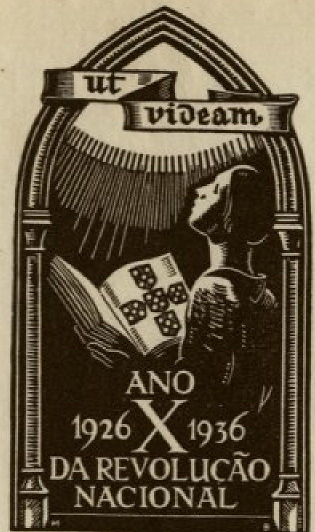
ut
videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

A FUNCÇÃO POTENCIAL

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O

ACTO DE CONCLUSÕES

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

POR

João Francisco Ramos
Licenciado na mesma Faculdade

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1873

A

SUA ESPOSA

Para mim és tu hoje o universo:
Sôa em vão o bulicio do mundo;
Que este existe sómente onde existes:
Tudo o mais é um ermo profundo.

A. Herculano — *Poesias*.

E A

SEUS FILHOS

De seus cabellos recende o aroma
Das castas rosas que o céo produz.

A. A. Soares de Passos.

D.

O Auctor.

É alheia ao nosso fim qualquer discussão com o intuito de saber se o facto conhecido pelo nome de *attracção* é ou não resultado d'uma propriedade inherente á materia ponderavel. Esse problema, se bem que o julguemos da maxima importancia, pomol'o de parte, pela consideração de que as cousas succedem por fórma determinada, em ordem a poderem explicar-se como consequencias d'uma hypothese particular. Que a materia ponderavel, despida de qualquer influencia extranha á sua essencia, tenha em si o poder de produzir os phenomenos que admiramos em ponto grande nos movimentos dos astros, ou que nestas manifestações seja apenas o objecto sobre que se exercem acções d'outra proveniencia, é indifferente: a lei conhecida da attracção, applicada com toda a latitude que comporta na epocha actual, é sufficiente para nos esclarecer do modo como as cousas se passam, e por conseguinte a adopção definitiva que faremos d'esta lei não pode em rigor ser taxada de menos conveniente. Se por ventura fazemos algumas reflexões a este respeito no corpo do trabalho que apresentamos, são ellas tão resumidas e tão encostadas a nomes respeitaveis na sciencia, que julgamos não recahir, por este facto, em contradicção.

Exponhamos o fim a que mira o nosso trabalho na ordem de ideas que acabamos de indicar.

Supponha-se um corpo de fórma qualquer, dotado da propriedade de attrahir um ponto material segundo a lei de Newton. Designando ρ a sua densidade, a qual pode variar d'um ponto para outro, procuremos as componentes da acção, que elle exerce sobre o ponto de massa μ, cujas coordenadas a respeito dos tres eixos são α, β, γ. Dividindo o corpo em elementos, calculemos a acção que cada um d'elles exerce sobre μ; a acção total será resultante das que os diversos elementos exercem separadamente. Ora, sendo $dx\, dy\, dz$ o volume d'um elemento, a sua massa será $\rho\, dx\, dy\, dz$, e designando r a distancia a que elle se acha do ponto (α, β, γ), será, por virtude da lei, considerada,

$$\frac{f \mu \rho\, dx\, dy\, dz}{r^2}$$

a attracção que o elemento em questão exerce sobre a massa μ, sendo f a que se exerceria entre duas unidades de massa, collocadas á unidade de distancia. Decompondo esta acção, que naturalmente tem logar na direcção das partes actuantes, no sentido dos eixos coordenados, para o que basta multiplical-a respectivamente pelos cosenos dos angulos que a sua direcção faz com cada um d'elles, serão essas componentes

$$f\mu\rho\frac{x-\alpha}{r^3}\,dx\,dy\,dz,\quad f\mu\rho\frac{y-\beta}{r^3}\,dx\,dy\,dz,\quad f\mu\rho\frac{z-\gamma}{r^3}\,dx\,dy\,dz.$$

As componentes da acção total exercida pelo corpo serão respectivamente

$$X=f\mu\iiint\rho\frac{x-\alpha}{r^3}\,dx\,dy\,dz,$$

$$Y=f\mu\iiint\rho\frac{y-\beta}{r^3}\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z=f\mu\iiint\rho\frac{z-\gamma}{r^3}\,dx\,dy\,dz$$

nas quaes teremos de fazer a tripla integração indicada, bastando apenas mudar o signal para comprehender o caso em que ha repulsão.

Se fizermos

$$U = \iiint \rho \frac{dx\,dy\,dz}{r}$$

podemos escrever as expressões precedentes como se segue

$$X = f\mu \frac{dU}{d\alpha},\; Y = f\mu \frac{dU}{d\beta},\; Z = f\mu \frac{dU}{d\gamma}$$

visto que é permittido differenciar em ordem a α, β, γ debaixo do signal $\int$. A funcção U fornece-nos pois o meio de reduzir a um só os tres integraes. É de uma funcção d'esta natureza que vamos occupar-nos, e que, como U, goza da mesma propriedade. Além d'esta propriedade, tem essa funcção um dominio tão extenso nas mathematicas applicadas, que a escolhemos para objecto da prova escripta a que somos obrigados por lei. Não nos move a pretensão de apresentar uma novidade, por estarmos convencidos do pouco que podemos; mas são tão importantes, na ordem dos conhecimentos humanos, os objectos a que esta doutrina presta valiosos auxilios, que julgámos nos seria proveitoso dirigir para este ponto a nossa attenção. Cremos que isto bastará para justificar a escolha que fizemos.

CAPITULO PRIMEIRO

I

Se houver uma funcção U, tal que seja

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}$$

sendo X, Y, Z as componentes, parallelas a tres eixos rectangulares, da força que um corpo dotado d'essa faculdade exerce sobre um ponto, podemos, por meio d'ella, achar todas as quantidades que são necessarias para a determinação d'essa força. Com effeito, representando a força por P, sabe-se que a sua intensidade é dada por

$$P = \sqrt{\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2};$$

e a sua direcção pode tambem muito simplesmente determinar-se, porquanto, designando α, β, γ, os angulos que ella faz com os tres eixos, é

$$X=P\cos\alpha,\quad Y=P\cos\beta,\quad Z=P\cos\gamma$$

d'onde

$$\cos\alpha=\frac{X}{P},\quad \cos\beta=\frac{Y}{P},\quad \cos\gamma=\frac{Z}{P}\,\ldots\ldots\ (1)$$

Para uma qualquer direcção s que faça um angulo φ com a direcção de P, é a componente S d'esta força

$$S=P\cos\varphi;$$

e como é

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos'\alpha+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',$$

sendo α', β', γ' os angulos de s com os tres eixos, e por conseguinte

$$\cos\alpha'=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta'=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma'=\frac{dz}{ds}\,\ldots\ (2)$$

será

$$S=\frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{dU}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{dU}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}$$

$$=\frac{Ud}{ds},$$

o que quer dizer que a fórma da expressão da componente, fornecida pela funcção U, é a mesma para todas as direcções. Conhecida pois a funcção U, facil se torna a determinação do que é relativo a P, isto é, á sua intensidade e direcção, se todavia U satisfizer á condição de que partimos.

Consegue-se ainda isto mesmo por considerações d'outra ordem, não menos importantes que as precedentes.

A equação

$$U=A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

na qual é A uma constante, representa uma superficie. Differenciando-a em ordem ás tres variaveis que suppomos entrarem nella, virá

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dz}dz=0;$$

e como dx, dy, dz, representam as componentes d'um deslocamento ds, executado sobre a superficie por um ponto que é obrigado a permanecer sobre ella, dividindo esta ultima por Pds, virá

$$\frac{\frac{dU}{dx}}{P}\frac{dx}{ds}+\frac{\frac{dU}{dy}}{P}\frac{dy}{ds}+\frac{\frac{dU}{dz}}{P}\cdot\frac{dz}{ds}=0.$$

Em virtude de (1) e (2), esta expressão indica que a direcção de P faz um angulo recto com o plano tangente á superficie no ponto considerado, visto que nada suppozemos sobre o sentido do movimento ds. Noutro qualquer ponto da superficie succede o mesmo, e por conseguinte a direcção de P é, em cada ponto de $U=A$, indicada pela sua respectiva normal.

A superficie representada por (3) recebeu o nome de *superficie de nivel* pela analogia com o que tem logar na superficie liquida em equilibrio subjeita á acção da gravidade.

Vejamos como se conseguirá determinar a intensidade de P. Para isso juntemos a A uma constante infinitamente pequena α; a equação (3) tornar-se-ha

$$U_1=A+\alpha,$$

e esta representará outra superficie que goza das mesmas propriedades que a primeira. E como ella será infinitamente proxima d'esta ultima, designando por δ a mais curta distancia entre as duas, a qual pode e deve avaliar-se segundo a normal, chamando $dU = U_1 - U$, será

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{dU}{dn}$$

quando suppozermos que n indica a direcção da sobredicta normal. Mas, pelo que vimos já, é $\frac{dU}{dn}$ a componente da força P na direcção da normal; e como tambem já vimos que a direcção de P é normal á superficie, segue-se que a componente $\frac{dU}{dn}$ de P na direcção da normal é o proprio valor de P, ou

$$P = \frac{\alpha}{\delta}.$$

Fica pois bem claro que a funcção U, nos casos em que pode ter logar, fornece os elementos necessarios para a determinação da força; por esta razão lhe deu Hamilton o nome, que hoje conserva, de *funcção de força.*

II

Dos cazos em que ha funcção de força mencionaremos apenas o seguinte por estar intimamente ligado com o objecto de que nos ocupamos.

Supponhamos que um ponto p' do espaço é sollicitado por forças residentes n'outros pontos p, p_1, p_2, ... forças que se exercem egualmente em todos os sentidos á roda dos dictos pontos, e com intensidades variaveis com as distancias a partir dos centros d'acção. Designando x', y', z', as coordenadas de p', x, y, z, as de p, a respeito de tres eixos coordenados rectangulares, e sendo r a distancia entre elles, será

$$r=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2} \ldots \quad (4)$$

A intensidade com que a força actua pode representar se, segundo a nossa hypothese, por fr; e convenciona-se que ao valor positivo d'esta funcção corresponde uma força attractiva, e ao negativo uma repulsiva. A recta que liga p a p', segundo a qual a força residente no primeiro ponto actua sobre o segundo, faz com os eixos angulos taes que os cosenos d'elles são

$$\frac{x'-x}{r}, \qquad \frac{y'-y}{r}, \qquad \frac{z'-z}{r};$$

por conseguinte as componentes da dicta força parallelamente aos eixos serão, designando-as por A, B, C,

$$A=fr\,\frac{x'-x}{r},\ B=fr\,\frac{y'-y}{r},\ C=fr\,\frac{z'-z}{r}.$$

Occupemo-nos da primeira, e o que dissermos servirá tambem para as outras.

Em virtude de (4) é

$$\frac{x'-x}{r}=-\frac{dr}{dx},$$

logo

$$A=-fr\frac{dr}{dx}; \dots\dots\dots \quad (5)$$

mas fazendo

$$Fr = -\int fr\, dr \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

é

$$\frac{d\, Fr}{dr} = -fr;$$

e como r é funcção de x, y, z, será

$$\frac{d\, Fr}{dx} = \frac{d\, Fr}{dr} \cdot \frac{dr}{dx},$$

pelo que (5) se torna

$$\mathrm{A} = \frac{d\, Fr}{dx}.$$

Os pontos $p_1, p_2, p_3, \ldots$ actuando da mesma maneira sobre p', fornecerão tambem expressões analogas

$$\mathrm{A}_1 = \frac{d\, F_1 r_1}{dx},\ \mathrm{A}_2 = \frac{d\, F_2 r_2}{dx}, \ldots\ldots;$$

e como a acção total é a resultante de todas as acções parciaes, designando por X a componente, segundo os x, da acção de $p, p_1, p_2, \ldots$ sobre p', será

$$X = A + A_1 + A_2 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{dFr}{dx} + \frac{dF_1 r_1}{dx} + \frac{dF_2 r_2}{dx} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{d\Sigma Fr}{dx}.$$

Para as componentes parallelas aos y e z virão expressões analogas, e portanto as tres componentes serão

$$X = \frac{d\Sigma Fr}{dx}, \quad Y = \frac{d\Sigma Fr}{dy}, \quad Z = \frac{d\Sigma Fr}{dz},$$

ou

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz},$$

fazendo

$$U = \Sigma Fr.$$

Ha pois uma funcção de força U no caso que consideramos. O que dissemos em (I) dá-nos, como se viu, o modo de conhecer, por meio d'ella, tudo o que é preciso para a completa determinação da força; por conseguinte é preciso ver como poderemos chegar ao conhecimento mais profundo d'essa funcção n'algum caso que não seja meramente especulativo.

III

Desçamos do caso que acaba de ser considerado para outro, no qual tambem ha funcção de força, que ao mesmo tempo regula muitos dos phenomenos que todos os dias presenceamos. Queremos fallar da attracção, que tem logar segundo a lei de Newton, até hoje confirmada por todos os factos que lhe são relativos. Porem, nesta passagem da pura abstracção para a realidade, convem apresentar algumas noções sobre as dependencias que devem necessariamente existir entre o effeito e a causa.

No caso precedente suppozemos os pontos do espaço dotados de certas forças manifestando-se a distancia; mas, como muito bem dizia Liebig, a força não pode surgir do nada: precisamos assignar-lhe uma fonte qualquer. Aqui, como em muitos outros pontos da philosophia, levantam-se opiniões encontradissimas, partidos de todo o ponto irreconciliaveis. Para a *escola espiritualista* é a força um privilegio de seres d'uma natureza particular: por exemplo, Deus, a alma humana, etc. A materia, inerte e passiva, não pode mover-se por si mesma do mesmo modo que não pôde produzir-se para apparecer tal qual a vemos hoje; d'onde duas especies de seres distinctos — os espirituaes e os materiaes. A *escola positivista,* representada em França por Augusto Comte e Littré, em Inglaterra por Darwin, em Allemanha por Luiz Feuerbach e outros, responde a isto que o ser é um na sua indivisivel essencia, e que o que chamamos força e materia nada mais são do que manifestações diversas d'esse ser; quer dizer, que a força, bem longe de ser uma substancia espiritual, separada da substancia material das cousas, não passa d'uma propriedade inseparavel d'essa mesma materia.

É preciso porem resolver entre a unidade e a duplicidade do ser, e para isso que se defina claramente o que é a materia e o que é a força. Para isto faltam-nos os meios necessarios, porque seria preciso penetrar na essencia intima das cousas, e neste caminho não se pode progredir. Dos phenomenos percebemos apenas os que se manifestam aos nossos sentidos e ao nosso entendimento, e tambem as relações d'uns com os outros; e é assim que relativamente á materia só sabemos que é extensa, impenetravel, divisivel, pesada, etc., isto é, propriedades que se nos manifestam sem nada revelarem da verdadeira essencia das cousas. A respeito das forças tambem ellas se nos manifestam só pelos seus effeitos, permanecendo todavia occulto o seu principio. Por conseguinte é-nos forçoso abandonar o campo do absoluto aos investigadores da quadratura do circulo e do moto continuo. As nossas investigações têm necessariamente de limitar-se ao descobrimento das relações dos phenomenos que nos são accessiveis, e ao estabelecimento das leis a que elles se acham sujeitos; e, porque entre a força e a materia existem relações muito intimas, vejamos quaes ellas são á face dos principios que a observação e a deducção logica das idêas nos fornecerem.

A escola positivista estabeleceu como axioma — que não ha materia sem força, nem tão pouco força sem materia, — e póde gloriar-se de não ter sido nem poder ser refutada pelos espiritualistas nesta parte: nem poderia succeder de modo diverso. Pois pode acaso comprehender-se, fora do campo da pura abstracção, que haja electricidade sem corpos electrisaveis? Ha por ventura um só atomo na natureza que não seja dotado d'uma força qualquer? De certo não poderemos recusar á mais pequena molecula que possa imaginar-se pelo menos uma certa força de cohesão; e o dizer-se que a materia é inerte não passa, para o que se pretende conseguir, d'uma infundada pretensão, pois que propriamente a inercia é uma força latente, que desperta todas as vezes que haja um rompimento de equilibrio no systema. A materia possue pois uma força propria; e não deixa de ser original a comparação, aliás muito verdadeira, que a este respeito fazia Dubois Reymond, quando dizia que a materia não é como uma carroagem, á qual se ajunctem e supprimam forças a modo de cavallos: deve considerar-se como o systema carroagem e cavallos, no qual reside o poder do movimento.

A força sem materia tambem é destituida de sentido. Quando os espiritualistas, para figurarem a existencia das cousas, imaginam uma força que desperta a cada passo para dar movimento á materia, tem certamente a convicção de não serem de todo claros no seu enunciado; por quanto não é facil perceber-se o que seja uma força sem residencia propria.

Toda a força que não actua não pode existir, ou pelo menos a nossa intelligencia recusa-se a comprehender como isso possa ter logar, porque força e movimento são causa e effeito necessarios.

Os espiritualistas confundem a abstração com a realidade. A gravitação é uma das forças melhor observadas na natureza; mas é acaso esta força um ser que exista independentemente dos corpos sobre que actua? Não; é simplesmente a propriedade da terra que gira, da pedra que desce. Se pelo pensamento supprimirmos essa terra ou essa pedra, a força desvanece-se no mesmo instante. A força e a materia são pois dois attributos indispensaveis e inseparaveis do ser real, o qual tem todavia uma essencia inaccessivel para nós.

Neste sentido é preciso fixar nos centros de acção alguma cousa d'onde derive a actividade. Será uma massa ponderavel attrahindo segundo a lei ordinaria da gravitação da elecricidade ou do magnetismo. Clausius dá-lhe a denominação geral de *agente*, a fim de poder tractar por uma analyse geral todos os factos conhecidos, ou que pelo menos analyticamente possam comprehender-se na mesma lei. Esta denominação, que aliás é muito expressiva, tem ainda a vantagem de podermos por ella figurar as attracções ou repulsões entre agentes de natureza diversa, ainda que no estado actual da sciencia não esteja averiguado que assim succede; por onde se vê o alcance que ella comporta. É uma generalisação que em nada prejudica a consideração de cada caso particular, condição indispensavel ou pelo menos muito para ser attendida.

Relativamente ao agente suppõe-se só que póde determinar-se quantitativamente por meio de unidades convenientemente escolhidas para cada um d'elles, e que a força de que o agente dispõe é proporcional a essa quantidade.

IV

Dadas estas explicações, supponhamos que nos pontos p e p' se acham respectivamente as quantidades q e q' d'agentes, da mesma ou de diversa natureza, os quaes têm a mesma unidade de medida no primeiro caso, e uma unidade differente no segundo. A funcção fr de (II) perde a sua generalidade em virtude da hypothese em que nos collocamos em (III), e a força com que as quantidades q e q' d'agente reagem uma sobre a outra terá por expressão

$$fr = e\frac{qq'}{r^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

designando r a distancia de p a p', e e um coefficiente especifico dependente da natureza dos agentes e das unidades que se escolherem para os medir, o qual pelo seu signal indicará quando ha attracção ou repulsão.

A expressão (7) substituida em (6) dará

$$Fr = -\int e\frac{qq'}{r^2}dr = e\frac{qq'}{r}$$

para a funcção de força no caso em que a acção se exerce entre dous pontos sómente.

Quando sobre o agente concentrado em p actuarem tambem as quantidades q'_1, q'_2, ... d'agentes concentrados em p_1, p_2, ... então serão respectivamente

$$F_1r_1 = e_1\frac{qq'_1}{r_1}; \quad F_2r_2 = e_2\frac{qq'_2}{r_2}, \ldots\ldots\ldots$$

e a funcção de força total será

$$U = q\left(e\frac{q'}{r} + e_1\frac{q'_1}{r_1} + e_2\frac{q'_2}{r_2} + \ldots\ldots\right)$$

$$= q\Sigma e\frac{q'}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

no caso geral em que consideramos a acção d'uns sobre os outros entre agentes de natureza diversa. Para passar á consideração das acções dos agentes da mesma natureza sobre o agente concentrado em p, que por em quanto suppomos de natureza diversa dos primeiros, basta considerar e o mesmo para todos os termos de (8), com o que podemos passar aquelle coefficiente para fora do signal Σ, e a funcção de força será então

$$U = qe\Sigma\frac{q'}{r} \dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

ou

$$U = qe\int\frac{dq'}{r} \dots\dots\dots\dots\dots (9a)$$

tendo logar a segunda quando, em logar de concentrado em pontos isolados, consideramos o agente espalhado uniformemente enchendo um certo espaço que se suppõe dividido em elementos dq' infinitamente pequenos.

A funcção de força (9) ou (9_a) toma ainda uma forma mais particular quando se suppõe: 1.º que o agente existente em p é da mesma natureza que o que de p', p'_1, p'_2, ... actua sobre o primeiro; 2.º que a quantidade d'este agente é justamente egual á unidade que serve para o medir. D'este modo é $q=1$, e o coefficiente e tomará um valor particular, que podemos chamar ε, o qual variará d'um agente para outro. A funcção U toma então um nome especial: chama-se *funcção potencial,* e tem-se assentado em designal-a por V, a exemplo do que fez Laplace, o primeiro que a empregou. A sua forma é

$$V = \varepsilon \sum \frac{q'}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

ou

$$V = \varepsilon \int \frac{dq'}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10a)$$

conforme o agente está concentrado em pontos separados uns dos outros, ou enche uniformemente um certo espaço.

Como a funcção de força geral tem tambem a propriedade de representar as componentes de força, segundo uma qualquer direcção, pelos seus coefficientes differenciaes; mas é preciso operar uma transformação de coordenadas para lhe alterar a forma; por quanto, quando suppozermos que o ponto faz parte do agente, a (10a) mostra que a funcção $\frac{1}{r}$ se torna infinita para todos os elementos do agente que estão contiguos ao ponto p, visto que para esses é r infinitamente pequeno.

A mudança de forma é dependente do systema de coordenadas polares que vamos adoptar.

Chamemos $d\tau$ o elemento do espaço pelo qual se acha distribuida, com a densidade $\varkappa$, a quantidade dq' d'agente, d'onde

$$dq' = \varkappa d\tau, \qquad (11)$$

e supponhamos que, tomando o ponto p para vertice commum, e dividindo o espaço total occupado pelo agente em pyramides elementares, de modo que cada uma d'ellas intercepte uma superficie infinitamente pequena $d\sigma$ sobre uma esphera descripta com o raio unidade do ponto p como centro, é $d\tau$ a porção d'uma d'essas pyramides comprehendida entre duas espheras de raios r e $r+dr$. Como esta porção de espaço pode sensivelmente considerar-se um prisma, vejamos qual será a expressão de $d\tau$ segundo as definições que deixamos dadas. A base do prisma é $r^2 d\sigma$, a sua altura é dr, logo

$$d\tau = r^2 dr d\sigma;$$

substituindo vem primeiro

$$dq' = \varkappa r^2 dr d\sigma$$

e depois

$$V = \varepsilon \int\int \varkappa r dr d\sigma \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Debaixo d'esta forma a funcção potencial V tem um valor finito e determinado, tanto para um ponto exterior como para um ponto interior; e não devemos receiar que deixe de ser valida a integração, porquanto a funcção $\varkappa r$ que está para integrar não só se não torna infinita, mas até adquire um valor infinitamente pequeno com r.

V

A expressão (12), que, como acabamos de ver, é valida tanto para um ponto que está exterior ao agente como para um ponto que faz parte d'esse agente, offerece uma difficuldade quando quizermos procurar por meio d'ella as componentes da força, as quaes são dadas pelos seus coefficientes differenciaes; porquanto, devendo as differenciações ter logar em ordem ás coordenadas de p, não pode este ponto tomar-se para origem das coordenadas polares que consideramos. Esta difficuldade resolve-se porem do seguinte modo, que todavia não prejudica o que está estabelecido, pois que o ponto p, para o qual se procuram os coefficientes differenciaes, apparece no resultado como origem do systema de coordenados polares.

Primeiro calcula-se a funcção potencial para um ponto visinho de p, e este considera-se movel; depois differenceia-se a funcção obtida relativamente ás coordenadas actuaes de p, e por ultimo dão-se ás coordenadas d'este ponto valores determinados com o fim de fazer coincidir p com a origem das coordenadas polares. D'este modo cessa o inconveniente que á primeira vista se offerecia, e consegue-se o o resultado introduzindo ainda a seguinte simplificação. Em logar de considerarmos p movel em todos os sentidos, supporemos que elle pode mudar de posição apenas na direcção da recta para a qual queremos descobrir a componente de força; se quizermos differenciar relativamente a x, supporemos que p se move parallelamente ao eixo dos x, e o mesmo se fará a respeito dos y e dos z, ou d'outra qualquer direcção.

Supponhamos então que se quer achar o coefficiente differencial $\frac{dV}{dx}$. Pelo ponto visinho de p, adoptado para origem provisoria, suppomos tirada uma recta parallela ao eixo dos x, sobre a qual o ponto p pode mover-se, e vejamos qual será a funcção potencial para um ponto qualquer d'esta recta. Chamando x_1, y_1, z_1 as coordenadas do ponto que se adopta para origem, serão, em virtude das nossas supposições, x, y_1, z_1, as coordenadas de p. A recta parallela aos x toma-se para eixo do systema, l é o comprimento do raio vectôr tirado para dq', θ é o angulo do eixo com o raio vectôr referido á nossa origem, e chama-se tambem φ o angulo formado pelo plano d'estas rectas com outro que se considera fixo.

O elemento $d\tau$ de volume é por esta fórma

$$d\tau = l^2 \, sen \, \theta \, dl \, d\theta \, d\varphi \dots\dots\dots\dots (13)$$

A distancia de p á origem é evidentemente $x - x_1$, e chamando r a distancia de p a dq', será, pelas definições que acabamos de dar,

$$r = \sqrt{l^2 - 2l(x - x_1)\cos\theta + (x - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{l^2 \operatorname{sen}^2\theta + (l\cos\theta + x_1 - x)^2}.$$

A funcção potencial ($10a$) toma então, em virtude de (11), a forma

$$V_1 = \varepsilon \int\int\int \frac{\varkappa l^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{l^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (l \cos \theta + x_1 - x)^2}} \, dl \, d\theta \, d\varphi$$

pela qual se vê que a funcção a integrar não pode tornar-se infinita, visto que o factor l sen θ do numerador é sempre menor que o denominador.

Differenciando em ordem a x vem

$$\frac{dV_1}{dx} = \varepsilon \int\int\int \frac{\varkappa l^2 \operatorname{sen} \theta \, (l \cos \theta + x_1 - x)}{[l^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (l \cos \theta + x_1 - x)^2]^{\frac{3}{2}}} \, dl \, d\theta \, d\varphi \, ;$$

e fazendo agora $x = x_1$, com o que restituimos p á origem das coordenadas, será

$$\frac{dV}{dx} = \varepsilon \int\int\int \varkappa \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, dl \, d\theta \, d\varphi,$$

onde a funcção a integrar tambem fica finita para toda a extensão das integrações.

Será porem este coefficiente differencial a componente da força parallelamente ao eixo dos x, ou será alguma cousa differente d'isso? Se se dér o primeiro caso, concluimos a *posteriori* que é perfeitamente justificado o artificio de que lançamos mão para obter aquelle coefficiente.

É preciso deduzir directamente a expressão da componente X para julgarmos sobre este ponto.

Quando um elemento dq' d'agente, de coordenadas x', y', z', sollicita o ponto p, de coordenadas x, y, z, a acção que dq' exerce sobre p, do qual dista r, é, como se sabe já,

$$\varepsilon \frac{dq'}{r^2}.$$

A componente d'esta força parallelamente aos x é

$$X = \varepsilon \int \frac{x' - x}{r^3}\, dq';$$

por onde se vê que a funcção a integrar se torna infinitamente grande de ordem superior para valores infinitamente pequenos de r, d'onde ainda a necessidade de transformal-a. A transformação já empregada para a funcção potencial é tambem a de que aqui lançamos mão, e a expressão de X toma a fórmula

$$X = \varepsilon \iint \varkappa \frac{x' - x}{r} \, dr \, d\sigma,$$

na qual, por ser em geral $(x' - x) < r$, a funcção que está para integrar jamais adquire valores infinitos, mesmo para os elementos contiguos a p.

Sendo θ o angulo do raio vector com o eixo dos x,

$$\frac{x' - x}{r} = \cos \theta;$$

logo

$$X = \varepsilon \iint \varkappa \cos \theta \, dr \, d\sigma. \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Esta expressão serve, não só para a componente no sentido dos x, mas tambem para outra qualquer direcção, comtanto que θ designe em todos os casos o angulo d'essa direcção com o raio vector.

Comparando agora X com $\frac{dV}{dx}$, atraz deduzido, vê-se que para estas quantidades serem identicas é preciso que $d\sigma$ seja representado por sen $\theta \, d\theta \, d\varphi$: ora vejamos se assim succede effectivamente.

O elemento de volume

$$d\tau = l^2 \operatorname{sen} \theta \, dl \, d\theta \, d\varphi,$$

que achamos em (13), pode considerar-se, e effectivamente se considera, um parallelipipedo de lados infinitesimos, que, no systema de coordenadas polares de que temos usado, se exprimem por

$$dl, \quad l d\theta \quad \text{e} \quad l \operatorname{sen} \theta \, d\varphi$$

sendo $l^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi$ a sua base, e dl a aresta d'altura. Mas $l^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi$ é o elemento d'uma superficie espherica, que tem o centro na origem das coordenadas e um raio l; logo, quando quizermos o elemento $d\sigma$ da superficie espherica de raio unidade não ha mais do que fazer $l = 1$, com o que acharemos a egualdade requerida.

Realiza-se pois como devia ser, que o coefficiente differencial da primeira ordem da funcção potencial é a componente da força na direcção de que tractamos: outro tanto se dá para outra qualquer direcção

Os coefficientes differenciaes de segunda ordem da funcção potencial satisfazem a dois theoremas importantes, dos quaes vamos tractar em seguida, procurando considerar algumas difficuldades que o assumpto offerece.

CAPITULO SEGUNDO

O elemento de volume

$$d\tau = l^2 \operatorname{sen} \theta \, dl \, d\theta \, d\varphi,$$

que achamos em (13), pode considerar-se, e effectivamente se considera, um parallelipipedo de lados infinitesimos, que, no systema de coordenadas polares de que temos usado, se exprimem por

$$dl, \quad l\,d\theta \quad e \quad l \operatorname{sen} \theta \, d\varphi$$

sendo [illegible] d'altura. Mas $l^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi$ é o elemento d'uma superficie espherica, que tem o centro na origem das coordenadas e um raio l; logo, quando quizermos o elemento $d\sigma$ da superficie espherica de raio unidade não ha mais do que fazer $l = 1$, com o que acharemos a egualdade requerida.

Realiza-se pois como devia ser, que o coefficiente differencial da primeira ordem da funcção potencial é a componente da força na direcção de que tractamos: o mesmo tanto se dá para outra qualquer direcção.

Os coefficientes differenciaes de segunda ordem da funcção potencial satisfazem a dois theoremas importantes, dos quaes vamos tractar em seguida, procurando considerar algumas difficuldades que o assumpto offerece.

I

Supponhamos a fórma mais geral da funcção potencial

$$V = \iota \int \frac{d\,q'}{r},$$

na qual r indica a distancia entre o ponto (x, y, z) sobre que actuam os elementos dq' d'agente, e (x', y', z') o ponto d'um d'estes elementos, devendo a integração estender-se a todo o espaço por que se acha distribuido o agente considerado. Para o caso em que r fica finito para todos os elementos dq', podemos effectuar a differenciação d'esta funcção debaixo do signal $\int$ relativamente ás variaveis x, y, z do ponto p: por conseguinte

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\,y^2} + \frac{d^2V}{d\,z^2} = \iota \int dq' \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} \right).$$

Mas, por ser

$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2},$$

é

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = \frac{x'-x}{r^3} \text{ d'onde } \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} = 3\,\frac{(x'-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

e do mesmo modo

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} = 3\,\frac{(y'-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} = 3\,\frac{(z'-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}:$$

logo

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} = 0,$$

e por conseguinte

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Este theorema notavel foi descoberto por Laplace, e fundado nelle é que este geometra estabeleceu a sua theoria da figura dos corpos celestes. Tem logar todas as vezes que o ponto attrahido não fizer parte do agente, mas deixa de ser verdadeiro no caso contrario, porquanto a distancia r torna-se infinitamente pequena para os elementos dq' contiguos áquelle ponto, as expressões a integrar tornam-se infinitamente grandes, e a differenciação não é por isso mesmo exequivel como no caso anterior. É a Poisson que se deve a descoberta d'este caso de excepção da equação (1).

Vejamos porém qual será o theorema no caso em que o ponto attrahido faz parte do agente. Para isso consideraremos o caso particular d'um corpo homogeneo, isto é, d'um corpo no qual a densidade do agente é a mesma em toda a sua extensão. Designando por $\varkappa$ esta densidade e por $d\tau$ o elemento de volume em que se acha o elemento dq' d'agente, será

$$dq' = \varkappa\, d\tau$$

e

$$V = \varepsilon \varkappa \int \frac{1}{r}\, d\tau \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

É sob esta fórma particular que vamos tentar deduzir o theorema mencionado.

Dividamos o espaço, pelo qual o agente se acha distribuido, em duas partes, uma das quaes seja uma esphera comprehendendo o ponto sobre que actua o agente, e a outra formada pelo resto do corpo. O ponto considera-se a uma distancia finita da superficie da esphera, e esta comprehendida toda na parte do espaço em que reside o agente. O integral da equação (2) pode então dividir-se em dous, um relativo ao volume da esphera e outro ao volume que é exterior a esta esphera. Distinguindo o primeiro do segundo respectivamente pelos indices 1 e 2, a equação será d'este modo

$$V = \iota\varkappa \int_1 \frac{1}{r} d\tau + \iota\varkappa \int_2 \frac{1}{r} d\tau,$$

ou

$$V = V_1 + V_2,$$

sendo

$$V_1 = \iota\varkappa \int_1 \frac{1}{r} d\tau,$$

$$V_2 = \iota\varkappa \int_2 \frac{1}{r} d\tau.$$

Mas, quando o ponto não faz parte do espaço occupado pelo agente, vimos ha pouco que tinha logar o theorema de Laplace; logo

$$\frac{d^2V_2}{dx^2}+\frac{d^2V_2}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

e por conseguinte será só

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=\frac{d^2V_1}{dx^2}+\frac{d^2V_1}{dy^2}+\frac{d^2V_1}{dz^2}\ldots\ldots \quad (3)$$

Vejamos a que se reduz o segundo membro d'esta expressão no caso que figuramos, e para isso effectuemos a integração da expressão $V_1=\varepsilon\chi\int_1\frac{1}{r}d\tau$.

Tomemos o centro da esphera para origem de um systema de coordenadas polares e a recta que une esse centro com o ponto attrahido p para eixo do systema. Seja l a distancia do centro a p, ρ a distancia do centro ao elemento $d\tau$, r a distancia de p a $d\tau$, θ o angulo comprehendido por l e ρ, e φ o angulo do plano d'estas duas rectas com um plano fixo que passe pelo eixo. Será

$$r=\sqrt{\rho^2-2\rho l\cos\theta+l^2}$$

$$d\tau=\rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

e portanto

$$V_1 = \iota \iiint \frac{\varkappa \rho^2 \, sen\,\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho l \cos\theta + l^2}}.$$

A integração relativameute a ρ faz-se desde o até A, sendo A o raio da esphera que consideramos, relativamente a θ desde o até π, e relativamente a φ desde o até 2π; a expressão toma assim a fórma

$$V_1 = \iota \int_0^A \varkappa \rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{sen\,\theta\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho l \cos\theta + l^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Ora

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi,$$

$$\int_0^\pi \frac{sen\,\theta\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho l \cos\theta + l^2}} = \frac{1}{\rho l}\left[\rho + l - \sqrt{(\rho - l)^2}\right]$$

por conseguinte

$$V_1 = 2\pi\iota\varkappa \int_0^A \frac{\rho\, d\rho}{l}\left[\rho + l - \sqrt{(\rho - l)^2}\right]$$

na qual devemos sempre tomar para $\sqrt{(\rho - l)^2}$ o valor positivo do radical. Como l é sempre mais pequeno que A, podemos decompôr o integral em dous, ou

$$\int_0^A \frac{\rho d\rho}{l}\left[\rho+l-\sqrt{(\rho-l)^2}\right]=\int_0^l \frac{\rho d\rho}{l}\left[\rho+l-(l-\rho)\right]+$$

$$+\int_l^A \frac{\rho d\rho}{l}\left[\rho+l-(\rho-l)\right];$$

e por ser

$$\int_0^l \frac{\rho d\rho}{l}\left[\rho+l-(l-\rho)\right]=\frac{2}{3}\,l^2$$

e

$$\int_l^A \frac{\rho d\rho}{l}\left[\rho+l-(\rho-l)\right]=A^2-l^2$$

virá

$$V_1=2\pi\varepsilon\varkappa\left(A^2-\frac{1}{3}\,l^2\right),$$

que é o integral procurado. Achado elle, vejamos a que se reduz (3).

Designando por x_0, y_0, z_0, as coordenadas do centro da esphera, e por x, y, z, as de p, é

$$l^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

e

$$V_1=2\pi\varepsilon\kappa\left\{A^2-\frac{1}{3}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\right\}.$$

Differenciando esta expressão relativamente a x, y, z, vem

$$\frac{dV_1}{dx}=-\frac{4}{3}\pi\varepsilon\kappa(x-x_0),$$

$$\frac{dV_1}{dy}=-\frac{4}{3}\pi\varepsilon\kappa(y-y_0),$$

$$\frac{dV_1}{dz}=-\frac{4}{3}\pi\varepsilon\kappa(z-z_0),$$

e

$$\frac{d^2V_1}{dx^2}+\frac{d^2V_1}{dy^2}+\frac{d^2V_1}{dz^2}=-4\pi\varepsilon\kappa;$$

logo

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\varepsilon\kappa.$$

II

Como é importante determinar a funcção potencial d'uma camada espherica, aproveitamos esta occasião para proceder á sua determinação, e os resultados a que chegarmos servir-nos-hão tambem para demonstrar o theorema a que acabamos de chegar, visto que a esphera é uma camada espherica, cujo raio interior é nullo.

Nesta investigação suppomos constante a densidade do agente na camada para cada superficie concentrica, mas variavel d'uma para outra com o raio respectivo.

A expressão a integrar será

$$V = \varepsilon \int \frac{\varkappa}{r}\, d\tau :$$

e empregando o mesmo systema de coordenadas que acima, só com a differença de ser agora o centro da camada a origem das coordenadas, e termos de considerar o raio da esphera interior, que chamaremos a, sendo A o da exterior, ella torna-se em

$$V = \varepsilon \iiint \frac{\kappa\rho^2 \operatorname{sen}\theta d\rho d\theta d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\theta}} \ldots\ldots (4)$$

devendo a integração estender-se relativamente a φ desde o até 2π, relativamente a θ desde o até π, e relativamente a ρ desde a até A.

A expressão (4) póde escrever-se

$$V = \varepsilon \int_a^A \kappa\rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\theta}} \int_0^{2\pi} d\varphi:$$

mas

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi,$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\theta}} = \frac{1}{\rho l}\left(\rho + l - \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l}\right),$$

logo

$$V = \frac{2\pi\varepsilon}{l} \int_a^A \kappa\rho\left(\rho + l - \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l}\right) d\rho.$$

Ha porem a distinguir se o ponto p está dentro da camada espherica, fazendo parte d'esta camada ou fóra d'ella; por quanto no primeiro caso será $\rho > l$, no segundo haverá valores de ρ maiores que l outros menores, e no terceiro será $\rho < l$; e como r deve em todos os casos ser positivo, por ser uma distancia, tomaremos para valor do segundo radical

$$\rho - l \quad \text{quando } \rho > l$$

$$l - \rho \quad \text{quando } \rho < l.$$

A quantidade entre parenthesis será

$$\rho + l - (\rho - l) = 2l \qquad \text{quando } \rho > l$$

$$\rho + l - (l - \rho) = 2\rho \qquad \text{quando } \rho < l;$$

por conseguinte

$$(5) \qquad V = 4\pi\varepsilon \int_a^A \kappa\rho \, d\rho \ldots \text{ para } \rho > l$$

$$(6) \qquad V = \frac{4\pi\varepsilon}{l} \int_a^A \kappa\rho^2 \, d\rho \ldots \text{ para } \rho < l.$$

Para ρ sempre maior que l o ponto é interior á camada espherica, e como (5) é independente de l segue-se que a funcção potencial é constante para todos os pontos do interior da camada, e por conseguinte nulla a acção exercida sobre qualquer d'esses pontos.

Suppondo que a densidade é constante, ou que a camada espherica é homogenea em relação ao agente, então (5) integra-se immediatamente, e dá, designando V_i o integral,

$$V_i = 2\pi\varepsilon\varkappa\,(A^2 - a^2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Para ρ sempre menor que l o ponto p é exterior á camada, e a funcção potencial toma a fórma (6), que pode escrever-se

$$V = \frac{1}{l}\int_a^A \varkappa\cdot 4\pi\rho^2 d\rho.$$

Mas $4\pi\rho^2 d\rho$ é o volume d'uma camada espherica comprehendida entre duas espheras de raios ρ e $\rho + d\rho$, $\varkappa\, 4\pi\, \rho^2\, d\rho$ é a quantidade d'agente contida nessa camada, e portanto o integral representa a quantidade d'agente contida na camada espherica considerada. Chamada Q essa quantidade e

V_e o valor do integral, será

$$V_e = \varepsilon \frac{Q}{l};$$

por onde se vê que, visto ser l a distancia de p ao centro da camada, a acção exercida pelo agente é a mesma que seria se todo elle estivesse reunido nesse centro.

Quando $\varkappa$ é constante, será

$$V_e = \frac{4\pi\varepsilon\varkappa}{3l}(A^3 - a^3) \text{ ...... } (8)$$

Consideremos agora p fazendo parte da camada. Então haverá valores de ρ maiores e outros menores que l; e como ρ deve estar comprehendido entre a e A, a reunião de (5) (integrada entre os limites a e l) com (6) (integrada entre os limites l e A), dará, designando V_c o integral,

$$V_c = 4\pi\varepsilon\left(\frac{1}{l}\int_a^l \varkappa\rho^2 d\rho + \int_l^A \varkappa\rho d\rho.\right.$$

Quando $\varkappa$ é constante

$$V_c = 2\pi\varepsilon\varkappa\left(A^2 - \frac{1}{3}l^2 - \frac{2}{3}\frac{a^3}{l}\right) \text{ ...... } (9)$$

..

Fazendo $a=o$ em (7), (8) e (9), teremos

$$V_i'=2\pi\iota\varkappa A^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (7a)$$

$$V_e'=\frac{4\pi\iota\varkappa A^3}{3l} \ldots\ldots\ldots\ldots (8a)$$

$$V_c'=2\pi\iota\varkappa\left(A^2-\frac{1}{3}l^2\right)\ldots\ldots (9a)$$

para as equações que se referem á esphera, e das quaes derivam os theoremas conhecidos que passamos a enumerar.

A (7a), por isso que não contém variavel alguma, indica que a resultante das acções do agente, distribuido uniformemente por todo o espaço comprehendido em uma esphera, é nulla sobre o seu centro.

Vejamos a equação (8a), que corresponde ao caso em que p é exterior á esphera. Designando, como já fizemos, por x_0, y_0, z_0, as coordenadas do centro da esphera, e x, y, z, as de p, referidas a tres eixos rectangulares, é

$$\therefore\ l=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

e

$$V_e' = \frac{4\pi\varepsilon\varkappa A^3}{3\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

por conseguinte

$$\frac{dV_e'}{dx} = -C\frac{x-x_0}{l^3}, \quad \frac{dV_e'}{dy} = -C\frac{y-y_0}{l^3}, \quad \frac{dV_e'}{dz} = -C\frac{z-z_0}{l^3}$$

fazendo $C = \frac{4\pi\varepsilon\varkappa A^3}{3}$. Logo, chamando R a resultante será

$$R = \frac{C}{l^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi A^3\varepsilon\varkappa}{l^2} \dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

o que quer dizer que a resultante das acções exercidas pelo agente, distribuido uniformemente por todo o espaço comprehendido em uma esphera, sobre um ponto collocado fóra d'este espaço, varia na razão directa da quantidade d'esse agente e na inversa dos quadrados das distancias do centro da esphera ao ponto a que as acções se dirigem.

A (9a), com o mesmo valor de l, dá

$$V_c'=2\pi\varepsilon\varkappa\left\{A^2-\frac{1}{3}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\right\}$$

d'onde

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV_c'}{dx}&=-C'(x-x_0)\\ \frac{dV_c'}{dy}&=-C'(y-y_0)\\ \frac{dV_c'}{dz}&=-C'(z-z_0)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

fazendo $C'=\frac{4}{3}\pi\varepsilon\varkappa$. Logo, chamando R' a resultante,

$$R'=\frac{4}{3}\pi\varepsilon\varkappa l\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

o que quer dizer que as acções de que temos fallado variam proporcionalmente á distancia do centro da esphera ao ponto da mesma esphera sobre que suppomos exercerem-se. Isto mesmo se confirma ainda dividindo a esphera considerada em duas partes, uma esphera de raio l, e uma camada cujo raio interior seja o mesmo comprimento; porquanto já vimos que esta segunda parte não exercia acção alguma sobre o ponto considerado, e a que exerce a primeira é dada por (10), quando se suppõe $A=l$.

Differenciando as expressões (11) temos

$$\frac{d^2 V_c'}{dx^2}=-C', \frac{d^2 V_c'}{dy^2}=-C', \frac{d^2 V_c'}{dz^2}=-C'$$

d'onde

$$\frac{d^2 V_c'}{dx^2}+\frac{d^2 V_c'}{dy^2}+\frac{d^2 V_c'}{dz^2}=-3C'=-4\pi\varepsilon\varkappa;$$

por conseguinte tem logar a expressão

$$\frac{d^2 V}{dx^2}+\frac{d^2 V}{dy^2}+\frac{d^2 V}{dz^2}=-4\pi\varepsilon\varkappa. \dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

como já tinhamos demonstrado, procedendo directamente á integração no caso da esphera.

As expressões (7) e (8) tomam ainda fórmas particulares quando se suppõe que a camada se reduz a uma simples superficie espherica: e este caso é dos mais importantes, pois a electricidade decomposta num corpo conductor isolado acha-se apenas á superficie, formando uma camada de tal modo pouco espessa, que sem erro podemos suppol-a no calculo como uma superficie mathematica. Se fizermos $A=a$ naquellas expressões tem-se passado da camada para a esphera, mas esta passagem não pode fazer-se sem alguma explicação, pois as expressões annullam-se immediatamente por aquella hypothese.

A densidade com que uma certa quantidade de agente está distribuido na camada, augmenta necessariamente com a diminuição progressiva da espessura da camada; por conseguinte, se escrevermos as expressões (7) e (8) como segue

$$V_i = 2\pi\iota\varkappa\,(A-a)\,(A+a)$$

$$V_e = \frac{4\pi\iota\varkappa}{3\,l}\,(A-a)\,(A^2+a\,A+a^2)$$

e suppozermos que $\varkappa$ augmenta na relação em que $A-a$ diminue, concluiremos que o valor de $\varkappa$ é infinito quando da camada passamos á superficie espherica. Sendo assim, se procurarmos quaes os limites para que convergem os valores de V_i e V_e quando a differença $A-a$ decresce indefinidamente, acharemos que esses limites serão

$$V_i = 4\pi\varepsilon h a$$

$$V_e = 4\pi\varepsilon h \frac{a^2}{l}$$

fazendo $A=a$ nos segundos parenthesis das formulas, e tambem $\varkappa\,(A-a)=h$, designando h uma quantidade finita e determinada, a que damos o nome de *densidade superficial*.

V_i e V_e vêm a ser as funcções potenciaes d'uma quantidade d'agente distribuido com a densidade h sobre a superficie d'uma esphera de raio a, avaliadas relativamente a um ponto interior ou exterior á esphera, collocado neste ultimo caso á distancia l do centro.

III

As soluções obtidas em (I) podem obter-se mais geralmente por uma analyse só, que ao mesmo tempo prepara o terreno para casos mais difficeis. Consiste primeiro em transformar a expressão de modo que a integração que lá se fazia relativamente ao volume se faz por esta analyse relativamente á superficie.

Supponhamos que o ponto p serve de vertice a uma pyramide elementar, a qual comprehende um elemento $d\sigma$ da superficie d'uma esphera que podemos imaginar descripta de p como centro e com o raio 1, pyramide que pode atravessar o corpo em qualquer direcção. Chamando elemento de volume $d\tau$ á porção d'esta pyramide comprehendida entre duas espheras de raios r e $r+dr$, será

$$d\tau = r^2\, dr\, d\sigma,$$

e a expressão da funcção potencial (2) transformar-se-ha em

$$V = \iota \varkappa \int\int r\, d\, r\, d\, \sigma, \quad \text{ou} \quad V = \iota \varkappa \int d\, \sigma \int r\, d\, r.$$

O integral relativo a *r* pode achar-se immediatamente; mas, como os seus limites variarão com a fórma do corpo e com a posição de *p*, é preciso entrar n'algumas explicações previas.

O ponto *p* pode ser interior, exterior, ou estar na superficie terminal do espaço que contém o agente.

1.º—*p* interior.

Quando o raio vector tirado de *p*, em qualquer direcção, encontrar a superficie só uma vez, deveremos integrar desde *o* até *R*, chamando *R* a distancia de *p* á superficie; então

$$V = \frac{\iota \varkappa}{2} \int R^2\, d\, \sigma,$$

e o integral relativo a σ abrangerá todo o espaço angular em roda de *p*.

Quando o raio vector encontrar mais d'uma vez a superficie, encontral-a-ha um numero impar de vezes, e o integral compõe-se então do modo seguinte. As partes do raio vector entre a primeira e a segunda intersecção, entre a terceira e a quarta, e assim para as mais, não pertencerão ao corpo; por conseguinte, designando R_1, R_2, R_3, R_4, R_5,..... as distancias respectivas de p a essas intersecções, como só temos a attender ás porções do espaço que fazem parte do corpo, o integral relativo a r effectua-se desde o até R_1, desde R_2 até R_3, desde R_4 até R_5....., e assim se obtem

$$V = \frac{\varepsilon\kappa}{2}\int(R_1^2 - R_2^2 + R_3^2 - R_4^2 + R_5^2 - \ldots)\,d\sigma \;.\;.\;(13)$$

2.°—p exterior.

Neste caso o raio vector interceptará a superficie um numero par de vezes, e o integral effectua-se desde R_1 até R_2, desde R_3 até R_4.... Em virtude d'isto será

$$V = \frac{\varepsilon\kappa}{2}\int(-R_1^2 + R_2^2 - R_3^2 + R_4^2 - \ldots)\,d\sigma :\;.\;.\;(14)$$

e o integral em ordem a σ abrangerá apenas o espaço angular determinado pelo cone circumscripto ao corpo, e que tem o vertice no ponto p.

3.º — p á superficie.

Para achar o integral neste caso particular não se precisa procurar directamente a expressão que lhe é relativa, porque qualquer das achadas serve para isso. Quando succeder que o raio vector tirado de p para outro qualquer ponto da superficie do corpo a encontra um numero par de vezes (comprehendido o ponto p) emprega-se (14); quando o numero das intersecções for impar terá logar (13), e faremos $R_1 = o$ tanto num como noutro caso.

As expressões (13) e (14) podem ainda simplificar-se do modo seguinte.

Chamemos:

$d\omega$ o elemento de superficie que a pyramide elementar d'angulo solido $d\sigma$ intercepta sobre a superficie do corpo;

R o comprimento do raio vector tirado de p para $d\omega$;

φ o angulo formado pela normal a $d\omega$, dirigida para o exterior do corpo, com o raio vector tomado na direcção em que o seu comprimento cresce;

$i = \cos\varphi$.

i é positivo ou negativo segundo φ é agudo ou obtuso. Todas as vezes que o raio vector crescendo sae do corpo $\varphi < 90°$ e i positivo; todas as vezes que o raio vector crescendo penetra no corpo $\varphi > 90°$ e i negativo.

D'este modo ha uma relação muito estreita entre os signaes com que figura R nas expressões (13) e (14) e os de i, quer p esteja dentro quer fora do corpo. Se p está fora é i negativo para as intersecções primeira, terceira, quinta..., i positivo para as segunda, quarta, ... e vê-se pela formula (14) que são justamente esses os signaes que affectam os R^2 correspondentes a essas intersecções. Se p está dentro é i positivo para as intersecções primeira, terceira..., i negativo para as segunda, quarta, ... e os signaes de (13) confirmam tambem que i tem sempre o mesmo signal que R^2.

Sendo assim, como sabemos que tem logar a expressão geral

$$id_\omega = R^2 d_\sigma \ldots\ldots\ldots (15)$$

será

$$V = \frac{\mu}{2}\int id_\omega \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

a equação geral que comprehende todos os casos que podem figurar-se fazendo variar a posição de p e a forma do corpo, e é este o integral relativo á superficie deduzido da expressão (2) que se referia ao volume.

A equação (16) permitte-nos deduzir os theoremas de Laplace e de Poisson por uma analyse só.

Suppomos sempre que o corpo é homogeneo e que p está a uma distancia finita da superficie.

A integração relativa á superficie é independente das coordenadas x, y, z do ponto p, e por isso podemos differenciar debaixo do signal $\int$ relativamente a essas coordenadas. Teremos assim

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{\varepsilon\kappa}{2}\int \frac{d^2 i}{dx^2} d\omega,\ \frac{d^2 V}{dy^2} = \frac{\varepsilon\kappa}{2}\int \frac{d^2 i}{dy^2} d\omega,\ \frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{\varepsilon\kappa}{2}\int \frac{d^2 i}{dz^2} d\omega$$

e

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{\varepsilon\kappa}{2}\int \left(\frac{d^2 i}{dx^2} + \frac{d^2 i}{dy^2} + \frac{d^2 i}{dz^2}\right) d\omega \ldots (17)$$

Representando por a, b, c, os cosenos dos angulos que o raio vector tirado para $d\omega$ faz com os eixos, por α, β, γ, os cosenos dos angulos que a normal a esse elemento faz com os mesmos eixos, e por ξ, η, ζ, as coordenadas de $d\omega$, será, em virtude da significação que já demos a i,

$$i = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

ou

$$i = \frac{(\xi - x)\,\alpha + (\eta - y)\,\beta + (\zeta - z)\,\gamma}{R}$$

por ser

$$a=\frac{\xi-x}{R},\quad b=\frac{\eta-y}{R},\quad c=\frac{\zeta-z}{R}.$$

aonde é

$$R=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$$

Formando os coefficientes differenciaes de i, teremos

$$\left.\begin{aligned}
\frac{di}{dx}&=\frac{\xi-x}{R^2}i-\frac{\alpha}{R}\\
\frac{di}{dy}&=\frac{\eta-y}{R^2}i-\frac{\beta}{R}\\
\frac{di}{dz}&=\frac{\zeta-z}{R^2}i-\frac{\gamma}{R}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2i}{dx^2}&=\frac{3(\xi-x)^2-R^2}{R^4}i-2\frac{\xi-x}{R^3}\alpha\\
\frac{d^2i}{dy^2}&=\frac{3(\eta-y)^2-R^2}{R^4}i-2\frac{\eta-y}{R^3}\beta\\
\frac{d^2i}{dz^2}&=\frac{3(\zeta-z)^2-R^2}{R^4}i-2\frac{\zeta-z}{R^3}\gamma.
\end{aligned}\right\}$$

Sommando estas ultimas vem

$$\frac{d^2i}{dx^2}+\frac{d^2i}{dy^2}+\frac{d^2i}{dz^2}=-2\frac{i}{R^2},$$

e substituindo em (17) resulta

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-\varepsilon\kappa\int\frac{i}{R^2}d\omega.$$

Por estar p a uma distancia finita da superficie será R sempre finito, e por conseguinte pode effectuar-se a integração. O integral decompõe-se em tantos outros quantas são as intersecções do raio vector com a superficie; e porque podemos substituir $\frac{1}{R^2}d\omega$ pelo seu valor $\pm d\sigma$ (15), effectuaremos a integração relativamente a $d\sigma$ o mesmo numero de vezes, alternativamente com o signal + e —, por ser tambem i alternadamente positivo e negativo.

D'este modo, quando p for exterior ao corpo, caso em que ha um numero par de intersecções, a equação de cima será

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-\varepsilon\kappa\int(-1+1-\ldots)\,d\sigma=o;$$

quando p for interior, e por conseguinte quando houver um numero impar de intersecções, será

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-\varepsilon\varkappa\int(+1-1+1-\ldots)d\sigma=-\varepsilon\varkappa\int d\sigma$$

Ora, visto que o integral deve abranger todo o espaço angular em roda de p, isto é, 4π, virá

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\varepsilon\varkappa$$

que é a equação (12) a que já tinhamos chegado por outras considerações.

Fica pois demonstrado que é

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=o, \text{ para } p \text{ exterior}$$

e

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\varepsilon\varkappa \quad \text{para } p \text{ interior}$$

quando p se acha a uma distancia finita da superficie, e que é homogeneo o corpo relativamente ao agente.

Resta ainda ver se estes theoremas só têm logar, quando os dados estiverem sujeitos a estas restricções, ou se mesmo suppondo o corpo heterogeneo e o ponto proximo da superficie os podemos empregar.

No que se segue expomos o que se refere a estes casos.

IV

Para mais facilidade, e mesmo com o fim de dispôr as cousas para resolver completamente o problema que se nos apresenta, tractaremos primeiro de ver se os theoremas têm logar quando o corpo não é homogeneo, conservando todavia a condição de estar o ponto p a uma distancia finita da superficie do corpo, a qual pode aliás ter uma fórma qualquer.

Relativamente á densidade suppomos só o caso em que ella varía d'uma maneira continua, segundo uma certa lei, mas introduzimos uma consideração, de grande importancia, emquanto nos permitte attender conjunctamente aos dous theoremas que nos occupam, e que consiste em suppôr que a funcção determinativa do valor de $\varkappa$ comprehende tanto o espaço envolvido pelo corpo que contem o agente como o espaço exterior ao mesmo corpo sem nunca se tornar infinito; entendendo-se que essa funcção só representa a densidade real, emquanto não ultrapassa os limites do corpo, dando fóra d'estes limites o valor que teria $\varkappa$ se por ventura o corpo se estendesse sufficientemente sujeito á mesma lei.

Na investigação dos theoremas propostos podemos procurar a funcção potencial correspondente, e achar por meio d'ella os coefficientes differenciaes de segunda ordem, ou então aproveitar as componentes de força, as quaes já são, como vimos, coefficientes differenciaes de primeira ordem, e effectuar uma differenciação só. É d'este ultimo meio que lançamos mão, servindo-nos da expressão (14) do — Capitulo Primeiro — já preparada para este fim.

Por ser já conhecido o que se refere a esta expressão e ao systema de coordenadas que nos forneceram a fórma que ella tem, julgamos desnecessario entrar em mais largas explicações a este respeito

Fazendo $a = cos\ \theta$, e considerando que esta quantidade é independente de r, a expressão de que fallamos pode escrever-se

$$X = \varepsilon \int d\,\sigma\, a \int \varkappa\, d\,r.$$

Resta agora proceder á differenciação: mas antes d'isso temos de fazer algumas considerações tendentes a simplificar a questão quanto possivel.

Os limites do segundo integral variam, como vimos em (III), com a forma do corpo em que está encerrado o agente e com a posição especial do ponto p. Ora se suppozermos que p é interior, um raio vector qualquer que partir d'esse ponto encontrará a superficie um numero impar de vezes, uma pelo menos; por conseguinte designando R_1, R_2, R_3,.... os comprimentos do raio vector ás suas successivas intersecções com a superficie, serão R_1, R_2, R_3,.... os limites dos integraes em que naturalmente se decompõe aquelle a que nos estamos referindo, advertindo tambem que a integração se applica sómente ás partes do raio vector que são interiores á superficie. Outro tanto pode dizer-se quando considerarmos o ponto p exterior, e por isso

$$\int \varkappa\, d\,r = \int_0^{R_1} \varkappa\, d\,r + \int_{R_2}^{R_3} \varkappa\, d\,r + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

para p interior, e

$$\int \varkappa\, d r=\int_{R_1}^{R_2} \varkappa\, d r+\int_{R_3}^{R_4} \varkappa\, d r+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

para p exterior: ou, dando a todos os integraes o limite inferior o,

$$\int \varkappa\, d r=\int_0^{R_1} \varkappa\, d r-\int_0^{R_2} \varkappa\, d r+\int_0^{R_3} \varkappa\, d r-\ldots\ldots\ldots$$

no primeiro caso, e

$$\int \varkappa\, d r=-\int_0^{R_1} \varkappa\, d r+\int_0^{R_2} \varkappa\, d r-\int_0^{R_3} \varkappa\, d r+\ldots\ldots\ldots$$

no segundo.

D'este modo, a expressão de X será

$$X=\iota\int d\sigma\, a\left(\int_0^{R_1} \varkappa\, d r-\int_0^{R_2} \varkappa\, d r+\int_0^{R_3} \varkappa\, d r-\ldots\right) \ldots \quad (18)$$

quando p é interior, e

$$X = \varepsilon \int d\sigma\, a \left(-\int_0^{R_1} \varkappa\, dr + \int_0^{R_2} \varkappa\, dr - \int_0^{R_3} \varkappa\, dr + \ldots \right) \quad (19)$$

quando p é exterior.

Vejamos porém se é possivel simplificar estas expressões por uma transformação conveniente do primeiro integral. A transformação que aqui se emprega é a que já adoptamos e que se exprime pela relação

$$d\sigma = \pm \frac{i}{R^2} d\omega,$$

sendo i o coseno do angulo do raio vector com a normal correspondente ao elemento superficial $d\omega$, e que é precedido do signal + para os elementos impares quando p é interior e para os elementos pares quando é exterior, e do signal — para as intersecções pares ou impares quando p é respectivamente interior ou exterior. D'este modo, quando é p interior

$$d\sigma = \frac{i}{R^2} d\omega$$

para as intersecções impares, e

$$d\sigma = -\frac{i}{R^2} d\omega$$

para as pares; e quando p é exterior

$$d\sigma = -\frac{i}{R^2} d\omega$$

para as intersecções impares, e

$$d\sigma = \frac{i}{R^2} d\omega$$

para as pares.

Attendendo agora a que a expressão (18) se refere a este primeiro caso, e que os integraes entre parenthesis são precedidos respectivamente do signal + e — conforme o limite é de ordem impar ou par, claro fica que cada um d'estes integraes tem justamente o mesmo signal que o i correspondente: por conseguinte, quando substituirmos $d\sigma$

pelo seu valor, para os diversos elementos $d\omega$, obteremos sempre termos com o signal $+$ e da forma

$$\int d\omega\, a \frac{i}{R^2} \int_0^R \varkappa\, d r.$$

O mesmo succede tambem com a expressão (19), que se refere ao segundo caso, e por isso a expressão de X é a mesma, quer p seja exterior quer interior, ficando a distincção dependente de considerações posteriores.

A forma de X é

$$X = \varepsilon \int d\omega\, a \frac{i}{R^2} \int_0^R \varkappa\, d r;$$

e parece-nos que depois do que temos dicto não pode haver duvida alguma sobre a significação particular de cada uma das quantidades que nella entram.

Designando por b e c os cosenos dos angulos que o raio vector faz com os eixos dos y e dos z, e fazendo na expressão (14), já mencionada,

$$\cos\theta = b \quad \text{e} \quad \cos\theta = c,$$

teremos respectivamente, por considerações perfeitamente identicas ás precedentes, as componentes da força exercida sobre o ponto p, parallelamente aos eixos dos y e dos z.

Fazendo, para abreviar,

$$H = \int_0^R \varkappa \, d r,$$

teremos as expressões das componentes

$$X = \varepsilon \int \frac{a i}{R^2} H d \omega, \quad Y = \varepsilon \int \frac{b i}{R^2} H d \omega, \quad Z = \varepsilon \int \frac{c i}{R^2} H d \omega$$

as quaes vamos differenciar relativamente ás respectivas coordenadas do ponto p.

Esta differenciação pode effectuar-se mesmo debaixo do signal $\int$, porquanto referindo-se a integração ao elemento $d \omega$ da superficie ha perfeita independencia entre esta e as outras variaveis. Será assim

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX}{dx} &= \varepsilon\int \frac{d\frac{ai}{R^2}}{dx}.H d\omega + \varepsilon\int \frac{ai}{R^2}.\frac{dH}{dx} d\omega \\
\frac{dY}{dy} &= \varepsilon\int \frac{d\frac{bi}{R^2}}{dy}\cdot H d\omega + \varepsilon\int \frac{bi}{R^2}.\frac{dH}{dy} d\omega \\
\frac{dZ}{dz} &= \varepsilon\int \frac{d\frac{ci}{R^2}}{dz}.H d\omega + \varepsilon\int \frac{ci}{R^2}.\frac{dH}{dz} d\omega.
\end{aligned}\right\} \ldots (20)$$

Chamando x, y, z as coordenadas de p, e ξ, η, ζ as de $d\omega$, será

$$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}:$$

mas

$$a = \frac{\xi - x}{R}, \quad b = \frac{\eta - y}{R}, \quad c = \frac{\zeta - z}{R}, \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$i = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

por serem α, β, γ, os cosenos dos angulos que a normal a $d\,\omega$ faz com os tres eixos, como já lhe chamamos em (III); por conseguinte

$$\frac{a\,i}{R^2}=\frac{(\xi-x)^2\,\alpha+(\xi-x)(\eta-y)\,\beta+(\xi-x)(\zeta-z)\,\gamma}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^2}.$$

Esta expressão differenciada em ordem a x, restituindo R, a e i, dá

$$\frac{d\,\frac{a\,i}{R^2}}{d\,x}=\frac{-\,a\,\alpha+(4\,a^2-1)\,i}{R^3};$$

e do mesmo modo se obterão respectivamente

$$\frac{d\,\frac{b\,i}{R^2}}{d\,y}=\frac{-\,b\,\beta+(4\,b^2-1)\,i}{R^3}$$

$$\frac{d\,\frac{c\,i}{R^2}}{d\,z}=\frac{-\,c\,\gamma+(4\,c^2-1)\,i}{R^3}.$$

Substituindo estes valores em (20), virá

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX}{dx} &= \varepsilon\int\frac{-a\alpha+(4a^2-1)i}{R^3}.H\,d\omega+\varepsilon\int a\frac{dH}{dx}.\frac{i}{R^2}d\omega\\
\frac{dY}{dy} &= \varepsilon\int\frac{-b\beta+(4b^2-1)i}{R^3}.H\,d\omega+\varepsilon\int b\frac{dH}{dy}.\frac{i}{R^2}d\omega\\
\frac{dZ}{dz} &= \varepsilon\int\frac{-c\gamma+(4c^2-1)i}{R^3}.H\,d\omega+\varepsilon\int c\frac{dH}{dz}.\frac{i}{R^2}d\omega:
\end{aligned}\right\}(22)$$

e porque entre os cosenos a, b, c, α, β, γ, se dão as relações conhecidas

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=i,$$

a somma d'estas expressões será

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=\int\left(a\frac{dH}{dx}+b\frac{dH}{dy}+c\frac{dH}{dz}\right)\cdot\frac{i}{R^2}d\omega. \quad (23)$$

Vejamos a que se reduz a quantidade que está entre parenthesis, e para isso operemos uma pequena transformação no integral

$$H=\int_0^R \varkappa\, d r.$$

Pelo modo como elle se nos apresenta consideram-se successivamente os diversos pontos do raio vector desde $r=o$ até $r=R$, isto é, desde p até ao elemento $d\omega$: a transformação consiste em considerar esses pontos numa ordem inversa, isto é, a partir de $d\omega$ para p. Nesta hypothese, um ponto qualquer do raio vector, que primeiramente ficava assignado pela distancia r, fical'-o-ha agora por uma distancia ao elemento $d\omega$, que poderemos chamar ρ, ou

$$r=R-\rho$$

Então é

$$dr = -d\rho,$$

e por conseguinte

$$\int \varkappa\, d\, r = -\int \varkappa\, d\,\rho.$$

Mas, porque a $r=0$ corresponde $\rho=R$, e a $r=R$ corresponde $\rho=0$. será

$$\int_0^R \varkappa\, dr = -\int_R^0 \varkappa\, d\rho,$$

ou

$$H = \int_0^R \varkappa\, d\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

O integral H, referindo-se ao raio vector terminado nos pontos p e $d\omega$, é funcção das coordenadas $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ d'estes pontos. Ora, em virtude de (21), é

$$x = \xi - a\, R,\ y = \eta - b\, R,\ z = \zeta - c\, R;$$

e portanto podemos suppor que H é funcção de ξ, η, ζ, a, b, c, R. E como na differenciação que temos em vista podemos considerar constantes as coordenadas de $d\omega$, o integral H poderá simplesmente exprimir-se por uma funcção de a, b, c e R, sendo estas por sua vez funcções de x, y, z.

Applicando o theorema da differenciação de *funcção de funcções*, é

$$\frac{dH}{dx}=\frac{dH}{da}\cdot\frac{da}{dx}+\frac{dH}{db}\cdot\frac{db}{dx}+\frac{dH}{dc}\cdot\frac{dc}{dx}+\frac{dH}{dR}\cdot\frac{dR}{dx}.$$

Por (21) é

$$\frac{da}{dx}=\frac{a^2-1}{R},\quad \frac{db}{dx}=\frac{ab}{R},\quad \frac{dc}{dx}=\frac{ac}{R},$$

e, segundo o valor de R,

$$\frac{dR}{dx}=a;$$

logo

$$\frac{dH}{dx}=\frac{1}{R}\left[-\frac{dH}{da}+a\left(a\frac{dH}{da}+b\frac{dH}{db}+c\frac{dH}{dc}\right)\right]-a\frac{dH}{dR}$$

e similhantemente

$$\frac{dH}{dy}=\frac{1}{R}\left[-\frac{dH}{db}+b\left(a\frac{dH}{da}+b\frac{dH}{db}+c\frac{dH}{dc}\right)\right]-b\frac{dH}{dR}$$

$$\frac{dH}{dz}=\frac{1}{R}\left[-\frac{dH}{dc}+c\left(a\frac{dH}{da}+b\frac{dH}{db}+c\frac{dH}{dc}\right)\right]-c\frac{dH}{dR}.$$

Multiplicando a primeira por a, a segunda por b e a terceira por c, teremos

$$a\frac{dH}{dx}+b\frac{dH}{dy}+c\frac{dH}{dz}=-\frac{dH}{dR},$$

e, substituindo esta expressão em (23),

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=-\epsilon\int\frac{dH}{dR}\cdot\frac{i}{R^2}d\omega\ldots \quad (25)$$

Para progredir é preciso saber o que seja $\frac{dH}{dR}$, ou, segundo (24),

$$\frac{dH}{dR}=\frac{d}{dR}\int_0^R \varkappa\, d\rho.$$

A quantidade $\varkappa$ que figura nesta expressão é, como se sabe, a densidade do corpo correspondente ao elemento collocado á distancia ρ da origem que escolhemos para o integral, e como tal variavel com esta distancia segundo uma funcção que nos é desconhecida, mas que podemos designar geralmente pela caracteristica f: se pois substituirmos $\varkappa$ por esta funcção, virá

$$\frac{dH}{dR}=\frac{d}{dR}\int_0^R f(\rho)\, d\rho.$$

Chamando $F(\rho)$ o integral geral de $f(\rho)\, d\rho$ será

$$\int_0^R f(\rho)\, d\rho = F(R)$$

e por conseguinte

$$\frac{dH}{dR}=\frac{dF}{dR}=f(R).$$

Mas porque $f(\rho)$ designa geralmente a densidade do agente a uma distancia ρ da superficie, para $\rho=R$ designará a densidade d'um ponto especial, que é justamente p. Chamando $(\varkappa)$ a densidade do agente nesse ponto, será finalmente

$$\frac{dH}{dR}=(\varkappa),$$

e

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=-\int(\varkappa).\ \frac{i}{R^2}\,d\omega.$$

Esta integração refere-se ao elemento $d\,\omega$ da superficie, e é evidente que, qualquer que seja a sua posição, esta é independente das coordenadas de p; conclue-se pois que $(\varkappa)$ é constante na integração, e como tal pode a expressão escrever-se

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=-\iota(\varkappa)\int\frac{i}{R^2}\,d\omega.$$

O integral que figura nesta expressão já foi achado em (III), onde se viu qual o seu valor tanto para p interior como para p exterior ao corpo. Pela analyse que lá fizemos, que aqui tem inteira applicação, vê-se que o integral é nullo para p exterior e egual a 4π para p interior, portanto

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0 \qquad (p \text{ exterior})$$

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=-4\pi\iota(\varkappa) \quad (p \text{ interior})$$

ou,

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0$$

e

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\epsilon(x)$$

como procuravamos verificar.

Desviemos agora o ultimo obstaculo que se oppõe, neste ponto, ao estabelecimento dos theoremas em toda a sua generalidade, isto é, considerando o corpo que contem o agente não homogeneo relativamente a elle, e além d'isso suppondo p em qualquer posição. Para isso falta-nos apenas examinar o caso em que o ponto está de tal modo perto da superficie, que possam offerecer-se duvidas sobre a validade das respectivas expressões, que dão os coefficientes de segunda ordem, entre os quaes, até aqui, temos estabelecido os mencionados theoremas, e é d'esse caso que vamos tractar.

Examinando as expressões (22), as quaes dão os coefficientes de primeira ordem das componentes de força ou os de segunda da funcção potencial, vê-se effectivamente que os integraes que ellas contem podem tornar-se infinitos pela razão de que R está no denominador, sendo como é a distancia de p aos elementos $d\omega$, distancia que certamente é muito proxima de zero, quando se der a p a posição que temos por fim considerar aqui especialmente. Torna-se pois preciso, ou adoptar outras expressões para os coefficientes differenciaes de segunda ordem ou transformar aquelles de modo que a nova variavel adoptada seja tal que, integrando para todos os seus elementos, a funcção a integrar offereça toda a segurança de que se não torna infinita em qualquer circumstancia que seja.

A transformação tantas vezes adoptada do elemento $d\omega$ da superficie para o elemento $d\sigma$ d'angulo solido, applicada aos termos que contêm i nas expressões (22) de que fallamos, resolve todas estas difficuldades, e por isso é a ella que recorremos, concluindo depois que mesmo no caso que consideramos os theoremas tem logar, se todavia pela transformação se reconhecer que os integraes ficam finitos.

Fazendo

$$d\sigma = \pm \frac{i}{R^2} d\omega$$

nas expressões (22), e reunindo debaixo do mesmo signal $\int$ todos os termos que contém $d\sigma$, vem

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX}{dx} &= \varepsilon\int \pm \left[(4a^2-1)\cdot\frac{H}{R} + a\frac{dH}{dx}\right] d\sigma - \varepsilon\int \frac{H}{R}\cdot\frac{a\alpha}{R^2}\, d\omega \\
\frac{dY}{dy} &= \varepsilon\int \pm \left[(4b^2-1)\cdot\frac{H}{R} + b\frac{dH}{dy}\right] d\sigma - \varepsilon\int \frac{H}{R}\cdot\frac{b\beta}{R^2}\, d\omega \\
\frac{dZ}{dz} &= \varepsilon\int \pm \left[(4c^2-1)\cdot\frac{H}{R} + c\frac{dH}{dz}\right] d\sigma - \varepsilon\int \frac{H}{R}\cdot\frac{c\gamma}{R^2}\, d\omega
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

onde devemos tomar tantos integraes relativos a $d\sigma$ quantas forem as intersecções do raio vector com a superficie, observando a respeito dos signaes o que já por vezes temos dicto sobre o modo de considerar o angulo i do raio vector com a normal.

Debaixo d'esta fórma especial vejamos se as expressões se tornam infinitas para valores de R infinitamente pequenos, e para isso analysemos cada termo em particular, começando pelos que se referem á variavel $d\sigma$.

Os termos

$$(4a^2-1)\frac{H}{R},\ (4b^2-1)\frac{H}{R},\ (4c^2-1)\frac{H}{R},$$

não contêm quantidade alguma, pela qual possam tornar-se infinitos: porquanto a, b, c são cosenos, e como taes menores que a unidade, e $\frac{H}{R}$ fica finito em quanto $\varkappa$ satisfizer á condição de se não tornar infinita para ponto algum do espaço sujeito á funcção que dá o seu valor tanto interior como exteriormente ao corpo que contém o agente, por ser

$$H=\int_0^R \varkappa d\rho$$

como suppozemos. E porque os valores de $\varkappa$ variam d'uma maneira continua d'um ponto para outro, segue-se egualmente que os termos

$$a\frac{dH}{dx},\ b\frac{dH}{dy},\ c\frac{dH}{dz}$$

não podem attingir valores infinitos em quanto $\varkappa$ não sahir fora das condições a que a sujeitamos.

Em consequencia do exposto pode offerecer-se duvida unicamente sobre os ultimos termos das expressões (26). Estes são

$$\int \frac{H}{R} \cdot \frac{a\alpha}{R^2} d\omega, \quad \int \frac{H}{R} \cdot \frac{b\beta}{R^2} d\omega, \quad \int \frac{H}{R} \cdot \frac{c\gamma}{R^2} d\omega;$$

e podemos reduzil-os a dous, pois que, por ser

$$i = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

donde

$$c\gamma = i - a\alpha - b\beta,$$

o ultimo d'elles se decompõe do seguinte modo

$$\int \frac{H}{R} \cdot \frac{c\gamma}{R^2} d\omega = \int \pm \frac{H}{R} d\sigma - \int \frac{H}{R} \cdot \frac{a\alpha}{R^2} d\omega - \int \frac{H}{R} \cdot \frac{b\beta}{R^2} d\omega:$$

o primeiro d'estes está no caso dos que mencionámos ha pouco, e os outros dous são justamente os que temos em cima.

Resta pois considerar os dous integraes

$$\int \frac{H}{R} \cdot \frac{a\alpha}{R^2} d\omega \qquad \int \frac{H}{R} \cdot \frac{b\beta}{R^2} d\omega$$

para decidir da verdade dos theoremas quando se suppozer o ponto p infinitamente proximo da superficie do corpo que contém o agente, e é d'elles que vamos tractar, empregando considerações muito simples, que nos levarão naturalmente á conclusão que se quer obter.

Abaixando do ponto p uma normal á superficie do corpo, e adoptando para origem d'um systema de coordenadas rectangulares o ponto em que ella encontra a superficie, tomando essa recta para eixo dos z e o plano tangente á superficie para plano dos $x\ y$, temos um systema de coordenadas que nos conduz ao fim desejado.

Os valores de a e b simplificam-se por este systema, pois que, estando o ponto p sobre o eixo dos z, são $x=o$, $y=o$, e (21)

$$a=\frac{\xi}{R},\ b=\frac{\eta}{R}.$$

Estes valores substituidos nos integraes de que se tracta fazem-lhes tomar as formas

$$\int\frac{H}{R}\cdot\frac{\xi\alpha}{R^3}d\omega \qquad \int\frac{H}{R}\cdot\frac{\eta\beta}{R^3}d\omega,$$

e relativamente á extensão que elles devam ter limitar-nos-hemos á consideração unicamente dos elementos de superficie infinitamente proximos da origem das coordenadas que adoptámos, visto que para todos os outros deixa R de ser infinitamente pequeno.

Se a equação da superficie fôr representada por

$$\zeta = f(\xi, \eta),$$

recordando-nos da significação que demos a α, β, γ, e do modo como se considera a normal a que se referem os angulos que têm esses cosenos, teremos

$$\alpha = -\frac{\dfrac{d\zeta}{d\xi}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{d\zeta}{d\xi}\right)^2+\left(\dfrac{d\zeta}{d\eta}\right)^2}}$$

$$\beta = -\frac{\dfrac{d\zeta}{d\eta}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{d\zeta}{d\xi}\right)^2+\left(\dfrac{d\zeta}{d\eta}\right)^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{d\zeta}{d\xi}\right)^2+\left(\dfrac{d\zeta}{d\eta}\right)^2}}$$

e por conseguinte

$$\alpha = -\frac{d\zeta}{d\xi}\gamma$$

$$\beta = -\frac{d\zeta}{d\eta}\gamma.$$

Com estes valores os dous integraes escrevem-se

$$-\int \frac{H}{R}\cdot\frac{\xi\frac{d\zeta}{d\xi}}{R^3}\gamma\, d\omega,\quad -\int \frac{H}{R}\cdot\frac{\eta\frac{d\zeta}{d\eta}}{R^3}\gamma\, d\omega;$$

e vamos ainda transformal-os, adoptando um systema de coordenadas polares com a mesma origem que adoptamos para aquelle de que nos estamos servindo.

A quantidade $\gamma\, d\omega$ indica a projecção sobre o plano dos xy do elemento $d\omega$ de superficie do corpo que consideramos, ou o elemento da projecção, sobre o mesmo plano, de toda a porção da superficie do corpo a que é necessario attender, quer dizer de todos os pontos da superficie para os quaes R é infinitamente pequeno. D'este modo, tomando esta variavel para a integração, podemos imaginar um systema de coordenadas polares, com a origem de que nos temos servido, residente no plano $x\ y$, e exprimir $\gamma\, d\,\omega$ neste systema. Chamando u o raio vector ou a distancia da origem a qualquer ponto do plano $x\ y$, e ψ o angulo comprehendido entre dous raios vectores consecutivos, será

$$\gamma\, d\,\omega = u\, d\, u\, d\,\psi.$$

Advertindo tambem que

$$\xi = u \cos \psi, \quad \eta = u \operatorname{sen} \psi,$$

teremos os dous integraes.

$$-\iint \frac{H}{R} \cdot \frac{\frac{d\,\zeta}{d\,\xi}}{R^3}\, u^2 \cos\psi\, d\, u\, d\,\psi$$

$$-\iint \frac{R}{H} \cdot \frac{\frac{d\,\zeta}{d\,\eta}}{R^3}\, u^2 \operatorname{sen}\psi\, u\, d\,\psi.$$

Ora, como para a origem das coordenadas, visto que o plano é tangente á superficie nesse ponto, são nullos os coefficientes differenciaes $\frac{d\zeta}{d\xi}$ e $\frac{d\zeta}{d\eta}$, e como tambem podemos pôr

$$\frac{d\zeta}{d\xi}=mu, \quad \frac{d\zeta}{d\eta}=nu$$

para os pontos immediatos a esse, sendo m e n funcções de u e ψ, suppondo todavia que a curvatura da superficie se não torna infinita, teremos, chamando A o primeiro integral e B o segundo,

$$A=-\iint\frac{H}{R}\cdot\frac{mu^3}{R^3}\cos\psi\, d u\, d\psi,$$

$$B=-\iint\frac{H}{R}\cdot\frac{nu^3}{R^3}\operatorname{sen}\psi\, d u\, d\psi.$$

E porque é

$$R=\sqrt{u^2+(\zeta-z)^2},$$

em consequencia do que será sempre R maior que u, segue-se que a fracção $\frac{u^3}{R^3}$ não pode tornar-se infinita. Sendo assim, desapparece o inconveniente que á primeira vista se offerecia para o emprego das equações (22), no caso particular de estar o ponto p muito proximo da superficie do corpo, e por conseguinte não pode restar duvida alguma de que podemos em todos os casos empregal-as, d'onde a generalidade dos theoremas.

CAPITULO TERCEIRO

I

Já noutro logar tractámos da distribuição superficial do agente, e considerámos especialmente o caso em que elle se acha sobre a superficie de uma esphera. Nesta parte propomo-nos desenvolver um pouco mais este objecto.

Estabeleçamos um theorema que nos fornece a consideração da funcção potencial, e que é importantissimo pelas conclusões a que conduz quando se imagina o agente espalhado apenas á superficie dos corpos, como succede, por exemplo, com a electricidade decomposta em um corpo conductor isolado.

Seja V a funcção potencial das quantidades Q_1, Q_2,... Q_n d'agente concentrado nos pontos P_1, P_2,... P_n, e v a funcção potencial das quantidades q_1, q_2,... q_m d'agente concentrado nos pontos p_1, p_2,... p_m: chamando V_1, V_2,... V_m, os valores de V para estes ultimos pontos, v_1, v_2,... v_n os de v a respeito dos primeiros, designando respectivamente por

$$(R_i)_1,\ (R_i)_2,\ \ldots\ldots\ (R_i)_m \ \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

as distancias de P_i a

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ldots\ p_m,$$

devendo o indice i ter todos os valores desde 1 até n, e chamando tambem

$$(rk)_1,\ \ (rk)_2,\ \ldots\ldots\ (rk)_n \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

as distancias de p_k a

$$P_1, P_2, \ldots\ldots\ P_n,$$

devendo egualmente k ter todos os valores desde

1 até *m*, teremos, pela definição da funcção potencial que demos em (I), Cap. Prim.

$$V_k = \left(\frac{Q_1}{(rk)_1} + \frac{Q_2}{(rk)_2} + \ldots\ldots + \frac{Q_n}{(rk)_n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{(rk)_i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$v_i = \left(\frac{q_1}{(R_i)_1} + \frac{q_2}{(R_i)_2} + \ldots\ldots + \frac{q_m}{(R_i)_m}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=m} \frac{q_k}{(R_i)_k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

Fazendo $k=1, 2, \ldots\ldots m$ e $i=1, 2, \ldots\ldots n$ em (2) e (2*a*), teremos tantas expressões da funcção potencial, quantos forem os pontos em que se suppõe concentrado o agente. Ha porém a ponderar que entre as distancias r e R ha egualdades que permittem o estabelecimento d'uma certa relação entre as funcções V_k e v_i, e vamos ver quaes ellas são, pois é essa relação que constitue o theorema de que nos occupamos.

A distancia de P_i a p_k designámol-a em (1) por $(R_i)_k$, e a mesma distancia é designada em (1*a*) por $(r_k)_i$; por conseguinte

$$(R_i)_k = (r_k)_i\,; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

d'onde podem sahir todas as egualdades de que fallamos dando a i e a k diversos valores, que devem ser os mesmos nos dous membros.

Multiplicando (2) por q_k e (2*a*) por Q_i, vem

$$V_k\, q_k = q_k \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{(r_k)_i} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$v_i\, Q_i = Q_i \sum_{k=1}^{k=m} \frac{q_k}{(R_i)_k}\,; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

e fazendo respectivamente $k=1, 2, \ldots . m$ e $i=1, 2, \ldots . n$ nos primeiros membros de (3) e (3a),

$$V_1 q_1 + V_2 q_2 + \ldots + V_m q_m = \sum_{k=1}^{k=m} q_k \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{(r_k)_i} \ldots\ldots (4)$$

$$v_1 Q_1 + v_2 Q_2 + \ldots + v_n Q_n = \sum_{i=1}^{i=n} Q_i \cdot \sum_{k=1}^{k=m} \frac{q_k}{(R_i)_k} \ldots\ldots (4a)$$

Mas

$$\sum_{k=1}^{k=m} q_k \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{(r_k)_i} = \sum_{i=1}^{i=n} Q_i \sum_{k=1}^{k=m} \frac{q_k}{(R_i)_k} (*) \ldots\ldots (5)$$

(*) Prova-se facilmente que assim é. O primeiro membro decompõe-se como segue:

$$\sum_{k=1}^{k=m} q_k \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{(r_k)_i} =$$

logo

$$V_1 q_1 + V_2 q_2 + \ldots + V_m q_m = v_1 Q_1 + v_2 Q_2 + \ldots + v_n Q_n,$$

ou

$$\sum V q = \sum v Q$$

Suppondo que os agentes se acham distribuidos

$$= q_1 \left[\frac{Q_1}{(r_1)_1} + \frac{Q_2}{(r_1)_2} + \ldots + \frac{Q_n}{(r_1)_n} \right] +$$

$$+ q_2 \left[\frac{Q_1}{(r_2)_1} + \frac{Q_2}{(r_2)_2} + \ldots + \frac{Q_n}{(r_2)_n} \right] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ q_m \left[\frac{Q_1}{(r_m)_1} + \frac{Q_2}{(r_m)_2} + \ldots + \frac{Q_n}{(r_m)_n} \right]$$

$$= Q_1 \left[\frac{q_1}{(r_1)_1} + \frac{q_2}{(r_2)_1} + \ldots + \frac{q_m}{(r_m)_1} \right] +$$

de tal modo que enchem espaços ou cobrem superficies, os $\sum$ transformam-se em $\int$, e a equação precedente pode escrever-se

$$\int V d q = \int v d Q: \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$+ Q_2 \left[\frac{q_1}{(r_1)_2} + \frac{q_2}{(r_2)_2} + \ldots\ldots + \frac{q_m}{(r_m)_2} \right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ Q_n \left[\frac{q_1}{(r_1)_n} + \frac{q_2}{(r_2)_n} + \ldots\ldots + \frac{q_m}{(r_m)_n} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} Q_i \cdot \sum_{k=1}^{k=m} \frac{q_k}{(r_k)_i} \cdot$$

Mas em virtude de (b) é

$$(r_k)_i = (R_i)_k$$

logo tem logar a egualdade (5).

é o theorema a que pretendiamos chegar, e que em seguida applicamos.

Imaginemos uma esphera de raio R; sobre a superficie S d'esta distribuida uniformemente, isto é, com uma densidade constante h, a quantidade q d'agente attractivo: supponhamos tambem que ha uma quantidade Q d'agente distribuido de tal modo que uma parte d'elle Q_i é interior e outra parte Q_e é exterior á esphera, e chamemos r a distancia do centro a qualquer ponto, interior ou exterior, para que queiramos determinar a funcção potencial do agente q, a qual designaremos geralmente por v. Como já vimos em (p. 57, Cap. Seg.) a funcção potencial do agente distribuido uniformemente sobre a superficie da esphera, é

$$v_i = 4\pi\varepsilon h R$$

para um ponto interior, e

$$V_e = \frac{4\pi\varepsilon h R^2}{r}$$

para um ponto exterior collocado á distancia r do centro.

Mas pela definição que demos em cima, é

$$v = v_i + v_e$$

logo, se affectarmos os integraes de signaes indicativos da residencia do agente a respeito da esphera,

$$\int v\,d\,Q = \int_{(i)} 4\pi\epsilon\,h\,R dQ + \int_{(e)} \frac{4\pi\epsilon\,h\,R^2}{r}\,dQ$$

$$= 4\pi\epsilon\,h\,R\,Q_i + 4\pi\epsilon\,h\,R^2 \int_{(e)} \frac{dQ}{r} \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

ou, designando por V_c a funcção potencial do agente exterior á esphera relativamente ao centro d'esta,

$$\int v\,d\,Q = 4\pi\epsilon\,h\left(R\,Q_i + R^2 V_c\right) \ldots\ldots \quad (8)$$

Ora, designando dq o elemento do agente, distribuido como dissemos com uma densidade constante h, será

$$dq = \epsilon\,h\,d\,S,$$

chamando dS o elemento de superficie espherica; donde

$$\int V dq = {}_{\varepsilon} h \int V d S,$$

e por conseguinte, attendendo a (6) e (8),

$$\int V d S = 4\pi \left(R Q_i + R^2 V_c \right),$$

onde deve estender-se a integração a toda a superficie S da esphera. V é a funcção potencial da quantidade Q d'agente, que suppomos repartida como acima indicámos, relativamente ao agente q distribuido sobre a esphera.

Quando se suppozer que o agente Q é todo exterior á esphera, então teremos simplesmente

$$\int V d S = 4 \pi R^2 V_c,$$

donde

$$\int (V - V_c) dS = o \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (9)$$

ou

$$V = V_c:$$

o que quer dizer que a funcção potencial do agente exterior, relativamente á superficie espherica, tem o mesmo valor que quando se calcula relativamente ao seu centro.

Em quanto o centro permanecer o mesmo a respeito do agente Q é claro que qualquer que seja a esphera, com tanto que Q se lhe conserve exterior, e na mesma disposição, será sempre

$$V = C,$$

sendo C uma constante: mas não succede outro tanto quando o centro da esphera mudar de posição, porque então muda tambem o valor de r em (7), e por conseguinte V_c. V terá em geral tantos valores $V_{c'}$, $V_{c''}$, ... quantos os centros que se escolherem, subsistindo todavia a independencia notada entre os valores de V e os comprimentos do raio. Mas supponhamos que V_c é sempre o mesmo, qualquer que seja c; então será necessario que a distribuição de Q se torne especial, de modo a satisfazer áquella condição, e a distribuição espherica está n'este caso, pois o valor de V fica independente da distancia r.

Effectivamente, como vimos em (p. 57) e já reproduzimos acima, é

$$V_i = 4\pi\varepsilon H\rho,$$

designando V_i a funcção potencial da quantidade Q d'agente, distribuido com a densidade constante H sobre a superficie d'uma esphera de raio ρ, relativamente a qualquer ponto do interior da mesma esphera. Por esta expressão se vê ser possivel conseguir para V um valor particular V_c, variando convenientemente H e ρ: uma vez assignados a H e ρ valores determinados, V terá um valor constante para todos os pontos interiores á esphera que contem Q.

Demostrado isto, e suppondo que V representa a funcção potencial d'uma quantidade qualquer Q d'agente, todo exterior a um certo espaço limitado, não é possivel que V tenha um valor constante para uma parte e um valor differente para outra parte d'esse espaço. Com effeito, supponhamos que dividimos o espaço dado em duas partes A e B, as quaes não podem deixar de ser contiguas, e que a funcção potencial tem um valor constante a para a primeira, e um valor maior ou menor para a segunda. Tomando um ponto do espaço A para centro d'uma esphera que tenha um raio R tal que comprehenda uma parte do espaço B, e designando por ds o elemento da esphera, sabemos por (9) que deve ser

$$\int\left(V-a\right)ds=o,$$

estendendo a integração a toda a superficie espherica. Mas por esta expressão conclue-se que $V=a$ para toda a superficie espherica, logo não pode V ter um valor differente para os pontos do espaço B, pois que a esphera abrange tambem esses pontos. Por conseguinte não pode dar-se a hypothese, que por um momento figurámos, de ser $V=a$ para os pontos de A e $V \gtrless a$ para os de B.

D'isto conclue-se tambem que, se no espaço pelo qual está distribuido o agente Q houver algum intervallo em que elle não resida, e se a funcção potencial tiver um valor constante para parte d'esse intervallo, terá o mesmo valor para todo o intervallo.

Imaginemos uma superficie que involve um certo espaço finito, e suppunhamos uma quantidade Q

d'agente distribuida de qualquer modo dentro, fóra e sobre ella. Designemos por $d\omega$ o elemento d'esta superficie, por P a força que o agente exerce normalmente a ella, e tentemos deduzir $\int P\, d\omega$ estendendo a integração á superficie inteira.

Calculemos a acção do elemento dQ d'agente pela forma por que deixamos indicado, e $\int P\, d\omega$ será a resultante total das acções que exercem todos os elementos dQ. Chamando R a distancia de $d\,Q$ a $d\omega$, i o coseno do angulo formado, como deixámos convencionado em (p. 61), pela direcção da recta que passa por $d\,Q$ e $d\omega$ com a normal a este ultimo elemento, será

$$dQ\int\frac{i}{R^2}d_\omega$$

a parte do integral procurado que corresponde á quantidade dQ do agente, estendendo a integração a toda a superficie. Não podemos porem effectuar esta integração sem marcar o logar d'onde parte a acção, porque o valor do integral varia com a posição de dQ a respeito da superficie. Tomando dQ para vertice d'uma pyramide elementar d'angulo solido $d\sigma$, a pyramide prolongada através a superficie encontral-a-ha um numero par ou impar de vezes conforme $d\,Q$ for exterior ou interior a ella, e sabemos que, por ser $\frac{i}{R^2} d\omega = \pm d\sigma$, podemos integrar em ordem a $d\sigma$, comtanto que tomemos tantos integraes com os signaes que lhes convêm, quantas forem as intersecções da pyramide com a superficie. D'este modo, quando dQ é exterior, vem

$$\int \frac{i}{R^2} d\omega = \int (-d\sigma + d\sigma - \ldots) = o.$$

Se dQ é interior, virá

$$\int \frac{i}{R^2} d\omega = \int (+d\sigma - d\sigma + d\sigma - \ldots) = \int d\sigma;$$

e como neste caso podemos figurar pyramides elementares em todas as direcções em roda de Q, será

$$\int \frac{i}{R^2} d\omega = 4\pi.$$

Quando dQ está mesmo sobre a superficie, supponhamos tirado um plano tangente á superficie nesse ponto; as partes da superficie que estiverem superiores ao plano estarão no primeiro caso, e as que estiverem inferiores no segundo. Em virtude d'isto, e porque a superficie a attender é unicamente o hemispherio inferior ao plano, teremos para este caso

$$\int \frac{i}{R^2} d\,\omega = 2\pi.$$

Conclue-se pois que o agente distribuido exteriormente á superficie não tem influencia alguma no integral que se pretende achar. Chamando Q_i o agente interior e Q_s o que está distribuido sobre a superficie, será assim

$$\int P\, d\,\omega = 4\pi\, Q_i + 2\,\pi\, Q_s;$$

concluindo-se egualmente que $\int P\,\omega = o$ quando o agente estiver todo fóra da superficie. Chamando V a funcção potencial do agente Q, e n a direcção da normal á superficie, $\frac{dV}{dn}$ designa a componente no sentido da normal da acção exercida sobre a superficie; por conseguinte será

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = o$$

quando o agente for todo exterior, e portanto é V constante.

O emprego da funcção potencial, quando referida ao agente que cobre uma qualquer superficie, permittir-nos-hia ir ainda mais longe na deducção de importantes theoremas; mas parece-nos bastante o que deixamos dicto para mostrar o alcance d'aquella noção.

No que se segue apresentamos uma breve noticia das modificações devidas a Clausius, e feito isto damos por concluida a nossa lucubração.

II

A denominação de *funcção potencial* foi introduzida na sciencia em 1828 por *George Green*, que estudou resumidamente, mas d'uma maneira segura, as propriedades d'aquella funcção numa obra sobre a applicação da analyse mathematica ás theorias mais correntes da electricidade e do magnetismo. O sentido que lhe damos neste trabalho é justamente o que lhe attribuiu o eminente physico inglez. Onze annos depois appareceu um trabalho de *Gauss* tractando das propriedades fundamentaes do *potencial*, e nelle se encontra uma serie de curiosos theoremas sobre as forças que actuam segundo a lei dos quadrados das distancias. O objecto a que se referiam os dous auctores era o mesmo: o nome era porém differente. Os auctores que depois se occuparam d'esta materia empregaram a denominação de Gauss, mas isto foi talvez para brevidade. *Clausius*, professor na Universidade de Bonn, na sua obra — *Die Potential-*

function und das Potential, ein Beitrag zur mathematischen Physik. — distingue entre *funcção potencial* e *potencial*. Á primeira noção dá o sentido que lhe deu Green, e reserva para a segunda uma significação analoga mas não identica, pois faz o *potencial*

$$W = \frac{1}{2} \int V \, d\, q$$

sendo V a *funcção potencial,* e estendendo a integração a todo o agente do qual dq representa um elemento. Esta distincção de Clausius é importantissima, e parece-nos corresponder cabalmente ao assumpto. No nosso trabalho não nos propozemos escrever sobre o *potencial,* mas sim sobre a *funcção potencial,* e por isso não entramos em maiores circumstanciações a tal respeito. No emtanto as equações (6) e (8) dão-nos exemplos do que deve entender-se pela palavra *potencial.*

A primeira edição da obra de Clausius esgotou-se rapidamente, como era de justiça para trabalho tão bem concebido. Da segunda edição, publicada em 1866, fez o professor de Liège M. F. Folie uma traducção que publicou em 1870 sob o titulo — *De la Fonction Potentielle e du Potentiel* — e foi por esta que nos pozemos ao facto das noções de Clausius, as quaes adoptamos.

Foi tambem Clausius que introduziu pela primeira vez na expressão da funcção potencial o coefficiente especifico ε. Este coefficiente, substituido pelo valor que tem para cada agente particular, estabelece uma uniformidade admiravel nos resultados a que se chega com a funcção de que nos temos occupado: representa, como se terá certamente notado, a força attractiva ou repulsiva que exercem uma sobre outra duas unidades d'agente collocadas á unidade de distancia. O coefficiente differencial da funcção potencial de Clausius dá immediatamente a componente da força, devido isto ao coefficiente ε; não succede porém outro tanto com a funcção de Gauss. Esta ultima tambem dá a componente da força pelo seu coefficiente differencial de primeira ordem, mas é necessario não esquecer em cada caso fazel-o preceder do signal apropriado.

FIM.

INDICE

ERRATAS MAIS NOTAVEIS

Pag.	*Linhas*	*Erros*	*Emendas*
6	23	lei, considerada,	lei considerada,
12	12	$cos\ \alpha\ cos'\ \alpha$	$cos\ \alpha\ cos\ \alpha'$
13	3	$\frac{Ud}{ds}$	$\frac{dU}{ds}$
26	7	$p_1, p_2, \ldots$	$p'_1, p'_2, \ldots$
36	18	direcção	direcção.
40	4	$-\frac{1}{r^3}$	$-\frac{1}{R^3}$
43	4	$\frac{d^2V}{dz^2}$	$\frac{d^2V_2}{dz^2}$
64	9	R^5	R^2
92	3	B	β
93	15	$ud\psi$	$dud\psi$

1873

F. RAMOS-DISSERTAÇÃO INAUGURAL

MATHEMATICA