tal que os contínuos contidos em* **V** *ainda pertencem à mesma colecção. Nestas condições a soma dos contínuos da colecção é o conjunto* **C**.

Demonstremos que um elemento qualquer **c** de **C** pertence a um dos contínuos da colecção a que se refere o enunciado. Seja $\mathbf{K}_1$ um dêstes contínuos. Se nenhum elemento de $\mathbf{K}_1$ se juxtapõe a **c** (no caso afirmativo o elemento **c** pertenceria ao contínuo $\mathbf{c}+\mathbf{K}_1$ da colecção), unamos **c** a um elemento de $\mathbf{K}_1$ por meio dum contínuo limitado **K** contido em **C**. Efectuemos a soma de todos os contínuos da colecção contidos em $\mathbf{K}_1+\mathbf{K}$ mas que admitam $\mathbf{K}_1$ por subconjunto. Tal soma, por ser um conjunto conexo, admite por lugar um contínuo. Êste juxtapõe-se elemento a elemento a um contínuo $\mathbf{K}'$ contido em $\mathbf{K}_1+\mathbf{K}$ e que contém aquela soma. Por hipótese $\mathbf{K}'$ é um contínuo da colecção; é o maior contido em $\mathbf{K}_1+\mathbf{K}$ e que contém $\mathbf{K}_1$.

Terminamos a demonstração provando que é $\mathbf{K}' \mid > \mathbf{K}$, e que por conseguinte o elemento **c** pertence ao contínuo $\mathbf{K}'$ da colecção. Consideremos para isso uma vizinhança **V** de $\mathbf{K}'$ relativa a **K** tal que os contínuos nela contidos pertençam à colecção. Se o contínuo **K** não fôsse um subconjunto de $\mathbf{K}'$, a vizinhança **V** conteria um contínuo $\mathbf{K}''$ ligado a $\mathbf{K}'$ mas não contido neste conjunto (como resultaria da proposição precedente pondo nela $\mathbf{A} \mid \mathbf{K}'$ e $\mathbf{C} \mid \mathbf{K}$). Existiria pois um contínuo $\mathbf{K}'+\mathbf{K}''$ da colecção contido em $\mathbf{K}_1+\mathbf{K}$ e maior do que $\mathbf{K}'$.

85. Demonstração dum lema. — *Consideremos uma sucessão de conjuntos*

$$(2) \qquad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots,$$

um conjunto limitado **B** [2], *uma família de conjuntos* **F** *e um número não negativo* α. *Representemos em geral por*

$$(3) \qquad \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \ldots, \mathbf{x}_u, \ldots$$

---

(1) Resulta desta condição que uma soma dum número finito de contínuos da colecção ligados entre si é ainda um contínuo da colecção.

(2) *Dispensa-se a hipótese da limitabilidade de* **B** *quando a soma dos conjuntos* (2) *é limitada.*

qualquer sucessão de elementos extraida duma subsucessão da (2) [1], *mas que seja limitada e cujo derivado* [2] *seja um subconjunto de* [$\mathbf{B}$] *de diâmetro não superior a* α. *Suponhamos que existe uma ordem para cada sucessão* (3) *a partir da qual os seus elementos pertençam a um dos conjuntos* $\mathbf{F}$.

É possível determinar uma vizinhança $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{B}$, *um número* β *superior a* α *e uma ordem* i *tais que: elementos de* $\mathbf{U}$ *em número finito, que determinem um diâmetro inferior a* β [3], *extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a* i, *pertençam sempre a um dos conjuntos da família.*

Se a família dos conjuntos $\mathbf{F}$ *é finita ou numerável, podemos determinar uma vizinhança* $\mathbf{U}'$ *de* $\mathbf{B}$, *um número* β' *superior a* α *e uma ordem* i' *tais que: um subconjunto de* $\mathbf{U}'$, *de diâmetro inferior a* β', *contido na soma* $\mathbf{A}_{i'} + \mathbf{A}_{i'+1} + \cdots$, *pertença sempre a um dos conjuntos da família.*

Admitamos, com efeito, que não é possível determinar uma vizinhança de $\mathbf{B}$, um número superior a α e uma ordem que verifiquem a primeira parte do enunciado. Existe em tal caso uma sucessão

$$(4) \qquad \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$$

de conjuntos que fazem $lim\, \overrightarrow{\mathbf{X}_i \mathbf{B}} = 0$, cujos diâmetros têm um limite máximo não superior a α, sendo cada um $\mathbf{X}_i$ constituído por elementos em número finito, não contidos num mesmo conjunto $\mathbf{F}$, extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens crescentes com i [4].

A sucessão (4) é limitada [*p.* 103, *l.* 8]; seja

$$(5) \qquad \mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s, \ldots, \mathbf{X}_u, \ldots$$

uma das suas subsucessões convergentes [*v.* IV, *p.* 140, *l.* 10], e representemos por $\mathbf{X}$ o respectivo limite totalmente fechado.

Mas $\mathbf{X}$ é um subconjunto de [$\mathbf{B}$], porque temos $lim\, \overrightarrow{\mathbf{X}_u \mathbf{B}} = 0$

---

(1) Recordem-se as definições dadas no *v.* IV, *p.* 112, *n.* 33.

(2) Chamamos derivado duma sucessão de elementos ao respectivo limite integral, isto é, ao conjunto dos seus elementos limites [*v.* IV, *p.* 17, *n.* 6].

(3) É claro que nos referimos ao diâmetro do conjunto dêsses elementos.

(4) Isto é, tôdas superiores a cada uma das ordens dos termos da (2) que deram origem ao conjunto $\mathbf{X}_{i-1}$.

[*v.* v, *p.* 296, *l.* 12], e o seu diâmetro não excede α [*v.* v, *p.* 134, *l.* 17]. Logo a sucessão que resulta de numerarmos convenientemente a totalidade dos elementos dos termos da sucessão (5), além de ser limitada e extraída duma subsucessão da (2), tem por derivado o subconjunto $\mathbf{X}$ de $[\mathbf{B}]$ cujo diâmetro não excede α, e no entanto não há ordem alguma a partir da qual os seus elementos pertençam a um mesmo conjunto da família.

Semelhantemente reconhecemos que, se não é possível determinar uma vizinhança de $\mathbf{B}$, um número superior a α e uma ordem que satisfaçam à segunda parte do lema, existe uma sucessão de conjuntos de soma limitada

$$(6) \qquad \mathbf{X}'_r, \mathbf{X}'_s, \ldots, \mathbf{X}'_u, \ldots$$

que tende para um subconjunto $\mathbf{X}'$ de $[\mathbf{B}]$ de diâmetro não superior a α, sendo cada um $\mathbf{X}'_u$ um subconjunto duma soma de termos da sucessão (2) nos quais a ordem mínima cresce com u, e não pertencendo cada um dêles a nenhum dos conjuntos $\mathbf{F}$.

Depois de numerarmos os conjuntos $\mathbf{F}$, determinemos uma sucessão de elementos

$$(7) \qquad x'_{r'}, x'_{s'}, \ldots, x'_{u'}, \ldots$$

extraída duma subsucessão da (6) mas de maneira que tais elementos não pertençam aos conjuntos $\mathbf{F}$ cujas ordens são dadas respectivamente pelos números 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, . . . [1] elementos êsses que sejam extraídos de termos da sucessão (2) de ordens sucessivamente crescentes.

A sucessão (7) assim extraída duma subsucessão da (2) é limitada, o seu derivado (contido em $\mathbf{X}'$) é um subconjunto de $[\mathbf{B}]$ de diâmetro não superior a α, mas não existe uma ordem a partir da qual todos os seus elementos pertençam a um mesmo conjunto da família.

---

[1] Quando os conjuntos $\mathbf{F}$ são em número finito n, suprimimos nesta sucessão os números superiores a n.

Observações. — I) *A família dos conjuntos* **F** *pode ser constituída, em particular, pelos conjuntos dos elementos das diversas sucessões* (3) *tomadas a partir de certas ordens.*

II) *Se a partir de certa ordem para cada sucessão* (3), *quaisquer dos seus elementos em número finito* [*ou apenas em número* k, *para um determinado* k], *e não necessàriamente todos, pertencem a um dos conjuntos* **F**, *é possível deterninar uma vizinhança* **U** *de* **B**. *um número* β *superior a* α *e uma ordem* i *tais que: elementos de* **U** *em número finito* [*ou apenas em número* k], *que determinem um diâmetro inferior a* β, *extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a* i *pertençam sempre a um dos conjuntos da família.* Efectivamente, considerando a família dos conjuntos **F** dos elementos de cada sucessão (3) a partir da ordem em que se dá a propriedade expressa neste enunciado, diz a primeira parte do lema, aplicada à nova família de conjuntos **F**′, que é possível determinar uma vizinhança **U** de **B**, um número β superior a α e uma ordem i tais que: elementos de **U** em número finito [ou apenas em número k], que determinem um diâmetro inferior a β, extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens superiores a i pertençam sempre a um dos conjuntos **F**′, e por isso a um dos conjuntos **F**.

III) *Quando a soma dos termos da sucessão* (2) *é limitada e quando o limite integral pertence a* [**B**], *podemos simplificar o enunciado do lema, pois não é necessário nêle aludir às vizinhanças* **U** *e* **U**′. Em tal caso, com efeito, existem ordens a partir das quais os termos da sucessão (2) pertencem àquelas vizinhanças de **B** [*p.* 103, *l.* 11].

IV) *Quando o produto de* [**B**] *pelo limite integral da sucessão* (2) *pertence ao limite comum da mesma* [1], *basta fazer figurar no enunciado do lema sucessões de elementos extraídas da sucessão* (2) *em vez de sucessões* (3) *extraídas das diversas subsucessões da* (2). Consideremos, com efeito, uma qualquer das sucessões (3). Um elemento do seu derivado é agora limite duma sucessão de elementos

$$\mathbf{x}'_1,\ \mathbf{x}'_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}'_i,\ \ldots$$

---

[1] O que sucede em particular quando a sucessão é convergente ou quando **B** pertence ao limite comum.

extraída da (2). Substituamos nesta sucessão os elementos de ordens $r, s, \ldots$ respectivamente por $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \ldots$. A nova sucessão assim extraída da (2), que representamos por

$$(8) \qquad \mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'', \ldots, \mathbf{x}_i'', \ldots,$$

é limitada, e o seu derivado (o mesmo que o da (3)) tem o diametro não superior a $\bar{\alpha}$. Logo, se existe, como estamos a supor, uma ordem a partir da qual os termos da sucessão (8) pertençam a um dos conjuntos $\mathbf{F}$, o mesmo podemos dizer relativamente à sucessão (3) donde partimos.

v) É duma grande generalidade o lema de que nos temos ocupado. Obtêm-se casos particulares sucessivos, que mais directamente intervêm em certas proposições, introduzindo uma ou mais das simplificações seguintes: $\alpha = 0$; α igual ao diâmetro de $\mathbf{B}$; $k = 1$; existência de $\lim \mathbf{A}_i \parallel \mathbf{A}$; $\mathbf{B} | < [\mathbf{A}]$; $\mathbf{A}_i | \mathbf{A}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; $\mathbf{A} | \mathbf{P}$ (espaçóide de que tratamos); família constituída por um só conjunto; conjunto $\mathbf{B}$ reduzido a um só elemento; etc.

No caso de $\alpha = 0$, as sucessões de elementos (3) são as que, sendo extraídas das diversas subsucessões da (2), convergem para elementos de $[\mathbf{B}]$. No caso de α igual ao diâmetro de $\mathbf{B}$, as sucessões (3) são as extraídas das subsucessões da (2) e tais que seja $\lim \underline{\mathbf{x}_u \mathbf{B}} = 0$.

Eis alguns dêsses casos particulares, todos relativos à hipótese $\alpha = 0$:

Consideremos uma sucessão convergente (2) *de conjuntos de soma limitada e uma família de conjuntos* $\mathbf{F}$. *Se os elementos de qualquer sucessão convergente, extraída da* (2), *pertencem a partir de certa ordem a um dos conjuntos* $\mathbf{F}$, *é possível determinar um número positivo* ε *e uma ordem* i *tais que: elementos em número finito, que determinem um diâmetro inferior a* ε, *extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a* i, *pertençam sempre a um dos conjuntos da família.*

Se além disso a família dos conjuntos $\mathbf{F}$ *é finita ou numerável, podemos determinar um número positivo* ε' *e uma ordem* i' *tais que um conjunto de diâmetro inferior a* ε' *contido na soma* $\mathbf{A}_{i'} + \mathbf{A}_{i'+1} + \cdots$, *pertença sempre a um dos conjuntos da família.*

Consideremos uma sucessão de conjuntos (2), *um subconjunto* $\mathbf{B}$ *limitado e fechado do limite comum da mesma e um conjunto* $\mathbf{F}$.

Se, qualquer que seja a sucessão de elementos que tenda para um elemento de **B**, *extraída da sucessão* (2). *êsses elementos pertencem a* **F** *a partir de certa ordem, é possível determinar uma ordem* i *e uma vizinhança* **U** *de* **B** *tais que o produto de* **U** *pela soma* $\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_{i+1} + \cdots$ *pertença a* **F**.

Consideremos uma sucessão convergente (2) *de conjuntos de soma limitada e um conjunto* **F**. *Se os elementos de qualquer sucessão convergente, extraída da* (2), *pertencem a partir de certa ordem ao conjunto* **F**, *os termos da sucessão* (2) *pertencem a* **F** *a partir de certa ordem.*

Consideremos dois conjuntos **A** *e* **B** *ligados entre si, sendo êste fechado e um dêles limitado. Consideremos ainda uma família de conjuntos* **F** *e um número inteiro positivo* k. *Se, qualquer que seja a sucessão de elementos de* **A** *que tenda para um elemento de* **B**, *quaisquer* k *dêsses elementos pertencem, a partir de certa ordem, a um dos conjuntos* **F** (1), *é possível determinar um número positivo* ε *e uma vizinhança* **U** *de* **B** *relativa a* **A** *tais que um conjunto de* k *elementos de* **U**, *de diâmetro inferior a* ε, *pertença sempre a um dos conjuntos* **F** (2).

Se os termos de qualquer sucessão de elementos de **A** *que tenda para um de* **B** *pertencem a um dos conjuntos* **F** *a partir de certa ordem e se a família dêstes conjuntos é finita ou numerável, podemos determinar um número positivo* ε' *e uma vizinhança* **U'** *de* **B** *relativa a* **A** *tais que um subconjunto de* **U'** *de diâmetro inferior a* ε' *pertença sempre a um dos conjuntos* **F** (3).

---

(1) Esta condição exige que o produto $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, quando existe, seja coberto pelos conjuntos F.

(2) Não é necessário aludir ao número ε quando B se reduz a um só elemento.

(3) Também não é necessário aludir a ε' quando B se reduz a um único elemento. Se ainda neste caso A se converte no espaçóide de que tratamos, vem a proposição:

Dados um elemento b *e uma família finita ou numerável de conjuntos* F, *se os elementos de qualquer sucessão que tenda para* b *pertencem a um dos conjuntos* F *a partir de certa ordem, existe um esferóide de centro* b *contido num dêsses conjuntos.*

Notemos que o presente enunciado pode deixar de ser verdadeiro para uma infinidade não numerável de conjuntos F, afirmação esta que se transmite ao enunciado da segunda parte do lema. É fácil citar exemplos neste sentido.

A cada sucessão convergente de elementos dum dado conjunto limitado **A** *façamos corresponder o conjunto* **F** *dos elementos da mesma sucessão tomados a partir de certa ordem. Existe um número positivo* ε *tal que: elementos quaisquer de* **A**, *em número finito, de distâncias dois a dois inferiores a* ε *pertencem a um dos conjuntos* **F**.

Sejam **A** *e* **B** *conjuntos ligados entre si, sendo êste fechado e um dêles limitado. Seja* **F** *um conjunto qualquer. Se os termos de cada sucessão de elementos de* **A** *que tenda para um elemento de* **B** *pertencem a* **F** *a partir de certa ordem, existe uma vizinhança de* **B** *relativa a* **A** *contida em* **F**.

Seja **b** *um elemento limite dum dado conjunto* **A**. *A cada sucessão de elementos de* **A** *que tenda para* **b** *façamos corresponder o conjunto* **F** *dos elementos da mesma tomados a partir de certa ordem. Existe uma vizinhança* **U** *de* **b** *relativa a* **A** *tal que: elementos quaisquer de* **U**, *em número finito, pertencem a um dos conjuntos* **F**.

Consideremos um conjunto qualquer **A** *e um subconjunto* **B** *de* [**A**] *limitado e fechado. Associemos a cada elemento de* **B** *uma vizinhança dêste elemento relativa a* **A**. *Existem uma vizinhança* **U** *de* **B** *relativa a* **A** *e um número positivo* ε *tais que um subconjunto qualquer de* **U** *de diâmetro inferior a* ε *pertence a uma dessas vizinhanças.*

Cada elemento de **B** é, com efeito, centro dum esferóide cujo produto por **A** constitui a vizinhança dêsse elemento. Mas como o conjunto **B** é coberto interiormente com uma infinidade numerável dos mesmos esferóides [*lema de* LINDELÖF], segue-se que os termos de qualquer sucessão de elementos de **A** que tenda para um elemento de **B** pertencem, a partir de certa ordem, a um dos esferóides dessa infinidade numerável. Existem pois uma vizinhança **U** de **B** relativa a **A** e um número positivo ε tais que um subconjunto qualquer de **U** de diâmetro inferior a ε pertence a um dêsses esferóides, e portanto a uma das vizinhanças consideradas [1].

---

[1] Também serve de justificação a mesma da proposição do *v.* VI, *p.* 526, *l.* 10, convenientemente adaptada ao presente caso.

Logo o conjunto **U** *decompõe-se num número finito de partes cada uma das quais pertence a uma das vizinhanças dadas, isto é, o conjunto* **U** *cobre se apenas com um número finito das mesmas vizinhanças.*

Quando o conjunto **A** coincide com o espaçóide que estamos considerando vem o enunciado seguinte:

Associemos a cada elemento dum conjunto limitado e fechado **B** *um esferóide de centro no mesmo elemento. Existem uma vizinhança* **U** *de* **B** *e um número positivo* ε *tais que um subconjunto qualquer de* **U** *de diâmetro inferior a* ε *seja interior a um dêsses esferóides.*

A vizinhança **U** é pois coberta interiormente apenas com um número finito dos esferóides considerados (¹).

Consideremos uma sucessão de conjuntos (2), *um conjunto* **B** *e uma família de conjuntos* **F**. *Seja em geral* (3) *qualquer sucessão de elementos extraída duma subsucessão da* (2) *e tal que se tenha* $\lim \overline{\mathbf{x}_u \mathbf{B}} = 0$. *Suponhamos que existe uma ordem para cada sucessão* (3) *a partir da qual os seus elementos pertençam a um dos conjuntos* **F**.

É possível determinar uma vizinhança **U** *de* **B** *e uma ordem i tais que: elementos quaisquer de* **U**, *em número finito, extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a i pertençam a um dos conjuntos da família.*

Se a família dos conjuntos **F** *é finita ou numerável, podemos determinar uma vizinhança* **U**' *de* **B** *e uma ordem i' tais que o produto de* **U**' *pela soma* $\mathbf{A}_{i'} + \mathbf{A}_{i'+1} + \cdots$ *pertença a um dos conjuntos da família.*

Quando o conjunto **B** é limitado, esta proposição deduz-se do lema, introduzindo nêle a condição de α representar o diâmetro de **B**. Mas a mesma proposição estende-se para o caso de **B** ser ilimitado, e por conseguinte de α se tornar infinito. A demonstração é mais simples que a do lema, e dela se obtém suprimindo as passagens que resultam das hipóteses das limitabilidades de **B** e do conjunto dos diâmetros dos derivados das diversas sucessões (3).

(¹) Esta proposição completa o lema de Borel enunciado no *v.* VI, *p.* 528, *l.* 19.

Limitamo-nos a enunciar só dois casos particulares:

Sejam **A** *e* **B** *conjuntos ligados entre si. A cada sucessão* $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ *de elementos de* **A** *para a qual seja* $\lim \overline{x_i B} = 0$ *façamos corresponder o conjunto* **F** *de todos os elementos da mesma sucessão mas tomados a partir de certa ordem. Existe uma vizinhança* **U** *de* **B** *relativa a* **A** *tal que: elementos quaisquer de* **U** *em número finito pertencem a um dos conjuntos* **F**.

Sejam **A**, **B** *e* **F** *conjuntos quaisquer, sendo os dois primeiros ligados entre si. Se os termos de qualquer sucessão* $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ *de elementos de* **A**, *tal que* $\lim \overline{x_i B} = 0$, *pertencem a* **F** *a partir de certa ordem, existe uma vizinhança de* **B** *relativa a* **A** *contida em* **F**.

Uma outra classe de proposições que se deduz ainda do mesmo lema é a que resulta de supormos que os elementos dos conjuntos A_i, **B** e **F** nêle figurados são subconjuntos limitados de elementos dum dado espaçóide [*v.* IV, *p.* 134, *n.* 44].

São verdadeiras por exemplo as seguintes proposições:

Consideremos uma sucessão de conjuntos (2), *um conjunto limitado* **B** *e uma família de conjuntos* **F**. *Se, qualquer que seja a sucessão de subconjuntos limitados dos termos correspondentes duma subsucessão da* (2), *que tenda para um subconjunto limitado de* [**B**], *existe uma ordem a partir da qual êsses conjuntos pertencem a um dos conjuntos* **F**, *é possível determinar uma vizinhança* **U** *de* **B**, *um número positivo* ε *e uma ordem i tais que: subconjuntos quaisquer de* **U**, *em número finito, de distâncias dois a dois inferiores a* ε, *extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a i pertençam a um dos conjuntos da família* [*p.* 103, *l.* 21].

Consideremos uma sucessão convergente de conjuntos (2) *de soma limitada e uma família de conjuntos* **F**. *Se, qualquer que seja a sucessão de subconjuntos dos termos correspondentes da* (2), *que tenda para um elemento, cada um dêstes subconjuntos pertence a um dos conjuntos* **F** *a partir de certa ordem, é possível determinar um número positivo* ε *e uma ordem i tais que um subconjunto de diâmetro inferior a* ε *dum têrmo da sucessão de ordem superior a i pertença sempre a um dos conjuntos da família.*

Consideremos uma infinidade de conjuntos **A** *e um conjunto limitado* **B**. *A cada sucessão dêsses conjuntos* **A**, *de soma limitada, que tenda para* **B** (¹) *façamos corresponder uma ordem. Existe um número positivo* ε *que satisfaz à seguinte condição: quaisquer dos conjuntos* **A**, *em número finito, cujas distâncias a* **B** *sejam inferiores a* ε *são termos duma das referidas sucessões tomados a partir da correspondente ordem* (²).

Sejam **A** *e* **B** *conjuntos ligados entre si, sendo êste fechado e um dêles limitado. Consideremos uma família de conjuntos* **F**. *Se cada um dos termos de qualquer sucessão de subconjuntos de* **A** *de soma limitada, que tenda para um elemento de* **B**, *pertence a um dos conjuntos* **F** *a partir de certa ordem, existem uma vizinhança* **U** *de* **B** *relativa a* **A** *e um número* ε *tais que um subconjunto de* **U** *de diâmetro inferior a* ε *pertença sempre a um dos conjuntos da família.*

O lema de Borel, há pouco demonstrado com o auxílio do de Lindelöf, apresenta-se também como uma aplicação directa da proposição agora enunciada. Efectivamente, se cada elemento dum conjunto limitado e fechado **B** é centro dum esferóide duma dada família, os termos de qualquer sucessão de conjuntos de soma limitada que tenda para um elemento de **B** pertencem a um dêsses esferóides a partir de certa ordem [*v.* vi, *p.* 482, *l.* 15], e por isso existem uma vizinhança **U** de **B** e um número positivo ε tais que um subconjunto de **U** de diâmetro inferior a ε pertença sempre a um dos mesmos esferóides. Pertence pois a um dos esferóides da família, em particular, qualquer subconjunto de **B** de diâmetro inferior a ε.

86. Definição de função. — Sejam **P** e **Q** dois espaçóides quaisquer, distintos ou não. Dado um subconjunto **A** de **P**, façamos corresponder a cada um dos seus elementos **x** um e um só elemento **z** de **Q**. A uma tal correspondência dá-se o nome de *função*, e dizemos que **z** é função de **x** no conjunto **A**.

(¹) Supomos que existem tais sucessões.

(²) É claro que a proposição generaliza-se para o caso de **B** ser ilimitado, mas devemos supor que as sucessões $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots$ de conjuntos **A** que tendam para **B** satisfazem à condição $lim\, \overline{A_i\, B} = 0$.

Pelo símbolo $f(\mathbf{x})$, no qual a letra f pode substituir-se por qualquer outra, convencionamos representar então o elemento $\mathbf{z}$ correspondente a $\mathbf{x}$, ou *elemento da função f no elemento* $\mathbf{x}$. Podemos pois escrever $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$ para indicar que a variável $\mathbf{z}$, ou variável dependente, é função de $\mathbf{x}$, também chamada variável independente [1].

Diremos que a função $f(\mathbf{x})$ é *definida* no conjunto $\mathbf{A}$ e em cada um dos seus elementos.

A própria função faz corresponder a cada subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ o conjunto $\mathbf{Z}$ dos elementos de $f(\mathbf{x})$ nos diversos elementos de $\mathbf{X}$. A função de conjuntos assim definida será representada por $\mathbf{Z} \mid f(\mathbf{X})$ (com a mesma letra f). Em virtude desta notação, o conjunto dos elementos de $f(\mathbf{x})$ em todos os elementos de $\mathbf{A}$ pode representar-se por $f(\mathbf{A})$ [2].

A correspondência unívoca que estabelece a função $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$ pode ser também *biunívoca*, isto é, recíproca, o que sucede quando cada elemento $f(\mathbf{x})$ de $f(\mathbf{A})$ corresponde a um só elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$. Em tal caso a função determinada por essa correspondência recíproca chama-se *inversa* da primeira.

Seja $\varphi(\mathbf{z})$ uma segunda função mas definida no conjunto $f(\mathbf{A})$. À função $\varphi\big(f(\mathbf{x})\big)$, que faz corresponder a cada elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ o elemento $\varphi(\mathbf{z})$ correspondente a $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$, damos o nome de *função de função*. A $\mathbf{z}$ chama-se então variável intermédia.

Dadas n funções

$$f_1(\mathbf{x}),\, f_2(\mathbf{x}),\, \cdots,\, f_n(\mathbf{x})$$

---

(1) Recordemos que, relativamente às estruturas dos espaçóides P e Q, cada um dêles pode considerar-se simples ou composto, ou constituído pelos subconjuntos limitados de certo espaçóide, e pode considerar-se mixto [*v.* IV, *p.* 136, *n.* 45].

A exposição que vamos desenvolver aplica-se em particular às funções que relacionam elementos de dois espaçóides numéricos [*v.* IV, *p.* 138, *l.* 3]; tais são as que põem em correspondência pontos de dois espaços ordinários, com o mesmo ou diferente número de dimensões, de coordenadas tôdas reais ou não, e as funções que fazem corresponder a subconjuntos limitados de um dêsses espaços subconjuntos limitados dum outro.

(2) Quando fôr necessário supor que $f(\mathbf{X})$ estabeleça correspondência entre elementos de dois espaçóides, teremos de considerar apenas os subconjuntos limitados $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ e de supor que os correspondentes conjuntos $\mathbf{Z}$ também são limitados [*v.* V, *p.* 141, *l.* 13].

definidas num mesmo conjunto $\mathbf{A}$, considera-se muitas vezes a função

(9) $$\big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big),$$

ainda definida no conjunto $\mathbf{A}$, e que faz corresponder a cada elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ o elemento composto representado em (9) [*v.* IV, *p.* 28, *n.* 11]. Dizemos que tal função é *composta,* e as funções dadas chamam-se então *componentes* [1].

Se uma função $\varphi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ é definida no conjunto dos elementos da função (9), a função

$$\varphi\big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big),$$

definida em $\mathbf{A}$ e denominada ordinàriamente função composta, será considerada como função de função, sendo a representada em (9) a intermédia; é uma função do elemento composto $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ que por sua vez é função de $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$.

Diremos que duas funções $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, definidas respectivamente nos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$, são *juxtapostas* entre si quando forem juxtapostos os conjuntos dos elementos de segunda ordem $\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$ e $\big(\mathbf{x}, j(\mathbf{x})\big)$ correspondentes aos diversos elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{A}'$ respectivamente. Tais funções caracte-

---

(1) Se as funções dadas, distintas ou não, são definidas em conjuntos quaisquer

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n,$$

distintos ou não, pertencentes ou não ao mesmo espaçóide, a função

(1) $$\big(f_1(\mathbf{x}_1), f_2(\mathbf{x}_2), \ldots, f_n(\mathbf{x}_n)\big),$$

definida no conjunto composto [*v.* IV, *p.* 29, *l.* 19]

(2) $$(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$$

e que faz corresponder a cada elemento $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ dêste conjunto o elemento composto (1), tem uma construção que não é distinta da precedente; na verdade, podemos considerar tôdas as funções $f_i(\mathbf{x})$ como sendo definidas no mesmo conjunto composto (2).

Note-se que o conjunto dos elementos da função (1) assim obtida resulta da composição dos conjuntos dos elementos das funções dadas, isto é, pode designar-se por $\big(f_1(\mathbf{A}_1), f_2(\mathbf{A}_2), \ldots, f_n(\mathbf{A}_n)\big)$.

rizam-se pela seguinte propriedade: dado um número positivo δ, a cada elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ corresponde um elemento $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}'$ que faz $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \delta$ e $\overline{f(\mathbf{x})\, j(\mathbf{x}')} < \delta$; a cada elemento $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}'$ corresponde um $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ que verifica as mesmas desigualdades.

Duas funções juxtapostas a uma terceira são juxtapostas entre si.

Se $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, definidas em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$, são juxtapostas entre si, verificam-se as seguintes juxtaposições:

$$\mathbf{A} \parallel \mathbf{A}' \quad \text{e} \quad f(\mathbf{A}) \parallel j(\mathbf{A}') \qquad [v.\ \text{v}, p.\ 138, l.\ 12].$$

87. Funções limitadas. — A função $f(\mathbf{x})$, definida em $\mathbf{A}$, diz-se limitada num subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$, por definição, quando é limitado o conjunto $f(\mathbf{X})$. Sempre que falarmos em função limitada $f(\mathbf{x})$, sem mais designação, entenderemos que $f(\mathbf{x})$ é limitada no conjunto $\mathbf{A}$ onde a definimos.

Duas funções juxtapostas entre si ou são ambas limitadas ou ambas ilimitadas.

Fàcilmente se reconhece que, dado um subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$, se $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas diversas vizinhanças de $\mathbf{B}$ em relação a $\mathbf{A}$, existe uma sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que faz $lim\, \overline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}} = 0$ e ao longo da qual os elementos de $f(\mathbf{x})$ divergem para infinito [*v.* v, *p.* 144, *l.* 24]. Em particular, se $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças dum elemento $\mathbf{b}$ de $[\mathbf{A}]$, existe uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tende para $\mathbf{b}$ ao longo da qual os elementos de $f(\mathbf{x})$ divergem para infinito.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$ *limitado e fechado. Se* $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de cada elemento de* $\mathbf{B}$, *existe uma vizinhança de* $\mathbf{B}$ *onde* $f(\mathbf{x})$ *é igualmente limitada* (1).

Existe, com efeito, uma vizinhança $\mathbf{U}$ de $\mathbf{B}$ em relação a $\mathbf{A}$ que é coberta apenas com um número finito das vizinhanças a que se refere o presente enunciado [*p.* 112, *l.* 1]. Logo $f(\mathbf{x})$ é limitada em $\mathbf{U}$.

Por conseguinte, *se* $f(\mathbf{x})$ *é ilimitada nas vizinhanças dum subconjunto* $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *limitado e fechado, existe um elemento de* $\mathbf{B}$ *nas vizinhanças do qual* $f(\mathbf{x})$ *é ilimitada.*

---

(1) É claro que estas vizinhanças referem-se ao conjunto $\mathbf{A}$.

Em particular:

Uma função $f(\mathbf{x})$ definida num conjunto limitado $\mathbf{A}$ é limitada neste conjunto sempre que o seja numa vizinhança de cada elemento de $[\mathbf{A}]$.

Sejam $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$ funções juxtapostas entre si definidas nos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$. Consideremos um subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$. Se $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{B}$ relativas a $\mathbf{A}$, o mesmo sucede a $j(\mathbf{x})$ nas vizinhanças de $\mathbf{B}$ relativas a $\mathbf{A}'$.

Suponhamos, com efeito, que $f(\mathbf{x})$ é ilimitada em qualquer vizinhança de $\mathbf{B}$. Existe nesse caso uma sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que faz $lim\, \underline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}} = 0$ e ao longo da qual os elementos de $f(\mathbf{x})$ divergem para infinito. Mas a cada elemento $\mathbf{x}_i$ corresponde um elemento $\mathbf{x}_i'$ de $\mathbf{A}'$ que verifica as desigualdades $\overline{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'} < \frac{1}{i}$ e $\overline{f(\mathbf{x}_i)\, j(\mathbf{x}_i')} < \frac{1}{i}$. Temos ainda $lim\, \underline{\mathbf{x}_i' \mathbf{B}} = 0$, como mostra a relação $\underline{\mathbf{x}_i' \mathbf{B}} \leqq \underline{\mathbf{x}_i' \mathbf{x}_i} + \underline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}}$ [*v.* IV, *p.* 90, (1)]. Os elementos de $j(\mathbf{x})$ ao longo da sucessão $\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \ldots, \mathbf{x}_i', \ldots$ divergem para infinito. Logo $j(\mathbf{x})$ também é ilimitada em qualquer vizinhança de $\mathbf{B}$.

Se em particular $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças dum elemento $\mathbf{b}$ de $[\mathbf{A}]$ relativas a $\mathbf{A}$, também $j(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{b}$ em relação a $\mathbf{A}'$.

88. Limites de funções. — Seja $f(\mathbf{x})$ uma função definida em certo conjunto $\mathbf{A}$. Designemos em geral por

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots \tag{10}$$

uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$. Consideremos a correspondente sucessão

$$f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_i), \ldots \tag{11}$$

Chamamos *elemento limite de $f(\mathbf{x})$* num elemento $\mathbf{y}$ do lugar $[\mathbf{A}]$ a qualquer limite duma sucessão (11) correspondente a uma sucessão (10) que tenda para $\mathbf{y}$. O conjunto de todos os elementos limites de $f(\mathbf{x})$ no elemento $\mathbf{y}$ toma o nome de *conjunto limite em $\mathbf{y}$ de $f(\mathbf{x})$* e é representado por $\lambda(\mathbf{y})$, ou por $lim_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x})$. Tal conjunto existirá tôdas as vezes que a função fôr limitada numa vizinhança de $\mathbf{y}$.

O conjunto $\lambda(\mathbf{y})$ é o mesmo que em qualquer elemento juxtaposto a $\mathbf{y}$ [1].

Mais geralmente, *conjunto limite de* $f(\mathbf{x})$ *num subconjunto* $\mathbf{Y}$ *de* $[\mathbf{A}]$ é o conjunto dos elementos limites de tôdas as sucessões (11) correspondentes às diversas sucessões (10) para as quais seja $\lim \overline{\mathbf{x}_i\, \mathbf{Y}} = 0$. Tal conjunto limite será designado por $\lambda(\mathbf{Y})$, ou por $\overline{\lim}_{\mathbf{Y}} f(\mathbf{x})$, e existirá sempre que $f(\mathbf{x})$ fôr limitada numa vizinhança de $\mathbf{Y}$.

Consideremos uma classe de sucessões

$$(12) \qquad \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \ldots, \mathbf{x}_i', \ldots$$

para cada uma das quais seja $\lim \overline{\mathbf{x}_i'\, \mathbf{Y}} = 0$. *Admitamos que, dada uma sucessão qualquer* (10) *tal que* $\lim \overline{\mathbf{x}_i\, \mathbf{Y}} = 0$, *dela podemos sempre extrair uma sucessão da classe. O conjunto* $\lambda(\mathbf{Y})$ *é constituído pelos limites das sucessões*

$$(13) \qquad f(\mathbf{x}_1'), f(\mathbf{x}_2'), \ldots, f(\mathbf{x}_i'), \ldots$$

correspondentes às diversas sucessões da classe.

Com efeito, os limites das diversas sucessões (13) pertencem a $\lambda(\mathbf{Y})$; por outro lado, qualquer elemento $\mathbf{z}$ de $\lambda(\mathbf{Y})$ é limite duma sucessão convergente (11) correspondente a uma sucessão (10) tal que $\lim \overline{\mathbf{x}_i\, \mathbf{Y}} = 0$, e, como da (10) podemos extrair uma sucessão (12) da classe, o mesmo elemento $\mathbf{z}$ é também limite da correspondente sucessão (13).

Na definição de $\lambda(\mathbf{Y})$ basta pois considerar as sucessões da referida classe [2].

---

[1] O elemento $\mathbf{y}$, quando pertence a $\mathbf{A}$, pode figurar na sucessão (10). Neste caso o elemento correspondente $f(\mathbf{y})$ e os que lhe são juxtapostos consideram-se limites de $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{y}$.

Observemos também que, na definição de $\overline{\lim}_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x})$, interessa principalmente o caso de $\mathbf{y}$ ser elemento limite de $\mathbf{A}$. Não sendo assim, $\mathbf{y}$ juxtapõe-se a um elemento de $\mathbf{A}$, no qual o elemento correspondente para a função e os juxtapostos a êste constituem o conjunto $\overline{\lim}_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x})$.

[2] Se por exemplo a variável independente é constituída por números ou por pontos, de coordenadas tôdas reais ou não, basta considerar, para o cálculo de $\lambda(Y)$, as sucéssões monótonas $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ tais que $\lim \overline{x_i\, Y} = 0$ (dizemos que uma sucessão de números imaginários é monótona quando são monótonas as

Em particular:

Seja $f(\mathbf{x})$ limitada numa vizinhança de $\mathbf{Y}$. Para que $\lambda(\mathbf{Y})$ se reduza a elementos juxtapostos a um certo elemento $\mathbf{z}$, é necessário e suficiente que tendam para $\mathbf{z}$ tôdas as sucessões (13) *correspondentes às diversas sucessões da classe.*

Em virtude da definição de $\lambda(\mathbf{Y})$, qualquer dos seus elementos $\mathbf{z}$ caracteriza-se pela propriedade seguinte: a cada número positivo δ corresponde um elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ tal que $\overline{\mathbf{x}\mathbf{Y}}<\delta$ e $\overline{f(\mathbf{x})\,\mathbf{z}}<\delta$.

É claro que $[f(\mathbf{A})]\,|\!>\lambda(\mathbf{Y})$ e $[f(\mathbf{A})]\,|\,\lambda(\mathbf{A})$.

Se $\mathbf{U}$ é uma vizinhança de $\mathbf{Y}$ em relação a $\mathbf{A}$, temos $[f(\mathbf{U})]\,|\!>\lambda(\mathbf{Y})$, porque os elementos de qualquer sucessão (10) que faça $lim\,\overline{\mathbf{x}_i\mathbf{Y}}=0$ pertencem a $\mathbf{U}$ a partir de certa ordem.

Se $\mathbf{X}$ é um subconjunto de $\mathbf{A}$, vem $\lambda(\mathbf{X})\,|\!>[f(\mathbf{X})]$.

Se $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$ são subconjuntos de $[\mathbf{A}]$ juxtapostos entre si, temos $\lambda(\mathbf{Y})\,|\,\lambda(\mathbf{Y}')$. Mais geralmente:

São os mesmos os conjuntos limites em conjuntos juxtapostos de duas funções juxtapostas entre si ([1]).

Consideremos duas funções juxtapostas entre si, $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, definidas nos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$. Basta demonstrar que são os mesmos os conjuntos limites destas funções num dado subconjunto $\mathbf{Y}$ de $[\mathbf{A}]$. Designemos estes conjuntos limites por $\mathbf{Z}$ e

---

sucessões das partes reais e das partes imaginárias dos termos; dizemos que uma sucessão de pontos é monótona quando são monótonas as sucessões das primeiras coordenadas, das segundas, etc. As sucessões monótonas de números reais, ou de imaginários puros, são as nunca crescentes e as nunca decrescentes).

([1]) A definição já apresentada de funções juxtapostas pode enunciar-se agora do seguinte modo: duas funções $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, definidas respectivamente nos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$, são juxtapostas entre si quando, seja qual fôr o elemento $\mathbf{x}'$ de qualquer dos conjuntos $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{A}'$, o elemento correspondente $f(\mathbf{x}')$ ou $j(\mathbf{x}')$ é um dos limites em $\mathbf{x}'$ de $j(\mathbf{x})$ ou de $f(\mathbf{x})$ [*v.* v, *p.* 138, *l.* 17].

Com o fim de citarmos um exemplo de funções juxtapostas, consideremos uma função $f(\mathbf{x})$ definida num conjunto $\mathbf{A}$ não totalmente fechado. Seja $\mathbf{B}$ um conjunto de elementos de $[\mathbf{A}]$ estranhos a $\mathbf{A}$, como por exemplo o conjunto $\mathbf{B}\,|\,[\mathbf{A}]-\mathbf{A}$. Designemos por $j(\mathbf{x})$ uma função definida em $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, que em $\mathbf{A}$ coincida com $f(\mathbf{x})$ e que faça corresponder a cada elemento de $\mathbf{B}$ um dos limites de $f(\mathbf{x})$ no mesmo elemento, limite êste que supomos existir. As funções $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, a segunda das quais resultou de *prolongarmos* a primeira para o conjunto $\mathbf{B}$, juxtapõem-se entre si.

por $\mathbf{Z}'$. Qualquer elemento $\mathbf{z}$ de $\mathbf{Z}$ caracteriza-se pela condição de a cada número positivo δ lhe corresponder um elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ tal que $\overline{\mathbf{x}\mathbf{Y}}<\delta$ e $\overline{f(\mathbf{x})\,\mathbf{z}}<\delta$. Mas como o elemento $f(\mathbf{x})$ é um dos limites em $\mathbf{x}$ de $j(\mathbf{x})$, vem da mesma maneira, para um certo $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}'$, $\overline{\mathbf{x}'\mathbf{x}}<\delta$ e $\overline{j(\mathbf{x}')\,f(\mathbf{x})}<\delta$. Temos pois $\overline{\mathbf{x}'\mathbf{Y}}<2\delta$ e $\overline{j(\mathbf{x}')\,\mathbf{z}}<2\delta$, isto é, o elemento $\mathbf{z}$ pertence a $\mathbf{Z}'$.

Pelas mesmas razões um elemento qualquer de $\mathbf{Z}'$ também é elemento de $\mathbf{Z}$.

Se um dos conjuntos limites é desprovido de elementos, o mesmo sucede ao outro.

O conjunto limite $\lambda(\mathbf{Y})$ é totalmente fechado.

Seja $\mathbf{z}'$ um elemento limite do conjunto $\lambda(\mathbf{Y})$. Dado um número positivo δ, existe um elemento $\mathbf{z}$ dêste conjunto tal que $\overline{\mathbf{z}\mathbf{z}'}<\delta$, e a $\mathbf{z}$ corresponde um elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ tal que $\overline{\mathbf{x}\mathbf{Y}}<\delta$ e $\overline{f(\mathbf{x})\,\mathbf{z}}<\delta$. Temos pois $\overline{\mathbf{x}\mathbf{Y}}<\delta$ e $\overline{f(\mathbf{x})\,\mathbf{z}'}<2\delta$, quere dizer, $\mathbf{z}'$ é um elemento de $\lambda(\mathbf{Y})$.

O conjunto $\lambda(\mathbf{Y})$ contém os conjuntos limites de $f(\mathbf{x})$ nos diversos elementos de $[\mathbf{Y}]$. Quando $\mathbf{Y}$ é limitado, o primeiro conjunto limite coincide com a soma dos segundos.

É evidente que $\lambda(\mathbf{Y})$ contém os conjuntos limites de $f(\mathbf{x})$ nos diversos elementos de $[\mathbf{Y}]$. Suponhamos que $\mathbf{Y}$ é limitado. Um elemento $\mathbf{z}$ de $\lambda(\mathbf{Y})$ é limite duma sucessão (11) correspondente a uma sucessão (10) tal que $lim\, \overline{\mathbf{x}_i\mathbf{Y}}=0$. Mas a (10) é limitada [*p.* 103, *l.* 8], e qualquer dos seus elementos limites $\mathbf{y}$ pertence a $[\mathbf{Y}]$ [*v.* IV, *p.* 122, *l.* 6]. Logo $\mathbf{z}$ é elemento do conjunto $\lambda(\mathbf{y})$.

A função $\lambda(\mathbf{Y})$ é aditiva para um número finito de parcelas, e ainda para uma infinidade de parcelas quando a soma destas é um conjunto fechado.

A propriedade aditiva, expressa por

$$\lambda(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2+\ldots) \,|\, \lambda(\mathbf{Y}_1)+\lambda(\mathbf{Y}_2)+\ldots,$$

é evidentemente verdadeira para qualquer número finito de parcelas. A propriedade aditiva generalizada para uma infinidade de parcelas verifica-se quando a soma destas é limitada e fechada, como resulta da proposição precedente. Pode porém deixar de ser verdadeira quando tal soma não é limitada e fechada.

Se $f(\mathbf{x})$ é limitada e se $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$ são subconjuntos de $[\mathbf{A}]$ ligados entre si, os conjuntos $\lambda(\mathbf{Y})$ e $\lambda(\mathbf{Y}')$ possuem um elemento comum.

Na verdade, se $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$ são subconjuntos de $[\mathbf{A}]$ ligados um ao outro, podemos determinar uma sucessão (10) de elementos de $\mathbf{A}$ tal que seja $\overline{lim}\, \mathbf{x}_i \mathbf{Y} = 0$ e $\overline{lim}\, \mathbf{x}_i \mathbf{Y}' = 0$. Os limites da correspondente sucessão (11) são elementos comuns a $\lambda(\mathbf{Y})$ e a $\lambda(\mathbf{Y}')$.

Por conseguinte, se diversos subconjuntos $\mathbf{Y}$ de $[\mathbf{A}]$, em número finito, são ligados entre si, o mesmo sucede aos correspondentes conjuntos $\lambda(\mathbf{Y})$, que se podem dispor por uma certa ordem, com repetições se fôr necessário, de tal maneira que dois conjuntos consecutivos quaisquer possuam um elemento comum [*v.* VI, *p.* 303, *l.* 32].

Seja $\mathbf{B}$ um subconjunto de $[\mathbf{A}]$. Consideremos duas sucessões de vizinhanças de $\mathbf{B}$ que tendam para $\mathbf{B}$,

(14) $$\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2,\ \ldots,\ \mathbf{U}_i,\ \ldots$$
(15) $$\mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2,\ \ldots,\ \mathbf{V}_i,\ \ldots,$$

sendo as primeiras relativas a $\mathbf{A}$ e as segundas a $[\mathbf{A}]$. As sucessões

(16) $$f(\mathbf{U}_1),\ f(\mathbf{U}_2),\ \ldots,\ f(\mathbf{U}_i),\ \ldots$$
(17) $$\lambda(\mathbf{U}_1),\ \lambda(\mathbf{U}_2),\ \ldots,\ \lambda(\mathbf{U}_i),\ \ldots$$
(18) $$\lambda(\mathbf{V}_1),\ \lambda(\mathbf{V}_2),\ \ldots,\ \lambda(\mathbf{V}_i),\ \ldots$$

convergem para $\lambda(\mathbf{B})$ [1].

Suponhamos que existe o conjunto $\lambda(\mathbf{B})$. A sucessão (16) é então quási-limitada, pois temos $[f(\mathbf{U}_i)] \mid > \lambda(\mathbf{B})$ [*p.* 120, *l.* 11], e é convergente porquanto cada um dos seus termos contém os termos seguintes a partir de certa ordem [*v.* V, *p.* 291, *l.* 6]. O seu limite totalmente fechado $\mathbf{Z}$ satisfaz à condição $\mathbf{Z} \mid > \lambda(\mathbf{B})$, e como por outro lado qualquer elemento de $\mathbf{Z}$ pertence evidentemente a $\lambda(\mathbf{B})$, dá-se a coincidência $\mathbf{Z} \mid \lambda(\mathbf{B})$.

Tomemos um têrmo qualquer $\mathbf{U}_k$ da sucessão (14). A partir da ordem em que os valores de i fazem $\mathbf{U}_k > \mathbf{U}_i$, o têrmo $\mathbf{U}_k$ con-

---

[1] Notemos que, em todo êste assunto, os conjuntos $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$, $\mathbf{X}_i$ e $\mathbf{Y}_i$ podem converter-se em simples elementos. Assim, na proposição que acabamos de enunciar podemos supor que $\mathbf{B}$ se reduz a um elemento $\mathbf{b}$ de $[\mathbf{A}]$.

têm uma vizinhança de cada têrmo $\mathbf{U}_i$ [*p.* 103, *l.* 15], sendo por isso $[f(\mathbf{U}_k)] | > \lambda(\mathbf{U}_i)$. A partir da mesma ordem também temos $\lambda(\mathbf{U}_k) | > [f(\mathbf{U}_i)]$ [*p.* 120, *l.* 14]. O lugar de cada têrmo de qualquer das sucessões (16) ou (17) contém pois os termos da outra a partir de certa ordem, razão porque a (17) tende para o mesmo limite $\lambda(\mathbf{B})$ que a (16) [*v.* v, *p.* 297, *l.* 27].

Demonstremos que a sucessão (18) também converge para $\lambda(\mathbf{B})$. Consideremos para isso uma função $j(\mathrm{x})$ juxtaposta a $f(\mathrm{x})$ que resulte de *prolongarmos* $f(\mathrm{x})$ para o conjunto $[\mathbf{A}] - \mathbf{A}$. Os conjuntos $\lambda(\mathbf{B})$ e $\lambda(\mathbf{V}_i)$ relativos a $f(\mathrm{x})$ não se alteram quando esta função se substitui por $j(\mathrm{x})$ [*p.* 120, *l.* 17]. Logo a sucessão (18) — que se encontra relativamente a $j(\mathrm{x})$ nas mesmas condições que a (17) a respeito de $f(\mathrm{x})$ — tende ainda para $\lambda(\mathbf{B})$.

Se $\lambda(\mathbf{B})$ é desprovido de elementos, fàcilmente se reconhece que a sucessão (16) não é quási-limitada, e que por isso diverge para infinito [*v.* v, *p.* 291, *l.* 15]. Nesse caso as sucessões (17) e (18) também divergem para infinito.

Quando $f(\mathrm{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{B}$, existe $\lambda(\mathbf{B})$ e temos

$$lim\, \overline{f(\mathbf{U}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = lim\, \overline{\lambda(\mathbf{U}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = lim\, \overline{\lambda(\mathbf{V}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = 0\,.$$

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$. *Consideremos duas sucessões*

$$\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ \ldots,\ \mathbf{X}_i,\ \ldots$$
$$\mathbf{Y}_1,\ \mathbf{Y}_2,\ \ldots,\ \mathbf{Y}_i,\ \ldots$$

de subconjuntos de $\mathbf{A}$ *e de* $[\mathbf{A}]$ *rèspectivamente tais que seja* $lim\, \overrightarrow{\mathbf{X}_i \mathbf{B}} = lim\, \overrightarrow{\mathbf{Y}_i \mathbf{B}} = 0$. *O conjunto* $\lambda(\mathbf{B})$ *contém os limites integrais das sucessões*

(19) $\qquad f(\mathbf{X}_1),\ f(\mathbf{X}_2),\ \ldots,\ f(\mathbf{X}_i),\ \ldots$

(20) $\qquad \lambda(\mathbf{Y}_1),\ \lambda(\mathbf{Y}_2),\ \ldots,\ \lambda(\mathbf{Y}_i),\ \ldots$

Quando $f(\mathrm{x})$ *é limitada numa vizinhança de* $\mathbf{B}$, *temos*

(21) $\qquad lim\, \overrightarrow{f(\mathbf{X}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = 0 \quad e \quad lim\, \overrightarrow{\lambda(\mathbf{Y}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = 0\,.$

Podemos considerar, com efeito, os termos das sucessões (19) e (20) como sendo subconjuntos dos correspondentes termos de sucessões construídas como a (16) e a (18) da proposição precedente.

Quando as somas dos termos das (19) e (20) são limitadas verificam-se os limites (21) [*v.* IV, *p.* 123, *l.* 17].

Em particular: *se* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots$ *é uma sucessão de elementos de* **A** *tais que* $\lim \underline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}} = 0$, *temos também* $\lim \underline{f(\mathbf{x}_i)\,\lambda(\mathbf{B})} = 0$.

Suponhamos que $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* **B**. *A cada número positivo* ∂ *corresponde um número positivo* ε *de maneira que se verificam as desigualdades*

$$\overline{f(\mathbf{U})\,\lambda(\mathbf{B})} < \partial \;,\quad \overline{\lambda(\mathbf{U})\,\lambda(\mathbf{B})} < \partial \;,\quad \overline{\lambda(\mathbf{V})\,\lambda(\mathbf{B})} < \partial$$
$$\overline{f(\mathbf{U})\,f(\mathbf{U}')} < \partial \;,\quad \overline{\lambda(\mathbf{U})\,\lambda(\mathbf{U}')} < \partial \;,\quad \overline{\lambda(\mathbf{V})\,\lambda(\mathbf{V}')} < \partial$$

para quaisquer vizinhanças **U**, **U**′, **V** *e* **V**′, *de* **B**, *sendo as duas primeiras relativas a* **A** *e as outras a* [**A**], *que distem de* **B** *menos de* ε.

Consideremos a infinidade das vizinhanças **U** de **B** relativas a **A**. Dado um número positivo ∂, a cada sucessão (14) de vizinhanças **U** que tenda para **B** corresponde uma ordem a partir da qual é $\overline{f(\mathbf{U}_i)\,\lambda(\mathbf{B})} < \partial$. Logo existe um número positivo ε tal que seja $\overline{f(\mathbf{U})\,\lambda(\mathbf{B})} < \partial$ sempre que se tenha $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}} < \varepsilon$ [*p.* 114, *l.* 1].

Da mesma maneira se justificam as outras desigualdades que figuram no enunciado.

Se $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* **B**, *a cada número positivo* ∂ *corresponde um número* ε *de maneira que se verificam as desigualdades*

$$\overrightarrow{f(\mathbf{X})\,\lambda(\mathbf{B})} < \partial \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\lambda(\mathbf{Y})\,\lambda(\mathbf{B})} < \partial$$

para quaisquer subconjuntos **X** *e* **Y** *de* **A** *e de* [**A**] *tais que* $\overrightarrow{\mathbf{X}\mathbf{B}} < \varepsilon$ *e* $\overrightarrow{\mathbf{Y}\mathbf{B}} < \varepsilon$.

É um corolário da proposição precedente. Em particular: *Se* $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* **B**, *a cada* ∂ *corresponde um* ε *de maneira que seja* $\underline{f(\mathbf{x})\,\lambda(\mathbf{B})} < \partial$ *sempre que se tenha* $\underline{\mathbf{x}\mathbf{B}} < \varepsilon$.

Para que seja $\mathbf{Z} \parallel \lambda(\mathbf{B})$, *sendo* $f(\mathbf{x})$ *qualquer, é suficiente que a todo o número positivo* ∂ *corresponda um positivo* ε *de maneira que se verifique uma das desigualdades*

$$\overline{f(\mathbf{U})\,\mathbf{Z}} < \partial \;,\quad \overline{\lambda(\mathbf{U})\,\mathbf{Z}} < \partial \;,\quad \overline{\lambda(\mathbf{V})\,\mathbf{Z}} < \partial$$

para quaisquer vizinhanças $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{B}$ *relativas a* $\mathbf{A}$ *e a* $[\mathbf{A}]$ *tais que* $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}}<\varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{V}\mathbf{B}}<\varepsilon$.

Uma qualquer destas condições é, com efeito, suficiente para que uma das sucessões (16), (17) ou (18) tenda para $\mathbf{Z}$ [*v.* v, *p.* 290, *l.* 11].

Para que exista o conjunto $\lambda(\mathbf{B})$ *duma função qualquer* $f(\mathbf{x})$ *é suficiente que a todo o número positivo* δ *se oponha um positivo* ε *de maneira que seja*

$$\overline{f(\mathbf{U})\, f(\mathbf{U}')}<\delta$$

para tôdas as vizinhanças $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{U}'$ *de* $\mathbf{B}$ *tais que* $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}}<\varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{U}'\mathbf{B}}<\varepsilon$.

Esta condição é na verdade suficiente para que se dê a convergência da sucessão (16).

Para que duas funções limitadas $f(\mathbf{x})$ *e* $g(\mathbf{x})$, *definidas no conjunto* $\mathbf{A}$, *admitam o mesmo conjunto limite em* $\mathbf{B}$ *é necessário e suficiente que a todo o número positivo* δ *corresponda um positivo* ε *de maneira que se verifique a desigualdade*

$$\overline{f(\mathbf{U})\ g(\mathbf{U}')}<\delta$$

para quaisquer vizinhanças $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{U}'$ *de* $\mathbf{B}$ *tais que* $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}}<\varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{U}'\mathbf{B}}<\varepsilon$. *Se* $f(\mathbf{x})$ *e* $g(\mathbf{x})$ *são ilimitadas, a condição é suficiente para que existam e sejam os mesmos os limites em* $\mathbf{B}$ *dessas funções.*

Se as funções limitadas $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ admitem em $\mathbf{B}$ o mesmo conjunto limite, a sucessão (16) e a correspondente a $g(\mathbf{x})$ convergem para os mesmos limites. Temos por isso, a partir de certa ordem,

$$\overline{f(\mathbf{U}_i)\ g(\mathbf{U}_{i'})}<\delta \quad [v.\ \text{IV},\ p.\ 20,\ l.\ 22].$$

A primeira parte da proposição pode pois justificar-se aplicando o já citado lema [*p.* 114, *l.* 1] à infinidade das vizinhanças $\mathbf{U}$, ao conjunto $\mathbf{B}$ e à família dos conjuntos dos termos de cada sucessão (14) a partir da ordem em que se verifica a desigualdade precedente.

A condição é suficiente, embora $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ possam representar funções ilimitadas nas vizinhanças de $\mathbf{B}$. Considerando, com efeito, uma sucessão (14) de vizinhanças de $\mathbf{U}$ que tenda para $\mathbf{B}$, temos, por fôrça da referida condição,

$$lim\, \overline{f(\mathbf{U}_i)\, g(\mathbf{U}_{i'})} = 0\,.$$

Logo existem e são os mesmos os limites $[lim\, f(\mathbf{U}_i)]$ e $[lim\ g(\mathbf{U}_i)]$ (1).

Para que as funções $f(\mathbf{X})$ e $g(\mathbf{X})$, definidas no conjunto $\mathbf{A}$, admitam o mesmo conjunto limite em $\mathbf{B}$ é suficiente que a todo o número positivo δ se oponha um positivo ε de maneira que seja

$$\overline{f(\mathbf{U})\, g(\mathbf{U})} < \delta$$

para qualquer vizinhança $\mathbf{U}$ de $\mathbf{B}$ tal que $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}} < \varepsilon$. Se uma das funções não admite conjunto limite em $\mathbf{B}$, o mesmo sucede à outra.

Efectivamente, considerando a sucessão (16) e a correspondente para $g(\mathbf{X})$, temos

$$lim\, \overline{f(\mathbf{U}_i)\ g(\mathbf{U}_i)} = 0\,,$$

e as duas sucessões, quando convergentes, tendem para o mesmo limite totalmente fechado $\lambda(\mathbf{B})$; quando uma das sucessões diverge para infinito, o mesmo acontece à outra [*v.* v, *p.* 295, *l.* 26].

---

(1) Baseamo-nos na seguinte proposição:
Para que duas sucessões de conjuntos quaisquer

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots\ \mathbf{A}_i,\ \ldots \\ \mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2,\ \ldots\ \mathbf{B}_i,\ \ldots \end{array}$$

convirjam para os mesmos limites é suficiente que se verifique a condição $lim\ \overline{\mathbf{A}_i\, \mathbf{B}_{i'}} = 0$.

Na verdade, esta mesma condição dá em particular $lim\ \overline{\mathbf{A}_i\, \mathbf{B}_i} = 0$, e por isso também temos

$$lim\ \overline{\mathbf{A}_i\, \mathbf{A}_{i'}} \leqq lim\, (\overline{\mathbf{A}_i\, \mathbf{B}_{i'}} + \overline{\mathbf{A}_{i'}\, \mathbf{B}_{i'}}) = 0\,.$$

A primeira das sucessões dadas é pois convergente, e, em virtude da condição $lim\ \overline{\mathbf{A}_i\, \mathbf{B}_i} = 0$, a segunda converge para o mesmo limite totalmente fechado que a primeira [*v.* v, *p.* 295, *l.* 19].

Dado um subconjunto $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *suponhamos que existe uma sucessão de subconjuntos conexos de* $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_i, \ldots,$$

cada um dos quais contenha uma vizinhança de $\mathbf{B}$ *e tais que seja* $lim\, \overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{B}} = 0$. *Se* $f(\mathrm{x})$ *é uma função limitada, definida em* $\mathbf{A}$, *que faça corresponder aos conjuntos conexos* $\mathbf{C}_i$ *novos conjuntos conexos* $f(\mathbf{C}_i)$, *o conjunto* $\lambda(\mathbf{B})$ *é um continuo* (¹).

Efectivamente, por ser $lim\, \overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{B}} = 0$, os termos da sucessão

$$(22) \qquad f(\mathbf{C}_1), f(\mathbf{C}_2), \ldots, f(\mathbf{C}_i), \ldots$$

podem considerar-se subconjuntos dos termos correspondentes duma sucessão do tipo (16), e como por outro lado cada um dos conjuntos $\mathbf{C}_i$ contém uma vizinhança de $\mathbf{B}$, existe também uma sucessão do tipo (16) cujos termos são subconjuntos dos termos correspondentes da (22). Logo temos

$$lim\, \overline{f(\mathbf{C}_i)\, \lambda(\mathbf{B})} = 0 \quad [v.\ \text{v}, p.\ 295, l.\ 6],$$

e por isso o conjunto fechado $\lambda(\mathbf{B})$ é um contínuo [*v.* VI, *p.* 324, *l.* 7] (²).

Em particular: *se a função limitada* $f(\mathrm{x})$, *definida em* $\mathbf{A}$, *faz corresponder a conjuntos conexos novos conjuntos conexos, e se as diversas vizinhanças do subconjunto* $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *em relação a* $\mathbf{A}$, *são conjuntos conexos, o conjunto* $\lambda(\mathbf{B})$ *é um contínuo.*

Suponhamos que o subconjunto $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$ *verifica a seguinte propriedade: seja qual fôr a sucessão* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_i, \ldots$ *de elementos de* $\mathbf{A}$ *que faça* $lim\, \overline{\mathrm{x}_i \mathbf{B}} = 0$, *há uma ordem a partir da qual dois elementos quaisquer* x_i *e* $\mathrm{x}_{i'}$ *pertencem a um subconjunto conexo* $\mathbf{C}_{i,i'}$ *de* $\mathbf{A}$ *de tal modo que se tenha* $lim\, \overrightarrow{\mathbf{C}_{i,i'} \mathbf{B}} = 0$. *Se* $f(\mathrm{x})$ *é uma função limitada, definida em* $\mathbf{A}$, *que faça corresponder aos*

(¹) Êste contínuo pode degenerar num só elemento ou em elementos juxtapostos entre si.

(²) Nas condições do enunciado o conjunto $\mathbf{B}$ é conexo, pois temos $lim\, \overline{\mathbf{C}_i \mathbf{B}} = 0$.

conjuntos conexos $\mathbf{C}_{i,i'}$ *novos conjuntos conexos* $f(\mathbf{C}_{i,i'})$, *o conjunto* $\lambda(\mathbf{B})$ *é um contínuo.*

A cada número $\frac{1}{i}$ façamos corresponder uma vizinhança $\mathbf{U}_i$ de $\mathbf{B}$ relativa a $\mathbf{A}$ de maneira que dois elementos quaisquer de $\mathbf{U}_i$ pertençam a um subconjunto conexo $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$ tal que $\overrightarrow{\mathbf{CB}} < \frac{1}{i}$ [*p.* 113, *l.* 2]. A soma $\mathbf{C}_i$ de todos os conjuntos $\mathbf{C}$ correspondentes aos diversos pares de elementos de $\mathbf{U}_i$ é manifestamente um conjunto conexo a que pertence $\mathbf{U}_i$. Verifica-se a relação $\overrightarrow{\mathbf{C}_i\mathbf{B}} < \frac{1}{i}$. A sucessão

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_i, \ldots,$$

que resulta de pormos $i = 1, 2, \ldots$, satisfaz ao enunciado da proposição precedente, razão porque $\lambda(\mathbf{B})$ é um contínuo. Êste pode reduzir-se a um elemento apenas, ou a elementos juxtapostos entre si (1).

---

(1) Demonstrámos de passagem a seguinte proprosição:

É conexo um subconjunto B *de* $[\mathsf{A}]$ *que verifique a seguinte propriedade: a qualquer sucessão* $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_i, \ldots$, *de elementos de* A *que faça* $\lim \underline{\mathsf{x}_i \mathsf{B}} = 0$ *corresponde uma ordem a partir da qual dois elementos* x_i *e* $\mathsf{x}_{i'}$ *unem-se sempre por um subconjunto conexo* $\mathsf{C}_{i,i'}$ *de* A *de maneira que seja* $\lim \overrightarrow{\mathsf{C}_{i,i'}\mathsf{B}} = 0$.

Transformando esta proposição por meio do lema já citado a *p.* 113, *l.* 2, damos-lhe o seguinte enunciado:

É conexo um subconjunto B *de* $[\mathsf{A}]$ *que verifique a seguinte propriedade: a qualquer vizinhança* U *de* B *relativa a* A *corresponde uma outra* U' *tal que: dois elementos de* U' *unem-se sempre por um subconjunto conexo de* U.

Fàcilmente reconhecemos que a mesma proposição também pode deduzir-se como um carolário da seguinte:

É conexo um conjunto B *que satisfaça à seguinte propriedade: a cada par dos seus elementos* b *e* b' *corresponde uma sucessão de conjuntos conexos* $\mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2, \ldots, \mathsf{C}_i, \ldots$ *tal que*

$$\lim \underline{\mathsf{C}_i \mathsf{b}} = \lim \underline{\mathsf{C}_i \mathsf{b}'} = \lim \overrightarrow{\mathsf{C}_i \mathsf{B}} = 0\,.$$

Por outras palavras, é conexo um conjunto B *que satisfaça à seguinte condição: a cada par dos seus elementos* b *e* b' *e a cada número positivo* ε *corresponde um conjunto conexo* C *tal que*

$$\underline{\mathsf{C}\,\mathsf{b}} < \varepsilon\,, \quad \underline{\mathsf{C}\,\mathsf{b}'} < \varepsilon\,, \quad \overrightarrow{\mathsf{C}\mathsf{B}} < \varepsilon\,.$$

Basta notar que a soma S de todos os conjuntos conexos C que verificam as

Observação. — *Quando os elementos da função* $f(\mathbf{x})$ *considerada nas duas proposições precedentes são números reais, dispensa-se a hipótese da limitabilidade da mesma função.*

De facto, o limite fechado duma sucessão convergente de conjuntos conexos de números reais é sempre um intervalo [1] porque o lugar dum conjunto conexo linear é um intervalo e o limite fechado duma sucessão convergente de intervalos é ainda um intervalo. No caso de os termos da sucessão (22) serem constituídos por números reais, o limite fechado, quando existe, é pois um intervalo [2].

(Continua).

Luís Beda Neto.

---

desigualdades anteriores para os diversos pares de elementos $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}'$ de $\mathbf{B}$ é um conjunto cuja desconexão não excede 2ε e tal que $\overline{\mathbf{S}\,\mathbf{B}} \lesssim \varepsilon$ [*p.* 208, *l.* 3].

É conexo, em particular, um conjunto $\mathbf{B}$ que satisfaça à seguinte condição: dados um número positivo ε e dois dos seus elementos, estes pertencem a um conjunto conexo $\mathbf{C}$ tal que $\overrightarrow{\mathbf{C}\,\mathbf{B}} < \varepsilon$.

Observemos que a última proposição desta nota dá-nos uma condição não só suficiente mas também necessária para que $\mathbf{B}$ seja conexo. A primeira dá-nos uma condição que pode deixar de ser necessária; é fácil imaginar um exemplo dum espaçóide cujos subconjuntos conexos não obedeçam todos a tal condição.

[1] Chamamos intervalo, em geral, a qualquer contínuo linear. Pode reduzir-se a um só ponto, e as suas extremidades podem ser ambas finitas ou não.

[2] Seja por exemplo $f(x)$ uma função real de variável real, definida nos pontos dum intervalo (α, β), de centro a, à excepção possível dêste ponto. Suponhamos que $f(x)$ faz corresponder a qualquer intervalo I interior ao primeiro (excluindo em I o ponto a quando $f(x)$ não é nêle definida) um conjunto conexo $f(I)$ (como sucede com uma função derivada em (α, β); recorde-se para isso o teorema de Darboux sôbre funções derivadas, por exemplo nas *Lições de Cálculo e Geometria* de J. Vicente Gonçalves, *p.* 209). O conjunto $\lambda(a)$, quando existe, é um intervalo. Os conjuntos limites de $f(x)$ à esquerda e à direita de a também são intervalos.

Determinações quantitativas de Vitamina A, Ergosterol, Vitamina B_2 (lactoflavina) e Vitamina C por Métodos Fisico-Químicos

Estudo do Vinho Tinto da Bairrada

por

KARL SCHÖN

Laboratório de Química Biológica e Fisico-Química da Faculdade de Medicina

e

A. J. A. DE GOUVEIA E F. PINTO COELHO

Laboratório Químico da Universidade de Coimbra

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é continuação do estudo, que pretendemos fazer, de vitaminas em alimentos [1]. Foi sugerido pelo saudoso Professor Doutor Egas F. Pinto Basto, então Director do Laboratório Químico da Universidade, que nos permitiu a aquisição do material necessário, e, com os seus conselhos sempre judiciosos, muito contribuiu para que se levasse a bom fim. À memória dêste Professor mais uma vez prestamos a merecida homenagem.

Esperamos, em breve, ampliar estes estudos a outros tipos principais de vinhos portugueses, pois, a-pesar-de as concentrações vitamínicas no vinho tinto da Bairrada não serem elevadas, são suficientemente importantes para justificar a necessidade de um estudo comparativo.

Como era de esperar, as quantidades de vitaminas lipo-soluveis, no vinho, são muito pequenas, e por esta razão tivemos de recorrer a métodos especiais, desenvolvidos nos últimos anos. Partimos de volumes elevados de vinho que por sucessivos tratamentos nos conduziram a pequenas quantidades de substâncias concentradas em vitaminas.

Nas determinações de vitaminas podem ser utilizados métodos biológicos e físico-químicos. Seguimos os métodos físico-químicos por serem os adequados aos nossos Laboratórios e por darem resultados concordantes com os métodos biológicos.

As determinações da vitamina A e do ergosterol fizeram-se pelo método espectrofotométrico [1], na fracção insaponificável, do extracto etéreo do vinho, depois de submetida a separação cromatográfica. O ergosterol foi pròviamente separado por precipitação com digitonina. Os carotenoides foram determinados pelo método colorimétrico de Kuhn e Brockmann [2].

A vitamina B_2 (lactoflavina) separou se do vinho por adsorção com terra de Fuller, em seguida foi eluída com piridina, e a determinação quantitativa fez se por transformação em lumilactoflavina segundo Kuhn, Wagner-Jauregg e Kaltschmitt [3].

A vitamina C foi doseada pelo método de Tillmans [4] por redução de 2,6-diclorofenolindofenol, em solução ácida.

Parte Experimental

Vitaminas lipo-solúveis

1.º Ensaio. Extracção de 12 litros de Vinho. — 12 litros de vinho tinto, diluídos com cêrca de 10 litros de água, foram extraídos 3 vezes com 9 litros de éter. O extracto apresentava-se ligeiramente amarelo. Foi lavado uma vez com água, depois repetidas vezes com uma solução aquosa de carbonato de sódio a 10%, até esta não se apresentar corada, e finalmente com água para eliminar o alcali. A solução etérea, agora incolor, foi concentrada no vazio, à temperatura de 20-25°, numa corrente de gás carbónico, até não destilar mais. Ficou, como resíduo, um óleo ligeiramente amarelo e alguma água. O óleo solidificou, parcialmente, por arrefecimento, e tinha um cheiro agradável, característico do vinho (bouquet). O resíduo foi então agitado com éter de petróleo (p. e. inferior a 50°) que dissolveu o óleo deixando na água as essências com cheiro característico. A solução de éter de petróleo, ligeiramente amarela, foi evaporada à secura, no vazio. Ficou um resíduo de 1,5 gramas que foi dissolvido em 10 ml. de éter. À solução juntaram-se 40 ml. duma solução concentrada de potassa cáustica em metanol absoluto, recentemente destilado sôbre hidróxido de potássio. A mistura guardou-se num frasco, bem cheio, durante dia e meio, à temperatura ambiente. Juntaram-se então 5 ml. de água e extraiu-se a mistura 2 vezes com 50 ml. de éter de petróleo. Esta solução foi lavada com água até à remoção total do alcali, filtrada por filtro sêco, e evaporada no vazio.

I. Obteve-se um resíduo I, ligeiramente amarelo, com o pêso de 0,275 grama.

II. A solução aquosa, alcalina, proveniente da saponificação, foi acidulada com HCl 2 N e extraida com éter que dissolveu os ácidos orgânicos. Obteve-se uma solução II, amarela, que foi lavada com água, sêca e evaporada. O resíduo é amarelo-escuro e de cheiro característico.

III. A água do primeiro concentrado do éter (antes da saponificação) depois de ser extraída com éter de petróleo, ainda contem substâncias de cheiro característico de *bouquet* de vinho. Foi extraída com éter, obtendo-se uma solução ligeiramente amarela. Lavou-se com uma solução de soda cáustica a 1%, que tirou o corante, ficando a solução incolor. Lavou-se depois com água e evaporou-se o éter, no vazio, ficando um pequeno resíduo III, oleoso e ligeiramente amarelado.

Resíduo I (parte insaponificável). — Foi estudado o espectro de absorção no visível e no ultra-violete, dêste resíduo em solução alcoólica (Fig. 1).

0,250 grama dêste resíduo foi submetido a adsorção cromatográfica, em óxido de alumínio activado (puriss., ligeiriss., Riedel). Para êste fim dissolveu-se a substância em éter de petróleo, passou-se através da coluna e lavou-se esta com mais solvente. Formaram se 4 zonas, de espessuras diferentes como mostra a Fig. 2. As zonas, depois de separadas, foram extraídas com éter de petróleo contendo 1% de metanol, e as soluções obtidas foram evaporadas à secura, no vazio. Obtiveram-se as seguintes fracções:

Zona *a*) Sólido, cêrca de 40 miligramas; solução em clorofórmio ligeiramente amarela; reacção com tricoloreto de antimónio: azul.

Zona *b*) **Sólido, cêrca de 50 miligramas; pouco corado; com tricloreto de antimónio não dá côr; precipita com digitonina.**

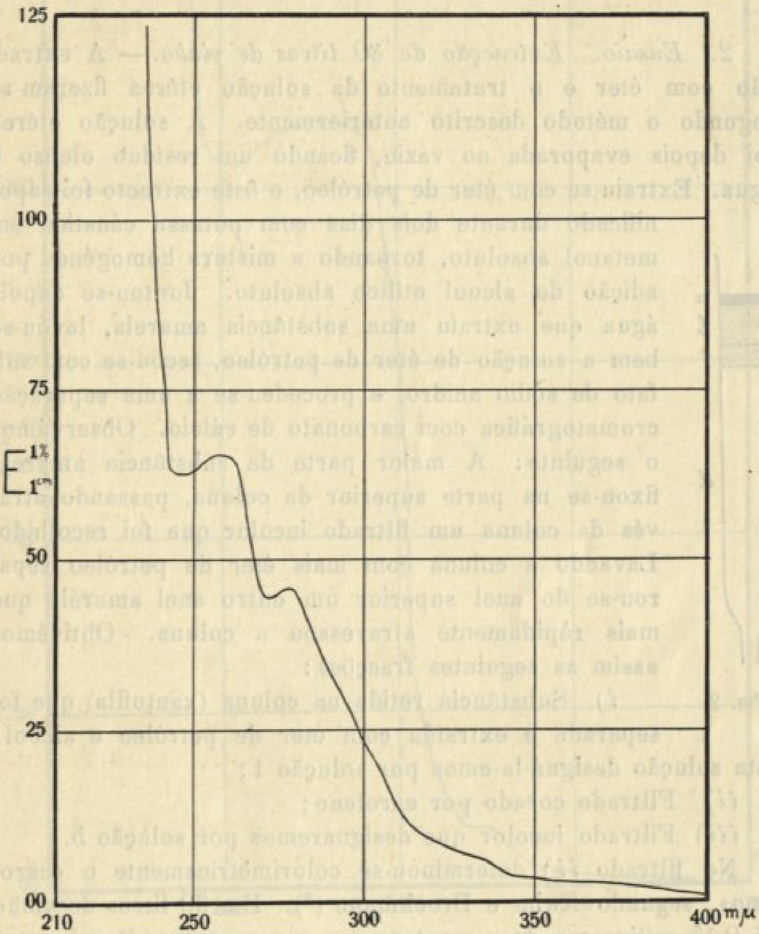

Fig. 1

Espectro de absorção do resíduo I, em alcool absoluto.

Zona *c*) **Sólido, cêrca de 50 miligramas; dá solução muito amarela; com tricloreto de antimónio dá coloração intensa verde escuro-azul.**

Zona *d*) **Óleo com alguns cristais, cêrca de 5 miligramas; com tricloreto de antimónio dá côr azul fraca que intensifica com**

o tempo; foi investigado o espectro de absorção na região ultravioleta (Fig. 3).

Filtrado *e*) Líquido, cêrca de 100 miligramas; não dá côr com tricloreto de antimónio.

2.º *Ensaio. Extracção de 30 litros de vinho.* — A extracção com éter e o tratamento da solução etérea fizeram-se segundo o método descrito anteriormente. A solução etérea foi depois evaporada no vazio, ficando um resíduo oleoso e água. Extraiu-se com éter de petróleo, e êste extracto foi saponificado durante dois dias com potassa cáustica em metanol absoluto, tornando a mistura homogénea por adição de alcool etílico absoluto. Juntou-se depois água que extraíu uma substância amarela, lavou-se bem a solução de éter de petróleo, secou-se com sulfato de sódio anidro, e procedeu-se a uma separação cromatográfica com carbonato de cálcio. Observámos o seguinte: A maior parte da substância amarela fixou-se na parte superior da coluna, passando através da coluna um filtrado incolor que foi recolhido. Lavando a coluna com mais éter de petróleo separou-se do anel superior um outro anel amarelo que mais ràpidamente atravessou a coluna. Obtivémos assim as seguintes fracções:

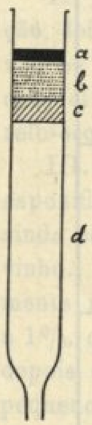

Fig. 2

i) Substância retida na coluna (xantofila) que foi separada e extraída com éter de petróleo e alcool; esta solução designá-la-emos por solução 1;

ii) Filtrado corado por caroteno;

iii) Filtrado incolor que designaremos por solução 5.

No filtrado *ii*) determinou-se colorimètricamente o «caroteno», segundo Kuhn e Brockmann ([2]). Em 30 litros de vinho há 0,15 miligrama de «caroteno» o que corresponde a 5 γ por litro. Se realmente esta substância é caroteno corresponde a 8 U. I. de vitamina A por litro de vinho. Êste caroteno, porém, não mostra bandas de absorção bem definidas na região visível; a absorção aumenta consideràvelmente para o violete.

A solução *ii*) foi passada então através duma coluna de óxido de alumínio activado. Formou-se um anel nítido, amarelo, na parte superior da coluna (solução 2); no resto da coluna ficaram substâncias incolores (solução 3) e o filtrado forma a solução 4. Temos, pois, no total, cinco soluções diferentes e provenientes das duas separações cromatográficas, ficando numera-

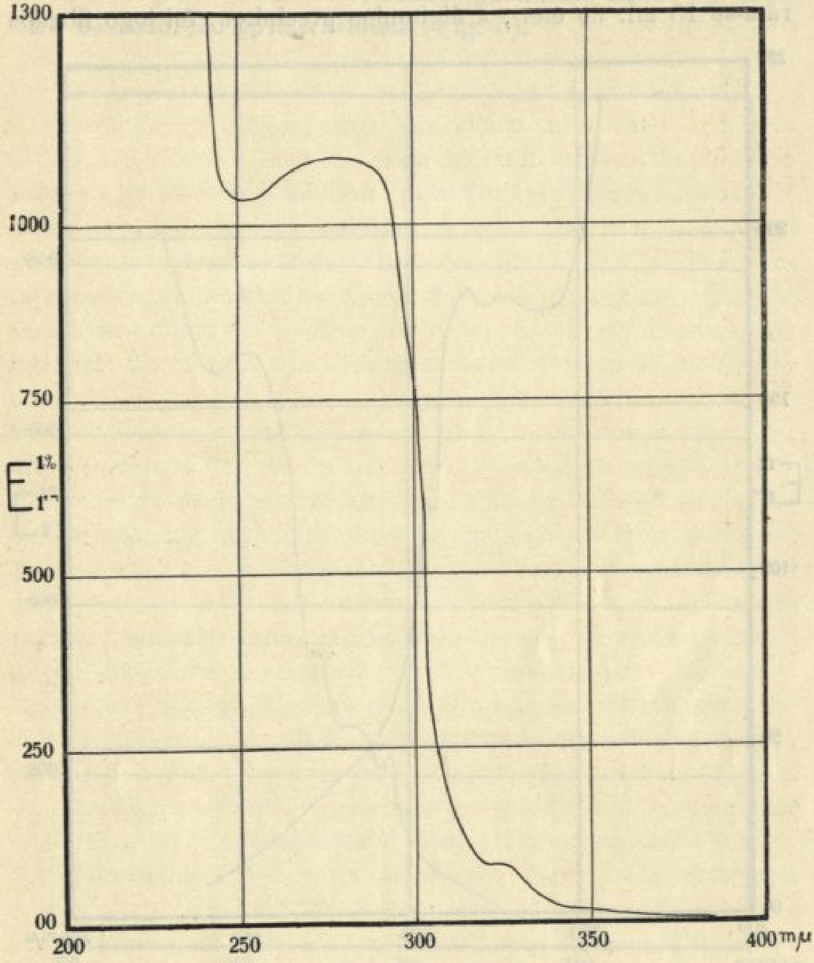

Fig. 3

Espectro de absorção da substância isolada na zona *d*, em alcol absoluto.

das segundo a facilidade de adsorção, a mais fortemente adsorvida N.º 1 e a mais fraca N.º 5.

As soluções 1 e 2 são amarelas, devido a conterem, respectivamente, xantofila e caroteno; as outras são incolores.

Solução 1. À solução alcoólica juntou-se uma solução alcoólica de digitonina; formou-se no decurso de um dia um precipitado de cêrca de 1 miligrama. Depois de centrifugado, o líquido foi decantado, o resíduo dissolvido em 0,3 ml. de piridina e juntaram-se 15 ml. de éter; a digitonina precipitou, foi logo filtrada

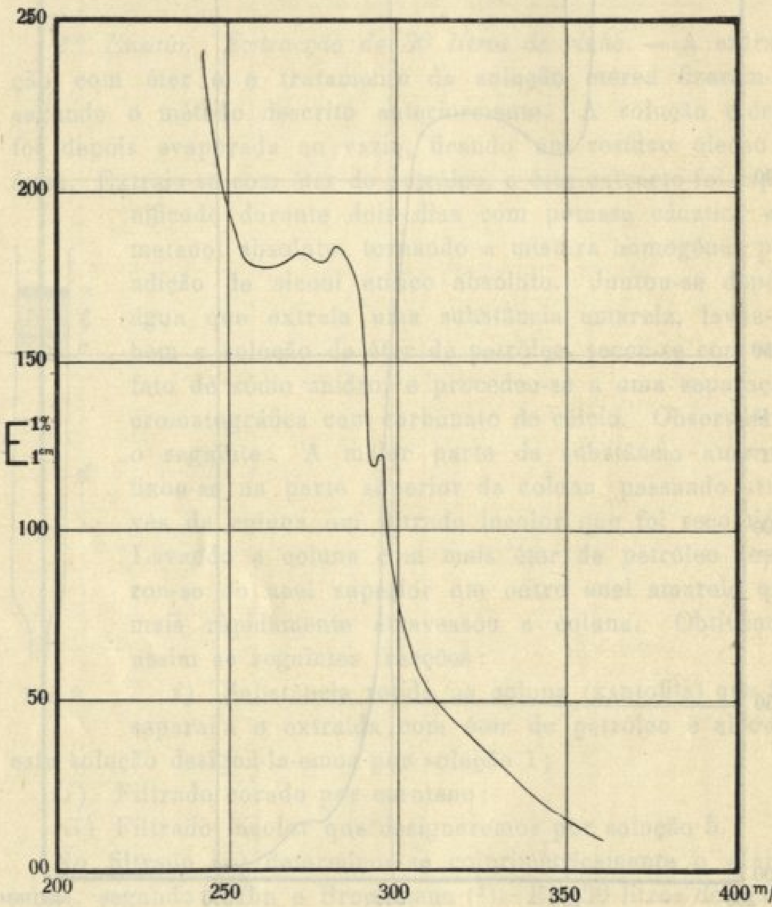

FIG. 4

Espectro de absorção, em alcool absoluto, dos esterois separados da solução 1 por precipitação com digitonina.

e lavou-se o filtro com mais éter. A solução etérea que contem os esteróis foi então evaporada no vazio, o resíduo dissolvido em éter, a solução outra vez filtrada e evaporada no vazio; o resíduo foi dissolvido em alcool puríssimo; esta solução serviu para determinação do espectro de absorção no ultravioleta (Fig. 4).

Solução 2. Esta solução foi igualmente tratada com digitonina. Precipitaram cêrca de 2-3 miligramas. O precipitado foi tratado como o anterior, sendo igualmente tirado um espectro de absorção no ultravioleta (Fig. 5).

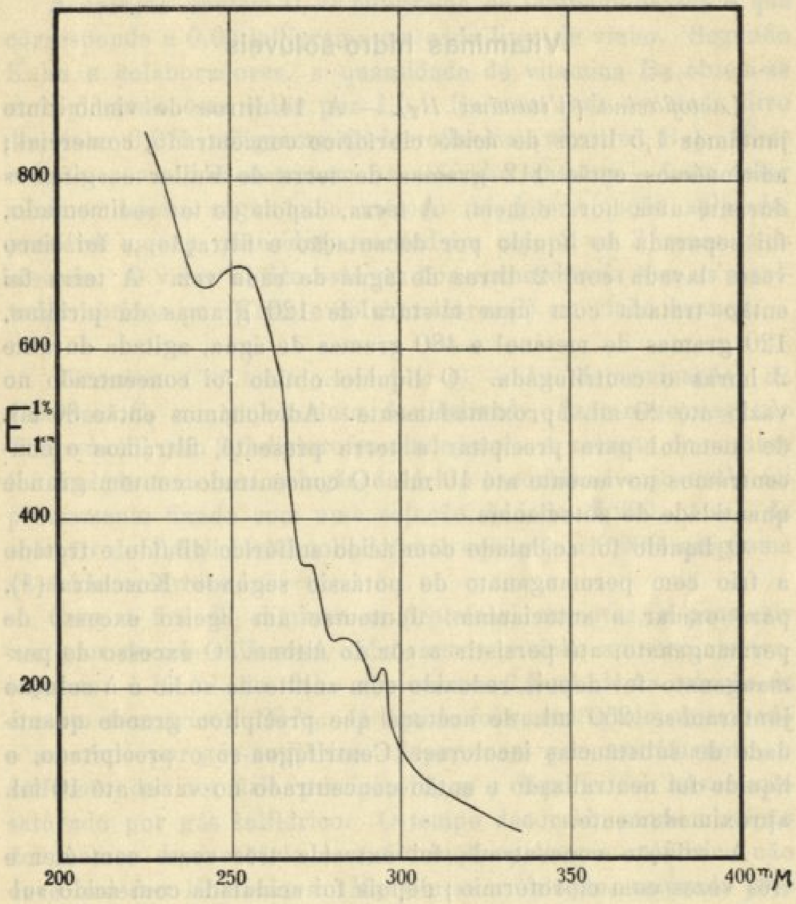

FIG. 5

Espectro de absorção, em alcool absoluto, dos esterois separados da solução 2 por precipitação com digitonina.

Solução 3. A solução tem pouca substância. Com tricloreto de antimónio dá uma reacção azul semelhante à da vitamina A.

Solução 4. A reacção com tricloreto de antimónio dá côr violeta-vermelho menos semelhante à da vitamina A. Mais substância do que em 3, mas ainda muito pouca.

Solução 5. Reacção com tricloreto de antimónio positiva mas muito fraca.

Há cêrca de 0,8 grama de substância.

Vitaminas hidro-solúveis

Lactoflavina (Vitamina B_2). — A 14 litros de vinho tinto juntámos 1,5 litros de ácido clorídrico concentrado, comercial; adicionámos então 112 gramas de terra de Fuller e agitámos durante uma hora e meia. A terra, depois de ter sedimentado, foi separada do líquido por decantação e filtração, e foi cinco vezes lavada com 2 litros de água de cada vez. A terra foi então tratada com uma mistura de 120 gramas de piridina, 120 gramas de metanol e 480 gramas de água, agitada durante 2 horas e centrifugada. O líquido obtido foi concentrado no vazio até 20 ml. aproximadamente. Adicionámos então 80 ml. de metanol para precipitar a terra presente, filtrámos e concentrámos novamente até 10 ml. O concentrado contem grande quantidade de antocianina.

O líquido foi acidulado com ácido sulfúrico diluído e tratado a frio com permanganato de potássio segundo Koschara ([5]), para oxidar a antocianina. Juntou-se um ligeiro excesso de permanganato, até persistir a côr do último. O excesso de permanganato foi depois reduzido com sulfito de sódio e à solução juntaram-se 250 ml. de acetona que precipitou grande quantidade de substâncias incolores. Centrifugou-se o precipitado, o líquido foi neutralizado e então concentrado no vazio até 10 ml. aproximadamente.

A solução concentrada foi extraída três vezes com éter e três vezes com clorofórmio; depois foi acidulada com ácido sulfúrico diluído e novamente extraída três vezes com clorofórmio. A solução aquosa ainda contem grande quantidade de corantes amarelos. Juntou-se NaOH 2N, suficiente para tornar a solução final, normal em NaOH. Esta solução foi então irradiada numa cápsula de porcelana branca, com uma lâmpada Nitra de 75 vátios, durante quatro horas, a uma distância de 20 centímetros.

Depois da irradiação, a solução foi acidulada com ácido acético e a lumilactoflavina, formada, foi extraída três vezes com clorofórmio. Obteve-se um volume total de 60 ml. de solução em clorofórmio, que mostra a fluorescência verde característica da lumilactoflavina. A solução foi sêca com sulfato de sódio anidro e a quantidade de lumilactoflavina presente determinada segundo o método colorimétrico de Kuhn, Wagner-Jauregg e Kaltschmitt (3).

A solução contem 0,70 miligrama de lumilactoflavina o que corresponde a 0,05 miligrama em cada litro de vinho. Segundo Kuhn e colaboradores, a quantidade de vitamina B_2 obtem-se multiplicando êste valor por 1,5. Existem pois em cada litro de vinho 0,075 miligrama de lactoflavina (vitamina B_2). Êste valor — como demonstraram os referidos autores — é um valor mínimo, sendo, segundo o método de determinação aplicado, provável que a quantidade verdadeira seja 2 ou 3 vezes mais elevada. O valor obtido está em boa concordância com os resultados obtidos por Kuhn e colaboradores (3) em vinho branco.

Vitamina C (Ácido Ascórbico-l). — As determinações da vitamina C, no vinho tinto da Bairrada, fizeram-se segundo Tillmans (4), com 2,6-diclorofenolindofenol. A solução do corante foi titulada com uma solução de ácido ascórbico-l cujo título foi prèviamente fixado com uma solução de iodo N/200. 1 ml. da solução de 2,6-diclorofenolindofenol equivale a 0,099 miligrama de ácido ascórbico-l.

Com o fim de eliminar as proteínas, corantes, e possíveis vestígios de gás sulfuroso, submetemos o vinho ao seguinte tratamento: a 10 ml. de vinho adicionámos 2,5 ml. duma solução de acetato mercúrico a 20 %. O líquido foi centrifugado, decantado e saturado por gás sulfídrico. Separou-se, por centrifugação, o sulfureto de mercúrio precipitado, e o líquido foi novamente saturado por gás sulfídrico. O tempo decorrido entre a adição do acetato de mercúrio e a saturação pelo gás sulfídrico não deve exceder 10 minutos. Mantem-se a solução, saturada pelo sulfídrico, durante 24 horas, e em seguida expulsa-se completamente o sulfídrico com uma corrente de gás carbónico até não dar reacção com o papel de acetato de chumbo. 5 ml. desta solução foram doseados com a solução de 2,6-diclorofenolindofenol.

Simultâneamente, fizemos o tratamento acima descrito, noutro volume de vinho, porém, antes da precipitação pelo sulfídrico destruimos a vitamina C com duas gotas duma solução de sulfato de cobre a 1 % e duas gotas de potassa cáustica a 40 % [6]. No fim de 10 a 15 minutos a destruïção da vitamina é completa; variando o tempo de oxidação de 15 minutos a 24 horas, o volume da solução de 2,6-diclorofenolindofenol, consumido na dosagem é precisamente o mesmo.

Os resultados obtidos estão resumidos no seguinte quadro:

TABELA I

Volumes da solução de 2,6-diclorofenolindofenol equivalentes a 1 ml. de vinho.				
Sem destruïção da vitamina C			Com destruïção da vitamina C	
1.°	Ensaio	0,4 ml.		
2.°	»	0,4 ml.		
3.°	»	0,43 ml.	3.° e 4.° Ensaios	0,24 ml.
4.°	»	0,47 ml.		
5.°	»	0,41 ml.	5.° Ensaio	0,22 ml.

O exame da Tabela I mostra que, depois do tratamento pelo sulfídrico, no caso dos vinhos, o volume de 2,6-diclorofenolindofenol é maior do que o correspondente ao utilizado na oxidação da vitamina C. Há portanto necessidade de fazer em cada determinação dois ensaios, um sem destruïção e outro com destruïção da vitamina C, sendo as dosagens feitas nas mesmas condições (tempo, intensidade de côr, etc.). O volume de 2,6 diclorofenolindofenol correspondente à vitamina C será pois a diferença dos volumes obtidos nos dois ensaios.

A concentração da vitamina C no vinho tinto da Bairrada, segundo as determinações realizadas, é de 18 miligramas por litro ou sejam 360 Unidades Internacionais ou cêrca de 2,4 Unidades Sherman.

DISCUSSÃO

Vitaminas lipo-solúveis

A análise cromatográfica, em coluna de óxido de alumínio, da solução do resíduo insaponificável I, permitiu-nos a separação de 5 fracções: zona *a*), amarela clara, reacção com $SbCl_3$, azul; zona *b*), quási incolor, ensaio negativo com $SbCl_3$, precipita com digitonina; zona *c*), amarela intensa, reacção com $SbCl_3$ verde azul, intenso; zona *d*) incolor, reacção com $SbCl_3$ azul fraca; filtrado *e*) reacção negativa com $SbCl_3$.

O espectro de absorção do resíduo I, em solução alcoólica, apresenta uma inflexão entre 476-468 $m\mu$ (região de absorção selectiva de carotenóides e xantofilas), inflexão entre 379,5--364,6 $m\mu$, inflexão entre 310-330 $m\mu$, (região de absorção selectiva da vitamina A), uma banda estreita na vizinhança de 280 $m\mu$ (máximo principal da absorção selectiva do ergosterol), banda entre 255-260 $m\mu$ (região de absorção selectiva de vários esteróis); há ainda indicação duma banda de absorção entre 230-220 $m\mu$.

Neste estudo preliminar, investigámos ainda o espectro de absorção da fracção cromatográfica *d*) obtida do resíduo I. Nesta fracção torna-se mais nítida a absorção na vizinhança de 320 $m\mu$, aparecendo uma banda pouco persistente em 320-330 $m\mu$; em 260-290 $m\mu$ existe uma banda de grande intensidade, sem estrutura.

Comparando os resultados obtidos na análise cromatográfica, ensaios com $SbCl_3$, precipitação com digitonina e espectros de absorção, é possível concluir neste estudo preliminar que provàvelmente a fracção *a*) é constituída por xantofila, na fracção *b*) existe ergosterol, na zona *c*) carotenóides, e temos evidência de que na zona *d*) há vitamina A, acompanhada de esteróis.

No 2.º ensaio feito sôbre a fracção insaponificável, dissolvida em éter de petróleo, do extracto de 30 litros de vinho, determinámos a quantidade de carotenóides que referida a caroteno corresponde a 5γ por litro de vinho.

A adsorção cromatográfica, em colunas de carbonato de cálcio e óxido de alumínio activado, permitiu-nos a separação de cinco fracções.

Ergosterol. — Nas fracções 1 e 2, separámos o ergosterol por precipitação com digitonina. A fracção 1, por precipitação com digitonina, deu um precipitado de cêrca de 1 miligrama que, por determinação espectrofotométrica, verificámos corresponder a 0,28 miligrama de ergosterol. A fracção 2 forneceu cêrca de 2-3 miligramas de digitonido que por determinação espectrofotométrica verificámos corresponder a 0,56 miligrama de ergosterol. O total corresponde a 27γ de ergosterol por litro de vinho.

A observação das figuras 4 e 5 mostra que o ergosterol isolado na zona 1 (fig. 4) é muito mais puro do que o ergosterol da zona 2 (fig. 5).

É conhecido que, geralmente, o ergosterol encontra-se nas plantas e nos animais, em percentagem muito pequena em relação aos esteróis totais. O ergosterol, devido à sua estrutura química, que tem como característica duas duplas ligações conjugadas no núcleo cíclico e outra na cadeia lateral, difere bastante dos outros esteróis naturais que em geral têm no núcleo uma só ou nenhuma dupla ligação. Por esta razão pode ser separado com relativa facilidade, dos outros esteróis, por cromatografia. Explica-se assim o facto de termos obtido na zona 1 uma fracção de ergosterol de elevado grau de pureza, como mostra o espectro de absorção. A zona 2 já contem o ergosterol misturado com outros esteróis.

Como a Unidade Internacional de vitamina D corresponde a 0,1γ de ergosterol irradiado, um litro de vinho pode fornecer 270 U. I. de vitamina D.

TABELA II

Concentrações das vitaminas A, B_2, C e D nalguns alimentos

Alimentos	Miligramas de vitamina por 100 gramas de alimento			
	Vitamina A	Vitamina B_2	Vitamina C	Vitamina D
Vinho da Bairrada (tinto)	0,0005	0,0075	1,8	0,0027 (ergosterol)
Uvas	0,021	0,006	2-5	—
Tomate	1,2-1,6	0,050	15	—
Laranja	0,055	0,009	50-100	—
Limão	—	—	50-100	
Maçã	0,067	0,005	2-15	—
Leite	0,2-0,8	0,04-0,1	0,5-1	0,0002-0,0004
Manteiga	2-20	—		0,0004-0,020
Queijo	1,6-32	—	—	—
Gema de ovo	4-20	0,2-0,55	—	0,020
Óleo de fígado de bacalhau	4-200	—	—	0,04-0,4
Fígado de vaca	—	2	—	0,0012

Vitamina A — A presença da vitamina A é indicada pela reacção de Carr-Price na solução 3. A solução 3 é incolor e portanto não contem carotenóides. O espectro de absorção desta solução apresenta uma inflexão nítida na região 320-330 $m\mu$ que contudo não nos permite a determinação quantitativa desta vitamina.

É interessante verificar a presença da vitamina A no vinho, embora em muito pequena quantidade, visto que, até hoje, não foi encontrada em produtos vegetais. Pensamos que a vitamina determinada é produto de metabolismo das bactérias de fermentação.

Como a quantidade de vitamina A no vinho é ínfima, interessa-nos, para a avaliação da sua actividade vitamínica, o conteúdo em pró-vitamina A, o caroteno. Verificámos que a quantidade de caroteno é de 5γ por litro. Na hipótese de êste caroteno ter a mesma actividade do β-caroteno, cada litro de vinho teria 8 U. I.

Vitaminas hidro-solúveis

Vitamina B_2 (lactoflavina). — Verificámos que cada litro de vinho contem o mínimo de 0,075 miligrama de lactoflavina ou sejam 35 U. de Sherman Bourghin. Verifica-se, por comparação com a tabela II, que o vinho contem, aproximadamente, a mesma quantidade desta vitamina do que a maior parte dos frutos.

Vitamina C (ácido ascórbico l). — A concentração de vitamina C no vinho tinto é ligeiramente inferior ao mínimo de vitamina C determinado nas uvas, como se verifica na tabela II.

Embora a vitamina C seja fàcilmente oxidável, o pH baixo, dos vinhos, e possìvelmente outros factores evitam a oxidação irreversível total durante os fenómenos da fermentação e conservação dos vinhos.

NOTA

Obtenção dum Hidrocarboneto e Verificação da Presença duma Substância com Fluorescência Azul, a partir do Vinho Tinto da Bairrada

No decurso das extracções, com éter, do vinho tinto da Bairrada, para a separação das vitaminas lipo-solúveis, verificámos que o éter apresentava fluorescência azul intensa por irradiação

com luz ultra-violete. O espectro de absorção do resíduo do extracto etéreo depois de submetido a adsorção cromatográfica (fig. 6, curva I) apresenta duas bandas bem definidas com máximos em 336 e 278 $m\mu$ e mínimos em 313 e 250 $m\mu$.

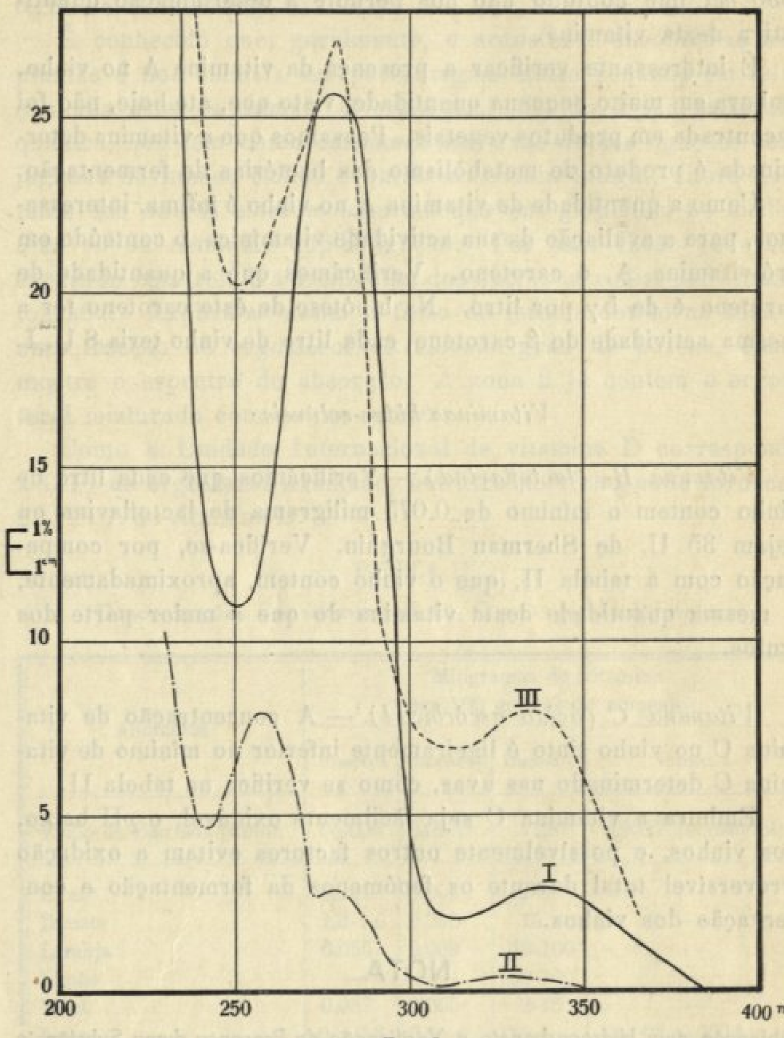

FIG. 6

Espectros de absorção, em alcool absoluto, de fracções que contêm a substância com fluorescência azul: Curva I. Substância prèviamente obtida por adsorção cromatográfica. Curva II. Destilado, p. e., a 12 mm, 85° a 115°. Curva III. Destilado, p. e., a 12 mm, 120° a 160°. (A curva I não está expressa nas unidades indicadas no gráfico; desconhecemos a concentração da solução).

Numa tentativa para o esclarecimento desta questão procedemos aos seguintes ensaios:

45 litros de vinho tinto foram extraídos em porções de 15 litros, com éter, num aparelho de extracção contínua. O éter foi substituído todos os dias, e a extracção continuada até que o éter deixou de apresentar fluorescência azul. A solução etérea contem muitas substâncias coradas, carotenóides, flavonas, antocianinas e ainda os lipóides do vinho.

Verificámos que, de entre vários adsorventes, o hidróxido de cálcio era o melhor para a eliminação das substâncias coradas, assim como dos esteróis, não sendo adsorvida a substância com fluorescência azul.

A solução foi então passada através de colunas de hidróxido de cálcio tendo o cuidado de que a zona castanho-escura que se formou não ultrapassasse metade de cada coluna; as colunas foram lavadas com mais éter. As soluções etéreas obtidas, agora incolores, foram concentradas até pequeno volume. Depois de o éter ter sido removido quási completamente, separou-se uma substância incolor que depois de ser duas vezes cristalizada apresentou-se em forma de pequenas agulhas finas com brilho argenteo. O ponto de fusão desta substância é 52°-54° (não corr.).

A análise elementar deu os seguintes resultados:

Encontrado:	C: 84,92%	H: 13,99%
	85,0%	14,3%
Calculado para $C_{35}H_{70}$,	C: 85,6%,	H: 14,4%
$C_{35}H_{72}$,	C: 85,25%,	H: 14,75%

Pêso molecular médio, encontrado 484. Calculado para $C_{35}H_{70}$ 490,6, para $C_{35}H_{72}$ 492,6.

A substância isolada é portanto um hidrocarbonato em C_{35}, saturado ou com uma ligação dupla.

A solução concentrada, que contem alcool e muitas substâncias de carácter terpénico, alêm da substância com fluorescência azul, foi então tratada com vapor de água, que arrastou parte dos óleos voláteis. O resíduo foi evaporado no vazio a uma temperatura que não excedeu 50°.

Ficou um óleo ligeiramente corado e de cheiro agradável. Êste óleo foi submetido a uma destilação à pressão de 12 mm, obtendo-se as seguintes fracções: 1) ponto de ebulição até 85°; 2) p. e. 85° a 115°; 3) p. e. 120° a 160°.

Ficou um resíduo que foi destilado a 10 mm de pressão, a temperatura superior a 200°; o destilado apresenta-se muito escuro.

A fracção 1, incolor, é bastante transparente no ultra-violete; o espectro de absorção da solução, a 1,082 % em alcool, numa espessura de 1 cm., apresenta uma ligeira inflexão entre 275-280 $m\mu$. A segunda fracção, ligeiramente amarela, apresenta uma absorção mais intensa; o espectro de absorção ultra-violete apresenta uma banda com o máximo em 257 $m\mu$, uma banda mal definida com o máximo em 277 $m\mu$, e outra também mal definida na região 310-340 $m\mu$. (Fig. 6, curva II). A terceira fracção de côr amarela apresenta um espectro de absorção com duas bandas persistentes, com máximos em 278 $m\mu$ e 337 $m\mu$ (Fig. 6, curva III); estes máximos correspondem aos da substância prèviamente obtida.

Esperamos poder isolar esta substância no estado puro, para sua completa identificação.

SUMÁRIO

1) Fizemos determinações quantitativas de vitamina A, carotenóides, ergosterol, vitamina B_2 (lactoflavina) e vitamina C, no vinho tinto da Bairrada.
2) As concentrações de carotenoides e vitamina A são muito pequenas. Não foi possível determinar se os carotenóides presentes são activos.
3) A concentração de vitamina B_2 é da ordem de grandeza das concentrações desta vitamina, em vários frutos.
4) A concentração de vitamina C é inferior à de muitos frutos e ligeiramente inferior ao mínimo de vitamina C que se encontra nas uvas.
5) Separámos um hidrocarboneto de fórmula molecular $C_{35}H_{70}$ ou $C_{35}H_{72}$.
6) Conseguimos fracções concentradas e o espectro de absorção duma substância que por irradiação com luz ultra-violete apresenta fluorescência azul muito intensa.

Apresentamos os nossos agradecimentos ao Professor Doutor A. de Morais Sarmento e ao Professor Doutor R. Couceiro da Costa pelas facilidades concedidas na execução dêste trabalho. À Estação Viti-Vinícola da Beira Litoral agradecemos a oferta do vinho utilizado nos diferentes ensaios.

Muitas determinações feitas neste trabalho foram executadas com aparelhos adquiridos por subsídios do Instituto para a Alta Cultura e do Fundo Sá Pinto.

Uma bôlsa que foi concedida a F. Pinto Coelho, pelo I. A. C. contribuiu para a realização dêste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

1) Gouveia, A. J. A. & Pinto Coelho, F. — Revista da Faculdade de Ciências, Coimbra *6*, 191 (1936).
2) Kuhn, R. & Brockmann, H. — Zeitschr. physiol. Chem. *206*, 41 (1932).
3) Kuhn, R., Wagner-Jauregg, Th. & Kaltschmitt, H. — Ber. deut. chem. Ges. *67*, 1452 (1934).
4) Tillmans, J. e colaboradores, Zeitschr. f. Unters. Lebensmittel *63*: 1, 21, 241, 267, 276 (1932). Biochem. Zeitschr. *250*, 312 (1932).
5) Koschara, W. — Ber. deut. chem. Ges. *67*, 761 (1934).
6) Morton, R. A., — The application of absorption spectra to the study of vitamins and hormones, pág. 59, London.

de Costa pelas facilidades concedidas na execução deste trabalho. A Estação Vitivinícola da Beira Litoral agradecemos a oferta do vinho utilizado nos diferentes ensaios.

Muitas determinações feitas neste trabalho foram executadas com aparelhos adquiridos por subsídios do Instituto para a Alta Cultura e do Fundo Sá Pinto.

A bolsa que foi concedida a F. Pinto Coelho pelo I. A. C. contribuiu para a realização deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

1) Carvalho, J. J. A. & Pinto Coelho, F. — Revista da Faculdade de Ciências, Coimbra 6, 191 (1939).
2) Kuhn, R. & Brockmann, H. — Zeitschr. physiol. Chem. 206, 41 (1932).
3) Kuhn, R., Wagner-Jauregg, Th. & Kaltschmitt, H. — Ber. deut. chem. Gesell. 67, 1452 (1934).
4) Tillmans, J. e colaboradores, Zeitschr. f. Unters. d. Lebensmittel 63, 1, 21, 241, 267, 276 (1932). Biochem. Zeitschr. 250, 312 (1932).
5) Koschara, W. — Ber. deut. chem. Ges. 67, 761 (1934).
6) Morton, R. A. — The application of absorption spectra to the study of vitamins and hormones, pag. 59, London.

AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida à Direcção da Faculdade de Ciências, com a indicação de que se refere à REVISTA.