

74

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

REVISTA
DA
FACULDADE DE CIÊNCIAS

VOL. VII—N.º 2



A
9
13

COIMBRA
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA
1939

REVISTA DE ECONOMIA

REVISTA

DE ECONOMIA



Estudos sôbre a pigmentação melânica

Determinação da pigmentação e escurecimento com a idade. — Composição das melaninas

por

J. A. SERRA

Encarregado de Curso na Fac. de Ciências — Coimbra.

Sumário:

<i>Introdução.</i>	pág. 238
<i>A determinação da pigmentação.</i>	241
Determinações com o pigmentómetro.	246
<i>O escurecimento com a idade.</i>	276
A determinação do escurecimento com a idade.	281
Correlações — Compleição.	326
<i>Constituição química das melaninas.</i>	344
Composição e estrutura das proteínas.	355
Composição das melaninas.	366
Resultados obtidos.	369
<i>Discussão — Conclusões.</i>	393
<i>Bibliografia</i>	403

Esta comunicação é a primeira duma série de estudos sôbre a pigmentação. Como se verá, procurei resolver velhos problemas com novos métodos, alguns ainda não utilizados nestes casos — e os resultados obtidos, embora preliminares, parece demonstrarem que é possível esclarecer algumas questões fundamentais com os métodos usados.

Em certos aspectos do trabalho tive que recorrer a processos habituais à Química, pois naturalmente os problemas fisiológicos são, na base, problemas físicos e químicos, ou apenas como tais se podem actualmente conhecer.

Como fim essencial, estas investigações, cuja publicação agora

começa, visam o conhecimento da pigmentação melânica nos Mamíferos, incluindo o homem, para uma melhor compreensão e esclarecimento da sua hereditariedade e fenogénese.

O nome *pigmentação* é demasiado geral e ambíguo e indica um conjunto de origens e realizações muito diferentes. Duma maneira geral, chama-se pigmentos a substâncias còradas, difusas, ou em corpúsculos figurados, e que dão uma certa coloração ao meio em que existem. Evidentemente, nada há de mais geral e menos concreto do que uma definição destas.

Limitando-se aos *pigmentos animais*, pode-se, com SCHMIDTMANN 1928 definir pigmentos como substâncias còradas existentes nas células e tecidos, sob a forma de grânulos. O pigmento é, portanto, caracterizado pela sua visibilidade ao microscópio. Ainda, podem dividir-se tais pigmentos em *exógenos* e *endógenos*, conforme são originados fora ou dentro do organismo. Dos *endógenos*, uns são *derivados hemoglobínicos* e caracterizam-se mais ou menos facilmente pela sua composição pirrólica (com núcleos do pirrol); outros são os chamados *pigmentos autóctones*. Como autóctones designam-se, principalmente, aqueles cuja origem não está esclarecida.

Entre os *autóctones* há-os derivados de proteínas, que são as *melaninas*, de còr acastanhada; outros, amarelados, derivados ou em relação com gorduras — *lipocromos*.

Um terceiro grupo de pigmentos autóctones abrange um conjunto de substâncias, de composição e relações muito incertas, que não se podem incluir em qualquer dos grupos anteriores.

Como se desconhece a composição química dos pigmentos autóctones, a sua classificação é necessariamente artificial.

De harmonia com o que se disse, o objecto destes estudos são os pigmentos melânicos nos Mamíferos, e começarei com o coelho e o homem. Ocupei-me mais detalhadamente do pigmento piloso, o mais fácil de atingir e separar das outras partes do corpo. Para os pigmentos da pele, sobretudo no homem, são recomendados alguns processos de extracção (v. por exemplo SCHMIDTMANN 1928) mas, dado o que hoje se sabe acêrca destes pigmentos, é de esperar que o produto final obtido seja muito diferente do pigmento que se desejava isolar. Para a pele são necessários outros métodos que terei ocasião de aplicar na continuação destes estudos. É, aliás, muito provável que os pigmentos melânicos da pele sejam, pelo menos em parte, idên-

ticos aos dos pêlos, de forma que toda a contribuição para o esclarecimento de uns é também aplicável aos outros.

Este trabalho foi efectuado principalmente no Laboratório Antropológico e no Laboratório Químico, da Universidade de Coimbra, e ainda no Museu Zoológico. Aos ex.^{mas} directores sr. Prof. Dr. Eusébio Tamagnini e Prof. sr. Dr. Couceiro da Costa, agradeço, reconhecido, as possibilidades de trabalho que me facultaram e favores de vária ordem.

Ao sr. Dr. Gouveia igualmente me confesso devedor de numerosas atenções, bem como ao Dr. Pinto Coelho e também ao sr. Dr. Viana de Lemos. Ao director do Laboratório de Análises Clínicas, sr. Dr. Ladeiro, agradeço as facilidades que me concedeu, além de incitamentos amistosos, de que compartilha também o sr. Dr. Temido.

Alguns amigos conseguiram amostras de cabelos e manifestaram de outras formas o seu amável interesse, como o sr. Reinas e a colega e amiga D. Sara Leitão de Mira.

Depois, ao pessoal do Laboratório de Antropologia, aos srs. J. D. Santos e Borges e ao pessoal do Laboratório Químico, particularmente aos srs. Coimbra, França e Ferreira — também não quero deixar de significar que me recorde dos muitos serviços prestados e os agradeço.

Por facilidades concedidas quando da determinação da pigmentação nos alunos de várias escolas, agradeço aos ex.^{mas}: Inspector Escolar, Reitor do Liceu D. João III, Reitora e Médica do Liceu Infanta D. Maria, vários Professores e Professoras das Escolas Primárias de Coimbra e ao Director e Professores do Colégio Portugal. Ao dr. Dâmaso sou também agradecido em relação ao mesmo assunto.

Finalmente, não podendo ser completo — para a realização deste trabalho concorreram, de alguma maneira, muitas pessoas — limito-me, quanto às restantes, a um agradecimento global.

INTRODUÇÃO

O principal objecto de estudo para a pigmentação tem sido, sem dúvida, o homem. A classificação das várias raças repousa ainda e principalmente sobre caracteres pigmentares, embora se note tendência para enveredar pelo justo caminho da consideração do maior número de semelhanças e contrastes (v. BAUR-FISCHER-LENZ 1936). Por outro lado, nos restantes Mamíferos a côr é um carácter secundário para a taxonomia e só depois da redescoberta das leis de Mendel é que pode ser convenientemente estudada a sua hereditariedade, que tem levado a resultados brilhantes.

Entre os Mamíferos é no coelho que está melhor estudada a pigmentação sob o ponto de vista da sua hereditariedade e mesmo da fisiologia, havendo uma literatura numerosa, sobretudo de autores alemães e americanos. Os resultados de NACHTSHEIM e sua escola, de SCHULZ, ENGELMEIER, DANEEL e associados, e também os de CASTLE e associados, aclararam a hereditariedade e um pouco da fenogénese (esta apenas em coelhos «russos»), enquanto que a constituição e número de pigmentos ficaram por resolver, pois os métodos empregados são pouco próprios para estes últimos fins.

Na cobaia (CUÉNOT 1927, citando vários autores) também a hereditariedade da pigmentação está razoavelmente conhecida e em muitos pontos é flagrante a analogia com a do coelho.

Noutros Mamíferos — e são já em grande número — a hereditariedade da pigmentação tem mostrado analogias com a do coelho: Por exemplo no «*Rattus norvegicus*» (BLUM e GREGORY 1937, com a bibliografia própria); no «*Mus musculus*» (DUNN 1936 e respectiva bibliografia); no «*Peromyscus*», outro Roedor, da família Cricetidae (SUMNER 1932); no boi

(ROBERTS 1937); no cavalo (CREW E SMITH 1929), etc. (1). Mas, a-pesar deste interesse pelos problemas da pigmentação, e do conseqüente grande número de trabalhos, ainda deve ser sobre o homem que há maior quantidade de observações respeitantes à pigmentação em geral.

Quanto à hereditariedade, no homem é muito mais difícil de estudar, já pela impossibilidade da experimentação, já porque as observações não se podem efectuar sobre raças puras, que no estado actual da humanidade têm uma probabilidade de existência infinitamente pequena (2).

Outra dificuldade que aparece quando se pretende estudar a pigmentação no homem é a da influência da idade. Notoriamente, a cor do cabelo de certos indivíduos sofre alterações durante o desenvolvimento; a cor na infância é muito diferente da do adulto. Dados mais ou menos qualitativos encontram-se em vários autores que estudaram a pigmentação, aos quais farei pormenorizada referência, quando tratar desta questão.

Para ser possível estudar convenientemente as árvores genealógicas que vários autores reuniram e aquelas que eu próprio consegui, como nelas aparecem adultos e jovens de várias idades, é necessário fazer correcções, sem o que se não passará de meras suposições, ou os resultados alcançados serão bastante subjectivos.

O tempo necessário para se calcularem as correcções da idade quando os estudos se efectuam sempre nos mesmos indivíduos, é naturalmente tanto como o do próprio desenvolvimento individual do homem, de forma que, para a obtenção de resultados imediatos são necessários outros processos. A aplicação desses processos conduz aos resultados que exponho adiante.

Para a determinação da pigmentação em casos complicados convém que a cor seja melhor definida do que pelos simples

(1) Para o carneiro as coisas parece passarem-se de maneira diferente. A cor branca é dominante sobre a preta e intermédia (DAY 1936).

(2) Quando me refiro, em todo este trabalho, a «raça», sem mais especificações, faço-o no sentido restritamente biológico, isto é, no sentido de um conjunto de indivíduos que diferem doutros pelo menos num factor ou gene. As outras noções de raça, a geográfica e taxonómica e a puramente especulativa, tão usada actualmente, sobretudo por autores germânicos, não me interessam nesta altura.

termos: *preto, castanho, amarelo, claro e escuro*, etc., subjectivos e ambíguos. Particularmente, no caso do homem, ou no caso de populações (como por exemplo de «*Peromyscus*» — SUMNER, 1932), é preciso empregar processos de determinação da cor mais exactos e mais objectivos que os usualmente empregados. Determinei a pigmentação da pele e do cabelo e, indirectamente, dos olhos por intermédio de um aparelho mais adequado que as escalas, da autoria de LOVIBOND, de Salisbury, Inglaterra. Para saber exactamente a cor e sobretudo para atestar a qualidade do aparelho empregado, foi necessário determinar as especificações tricromáticas na nomenclatura internacional, como exponho adiante.

Finalmente, para a compreensão da fenogénese da pigmentação e para o estabelecimento de analogias, por exemplo, entre o homem e o coelho (¹), é muito importante determinar as espécies de pigmentos existentes. O conhecimento dos pigmentos pode ainda trazer ensinamentos doutra ordem, como seja, contribuir para o conhecimento das proteínas em geral, segundo o exemplo da queratina — e tudo o que diz respeito às proteínas é dum importância capital para a Biologia.

É o relato de investigações nos sentidos acima apontados que constitui a presente comunicação.

(¹) FISCHER (em BAUR-FISCHER-LENZ 1936) toma como base esta analogia para toda a discussão da pigmentação no homem, analogia que não estava nem está provada.

A determinação da pigmentação

Como atrás fica dito, para uma análise da côr, quando têm de se avaliar pequenas diferenças, ou em que ela parece formar uma série mais ou menos contínua, têm-se usado escalas formadas por pequenas amostras de cabelos ou pêlos (ou produtos artificiais que os imitam) dispostas numa certa ordem. Outros processos são o do pião, usado principalmente por antropólogos americanos, e o dos tinto-fotómetros. Ainda há outros processos menos usados: um descrito por BELLAMY 1930, o de BUNAK e, mais recentemente, o mais exacto e objectivo de GARDNER e MAC ADAM 1934. Vou passar em revista todos êsses processos e apreciar a sua utilização na técnica pigmentométrica.

Escalas. — As escalas ou tabelas são usadas principalmente para a determinação da côr da pele, cabelo e olhos no homem. Das mais empregadas são as de FISCHER ou de FISCHER-SALLER para a côr do cabelo, a de VON LUSCHAN para a da pele e a de SALLER ou de MARTIN e SCHULTZ para a côr dos olhos. As novas tabelas de SCHULTZ para a côr da pele, cabelo e olhos, conjuntamente com a estrutura da iris, de HESCH, apresentam-se sob uma forma muito cômoda, mas são manifestamente insuficientes para o fim que se propõem.

SALLER e SCHULTZ-HESCH compararam e fizeram corresponder as respectivas tabelas, mas PETERS 1936 verificou por um exame cuidadoso que a alegada correspondência não existe. A correspondência entre as várias tabelas é realmente difficil de estabelecer e muitas vezes é mesmo impossível, sendo êste um dos pontos fracos do seu uso: não podem nunca ter universalidade, pois é improvável que qualquer das existentes venha a ser adotada por todos os autores. Por outro lado, a maior parte das tabelas, senão tôdas, têm as seriações bastante arbi-

trárias e na prática são incompletas para certas tonalidades existentes.

A *escala para a côr da pele* de VON LUSCHAN não tem a maior parte dos tons existentes em populações como a portuguesa, entre o branco marfim e o rosado e entre o branco e o moreno. As côres escuras, castanho muito escuro ou anegrado, já estão melhor representadas. Para uma apreciação rigorosa e determinação quantitativa da côr da pele, a escala de VON LUSCHAN, que é ainda uma das melhores, não se pode empregar.

Para a *côr dos cabelos*, a escala de FISCHER, ou a sua modificação de FISCHER-SALLER, que lhe é um pouco superior, além do defeito do seu pequeno número de pontos ou degraus, apresentam a seriação das côres arbitrária e, portanto, não se prestam para fins quantitativos. Na modificação de SALLER aparecem já mais tons castanhos e menos loiros; a primitiva escala de FISCHER não era conveniente para os Mediterrânicos ou outros agrupamentos de cabelos castanhos ou escuros.

BUNAK e SOBOLEVA estudaram a escala de FISCHER com um fotómetro do tipo KÖNIG-MARTENS. Estes fotómetros comparam por intermédio de um nicol dois raios polarizados em planos perpendiculares, provenientes do desdobramento de um raio monocromático, vindo de um monocromador mais ou menos sensível. Um dos raios vai cair sobre o objecto e sofre um enfraquecimento. Visualmente verifica-se qual a rotação que é preciso dar ao nicol para que resulte igualdade de iluminação, o que constitui uma medida da intensidade relativa dos dois raios. Os resultados dependem muito da sensibilidade do monocromador e não deixam de ser um tanto subjectivos; estes fotómetros medem mais fácil e exactamente curvas sem bandas nítidas, curvas relativamente uniformes. No entanto, este tipo de fotómetros é suficiente para a demonstração das qualidades de uma escala e BUNAK verificou que os termos da escala de FISCHER, contíguos e da mesma côr (diferentes tons), mostram curvas de absorção de forma diferente, além das diferenças na reflectância para o «branco» — v. o quadro 6 e tabela 3 de BUNAK. As determinações de BUNAK e SOBOLEVA foram efectuadas para os comprimentos de onda 646, 590 e 550 $m\mu$ e maiores diferenças deviam aparecer considerando a absorção em todo o espectro.

Com base na simples observação directa, pode dizer-se que

as cores fundamentais do cabelo são, em primeira aproximação, o alaranjado ou vermelho (ruivo), o amarelo (loiro), o castanho e o preto. Uma escala completa devia ter vários tons (diferindo apenas na quantidade de luz «branca» que absorvem) para cada cor, e depois as combinações entre as cores fundamentais que ocorrem mais freqüentemente na prática. O número de termos da escala seria grande, mas em condições favoráveis de iluminação e com observadores treinados, tais tabelas poderiam prestar bons serviços.

As escalas para a cor dos olhos com um número de degraus relativamente grande, como a de SALLER, estão talvez mais apropriadas que as existentes para a cor dos cabelos. A escala de SALLER é melhor, quanto a mim, que a de MARTIN ou de MARTIN-SCHULTZ, principalmente porque tem mais termos. A ordenação dos termos segundo SALLER é que não me parece satisfatória, antes se reconhece facilmente que é arbitrária, pois não entra em conta com a estrutura, que, como começa a ser geralmente reconhecido, é um factor indispensável a considerar para avaliação e julgamento exacto da cor da íris.

WENINGER 1934 chama a atenção para a importância que pode ter o estudo da estrutura da íris. Vários outros antropólogos seguem a mesma opinião, como por exemplo HESCH. HESCH organizou uma tabela para a estrutura ou desenho da íris, com 12 termos, 8 para os olhos pouco pigmentados, os restantes 4 para íris escuras. Manifestamente, embora as fotografias sejam magníficas, os termos são insuficientes, como pode verificar quem efectue muitas observações da estrutura. Estas observações realizam-se comodamente tirando estereofotografias com uma câmara apropriada ou, na sua falta, visualmente com uma lupa, mas de pequena ampliação, examinando de frente e um pouco de perfil, com iluminação de intensidade média, preferivelmente luz média do Norte.

HESCH 1931 relata um estudo da estrutura da íris, conjuntamente com a cor, em 410 ♂ e 386 ♀. Nota-se uma certa falta de sistematização na apreciação da estrutura e na sua tabela de desenhos da íris, de que já falei, sucede outro tanto.

No final deste capítulo voltarei a estudar mais detalhadamente este assunto e então descreverei como, entrando em conta com a estrutura, é possível medir a cor dos olhos por um processo conveniente.

Processo do pião colorimétrico. — Na América é usado para a determinação da pigmentação um pião com discos de papel de cores apropriadas, discos cuja parte visível pode ser maior ou menor segundo se queira; o pião põe-se em movimento de preferência com um pequeno motor eléctrico.

Este método tem sido empregado em muitos trabalhos e presta bons serviços para a apreciação da cor da pele. Percorrendo a colecção do «*American Journal of Physical Anthropology*» encontram-se muitas determinações com o pião (v. por exemplo HARRIS 1926, HERSKOVITS 1926, DAVENPORT 1925, CLEMENTS 1931, TODD E GORDER 1921, TODD, BLACKWOOD E BEECHER 1928, BOWMAN 1930).

Contudo, o método apresenta numerosas dificuldades. Em primeiro lugar, as cores dos discos não são cores puras do espectro: O disco vermelho tem, segundo HARRIS 1926, 33% de vermelho e 67% preto, enquanto que outros autores dizem que possui respectivamente 41% e 59%. TODD, BLACKWOOD E BEECHER verificaram a existência de um erro experimental de $\pm 2\%$ e explicam as diferenças na cor do vermelho pelo uso de «fundos» diferentes para a rotação dos discos — a companhia fabricante fornece «fundos» de duas cores, cinzentos e castanhos. Para TODD, BLACKWOOD E BEECHER não se podem objectivamente distinguir resultados obtidos com o pião que comportem diferenças entre 67 e 59% de preto.

HARRIS afirma que o disco amarelo ⁽¹⁾ é o amarelo-limão, puro do espectro, enquanto que BOWMAN, na sua cuidada crítica (BOWMAN 1930), assinala que o amarelo do pião tem algum vermelho. Este último autor recomenda o uso de uma velocidade de rotação mais ou menos constante e uma fonte luminosa também constante, como seja a luz de uma lâmpada Mazda de azoto, de 150 watts, com luz aproximadamente igual à do dia. O menor erro a que um observador treinado pode chegar é de $\pm 3\%$ — diz BOWMAN — e o pião não fornece uma indicação absoluta do N (negro). Demais, a cor vermelha é muito difícil de imprimir sempre idêntica, de forma que, embora o vermelho usado pela companhia fabricante seja dos melhores,

(1) O pião colorimétrico é usado com quatro discos: preto, vermelho, amarelo e branco.

não são rigorosamente iguais os discos vermelhos de vários piões.

O que é certo, é que o método do pião colorimétrico é muito moroso e pouco objectivo; a pele de que se quer determinar a pigmentação e o pião têm que estar um pouco afastados e é quasi impossível abstrair do brilho superficial dos discos e da pele, que necessariamente são a maior parte das vezes diferentes — além da incerteza das côres dos discos.

BELLAMY 1930 propõe um método baseado na rotação de discos de côres, sobre que se aplicam vidros neutros de determinada absorção e no centro coloca-se uma amostra do cabelo cuja coloração se quer determinar.

O método do pião só com um grande êrro poderá ser aplicado à determinação da côr de pêlos ou cabelos (conjuntamente com o grande dispêndio de tempo que seria requerido para efectuar as medições, como diz SUMNER 1932). O de BELLAMY também não parece muito próprio: os discos são igualmente de papel e os defeitos apontados a um aplicam-se igualmente ao outro método.

Métodos fotométricos e tinto-fotométricos. — São estes processos que permitem uma determinação mais rigorosa da côr da pele e do cabelo, bem como dos pêlos, sendo possível empregá-los também para os olhos.

Os tinto-fotómetros usados são o de IVES na América (SUMNER 1932 e DICE) e o de LOVIBOND (GRAY 1908). Compõem-se essencialmente de filtros de determinadas côres que se interpõem a um raio de luz «branca» e que em combinações apropriadas reproduzem a côr do objecto. Quando o brilho da superfície branca-padrão e do objecto são diferentes, é necessário usar diafragmas.

O processo é pouco empregado, talvez por ser um tanto moroso e requerer filtros e aparelhos nem sempre de fácil aquisição. Por outro lado, é precisa uma grande prática para se conseguir ajustar com exactidão a côr dos filtros à côr do objecto. Como o capítulo seguinte é consagrado à análise e discussão dêste método, não me refiro a êle mais pormenorizadamente nesta altura.

Métodos fotométricos propriamente ditos apenas podem aplicar-se à determinação da cor dos pêlos ou cabelos e têm sido muito pouco empregados. Sem dúvida, seriam os melhores se se pudessem aplicar em trabalhos no campo e para todos os objectos, o que é impossível.

As determinações de BUNAK e SOBOLEVA, a que já me referi, foram executadas com o fim de obter uma escala devidamente ordenada. GRAY com o pigmentómetro (tinto-fotómetro) de LOVIBOND realizou algumas observações com o mesmo fim. As novas determinações da cor do cabelo no homem, relatadas em GARDNER e MAC ADAM 1934, feitas com um fotómetro registador fotoeléctrico, segundo HARDY, são as mais precisas que se conhecem, mas os autores também tiveram em vista a construção de escalas. GARDNER e MAC ADAM obtiveram curvas da *reflectância* entre 400 e 700 $m\mu$ e depois determinaram as características para a especificação da cor segundo a nomenclatura internacional (v. o próximo capítulo). As amostras analisadas foram repartidas em três grupos: castanho, vermelho e loiro; estas séries foram ainda divididas em subgrupos. Os autores não chegaram neste estudo a definir uma escala que lhes possibilitasse exprimir cada cor do cabelo por determinadas constantes colorimétricas — o número de casos estudados foi relativamente pequeno (53 amostras).

Determinações com o pigmentómetro

A uma modificação do tinto-fotómetro de LOVIBOND própria para a determinação da pigmentação, foi dado o nome de *pigmentómetro*. Foi este o aparelho usado por GRAY, como já referi, mas as suas determinações dizem respeito a um pequeno número de casos e não tenho conhecimento que tenha sido empregado em mais larga escala. No entanto, o aparelho presta-se perfeitamente para se efectuarem com ele determinações quantitativas (embora referidas à sua escala arbitrária) da cor da pele, do cabelo e olhos no homem e da cor dos pêlos de vários animais.

Vou expor o método de medidas e o estudo que fiz do aparelho com o fim de verificar as suas qualidades.

O pigmentómetro consta essencialmente de um pequeno óculo com um único orifício ocular e duas aberturas pequenas, diante de uma das quais se coloca o objecto a medir e em frente da outra está uma superfície de «branco-padrão», no caso do pigmentómetro um cartão próprio semelhante, segundo o fabricante, ao carbonato e óxido de magnésio usado internacionalmente para padrão branco (1). Entre o padrão branco e o orifício ocular podem interpor-se filtros de côr apropriada e com graduação arbitrária, divididos em unidades, décimas e meias décimas, sendo esta subdivisão suficiente para os estudos da pigmentação. Os filtros são, no caso do pigmentómetro, vidros de três côres: vermelho, amarelo e azul; as combinações destes filtros nas várias graduações dão aproximadamente as côres que se desejem.

O tinto-fotómetro de IVES, já referido, tem também três escalas, mas as respectivas côres são: vermelho, amarelo e azul-violeta.

O princípio da utilização destes dispositivos é o da formação de côres compostas à custa de duas côres simples e a absorção de luz «branca» pela combinação de três vidros de côr apropriada (2).

O que mais interessa apreciar quando se determina a pigmentação no homem é a quantidade de «negro» existente, ou, por outras palavras, a quantidade de luz «branca» que o objecto absorve. Esta quantidade será igual, segundo LOVIBOND, à graduação do menor dos três filtros empregados na determinação da côr. O excesso entre o «preto» e o menor dos restantes dois filtros dá a «côr composta» do objecto (violeta, verde e alaranjado) e o excesso desta para o maior dos três filtros dá a côr simples (azul, amarelo, vermelho). Assim, uma côr que fôsse igualada interpondo entre a ocular e a superfície branca-padrão os filtros, respectivamente, vermelho, amarelo e azul —

(1) Na verdade o cartão não deve ser branco puro e o sistema óptico tem também influência (v. adiante).

(2) Uma descrição do pigmentómetro de LOVIBOND e seu princípio, encontra-se nos folhetos explicativos fornecidos pela casa vendedora.

2.6 : 2.1 : 1.9 — teria 1.9 de preto, 0.2 de alaranjado e 0.5 de vermelho. A especificação duma côr com os filtros — 3.8 : 4.5 : 4.0 — seria 3.8 de preto, 0.2 de verde e 0.5 de amarelo.

Esta nomenclatura da côr é, porém, muito simplista e imprecisa. A côr é uma das características dos objectos que mais facilmente se observa, mas está muito sujeita a impressões subjectivas e, sobretudo, a designação das côres tem estado mais ou menos subordinada ao critério de cada observador. As tabelas de côres como as de OSTWALD ou as de RIDGWAY não resolvem o problema, pois a apreciação pode diferir muito de um para outro observador e não se prestam para certos casos. Para obstar a estes inconvenientes, a Comissão Internacional de Iluminação (C. I. E.) (1) definiu em 1931 um sistema de coordenadas e as propriedades de um observador-padrão neste sistema, conjuntamente com a descrição de iluminantes apropriados.

Vou procurar definir a côr dos vidros-filtros do pigmentómetro de forma que se saiba a qualidade do aparelho empregado, realizando uma crítica que permita julgamentos seguros e tornando a nomenclatura objectiva, ao mesmo tempo que é feita uma verificação dos filtros da graduação.

*
* *

A apreciação da côr depende das propriedades da retina e dos meios de visão humana. À visão fotópica não é possível normalmente a apreciação da distribuição da energia luminosa num determinado intervalo, o que se aprecia é a soma dos estímulos energéticos recebidos. É possível, graças a esta propriedade, realizar qualquer côr por intermédio de três outras côres ou estímulos na proporção conveniente. Este processo é muito simples e chama-se o *sistema triestimular de especificação da côr* (JUDD 1933). Os três estímulos que servem para a definição da côr chamam-se *estímulos primários*. As quantidades destes três estímulos primários definem precisamente uma dada côr para cada

(1) Commission Internationale de l'Éclairage.

observador. É necessário além da definição dos estímulos primários que a cor seja apreciada sempre pelo mesmo observador (o *observador-padrão*) e que a iluminação seja sempre a mesma, por exemplo o iluminante B recomendado pela C. I. E., que corresponde à luz média solar do meio-dia.

Para a especificação da cor a Comissão estabeleceu como estímulos primários energia radiante homogênea de 700.0, 546.1 e 435.8 $m\mu$ de comprimento de onda e como *estímulo heterogêneo* (iluminante) o iluminante B, cuja distribuição de energia entre 380 e 780 $m\mu$ é dada pela C. I. E. As coordenadas x , y e z dos estímulos primários no sistema triestímular, são:

	x	y	z
700.0 $m\mu$	0.73467	0.26533	0.00000
546.1	.27376	.71741	.00883
435.8	.16658	.00886	.82456
Iluminante-padrão B	.34842	.35161	.29997

O observador padrão é tal que os estímulos espectrais estão para ele perfeitamente definidos no sistema triestímular com os estímulos primários e o estímulo heterogêneo iluminante B; as coordenadas dos vários pontos do espectro estão bem calculadas e definidas em relação a este observador-padrão e encontram-se dispostas em tabelas convenientes (v. JUDD 1933). A cada cor, a cada comprimento de onda, correspondem, portanto, três coordenadas, que costumam ser dadas ou achando a sua soma para cada intervalo de 5 $m\mu$ — *coordenadas trilineares do espectro*, ou apenas directamente para cada ponto de 5 em 5 ou de 10 em 10 $m\mu$ — *coeficientes tricromáticos*. O espectro de igual energia corresponde a iguais estímulos primários. Outras propriedades do observador-padrão foram derivadas da especificação de 17 observadores normais, tomando aproximadamente a média. Quando se considera o observador-padrão costuma admitir-se que o estímulo básico é o de igual energia, pois é em relação ao espectro de igual energia que são fixadas as propriedades do observador-padrão. A questão dos iluminantes é também de importância capital, visto que para a definição do sistema entra um determinado iluminante, bem conhecido, servindo de estí-

mulo heterogéneo. A especificação tricromática (coeficientes tricromáticos) doutros iluminantes em relação ao observador-padrão é também conhecida, como seja, para os iluminantes da C. I. E.: *iluminante A*, correspondente à luz típica de determinada lâmpada com gás; *iluminante C*, que dá aproximadamente a luz média do dia.

Querendo-se conhecer a cor dum objecto, tem que se saber primeiramente a sua *reflectância* (quantidade de luz reflectida) para cada comprimento de onda, ou, para objectos transparentes, a *transmissão*, também para cada comprimento de onda. Este último caso é o dos filtros usualmente empregados, por exemplo no pigmentómetro. A transmissão e a reflectância são dadas espectrofotometricamente e, para cálculos aproximados, suficientes para as necessidades da prática, basta conhecê-las em cada intervalo de 10 $m\mu$. Como, por outro lado, é conhecida para os iluminantes A, B e C a distribuição de energia para o observador-padrão — é possível calcular a cor com que o observador-padrão vê o objecto considerado desde que se use um certo iluminante.

Calculada a especificação tricromática de um determinado estímulo é agora possível determinar a sua cor, tal como é vista pelo observador-padrão. Para a expressão da impressão visual da cor procede-se ao cálculo de um estímulo equivalente dado pelas seguintes características: 1 — *Brilho*, ou, no caso dos filtros, transmissão luminosa, em que é igual a $\frac{\sum \bar{y}ETd\lambda}{\sum \bar{y}Ed\lambda}$, em que T representa a transmissão para cada intervalo $d\lambda$ e $\sum \bar{y}E$ corresponde à distribuição de energia em relação à coordenada y ; 2 — *Comprimento de onda dominante*, isto é, comprimento de onda da «cor pura» do espectro que se pode considerar representativa da cor complexa que se observa; 3 — *Pureza colorimétrica* ou simplesmente pureza, ou seja, a fracção da cor pura que é necessária para que, combinada ao estímulo heterogéneo, resulte a cor complexa de que se trata.

Procedi ao cálculo destas constantes para os filtros do pigmentómetro, de forma a fazer passar a expressão da sua cor de termos vagos como são vermelho, amarelo e azul, para outros mais precisos, e conformes com a nomenclatura internacional.

*

* *

As curvas de transmissão dos filtros foram obtidas com um espectrofotômetro HILGER para o visível, combinado com um fotômetro SPEKKER, igualmente da casa HILGER. Como é sabido, o fotômetro divide um raio de luz em dois raios de intensidades relativas conhecidas; um dos raios atravessa o filtro a estudar antes de entrar no espectrofotômetro. Os dois raios são depois decompostos pelo espectrofotômetro e registados contiguamente em chapas fotográficas. As chapas usadas foram pancromáticas «Agfa Isopan». Em seguida, foram determinados os pontos de igual escurecimento (igual densidade) da chapa como é usual, e os comprimentos de onda correspondentes a estes pontos eram dados num gráfico prèviamente obtido para a combinação espectrofotométrica utilizada. As medidas sôbre as chapas foram efectuadas com um micrómetro Zeiss apropriado e os pontos de referência eram constituídos por riscas conhecidas.

Obtive assim a transmissão espectral dos filtros das três côres. Foram empregados filtros de 1, 5, 10 e 20 unidades. O cálculo da transmissão por unidade foi feito admitindo implicitamente a lei de LAMBERT (v. por exemplo SCHEIBE 1933 ou GOUVEIA 1935). Segundo LAMBERT, quando a luz de determinado comprimento de onda λ e intensidade I_λ passa num meio absorvente, em cada camada infinitamente pequena ds sofre um enfraquecimento proporcional à intensidade da luz incidente. Para a intensidade I_λ é, portanto:

$$\frac{-dI_\lambda}{ds} = k'I_\lambda \quad \text{ou} \quad \frac{-dI_\lambda}{I_\lambda} = k'ds$$

Para uma espessura s :

$$\int \frac{-dI_\lambda}{I_\lambda} = \int k'ds$$

donde vem

$$- \ln I = k's + c$$

Para o caso em que $s = 0$ obtém-se :

$$- \ln I_{\lambda_0} = c$$

e

$$- \ln I_{\lambda} - (- \ln I_{\lambda_0}) = k's,$$

donde

$$\ln \frac{I_{\lambda_0}}{I_{\lambda}} = k's,$$

em que k' é uma constante e se chama *coeficiente de extinção*.

Empregando os logaritmos decimais vem uma constante diferente:

$$\lg \frac{I_{\lambda_0}}{I_{\lambda}} = ks = \varepsilon$$

Esta constante é mais usada na Química, enquanto que na Física costuma ser preferida k' . k é também chamado coeficiente de extinção.

Pelo método usado conhece-se a relação $\lg \frac{I_0}{I}$, correspondente a $\lg \frac{I_{\lambda_0}}{I_{\lambda}}$ para todo o espectro: esta relação é dada pelo fotómetro SPEKKER para certos pontos. Querendo a transmissão expressa por exemplo em percentagens da luz incidente I_0 , então obtém-se para relação desta com a luz I que sai do filtro e para cada unidade do pigmentómetro :

$$\frac{I}{I_0} \% = \frac{1}{\text{antilg} \left(\frac{I_0}{I} \cdot \frac{1}{s} \right)} \cdot 100$$

Neste caso, s representa a marcação na escala do filtro utilizado; para o filtro 10 unidades é $s = 10$, para o de 20 unidades $s = 20$, etc.

Transmissão luminosa e côr do filtro «azul». — As curvas da transmissão em percentagens $T\%$ por unidade do filtro azul, estão traçadas na *fig. 1*. Nota-se uma pequena divergência entre as curvas obtidas a partir dos filtros 5, 10 e 20. O método de marcação de iguais densidades sobre as chapas exige que a espessura do meio absorvente esteja entre certos limites para que a

marcação resulte eficiente; com efeito, no processo visual empregado é preciso que os dois espectros contíguos apresentem um certo contraste entre si, fora dos pontos de igual densidade de escurecimento, para que estes últimos possam ser bem marcados. As determinações para o filtro 10 são as mais convenientes para

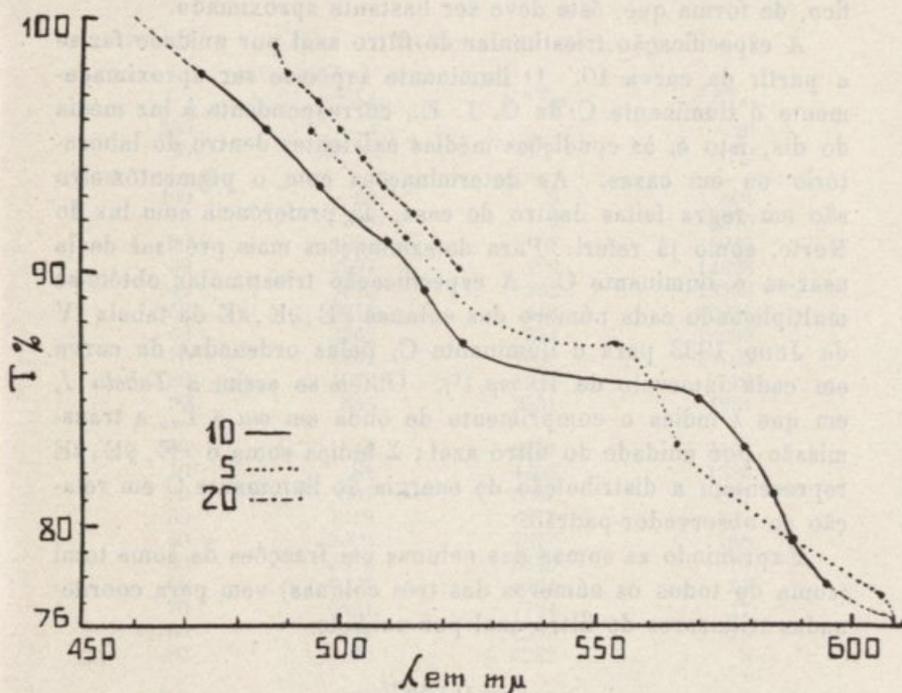


FIG. 1

Filtro « azul » — percentagens de transmissão $T\%$ por unidade, para cada comprimento de onda λ em $m\mu$.

os níveis médios e altos de transmissão. Em quase todos os casos foi tomada a curva 10, em vez da média das três, por esta razão. Como se vê pela figura, os valores obtidos não diferem muito para as três curvas e só um método com a precisão por exemplo do de HARDY (cf. HARDY 1935) possibilitaria a eliminação de diferenças devidas ao método. As escalas de filtros parece estarem bem graduadas.

A absorção incompleta vai até aproximadamente 610 $m\mu$, estendendo-se pelo azul, verde, amarelo até quase o alaranjado médio. Não há absorção no extremo azul e no violeta, ao

passo que o alaranjado extremo e o vermelho são completamente absorvidos. A forma da curva é curiosa, parecendo o resultado da união de duas curvas mais simples na região de 540 $m\mu$. Ficou verificado fotométricamente que as curvas não apresentavam ordenadas sensivelmente inferiores às do gráfico, de forma que, êste deve ser bastante aproximado.

A especificação triestimular do filtro azul por unidade faz-se a partir da curva 10. O iluminante supõe-se ser aproximadamente o iluminante C da C. I. E., correspondente à luz média do dia, isto é, às condições médias existentes dentro do laboratório ou em casas. As determinações com o pigmentómetro são em regra feitas dentro de casa, de preferência com luz do Norte, como já referi. Para determinações mais precisas devia usar-se o iluminante C. A especificação triestimular obtém-se multiplicando cada número das colunas $\bar{x}E, \bar{y}E, \bar{z}E$ da tabela IV de JUDD 1933 para o iluminante C, pelas ordenadas da curva em cada intervalo de 10 $m\mu$ (1). Obtém-se assim a *Tabela I*, em que λ indica o comprimento de onda em $m\mu$ e $T_{\lambda z}$ a transmissão por unidade do filtro azul; Σ indica soma e $\bar{x}E, \bar{y}E, \bar{z}E$ representam a distribuição de energia do iluminante C em relação ao observador-padrão.

Exprimindo as somas das colunas em fracções da soma total (soma de todos os números das três colunas) vem para coordenadas trilineares do filtro azul por unidade

$$x = 0.23835$$

$$y = .29510$$

$$z = .46655$$

Todos os cálculos seguintes repousam simplesmente sobre os valores de x e y , visto ser $z = 1 - (x + y)$.

O comprimento de onda dominante Λ encontra-se unindo o ponto x, y no sistema de coordenadas com o ponto x_h, y_h que representa no mesmo sistema o estímulo heterogéneo empregado; para o iluminante C $x_h = 0.31012$ e $y_h = 0.31631$; Λ corresponde ao ponto em que a recta assim definida corta a

(1) Para estes cálculos T não é expresso em percentagens, isto é, 100 do gráfico corresponde a 1.

curva que representa no mesmo sistema o espectro visível. O problema reduz-se, pois, a achar a intersecção duma recta com uma curva, mas dada a forma relativamente complicada desta última, é muito facilitado pelo uso de tabelas apropriadas. Entra-se nas tabelas com os valores que passo a calcular.

TABELA I

λ	$\bar{x} ET_{ax}$	$\bar{y} ET_{ax}$	$\bar{z} ET_{ax}$
380	4		20
90	19		89
400	85	2	404
10	329	9	1570
20	1238	37	5949
30	2997	122	14628
40	3975	262	19938
50	3915	443	20638
60	3362	694	19299
70	2231	1039	14703
80	1072	1560	9120
90	343	2231	4984
500	48	2251	3160
10	81	4403	1385
20	507	5687	627
30	1319	6871	336
40	2398	7877	168
50	3678	8446	74
60	5033	8424	33
70	6231	7784	17
80	6944	6593	13
90	7160	5282	8
600	6890	4093	5
10	0	0	0
	59859	74110	117168

Considerando como estímulo básico o espectro de igual energia, como observador o observador-padrão e como estímulo heterogéneo o iluminante C (luz média do dia),

$$\begin{aligned} x_h &= 0.31012 & x &= 0.23835 \\ y_h &= .31631 & y &= .29510. \end{aligned}$$

Calcula-se:

$$R = \frac{y - y_h}{x - x_h} = + 0.29553$$

Na tabela VI de JUDD 1933 entra-se com esta relação (ou a inversa, conforme a que é maior) para se achar Λ_0 . Como o

valor de R não vem na tabela, é preciso interpolar (interpolação linear) tomando os dois valores vizinhos. Obtém-se para adicionar ao R imediatamente menor

$$\Delta\Lambda = +0.302$$

É:

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Delta\Lambda = 487,302 \text{ m}\mu.,$$

em que Λ_0 corresponde ao R imediatamente inferior ao encontrado e que vem na tabela.

Pode-se dizer, portanto, que o comprimento de onda dominante é $\Lambda_{az} = 487.3 \text{ m}\mu.$, aproximadamente.

A pureza é dada pela fórmula

$$p = \frac{1}{y} \cdot (y - fy_h)$$

em que

$$f = \frac{x - X}{x_h - X} = \frac{y - Y}{y_h - Y},$$

sendo X, Y as coordenadas do ponto em que a recta encontra a curva. Estes pontos obtêm-se por interpolação na tábua de JUDD. Calcula-se

$$\begin{aligned} Y &= Y_0 + \Delta Y = 0.2354 + 0.00571 \\ &= 0.24111, \end{aligned}$$

donde deriva

$$p = 0.2303,$$

ou seja, uma pureza aproximadamente de 0.23. A transmissão luminosa do filtro (sempre por unidade) é $T_{iaz} = \Sigma \bar{y} E T_{az} \Delta\lambda \cdot 10^{-6}$. Neste caso $\Delta\lambda = 10 \text{ m}\mu.$ e 10^6 é o factor por que estão multiplicados todos os números da tabela. Vem $T_{iaz} = 0.7411$, aproximadamente.

Assim ficam calculadas tôdas as constantes necessárias para uma perfeita especificação do filtro azul. *O observador-padrão vê o filtro azul 1 como se êle deixasse passar 74,11% da energia luminosa e a côr que mostra é a mesma que se obtém combinando 0.77 de luz média do dia (iluminante C) com 0.23 de luz pura de*

comprimento de onda $487.3 m\mu$. As proporções desta combinação são proporções de brilho (no sentido da definição de «brilho»).

Transmissão luminosa e côr do filtro amarelo. — Os mesmos métodos serviram também para a obtenção das curvas de

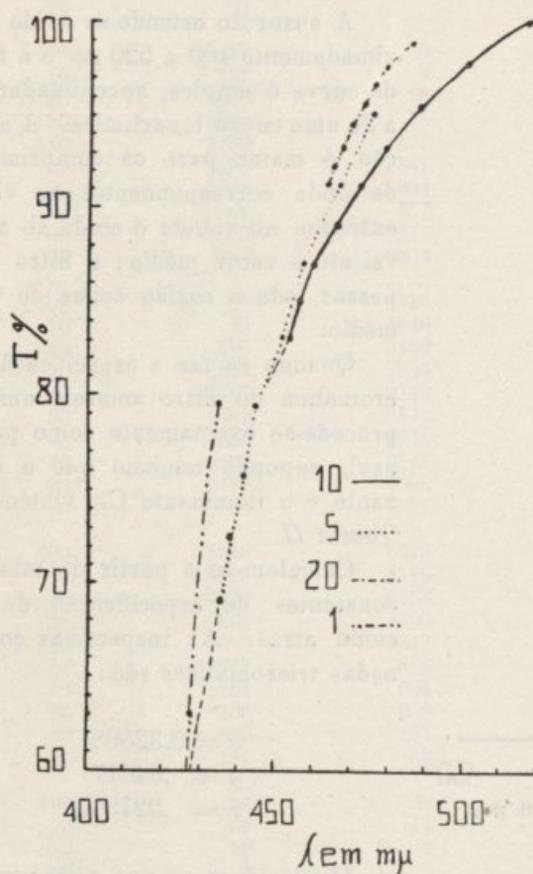


FIG. 2

Filtro «amarelo» — Percentagens de transmissão $T\%$ por unidade para os comprimentos de onda λ (em $m\mu$).

transmissão do filtro amarelo e das respectivas constantes colorimétricas. As curvas estão representadas nas *figs. 2 e 3*. Ao inverso dos outros dois filtros, este tem percentagens de trans-

missão relativamente baixas, nalguns pontos; por esta razão são utilizadas as curvas 10, 5 e 1 para o cálculo dos coeficientes tricromáticos, as duas últimas nos pontos de ordenadas baixas, como está indicado nas figuras a tracejado.

Os dois gráficos são, portanto, contíguos e só por comodidade foram separados.

A absorção estende-se desde aproximadamente 400 a 520 $m\mu$ e a forma da curva é simples, aproximadamente a de uma curva logarítmica. A absorção é maior para os comprimentos de onda correspondentes ao violeta extremo, ao violeta e ainda ao azul e vai até o verde médio; o filtro deixa passar toda a região acima do verde médio.

Quando se faz a especificação tricromática do filtro amarelo unidade, procede-se exactamente como para o azul, supondo também que o iluminante é o iluminante C. Obtém-se a Tabela II.

Calculam-se a partir da tabela as constantes de especificação da cor, como atrás. As respectivas coordenadas tricromáticas são:

$$x = 0.32598$$

$$y = .34617$$

$$z = .32785.$$

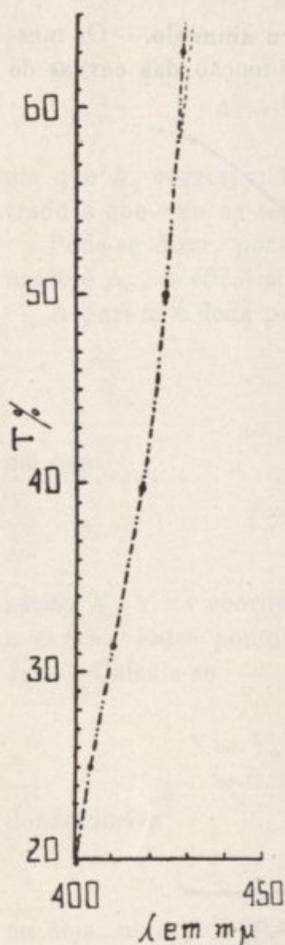


FIG. 3

Filtro « amarelo » — Percentagens de transmissão $T\%$ por unidade, para os diversos comprimentos de onda λ (em $m\mu$).

Desde já se vê que a transmissão luminosa do filtro é $T_{lam} = 0.99203 \cdot 10 \cdot 10^{-6}$, aproximadamente $T_{lam} = 0.9920$. O comprimento de onda dominante é $\Lambda_{am} = 569.302 m\mu$, ou seja, aproximadamente $\Lambda_{am} = 569.3 m\mu$. A pureza vem $p = 0.1986$, isto é, pode tomar-se $p = 0.20$.

Portanto, o observador-padrão vê o filtro amarelo unidade

como se tivesse uma transmissão luminosa de 0.9920 e a luz que ele transmite corresponde à combinação de luz média do dia

TABELA II

λ	$\bar{x} ET_{am}$	$\bar{y} ET_{am}$	$\bar{z} ET_{am}$
380	0		0
90	0		0
400	17	0	80
10	102	3	485
20	545	16	2618
30	1831	75	8938
40	2989	197	14993
50	3195	361	16841
60	2928	604	16809
70	2056	957	13550
80	1039	1511	8837
90	347	2254	5042
500	51	3316	2792
10	87	4746	1492
20	576	6462	712
30	1523	7934	388
40	2785	9149	195
50	4282	9832	86
60	5880	9841	39
70	7322	9147	20
80	8417	7992	16
90	8984	6627	10
600	8949	5316	7
10	8325	4176	2
20	7070	3153	2
30	5309	2190	
40	3693	1443	
50	2349	886	
60	1361	504	
70	708	259	
80	369	134	
90	171	62	
700	82	29	
10	39	14	
20	19	6	
30	8	3	
40	4	2	
50	2	1	
60	1	1	
70	1		
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	93416	99203	93954

(ilum. C) mais luz pura de comprimento de onda 569.3 $m\mu$, na proporção de brilho respectivamente de 0.80 para 0.20.

Transmissão luminosa e côr do filtro vermelho. — Para o filtro vermelho obtêm-se as curvas representadas na *fig. 4*. Tôdas estão reduzidas à unidade. Observando as diferenças entre as três curvas reconhece-se que devem ser devidas a erros de método e não a má gradação das escalas, visto que as diferenças não têm sempre o mesmo sentido. A curva adoptada para a especificação da côr foi a 10, pelas razões já apontadas.

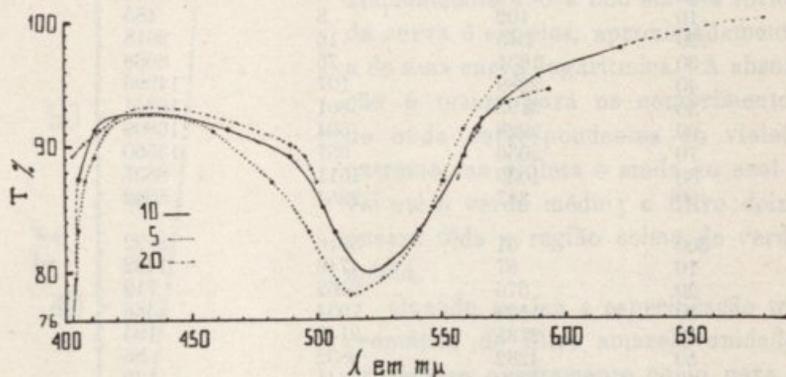


FIG. 4

Filtro « vermelho » — Transmissão em percentagens $T\%$ por unidade, para os diversos comprimentos de onda λ expressos em $m\mu$.

A absorção estende-se desde o extremo violeta ao vermelho médio, com máximos na região do verde e violeta. Dos três filtros êste é o que apresenta menor selectividade na absorção.

A partir da curva de transmissão obtêm-se a *Tabela III*.

Os valores de x , y e z são :

$$x = 0.31857$$

$$y = .30914$$

$$z = .37229$$

Calculando a transmissão luminosa da maneira habitual vem $T_{lv} = 0.89146$, aproximadamente $T_{lv} = 0.8915$. O comprimento de onda dominante é $\Lambda_v = 501.629$, isto é, cêrca de $501.6 m\mu$. A pureza é $p = -0.0519$, aproximadamente $p = -0.05$.

Como se vê, o filtro vermelho forneceu resultados um tanto inesperados, o comprimento de onda dominante é no verde e a

pureza é negativa. Um valor negativo da pureza significa que a linha definida por x , y e x_h , y_h (v. notação atrás) corta o espectro apenas num ponto e a intersecção vem acompanhada

TABELA III

λ	$\bar{x} ET_v$	$\bar{y} ET_v$	$\bar{z} ET_v$
400	0	0	0
10	296	8	1415
20	1145	34	5503
30	2781	113	13575
40	3681	243	18463
50	3606	408	19008
60	3076	635	17659
70	2065	962	13610
80	1002	1458	8524
90	323	2096	4689
500	45	2925	2463
10	73	3978	1251
20	453	5079	560
30	1224	6379	312
40	2303	7566	161
50	3682	8456	74
60	5292	8857	35
70	6773	8461	19
80	7937	7536	15
90	8589	6335	10
600	8627	5035	7
10	8075	4051	2
20	6893	3074	2
30	5202	2146	
40	3641	1423	
50	2326	877	
60	1353	501	
70	707	258	
80	369	134	
90	171	62	
700	82	29	
10	39	14	
20	19	6	
30	8	3	
40	4	2	
50	2	1	
60	1	1	
70	1		
	91866	89146	107357

de uma pureza negativa, correspondendo a uma cor púrpura (cores que se estendem entre o violeta e o vermelho e se podem considerar misturas destas duas cores). As cores espectrais têm em regra dois valores para pureza, um negativo outro positivo,

a que andam associados dois comprimentos de onda dominantes. Prefere-se o comprimento de onda associado à pureza positiva. Na especificação dos filtros azul e amarelo apenas esta pureza e respectivo comprimento de onda foram considerados; cada filtro tinha, porém, um outro comprimento de onda para a mesma relação $x - x_h/y - y_h$ (ou o inverso). Para o filtro azul o outro comprimento de onda, com pureza negativa, era cêrca de $594 \text{ m}\mu$ e para o amarelo $453 \text{ m}\mu$.

Pelo contrário, o filtro vermelho apenas tem uma pureza negativa, a sua côr é uma côr não-espectral, uma côr púrpura formada pela subtracção ao estímulo heterogéneo de uma quantidade de luz pura do comprimento de onda dominante, igual à pureza, ou, o que é equivalente, a pureza negativa refere-se a uma parte do brilho que não é adicionada ao estímulo heterogéneo.

Para o observador-padrão o filtro vermelho unidade é uma côr púrpura, com uma transmissão luminosa de 0.8915 e a luz transmitida é como se fôsse igual à combinação do iluminante C adicionada de luz pura de comprimento de onda $501.6 \text{ m}\mu$, nas proporções de brilho respectivamente de 1.00 para 0.05.

Êste resultado está de acôrdo com o que se observa nas curvas de transmissão, em que quási só o verde e o extremo violeta é que são mais fortemente absorvidos, mas principalmente o verde; o extremo vermelho é transmitido integralmente.

*
*
*

Sumarizando os resultados obtidos com a análise colorimétrica: O filtro «azul» aparece, na verdade, como azul à luz média diária, pois o seu comprimento de onda dominante está no azul; no entanto, o azul do filtro está um pouco deslocado para o lado do verde (aproximadamente a $590 \text{ m}\mu$ é que se pode considerar a transição das duas côres). O filtro «amarelo» é amarelo à luz média do dia, o seu comprimento de onda dominante está aproximadamente no amarelo médio. O filtro vermelho é, como disse, uma côr púrpura. A côr vermelha do pião colorimétrico (v. atrás *Processo do pião colorimétrico*) é também a pior das côres dos discos. Reconhece-se que realmente as côres vermelhas devem ser as mais difíceis de realizar com precisão.

* * *

A nomenclatura de especificação triestimular das cores apresenta, além das propriedades já referidas, as de identificação e aditividade ⁽¹⁾ de duas ou mais cores. Duas cores serão iguais quando as suas especificações triestimulares forem iguais, isto é, se

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \bar{x}ET_1d\lambda &= \int_0^{\infty} \bar{x}ET_2d\lambda \\ \int_0^{\infty} \bar{y}ET_1d\lambda &= \int_0^{\infty} \bar{y}ET_2d\lambda \\ \int_0^{\infty} \bar{z}ET_1d\lambda &= \int_0^{\infty} \bar{z}ET_2d\lambda;\end{aligned}$$

na prática pode substituir-se $\int_0^{\infty} \bar{x}ETd\lambda$ para um certo intervalo, por exemplo o visível, por $\Sigma \bar{x}ET\Delta\lambda$, etc., podendo ser $\Delta\lambda$ igual a 5 ou 10 $m\mu$.

O cálculo da especificação de um conjunto aditivo de estímulos cromáticos, dadas as especificações de cada um dos estímulos componentes, é muito simples: Se as respectivas especificações forem $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots x_n, y_n, z_n$, a especificação do estímulo composto dos n estímulos simples é $\Sigma_1^n x_i, y_i, z_i$. Foi esta segunda propriedade que permitiu a especificação da cor dos filtros do pigmentómetro, visto que a sua absorção se estende a grandes porções do espectro. Para o conjunto de dois filtros não é possível, porém, adicionar simplesmente os valores obtidos para x, y, z , pois para cada um não se trata de um estímulo simples, mas de estímulo complexos que se estendem a uma porção diferente do espectro. Isto é, para se saber a cor de dois ou mais dos filtros, empregados conjuntamente, é necessário multiplicar os valores de $\bar{x}E, \bar{y}E$ e $\bar{z}E$ referentes ao iluminante C pelas transmissões de cada um dos componentes. Por exemplo, para o caso da combinação dos dois filtros azul e vermelho é preciso achar os valores respeitantes ao iluminante C de $\bar{x}ET_{az}T_v, \bar{y}ET_{az}T_v, \bar{z}ET_{az}T_v$ e depois prosseguir os cálculos como para o caso de um único filtro. Calculei por este processo

(1) Segundo a « Comissão Internacional de Iluminação » e Judd.

as combinações de filtros: azul-vermelho, amarelo-vermelho e azul-amarelo-vermelho; são estas combinações que aparecem freqüentemente na prática, sobretudo a 2.^a e 3.^a combinações.

Transmissão luminosa e côr do filtro azul-vermelho. — Procedendo da maneira indicada, obtém-se a partir das curvas de transmissão unidade os valores da *Tabela IV*.

TABELA IV

λ	$\bar{x} \text{ ET}_{ax} T_v$	$\bar{y} \text{ ET}_{ax} T_v$	$\bar{z} \text{ ET}_{ax} T_v$
400	0	0	0
10	296	8	1415
20	1145	34	5503
30	2781	113	13575
40	3681	243	18463
50	3606	408	19008
60	3076	635	17659
70	2028	945	13365
80	966	1406	8217
90	306	1983	4436
500	42	2213	2288
10	67	2274	1140
20	399	4470	493
30	1060	5524	270
40	1983	6514	139
50	3163	7264	64
60	4530	7582	30
70	5764	7200	16
80	6548	6217	12
90	6845	5049	8
600	6643	3877	5
10	0	0	0
	<hr/> 54929	<hr/> 63959	<hr/> 106106

A partir desta tabela encontram-se os valores das coordenadas tricromáticas

$$\begin{aligned} x &= 0.24413 \\ y &= .28427 \\ z &= .47160. \end{aligned}$$

A transmissão luminosa é $T_{axv} = 0.6396$ e para comprimento de onda dominante vem $\Lambda_{axv} = 484.912$, ou seja, por aproximação, $\Lambda_{axv} = 484.9 \text{ m}\mu$. O valor da pureza, calculada como para um só filtro é $p = 0.1922$, por aproximação $p = 0.19$.

Para o observador-padrão a combinação dos dois filtros uni-

dade azul e vermelho tem uma transmissão luminosa 0.6396 e a cor é a resultante da combinação adicional de luz média do dia e luz pura de comprimento de onda 484.9 $m\mu$ na proporção de brilho respectivamente de 0.81 para 0.19.

Transmissão luminosa e cor do filtro amarelo-vermelho.
— A Tabela V mostra a especificação triestimular respeitante ao conjunto dos filtros amarelo e vermelho por unidade.

TABELA V

λ	$\bar{x} ET_{am} T_v$	$\bar{y} ET_{am} T_v$	$\bar{z} ET_{am} T_v$
400	0	0	0
10	91	2	437
20	504	15	2421
30	1699	69	8294
40	2768	183	13884
50	2942	333	15511
60	2679	553	15381
70	1869	871	12317
80	936	1361	7961
90	309	2004	4483
500	44	2852	2401
10	72	3906	1228
20	453	5079	560
30	1224	6379	312
40	2303	7566	161
50	3682	8456	74
60	5292	8857	35
70	6773	8461	19
80	7937	7536	15
90	8589	6335	10
600	8949	5316	7
10	8325	4176	2
20	7070	3153	2
30	5309	2190	
40	3693	1443	
50	2349	886	
60	1361	504	
70	708	259	
80	369	134	
90	171	62	
700	82	29	
10	39	14	
20	19	6	
30	8	3	
40	3	2	
50	2	1	
60	1	1	
70	1		
	87686	88435	85515

Os valores que se encontram para as respectivas coordenadas são

$$x = 0.33514$$

$$y = .33801$$

$$z = .32685$$

A transmissão luminosa dos dois filtros conjuntamente é, como se vê pela tabela, $T_{amv} = 0.8844$. Para comprimento de onda dominante encontra-se $\Lambda_{amv} = 579.586$, aproximadamente $\Lambda_{amv} = 579.6 \text{ m}\mu$. A pureza calculada é $p = 0.1821$, por aproximação $p = 0.18$. A pureza é da mesma ordem da combinação azul-vermelho, bem como da dos filtros isolados, exceptuando o vermelho.

O conjunto dos filtros amarelo e vermelho unidade é visto pelo observador-padrão como transmitindo 0.8844 de energia luminosa e corresponde à combinação de luz do iluminante C e radiação pura de comprimento de onda 579.6 mμ na proporção de brilho de 0.82 e 0.18, respectivamente.

Transmissão luminosa e côr do filtro azul-amarelo-vermelho. — O conhecimento da côr do conjunto dos três filtros é talvez ainda mais importante que o de cada um deles, pois, segundo os autores do pigmentómetro, o conjunto dos três filtros da mesma graduação e que dá a côr neutral ou «preto».

A partir das três curvas dos filtros simples calculei, da maneira habitual, os valores da *Tabela VI*.

Da tabela extraem-se

$$x = 0.25912$$

$$y = .32149$$

$$z = .41939$$

e a partir destes coeficientes obtém-se as especificações da côr. A transmissão luminosa dos três filtros unidade conjuntamente é $T_{azamv} = 0.6297$. O comprimento de onda dominante é $\Lambda_{azamv} = 492.176 \text{ m}\mu$, isto é, cêrca de $492.2 \text{ m}\mu$; o comprimento de onda dominante está entre o azul e o verde, na respectiva zona de transição. Para a pureza obtém-se $p = 0.2009$, aproximadamente 0.20.

O observador-padrão vê o conjunto dos três filtros unidade como possuindo uma transmissão luminosa de 0.6297 e a luz

transmitida tem a mesma cor que a combinação aditiva de luz do iluminante C (luz média diária) e luz pura de comprimento de

TABELA VI

λ	$\bar{x} ET_{ax} T_{am} T_v$	$\bar{y} ET_{ax} T_{am} T_v$	$\bar{z} ET_{ax} T_{am} T_v$
400	0	0	0
10	91	2	437
20	504	15	242
30	1699	69	8294
40	2768	183	13884
50	2942	333	15511
60	2679	553	15381
70	1835	855	12095
80	902	977	7675
90	293	1896	4241
500	41	2158	2231
10	66	2233	1119
20	399	4470	493
30	1060	5524	270
40	1983	6514	139
50	3163	7264	64
60	4530	7582	30
70	5764	7200	16
80	6548	6217	12
90	6845	5049	8
600	6643	3877	5
10	0	0	0
	50755	62971	82147

onda 492.2 $m\mu$ na proporção de brilho de 0.80 para 0.20, respectivamente.

*

*

*

A expressão objectiva da cor dos filtros do pigmentómetro levou a resultados um tanto inesperados. Na correspondência entre o comprimento de onda da luz e o nome da respectiva impressão pessoal seguiu a demarcação do espectro que é utilizada, na América (1) por exemplo para o caso do fotómetro de HARDY, a que já fiz referência. Mas é evidente que não há de forma alguma uma demarcação natural: é difícil distinguir entre

(1) Tal como se vê em gráficos da Gener. Electr. C.º.

o azul e o violeta, por exemplo, ou entre o alaranjado e o amarelo. Por isso, muitos autores consideram no espectro visível apenas o azul, verde, amarelo e vermelho como diferindo sensivelmente entre si. Só usando o comprimento de onda é que não pode haver divergências. A consideração de um observador-padrão e de uma especificação cromática, sempre a mesma, concorre para que se atinja a certeza na nomenclatura da cor; com o método internacionalmente seguido, pode dizer-se que se chegou a uma objectivação suficiente para os usos da prática.

O processo de manipulação dos dados não parece, portanto, susceptível de introduzir erros sensíveis nos resultados atrás expostos. Os maiores erros podem aparecer por as curvas de transmissão serem apenas aproximadas. Como os gráficos indicam (figs. 1, 2, 3 e 4) o erro cometido não vai nos piores casos além de 5^o/_o, em regra. É possível que em certos casos os erros sejam provocados por má graduação das escalas, como sucede talvez para o caso dos filtros 20 azul e amarelo. Pode também acontecer que seja apenas um erro cometido quando da marcação das chapas, o que parece menos provável, dada a regularidade das diferenças.

Recapitulando e comparando os resultados obtidos para os três filtros e suas combinações, verifica-se que para todos a pureza anda à volta de 0.20 quando o estímulo heterogéneo é a luz média diária ou o correspondente iluminante C; exceptua-se o filtro «vermelho», cuja pureza é negativa, como se viu. O filtro «azul» é o de maior pureza (aproximadamente 0.23) seguindo-se-lhe o «amarelo» e a combinação «azul-amarelo-vermelho» (0.20), depois as combinações «azul-vermelho» (0.19) e «amarelo-vermelho» (0.18). Estas quantidades têm o significado explicado atrás, a propósito de filtro vermelho. Como se vê, a pureza dos vários filtros e combinações de igual graduação do pigmentómetro é equivalente, excepto no «vermelho». É evidente que a pureza aumenta com a graduação do filtro, visto que uma parte da luz «branca» vai sendo selectivamente absorvida de acôrdo com a lei de LAMBERT.

Quanto à cor dominante (luz homogénea de comprimento de onda dominante) é cerca de 487 $m\mu$, isto é, luz azul, para o filtro «azul»; cerca de 569 $m\mu$ para o filtro «amarelo», em pleno amarelo do espectro; o filtro «vermelho» tem um comprimento de onda dominante no verde, em 502 $m\mu$, mas associado com a

pureza negativa. Para as combinações de filtros, a combinação «violeta» («azul-vermelho») tem como côr dominante luz de comprimento de onda $485\text{ m}\mu$ isto é, azul um pouco mais arroxeado que o do filtro «azul»; a combinação «alaranjado» («amarelo-vermelho») tem uma côr dominante aproximadamente em $580\text{ m}\mu$, no amarelo-alaranjado; a combinação «preto» («azul-amarelo-vermelho») não tem côr neutral — com o iluminante C — pois mostra côr dominante no azul-esverdeado, em $492\text{ m}\mu$, com uma pureza relativamente grande.

A transmissão luminosa dos vários filtros e suas combinações é bastante diferente de uns para outros. O «amarelo» transmite aproximadamente 0.992 (ou, em percentagem, 99.2 %); seguem-se o «vermelho» com 0.891; o «alaranjado» com 0.884; o «azul» com 0.741; o «violeta» com 0.640; finalmente, o «preto» com 0.630. O filtro «azul» e suas combinações é que transmitem menos, com o «amarelo» dá-se o inverso. Os filtros não são, portanto, equivalentes quanto à transmissão luminosa, embora sejam quanto à pureza (com excepção do «vermelho»). Esta falta de equivalência, conjuntamente com a côr não-neutra da combinação dos três filtros em iguais gradações — constituem faltas graves que apresenta o pigmentómetro quando com êle se pretendam efectuar medidas absolutas da côr.

Pela análise detalhada que pretendi levar a efeito, sobre cada um dos filtros do pigmentómetro e suas combinações, parece poder-se concluir que o aparelho apenas serve directamente para determinações relativas à sua escala arbitrária; em princípio, é possível, sempre que se queira, reduzir as unidades absolutas da sua escala ao sistema de colorimetria adoptado. Para isso era preciso que os padrões «brancos» usados no aparelho fôsem realmente brancos, isto é, iguais a uma superfície branca de carbonato e óxido de magnésio — o padrão internacional. Ora os cartões «brancos» do aparelho não são iguais ao branco-padrão, segundo parece por observação directa. O sistema óptico altera a côr dos objectos, mas, como se vêem ao mesmo tempo os termos de comparação pelo mesmo sistema, não deve resultar daqui grande diferença. Uma perturbação, sem dúvida muito mais importante, é devida à qualidade deficiente dos filtros: o observador é levado insensivelmente a tomar a combinação dos três filtros como tratando-se de autêntica côr neutral.

Se as condições apontadas se não realizassem era, portanto, fácil a redução dos dados ao sistema colorimétrico. Multiplícam-se os logarítmos da absorção em cada ponto (de 10 em 10 $m\mu$) pelas respectivas unidades da escala do pigmentómetro, depois procedia-se como para o caso da unidade — achava-se a transmissão e entrava-se com ela para a obtenção de tabelas de especificação das constantes tricromáticas como as que estão expostas atrás. Destas tabelas extraem-se da maneira habitual as constantes de especificação da cõr. Contudo, com o aparelho tal como está não é aconselhável proceder a estes cálculos.

*

* *

Além da cõr dos filtros e das outras constantes colorimétricas, tem também importância quando se usa o pigmentómetro a possível exactidão com que se podem realizar as respectivas combinações. Verifiquei a este respeito que um observador treinado pode levar facilmente a exactidão até 0.2 da escala, precisão muito maior do que a que é possível atingir com qualquer das tabelas em uso. Aproximações até 0.1 são já mais difíceis e só em casos de cõres claras (com pouco «preto») é possível atingir esta precisão.

Para a determinação da *cõr da pele* apenas as primeiras 3 unidades e decimais são usualmente empregadas para populações como a portuguesa; nestas condições, é possível levar a aproximação até 0.1 da escala, principalmente quanto à combinação dos três filtros, ou seja, quanto ao pretense «preto». Para o «preto», como a transmissão luminosa da combinação é menor do que para as outras combinações ou filtros isolados, uma diferença de 0.1 ou 0.2 da escala é já perfeitamente perceptível. Por esta e outras razões, a gradação da combinação dos três filtros constitui o valor empregado para fins comparativos, como exporei adiante.

Para a *cõr do cabelo* o instrumento presta ainda bons serviços. Como há mais cõr neutra, já a aproximação não se pode fazer em regra a mais de 0.2 da escala. Também aqui o «preto» é que é mais fácil de obter com exactidão. No caso da determinação da pigmentação dos cabelos, o branco-padrão

é constituído por um pequeno feixe de cabelos brancos fornecidos conjuntamente com o aparelho. Este padrão tem uma leve tinta leitosa de queratina. É evidente que para a cor do cabelo não se usa, portanto, o branco-padrão internacional. Adiante terei ocasião de voltar a este assunto.

Tanto para a medida da cor da pele como para a dos cabelos, é preciso intercalar um diafragma que reduz a quantidade de luz. O diafragma faz parte do aparelho e só com ele é possível levar a aproximação até 0.1 ou 0.2.

*

* *

Para a cor dos olhos é fornecido com o pigmentómetro um fundo que vagamente pode ter aparência duma estrutura iriana, com estrias e a pupila ao centro, sendo o resto de cartão «branco-padrão». Verifiquei, porém, que são impraticáveis as medidas directas da cor da iris com ou sem o «fundo», em virtude da natural dificuldade de assestar durante tempo suficiente o aparelho em direcção a uma vista e principalmente porque a iris raramente tem uma só cor.

É necessário, como já referi no princípio deste capítulo, apreciar a cor da iris sempre em relação à sua estrutura. A iris compõe-se de um estroma, no todo ou em parte revestido anteriormente por um endotélio, e de um epitélio posterior retiniano. O epitélio posterior é sempre mais ou menos intensamente pigmentado, excepto nos albinos puros, e o pigmento é castanho a negro, conforme o estado de agregação. O estroma pode possuir cromatóforos em maior ou menor quantidade e apresenta uma estrutura mais ou menos complicada. Na face anterior nota-se sempre uma elevação anular que divide a iris em duas zonas: uma *interna* ou *peripupilar*, outra *externa* ou *ciliar*. A estrutura da *zona interna* é, em regra, simples, e a sua coloração é tão intensa, ou mais, do que a da *zona externa*. Nos olhos de cor misturada a zona interna é constantemente, ou quasi constantemente, de tom castanho ou amarelado, mais ou menos escuro, mais ou menos claro. Em olhos castanhos é sempre castanha, e em muitos olhos azuis é amarelada ou acastanhada.

Nem sempre é possível delimitar bem a zona interna. O anel peripupilar é a maior parte das vezes de forma circular com um contôrno em zig-zag e, em certos olhos de côres misturadas, o anel é incompleto em maior ou menor extensão. O que é importante, porém, é que *na zona interna é que se manifestam as possibilidades de realização pigmentar que possui a iris*. Quando se queira usar um número como representativo da côr mais escura da iris, procura-se o que corresponde à zona interna.

A zona externa apresenta duas estruturas fundamentais: uma de tipo radiado, com estrias radiais mais ou menos aparentes, outra com trabéculas entrecruzadas de forma a que entre elas podem resultar criptas ou depressões. Os olhos com trabéculas têm, em regra, maior mistura de côres; as criptas dos olhos castanhos, quando profundas, são azuis ou esverdeadas. A zona interna mostra quási sempre estrutura radiada (estrias). Outro elemento sempre presente na estrutura iriana são os círculos externos, próximo do bordo externo da iris. Estes círculos, segundo as minhas observações, são sempre aparentes desde que incida sôbre a retina uma luz forte e o estroma de iris tenha uma certa espessura, e estão em relação, muito provavelmente, com a contractilidade da iris e alargamento da pupila. Muitas vezes os círculos são incompletos, em certos casos quási invisíveis quando a estrutura da zona externa é trabecular complicada. Nos olhos medianamente escuros tornam-se mais aparentes, pois em regra são mais claros que o resto da zona externa e são freqüentemente de côr esverdeada-acastanhada.

Como elementos inconstantes e mais ou menos raros, existem ainda na estrutura de certas iris, extensões mais ou menos consideráveis em que o estroma é mais espesso que no resto, com formas e tamanhos variados, pontuações, pequenas «placas», ou anéis de pontuações alongadas. A coloração dêstes elementos é quási sempre diferente, sobressaindo do resto.

Diferentes destas pontuações são umas manchas, geralmente pequenas, sempre mais escuras que o resto da iris, que representam aparentemente os pequenos nevos de coloração escura que em regra se encontram nalguns pontos da pele.

O estudo da pigmentação iridiana deve necessariamente ser feito conjuntamente com o da estrutura, como se infere facilmente do que expus acima, e como representativa da côr mais

escura que o genotipo individual permite realizar (em reacção com o «meio») deve tomar-se a côr da zona interna.

Para a determinação da côr pode-se usar a escala do pigmentómetro referida a termos de comparação. O método que empreguei consiste no seguinte: Desenha-se esquemáticamente a estrutura da iris dos dois olhos, observando cuidadosamente com uma lupa. Para cada zona de coloração diferente acerta-se tanto quanto possível a côr pela escala de SALLER considerando em cada um dos desenhos desta tabela apenas uma porção de coloração mais ou menos uniforme. As côres da tabela são depois medidas da maneira habitual com o pigmentómetro (cf. Tabela VII). É possível, assim, determinar as colorações da zona interna da iris, conseguindo-se uma certa aproximação, sobretudo para o «preto» da escala, que pode ir até 0.2 e tem probabilidade de ser à volta de 0.5.

Aos olhos azuis puros corresponde, como é sabido, a ausência de pigmento no estroma da iris, ao passo que o pigmento presente no epitélio posterior, visto através o estroma e conjuntamente com os elementos dêste, dá a coloração azul. As côres amarela—castanha—castanha-negra aparecem quando o estroma é também pigmentado. Como se vê por esta seriação, as pigmentações serão mais diferentes no tom que na côr, isto é, têm principalmente diferenças de intensidade. Nos olhos verdes a pigmentação amarela-castanha é em pequena quantidade e fica, portanto, permanecendo a impressão azul do epitélio posterior conjuntamente com a do pigmento anterior, estromático, o que dá a impressão de verde. Olhos com azul e castanho (ou amarelado) ou verde e castanho, são devidos à disigual distribuição do pigmento ou pigmentos do estroma e, segundo as observações efectuadas, estão associados constantemente a estruturas em que a espessura do estroma é diferente nos diversos pontos (maior nas áreas castanhas ou amareladas). Coloração azul-acinzentada pode facilmente aparecer quando o estroma é muito espesso, embora despigmentado, ou quando em estromas espessos há uma ténue camada pigmentada.

Na Tabela VII estão inscritos os valores em unidades da escala do pigmentómetro correspondentes aos vários termos da escala de SALLER. São estes os valores atribuídos à côr da zona interna e que serão considerados no capítulo seguinte. As letras da primeira coluna à esquerda são as da tabela de SALLER.

Quando há uma côr geral quási uniforme apenas esta foi determinada, noutros casos foram consideradas várias zonas em separado. Sempre o 1.º número da esquerda representa a

TABELA VII

Tabela de Saller	Côr geral	Zona interna	Zona média	Zona externa	
P ₁	20.5 21.0 19.5				Prõpriamente, côr em volta da pupila.
P ₂	19.5 20.5 19.0				
P ₃	19.0 20.5 17.8				
P ₄	19.0 20.8 16.7				
P ₅	18.0 20.0 15.0			16.0 18.5 15.5	
P ₆		17.3 19.3 14.5	15.5 19.7 14.3	15.0 15.5 14.0	
P ₇		17.2 19.3 14.2	14.2 19.0 14.2	14.0 18.0 14.8	
P ₈		17.0 19.0 14.8	12.0 13.2 11.2	13.3 14.0 13.0	
M ₁		17.5 20.0 15.0		15.3 18.0 16.3	
M ₂		17.0 18.7 13.8		13.8 17.5 16.7	
M ₃		15.2 19.5 14.3	14.3 19.5 14.0	14.0 18.0 17.5	
M ₄		18.2 19.8 16.3	15.6 19.5 15.0	15.3 18.4 17.2	
M ₅		17.4 19.2 14.7	14.5 19.0 14.7	14.3 18.0 16.0	
M ₆		» » »	11.0 18.0 11.5	» » »	≈ a M ₅ . Z. média círculo amarelo.
M ₇		13.4 16.5 12.0		13.3 16.3 15.5	
M ₈		16.5 19.0 14.0		12.7 13.7 15.8	
M ₉		19.0 20.5 16.5	18.0 20.0 15.7	16.4 18.8 17.0	
M ₁₀		17.9 20.0 15.0		15.8 17.2 16.5	
M ₁₁		14.5 16.9 12.8		14.0 13.2 13.5	
M ₁₂				15.0 17.3 16.5	Z. interna e média ≈ a M ₅ .
M ₁₃		17.2 19.0 14.5	11.5 16.3 11.8	13.5 17.2 16.4	
M ₁₄		17.0 19.2 14.7	12.4 18.2 13.0	13.8 18.0 17.0	
M ₁₅		11.7 14.7 11.5		14.0 15.0 15.5	
M ₁₆		17.0 19.0 14.7	8.0 8.3 8.1	12.9 13.4 14.8	Nas pontuações quási branco.
M ₁₇		10.8 14.5 11.0		12.7 14.4 15.0	
M ₁₈		14.5 19.9 16.7	11.0 16.5 11.2	13.7 18.5 16.9	Z. média em pontuações.
M ₁₉		12.0 16.7 14.4	9.7 12.5 10.0	11.8 15.0 14.0	» » » »
M ₂₀		13.4 19.3 12.9	11.0 13.8 11.2	13.0 14.0 14.6	Z. média muito estreita.
M ₂₁		12.0 16.8 14.2	9.8 12.0 10.1	11.2 12.1 11.9	
M ₂₂		6.2 6.8 6.0		10.3 9.2 9.7	
S ₁		6.3 6.7 6.0		9.1 8.0 9.5	
S ₂		» » »	6.1 6.3 6.0	» » »	Z. interna e externa ≈ a S ₁ .
S ₃		11.2 13.5 13.2	6.5 7.3 6.8	16.4 16.4 16.9	
S ₄		11.2 13.3 13.2	6.0 6.2 6.1	14.5 14.5 15.0	Z. média com pontuações.
S ₅	16.5 16.3 17.0				Z. interna com algumas estrias quási brancas.
S ₆		17.2 14.8 15.5	12.1 9.6 13.1	15.6 15.0 16.4	
S ₇		16.2 14.8 15.0		14.4 14.4 15.2	
S ₈		14.1 11.6 13.0	8.2 7.2 9.5	10.5 9.9 12.9	Z. média em pontuações.
S ₉		6.4 6.6 6.3		10.2 10.0 12.5	
S ₁₀	6.3 6.5 7.3			10.0 10.0 12.7	Estrias quási brancas.

quantidade de «vermelho» em unidades do pigmentómetro, o 2.º representa o «amarelo» e o 3.º o «azul». O menor dos três números representa o pretense «preto». Aos olhos pura-

mente azuis corresponde uma côr 0, visto que apresentam ausência de pigmento anterior. Desde que haja uma pequena zona diferente (sempre a zona interna, em primeiro lugar) atribui-se-lhe o valor correspondente.

Com o número de tons da escala e seus intermediários, é fácil atingir uma certa precisão e é de crer que este método seja superior ao que consiste simplesmente em fazer comparações globais com as tabelas; além desta razão, obtêm-se números que se prestam melhor para a resolução de certos problemas do que simples categorias arbitrárias.

*

* *

Da análise efectuada ao pigmentómetro resulta a conclusão que é possível empregá-lo com vantagem em relação às habituais tabelas de pigmentação. O processo está, porém, longe de ser perfeito. Os filtros, para serem mais exactos deviam ser equivalentes, no sentido das suas constantes colorimétricas, e para a côr neutra ou «preto» era mais conveniente, parece, o uso de vidros apropriados de côr neutra. Com um branco-padrão igual ao padrão internacional e uma superfície estriada, deste branco, para os cabelos e, além disso, um sistema óptico de confiança — o aparelho passaria a ser muito mais perfeito e constituiria um dispositivo próprio para determinações de pigmentação.

Não era possível por intermédio de escalas obter facilmente as indicações quantitativas que obtive. O novo critério a adoptar na técnica pigmentométrica é o de abandonar tanto quanto possível as escalas de pigmentação para se usarem métodos quantitativos. Os tintofotómetros, desde que fossem construídos com base em estudos práticos e atendendo à nova nomenclatura da côr, seriam satisfatórios. Tal como existe, o de LOVIBOND presta bons serviços nalguns casos de determinações quantitativas, como está exposto no capítulo seguinte. É de desejar, contudo, um progresso no sentido acima apontado.

O escurecimento com a idade

Uma das maiores perturbações introduzidas no estudo da hereditariedade da pigmentação no homem é, sem dúvida, causada pela alteração da cor com a idade. Quando se estudam genealogias obtêm-se dados referentes a várias idades; esses dados não são directamente comparáveis entre si, em virtude de não se saber a correcção a efectuar para os reduzir à mesma idade, ao mesmo estado de desenvolvimento relativo.

Outros caracteres descritivos e métricos referentes ao homem sofrem também a influência do crescimento ou desenvolvimento individual. Ao lado da natural dificuldade dos estudos hereditários no homem, o crescimento é, assim, uma causa de julgamentos inseguros. Uma grande parte da literatura sobre hereditariedade no homem, embora represente um notável esforço, ressentem-se desta e outras condições particulares.

O efeito do crescimento podia ser completamente eliminado se os estudos se realizassem somente em adultos, ou se, estudando indivíduos de todas as idades, se conhecesse a curva de crescimento de cada carácter, para cada genótipo em relação com diferentes «meios». Pela primeira alternativa perder-se-ia muito material que doutro modo pode ainda dar diversas e importantes indicações, o segundo processo é quasi irrealizável. De maneira que, ou o observador espera para a publicação dos resultados todo o tempo necessário ao completo desenvolvimento dos indivíduos que estuda — e renunciará elle próprio possivelmente a obter os dados completos, quanto mais a estudá-los — ou então tem que recorrer ao estudo de populações actualmente existentes e daí inferir para o crescimento de cada indivíduo.

A partir da «tendência» das médias de populações de diferentes idades pode-se concluir por analogia para a «tendência» do valor individual com a variação da idade. Este método tem, portanto, como base, a substituição da curva do desenvolvimento individual pela de populações com a mesma idade. Para as árvores genealógicas supõe-se cada indivíduo com a idade adulta, para o que se faz a respectiva correcção. É evidente que a correcção obtida por este processo pode fornecer valores que

não correspondem exactamente aos do desenvolvimento individual efectivo mas é preferível a usarem-se simplesmente as medidas directas.

Para o caso da pigmentação, de que me ocupo, determinei a cor da pele, cabelo e olhos em alunos das Escolas primárias e Liceus, desde os 7 aos 22 anos, usando a escala arbitrária do pigmentómetro de LOVIBOND e calculando depois a média para cada grupo de indivíduos com intervalos de 1 ano. Necessariamente, tive que agrupar as determinações no centro das classes como é usual para as variáveis contínuas, como por exemplo os índices (e medidas) da Antropologia. Este processo introduz uma imprecisão relativamente grande, visto colocar em classes, distintas indivíduos cujas idades têm uma diferença apenas de dias; no entanto, o intervalo de 1 ano aparece quasi como natural nestes casos.

ROUTIL 1937 indica também uma correcção para a idade, mas procede de maneira diferente. A formulação que emprega dá ao método a impressão de maior precisão do que a que realmente possui. ROUTIL supõe o estado adulto atingido na classe dos 30-39 anos, cuja média designa por M_{III} . A média para cada idade a e para cada sexo, será M_a . A partir destas duas médias consegue uma correcção «Bereinigungszahl» B_a para a respectiva idade a e sexo, sendo $B_a = \frac{100 \cdot M_a}{M_{III}}$. Para cada medida individual b_a (do mesmo sexo a que pertencem M_{III} , M_a e B_a) acha a relação $\frac{100 \cdot b_a}{x} = B_a$. A x chama então a medida corrigida («bereinigte Masse»). É, portanto, $x = 100 \cdot \frac{b_a}{B_a}$, e este valor é tomado para figurar nas genealogias definitivas. Todo o julgamento ulterior se baseia no valor corrigido x e não no observado b_a .

É fácil verificar que $x = b_a \cdot \frac{M_{III}}{M_a}$, isto é, o valor corrigido não é mais que o valor individual observado multiplicado pela relação entre a média para a classe adulta e a da classe-idade a que pertence o individuo. Pode também ver-se que sendo $x/b_a = M_{III}/M_a$ este método supõe um «crescimento» individual proporcional à relação entre as médias.

Uma outra correcção possível consiste em substituir o valor

observado pelo que se obtém adicionando-lhe a diferença entre a média para os adultos e a média correspondente à idade considerada. Então, com a mesma notação, será $x = b_a + (M_{III} - M_a)$ e o valor assim obtido será menor do que se fôsse calculado pelo processo de RUTIL, quando a média adulta é maior que a média da idade considerada.

O processo de RUTIL não entra em conta com a forma da curva do crescimento; supõe simplesmente que este se faz segundo uma recta, visto que o valor de x é dado pela equação duma recta que passa pela origem das coordenadas. Não é, portanto, senão um processo aproximado e, quando há grandes diferenças entre a média para a classe adulta e a média para as várias idades, leva a valores demasiadamente altos que não devem corresponder à realidade.

Mais correcto do que qualquer destes processos é o que consiste em calcular a curva média do crescimento e achar os valores corrigidos a partir da respectiva equação. É este o processo seguido no presente trabalho. Além de se encontrar uma correcção para as genealogias, levantam-se ainda outras questões interessantes em relação com o crescimento e com a interpretação do escurecimento com a idade, como se verá.

*

* *

A determinação da cor da pele, cabelo e olhos foi feita da maneira indicada anteriormente. Nem sempre era possível efectuar as determinações com luz do Norte e em certos casos havia efeitos parasitários produzidos pelas construções vizinhas, etc., visto as determinações da cor da pele se terem efectuado no próprio local das escolas. Em todo o caso, procurei sempre realizar condições não muito diferentes das condições médias diárias, operando junto de uma janela e com o aparelho em posição tal que a luz vinha de cima e não de frente.

Para os olhos, no local apenas fazia a comparação entre a sua cor e a tabela empregada e para os cabelos a cor era determinada no laboratório numa amostra colhida próximo da região lambdoide.

Ao mesmo tempo que determinava a pigmentação, era feito

um desenho esquemático da estrutura da iris, como já referi, e anotadas certas particularidades relacionadas com a pigmentação, tais como a existência de sardas e nevos, côr das faces, abundância e forma dos cabelos e grau de pilosidade. Os dados obtidos referentes a estas particularidades serão possivelmente tratados noutros trabalhos.

No presente estudo apenas procuro exprimir por números o chamado *escurecimento com a idade*, (o «Nachdunkeln» dos autores alemães) servindo-me do pigmentómetro e designando directamente as côres observadas na sua gradação arbitrária. Todos os resultados gerais poderiam ser convertidos em medidas colorimétricas apropriadas, mas, como já tive ocasião de explicar, com os padrões «brancos» empregados e a pouca selectividade dos filtros, principalmente do vermelho, tal transformação não mereceria confiança.

Contudo, a resolução de certas questões, entre elas a do escurecimento com a idade, é em parte possível mesmo que se utilizem as unidades do pigmentómetro. O «preto» é dado pelo menor dos três filtros empregados e aproxima-se realmente da côr neutral desde que a gradação seja alta, o que acontece particularmente para a côr dos olhos e cabelo. O número representativo do «preto» será utilizado nos cálculos relativos ao escurecimento com a idade, pois é êle que principalmente interessa.

*

*

*

O escurecimento com a idade tem sido tratado por vários autores duma maneira qualitativa. Já VIRCHOW 1886 e outros autores antes dêle se ocuparam do problema. Igualmente se referem às mudanças na pigmentação com a idade UCHIDA 1904, TOCHER 1908, STANUS 1913, e mais recentemente HERSKOVITS 1926, HESCH 1931, JANKOWSKY 1932 a), KARVÉ 1931, CONITZER 1931, NEDRIGAILOFF 1926, BOAS e MICHELSON 1933, GODIN 1935, FISCHER 1936 (1). LENZ 1925, etc.

STANUS 1313 observou o escurecimento com a idade em pretos

(1) EM BAUR-FISCHER-LENZ 1936.

(Nyasaland). Segundo este autor, aparecem crianças filhas de pais pretos com a pele mais clara à nascença e o cabelo levemente acastanhado em vez de preto. Depois dá-se rapidamente o escurecimento da pele e cabelo (em menos de três meses); no entanto, a coloração definitiva só seria atingida cêrca dos 16 anos.

HERSKOVITS 1926 — estudando populações de diferentes idades e podendo ter os resultados uma outra interpretação — também verificou pelo método do pião um escurecimento com a idade na pele dos negros da América.

Segundo FISCHER 1936 e LENZ 1925 o escurecimento ocorre principalmente no cabelo e apenas nas populações em que houve mestiçagem de uma raça loira com uma escura. LENZ lançou a hipótese de que a mudança (escurecimento) da pigmentação com a idade é devida às hormonas sexuais, o que explicaria também o tom do cabelo de certos recém-nascidos, mais escuro à nascença do que daí a algum tempo. As hormonas da mãe, passando através da placenta, causariam o fenómeno.

GODIN foi o único que seguiu sempre os mesmos indivíduos, mas as suas determinações são também, infelizmente, de ordem qualitativa. Segundo GODIN, há mudança na côr dos cabelos depois dos 13 anos em 28% das pessoas e a modificação tem lugar no período pubertário, dos 15 aos 16 anos. Observou escurecimento tanto em cabelos loiros como castanho-claros, castanho-escuros e ruivos. Pelo contrário, GODIN diz que a côr dos olhos em regra se aclara quando da puberdade (45% dos casos), podendo também tornar-se mais escura, mas com menos frequência (18%). Pelo contrário, HESCH 1931, estudando populações de diferentes idades, conclui que há em regra um escurecimento da iris depois dos 7 anos e que para além dos 56 anos se torna novamente mais clara.

As opiniões diferem, pois, bastante, conforme o observador. O que parece seguro é que a pigmentação do cabelo pode variar com a idade. Quanto à côr da pele e olhos não existe a certeza. O escurecimento pode dar-se também em raças escuras puras, como deviam ser os pretos observados por STANUS. A explicação de LENZ e FISCHER é talvez incompleta, sobretudo quando pretendem atribuir todo o «Nachdunkeln» ao cruzamento de raças.

É evidente que o problema precisava ser aclarado fazendo

observações quantitativas, o que pretendi levar a efeito. Os resultados de tais observações são expostos a seguir e representam uma contribuição para a resolução do problema além de permitirem estabelecer a correcção para a idade, indispensável para o estudo da hereditariedade da pigmentação no homem.

A determinação do escurecimento com a idade

Quando se estuda o escurecimento com a idade têm que se considerar, por várias razões, os dois sexos em separado: por exemplo, é opinião corrente que as mulheres de várias regiões da Europa são em média mais fortemente pigmentadas que os homens.

Igualmente, é preciso tratar da cor da pele, cabelo e olhos em separado.

Cor da pele — β . — A pigmentação foi determinada na parte mediana interna do antebraço esquerdo. As observações abrangem rapazes de 8 a 22 anos e o número de casos é diferente de umas para as outras idades. A análise a que vou proceder refere-se principalmente ao filtro « azul » do pigmentómetro, que dá aproximadamente o preto. Para o caso da pele o filtro « azul » era sempre o que tinha a menor graduação e o « vermelho » o que tinha a maior.

O método usado consiste na determinação e análise de médias e da variação de populações de diferentes idades, mais ou menos equivalentes quanto à composição racial. Na *Tabela VIII* estão expostas as médias e desvios-padrões para cada idade; o número de observações que serviram para o cálculo destes estatísticos é o mesmo que se encontra na tabela seguinte (IX) na coluna n' . As médias foram calculadas pela fórmula directa

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n'}$$

em que \bar{x} representa a média (na notação de FISHER 1932), $\sum x$ a soma de todos os valores da variável e n' o número das observações.

O desvio-padrão foi calculado usando a fórmula

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

em que s é o desvio-padrão encontrado e $n = n' - 1$ representa o número de graus de liberdade.

Como se sabe, esta fórmula é superior à clássica, que não considerava os graus de liberdade (v. FISHER 1932 ou GOULDEN 1937).

TABELA VIII

Anos	Média	Desvio-padrão
8	1.98	0.40
9	1.82	0.26
10	1.96	0.38
11	1.85	0.35
12	2.13	0.65
13	1.79	0.40
14	2.01	0.39
15	2.16	0.74
16	2.02	0.51
17	2.00	0.57
18	1.94	0.49
19	2.10	0.65
20	2.03	0.57
21	1.90	0.86
22	1.60	0.46

As diferenças entre as médias dos vários anos são pequenas e irregulares, dando a impressão de não haver heterogeneidade. No entanto, para um julgamento seguro tem de se proceder a uma análise da variância (no sentido de FISHER 1932). Para o caso actual, a maneira de executar a análise encontra-se bem descrita em FISHER 1932, ou GOULDEN 1937, ou SNEDECOR 1934 (cf. também TAMAGNINI 1938). A equação fundamental é, conhecidamente:

$$\sum_1^{n'k} (x - \bar{x})^2 = \sum_1^k \sum_1^{n'} (x - \bar{x}_i)^2 + n' \sum_1^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad \dots \quad (1)$$

em que k representa o número de grupos, cada um contendo n' casos; \bar{x}_i é a média de cada grupo; \bar{x} a média geral e x os valores individuais da variável.

À soma dos quadrados dos desvios de x a partir da média chamarei, como é costumeado, simplesmente *soma de quadrados*.

Na equação (1) há a distinguir três somas de quadrados: $n' \sum_1^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2$ é a soma de quadrados entre os grupos e calcula-se facilmente atendendo a que (1);

$$n' \sum_1^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_1^k (T_i^2/n') - T_x^2/n'k \quad \dots \dots \dots (2)$$

e nesta igualdade T_i representa a soma dos valores da variável x para cada um dos k grupos e T_x é a soma de todos os valores de x em todos os k grupos.

O outro termo do segundo membro — $\sum_1^k \sum_1^{n'} (x - \bar{x}_i)^2$ — corresponde à soma dos quadrados dentro dos grupos e na prática não é preciso calculá-lo, obtendo-se por subtracção entre o primeiro membro da igualdade (1) e o segundo termo do segundo membro.

Ao primeiro membro de (1) chama-se soma de quadrados total e calcula-se utilizando a igualdade (3) (2):

$$\sum_1^{n'k} (x - \bar{x})^2 = \sum_1^{n'k} (x^2) - T_x^2/n'k \quad \dots \dots \dots (3)$$

A análise da variância ainda se pode efectuar quando o número de observações é diferente em cada grupo. As igual-

(1) A demonstração da igualdade (2) faz-se com facilidade. Com efeito, é:

$$\begin{aligned} n' \sum_1^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 &= n' \sum_1^k (\bar{x}_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}_i\bar{x}) = n' \sum_1^k (T_i^2/n^2) + \\ &\quad + n' \sum_1^k (T_x^2/n^2 k^2) - 2 n' \sum_1^k (T_i/n' \cdot T_x/n'k) \\ &= \sum_1^k (n' T_i^2/n^2) + (n'k T_x^2/n^2 k^2) - 2 [\sum_1^k (T_i/n') \cdot \sum_1^{n'} (T_x/n'k)] \\ &= \sum_1^k (T_i^2/n') + T_x^2/n'k - 2 T_x^2/n'k \\ &= \sum_1^k (T_i^2/n') - T_x^2/n'k \end{aligned}$$

visto que

$$\sum_1^k T_i = T_x \quad \text{e} \quad \sum_1^{n'} T_x = n' T_x$$

(2) A demonstração é semelhante à da nota (1):

$$\begin{aligned} \sum_1^{n'k} (x - \bar{x})^2 &= \sum_1^{n'k} (x^2 + \bar{x}^2 - 2x\bar{x}) = \sum_1^{n'k} (x^2) + \\ &\quad + \sum_1^{n'k} (T_x^2/n^2 k^2) - 2 \sum_1^{n'k} (x \cdot T_x/n'k) \\ &= \sum_1^{n'k} (x^2) + (n'k T_x^2/n^2 k^2) - 2 (T_x \cdot T_x/n'k) \\ &= \sum_1^{n'k} (x^2) - T_x^2/n'k \end{aligned}$$

dades (1), (2) e (3) continuam a valer substituindo n/k por $\sum_i^k n'_i$ em que n'_i se refere ao número de observações dentro de cada grupo (diferente de grupo para grupo). Da mesma maneira, nas referidas igualdades substitui-se n' por n'_i . Facilmente se reconhece que as equações fundamentais continuam a valer. No entanto, no caso de número diferente de observações em cada grupo e quando há heterogeneidade, perde-se uma certa parte da informação que se poderia colher a partir dos dados se houvesse o mesmo número em todos os grupos.

Na *Tabela IX* estão os valores necessários para se proceder à análise da variância da cor da pele (gradação do «preto» do pigmentómetro) para portugueses de 8 a 22 anos, sem qualquer mistura aparente com outras populações.

TABELA IX

Anos	T_i	n'_i	T_i^2/n'_i	$\sum_i^{n'_i} x^2$
8	41.5	21	82.01	85.17
9	31.0	17	56.53	58.04
10	33.4	17	65.62	64.70
11	38.8	21	71.69	74.10
12	64.0	30	136.53	148.64
13	39.3	22	70.20	73.49
14	46.3	23	93.20	96.57
15	42.9	19	96.86	102.70
16	46.4	23	93.60	99.30
17	41.9	21	83.60	89.99
18	33.0	17	64.06	67.96
19	21.0	10	44.10	47.98
20	8.1	4	16.40	17.37
21	11.4	6	21.76	25.36
22	4.8	3	7.68	8.10
	503.8	254	1003.74	1059.47

Outro ponto importante quando se procede à análise da variância é o da determinação do número de *graus de liberdade*. Como se sabe, o número de graus de liberdade pode considerar-se igual ao número de valores diferentes que pode tomar a variável mantendo-se os totais. Sendo n' casos, com um total T_x , o número de graus de liberdade é $(n' - 1)$; 1 valor

de x é fixo para que se mantenha $\sum_1^{n'} x = T_x$. Desta maneira, os graus de liberdade para a soma de quadrados total são $(\sum_1^k n'_i - 1)$, isto é, o número total de observações menos 1. Para a soma de quadrados entre os grupos, os graus de liberdade são $(k - 1)$. Por diferença obtêm-se os graus de liberdade referentes à soma de quadrados dentro dos grupos, que serão $[(\sum_1^k n'_i - 1) - (k - 1)] = \sum_1^k (n'_i - 1)$.

Para calcular as variâncias dividem-se as somas de quadrados pelos respectivos graus de liberdade. Assim se obtêm as chamadas somas de quadrados médias ou variâncias, referidas ao total, entre os grupos, e dentro dos grupos. O julgamento da variância entre os grupos faz-se comparando-a com a variância dentro dos grupos, considerando esta última como erro.

Da tabela IX extraem-se as seguintes somas de quadrados:

Soma de quadrados total

$$\begin{aligned}\Sigma (x - \bar{x})^2 &= 1059.47 - 503.8^2 / 254 \\ &= 60.20.\end{aligned}$$

Soma de quadrados entre os grupos

$$\begin{aligned}n'_i \Sigma_1^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 &= 1003.74 - 503.8^2 / 254 \\ &= 4.47.\end{aligned}$$

A soma de quadrados dentro dos grupos à igual à diferença entre estas duas.

A análise da variância propriamente dita está exposta na Tabela X. As variâncias entre os grupos e dentro dos grupos (ou nos grupos) servem para se calcular o estatístico F, dividindo a variância entre os grupos pela variância nos grupos, visto esta representar as flutuações devidas ao acaso. As tábuas de F estão calculadas de forma que apenas têm valores positivos maiores que 1, o que se consegue dividindo sempre a variância maior pela menor e atendendo aos respectivos graus de liberdade (n_1 refere-se sempre aos graus de liberdade da variância maior). Como a distribuição de F é conhecida (FISHER 1932 — 1/2 lg. nat. F; ou SNEDECOR 1934) vê-se se o valor obtido para F está contido dentro de um certo limite de significação, se está abaixo (ou acima) de uma certa significância.

Na tabela X e nas restantes referidas ao mesmo assunto

S. q. designa soma de quadrados; G. l. os graus de liberdade;
S. q. m. as somas de quadrados médias ou variâncias.

TABELA X

	S. q.	G. l.	S. q. m.	F	F 5%
Entre os grupos	4.47	14	0.319	1.369	2.13
Nos grupos	55.73	239	0.333		
Total	60.20	253	0.23794		

Como se vê pela tabela, $F = 1.369$. Na tabela de SNEDECOR vem

para $n_1 = \infty$
 $n_2 = 14$ $F = 2.13$, quando $P = .05$

Tem que se tomar $n_1 = \infty$ visto que se usou para denominador quando do cálculo de F a variância entre os grupos e nas tabelas acima de $n_1 = 24$ encontra-se apenas $n_1 = \infty$. O que se verifica é que o F obtido é muito menor do que o correspondente ao ponto 5%, ou seja, ao nível de significação. Uma particularidade interessante desta análise é a existência de uma variância entre as médias dos grupos maior que a variância dentro dos grupos. Só esta última pode ser considerada como erro, pois que apenas dentro dos grupos as flutuações se devem mostrar com carácter ocasional. A variância entre as médias dos grupos é, claramente, muito pequena em relação às flutuações do acaso.

Em todo o caso, o que interessa neste ponto é que o F obtido é menor do que o F significativo. Portanto, a julgar pelos dados conseguidos com o pigmentómetro e nas populações estudadas, *não há evidência de no sexo masculino existir um escurecimento com a idade da cor da pele entre os 8 e os 22 anos.*

Visto que há homogeneidade no conjunto das amostras observadas, podem-se considerar todas como pertencendo à mesma população e calcular-se uma média geral representativa de toda a população, bem como um desvio-padrão geral. *A média geral é:*

$$\bar{x} = 503.8 / 254 = 1.98$$

e o desvio-padrão geral:

$$s = \sqrt{0.23794} = 0.488.$$

Este desvio-padrão é a raiz quadrada da variância total — esta é obtida pela divisão da soma de quadrados total pelos respectivos graus de liberdade.

A significância de \bar{x} deve ser elevada; no entanto, para um julgamento mais seguro convém calcular o estatístico t :

$$t = \bar{x} / s_m,$$

em que

$$s_m = s / \sqrt{n'}$$

Para a média acima é:

$$\begin{aligned} t &= 1.98 \cdot \sqrt{254} / 0.488 \\ &= 64.66 \end{aligned}$$

e, como era de esperar, este valor é altamente significativo. Com efeito,

$$\begin{array}{ll} \text{para } P = .01, n = 200, & \text{é } t = 2.601 \\ & n = 300, \quad t = 2.592, \end{array}$$

isto é, os valores de t correspondentes aos graus de liberdade neste caso existentes (graus de liberdade representados por $n = n' - 1$) dados pelas tabelas de SNEDECOR ⁽¹⁾ são muito menores do que o valor encontrado, mesmo para o nível de significação 1% ($P = .01$). A probabilidade que um tal valor da média ocorra por acaso é, portanto, menor do que 1%, como era de esperar.

Igualmente se podia usar o *erro-padrão* (erro médio) da média, calculado da maneira habitual:

$$e_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n'}} = 0.0306.$$

Segundo as indicações desta análise da variância, conclui-se que os Portugueses adultos do sexo masculino (parece que desde os 8 anos a pigmentação da pele não sofre, em média, grandes

⁽¹⁾ Estas tabelas são uma extensão das de FISHER, que têm t para maior número de graus de liberdade.

alterações), têm em média uma pigmentação da pele com 1.98, aproximadamente 1.20, da escala do pigmentómetro (2).

*
* *
*

Para os filtros «amarelo» e «vermelho» foram obtidas nas mesmas observações, as médias da *Tabela XI*. Os números de observações para cada idade são, portanto, os mesmos da tabela para o «preto».

TABELA XI

Anos	F. amarelo	F. vermelho
8	2.52	3.00
9	2.32	2.81
10	2.54	2.96
11	2.34	2.79
12	2.75	3.29
13	2.37	2.85
14	2.65	3.16
15	2.99	3.37
16	2.67	3.09
17	2.51	3.14
18	2.63	3.24
19	2.73	2.98
20	2.78	3.13
21	2.55	3.10
22	1.97	2.60

Observando as diferenças das médias das várias idades, facilmente se crê que não deve haver heterogeneidade e, sendo assim, poder-se-iam calcular médias gerais como para o caso do «preto». Tais médias são: para o «amarelo» $\bar{x} = 2.58$ e para o «vermelho» $\bar{x} = 3.06$; de forma que a cor da pele para os Portugueses será, expressa na graduação do pigmentómetro:

$$3.06 : 2.58 : 1.98,$$

respectivamente para os filtros «vermelho», «amarelo» e «azul».

(2) Confirme o que disse no cap. anterior, isto só é válido como exactidão para um mesmo observador.

Côr da pele — ♀. — Os dados colhidos para o sexo feminino estendem-se entre os 7 e os 19 anos e dizem também respeito à pigmentação do ante-braço esquerdo. O número de observações é igualmente variável para cada idade e em regra maior do que para os ♂. As médias e desvios-padrões referidas à gradação do filtro «azul» estão na *Tabela XII*. Os números de observações para cada ano são os mesmos da tabela XIII, coluna n'_i .

TABELA XII

Anos	Média	Desvio-padrão
7	1.86	0.30
8	1.91	0.29
9	1.91	0.38
10	1.89	0.21
11	1.82	0.26
12	1.92	0.27
13	1.89	0.24
14	1.88	0.26
15	1.80	0.23
16	1.75	0.29
17	1.84	0.26
18	1.72	0.14
19	1.85	0.08

As diferenças entre as médias são pequenas, os desvios-padrões são também muito aproximados. Como para os ♂, procedi a uma análise da variância pelo processo descrito.

Os elementos para esta análise estão calculados na *Tabela XIII*.

TABELA XIII

Anos	T_i	n'_i	T_i^2/n'_i	
7	22.3	12	41.44	42.43
8	62.9	33	119.89	122.57
9	68.9	36	131.86	137.01
10	66.2	35	125.21	126.78
11	100.0	55	181.82	185.42
12	86.3	45	165.50	168.81
13	111.6	59	211.09	214.34
14	86.3	46	161.91	164.85
15	74.0	41	133.56	135.72
16	52.5	30	91.88	94.37
17	34.9	19	64.11	65.29
18	17.2	10	29.58	29.76
19	11.1	6	20.54	20.57
	794.4	427	1478.39	1507.92

A partir da tabela, obtém-se para a soma de quadrados *total*

$$\begin{aligned}\Sigma (x - \bar{x})^2 &= 1507.92 - 794.2^2 / 427 \\ &= 30.75\end{aligned}$$

e para a soma de quadrados *entre os grupos*

$$\begin{aligned}n_i' \Sigma_1^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 &= 1478.39 - 794.2^2 / 427 \\ &= 1.22.\end{aligned}$$

Manifestamente, a soma de quadrados entre os grupos é muito pequena, de forma que o resultado final deve ser a verificação de homogeneidade. Na *Tabela XIV* está expresso o resultado da análise.

TABELA XIV

	S. q.	G. l.	S. q. m.	F	F 5%
Entre os grupos	1.22	12	0.102	1.437	1.78-1.77
Nos grupos	29.53	414	0.071		
Total	30.75	426	0.07218		

Os valores de F que vêm nas tabelas são:

$$\begin{aligned}\text{para } P = .05 \quad n_1 &= 12 \\ n_2 &= 400 \quad F = 1.78\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n_1 &= 12 \\ n_2 &= 500 \quad F = 1.77\end{aligned}$$

Portanto, o valor de F obtido é inferior ao correspondente ao nível 5% — não há heterogeneidade.

Como para o masculino, também *para o sexo feminino não há heterogeneidade, isto é, entre os 7 e os 19 anos não se demonstra, com os processos usados, nenhum escurecimento com a idade.*

Sendo assim, é possível calcular uma média geral válida. O seu valor é:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 794.2 / 427 \\ &= 1.86\end{aligned}$$

e o desvio-padrão geral:

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{0.07218} \\ &= 0.269\end{aligned}$$

A média geral é representativa, como se vê calculando o respectivo t :

$$\begin{aligned} t &= 1.86 \cdot \sqrt{427} / 0.269 \\ &= 142.58 \end{aligned}$$

Para o caso em que $n = n' - 1 = 400$ é $t = 2.588$ no ponto 1%; para $n = 500$ $t = 2.586$, também no ponto 1%. A média é, portanto, altamente significativa, como era de esperar.

Podia-se calcular igualmente o *erro-padrão* da média:

$$e_{\bar{x}} = 0.0130.$$

*

* *

Outra questão que aparece é a da diferença entre as médias gerais dos dois sexes. É interessante verificar se existe qualquer diferença apreciável por meio destas determinações quantitativas, tanto mais que as diferenças na pigmentação até agora assinaladas entre os dois sexes são geralmente estabelecidas a partir de estatísticas que apenas consideram categorias de ordem qualitativa. Entre as duas médias há uma diferença

$$\begin{aligned} \bar{x}_m - \bar{x}_f &= 1.983 - 1.859 \\ &= 0.124. \end{aligned}$$

Para se saber o significado de uma diferença, o processo mais exacto consiste em achar o estatístico t correspondente:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{n_1 + n_2 + 2}}$$

em que

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}}$$

Nestas expressões as letras têm o significado que lhe tem

sido atribuído anteriormente; x_1 , bem como \bar{x}_1 e n_1 referem-se aos ♂ e x_2 , \bar{x}_2 e n_2 referem-se às ♀. No presente caso é:

$$s = \sqrt{\frac{60 \cdot 20 + 30 \cdot 75}{253 + 426}} = 0.3660$$

$$t = \frac{0.124}{0.3660} \cdot \sqrt{\frac{254 \cdot 427}{253 + 426 + 2}} \\ = 4.276$$

Nas respectivas tabelas não vem t para $n = n_1 + n_2 = 679$, mas vem para

$$P = .01 \quad n = 500 \quad t = 2.586 \\ n = 1000 \quad t = 2.581.$$

Portanto, o valor obtido para t é altamente significativo e a diferença entre as médias não pode ser atribuída ao acaso. Segundo os dados que obtive pelos processos descritos, os ♂ têm a pele mais escura que as ♀ e a diferença é de cerca de 0.1 da escala do pigmentómetro.

A interpretação desta diferença não me parece muito aparente. A sua grandeza não justifica que se façam hipóteses de ordem genética a que é costume recorrer, sem grande êxito, em tais casos. A cor da pele foi determinada no antebraço esquerdo, tanto num como noutro sexo. Na época em que foram efectuadas as determinações — Abril-Maio — já devia ter passado completamente, ou quasi, o efeito do calor e «sol» do verão anterior. Contudo, muitos dos rapazes apresentavam ainda vestígios de forte exposição aos agentes exteriores. As raparigas apresentavam este efeito menos frequentemente. Todos os casos em que era notório o efeito da exposição, não foram considerados, mas é possível que os resultados se ressintam destas causas. A diferença de 0.1, embora significativa, é, na verdade, pequena, mas sugere a crença de realmente haver um pouco mais de «preto» na pele dos ♂, mesmo atendendo a todas estas explicações. São necessárias mais determinações e em vários pontos do país antes de apresentar qualquer hipótese que não seja meramente especulativa.

Para os filtros «amarelo» e «vermelho» empregados na determinação da côr da pele das ♀ obtêm-se as médias da Tabela XV.

TABELA XV

Anos	F. amarelo	F. vermelho
7	2.29	2.93
8	2.36	2.97
9	2.44	3.05
10	2.35	2.92
11	2.23	2.82
12	2.39	2.93
13	2.33	2.82
14	2.33	2.62
15	2.17	2.69
16	2.16	2.60
17	2.19	2.74
18	2.07	2.47
19	2.37	2.67

As diferenças entre as médias das várias idades são pequenas e mais ou menos desordenadas, donde se conclui que é muito provável a homogeneidade da população quanto à côr medida pelos dois filtros, tal como para o «preto». A côr geral das ♀ portuguesas será, em unidades do pigmentómetro (as médias gerais para o «amarelo» e o «vermelho» são respectivamente 2.299 e 2.810):

$$2.81 : 2.30 : 1.86.$$

As médias do «amarelo» e «vermelho» são também maiores do que para os ♂ em cerca de 0.2 a 0.3 e as diferenças devem, igualmente, ser significativas. Os ♂ das amostras por mim analisadas são em média um pouco mais fortemente pigmentados do que as ♀.

Côr dos olhos — ♂. — A côr dos olhos foi determinada da maneira descrita anteriormente. Os dados aqui analisados referem-se apenas à zona interna, atendendo às razões expostas.

Outras conclusões interessantes se tirariam, sem dúvida, do estudo comparativo da estrutura e cor, mas esta parte fica reservada para trabalhos ulteriores.

A distribuição das observações quanto à idade é a mesma que para a pele. As médias e desvios-padrões para cada idade estão expostos na *Tabela XVI*. Os números de observações são os mesmos da tabela seguinte.

TABELA XVI

Anos	Média	Desvio-padrão
8	14.53	3.17
9	14.28	2.56
10	15.68	2.06
11	14.85	2.31
12	14.83	2.56
13	13.51	4.61
14	15.00	2.53
15	15.69	2.75
16	14.87	2.04
17	15.06	3.08
18	14.72	2.69
19	13.01	5.56
20	15.73	1.14
21	15.10	1.66
22	15.23	1.37

Não se observa qualquer variação regular das médias, de forma que parece não haver heterogeneidade. O desvio-padrão é bastante maior nalgumas idades, o que coincide quasi sempre com a existência de olhos puramente azuis, a que foi atribuído um valor 0. O cálculo das médias e desvios continua a ser feito por intermédio das fórmulas já descritas.

Tal como para a cor da pele, procedi a uma análise da variância. Os valores necessários para ela estão dispostos na *Tabela XVII*.

Para a soma de quadrados *total* obtém-se

$$\begin{aligned}\Sigma (x - \bar{x})^2 &= 57973.22 - 3784.0^2/257 \\ &= 2258.61\end{aligned}$$

e para a soma de quadrados *entre os grupos*

$$\begin{aligned}n'_i \Sigma_i^k (x_i - \bar{x})^2 &= 55811.23 - 3784.0^2/257 \\ &= 96.62.\end{aligned}$$

O valor da soma de quadrados entre os grupos é pequeno comparado com o total, de forma que é de esperar que não

TABELA XVII

Anos	T_i	n_i'	T_i^2/n_i'	$\sum_1^{n_i'} x^2$
8	305.1	21	4432.66	4635.13
9	242.8	17	3467.76	3555.42
10	256.3	17	3864.10	3931.81
11	326.8	22	4854.47	4966.82
12	459.7	31	6816.91	7014.81
13	297.3	22	4017.60	4463.89
14	344.9	23	5172.00	5372.15
15	298.1	19	4677.03	4812.95
16	342.0	23	5085.39	5176.94
17	331.4	22	4992.09	5191.68
18	250.3	17	3685.30	3801.15
19	130.1	10	1692.60	1970.67
20	62.9	4	989.10	993.03
21	90.6	6	1368.06	1386.88
22	45.7	3	696.16	699.89
	<u>3784.0</u>	<u>257</u>	<u>55811.23</u>	<u>57973.22</u>

haja heterogeneidade. A análise encontra-se na *Tabela XVIII*.

TABELA XVIII

	S. q.	G. l.	S. q. m.	F	F 5 ⁰ / ₀
Entre os grupos	96.62	14	6.901	1.295	2.13
Nos grupos	<u>2161.99</u>	<u>242</u>	<u>8.934</u>		
Total	<u>2258.61</u>	<u>256</u>	<u>8.8227</u>		

F é, neste caso, muito menor do que o correspondente ao ponto 5⁰/₀, visto que:

$$\text{para } n_1 = \infty \\ n_2 = 14 \quad P = .05 \quad F = 2.13,$$

Tem que se tomar $n_1 = \infty$ pela razão já apontada a propósito da cor da pele nos δ . Conclui-se, portanto, que há homogeneidade no material estudado.

Como para a cor da pele, no sexo masculino não se demonstra um escurecimento com a idade que se faça notar no aumento ou diminuição aparente do «preto» da zona interna dos olhos. É possível que haja uma certa variação na distribuição do pigmento, na dependência dos processos metabólicos do estroma da íris, ou de outras causas, mas tais variações não se fazem notar sensível-

mente no «preto» da coloração da zona interna de forma que depois dos 7 anos e até aos 22 se encontre um escurecimento médio evidente.

Como há homogeneidade, calculei a *média geral*:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 3784.0 / 257 \\ &= 14.72.\end{aligned}$$

O *desvio-padrão geral* pode também ser calculado a partir da soma de quadros total:

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{8.82269} \\ &= 2.970.\end{aligned}$$

O desvio-padrão é relativamente alto comparado com o da pele. De facto, a coloração dos olhos mostra uma grande variabilidade, desde a ausência de pigmentos na região anterior ou estroma da iris até ao castanho muito escuro.

É natural que a média geral tenha significância, o que se pode comprovar calculando o respectivo *t*:

$$\begin{aligned}t &= 14.72 \cdot \sqrt{257} / 2.970 \\ &= 79.488.\end{aligned}$$

Para $n=200$ é $t=2.601$ no ponto $P=.01$ e para $n=300$ é $t=2.592$ igualmente no ponto 1% . A média merece, portanto, confiança — é altamente significativa. Aliás, para média de tal grandeza e com o desvio-padrão encontrado bastava $n'=3$ para se obter um *t* significativo.

O *erro-padrão* da média é:

$$e_{\bar{x}} = 0.1075.$$

*

* *

As médias para os outros dois filtros (*Tabela XIX*) são um tanto semelhantes, e não mostram qualquer tendência com a idade, são mais ou menos desordenadas. Como para o «preto», é natural que não haja heterogeneidade no colectivo estudado;

as médias gerais são $\bar{x} = 18.81$ para o «amarelo» e $\bar{x} = 16.92$ para o «vermelho». A coloração geral da zona interna dos

TABELA XIX

Anos	F. amarelo	F. vermelho
8	18.66	16.80
9	18.74	16.95
10	19.59	17.41
11	19.03	17.33
12	18.91	16.77
13	16.90	15.13
14	19.26	17.30
15	19.46	16.63
16	19.17	17.15
17	18.99	17.27
18	18.75	17.02
19	16.73	15.14
20	20.15	18.25
21	19.33	17.20
22	19.93	18.00

olhos dos Portugueses, supondo que depois dos 22 anos não há escurecimento com a idade, tal como acontece entre os 7 e 22, será :

$$16.92 : 18.81 : 14.72,$$

respectivamente para os filtros «vermelho», «amarelo» e «azul».

Côr dos olhos — ♀. — Na determinação da côr dos olhos no sexo feminino foi seguido o mesmo método que nos ♂. As médias para o «preto» nas várias idades estão, conjuntamente com os desvios-padrões, na *Tabela XX*, em que o número de observações é o mesmo que se encontra na *tabela XXI*, coluna n_i .

TABELA XX

Anos	Média	Desvio-padrão
7	12.90	5.68
8	15.24	2.66
9	14.33	3.40
10	14.54	3.15
11	15.08	3.33
12	14.88	2.82
13	14.55	2.56
14	15.18	2.76
15	13.90	2.72
16	13.37	3.77
17	14.92	2.63
18	14.69	3.15
19	16.02	2.28

A julgar pela irregularidade da distribuição das médias, não deve haver heterogeneidade. A análise da variância foi feita utilizando os dados da *Tabela XXI*.

TABELA XXI

Anos	T_i	n_i	T_i^2/n_i	$\sum_1^{n_i} x^2$
7	154.8	12	1996.92	2352.40
8	502.8	33	7660.84	7887.72
9	515.8	36	7390.27	7795.26
10	508.8	35	7396.50	7734.12
11	829.4	55	12507.35	13106.76
12	669.4	45	9957.70	10308.00
13	858.4	59	12488.99	12868.46
14	698.5	46	10606.57	10949.00
15	570.1	41	7927.17	8222.37
16	414.6	31	5544.94	5942.22
17	283.4	19	4227.13	4351.36
18	146.9	10	2157.96	2242.09
19	96.1	6	1539.20	1565.23
	6249.0	428	91401.54	95324.99

A soma de quadrados *total* é

$$\begin{aligned} \Sigma (x - \bar{x}) &= 95324.99 - 6249.0^2 / 428 \\ &= 4086.67 \end{aligned}$$

e a soma *entre os grupos*

$$\begin{aligned} n_i \Sigma_1^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 &= 91401.54 - 6249.0^2 / 428 \\ &= 163.22. \end{aligned}$$

A soma de quadrados entre os grupos é bastante maior do que a correspondente para os δ (mesmo em relação ao total); contudo, é de esperar que não haja heterogeneidade. Na *Tabela XXII* está realizada a parte final da análise.

TABELA XXII

	S. q.	G. l.	S. q. m.	F	F 5%
Entre os grupos	163.22	12	13.602	1.438	1.78-1.77
Nos grupos	3923.45	415	9.454		
Total	4086.67	427	9.5706		

O valor obtido para F é menor do que o correspondente ponto 5%, visto que para $P = .05$ é:

$$\begin{aligned} \text{para } n_1 &= 12 \\ n_2 &= 415 \quad F = 1.78 \\ n_1 &= 12 \\ n_2 &= 500 \quad F = 1.77. \end{aligned}$$

Como F diminui quando n_1 e n_2 aumentam, pode-se concluir que realmente o F encontrado significa que não há heterogeneidade.

Também no sexo feminino a análise atrás exposta não suporta a conclusão da existência dum escurecimento com a idade, na zona interna da íris, depois dos 7 anos e até aos 19.

Os resultados são concordes nos dois sexos: na zona interna não há escurecimento demonstrável com os métodos usados. Parece provável que, a haver escurecimento da íris com a idade, a zona interna se ressentisse também. O estroma da íris é natural que se modifique um pouco com várias acções do «meio» interno, porém a zona interna, como elemento mais constante, não se deve modificar muito, pelo menos depois dos 7 anos, e até o comêço da velhice.

Vários autores, como já referi, dizem que há escurecimento da côr dos olhos com a idade. Por exemplo, HESCH 1931 diz que aparecem mais zonas internas escuras quando a idade vai aumentando; mas, na realidade, parece que o método de que HESCH se serviu não era muito próprio para tirar estas conclusões, visto ter estudado populações de várias idades qualitativa e não quantitativamente, isto é, agrupando os olhos em castanhos, claros, escuros, etc. O estudo de GODIN também não assenta sobre dados quantitativos e não considera as colorações das diversas zonas em separado. As conclusões a que cheguei com o método usado devem, portanto, ser válidas.

A média geral para o sexo feminino é:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 6249.0/428 \\ &= 14.60. \end{aligned}$$

Para o desvio-padrão geral obtém-se

$$s = \sqrt{9.5706} \\ = 3.094.$$

A média é significativa, como se demonstra calculando o respectivo t :

$$t = 14.60 \cdot \sqrt{428/3.094} \\ = 97.674,$$

emquanto que o valor de t para os correspondentes graus de liberdade e $P=.01$ é 2.588 (para $n=400$, $P=.01$ é $t=2.588$ e para $n=500$, $P=.01$ $t=2.586$). Também se chegava à conclusão de que a média é representativa calculando o respectivo *erro-padrão*:

$$e_{\bar{x}} = 0.0850.$$

Embora o fim dêste trabalho não seja, pròpriamente, averiguar das diferenças sexuais, é interessante ver se existe alguma diferença estatisticamente comprovável entre as duas médias para o «preto» da zona interna da iris.

A média para os \bar{x} é maior, com uma diferença:

$$x_m - x_f = 14.723 - 14.600 \\ = 0.123$$

e para julgar o seu significado calcula-se t , como para o caso da diferença na côr da pele:

$$s = \sqrt{\frac{2258.61 + 4086.67}{256 + 427}} = 3.048$$

$$t = \frac{0.123}{3.048} \sqrt{\frac{257 \cdot 428}{257 + 428}} \\ = 0.551$$

Nas tabelas vem para $n=500$, $P=.05$ $t=1.965$ e para $n=1000$, $P=.05$ $t=1.962$; conclui-se que o valor encontrado para a diferença não é significativo, embora seja quási exactamente igual à diferença entre a côr da pele nos dois

sexos. A probabilidade de ocorrência fortuita de um valor de t como o obtido, é muito grande; tomando $n = \infty$ nas táboas de FISHER encontra-se um valor de t aproximado do que está acima para $P = .6$, isto é, aproximadamente 60%.

*

* *

As determinações para o sexo feminino fornecem ainda as médias do filtro «amarelo» e do «vermelho» expostas na Tabela XXIII, em que os números de observações são os mesmos da tabela referente ao «preto».

TABELA XXIII

Anos	F. amarelo	F. vermelho
7	16.03	14.58
8	19.31	17.28
9	18.23	16.38
10	18.41	16.63
11	18.93	17.06
12	18.88	17.21
13	18.91	16.89
14	19.82	17.21
15	18.43	16.44
16	17.31	15.37
17	19.13	17.13
18	18.90	17.14
19	19.85	18.00

As médias apresentam diferenças da ordem das correspondentes ao «preto», de forma que é muito provável que também aqui haja homogeneidade.

As respectivas médias são $x = 18.720$ e $x = 16.760$, o que dá para coloração geral da zona interna dos olhos, nas φ :

$$16.76 : 18.72 : 14.60,$$

respectivamente para os filtros «vermelho», «amarelo» e «azul».

Côr do cabelo — δ . — Para a côr do cabelo, os vários autores são unânimes em admitir um escurecimento com a idade, pelo menos em certas populações. As observações têm sido quási sempre de natureza qualitativa e as percentagens estabelecidas por certos autores nem sequer têm significado estatístico seguro. O melhor seria também para este caso, seguir os

mesmos indivíduos durante vários anos. Estão nestas condições as observações de GODIN, efectuadas entre os 13 e os 17 anos. Para GODIN o que é decisivo na mudança da cor do cabelo, como na dos olhos, é a puberdade. Tal interpretação parece um tanto levada ao extremo, pois facilmente se observa em muitas crianças (por exemplo, muitas crianças portuguesas) que as mudanças mais profundas da cor do cabelo se dão em regra antes, ou próximo e pouco depois, dos 10 anos, e por vezes logo nos primeiros meses de vida extra-uterina. O escurecimento dá a impressão de ser mais ou menos contínuo.

O tratamento estatístico dos dados que colhi fornece algumas indicações interessantes sobre o assunto. As médias e desvios-padrões para o «preto» nas várias idades estão na *Tabela XXIV*. O número de observações é o mesmo da tabela seguinte, coluna n_i .

TABELA XXIV

Anos	Média	Desvio-padrão
8	13.12	0.95
9	12.78	0.75
10	13.08	0.97
11	13.34	1.37
12	13.52	1.36
13	13.13	1.11
14	13.28	1.15
15	14.13	1.34
16	13.70	0.93
17	14.13	1.30
18	14.12	1.47
19	13.92	1.65
20	14.95	0.86
21	14.10	1.69
22	14.80	0.63

Nota-se uma tendência para as médias aumentarem com a idade, dentro do período considerado; é natural que se verifique um aumento da pigmentação com a idade. Em todo o caso, é preciso, em primeiro lugar, verificar se há heterogeneidade, ou se, pelo contrário, as diferenças entre as médias se podem atribuir a flutuações ocasionais. Na *Tabela XXV* estão os principais dados para o estabelecimento das somas de quadrados.

A soma de quadrados *total* é:

$$\begin{aligned} \Sigma (x - \bar{x})^2 &= 46930.06 - 3431.0^2 / 253 \\ &= 401.37 \end{aligned}$$

e a soma de quadrados entre os grupos

$$n'_i \sum_1^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = 46587.47 - 3431.0^2 / 253 \\ = 58.78.$$

TABELA XXV

Anos	T_i	n'_i	T_i^2/n'_i	$\sum_1^{n'_i} x^2$
8	275.5	21	3614.30	3632.37
9	217.2	17	2775.05	2784.16
10	209.3	16	2737.91	2751.97
11	293.5	22	3915.56	3954.77
12	419.2	31	5668.67	5723.96
13	262.5	20	3445.32	3468.69
14	305.5	23	4057.85	4086.75
15	254.4	18	3595.52	3626.04
16	315.2	23	4319.61	4338.54
17	310.8	22	4390.76	4426.08
18	240.0	17	3388.24	3414.21
19	139.2	10	1937.66	1962.08
20	59.8	4	894.01	895.40
21	84.6	6	1192.86	1207.14
22	44.3	3	654.16	657.90
	<u>3431.0</u>	<u>253</u>	<u>46587.47</u>	<u>46930.06</u>

Com estes valores realiza-se a análise da variância exposta na Tabela XXVI.

TABELA XXVI

	S. q.	G. l.	S. q. m.	F	F ^{0/0}	F ^{0/0}
Entre os grupos	58.78	14	4.198	2.917	1.80-1.79	2.28-2.24
Nos grupos	<u>342.59</u>	<u>238</u>	1.439		1.57-1.54	1.88-1.85
Total	401.37	252				

O valor de F é maior do que o correspondente ponto 1^{0/0} e, com maioria de razão, do que o ponto 5^{0/0}. Com efeito, nas tabelas de F encontra-se:

$$\text{para } n_1 = 12 \\ n_2 = 200 \quad P = .01 \quad F = 2.28$$

$$n_1 = 12 \\ n_2 = 300 \quad P = .01 \quad F = 2.24$$

$$n_1 = 24 \\ n_2 = 200 \quad P = .01 \quad F = 1.88$$

$$n_1 = 24 \\ n_2 = 300 \quad P = .01 \quad F = 1.85$$

Não é preciso interpolar para se ver que o F obtido é altamente significativo, visto ser maior que o F correspondente a menos graus de liberdade. A variância entre as médias das várias idades é significativamente maior que o erro; portanto, há heterogeneidade. Os ♂ das várias idades não formam, a respeito da cor do cabelo, uma única população: a heterogeneidade deve provir do escurecimento com a idade.

Pode-se concluir desta análise que *no sexo masculino há, quanto à cor do cabelo, diferenças entre os 8 e 22 anos e existe um escurecimento com a idade* (1). Esta conclusão refere-se ao «preto», mas pode igualmente aplicar-se aos outros filtros, como exponho a seguir.

*

* *

As graduações dos outros dois filtros são muito aproximadas das do «azul», de forma que as respectivas médias mostram diferenças da ordem das do «preto». Na *Tabela XXVII* estão expostas as médias obtidas, sendo os números de observações os já conhecidos para a análise da variância.

TABELA XXVII

Anos	F. amarelo	F. vermelho
8	13.35	13.87
9	13.76	13.74
10	13.91	13.89
11	14.07	14.05
12	14.30	14.37
13	13.92	13.90
14	14.17	14.15
15	14.66	14.71
16	14.39	14.47
17	14.80	14.94
18	14.62	14.69
19	14.58	14.64
20	15.58	15.40
21	14.70	14.55
22	15.20	15.07

Verifica-se que as médias do «amarelo» e do «vermelho» são quasi iguais para cada ano. O paralelismo entre os dois

(1) A prova da última proposição encontra-se adiante.

filtros, e entre cada um deles e o «azul», é tal que parece poder-se legitimamente inferir que as conclusões que se tiraram para o último são válidas geralmente.

*

* *

Em virtude de haver heterogeneidade, não é lícito calcular uma média geral como representativa de toda a população, principalmente quando se fazem comparações com adultos. Igualmente, um desvio-padrão geral não se pode calcular em virtude de haver heterogeneidade e o número de observações ser diferente para cada grupo (idade).

Como se vê pelos resultados da análise que efectuei, é conveniente traçar a linha de regressão a partir da respectiva equação, o que permite provar que o escurecimento com a idade é a causa da heterogeneidade.

Como é usual, a primeira linha que se procura ajustar é a recta de regressão. A equação da recta é da forma:

$$Y = a + bx, \dots\dots\dots (1)$$

equação que para o caso de se entrar em linha de conta com as médias de y (representada por \bar{y}) e de x (representada por \bar{x}) se transforma em

$$Y - \bar{y} = a + b(x - \bar{x}), \dots\dots\dots (2)$$

onde a e b são constantes e Y funciona como variável dependente. Pelo método dos «menores quadrados» (v. por exemplo YULE E KENDALL 1937, ou TIPETT 1931) conclui-se que a equação dá o melhor ajustamento quando a soma dos desvios dos valores achados para os calculados é mínima, isto é, quando $\Sigma (y - Y)^2 = \text{mínimo}$. A equação (2) dá o melhor ajustamento quando

$$a = 0 \quad \text{e} \quad b = \frac{\Sigma y(x - \bar{x})}{\Sigma (x - \bar{x})^2}.$$

Nestas condições, a equação (2) transforma-se em

$$Y = \bar{y} + b(x - \bar{x}) \dots\dots\dots (3)$$

No presente caso, y representa o «preto» do cabelo, tal como é dado pela escala do pigmentómetro, Y representa os respectivos valores *calculados*, isto é, computados a partir da linha de regressão, e x representa a idade em anos. É preciso calcular b , o chamado *coeficiente de regressão*. Uma fórmula conveniente para tal fim é a seguinte:

$$b_{yx} = \frac{\Sigma (x.y) - T_x \cdot T_y / n'}{\Sigma (x^2) - T_x^2 / n'}$$

em que T_x e T_y são os totais de x e de y , respectivamente; n' é o número de pares de observações de x e y conjuntamente; b_{yx} significa regressão de y sobre x e Y serve como variável independente (correspondendo a y).

No caso de que estou tratando, calculei b da seguinte forma:

$$b_{yx} = \frac{47255.0 - 3467.0 \cdot 3431.0 / 253}{50447.0 - 3467.0^2 / 253} \\ = 0.0811.$$

A equação de regressão é, portanto:

$$Y = 13.561 + 0.0811 (x - 13.704),$$

ou

$$Y = 12.450 + 0.0811 x,$$

visto que as médias de y e x são respectivamente 13.561 e 13.704.

Esta recta está representada na *fig. 5*, conjuntamente com a linha que se obtém unindo as médias das várias idades (página seguinte).

Verifica-se que o ajustamento da recta não parece muito satisfatório. As médias mostram uma tendência a aumentar com a idade, mas há irregularidades, provenientes, pelo menos em parte, do pequeno número de observações. Para julgar com exactidão se o ajustamento é razoável, é preciso efectuar outras análises, a que vou proceder.

*

*

*

Em primeiro lugar, convém verificar o significado da regressão, o que se pode fazer, ou por intermédio do estatístico t , ou

efectuando uma análise da variância. Pelo primeiro processo é preciso calcular :

$$t = b_{yx} / s_b,$$

em que

$$s_b = \sqrt{\frac{\Sigma (y - Y)^2}{n' - 2}} / \sqrt{\Sigma (x - \bar{x})^2}.$$

s_b representa o erro de b_{yx} . O numerador de s_b corresponde ao erro da regressão calculada. Para o cálculo de $\Sigma (y - Y)^2$ recorre-se à equação de regressão e à identidade $\Sigma (y - Y)^2 = \Sigma [(Y - \bar{y}) - (y - \bar{y})]^2$, que conduzem à seguinte expressão final, que se usa na prática : $\Sigma (y - Y)^2 = \Sigma (y - \bar{y})^2 - b^2 \cdot \Sigma (x - \bar{x})^2$.

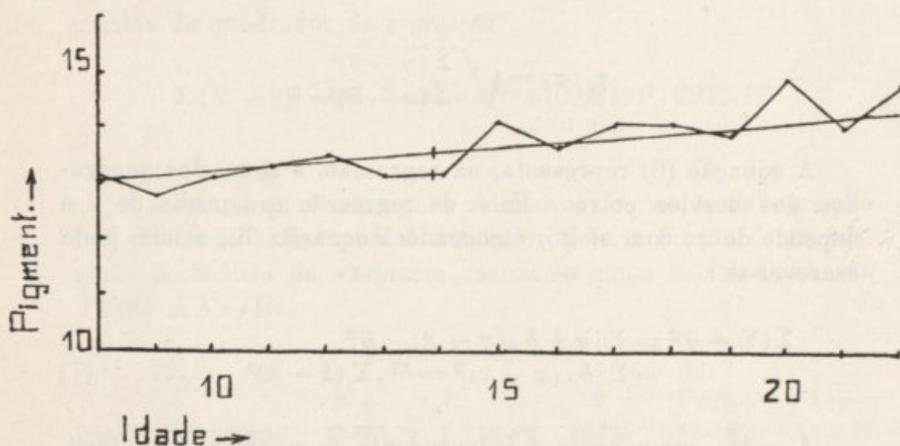


FIG. 5

Recta de regressão para o «preto» (em unidades do pigmentómetro) da côr do cabelo, nos ♂. Conjuntamente, as médias das várias idades (em anos).

Depois de calculado o t , procura-se o valor que vem nas tabelas, para ver qual a sua significação; os graus de liberdade são $(n' - 2)$, visto que 2 graus são absorvidos quando do cálculo de a e b , as duas constantes da equação de regressão.

O outro método consiste em comparar a variância devida à função de regressão com o erro, ou seja, com a variância dos desvios desta função. A equação fundamental para a análise é:

$$\Sigma (y - \bar{y})^2 = (1 - r^2) \cdot \Sigma (y - \bar{y})^2 + r^2 \cdot \Sigma (y - \bar{y})^2, \dots \quad (4)$$

que é, evidentemente, uma identidade. A soma $\Sigma (y - \bar{y})^2$ representa a soma de quadrados *total* para a variável dependente. Pode-se considerar constituída por duas partes adicionáveis :

$$(1 - r^2) \cdot \Sigma (y - \bar{y})^2 = \Sigma (y - Y)^2 \quad \dots \dots \quad (5)$$

e

$$r^2 \cdot \Sigma (y - \bar{y})^2 = \Sigma (Y - \bar{y})^2 \quad \dots \dots \quad (6)$$

As igualdades (5) e (6) verificam-se atendendo a que ao coeficiente de correlação r corresponde uma equação de regressão $Y = a + bx$, sendo $r_{xy} = b_{yx} / \sigma_y / \sigma_x$ ou $r_{xy} = b_{xy} / \sigma_x / \sigma_y$ onde b_{xy} representa o coeficiente de regressão de x sobre y ; σ_x e σ_y são os desvios-padrões de x e y , respectivamente, sendo

$$\sigma_y / \sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma (y - \bar{y})^2}{\Sigma (x - \bar{x})^2}}$$

A equação (6) representa, na regressão, a soma dos quadrados dos desvios entre a linha de regressão e a média de y e depende de x ; com efeito, atendendo à equação (3), acima, pode escrever-se :

$$\begin{aligned} \Sigma (Y - \bar{y})^2 &= \Sigma [\bar{y} + b \cdot (x - \bar{x}) - \bar{y}]^2 \\ &= \Sigma [b \cdot (x - \bar{x})]^2 = b^2 \cdot \Sigma (x - \bar{x})^2 \quad \dots \dots \quad (7) \end{aligned}$$

A outra componente é independente de x , como se vê facilmente atendendo ao que se disse acima, a propósito da maneira prática de calcular $\Sigma (y - Y)^2$, quando se tratou de t . A equação (5) mede, na regressão, a soma dos quadrados dos desvios entre os pontos calculados Y e os observados y . (5) pode, portanto, ser usada para comparação com (6), servindo a primeira como erro. Assim se verifica se a função de regressão calculada é significativa, comparada com o erro que ela envolve. Os graus de liberdade correspondentes a (5) e (6) são, respectivamente, $(n' - 2)$ e 1. O total envolve $n' - 1$ graus e a regressão apenas 1, visto que, atendendo a (7), se verifica que $\Sigma (Y - \bar{y})^2$ apenas depende, para a regressão, do estatístico b . Os desvios $\Sigma (y - Y)$ absorvem os restantes $(n' - 2)$ graus.

A partir dos valores encontrados para b e $\Sigma (x - \bar{x})^2 =$

$= \Sigma (x^2) - T_x^2/n'$, que já estão calculados, e de $\Sigma (y - \bar{y})^2$, também já conhecido da análise da variância para verificação da heterogeneidade da cor do cabelo, obtêm-se todos os estatísticos necessários. Para o cálculo de $\Sigma (y - Y)^2$ entra-se em conta com a igualdade (8), já conhecida:

$$\Sigma (y - Y)^2 = \Sigma (y - \bar{y})^2 - b^2 \cdot \Sigma (x - \bar{x})^2 \quad \dots \quad (8)$$

No caso de que estou tratando, as somas de quadrados são:
Soma de quadrados *total*

$$\Sigma (y - \bar{y})^2 = 401.37$$

e soma de quadrados da *regressão*

$$\begin{aligned} \Sigma (Y - \bar{y})^2 &= b^2 \cdot \Sigma (x - \bar{x})^2 = (0.0811)^2 \cdot 2936.77 \\ &= 19.383. \end{aligned}$$

A soma de quadrados para os *desvios da função de regressão* é a diferença entre o total e o valor para a função de regressão. A análise da variância realiza-se como está indicado na *Tabela XXVIII*.

TABELA XXVIII

	S. q.	G. l.	Var.	F	F 5%	F 1%
Função de regressão	19.383	1	19.383	12.735	3.89-3.87	6.76-6.72
Desvios da regressão	381.987	251	1.522			
Total	401.370	252				

O coeficiente calculado é altamente significativo, como se vê comparando o F obtido com o F correspondente, no ponto 1 0/0:

$$\begin{aligned} \text{para } P = .01 \quad n_1 &= 1 \\ &n_2 = 200 \quad F = 6.76 \\ &n_1 = 1 \\ &n_2 = 300 \quad F = 6.72. \end{aligned}$$

Em relação ao ponto 5 0/0 ainda a diferença entre o F obtido e o da tabela é maior, evidentemente.

Outra questão, até certo ponto independente da significação, é a da verificação da *não-linearidade*.

Pela simples observação, parece que a recta de regressão se não ajusta muito bem aos dados. Procedeu-se à verificação da não-linearidade (ou linearidade) recorrendo a uma análise especial da variância. A equação fundamental para essa análise é:

$$\Sigma (y - \bar{y})^2 = \Sigma n'_p (y_p - \bar{y})^2 + \Sigma \Sigma (y - \bar{y}_p)^2, \dots \quad (9)$$

em que \bar{y}_p é a média de cada grupo de valores de y , correspondente a cada valor \bar{x}_i da média de x ; n'_p é o número de observações em cada grupo.

A equação (9) é semelhante à equação fundamental da análise da variância e verifica-se algèbricamente. Pode-se, pois, dividir a soma de quadrados total em duas:

$$\Sigma n'_p (\bar{y}_p - \bar{y})^2, \dots \dots \dots \quad (10)$$

que representa a soma de quadrados devida aos *desvios entre as médias das linhas* ⁽¹⁾ e a *média geral*;

$$\Sigma \Sigma (y - \bar{y}_p)^2, \dots \dots \dots \quad (11)$$

que representa a soma de quadrados *nas linhas* [para cada linha $\Sigma (y - \bar{y}_p)^2$].

Para o julgamento da linearidade utiliza-se (10) vendo que:

$$\Sigma n'_p (\bar{y}_p - \bar{y})^2 = \Sigma n'_p (\bar{y}_p - Y)^2 + b^2 \Sigma (x - \bar{x})^2, \dots \dots \dots \quad (12)$$

o que se demonstra atendendo à igualdade (7). Nesta equação, $\Sigma n'_p (\bar{y}_p - Y)^2$ representa a soma dos quadrados dos *desvios entre as médias das linhas e a recta de regressão*; $b^2 \Sigma (x - \bar{x})^2$ é a soma de quadrados *devida à função de regressão (linear)*, como já tinha exposto.

(1) As «linhas» referem-se aos grupos considerados em relação à variável y , ou linhas dum quadro de correlação.

Se se consideram q grupos ou linhas, os *graus de liberdade* correspondentes a (10) são $(q - 1)$ e ao total $(n' - 1)$. A (11) correspondem $[(n' - 1) - (q - 1)]$. Para o caso do julgamento de linearidade, 1 grau de liberdade dos que pretendem a (10) é absorvido pela função de regressão, como se vê facilmente atendendo a (12).

Para atestar a linearidade faz-se a comparação entre (10) e (11), entrando em conta com os respectivos graus de liberdade para achar a variância. Pelo que disse acima, os graus de liberdade são: para a soma de quadrados dos desvios das médias das linhas $(q - 2)$; para a soma dentro das linhas ficam $[(n' - 2) - (q - 2)]$. A soma dentro das linhas é usada como erro.

Para o caso de que me estou ocupando, parte-se da soma de quadrados *total*, já conhecida da análise precedente:

$$\Sigma (y - \bar{y})^2 = 401.37.$$

A soma de quadrados *entre as linhas*, ou, mais explicitamente, a soma de quadrados dos *desvios entre as médias das linhas e a função de regressão*, é:

$$\begin{aligned} \Sigma n'_p (y_p - Y) &= \Sigma n'_p (\bar{y}_p - \bar{y})^2 - b^2 \Sigma (x - \bar{x})^2 \\ &= 58.78 - 19.383 \\ &= 39.387; \end{aligned}$$

nesta soma, já era conhecido $\Sigma n'_p (\bar{y}_p - \bar{y})$ da outra análise da variância. A soma de quadrados *dentro das linhas* é:

$$\begin{aligned} \Sigma \Sigma (y - \bar{y}_p)^2 &= \Sigma (y - \bar{y})^2 - \Sigma n'_p (\bar{y}_p - \bar{y})^2 \\ &= 401.37 - 58.78 \\ &= 342.59 \end{aligned}$$

Os graus de liberdade para $q = 15$ são os da *Tabela XXIX*, onde está efectuada a parte final da análise de não-linearidade.

TABELA XXIX

	S. q.	G. l.	Var.	F	F 5%	F 1%
Desvios entre as médias das linhas e a função de regressão	39.397	13	3.031	2.106	1.80 — 1.79	2.28 — 2.24
Dentro das linhas	342.590	238	1.439		1.57 — 1.55	1.88 — 1.85
		251				

O valor encontrado para F é superior ao F no ponto 5%, pois que:

para $P = .05$	$n_1 = 12$		
	$n_2 = 200$	$F = 1.80$	
	$n_1 = 12$		
	$n_2 = 300$	$F = 1.79$	
	$n_1 = 24$		
	$n_2 = 200$	$F = 1.57$	
	$n_1 = 24$		
	$n_2 = 300$	$F = 1.55$	

mas um pouco menor do que no ponto 1%. Interpolando nas tabelas de SNEDECOR, para n_1 em progressão harmónica, para n_2 em progressão aritmética, obtém-se para valor de F correspondente a $n_1 = 13$, $n_2 = 232$: $F = 2.216$, número superior ao que se obteve para o caso da análise acima.

O que tem importância é ser o F obtido maior do que o correspondente ao ponto 5%, e estar próximo do ponto 1%. Desta análise conclui-se, portanto, que há evidência de não-linearidade: os dados devem ajustar-se melhor a uma outra espécie de curva.

Quando se procura uma curva representativa da regressão de y sobre x deve proceder-se primeiramente ao ajustamento de uma recta e apenas quando há provas de não-linearidade se deve procurar outra equação. No caso do escurecimento da côr do cabelo com a idade é conveniente, portanto, procurar outra equação.

É sabido que as curvas de crescimento se assemelham bastante às curvas de auto-catálise e, em última análise, são curvas logarítmicas, isto é, curvas em que a variável dependente e a independente estão ligadas por meio de relações em que entram logaritmos. Várias curvas se podem ajustar aos mesmos dados (cf. por exemplo o caso da população de Inglaterra em YULE e KENDALL 1937, comparando com PEARL 1930). Em regra, as curvas de grau superior (polinómios do 2.º, 3.º, etc. grau) parece ajustarem-se melhor a uma série de pontos à medida que o número de constantes e de potências da variável independente aumentam. Por vezes, a melhoria de ajustamento é apenas aparente e convém, sendo possível, ir verificando o significado do novo grau de liberdade que se vai usando.

Contudo, a escolha da forma geral da curva que se vai ajustar é um pouco arbitrária e deve ser feita com base em considerações derivadas da natureza do assunto. Como muito bem friza PEARL 1924, a semelhança quantitativa do desenrolar no tempo de dois fenómenos, nada diz sobre a existência ou não-existência de igualdade ou diferença *qualitativa* entre eles — duas curvas idênticas não implicam, pois, a mesma natureza.

PEARL descreve uma curva já conhecida de autores anteriores e a que é dado o nome de «logística», de fórmula geral

$$Y = \frac{k}{1 + m \cdot e^{F(x)}}$$

e na prática pode tomar-se $F(x)$, desenvolvida em série de TAYLOR, apenas com as três primeiras potências, de forma que fica:

$$Y = \frac{k}{1 + m \cdot e^{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}}$$

Esta equação convém, tanto para a descrição do crescimento de populações, como de indivíduos isolados, para populações humanas e para o crescimento (pêso) do fruto de «Cucurbita pepo». É de notar, porém, que aos mesmos dados podem igualmente ser ajustadas outras curvas logarítmicas. Parece, portanto, que no caso geral do crescimento se podem utilizar curvas logarítmicas para a descrição quantitativa dos dados.

Como para o presente caso, do escurecimento da côr do cabelo com a idade, apenas existem dados desde os 8 aos 22 anos nos ♂ e desde os 7 aos 19 anos nas ♀, não se justifica, por enquanto, que se procure o ajustamento duma curva de grau elevado. Experimentei, por isso, o ajustamento de uma curva da forma

$$Y = a + b \cdot \log x.$$

O cálculo das constantes é em tudo parecido com o da recta em x , sendo, também, um caso particular da aplicação do método dos «menores quadrados»; a modificação consiste em se tomarem para x os respectivos logaritmos (decimais). Fazendo $\log x = x_1$ a equação acima toma a forma

$$Y = a + b \cdot x_1$$

e o cálculo de b executa-se da mesma maneira que anteriormente

$$\begin{aligned} b_{yx_1} &= \frac{\Sigma (x_1 \cdot y) - T_{x_1} \cdot T_y / n'}{\Sigma (x_1^2) - T_{x_1}^2 / n'} \\ &= \frac{14.685183}{3.445311} \\ &= 4.2624. \end{aligned}$$

A equação de regressão é, portanto:

$$\begin{aligned} Y &= y + b_{yx_1} \cdot (x_1 - \bar{x}_1) \\ &= 13.561 + 4.2624 (\log x - 1.12023) \end{aligned}$$

e finalmente vem

$$Y = 8.7861 + 4.2624 \cdot \log x.$$

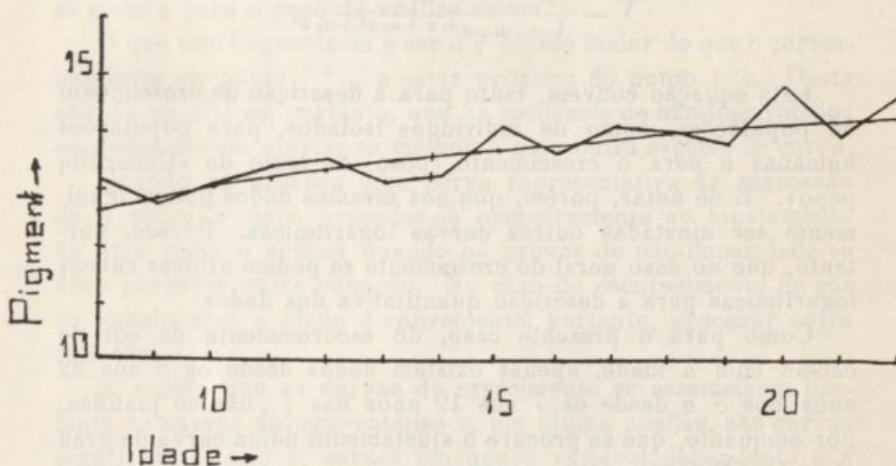


FIG. 6

Curva logarítmica ajustada para o « preto » da cor do cabelo, nos δ (conjuntamente com as médias observadas). Idade em anos, pigmentação em unidades do pigmentómetro.

Como se vê comparando a *fig. 6* com a *fig. 5*, a curva calculada parece ajustar-se melhor que a recta. A *fig. 6* representa a curva logarítmica, conjuntamente com os dados observacionais.

Para se poder ajuizar convenientemente do ajustamento é preciso, no entanto, ver se a curva calculada é significativa,

isto é, ver o significado da regressão calculada com a curva logarítmica, pelo processo usado para a recta.

A demonstração de significação nada diz, contudo, sobre a questão de se poder conseguir um melhor ajustamento com uma outra curva.

O julgamento do significado da regressão logarítmica faz-se como para o caso da recta. A soma de quadrados *para a função de regressão* é:

$$b^2 \cdot \Sigma (x - \bar{x})^2 = 4.2624^2 \cdot 3.445311 \\ = 62.595363,$$

emquanto que a soma de quadrados *para os desvios da regressão* é:

$$\Sigma (y - Y)^2 = \Sigma (y - \bar{y})^2 - b^2 \cdot \Sigma (x - \bar{x})^2 \\ = 401.37 - 62.595363 \\ = 338.774637.$$

A análise da variância está exposta na *Tabela XXX*.

TABELA XXX

	S q.	G. L.	Var.	F	F 5%	F 1%
Função de regressão	62.595363	1	62.595363	46.377	3.89—3.87	6.76—6.72
Desvios da f. de regressão	338.774637	251	1.349700			
Total	401.370000	252				

Obtém-se um F muito superior ao respectivo valor no ponto 1%, como se pode ver pela Tabela XXX e conforme está explicado depois da Tabela XXVIII. A curva pode representar os dados.

Comparando esta análise com a da Tabela XXVIII para o caso da recta, verifica-se que, para os mesmos graus de liberdade, o F se tornou maior, passando aproximadamente de 13 para 46. Isto por si não justificaria a preferência de uma ou de outra curva. O que faz com que se deva preferir a curva logarítmica é a existência de outros factos de natureza semelhante, fenómenos de crescimento, regidos por leis semelhantes, ou melhor, que se podem exprimir quantitativamente por curvas logarítmicas. Com efeito, as curvas de crescimento parece serem sempre aproximadamente semelhantes na forma. A inspecção

de curvas para o crescimento no homem, desenhadas em WEISSENBERG 1911 ou em GODIN 1935, sugere também uma forma logarítmica.

Para o caso em que se vai sucessivamente ajustando uma curva de grau superior, pode-se verificar se cada grau de liberdade que se vai usando ainda tem significado estatístico em relação ao anterior; no caso presente não se trata, porém, da mesma forma de curva, de maneira que a preferência de uma ou de outra, da curva logarítmica ou da recta, deve assentar sôbre motivos diferentes.

A conclusão a tirar é que *o escurecimento com a idade parece seguir para os ♂ uma curva de forma logarítmica, semelhante à dos processos de crescimento.*

A curva ajustada (logarítmica) permite ainda prever para o

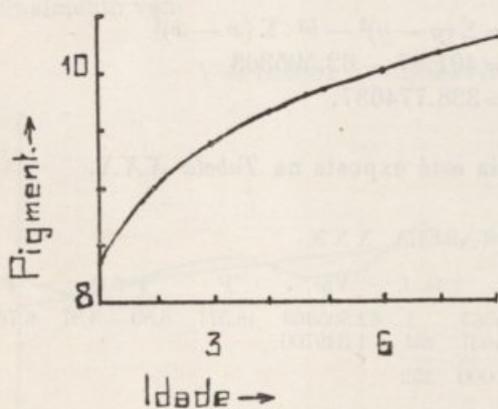


FIG. 7

Curva logarítmica para as idades em que não há dados, no sexo ♂.

caso de outras idades não estudadas, como se vê na fig. 7. Nas primeiras idades é que se daria, segundo esta curva, o escurecimento mais intenso, o que parece estar de acôrdo com o que se observa freqüentemente entre nós — rápido escurecimento logo nos primeiros anos, em que se opera a mudança do loiro para acastanhado.

O escurecimento com a idade deve práticamente estar terminado por volta dos 25 anos.

A curva calculada não tem limite superior, que deve ter uma curva que melhor se ajuste. A logística já tem a possibilidade de apresentar um limite, mas reconhece-se que, com os dados actuais, os cálculos não deviam ser levados muito mais longe. Dados mais extensos quanto às idades e em maior número, realizados quantitativamente com aparelho semelhante ao pigmentómetro ou melhor do que este, é que poderão definir melhor uma curva de escurecimento médio da côr do cabelo. É de desejar que os dados sejam colhidos noutros trabalhos.

Côr do cabelo — φ . — Os resultados do estudo da côr do cabelo nas φ são em tudo semelhantes aos obtidos para o sexo masculino. Os métodos de análise são também os mesmos.

As médias e desvios-padrões para o «preto» nas várias idades, fundadas sobre o número de observações da coluna n'_i da tabela XXXII, estão expostos na *Tabela XXXI*.

TABELA XXXI

Anos	Média	Desvio-padrão
7	12.37	0.92
8	12.66	1.41
9	12.71	1.08
10	12.87	0.89
11	13.28	1.29
12	13.08	1.26
13	13.13	0.96
14	13.22	1.27
15	13.18	0.94
16	13.45	1.25
17	13.47	1.10
18	13.19	1.22
19	15.25	0.98

Emquanto que os desvios-padrões são aproximadamente iguais para as diferentes idades, nota-se um certo aumento, embora pequeno, para as médias. Também deve haver escurecimento com a idade.

A prova de heterogeneidade encontra-se na seguinte análise da variância, feita com os dados da *Tabela XXXII*.

TABELA XXXII

Anos	T'_i	n'_i	T'^2_i/n'_i	$\sum'_i n'_i x^2$
7	148.4	12	1835.21	1844.26
8	417.7	33	5287.07	5350.51
9	457.7	36	5819.15	5859.83
10	450.6	35	5801.15	5828.02
11	730.3	55	9697.06	9786.51
12	588.8	45	7704.12	7774.22
13	774.5	59	10166.95	10220.11
14	607.9	46	8033.53	8105.40
15	540.2	41	7117.46	7153.24
16	417.1	31	5612.01	5484.39
17	255.9	19	3446.56	3468.47
18	132.9	10	1766.24	1779.43
19	91.5	6	1395.38	1400.31
	5613.5	428	73681.89	74054.70

A soma de quadrados *total* é:

$$\begin{aligned}\Sigma (x - \bar{x})^2 &= 74054.70 - 5613.5^2 / 428 \\ &= 429.98\end{aligned}$$

e a soma *entre os grupos*:

$$\begin{aligned}n_i' \Sigma_1^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 &= 73681.89 - 5613.5^2 / 428 \\ &= 57.17\end{aligned}$$

A soma de quadrados entre os grupos é relativamente pequena, mas o F é significativo, como se vê procedendo à análise da variância exposta na *Tabela XXXIII*.

TABELA XXXIII

	S. q.	G. l.	S. q. m.	F	F 5%	F 1%
Entre os grupos	57.17	12	4.764	5.305	1.78—1.77	2.23—2.22
Nos grupos	372.81	415	0.898			
Total	429.98	427				

Comparando o F obtido com o F 1% das tabelas:

$$\begin{aligned}\text{para } P = .01 \quad n_1 &= 12 \\ n_2 &= 400 \quad F = 2.23 \\ n_1 &= 12 \\ n_2 &= 500 \quad F = 2.22,\end{aligned}$$

verifica-se que este último é altamente significativo. Portanto, há manifesta heterogeneidade entre as médias do sexo feminino para a cor do cabelo («preto») desde os 7 aos 19 anos.

*

* *

Os outros dois filtros mostraram resultados muito semelhantes. As médias da *Tabela XXXIV* dizem-lhes respeito; verifica-se que há diferenças da mesma ordem das existentes para o

«preto». Os números de observações são, como é habitual, iguais aos do filtro «azul» (que dá o «preto»).

TABELA XXXIV

Anos	F. amarelo	F. vermelho
7	13.47	13.41
8	13.12	13.21
9	13.64	13.55
10	13.74	13.72
11	14.02	13.98
12	13.83	13.85
13	13.90	13.96
14	14.04	14.08
15	14.01	13.98
16	14.21	14.15
17	14.10	14.18
18	13.85	13.83
19	15.52	15.53

As conclusões a que cheguei, a respeito do «preto», devem também ser válidas para os filtros «amarelo» e «vermelho». As médias são também muito aproximadas.

*

* *

Foi calculada para o sexo feminino uma *recta de regressão* pelos mesmos processos anteriormente usados. O coeficiente de regressão é:

$$\begin{aligned}
 b_{yx} &= \frac{(x \cdot y) - T_x \cdot T_y / n'}{(x^2) - T_x^2 / n'} \\
 &= \frac{69941.3 - 5306.0 \cdot 5613.5 / 428}{69296.0 - 5306.0^2 / 428} = \frac{349.64}{3616.48} \\
 &= 0.0994 .
 \end{aligned}$$

A equação de regressão será, pois,

$$\begin{aligned}
 Y &= \bar{y} + b_{yx} \cdot (x - \bar{x}) \\
 &= 13.116 + 0.0994 (x - 12.397)
 \end{aligned}$$

$$Y = 11.884 + 0.0994 x .$$

A recta correspondente a esta equação está representada, conjuntamente com a linha de união das médias observadas, na *fig. 8*. O ajustamento parece razoável, o que é natural, dadas as pequenas diferenças que fazem as médias vizinhas. Os resultados para as ♀ devem, contudo, ser semelhantes qualitativamente aos obtidos para o outro sexo e apenas diferir quantitativamente; por estas razões, é natural que uma curva logarítmica se adapte melhor. Convém, portanto, verificar o significado da regressão linear e, depois, atestar a linearidade.

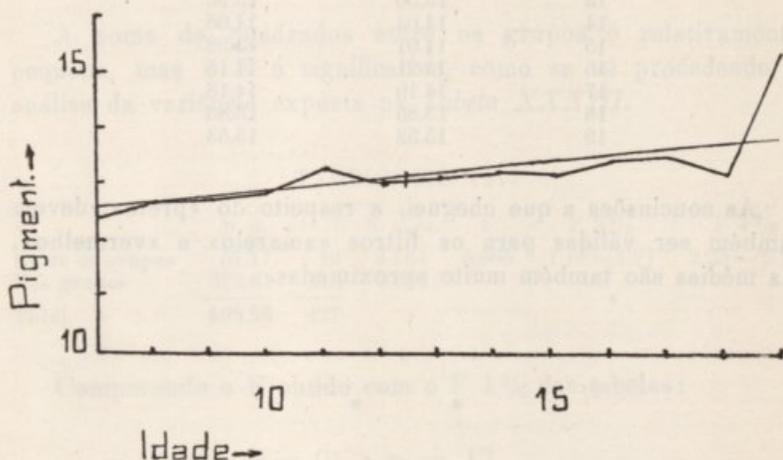


FIG. 8

Recta de regressão calculada para o «preto» (em unidades do pigmentómetro) da côr do cabelo, nas ♀. Conjuntamente, as médias das várias idades (anos).

A significação foi julgada pelo processo da análise da variância, como para o outro sexo. A soma de quadrados *total* é a mesma da anterior análise:

$$\Sigma (y - \bar{y})^2 = 429.98,$$

e a soma de quadrados correspondentes à *função de regressão*:

$$\begin{aligned} b^2 \cdot \Sigma (x - \bar{x})^2 &= 0.0994^2 \cdot 3516.48 \\ &= 34.74. \end{aligned}$$

A análise final está na *Tabela XXXV*.

TABELA XXXV

	S. q.	G. l.	Var.	F	F 5%	F 1%
Função de regressão	34.74	1	34.740	37.435	3.86	6.70 — 6.69
Desvios da f. de regressão	395.24	426	0.928			
Total	429.98	427				

O F obtido é muito superior ao correspondente 1% (e, portanto, ainda mais em relação ao ponto 5%). Para o ponto 1% vem nas tabelas:

$$\text{para } P = .01 \quad n_1 = 1 \\ n_2 = 400 \quad F = 6.70$$

$$n_1 = 1 \\ n_2 = 500 \quad F = 6.69.$$

A recta de regressão é significativa em relação ao erro que envolve.

*

* * *

Para se atestar a *não-linearidade* (ou linearidade) usei o processo anteriormente empregado. As somas de quadrados necessárias são: Soma de quadrados dos *desvios das médias das linhas para a função de regressão*

$$\begin{aligned} \sum n'_p (\bar{y}_p - Y)^2 &= \sum n'_p (\bar{y}_p - \bar{y})^2 - b^2 \cdot \sum (x - \bar{x})^2 \\ &= 57.17 - 34.74 \\ &= 22.43 \end{aligned}$$

e para dentro das linhas

$$\begin{aligned} \sum \sum (y - \bar{y}_p)^2 &= \sum (y - \bar{y})^2 - \sum n'_p (\bar{y}_p - \bar{y})^2 \\ &= 429.92 - 57.17 \\ &= 372.81 \end{aligned}$$

A análise da variância encontra-se na *Tabela XXXVI*.

TABELA XXXVI

	S. q.	G. l.	Var.	F	F 5%	F 1%
Desvios entre as médias das linhas e a função de regressão	22.43	11	2.039	2.270	1.96	2.56 — 2.55
Dentro das linhas	372.81	415	0.898		1.78 — 1.77	2.23 — 2.22
		426				

Nas tabelas de F encontram-se os seguintes valores :

$$\text{para } P = .05 \quad n_1 = 8 \\ n_2 = 400, 500 \quad F = 1.96$$

$$n_1 = 12 \\ n_2 = 400 \quad F = 1.78$$

$$n_1 = 12 \\ n_2 = 500 \quad F = 1.77.$$

Esta análise demonstra que *há evidência de não-linearidade*. O valor calculado para o ponto $P = .01$, interpolando nas tabelas, para $n_1 = 11$ e $n_2 = 415$, é $F = 2.29$, aproximadamente o valor achado para F. Uma outra equação, representando uma curva, diferente da recta de regressão, poderá ajustar-se melhor. Como para os β , é natural pensar-se numa curva logarítmica da forma :

$$Y = a + b \cdot \log x \\ = a + b \cdot x_1$$

O respectivo coeficiente de regressão é :

$$b_{yx_1} = \frac{\Sigma (x_1 \cdot y) - T_{x_1} \cdot T_y / n'}{\Sigma (x_1^2) - T_{x_1}^2 / n'} \\ = \frac{6081.681872 - 462.73096 \cdot 5613.5 / 428}{504.908815 - 462.73096^2 / 428} = \frac{12.662610}{4.628492} \\ = 2.73579.$$

A equação é, portanto:

$$\begin{aligned} Y &= \bar{y} + b_{yx_1} \cdot (x_1 - \bar{x}_1) \\ &= 13.116 + 2.7358 (x_1 - 1.08115) \\ &= 10.1582 + 2.7358 \cdot x_1 \\ Y &= 10.1582 + 2.7358 \log x . \end{aligned}$$

Esta equação fornece a curva representada na *fig. 9*, conjuntamente com as médias observadas. O ajustamento é razoável, talvez um pouco melhor que o da recta. A significação da regres-

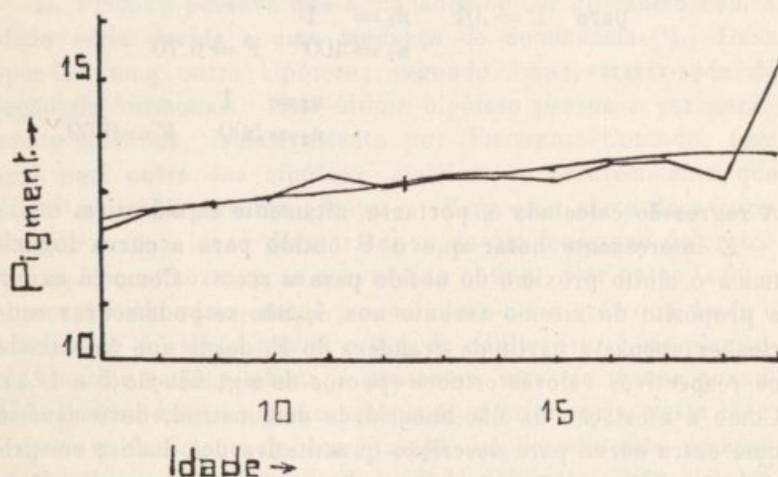


FIG. 9

Curva de regressão logarítmica, para as φ , comparada com as médias das várias idades. Ordenadas em unidades do pigmentómetro, idade em anos.

são logarítmica foi atestada pela análise da variância. As somas de quadrados necessárias são as seguintes: Soma de quadrados para a função de regressão

$$\begin{aligned} b^2 \cdot \Sigma (x - \bar{x})^2 &= 2.7358^2 \cdot 4.628492 \\ &= 34.647503 \end{aligned}$$

e para os desvios da função de regressão

$$\begin{aligned} \Sigma (y - Y)^2 &= \Sigma (y - \bar{y})^2 - b^2 \cdot \Sigma (x - \bar{x})^2 \\ &= 429.98 - 34.647503 \\ &= 395.332497 . \end{aligned}$$

A parte final da análise encontra-se na *Tabela XXXVII*.

TABELA XXXVII

	S. q.	G. L.	Var.	F	F 5%	F 1%
Função da regressão	34.647503	1	34.647503	37.335	3.86	6.70—6.69
Desvios da f. de regressão	395.332497	426	0.928011			
Total	429.980000	427				

O F é muito maior do que o correspondente ponto 1%, visto que:

$$\begin{aligned} \text{para } P = .01 \quad n_1 = 1 \\ \quad \quad \quad n_2 = 400 \quad F = 6.70 \\ \\ \quad \quad \quad n_1 = 1 \\ \quad \quad \quad n_2 = 500 \quad F = 6.69. \end{aligned}$$

A regressão calculada é, portanto, altamente significativa.

É interessante notar que o F obtido para a curva logarítmica é muito próximo do obtido para a recta. Como já expuz a propósito do mesmo assunto nos ♂, não se podem tirar conclusões apenas a partir da grandeza de F, desde que ele excede os respectivos valores críticos (pontos de significação 5 e 1%). Como a atestação da não-linearidade demonstrou, deve usar-se uma outra curva para descrição quantitativa dos dados; em primeira análise e enquanto não se dispuser de dados mais extensos, pode tomar-se, como representativa, a curva logarítmica calculada.

Do que fica dito, e ainda por analogia com o que sucede nos ♂, conclui-se que *no sexo feminino o escurecimento da cor do cabelo com a idade pode descrever-se quantitativamente por intermédio de uma curva logarítmica.*

*

* *

A partir da semelhança quantitativa de dois fenómenos não se pode concluir para a sua identidade, como já referi citando PEARL, o que, de resto, é perfeitamente compreensível. Entre o crescimento da estatura ou do peso do corpo, no homem, e

entre o crescimento de «Cucurbita pepo», ou outro qualquer crescimento de seres vivos — há de comum a qualidade. O escurecimento com a idade, segundo a análise efectuada, parece seguir as mesmas curvas; é semelhante, quantitativamente, ao crescimento em geral e, aliás, era de esperar «a priori» que fôsse uma das formas de crescimento. Evidentemente, quando me refiro ao escurecimento com a idade faço-o sempre em relação ao «crescimento médio» analisado, e não ao individual. Têm aplicação, neste caso, tôdas as restricções a que estatisticamente estão sujeitas as conclusões baseadas sobre as médias.

E. FISCHER pensava que a mudança de côr do cabelo com a idade seria devida a uma mudança de dominância (1). LENZ opôs-lhe uma outra hipótese; segundo LENZ, tratar-se-ia de acção de hormonas. Esta última hipótese passou a ser geralmente admitida, inclusivamente por FISCHER. Contudo, nem uma nem outra das hipóteses atendem ao escurecimento que existe em raças escuras (pretos). Para uma parte do escurecimento com a idade deve tratar-se de um fenómeno de crescimento, como mostram as curvas que obtive. Por outro lado, a observação de vários casos pessoais leva-me a crer que desde o nascimento o cabelo tem já o tom do adulto, isto é, os pigmentos escuros estão também já presentes, mas em menor quantidade que no adulto. O escurecimento ulterior seria, neste caso, antes um fenómeno de crescimento, implicando esta designação que o escurecimento com a idade dependeria não simplesmente das hormonas (sexuais), mas de todos os factores de que depende o crescimento em geral. Genes especiais seriam responsáveis, também, por uma parte do escurecimento.

Evidentemente, o crescimento é um conjunto complexo dependente de várias causas e, notòriamente, das hormonas em geral (e não só das hormonas sexuais). A hipótese de LENZ explicaria, pois, uma parte da realidade. O crescimento está também na dependência directa de certos genes, como é bem conhecido. Pode supor-se que as coisas se passam, para a pigmentação, da

(1) *Dominância* em vez de *dominação*, como *variância* em vez de *variação*, *significância* por *significação* e *reflectância* em vez de *reflexão* — são neologismos, mas prestam, sem dúvida, grandes serviços por serem termos bem definidos, que permitem evitar a ambiguidade dos termos vulgares.

seguinte forma: A côr à nascença dependeria do genómio de que o indivíduo é portador, havendo genes que condicionam o pigmento claro, outros que condicionam o pigmento escuro, e outros o pigmento ruivo (cf. adiante constituição química dos pigmentos). Quando existam conjuntamente genes para as duas colorações, apenas a coloração clara se poderia manifestar com um pouco mais de intensidade porque, em virtude da sua maior afinidade para uma oxidase que deve intervir na realização da pigmentação, o pigmento claro consome quasi tóda esta oxidase e, portanto, o pigmento escuro mal se notará. Com o crescimento modificam-se as condições do «meio interno» e, havendo ou não maior quantidade de enzima, já se pode realizar o pigmento escuro. Mesmo nos casos em que apenas há genes para uma espécie de pigmento, o crescimento se faria sentir. Esta hipótese é quasi puramente especulativa, como, de resto, as outras hipóteses sobre o escurecimento com a idade. Adiante voltarei a esta questão depois de discutir a constituição dos pigmentos.

Correlações — Compleição

Um outro problema que anda ligado de perto ao da hereditariedade da pigmentação é o da correlação entre a côr da pele, cabelo e olhos. Admite-se, por analogia com o que se passa por exemplo no coelho, a existência de um factor geral que influencia tóda a pigmentação e cuja falta, ou existência no estado recessivo «albino», causa ausência total de pigmento. Outros genes alelos da mesma série, causam estados intermédios entre o albino e o de completa pigmentação, originando os fenótipos da série albina. Em virtude da existência deste factor geral, podem realizar-se pigmentações semelhantes para a pele, cabelo, pêlos e olhos, aparecendo, assim, uma determinada «compleição» pura (1). Factores particulares para cada região ou órgão, causariam «compleições» mais ou menos características.

(1) No sentido usual, empregado, por exemplo, por E. FISCHER a pág. 133 de BAUR-FISCHER-LENZ, 1936.

A correlação será, até certo ponto, uma medida deste factor basilar, depois de deduzidas as modificações de carácter somático. A determinação das correlações terá, portanto, muito interesse, aumentado ainda pela circunstância de se tratar de determinações quantitativas. Correlações estabelecidas a partir de categorias de ordem qualitativa, por processos de cálculo apropriados, existem há muito para várias populações (v., por exemplo, PEARSON 1904). O método usado neste trabalho permite abordar o problema directamente pelo coeficiente de correlação. Além disto, são efectuadas algumas análises para a covariância, que podem ter algum interesse.

Correlação entre a côr da pele e a dos olhos — δ . — As correlações foram apenas calculadas para o «preto».

Como se sabe, o coeficiente de correlação é:

$$r = \frac{\Sigma [(x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})]}{n' \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Para os cálculos, esta fórmula não é muito prática e deve substituir-se por outras, directamente dela derivadas, atendendo à definição de desvio-padrão e de média. A fórmula que usei é a seguinte:

$$r = \frac{\Sigma (x \cdot y) - T_x \cdot T_y}{\sqrt{[n' \cdot \Sigma (x^2) - T_x^2] \cdot [n' \cdot \Sigma (y^2) - T_y^2]}}$$

Os coeficientes calculados para cada idade, bem como o número de pares de observações, encontram-se na *Tabela XXXVIII*.

Os coeficientes para as varias idades são bastante aproximados, exceptuando os três últimos, que se fundam sobre um pequeno número de observações. Não considerando as três últimas idades, o maior coeficiente é o de 16 anos.

O significado do coeficiente de correlação pode conhecer-se achando o seu erro médio, ou melhor, calculando o respectivo *t*:

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{1 - r^2}}$$

t depende apenas de r e do número de graus de liberdade n ; o número de graus de liberdade é, no caso do coeficiente de correlação, menos 2 que o número de pares de observações: $n = n' - 2$. Para os diferentes valores de n e de r existem tabelas que dão o respectivo P (probabilidade de ocorrência ocasional) para vários níveis de significação. Está neste caso a tabela V-A de FISHER 1932. Verifica-se por esta tabela que para a significância 5%, o nível adoptado como significativo, o valor correspondente a $n = 20$ é $r = 0.4227$ e para $n = 25$ é $r = 0.3809$, enquanto que para $n = 5$ será $r = 0.7545$. O

TABELA XXXVIII

Anos	n'	Coef. de correl.
8	21	0.190
9	17	0.128
10	17	0.151
11	21	0.101
12	30	0.076
13	22	0.054
14	23	0.137
15	19	0.313
16	23	0.347
17	21	0.281
18	17	0.341
19	10	0.339
20	4	0.605
21	6	0.606
22	3	0.759

maior dos coeficientes de correlação não é, portanto, significativo e, com maioria de razão, todos os outros também o não são. É possível que se conseguisse obter um coeficiente significativo desde que se juntassem vários anos, ou, mesmo, todas as observações. Mas, para que tal se possa fazer legitimamente é necessário analisar previamente a covariância, isto é, verificar se existe homogeneidade ou heterogeneidade quanto aos coeficientes de correlação calculados (ou, o que é o mesmo, se há diferenças significativas entre as correspondentes regressões).

O processo de análise é aproximadamente semelhante ao da análise da variância; de novo, é preciso calcular além das somas de quadrados, as somas de produtos.

A equação fundamental em que se baseia a *análise da covariância* é; na sua forma mais geral:

$$\sum_1^{n^k} (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) = \sum \sum_1^{n^k} (x - \bar{x}_i) \cdot (y - \bar{y}_i) + n' \cdot \sum_1^k (\bar{x}_i - \bar{x}) \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}), \dots \dots \dots (1)$$

em que a notação é a já usada para as análises da variância.

Nesta equação, o primeiro membro representa a *soma de produtos total* (expressão abreviada de «soma de produtos dos desvios da média»); o primeiro termo do 2.º membro corresponde à *soma de produtos dentro dos grupos* e o segundo termo à *soma de produtos entre os grupos*.

Esta análise pode ampliar-se para outros casos mais complexos, em que há dois ou mais critérios de classificação (caso de classes e grupos, ainda com sub-classes, etc.).

A igualdade (1) ainda se verifica quando o número de observações é diferente de grupo para grupo, tal como acontece para a análise da variância; basta substituir em (1) n' por n'_i e $\sum_1^{n^k}$ por $\sum_1^k n'_i$.

Podemos comparar-se a soma de produtos entre os grupos com a dentro dos grupos, servindo esta como erro. Na prática, recorre-se, para a efectuação dos cálculos, às seguintes igualdades: Para o *total*

$$\sum \sum (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) = \sum (x \cdot y) - T_x \cdot T_y / N' \dots (2)$$

e para a *soma entre os grupos*

$$n'_i \cdot \sum_1^k (\bar{x}_i - \bar{x}) \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}) = \sum_1^k (T_{x_i} \cdot T_{y_i}) / n'_i - T_x \cdot T_y / N' \dots (3)$$

Para *dentro dos grupos* acha-se a diferença (2)-(3).

Nestas igualdades, $N' = \sum_1^k n'_i$. Facilmente se demonstram (2) e (3) atendendo à definição de média (como para a análise da variância).

Estes processos são próprios para o caso em que ainda se não calcularam os coeficientes de correlação e se requerem aná-

lises de covariância com outras finalidades. Quando, porém, os coeficientes já estão calculados, o método mais simples consiste em achar primeiro a soma de produtos dentro dos grupos e, por subtracção para o total, a soma de produtos entre os grupos. A maneira de proceder está indicada praticamente, para o presente caso, na *Tabela XXXIX*. É preciso calcular para dentro dos grupos:

$$\begin{aligned} \Sigma (y - \bar{y}_i)^2 - [\Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})]^2 / \Sigma (x - \bar{x}_i)^2 = \\ = \Sigma \left\{ (y - \bar{y}_i)^2 - b_{y_i x_i} \cdot [\Sigma (x - \bar{x}_i) (y - \bar{y}_i)] \right\}. \end{aligned}$$

Para o *total* servem os mesmos processos de cálculo, apenas se entrando também com os totais das respectivas colunas, como se vê pela tabela, sem haver necessidade de se calcularem os desvios em relação à média geral e depois achar as respectivas somas de produtos.

TABELA XXXIX

Anos	1) G. l.	2) $\Sigma (x - \bar{x}_i)^2$	3) $\Sigma (y - \bar{y}_i)^2$	4) $\Sigma (x - \bar{x}_i)(y - \bar{y}_i)$	4 ²)	5)-4 ²)/2)	6)-3)-5)	G. l.
8	20	3.16	204.46	4.81	23.1361	7.32	195.14	19
9	16	1.51	87.66	1.47	2.1609	1.43	86.23	15
10	16	2.32	67.71	1.89	3.5721	1.54	66.17	15
11	20	2.41	329.88	2.85	7.8961	3.28	326.60	19
12	29	12.10	197.79	3.71	13.7641	1.14	196.65	28
13	21	3.29	446.29	2.08	4.3264	1.32	444.97	20
14	22	3.37	200.15	3.56	12.6736	3.76	196.39	21
15	18	9.83	135.92	11.44	130.8736	13.31	122.61	17
16	22	5.69	91.55	7.91	62.5681	11.00	80.55	21
17	20	6.39	191.75	9.85	97.0225	15.18	176.57	19
18	16	3.90	111.85	7.25	52.5625	13.48	98.37	15
19	9	3.88	278.07	11.13	123.8769	31.93	246.14	8
20	3	0.97	3.93	1.18	1.3924	1.44	2.49	2
21	5	3.70	18.82	5.06	25.6036	6.92	11.90	4
22	2	0.42	3.73	0.95	0.9025	2.15	1.58	1
						115.20	2252.36	224
	239	62.94	2367.56	75.14	5646.0196	90.35	2277.21	

Esta maneira de proceder aos cálculos é conveniente para se compreender como aparecem os graus de liberdade para cada soma de produtos. Nos cálculos entra-se implicitamente com o coeficiente de regressão (ou o de correlação); *para o total* perde-se um grau de liberdade por cada grupo e mais um grau para o coeficiente geral; *para os grupos* perde-se um grau, como é costume; e *para dentro dos grupos* perde-se mais um

grau por cada grupo, além do que já se tinha perdido para o total. Os graus de liberdade serão, portanto: para o total $[(\sum_1^k n'_i - k) - 1]$, sendo k o número de grupos; para entre os grupos $(k - 1)$; para dentro dos grupos a diferença, igual a $[\sum_1^k (n'_i - 2)]$.

Na Tabela XXXIX estão expostos os cálculos.

A soma de produtos (soma de quadrados de produtos) total é:

$$\begin{aligned} \Sigma \Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) &= 2367.56 - 90.35 \\ &= 2277.21 \end{aligned}$$

e a soma de produtos dentro dos grupos:

$$\Sigma \{ (y - \bar{y}_i)^2 - b_{y \cdot x_i} \cdot [\Sigma (x - \bar{x}_i) \cdot (y - \bar{y}_i)] \} = 2252.36.$$

A análise final está exposta na Tabela XL.

TABELA XL

	S. q. p.	G. l.	Var.	F	F 5%	F 1%
Total	2277.21	238				
Dentro dos grupos	2252.36	224	10.005			
Entre os grupos	24.85	14	1.755	5.729	2.13	3.00

A soma de produtos (nesta e seguintes tabelas S. q. p. representa a soma de quadrados de produtos), correspondente a entre os grupos, é muito pequena comparada com a soma dentro dos grupos. A variância entre os grupos é muito menor do que o erro (dentro dos grupos). No entanto, o F obtido é muito superior ao correspondente ponto 1%, visto que é:

$$\begin{aligned} \text{para } P = .01 \quad n_1 &= \infty \\ n_2 &= 14 \quad F = 3.00. \end{aligned}$$

A atestação da variância consiste no julgamento da diferença de duas variâncias. No caso presente, nota-se que o erro é muito maior que a variância que se quer atestar — a variância entre os grupos é anormalmente baixa. A análise da covariância revelou heterogeneidade, provavelmente derivada desta causa. É também provável que uma variância dentro dos grupos com esta grandeza, seja em parte devida ao método usado, particularmente para a determinação da cor dos olhos.

Nestas condições, não se pode usar um só coeficiente de correlação para representar a correlação entre a cor da pele e da zona interna dos olhos no caso das amostras do sexo masculino que constituem o material analisado. O julgamento seguro baseado na análise da covariância levou a um resultado um tanto inesperado: era-se tentado a calcular um único coeficiente de correlação para todas as observações, o que, no entanto, não se pode fazer. Seria interessante investigar a causa da anormal variância encontrada entre os grupos (comparada com a anormalmente alta dentro dos grupos). Voltarei a esta questão mais adiante.

Correlação entre a cor da pele e dos olhos — ♀. — Foram aplicados ao sexo feminino os mesmos processos descritos para o outro sexo. Assim, foram calculadas as correlações para cada idade — e os respectivos coeficientes, bem como o número de observações, são os da *Tabela XLI*.

TABELA XLI

Anos	n'	Coef. de correl.
7	12	0.637
8	33	0.306
9	36	0.402
10	35	0.179
11	55	0.114
12	45	0.236
13	59	0.106
14	46	0.072
15	41	0.075
16	30	0.168
17	19	0.378
18	10	0.141
19	6	0.697

Alguns dos coeficientes são significativos (significativamente diferentes de zero) — estão nestas condições os de 7 e 9 anos, os restantes são insignificativos. Por este rápido exame se reconhece que deve haver heterogeneidade na covariância. Para se poderem tirar conclusões seguras efectuei a respectiva análise com os dados contidos na *Tabela XLII*.

Calculando o valor das somas de quadrados de produtos, obtém-se: Para o total

$$\begin{aligned} \Sigma \Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) &= 3923.04 - 181.61 \\ &= 3741.43 \end{aligned}$$

e para dentro dos grupos

$$\Sigma \left\{ (y - \bar{y}_i)^2 - b_{y \cdot x_i} \cdot [\Sigma (x - \bar{x}_i) \cdot (y - \bar{y}_i)] \right\} = 3537.05.$$

TABELA XLII

Anos	1) G. l.	2) $\Sigma (x - \bar{x}_i)^2$	3) $\Sigma (y - \bar{y}_i)^2$	4) $\Sigma (x - \bar{x}_i)(y - \bar{y}_i)$	4 ²)	5)-4) ² / 2)	6)-3) - 5)	G. l.
7	11	0.99	355.49	11.94	142.5636	144.01	211.48	10
8	32	2.68	226.88	7.55	57.0025	21.27	205.61	31
9	35	5.17	404.99	18.35	336.7225	65.13	339.86	34
10	34	1.57	337.62	4.12	16.9744	10.81	326.81	33
11	54	3.60	599.41	5.30	28.0900	78.03	521.38	53
12	44	3.51	550.30	8.03	64.4809	18.37	331.93	43
13	58	3.25	379.46	3.32	10.3684	3.19	376.27	57
14	45	3.32	342.43	2.41	5.8081	1.75	340.68	44
15	40	2.16	295.20	1.89	3.5721	1.65	293.55	39
16	29	2.50	396.87	5.30	28.0900	11.24	385.63	28
17	18	1.19	124.23	4.59	21.0681	17.70	106.53	17
18	9	0.18	84.13	0.54	.2916	1.62	82.51	8
19	5	0.04	26.03	0.67	.4489	11.22	14.81	4
						385.99	3537.05	401
	414	30.16	3923.04	74.01	5477.4801	181.61	3741.43	

A análise final, baseada sobre estes dados, está exposta na Tabela XLIII.

TABELA XLIII

	S. q. p.	G. l.	Var.	F	F 5%	F 1%
Total	3741.43	413				
Dentro dos grupos	3537.05	401	8.821			
Entre os grupos	204.38	12	17.032	1.931	1.78 — 1.77	2.23 — 2.22

Para F, nos pontos 5% e 1%, encontra-se:

para $P = .05$ $n_1 = 12$
 $n_2 = 400$ $F = 1.78$

$n_1 = 12$
 $n_2 = 500$ $F = 1.77$

para $P = .01$ $n_1 = 12$
 $n_2 = 400$ $F = 2.23$

$n_1 = 12$
 $n_2 = 500$ $F = 2.22.$

O F encontrado é superior ao F correspondente ao ponto 5%, mas é inferior ao ponto 1%. A conclusão é que há heteroge-

neidade na covariância analisada. A explicação desta diferença parece ser um tanto difícil. Na tabela XLI nota-se uma diminuição do coeficiente de correlação nos anos médios da tabela, a partir dos 10 e até aos 15, coincidindo mais ou menos com o período que habitualmente se considera de evolução da puberdade. Poder-se-ia pensar em alterações da compleição; mas as análises da variância, realizadas sobre a cor da pele e dos olhos, não suportam esta conclusão.

Outra circunstância a ponderar é a de o F não exceder tanto o ponto .05 que se possa considerar este resultado como firmemente estabelecido. Também se poderiam supor outras hipóteses relativas à constituição das amostras de cada idade; porém ressalta claramente do que disse, que convém, antes de ir mais longe em explicações, analisar material mais numeroso e de diferentes proveniências.

Como resultado adquirido, pode afirmar-se que *segundo a análise efectuada, não se pode calcular para os representantes do sexo feminino que constituem as amostras, um único coeficiente de correlação representativo de todo o colectivo para a correlação entre o «preto» da cor da pele e da zona interna da iris.*

Correlação entre a cor da pele e a do cabelo — δ . — Continuando com os mesmos métodos, obtive para as correlações entre o «preto» da cor da pele e o «preto» da cor do cabelo os valores da *Tabela XLIV*. Da tabela constam também os números de observações para cada idade.

TABELA XLIV

Anos	n'	Coef. de correl.
8	21	0.221
9	17	0.331
10	16	0.147
11	21	— 0.068
12	30	— 0.100
13	20	— 0.221
14	23	0.349
15	18	0.423
16	23	0.352
17	21	0.072
18	17	0.626
19	10	0.557
20	4	0.737
21	6	0.277
22	3	0.577

Apenas a correlação 0.626 para os 18 anos, com $n=n'-2=15$ graus de liberdade, é significativa; as restantes, embora algumas bastante altas, não são fundadas sobre número suficiente de observações, ou então, os seus valores são realmente baixos. Aparentemente deve haver heterogeneidade. A análise da covariância pode efectuar-se com os dados da *Tabela XLV*.

TABELA XLV

Anos	1) G. l.	2) $\Sigma(x-\bar{x}_i)^2$	3) $\Sigma(y-\bar{y}_i)^2$	4) $\Sigma(x-\bar{x}_i)(y-\bar{y}_i)$	4) ²	5)-4) ² /2)	6)-3)-5)	G. l.
8	20	3.16	18.07	1.67	2.7889	0.88	17.19	19
9	16	1.51	9.11	1.22	1.4884	0.99	8.12	15
10	15	2.29	14.06	0.83	0.6889	0.30	13.76	14
11	20	2.41	38.76	-0.66	0.4356	0.18	38.58	19
12	29	12.31	54.75	-2.60	6.6700	0.55	54.20	28
13	19	2.35	23.38	-1.64	2.6896	1.14	22.84	18
14	22	3.37	28.91	3.45	11.9025	3.53	25.38	21
15	17	9.80	30.52	7.31	53.4361	5.45	25.07	16
16	22	6.50	18.93	3.91	15.2881	2.35	16.58	21
17	20	6.39	26.68	0.94	0.8836	0.13	26.55	19
18	16	3.90	25.97	6.30	39.6900	10.18	15.79	15
19	9	3.38	24.41	5.42	29.3764	8.69	15.72	8
20	3	0.97	1.39	0.86	0.7396	0.76	0.63	2
21	5	3.70	14.28	2.01	4.0401	1.09	13.19	4
22	2	0.42	0.78	0.33	0.1089	0.26	0.52	1
						36.48	293.52	220
	235	62.46	330.00	29.35	861.4225	13.79	316.21	

A soma de produtos total é:

$$\Sigma \Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) = 330.00 - 13.79 \\ = 316.21$$

e para dentro dos grupos:

$$\Sigma \{ (y - \bar{y}_i)^2 - b_{y \cdot x_i} \cdot [\Sigma (x - \bar{x}_i) \cdot (y - \bar{y}_i)] \} = 293.52.$$

Na *Tabela XLVI* está representada a análise final.

TABELA XLVI

	S. q. p.	G. l.	Var.	F	F 5%	F 1%
Total	316.21	234				
Dentro dos grupos	293.52	220	1.334			
Entre os grupos	22.69	14	1.621	1.215	1.73	2.28-2.24-1.88-1.85

O F obtido não tem a necessária significância. Com efeito, nas tabelas encontra-se para o ponto 5⁰/₀:

$$\text{para } P = .05 \quad \begin{array}{l} n_1 = 12 \\ n_2 = 200 \end{array} \quad F = 1.80$$

$$\begin{array}{l} n_1 = 12 \\ n_2 = 300 \end{array} \quad F = 1.79$$

$$\begin{array}{l} n_1 = 24 \\ n_2 = 200 \end{array} \quad F = 1.57$$

$$\begin{array}{l} n_1 = 24 \\ n_2 = 300 \end{array} \quad F = 1.55.$$

Será talvez conveniente interpolar para este caso, a-fim-de se ver com mais aproximação a diferença entre o F obtido e o correspondente para $P = .05$. Interpolando como é habitual, encontra-se o valor 1.73 que figura na tabela XLVI. Pode afirmar-se, portanto, que *não há heterogeneidade quanto à covariância*.

Observa-se na tabela XLIV uma tendência para os coeficientes aumentarem a partir dos 14 anos, ao mesmo tempo que existem correlações pequenas e negativas entre os 10 e os 14 anos, dando o conjunto a impressão de uma certa heterogeneidade, que não foi confirmada pela análise. Pode proceder-se ao cálculo de um coeficiente de correlação geral, visto não haver heterogeneidade. O coeficiente geral é:

$$r = 0.2044.$$

O coeficiente é relativamente baixo, mas é significativo, como se vê pela tabela própria de FISHER 1932. Calculando o estatístico t , pode apreciar-se mais precisamente a significação do coeficiente. Encontra-se (1):

$$t = \frac{0.2044}{\sqrt{(1-0.2044)^2}} \cdot \sqrt{250} \\ = 10.44,$$

enquanto que no ponto $P = .01$, para $n = 360$ é $t = 2.592$.

(1) Podem usar-se tábuas de $1 - r^2$ e $\sqrt{1 - r^2}$, como as de J. R. MINER.

Também podia usar-se o erro médio do coeficiente para dar uma ideia da sua significância:

$$e_r = 0.01917.$$

Correlação entre a cor da pele e a do cabelo — ρ . — As correlações encontradas para o « preto » da pele e da zona interna da íris no sexo feminino, estão na *Tabela XLVII*.

TABELA XLVII

Anos	n'	Coef. de correl.
7	12	0.509
8	33	0.803
9	36	0.535
10	35	-0.132
11	55	0.039
12	45	0.275
13	59	0.129
14	46	0.076
15	41	-0.004
16	30	0.297
17	19	-0.174
18	10	0.122
19	6	-0.012

São significativos os coeficientes para os 8 e os 9 anos. Dada a diversidade dos coeficientes, parece que deve haver heterogeneidade. A *Tabela XLVIII* fornece os dados para uma análise, como é usual.

TABELA XLVIII

Anos	1)	2)	3)	4)	4 ²)	5)=4) ² /2)	6)=3)-5)	G. I.
	G. I.	$\Sigma(x-\bar{x}_i)^2$	$\Sigma(y-\bar{y}_i)^2$	$\Sigma(x-\bar{x}_i)(y-\bar{y}_i)$				
7	11	0.99	9.04	1.52	2.3104	2.33	6.71	10
8	32	2.68	355.48	24.78	614.0484	229.12	126.36	31
9	35	5.17	40.68	7.73	59.7529	11.56	29.12	34
10	34	1.57	20.87	-0.85	0.7225	0.46	20.41	33
11	54	3.60	89.45	0.70	0.4900	0.14	89.31	53
12	44	3.31	70.09	4.18	17.4724	5.28	64.81	43
13	58	3.25	53.16	1.69	2.8561	0.88	52.28	57
14	45	2.94	70.89	1.10	1.2100	0.41	70.48	44
15	40	2.16	35.53	-0.03	0.0009	0.00	35.53	39
16	29	2.50	46.55	3.21	10.3041	4.12	42.43	28
17	18	1.19	21.90	-0.89	0.7921	0.67	21.23	17
18	9	0.18	39.67	0.32	0.1024	0.57	39.10	8
19	5	0.04	4.14	-0.01	.0001	0.00	4.94	4
						255.54	602.71	401
	414	29.58	858.25	43.45	1887.9025	63.82	794.43	

As respectivas somas de produtos são: Para o *total*:

$$\begin{aligned}\Sigma \Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) &= 858.25 - 63.82 \\ &= 794.43\end{aligned}$$

e para *dentro dos grupos*:

$$\Sigma \left\{ (y - \bar{y}_i)^2 - b_{y_i x_i} \cdot [\Sigma (x - \bar{x}_i) \cdot (y - \bar{y}_i)] \right\} = 602.71,$$

o que dá a análise da covariância da *Tabela XLIX*:

TABELA XLIX

	S. q. p.	G. l.	Var.	F	F 5%	F 1%
Total	794.43	413				
Dentro dos grupos	602.71	401	1.503			
Entre os grupos	191.72	12	15.977	10.630	1.78 — 1.77	2.23 — 2.22

O F obtido é altamente significativo, como se reconhece comparando-o com o ponto 1% correspondente; nas tabelas de F encontra-se:

$$\begin{aligned}\text{para } P = .01 \quad n_1 &= 12 \\ n_2 &= 400 \quad F = 2.23 \\ n_1 &= 12 \\ n_2 &= 500 \quad F = 2.22.\end{aligned}$$

Há manifesta heterogeneidade na covariância entre o «preto» da cor da pele e o dos olhos (zona interna), tal como se pode determinar pelo método usado. No sexo masculino o resultado foi diferente. Era de esperar «a priori» que nas correlações onde entra a cor do cabelo houvesse heterogeneidade, dado o que se sabe do escurecimento da cor do cabelo com a idade. O resultado negativo que se obteve para os ♂, pode ser atribuído a uma excessiva variabilidade dentro dos grupos, o que se torna provável se se atender à tabela X, da análise da variância da cor da pele nos ♂. São necessárias outras observações para o esclarecimento desta e outras questões.

O que é certo, é que não se pode estabelecer uma única correlação entre a cor da pele e a do cabelo (num e noutro caso, considerando apenas o respectivo «preto») nas amostras do sexo feminino estudadas.

Correlação entre a cor do cabelo e a dos olhos — δ . — As correlações para este caso estão expostas na *Tabela L*.

TABELA L

Anos	n'	Coef. de correl.
8	21	0.568
9	17	0.248
10	16	0.711
11	22	0.405
12	31	-0.044
13	20	0.634
14	23	0.221
15	18	0.562
16	23	0.311
17	22	0.650
18	17	0.284
19	10	0.819
20	4	0.400
21	6	0.825
22	3	-0.094

São significativos os coeficientes para os 8, 10, 13, 15, 17, 19 e 21 anos. Os coeficientes das várias idades diferem muito e não se nota uma ordem de aumento ou de diminuição correspondendo à idade. A julgar pelas diferenças dos coeficientes, deve haver heterogeneidade. Os dados da *Tabela LI* servem para a efectuação de uma análise da covariância.

TABELA LI

Anos	1) G. L.	2) $\Sigma(x-\bar{x}_i)^2$	3) $\Sigma(y-\bar{y}_i)^2$	4) $\Sigma(x-\bar{x}_i)(y-\bar{y}_i)$	4) ²	5)=4) ² /2)	6)=3)·5)	G. L.
8	20	18.07	202.46	34.38	1181.9844	65.41	137.05	19
9	16	9.11	87.66	7.01	49.1401	5.39	82.27	15
10	15	14.06	67.70	21.94	481.3636	34.24	33.46	14
11	21	37.58	112.35	26.89	723.0721	19.24	93.11	20
12	30	55.29	197.90	-4.55	20.7025	0.37	197.53	29
13	19	23.38	432.83	63.76	4065.3376	173.88	258.95	18
14	22	28.91	200.15	16.81	282.5761	9.77	190.38	21
15	17	30.52	135.42	36.14	1306.0996	42.79	92.63	16
16	22	18.93	91.55	13.39	179.2921	9.47	82.08	21
17	21	35.32	199.59	54.55	2975.7025	84.25	115.34	20
18	16	25.97	115.85	15.59	243.0481	9.36	106.49	15
19	9	24.41	278.06	67.49	4554.9001	186.60	91.46	8
20	3	1.39	3.93	0.93	0.8649	0.63	3.30	2
21	5	14.28	18.82	13.53	183.0609	12.82	6.00	4
22	2	0.78	3.72	-0.16	0.0256	0.03	3.69	1
						654.25	1493.74	223
	238	338.00	2147.97	367.70	135203.2900	400.01	1747.96	

Da tabela extraem-se: Soma de produtos *total*:

$$\begin{aligned}\Sigma \Sigma (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) &= 2147.97 - 400.01 \\ &= 1747.96\end{aligned}$$

e dentro dos grupos:

$$\Sigma \left\{ (y - \bar{y}_i)^2 - b_{y, x_i} \cdot [\Sigma (x - \bar{x}_i) \cdot (y - \bar{y}_i)] \right\} = 1493.74$$

A análise final encontra-se na *Tabela LII*.

TABELA LII

	S. q. p.	G. l.	Var.	F	F 5%	F 1%
Total	1747.96	237				
Dentro dos grupos	1493.74	223	6.698			
Entre os grupos	254.22	14	18.199	2.711	1.73	2.28-2.24-1.88-1.85

O valor que figura na tabela para o ponto 5% é um valor interpolado, já anteriormente obtido. Porém, o F desta análise é superior ao correspondente ponto 1%, como se vê comparando-o com os valores seguintes:

para P = .01	$n_1 = 12$	
	$n_2 = 200$	F = 2.28
	$n_1 = 12$	
	$n_2 = 300$	F = 2.24
	$n_1 = 24$	
	$n_2 = 200$	F = 1.88
	$n_1 = 24$	
	$n_2 = 300$	F = 1.85.

Há, portanto, manifesta heterogeneidade e não se pode calcular um só coeficiente de correlação abrangendo todas as observações.

Correlação entre a cor do cabelo e dos olhos — ♀. — No sexo feminino obtive os coeficientes de correlação da *Tabela LIII*.

São significativos os coeficientes correspondentes aos 7 e 12 anos, o dos 9 anos está aproximadamente no limiar da signi-