464

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

COMPARAÇÃO

DO

METHODO TELEOLOGICO DE WRONSKI

COM OS

METHODOS DE DANIEL BERNOUILLI E EULER,

PARA A

RESOLUÇÃO NUMERICA DAS EQUAÇÕES

POR

José Joaquim Pereira Falcão

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1870

Sala
Gab.
Est. O.S.
Tab. 464
N.º

Sala
Gab.
Est. O.S.
Tab. 464
N.º

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

COMPARAÇÃO

DO

METHODO TELEOLOGICO DE WRONSKI

COM OS

METHODOS DE DANIEL BERNOUILLI E EULER,

PARA A

RESOLUÇÃO NUMERICA DAS EQUAÇÕES

POR

José Joaquim Pereira Falcão

BIBLIOTECA DA UNIVERSIDADE
COMPRA
COIMBRA

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1870

AO

SEU AMIGO

JOSÉ PIRES BARBOSA JUNIOR

O.

O Auctor.

PREFACIO

O assumpto que escolhemos, para esta nossa dissertação de concurso, está ligado a um dos mais vastos problemas que tem ocupado a attenção dos geometras; ou, antes diremos, que nunca o espirito humano encontrou assumpto mais proprio, para pôr em toda a luz os infinitos recursos das suas faculdades creadoras. É do problema da *resolução das equações* que fallamos.

O pouco tempo de que dispomos, e muito sobre tudo a falta dos convenientes cabedaes de erudição scientifica, não nos permitte abranger neste trabalho a vasta extensão do problema da *resolução das equações*. Por isso nos limitamos a tractar da *resolução numerica;* e mesmo, neste campo mais limitado, apenas apreciaremos o methodo de Daniel Bernouilli, e a sua extensão por Euler; guiando-nos, na nossa critica, pelo unico criterio que póde fazer auctoridade numa sciencia, que em rigor não o admitte senão nas proprias leis constitutivas do entendimento.— Os trabalhos de Wronski sobre este assumpto serão o nosso criterio regulador.

I

Methodo de Daniel Bernouilli para determinar os valores approximados das raizes de uma equação algebrica qualquer, fundado no emprego das series recurrentes.

Como toda a serie recurrente se póde considerar como sendo o desinvolvimento de uma fracção racional qualquer, seja (1)

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\ldots..}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\ldots.}$$

a fracção que origina a seguinte serie recurrente:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\ldots.+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+\ldots.,$$

cujos coefficientes A, B, C, D,...., se determinam do seguinte modo: (a)

$$\begin{aligned}
A&=a\\
B&=\alpha A+b\\
C&=\alpha B+\beta a+c\\
D&=\alpha C+\beta B+\gamma A+d\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

O termo geral ou o coefficiente de z^n, acha-se decompondo a fracção proposta em fracções simples, cujos denominadores são os factores do denominador de (1).

A forma de termo geral depende sobretudo da natureza dos factores simples d'aquelle denominador, segundo são reaes ou imaginarios, desiguaes ou multiplos. Supponham-se primeiro reaes e desiguaes; e sejam estes factores $(1-pz)$, $(1-qz)$, $(1-rz)$, ...; de modo que (1) é egual a

$$\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}+\frac{C}{1-rz}+\ldots.$$

Sabe-se que o termo geral da serie recurrente é

$$(Ap^n+Bq^n+Cr^n+\ldots)\,z^n=Pz^n.$$

Supponha-se n muito grande, o que equivale a suppor a serie recurrente continuada até um termo de ordem muito adiantada; como as potencias de numeros desiguaes são tanto mais desiguaes entre si, quanto são mais elevadas, segue-se que haverá uma tamanha differença entre as potencias $Ap,^n$ $Bq,^n$ $Cr,^n$ ...., que a potencia resultante do maior dos numeros p,q,r...., excederá em muito as outras, devendo estas considerar-se como nullas para $n=\infty$. Seja p o maior dos numeros p,q,r...., já suppostos desiguaes; neste caso será $P=Ap^n$, quando for $n=\infty$; e quando n for apenas muito grande será proximamente $P=Ap^n$; egualmente será $Q=Ap,^{n+1}$ exacta ou aproximadamente, conforme n tiver o primeiro ou o segundo dos valores indicados; portanto $\frac{Q}{P}=p$. Assim, prolongada sufficientemente a serie recurrente, obtem-se o valor aproximado de p dividindo o coefficiente de cada termo pelo coefficiente do termo precedente.

Fica assim demonstrado, que se obtem o valor de p tanto mais aproximado, quanto maior é o numero de termos calculados, e quanto maior é o excesso de p sobre os numeros $q, r, \ldots$. A demonstração precedente tem um valor egual, quer p tenha o signal mais, quer tenha o signal menos, pois que as suas potencias augmentam egualmente nos dois casos.

Vejamos como se póde applicar a doutrina exposta á investigação das raizes de uma equação algebrica qualquer. Seja a equação (2)

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 \ldots = 0,$$

a qual só tenha raizes reaes e desiguaes, e da qual faremos o denominador de uma fracção, cujo numerador será formado pelo polinomio

$$a + bz + cz^2 + \ldots$$

com coefficientes $a, b, c, \ldots$, arbitrarios. E pois esta fracção (1)

$$\frac{a + bz + cz^2 + \ldots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3} = \frac{a + bz + cz^2 + \ldots\ldots\ldots}{(1-pz)\,(1-qz)\,1-rz)\ldots},$$

sendo $(1-pz)$, $(1-qz)$, $(1-rz)$,...., os factores binomios em que se decompoem a proposta (2), correspondentes ás suas raizes $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \ldots$ Como a serie recurrente nascida de (1′) dá o valor do maior numero p, fica conhecida a menor raiz $\frac{1}{p}$ da proposta (2). E se em (2) se fizesse $z = \frac{1}{x}$ obtinha-se uma transformada, da qual, pelo mesmo processo, se conheceria a menor raiz, e portanto a maior das raizes da proposta.

Dissemos que o numerador de (1′) era um polynomio de coefficientes arbitrarios; com effeito, o valor d'aquelles coefficientes, posto que influa no valor dos coefficientes dos primeiros termos da serie recurrente, em nada modifica a essencia do methodo de Bernouilli; todavia a forma attribuida áquelle numerador muito póde contribuir para mais promptamente se achar o valor approximado da raiz; assim, no termo geral da serie recurrente, que é $z^n\,(Ap^n + Bq^n + Cr^n + \ldots)$ os coefficientes A, B, C são, como se viu em (a), funcções dos coefficientes do numerador da fracção generatriz, do que resulta poder A ter um valor maior ou menor; no primeiro caso acha-se o valor de p mais cedo, e no segundo, mais tarde; póde mesmo tomar-se um numerador tal, que faça desapparecer A (*); neste caso a serie, ainda que continuada ao infinito, nunca poderia dar o valor de p. Este caso dá-se quando o numerador escolhido tem por factor $(1-pz)$, porque então este factor só entra apparentemente na fracção proposta.

O numerador arbitrario da fracção proposta póde escolher-se de modo, que faça conhecer qualquer das raizes da proposta; para o conseguir basta formar o numerador com o producto dos factores binomios da proposta, exce-

(*) Deve notar-se que aqui a letra A póde não representar a mesma cousa que em (a). Lá é o coefficiente do primeiro termo da serie; aqui é o coefficiente da potencia do maior numero p.

ptuando aquelle que corresponde á raiz procurada; assim, se quizermos obter a raiz $\frac{1}{q}$ de (a), basta fazer o numerador$=(1-pz)\,(1-rz)\ldots$, porque então a fracção (1′) reduz-se a

$$\frac{1}{1-qz},$$

que dá logar a uma serie recurrente, em que os coefficientes formam uma progressão geometrica cuja razão é q, e qualquer coefficiente dividido pelo seu anterior dá a razão, que é exactamente a raiz pedida. Póde-se pois dizer, que se tomarmos os primeiros termos á vontade, de modo a formarem uma progressão geometrica, cuja razão seja uma raiz da proposta, a serie dará essa raiz, embora ella não seja nem a menor, nem a maior.

Para que não aconteça, quando se procura a maior ou menor raiz da proposta, que se ache qualquer das outras raizes, escolhe-se um numerador que não tenha factor algum commum ao denominador, o que sempre se consegue, fazendo aquelle numerador egual á unidade.

Examinemos o caso em que a equação tem raizes eguaes, e supponhamos lhe a fórma $(1-pz)^2\,(1-qz)\,(1-rz)\ldots\ldots$ Sabe-se, pela theoria das series recurrentes, que o termo geral é, neste caso, (3)

$$z^n\,[(n+1)\,Ap^n + Bp^n + Cq^n + \ldots.]$$

Seja p a maior das raizes. Quando n for muito grande, o primeiro termo, em virtude do seu coefficiente $(n+1)$, é realmente muito maior do que os outros, mas como tambem o valor de Bp^n é muito consideravel, segue-se que só para um termo de ordem muito adiantada se póde despresar a somma de $Bp^n + Cq^n$.... em comparação do primeiro termo $(n+1)\ Ap^n$; e se $q > p$, o termo $(n+1)\ Ap^n$ só muito tarde se desvanecerá em presença de Cq^n, e portanto será difficil e muito trabalhoso achar a raiz minima da proposta. No caso de desprezarmos em (3) só os termos de Cq^n em diante, na hypothese de p ser o maior dos numeros, acontecerá que o valor de p é dado pela relação

$$\frac{(n+2)\ A + B}{(n+1)\ A + B}\ p > p$$

em quanto n for finito; portanto este methodo dará sempre, na presente hypothese, um valor de p aproximado por excesso.

Se a proposta (2) tiver a fórma

$$(1-pz)^2\ (1-qz)\ (1-rz) \ldots,$$

o termo geral da serie recurrente será

$$z^n \left[\frac{(n+1)\ (n+2)}{1.2}\ Ap^n + (n+1)\ Bp^n + Cp^n + Dq^n + \ldots \right].$$

Se p for o maior dos numeros, e n de tal modo grande que o termo Dq^n e seguintes se desvaneçam em presença dos anteriores, o valor de p será dado por (4)

$$\frac{\frac{1}{2}\ (n+2)\ (n+3)\ A + (n+2)\ B + C}{\frac{1}{2}\ (n+1)\ (n+2)\ A + (n+1)\ B + C}\ p,$$

que só dará o valor de p com sufficiente approximação, quando n for quasi infinito; o que melhor se vê dando a (4) a fórma seguinte:

$$\frac{\frac{1}{2}(n+2)\,(n+1+2)\,A+(n+1)\,B+B+C}{\frac{1}{2}(n+1)\,(n+2)\,A+(n+1)\,B+C}\,p=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(n+2)\,[(n+1)\,A+2A]+(n+1)\,B+B+C}{\frac{1}{2}(n+1)\,(n+2)\,A+(n+1)\,B+C}\,p=$$

$$=\frac{[\frac{1}{2}(n+2)\,(n+1)\,A+(n+2)\,A]+(n+1)\,B+B+C}{\frac{1}{2}(n+1)\,(n+2)\,A+(n+1)\,B+C}\,p=$$

$$=p+\frac{(n+2)\,A+B}{\frac{1}{2}(n+1)\,(n+2)\,A+(n+1)\,B+C}\,p.$$

No caso de p não ser o maior dos numeros, augmenta a difficuldade em lhe achar o valor. D'onde se conclue, que o emprego das series recurrentes se torna difficil e pouco util, quando na proposta ha raizes multiplas.

Extensão do methodo de Bernouilli, feita por Euler, para o caso da equação ter raizes imaginarias

Sejam $(1-qz)$, $(1-rz)$...., os factores reaes do primeiro gráo, e $(1-2\,pz\cos\varphi+p^2z^2)$ o factor trinomio real do segundo gráo, correspondente a duas raizes imaginarias. É sabido que o termo geral da serie recurrente nascida da fracção (1′), que tem por denominador a equação proposta, é

$$Pz^n = \left[\frac{A \operatorname{sen}(n+1)\varphi + B \operatorname{sen} n\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\,p^n + Cq^n + Dr^n \,\ldots\ldots\right] z^n.$$

Logo, se p é menor do que os numeros q, r,...., de modo que a menor raiz da proposta seja real, ainda neste caso, apezar da existencia de raizes imaginarias, a serie recurrente dará o valor d'aquella menor raiz real. Ha todavia uma excepção. Com effeito, se formando o producto das duas raizes imaginarias, que é $\frac{1}{p^2}$, acontecer que o quadrado p^2 seja egual ou maior que o maior quadrado dos numeros q, r,...., neste caso, inda que se prolongue a serie ao infinito, nunca desapparecerá, em comparação de Cq^n, Dr^n,...., o termo em que entra a potencia p^n; mas, antes pelo contrario, sendo p^2 maior do que q^2, r^2,...., será, para $n=\infty$,

$$P=\frac{A\mathrm{sen}(n+1)\varphi+B\mathrm{sen}n\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi}p^n \text{ e } Q=\frac{A\mathrm{sen}(n+2)\varphi+B\mathrm{sen}(n+1)\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi}p^{n+1}$$

logo (3)

$$\frac{Q}{P}=\frac{A\,\mathrm{sen}\,(n+2)\,\varphi+B\,\mathrm{sen}\,(n+1)\,\varphi}{A\,\mathrm{sen}\,(n+1)\,\varphi+B\,\mathrm{sen}\,\varphi}p,$$

expressão que nunca terá um valor constante, porque, á medida que se toma um termo geral de ordem mais adiantada, vão continuamente variando os senos dos angulos, passando de positivos a negativos, e inversamente.

Todavia Euler encontrou um engenhoso meio que remedeia a impossibilidade em que está a fracção (3) de dar o valor de p; e é este meio que verdadeiramente constitue a invenção original d'este grande geometra. Para isso formam-se as fracções $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{R}$, das quaes se eliminam A e B, o que torna os resultados independentes de n. Este calculo muito simples, que se encontra na *Introductio ad Anal. infin.,* dá

$$p=\sqrt{\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}}, \text{ e } \cos\varphi=\frac{QR-PS}{2\sqrt{(Q^2-PR)\,(R^2-QS)}}.$$

Assim ficam determinados os coefficientes do factor trinomio, que, egualado a zero, dá as raizes imaginarias.

antes pelo contrario, sendo p maior do que q, r, ... será, para $n=\infty$,

$$P=\frac{A\,\mathrm{sen}(n+1)\varphi+B\,\mathrm{sen}\,n\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi}p^n \text{ e } Q=\frac{A\,\mathrm{sen}(n+2)\varphi+B\,\mathrm{sen}(n+1)\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi}p^{n+1}$$

logo (3)

$$\frac{Q}{P}=\frac{A\,\mathrm{sen}(n+2)\varphi+B\,\mathrm{sen}(n+1)\varphi}{A\,\mathrm{sen}(n+1)\varphi+B\,\mathrm{sen}\,n\varphi}p,$$

expressão que nunca terá um valor constante, porque, á medida que se toma um termo geral de ordem mais adiantada, vão continuamente variando os senos dos angulos, passando de positivos a negativos, e inversamente.

Todavia Euler encontrou um engenhoso meio que remedeia a impossibilidade em que está a fracção (3) de dar o valor de p; e é este meio que verdadeiramente constitue a invenção original d'este grande geometra.

Para isso formam-se as fracções $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{R}$, das quaes se eliminam A e B, o que torna os resultados independentes de n. Este calculo muito simples, que se encontra na *Introducção ad Anal. infin.*, dá

$$p=\sqrt{\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}}, \text{ e } \cos\varphi=\frac{QR-PS}{2\sqrt{(Q^2-PR)(R^2-QS)}}$$

Assim ficam determinados os coefficientes do factor trinomio, que, egualado a zero, dá as raizes imaginarias.

II

Fizemos no capitulo precedente a exposição succinta dos methodos de Bernouilli e Euler, para achar as raizes de uma equação dada. Propomo-nos agora fazer a critica d'estes methodos, considerados, tanto sob o ponto de vista do seu valor intrinseco, como da sua importancia práctica. Esta critica está fundamentalmente ligada ao conhecimento previo do *methodo teleologico,* dado por Wronski, para a resolução numerica das equações. Faremos, no capitulo seguinte, uma resumida exposição d'este methodo; reservando-nos a dar, neste segundo capitulo, uma breve ideia das novas funcções *alephs,* descobertas por Wronski, e que formam uma das bases fundamentaes do methodo.

Na segunda parte d'este capitulo daremos tambem as regras precisas, para reduzir qualquer equação á forma conveniente, e que mais facilmente permitte a sua resolução por meio d'este importante methodo teleologico.

As novas funcções de que fallámos, e que Wronski designa pela letra hebraica ℵ, receberam, da letra que as designa, o nome de funcções *alephs*. A sua construcção geral é a seguinte:

Sejam a, b, c,.... n, n bases quaesquer, independentes entre si, e cuja somma seja N; será

$$N = a + b + c + ... + n.$$

Elevando N a uma potencia qualquer m, e substituindo pela *unidade* os coefficientes numericos do desinvolvimento, só constará este desinvolvimento dos productos differentes que se podem formar combinando as bases m a m com repetição, mas sem permutações, porque estes productos são a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-1}c$,.... $a^{m-2}b^2$, $a^{m-2}bc$,...., onde a mesma lettra póde entrar uma, duas vezes, etc., e em geral m vezes. Designando pela caracteristica $\aleph$ aquillo em que se torna então a potencia $[N]^m$, a somma dos productos será representada por $\aleph\,[N]^m$; será, por exemplo:

$$\aleph\,[a+b]^2 = a^2+b^2+ab,$$
$$\aleph\,[a+b]^3 = a^3+b^3+a^2b+ab^2,$$
$$\aleph\,[a+b]^4 = a^4+b^4+a^3b+a^2b^2+ab^3,$$
$$\text{etc.} = \text{etc.},$$

$$\aleph\,[a+b+c]^2 = a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc,$$
$$\aleph\,[a+b+c]^3 = a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+abc.$$
$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

A funcção $\aleph\,[N]^m$ é pois em geral a somma de todos os productos *differentes* da fórma:

$$a^p\, b^q\, c^r\, d^s ....n^v\ ,$$

onde a somma dos n expoentes é egual ao gráo m da funcção. Para formar directamente estes productos, é preciso resolver a equação indeterminada:

$$p+q+r+s+....+v=m,$$

isto é, achar todos os modos possiveis pelos quaes se póde formar o numero m, addicionando n outros numeros inteiros comprehendendo zero.

A solução d'este problema, que se apresenta em muitas outras questões, póde effectuar-se, sem difficuldade, por meio da regra de Hindenburgo. Esta regra acha-se minuciosamente exposta na arithmetica de Kramp; encontra-se tambem nas *Instituições Mathematicas* do sr. *Margiochi;* e, finalmente, o seu uso é hoje muito conhecido dos alumnos da faculdade de Mathematica, desde que o professor do primeiro anno, o sr. Dr. Torres Coelho, a introduziu no ensino da algebra. Por todos estes motivos nos abstemos de a reproduzir aqui.

Vê-se, do que fica exposto, que a funcção $\aleph\,[N]^m$ é geralmente composta da somma de muitas funcções symetricas ordinarias, e póde, por consequencia, construir-se sempre por meio das sommas primitivas Σa, Σab, Σabc,..., ou dos coefficientes A_1, A_2, A_3,..., da equação cujas raizes sejam as bases a, b, c,.... Por exemplo, examinando a funcção:

$$\aleph\,[a+b+c]^3=a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+abc,$$

vê-se immediatamente que:

$$\aleph\,[a+b+c]^3=\Sigma a^3+\Sigma a^2b+\Sigma abc=S_1S_2+A_1,$$

por ser, como é sabido pela theoria das funcções symetricas, $\Sigma a^2b = S_1S_2 - S_3$ e $\Sigma abc = A_3$. Ou então, exprimindo S_1 e S_2 em A_1 e A_2, vem:

$$\aleph\,(a+b+c)^2 = A_1^3 - 2\,A_1A_2 + A_3.$$

Na applicação das funcções *alephs* á resolução das equações, como o numero n dos termos do polynomio $N = a+b+c+\ldots.+n$ é sempre egual ao gráo da equação, póde-se, como faz Wronski para simplificar as expressões, designar simplesmente a funcção geral $\aleph\,[N]^m$ só pelo expoente m, pondo:

$$\aleph\,(N)^m = \aleph\,(m).$$

A construcção das funcções *alephs* por meio das sommas de productos A_1, A_2, A_3,...., é dada pelas fórmulas geraes..... (1)

$$\aleph\,(\omega) = A_1^{\omega} - (\omega-1)\,A_1^{\omega-2}.\,A_2 +$$

$$+A_1^{\omega-4}\left\{(\omega-2)\,A_1A_3 + (\omega-2)^{2|-1}.\,\frac{A_2^2}{1^{2|1}}\right\}$$

$$-A_1^{\omega-6}\left\{(\omega-3)\,A_1^2A_4 + (\omega-3)^{2|-1}\,A_1A_2A_3 + (\omega-3)^{3|-1}.\,\frac{A_2^3}{1^{3|1}}\right\}$$

$$+A_1^{\omega-8}\left\{(\omega-4)\,A_1^3A_5 + (\omega-4)^{2|-1}\,A_1^2\left(A_2A_4 + \frac{A_3^2}{1^{2|1}}\right) +\right.$$

$$\left. +(\omega-4)^{3|-1}\,A_1.\,\frac{A_2^2}{1^{2|1}}\,A_3 + (\omega-4)^{4|-1}.\,\frac{A_2^4}{1^{4|1}}\right\}$$

—etc., *até aos termos que contem potencias negativas de* A_1, *termos que se devem desprezar.*

As funcções *alephs* podem tambem calcular-se, umas por meio das outras, por meio da expressão geral..... (2)

$$\aleph(\omega)=A_1\aleph(\omega-1)-A_2\aleph(\omega-2)+A_3\aleph(\omega-3)....$$
$$+(-1)^{m-1}A_m\aleph(\omega-m).$$

Para passar da construcção das funcções $\aleph\,[\omega]$ de expoentes positivos, ás funcções $\aleph\,[-\omega]$ de expoentes negativos, basta mudar ω em $-\omega$ na expressão geral (2); e teremos:

$$\aleph\,[-\omega]=A_1\aleph[-(\omega+1)]-A_2\aleph[-(\omega+2)]+.....$$
$$+(-1)^{m-1}A_m\aleph[-(\omega+m)]$$

e, portanto.... (3)

$$A_m\aleph[-(\omega+m)]=A_{m-1}\aleph[-(\omega+m-1)]-A_{m-2}\aleph[-(\omega+m-2)]$$
$$+....(-1)_m A_1\aleph[-(\omega+1)]+(-1)^{m-1}\aleph(-\omega).$$

Fazendo:

$$\frac{A_{m-1}}{A_m}=B_1,\ \frac{A_{m-2}}{A_m}=B_2,\ \frac{A_{m-3}}{A_m}=B_3,\ ....\ \frac{1}{A_m}=B_m,$$

e, fazendo $\omega+m=\rho$, a expressão (3) toma a fórma mais simples e analoga á expressão (2),.... (4):

$$\aleph\,[-\rho]=B_1\aleph[-(\rho-1)]-B_2\aleph[-(\rho-2)]+B_3\aleph[-(\rho-3)]-.....$$
$$....(-1)^{m-1}B_m\aleph[-(\rho-m)].$$

Substituindo, na geração immediata (1) das funcções *alephs* de expoentes positivos, em logar das quantidades $A_1, A_2, A_3, \ldots$, as quantidades $B_1, B_2, B_3, \ldots$, e, em logar de ω, $\rho - m$, que resulta da relação $\omega + m = \rho$, obteremos a lei da geração immediata das funcções *alephs* de expoentes negativos, a saber.... (5)

$$(-1)^{m-1} A_m \aleph[-\rho = B_1^{\rho-m} - (\rho-m-1) B_1^{\rho-m-2} B_2 +$$

$$+ B_1^{\rho-m-4} \left\{ (\rho-m-2) B_1 B_3 + (\rho-m2)^{2|-1} \cdot \frac{B_2^{\,2}}{1^{2|1}} \right\}$$

$$- B_1^{\rho-m-6} \left\{ (\rho-m-3) B_1^{\,2} B_4 + (\rho-m-3)^{2|-1} \cdot B_1 B_2 B_3 + \right.$$

$$\left. + (\rho-m-3)^{3|-1} \cdot \frac{B^3}{1^{3|1}} \right\}$$

$+$ etc.,

— etc., *até aos termos que contem potencias negativas de* B_1, *os quaes devem ser desprezados.*

Deduz-se d'esta expressão geral, não perdendo de vista que as potencias negativas de B_1 se devem considerar nullas, os valores:

$$\aleph(-1) = 0, \quad \aleph(-2) = 0, \ldots \text{ até } \aleph(-(m-1)) = 0,$$

para as $m-1$ primeiras funcções alephs de expoente negativo, isto é, estas funcções não começam a ter valores differentes de zero senão desde o expoente m, para o qual a expressão geral (5) dá o valor.... (6):

$$\aleph(-m) = \frac{(-1)^{m-1}}{A_m}.$$

Em quanto ao valor de $\aleph$ [0], resulta da propria concepção das funcções *alephs*, que é sempre igual á *unidade*.

Depois de termos dado este resumido esboço da theoria das funcções *alephs*, e as leis da sua construcção immediata, vamos terminar este capitulo expondo o processo accessorio e auxiliar, para a preparação das equações á prompta e facil applicação do methodo teleologico, pela sua reducção á *fórma normal*.

Seja a proposta........ (1)

$$Fz = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots\ldots + M_m z^m = 0.$$

Seja x uma variavel, ligada com a variavel z pela relação......... (2)

$$z = a + bx, \text{ e portanto } \qquad x = \frac{z-a}{b};$$

sendo a e b duas constantes indeterminadas. Concebamos $F(z)$ desinvolvida segundo as potencias progressivas da funcção $\frac{z-a}{b}$, isto é, segundo as potencias da nova variavel x. Virá....... (3)

$$Fz = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + \ldots\ldots + N_m x^m = 0;$$

sendo os coefficientes $N_0, N_1, \ldots N_m$ dados pelas seguintes relações........ (4)

$$N_0 = M_0 + M_1 a + \ldots\ldots + M_m a^m,$$

$$N_1 = \frac{b}{1} \left\{ M_1 + 2M_2 a + 3M_3 a \ldots\ldots + mM_m a^{m-1} \right\}$$

$$N_2 = \frac{b^2}{1.2} \left\{ 2\,M_2 + 3.2\,M_3 a + 4.3\,M_4 a^2 + \ldots\ldots + m\,(m-1)\,M_m a^{m-2} \right\}$$

$$N_3 = \frac{b^3}{1^{3|1}} \left\{ 3^{3|-1} M_3 + 4^{3|-1} M_4 a + 5^{3|-1} M_5 a^2 \ldots + m^{3|-1} M_m a^{m-3} \right\}$$

....

$$N_m = \frac{b^m}{1^{m|1}} \left\{ m^{m|-1}\,M_m a^{m-m} \right\} = \frac{b^m}{1^{m|1}} \left\{ m^{m|-1}\,M_m \right\}.$$

Estabelecendo a relação $N_0 = N_m$, que reduz (3) á fórma normal, vem....... (5)

$$M_0 + M_1 a + M_2 a_2 + \ldots\ldots + M_m a^m = \frac{b^m}{1^{m|-1}} \left\{ m^{m|-1}\,M_m \right\} = b^m\,M_m\,;$$

que nos dá a determinação da quantidade b por meio da arbitraria o, porque de (5) deduz-se imediatamente..... (6)

$$b = \sqrt[m]{\left\{ \frac{M_0 + M_1 a + M_2 a^2 + \ldots\ldots + M_m a^m}{M_m} \right\}}.$$

Assim fica determinado b, qualquer que seja a quantidade arbitraria a; e fazendo em (3) $N_0 = N_m$, virá a equação normal procurada....... (7)

$$0 = 1 + \frac{N_1}{N_0} x + \frac{N_2}{N_0} x^2 + \frac{N_3}{N_0} x^3 + \ldots\ldots + x^m.$$

Na transformação que acabamos de indicar, em que se tracta de reduzir uma equação qualquer á sua fórma normal, podem-se notar os tres seguintes casos. Primeiramente, quando a arbitraria a é zero, vem........ (8)

$$b = \sqrt[m]{\left(\frac{M_0}{M_m}\right)}; \text{ e por tanto } \quad z = \pm a + bx = x\sqrt[m]{\left(\frac{M_0}{M_m}\right)}.$$

Em segundo logar, se a arbitraria a for dada pela equação........ (9)

$$M_0 + M_1 a + M_2 a^2 + \ldots\ldots + M_{m-1} a^{m-1} = o,$$

mostra a relação (6) que $b = \sqrt[m]{\dfrac{M_m a^m}{M_m}} = a$;

e devemos neste caso, para transformar a proposta, fazer $z = a + bx = a(1+x)$. Finalmente, quando a fôr dado pela equação....... (10)

$$M_1 + M_2 a + M_3 a^2 + \ldots\ldots + M_m a^{m-1} = o,$$

a relação (6) dá $b = \sqrt[m]{\left(\dfrac{M_0}{M_m}\right)}$; e devemos então fazer na proposta $z = a + bx = a + x\sqrt[m]{\left(\dfrac{M_0}{M_m}\right)}$.

Vê-se bem que, segundo as diversas circumstancias que apresentar a proposta, assim, d'entre estes tres methodos de transformação, poderemos escolher aquelle que mais facilite os calculos. Todavia o primeiro, que sempre satisfaz completamente, deverá ser o preferido, por ser o mais simples; e ha de mais a advertir que os outros dois exigem, respectivamente, o conhecimento de uma raiz das equações (9) e (10), o que nem sempre é facil, e é até muitas vezes impossivel.

III

Vamos appresentar neste capitulo os traços fundamentaes do *methodo teleologico,* e a sua applicação aos casos em que precisamos conhecel-o, para podermos fazer a critica do methodo de Bernouilli, e da sua extensão por Euler.

O principio fundamental do methodo teleologico é que toda a equação....... (1)

$$z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} \ldots\ldots + (-1)^m A_m z^0 = o,$$

se póde decompor em dois factores, um do gráo $(m-n)$, e outro do gráo n, por meio de uma equação geral do gráo $(m-1)$........ (2)

$$z^{m-1} - P_2 z^{m-2} + P_3 z^{m-3} \ldots\ldots + (-1)^{m-1} P_m z^0 = o.$$

Os coefficientes A_1, A_2, A_m, de (1) são em geral numeros quaesquer. Os coefficientes P_2, P_3, P_m, do factor (2), chamado *factor principal,* determinam-se por meio das funcções *alephs* dos coefficientes A_1, A_2,...... A_m da proposta (1). Esta determinação obtem-se por meio das relações seguintes....... (3)

$$P_2\aleph(q)=A_2\aleph(q-1)-A_3\aleph(q-2)+A_4\aleph(q-3)......+$$
$$+(-1)^m A^m\aleph(q-(m-1)),$$

$$P_3\aleph(q)=A_3\aleph(q-1)-A_4\aleph(q-2)+A_5\aleph(q--3)......+$$
$$+(-1)^{m+1}A_m\aleph(q-(m-2)),$$

$$P_4\aleph(q)=A_4\aleph(q-1)-A_5\aleph(q-2)+A_6\aleph(q-3)......+$$
$$+(-1)^{m+2}A_m\aleph(q-(m-3)),$$

etc., etc.; e geralmente, para um indice qualquer μ,

$$P_\mu\aleph(q)=A_\mu\aleph(q-1)-A_{\mu+1}\aleph(q-2)+A_{\mu+2}\aleph(q-3)\ .....+$$
$$+(-1)^{m+\mu}A_m\aleph(q-(m-\mu+1));$$

devendo atttender-se a que os coefficientes A_μ, $A_{\mu+1}$,....., são nullos quando os seus indices μ, $\mu+1$, $\mu+2$,......, são maiores do que m.

Wronski denomina (2) e (3) a *Lei Primordial* para o *methodo teleologico* de Resolução geral das Equações de todos os gráos.

Os coefficientes da reduzida (2) tambem se podem construir pela lei seguinte...... (4)

$$P_\mu\aleph(q)=A_{\mu-1}\aleph(q)-A_{\mu-2}\aleph(q+1)+A_{\mu-3}\aleph(q+2)......+$$
$$+(-1)^{\mu+1}A_0\aleph(q+\mu-1);$$

notando-se que $A_0 = 1$, e que devem ser nullos todos os coefficientes de indice negativo. Temmos assim, para formar os coefficientes do factor principal (2), as duas expressões differentes (3) e (4), das quaes podemos escolher a mais simples.

A construcção precedente dos coefficientes da reduzida póde effectuar-se, ou por meio das funcções *alephs* de expoentes positivos, ou por meio das funcções *alephs* de expoentes negativos, o que vem a produzir duas equações differentes do gráo $(m-1)$, as quaes contém, entre a somma total das suas $2(m-1)$ raizes, todas as raizes da proposta, e $(m-2)$ outras raizes que lhe são extranhas. É preciso todavia advirtir, que só tem logar esta conclusão quando a proposta tiver o coefficiente A_m do seu ultimo termo egual á unidade; isto é, quando estiver reduzida á *fórma normal*.

Assim pois, quando apenas tractassemos de obter os valores numericos das raizes reaes, e mesmo das imaginarias, da proposta, podiamos immediatamente descobril-as, procurando o maior divisor commum entre a proposta e cada uma d'aquellas reduzidas do gráo $(m-1)$. Para isso bastava calcular pelas fórmulas (3) ou (4) os coefficientes respectivos das duas reduzidas, com a exactidão que quizessemos, e que fosse sufficiente, para poder apreciar o resto zero nas divisões consecutivas que respectivamente conduziriam aos dois maiores divisores communs, os quaes, como é sabido, dariam, depois de egualados a zero, as raizes communs ás reduzidas e á proposta.

Mas quando, para a resolução geral das equações, se busca conhecer em toda a sua generalidade os factores em que se póde decompor a equação proposta, de modo que os coefficientes nestes factores se achem expressos geralmente em funcções *alephs*, como o são os coefficientes respectivos das duas equações reduzidas (2), basta reduzir ulteriormente cada uma d'estas equações reduzidas aos seus respectivos *factores constantes*. Estes factores constantes, cujos caracteres e determinação adiante daremos, são os dois factores em que a equação proposta se póde decompor geralmente, recebendo assim a sua solução geral.

Quando a proposta está reduzida á *fórma normal*, as suas raizes menores que a unidade, encontram-se geralmente na reduzida construida com as funcções *alephs* de expoentes positivos, e as suas raizes maiores que a unidade, na reduzida construida com as funcções alephs de expoentes negativos. Ora, em virtude d'esta repartição das raizes da proposta (1) nas duas equações reduzidas (2), póde acontecer primeiro que, em casos particulares d'esta proposta, todas as (m—1) raizes de uma das equações reduzidas sejam immediatamente as raizes da proposta, achando-se então a restante d'aquellas raizes contida na outra das duas equações reduzidas (2). Neste caso, que é o mais simples, obtem-se com a maior facilidade esta ultima raiz.

Com effeito, se o factor principal (2) fosse conhecido, obter-se-hia esta raiz do modo seguinte:

Seja $z - Q$ o factor do primeiro grão correspondente a esta raiz; o producto de $z - Q$ por (2) deve reproduzir a proposta; donde se conclue

$$(-1)^m P_m Q = (-1)^m A_m, \text{ e } Q = \frac{A_m}{P_m}.$$

O factor complementar do primeiro grão é pois..... (5)

$$Z - \frac{A_m}{P_m} = 0.$$

Assim, para conhecer uma das raizes z da proposta, só resta determinar os coefficientes P_2, P_3,...... P_m do factor principal, o que se faz, como já dissemos, por meio das relações (3) ou (4); ou antes, só basta conhecer o coefficiente P_m. Este coefficiente deduz-se immediatamente da ultima dos fórmulas (3); tendo-se em vista a advertencia que fizemos, com relação aos termos d'aquella fórmula que se devem desprezar. É pois

$$P_m = A_m \frac{\aleph\,(q-1)}{\aleph\,(q)}$$

e o factor complementar do primeiro gráo, que dá uma raiz da proposta, é........ (6)

$$Z - \frac{\aleph\,(q)}{\aleph\,(q-1)} = 0,$$

Temos de fazer aqui uma advertencia fundamental, e vem a ser que, na hypothese que estamos tractando, da proposta admittir um factor do gráo $(m-1)$, deve o expoente q das funcções *alephs* ser um numero sufficientemente grande, para que a relação de duas funcções successivas, $\aleph\,[q]$ e $\aleph\,[q+1]$, seja a mesma que a das outras funcções successivas $\aleph\,[q+2]$ e $\aleph\,[q+3]$; isto é, deve ser......... (7)

$$\frac{\aleph\,(q+1)}{\aleph\,(q)} = \frac{\aleph\,(q+3)}{\aleph\,(q+2)},$$

sendo o expoente q positivo ou negativo. Quando se poder obter esta condição com as funcções alephs de expoentes positivos, devem construir-se os coefficientes da reduzida com estas mesmas funcções; e quando se não poder obter esta condição senão com as funcções alephs de expoentes negativos, é com estas funcções que se devem construir aquelles coefficientes.

Quando se não póde realizar a condição (7), o que prova que existem em ambas as equações reduzidas raizes estranhas á proposta, podem eliminar-se estas raizes estranhas, reduzindo, por um processo muito simples, o primeiro factor geral (2) a um gráo inferior. Este primeiro factor geral basta por si só para operar a sua propria reducção a um gráo inferior, e por consequencia para fazer descobrir todos os factores diffinitivos da proposta. É neste factor principal que reside essencialmente todo o methodo teleologico.

Para effectuar a reducção indicada basta augmentar de uma unidade o expoente q das funcções alephs nas expressões (3) ou (4) dos coefficientes P_2, P_3,........ P_m, da reduzida (2). Teremos então, distinguindo por meio de parenthesis os coefficientes assim augmentados, em vez da equação geral, duas equações do mesmo gráo $(m—1)$, a saber:

$$z^{m-1} - P_2 z^{m-2} + P_3 z^{m-3} \ldots\ldots + (-1)^{m-1} P_m z^0 = 0,$$

$$z^{m-1} - (P_2)^{m-2} + (P_3) z^{m-3} \ldots\ldots + (-1)^{m-1} (P_m) z^0 = 0,$$

cuja differença dará immediatamente, para a equação proposta (1), um factor geral do gráo $(m—2)$, a saber:... (8)

$$z^{m-2} - Q_3 z^{m-3} + Q_4 z^{m-4} \ldots\ldots + (-1)^{m-2} Q_m z^0 = 0.$$

Os coefficientes Q_3: Q_4,....... Q_m, são....... (9)

$$Q_3 = \frac{(P_3) - P_3}{(P_2) - P_2},\ Q_4 = \frac{(P_4) - P_4}{(P_2) - P_2},\ Q_5 = \frac{(P_5) - P_2}{(P_2) - P_2}, \dots \dots,$$

Para bem se apreciar esta segunda hypothese, appliquemos a regra exposta á equação geral do quarto gráo....(10)

$$z^4 - A^3_1 z + A_2 z^2 - A_3 z + A_4 = 0.$$

A primeira reduzida do terceiro gráo será...... (11)

$$z^3 - P_2 z^2 + P_3 z - P_4 = 0.$$

Os coefficientes P_2, P_3, e P_4 são, em virtude das expressões geraes (3) e (4)...... (12)

$$P_2 = A_1 - \frac{\aleph(q+1)}{\aleph(q)},$$

$$P_3 = A_3 . \frac{\aleph(q-1)}{\aleph(q)} - A_4 . \frac{\aleph(q-2)}{\aleph(q)},$$

$$P_4 = A_4 . \frac{\aleph(q-1)}{\aleph(q)}.$$

Augmentando de uma unidade as funcções alephs que entram nestas expressões, obtem-se, para os coefficientes

(P_2), $P_3)$, e (P_4) da segunda reduzida do terceiro gráo, os valores...... (13)

$$(P_2) = A_1 - \frac{\aleph(q+2)}{\aleph(q+1)},$$

$$(P_3) = A_3 . \frac{\aleph(q)}{\aleph(q+1)} - A_4 . \frac{\aleph(q-1)}{\aleph(q+1)},$$

$$(P_4) = A_4 . \frac{\aleph(q)}{\aleph(q+1)}.$$

Por tanto

$$(P_2) - P_2 = \frac{\aleph(q+1)}{\aleph(q)} - \frac{\aleph(q+2)}{\aleph(q+1)},$$

$$(P_3) - P_3 = A_3 \left\{ \frac{\aleph(q)}{\aleph(q+1)} - \frac{\aleph(q-1)}{\aleph(q)} \right\} - A_4 \left\{ \frac{\aleph(q-1)}{\aleph(q+1)} - \frac{\aleph(q-2)}{\aleph(q)} \right\},$$

$$(P_4) - P_4 = A_4 \left\{ \frac{\aleph(q)}{\aleph(q+1)} - \frac{\aleph(q-1)}{\aleph(q)} \right\}.$$

Divididas cada uma das duas ultimas differenças pela primeira $(P_2) - P_2$, virão as expressões geraes dos coefficientes Q_3 e Q_4 do factor principal do segundo gráo

$$Z^2 - Q_3 Z + Q_4 = 0,$$

a saber...... (14)

$$Q_3 = A_3 \left\{ \frac{\aleph(q)^2 - \aleph(q-1)\aleph(q+1)}{\aleph(q+1)^2 - \aleph(q)\aleph(q+2)} \right\} -$$

$$- A_4 \left\{ \frac{\aleph(q)\aleph(q-1) - \aleph(q-1)\aleph(q+1)}{\aleph(q+1)^2 - \aleph(q)\aleph(q+2)} \right\},$$

$$Q_4 = A_4 \left\{ \frac{\aleph(q)^2 - \aleph(q-1)\aleph(q+1)}{\aleph(q+1)^2 - \aleph(q)\aleph(q+2)} \right\}.$$

Póde obter-se uma expressão mais simples do coefficiente Q_3 construindo os coefficientes P_3 e (P_3) por meio da relação (4), fazendo-se nella, como se disse já, $\mu = 3$; será então...... (15)

$$Q_3 = A_1 - \frac{\aleph(q)\aleph(q+1) - \aleph(q-1)\aleph(q+2)}{\aleph(q)^2 - \aleph(q-1)\aleph q+1)}.$$

Fazendo, pois, aqui

$$\Psi = \frac{\aleph(q)\aleph(q+1) - \aleph(q-1)\aleph(q+2)}{\aleph(q)^2 - \aleph(q-1)\aleph(q+1)},$$

$$\Phi = \frac{\aleph(q)^2 - \aleph(q-1)\aleph(q+1)}{\aleph(q+1)^2 - \aleph(q)\aleph(q+2)},$$

será o factor principal do segundo gráo da equação proposta...... (16)

$$z^2 - [A_1 - \Psi]\, z + A_4 \Phi = 0,$$

que terá por factor complementar...... (17)

$$z^2 - \psi z + \frac{1}{\Phi} = 0.$$

É evidente que o factor complementar deve ter esta fórma, porque a somma dos coefficientes de z, nos dois factores, deve ser egual a A_1, e o producto dos termos constantes deve ser egual a A_4.

As equações (16) e (17) só são rigorosamente exactas quando o expoente q das funcções alephs é um numero infinitamente grande, mas aproximam-se tanto mais da exactidão, quanto as funcções Ψ e Φ variam menos á medida que augmenta este expoente.

Assim, a condição (6)

$$\frac{\aleph(q)}{\aleph(q+1)} = \frac{\aleph(q+1)}{\aleph(q+2)},$$

que nós dissemos dever ter logar com quatro funcções alephs consecutivas para que uma equação do gráo m admittisse um factor definitivo do gráo $(m-1)$, torna-se em...... (18)

$$\frac{\aleph(q)^2 - \aleph(q-1)\aleph(q+1)}{\aleph(q+1)^2 - (q)\aleph(q+2)} = \frac{\aleph(q+1)^2 - \aleph(q)\aleph(q+2)}{\aleph(q+2)^2 - \aleph(q+1)\aleph(q+3)},$$

para que esta mesma equação admitta um factor definitivo do gráo $(m-2)$.

É pois necessario prolongar a serie das funcções alephs até que se obtenham as cinco successivas

$$\aleph(q-1),\ \aleph(q),\ \aleph(q+1),\ \aleph(q+2),\ \aleph(q+3),$$

de modo que possam satisfazer á condição (18) com a exactidão que se pretender.

O emprego dos logarithmos para estes calculos, que aliás seriam complicados, permitte obter facilmente resultados exactos até a sexta casa decimal; mas vê-se que a construcção do factor do segundo gráo (16), correspondente á proposta (10) do quarto gráo; e, em geral, a construcção do factor definitivo do gráo $(m-2)$ de uma equação do gráo m exige certas combinações particulares de funcções alephs; estas combinações formam o que Wronski chama *funcções alephs compostas de diversas ordens:* taes são as funcções Ψ e Φ, que permittem fazer a decomposição da equação do quarto gráo em factores do segundo.

No caso que acabamos de tractar, em que obtivemos o factor principal (16) do segundo gráo, tivemos de fazer primeiro o calculo das duas reduzidas do terceiro gráo. Mas, falando agora em toda a generalidade, podem-se obter immediatamente os coefficientes do factor definitivo do gráo $(m-2)$, sem passar pelos calculos das duas reduzidas do gráo $(m-1)$. Para isso é preciso empregar as funcções alephs compostas, de que acabamos de falar; por tanto vamos expor o modo da sua geração por meio das funcções alephs simples ou primitivas.

A primeira ordem de composição é

$$\aleph(\omega).\aleph(\omega+\alpha)-\aleph(\omega-1).\aleph(\omega+\alpha+1),$$

onde α representa o augmento de que depende esta primeira composição das funcções alephs. Adoptando a notação $\aleph[\omega]\ (1|\alpha)$ para representar a *primeira ordem* das funcções alephs compostas, teremos a expressão geral..... (19)

$$\aleph(\omega)\ (1|\alpha)=\aleph(\omega).\aleph(\omega+\alpha)-\aleph(\omega-1).\aleph(\omega+\alpha+1).$$

Assim, para um mesmo valor do expoente ω, vem as funcções alephs successivas:

$$\aleph(\omega)\ (1|0)=\aleph(\omega)^2-\aleph(\omega-1).\aleph(\omega+1),$$

$$\aleph(\omega)\ (1|1)=\aleph(\omega).\aleph(\omega+1)-\aleph(\omega-1).\aleph(\omega+2),$$

$$\aleph(\omega)\ (1|2)=\aleph(\omega).\aleph(\omega+2)-\aleph(\omega-1).\aleph(\omega+3),$$

etc.=etc.

Os coefficientes Q_3, Q_4, Q_5,......, do factor (1) do gráo $(m-2)$ são dados pelas fórmulas seguintes, que correspondem ás fórmulas (3) destinadas a dar os coeffientes P_2, P_3...... P_m do factor do gráo $(m-1)$;...... (20)

$$Q_3.\aleph(q+1)\ (1|0)=A_1.\aleph(q+1)\ (1|0)-\aleph(q+1)\ (1|1),$$

$$Q_4.\aleph(q+1)\ (1|0)=A_2.\aleph(q+1)\ (1|0)-$$

$$-A_1.\aleph(q+1)\ (1|1)+\aleph(q+1)\ (1|2),$$

etc. etc., e geralmente

$$Q_\mu.\aleph(q+1)\ (1|0)=A_{\mu-2}.\aleph(q+1)\ (1|0)-A_{\mu-3}.\aleph(q+1)\ (1|1)+\ldots$$

$$+(-1)^\mu.\aleph(q+1)\ (1|\mu-2);$$

ou então pela fórmula geral, correspondente a (4),.... (21)

$$Q_\mu . \aleph(q+1)(1|0) = A_\mu . \aleph(q)(1|0) - A_{\mu+1} . \aleph(q-1)(1|1) + \ldots..$$

$$\ldots.. + (-1)^\mu A_\mu . \aleph(q-(m-\mu))(1|m-\mu),$$

e poder-se-ha, como para os coefficientes P do primeiro factor do gráo $(m-1)$, escolher d'estes dois systemas de expressões, aquellas que forem mais simples.

Applicando á equação (10) do quarto gráo, obteremos immediatamente, para os coefficientes do seu factor definitivo do segundo gráo

$$Z^2 - Q_1 z + Q_2 = 0,$$

os valores

$$Q_1 = A_1 - \frac{\aleph(q+1)(1|1)}{\aleph(q+1)(1|0)},$$

$$Q_2 = A_4 . \frac{\aleph(q)(1|0)}{\aleph(q+1)(1|0)},$$

que são identicos com o segundo dos valores (14), e com (15), como bem se vê, se attendermos a (19) com $\omega = q$.

Quando as funcções alephs não satisfazem, nem com o expoente positivo, nem com o expoente negativo, ás condições (7) ou (18), é uma prova de que a proposta do gráo m não admitte factor definitivo do gráo $(m-1)$, nem do gráo $(m-2)$; é preciso ver então se a equação póde admittir um factor definitivo do gráo $(m-3)$. Ora o mesmo processo que fez obter a reduzida do gráo $(m-2)$, por meio da primeira reduzida do gráo $(m-1)$, permitte obter uma terceira reduzida do gráo $(m-3)$, por meio da segunda reduzida do gráo $(m-2)$. No caso em que esta reduzida do gráo $(m-3)$ não désse um factor definitivo, seria preciso fazer, pelo mesmo processo, uma reducção ulterior, e assim por diante.

A reducção das equações aos seus factores, não precisa fazer-se além da metade do numero m que marca o gráo da proposta (1), porque os factores consecutivos (2), (8), etc., são todos duplos, em virtude do duplo signal, positivo e negativo, que podem receber os expoentes das funcções alephs que entram na construcção d'estes factores. Com effeito, em virtude d'esta dupla funcção de cada um d'estes factores, sem que seja preciso que os seus gráos decrescentes desçam abaixo da metade do gráo das equações propostas, estes factores bastam para fixar todos os factores inferiores em que que estas equações se podem decompor; porque, conhecendo estes factores superiores cujos gráos não excedem metade do gráo das equações propostas, podem-se facilmente determinar os *factores complementares,* que assim se denominam os factores de gráo inferior a $\frac{1}{2}\,m$.

Aqui vamos dar a regra para a determinação d'estes factores.

Seja a proposta...... (22)

$$0 = z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} \ldots + (-1)^m A_m z^0;$$

e seja dado um dos seus factores do gráo $(m-n)$,..... (23)

$$0 = z^{m-n} - B_{m+n}\, z^{m-n-1} + B_{n+2}\, z^{m-n-2} \ldots (-1)^{m-n} B_m z^0;$$

suppondo que este factor não é de um gráo inferior a $\frac{1}{2}\,m$.

Só resta determinar o seu factor complementar, o qual, multiplicado pelo factor principal (23) correspondente, ha de reproduzir a proposta.

Seja, para o factor principal (23), o seu factor complementar...... (24)

$$0 = z^n - C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} \ldots + (-1)^n C_n z^0,$$

que se pretende conhecer, determinando os seus coefficientes C_1, C_2,...... C_n em funcção dos coefficientes A_1, A_2,...... A_n da proposta, e dos coefficientes B_{n+1}, B_{n+2},... B_m do factor principal (23); é evidente que, para esta determinação, temos a egualdade...... (25)

$$z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} \ldots + (-1)^m A_m z^0 =$$

$$= (z^{m-n} - B_{n+1} z^{m-n-1} + B_{n+2} z^{m-n-2} \ldots + (-1)^m B_m z^0) \times$$

$$\times (z^n - C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} \ldots + (-1)^n C_n z^0);$$

a qual, effectuando a multiplicação do segundo membro, para a determinação em questão dos coefficientes C_1, C_2,... C_n, primeiro, quando o grão complementar n é maior do que a unidade, dá as egualdades parciaes...... (26)

$$C_1 = A_1 - B_{n+1},$$

$$C_2 = A_2 - C_1 B_{n+1} - B_{n+2},$$

$$C_3 = A_3 - C_2 B_{n+1} - C_1 B_{n+2} - B_{n+3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$C_{n-1} = A_{n-1} - C_{n-2} B_{n+2} - C_{n-3} B_{n+2} \ldots - C_0 B_{2n-1};$$

e em seguida, para todos os valores do gráo complementar n, a egualdade geral...... (27)

$$C_n = \frac{A_m}{B_m}.$$

Basta pois substituir nestas egualdades (26) e (27) os valores que dão, para os coefficientes $B_{n+1}, B_{n+2}, \ldots B_m$ do factor principal (23), as determinações progressivas (2), (8),......, d'este factor geral; e obteremos assim immediatamente os coefficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ dos factores complementares que corespondem a estes progressivos factores principaes.

Eis aqui estes factores complementares.

Primeiramente, para $n=1$, caso em que o factor geral (23) representa o factor principal de primeira ordem (2), e onde por consequencia os coefficientes $B_{n+1}, B_{n+2}, \ldots B_m$ são os coefficientes $P_2, P_3, \ldots\ldots P_m$, determinados pelas expressões (3) e (4), as egualdades parciaes (26) são inuteis; e a egualdade geral (27) dá...... (28)

$$C_1 = \frac{A_m}{P_m} = \frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)};$$

introduzindo por P_m o seu valor dado pela expressão geral (3).

Assim, segundo a construcção geral (24) dos factores complementares, o primeiro d'estes factores, aquelle que completa o factor principal de primeira ordem (2), será...... (29)

$$0 = z - \frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)};$$

qualquer que seja, nestes dois factores (24) e (2), o signal, positivo ou negativo, do expoente q das funcções alephs.

Em segundo logar, para $n=2$, em que o factor (24) representa o factor principal de segunda ordem (8), e onde por consequencia os coefficientes $B_{n+1}, B_{n+2}, \ldots B_m$ formam os coefficientes $Q_3, Q_4, \ldots\ldots Q_m$, determinados pelas expressões (20) e (21), as egualdades parciaes (26) e a egualdade geral (27) dão respectivamente...... (30)

$$C_1 = A_1 - Q_3 \quad \text{e } C_2 = \frac{A_m}{Q_m}$$

E por consequencia, introduzindo por Q_3 o valor que dá a primeira das expressões (20), e por Q_m o valor que dá a expressão geral (21), teremos...... (31)

$$C_1 = \frac{\aleph(q+1)(1|1)}{\aleph(q+1)(1|0)}, \text{ e } C_2 = \frac{\aleph(q+1)(1|0)}{\aleph(q)(1|0)};$$

ou então, por que é geralmente...... (32)

$$\frac{\aleph(q+1)(1|1)}{\aleph(q)(1|1)} = \frac{\aleph(q+1)(1|0)}{\aleph(q)(1|0)} \text{ (*)},$$

(*) Porque a condição (8) é

$$\frac{\aleph(q)^2 - \aleph(q-1).\aleph(q+1)}{\aleph(q+1)^2 - \aleph(q).\aleph(q+2)} = \frac{\aleph(q+1)^2 - \aleph(q)\,\aleph(q+2)}{\aleph(q+2)^2 - \aleph(q+1).\aleph(q+3)},$$

mas a primeira d'estas fracções é, como se vê pelas fórmulas (19), o volor de..... (a)

$$\frac{\aleph(q)(1|0)}{\aleph(q+1)(1|0)};$$

e a segunda d'aquellas fracções não é mais do que a primeira, será tambem

$$C_1 = \frac{\aleph(q+1)(1|1)}{\aleph(q+1)(1|0)} = \frac{\aleph(q)(1|1)}{\aleph(q)(1|0)}.$$

Assim, segundo a construcção geral (24) dos factores complementares, o segundo d'estes factores, aquelle que completa o factor principal de segunda ordem (8), será... (33)

$$0 = z^2 - z \,.\, \frac{\aleph(q)(1|1)}{\aleph(q)(1|0)} + \frac{\aleph(q+1)(1|0)}{\aleph(q)(1|0)};$$

qualquer que seja, nestes dois factores correspondentes (8) e (33), o signal, positivo ou negativo, do expoente q das funcções alephs.

Precedendo do mesmo modo, para os factores principaes e ulteriores, obteremos todos os factores complementares correspondentes. Assim se consegue decompor toda a equação do gráo m nos seus factores dos gráos $(m-n)$ e n, isto é, naquelles factores em que sempre se póde realmente decompor.

Tomemos, para exemplo do caso em que uma equação

junctando uma unidade ao expoente q das funcções alephs, o que se exprime mudando em (a) $(1|0)$ em $(1|1)$, logo

$$\frac{\aleph(q)(1|0)}{\aleph(q+1)(1|0)} = \frac{\aleph(q)(1|1)}{\aleph(q+1)(1|1)},$$

o que equivale a mudar q em $q+1$.

se decompõe num factor do gráo $(m-1)$ e n'um factor do primeiro gráo a equação seguinte

$$x^4-9x^3-8x^2-9x+1=0.$$

Comparando este equação com a fórma geral (10) das equações do quarto gráo, temos $A_1=-9$, $A_2=-8$, $A_3=9$, $A_4=1$, e substituindo estes valores na expressão geral (2) (do cap. II) das funcções alephs de expoente positivo, obtemos, para calcular estas funcções, a fórmula

$$\aleph(\omega)=9\aleph(\omega-1)+8\aleph(\omega-2)+9\aleph(\omega-3)-\aleph(\omega-4);$$

por meio da qual achamos

$$\begin{array}{lll}
\aleph(1)=9, & \aleph(5)=86418, & \aleph(9)=829786500,\\
\aleph(2)=89, & \aleph(6)=855451, & \aleph(10)=8214039540,\\
\aleph(3)=882, & \aleph(7)=8468091, & \text{etc.}=\text{etc.}\\
\aleph(4)=8730, & \aleph(8)=83825459, &
\end{array}$$

Os ultimos quatro valores dão as relações

$$\frac{\aleph(10)}{\aleph(9)}=9,89897948,\ \frac{\aleph(9)}{\aleph(8)}=9,89897949;\ \frac{\aleph(8)}{\aleph(7)}=9,89899747.$$

Onde se vê satisfeita a condição (7), e portanto se conclue que a decomposição da equação proposta se póde effectuar com as funcções alephs de expoente positivo. Tomando os quatro ultimos valores, e substituindo-os em (12), ficam determinados os coefficientes P_2, P_3, P_4 do factor (11) do terceiro gráo, que será

$$x^3+\left(\frac{745961040}{829786500}\right)x^2+\left(\frac{745961040}{829786500}\right)x-\frac{83825459}{829786500}=0;$$

o factor complementar do primeiro gráo é

$$x-\frac{829786500}{83825459}=0,$$

que nos faz conhecer uma das raizes da proposta $x=9{,}8989795$, aproximada até á setima casa decimal.

A reduzida do terceiro gráo é, com coefficientes do mesmo gráo de exactidão,

$$x^3+(0{,}8989795)\,x^2+(0{,}8989795)\,x-(0{,}1010205)=0.$$

Se multiplicassemos o primeiro membro d'esta equação pelo factor binomio $x-(9{,}8989795)$, para reproduzir a proposta, achariamos os coefficientes d'esta, exactos até á setima casa decimal.

Como exemplo do caso em que a equação proposta se decompõe num factor do gráo $(m-2)$, e num factor complementar do segundo gráo, seja a equação

$$x^5-A_1x^4+A_2x^3-A_3x^2+A_4x-A_5=0;$$

e seja o seu factor do terceiro gráo

$$x^3-Q_3\,x^2+Q_4\,x-Q_5=0,$$

as fórmulas geraes (20) e (21) dão, para valores dos coefficientes Q_3, Q_4 e Q_5, as expressões geraes...... (34)

$$Q_3 = A_4 - \frac{\aleph(q+1)(1|1)}{\aleph(q+1)(1|0)},$$

$$Q_4 = A_4, \frac{\aleph(q)(1|0)}{\aleph(q+1)(1|0)} - A_5 . \frac{\aleph(q-1)\,1|1)}{\aleph(q+1)\,1|0)},$$

$$Q_5 = A_5 . \frac{\aleph(q)(1|0)}{\aleph(q+1)(1|0)},$$

onde q póde ser positivo ou negativo.

Em quanto ao factor complementar do segundo gráo, já vimos que era (35)

$$0 = z^2 - z . \frac{\aleph(q)(1|1)}{\aleph(q)(1|0)} + \frac{\aleph(q+1)(1|1)}{\aleph(q)(1|0};$$

ou então, augmentando uma unidade ao expoente q das funcções alephs, como vimos na nota (pag. 43) que era permittido; será este factor

$$x^2 - \frac{\aleph(q+1)(1|1)}{\aleph(q+1)(1|0)} x + \frac{\aleph(q+2)(1|0)}{\aleph(q+1)(1|0)}.$$

Determinados os dois factores para a equação geral do quinto gráo, appliquemos á equação

$$z^5 - (7{,}71)n.z^4 + (54{,}11)n^2.z^3 - (35{,}81)n^3.z^2 + (7{,}10)n^4.z - n^5 = 0,$$

onde o numero n é qualquer. Esta equação, estabelecendo a hypothese $z=nx$, reduz-se á equação *normal*...... (36)

$$x^5-(7,71)x^4+(54,11)x^3-(35,81)x^2+(7,10)x-1=0.$$

Comparando-a com a equação geral, vem

$$A_1=7,71,\ A_2=54,11,\ A_3=35,81,\ A_4=7,10,\ A_5=1\ ;$$

e portanto, em virtude da lei (2) (cap. II), teremos, para o calculo das funcções alephs de expoentes positivos, a fórmula

$$\begin{gathered}\aleph(\omega)=(7,71)\aleph(\omega-1)-(54,11)\aleph(\omega-2)+(35,81)\aleph(\omega-3)\\ -(7,10)\aleph(\omega-4)+\aleph(\omega-5).\end{gathered}$$

Por meio d'esta fórmula, e attendendo aos valores das cinco primeiras funcções alephs de expoente negativo, vem

$\aleph(1)=+7,71,$	$\aleph(7)=+906463,80,$
$\aleph(2)=+5,3341,$	$\aleph(8)=+627394,12,$
$\aleph(3)=-340,2522,$	$\aleph(9)=-40022354,86,$
$\aleph(4)=-2642,978,$	$\aleph(10)=-310890547,00,$
$\aleph(5)=-1829,038,$	$\aleph(11)=-215208710,82,$
$\aleph(6)=+116695,04,$	etc. etc.

A simples inspecção d'estes valores consecutivos basta para mostrar que elles não tem entre si relação constante, e que portanto não satisfazem á condição simples (7). Assim, a equação proposta não póde, por meio das funcções alephs de expoentes positivos, reduzir-se a uma equação do quarto gráo. Neste caso deve-se vêr se estes valores satisfazem á condição composta (18), e se, por consequencia, a equação proposta póde, por meio d'estas funcções de expoente positivo, reduzir-se a uma equação do terceiro gráo. Para isso, e afim de facilitar os calculos, teremos, para os seis ultimos valores, os logarithmos

$$L\aleph(6)=5{,}0670524, \qquad L\aleph(9)\ =7{,}6023027-,$$

$$L\aleph(7)=5{,}9573504, \qquad L\aleph(10)=8{,}4926077-,$$

$$L\aleph(8)=5{,}7975405, \qquad L\aleph(11)=8{,}3328599-,$$

e, por meio d'estes logarithmos, podem-se facilmente calcular os seguintes valores que entram nas funcções compostas

$$\aleph(7)^2\ =8216764.10^5\ , \qquad \aleph(6).\aleph(8)\ =+732138.10^5,$$

$$\aleph(8)^2\ =3936235.10^5\ , \qquad \aleph(7).\aleph(9)\ =-3627882.10^7,$$

$$\aleph(9)^2\ =1601788.10^9\ , \qquad \aleph(8).\aleph(10)=-195051.10^9,$$

$$\aleph(10)^2=9665302.10^{10}, \qquad \aleph(9).\aleph(11)=+861316.10^{10},$$

teremos pois

$$\aleph(7)\,(1|0)=\aleph(7)^2-\aleph(6).\aleph(8)\ =748626\ .10^5,$$

$$\aleph(8)\,(1|0)=\aleph(8)^2-\aleph(7).\aleph(9)\ =3667244.10^7,$$

$$\aleph(9)\,(1|0)=\aleph(9)^2-\aleph(8).\aleph(10)=1796839.10^9,$$

$$\aleph(10)\,(1|0)=\aleph(10)^2-\aleph(9).\aleph(11)=880398.10^{11}.$$

Estas funcções compostas satisfazem á condição (18); porque tomando os seus logarithmos, que são

$$L(\aleph(7)(1|0))=11,8741701,$$
$$L(\aleph(8)(1|0))=13,5643398,$$
$$L(\aleph(9)(1|0))=15,2545094,$$
$$L(\aleph(10)(1|0))=16,9446791,$$

vê-se que as relações d'estas funcções são constantes até á setima decimal, pois que as *differenças* dos logarithmos são todas 1,6901697. D'ahi resulta que para todo o expoente ρ maior que 7, virá, com septe decimaes, a relação constante

$$\frac{\aleph(\rho)(1|0)}{\aleph(\rho+1)(1|0)}=0,0204094.$$

Ora é esta a condição composta (18) que indica que a proposta póde reduzir-se, por meio das funcções alephs de expoente positivo, a uma equação de terceiro gráo. Só resta agora introduzir nas fórmulas geraes (34) e (34) os valores das funcções compostas, pondo $q=7$; e para isto só resta calcular as duas funcções $\aleph[8](1|1)$ e $\aleph[6](1|1)$; este cálculo dá

$$L(\aleph(8)(1|1))=L[\aleph(8).\aleph(9)-\aleph(7).\aleph(10)]=14,4098280,$$
$$L(\aleph(6)(1|1))=L[\aleph(6).\aleph(7)-\aleph(5).\aleph(8)]=11,0294836.$$

Teremos pois

$$A_1 - \frac{\aleph(8)\,(1|1)}{\aleph(8)\,(1|0)} = +\,0{,}71016,$$

$$A_4 . \frac{\aleph(7)\,(1|0)}{\aleph(8)\,(1|0)} - A_5 . \frac{\aleph(6)\,(1|1)}{\aleph(8)\,(1|0)} = +0{,}14198,$$

$$A_5 . \frac{\aleph(7)\,(1|0)}{\aleph(8)\,(1|0)} = +0{,}0204094,$$

e, por consequencia, a equação do terceiro gráo a que se reduz a proposta é

$$x^3 - (0{,}71016)x^2 + (0{,}14198)\,x - 0{,}0204094) = 0.$$

Em quanto á equação complementar do segundo gráo, temos, para os seus coefficientes,

$$\frac{\aleph(8)\,(1|1)}{\aleph(8)\,(1|0)} = 6{,}999842, \frac{\aleph(9)\,(1|0)}{\aleph(8)\,(1|0)} = 48{,}99702.$$

A equação complementar é pois diffinitivamente

$$x^2 - (6{,}999842)\,x + (48{,}99702) = 0.$$

Taes são os dois factores, um do terceiro e outro do segundo gráo, em que se decompõe a equação proposta do quinto gráo; e póde verificar-se a exactidão d'esta resolução, multiplicando um pelo outro estes dois factores, que assim reproduzirão a proposta.

Aqui damos por terminado este rapido esboço que fizemos do methodo teleologico de Wronski. A exposição vae truncada e incompleta. Não nos envergonhamos de fazer esta declaração; porque é bem sabido que a educação scientifica, que se recebe nas Universidades do occidente, entre as raças latinas, não prepara os espiritos de modo a poderem sondar os principios que presidem a solução dos grandes problemas da Mathematica, sciencia cujas raizes penetram nas mais elevadas regiões da especulação metaphisica. Todavia julgamos ter appresentado os elementos sufficientes, para poder fazer a crítica dos methodos de Bernouilli e Euler, que é o objecto principal d'este nosso trabalho.

IV

Para melhor fazer a comparação dos methodos expostos, vamos, em poucas palavras, traçar os caracteres que destinguem o *methodo teleologico* de Wronski. Este methodo, que depende da applicação da *Lei Teleologica* (nota 1.ª) das mathematicas, consiste na decomposição das equações nos seus factores de gráos inferiores, determinando os coefficientes d'estes factores em funcção dos coefficientes das equações propostas. Uma das suas feições carecteristicas é conduzir immediatamente, e sem auxílio extranho, á determinação d'aquelles factores, sem que os seus processos, e os seus resultados, dependam das raizes de equações de gráos inferiores, nem mesmo da extracção das raizes dos numeros considerados como potencias (nota 2.ª); e só emprega os primeiros quatro algorithmos elementares — adição, subtracção, multiplicação e divizão. O que torna este methodo o verdadeiro methodo absoluto para a resolução das equações, é a sua absoluta independencia de processos estranhos. E como, além d'isso, não precisa, para estabelecer os seus processos, de empregar o cálculo differencial, nem o integral, deve ainda considerar-se como um verdadeiro methodo elementar.

O espirito d'este methodo reside essencialmente na decomposição das equações nos seus *factores principaes* e *factores complementares*, que se correspondem progressivamente. Antes de Wronski, foi Ferrari quem primeiro tentou fazer applicação do principio da decomposição em factores, quando tractou da resolução das equações do quarto gráo. Depois, Descartes, imitando litteralmente o processo de Ferrari, mutilou-o, fazendo aquella decomposição em dois factores do segundo gráo.

Mas Ferrari, e portanto Descartes, só poderam obter esta decomposição fazendo-a depender da resolução de uma equação do terceiro gráo. É por causa d'esta dependencia que se póde dizer, que Ferrari não completou a solução do problema da resolução das equações do quarto gráo.

Com effeito, não se deve dar por completa a solução do problema de resolver uma equação de um gráo qualquer, quando ha necessidade de recorrer á resolução de uma outra equação, qualquer que seja o seu gráo. Tal é tambem ainda hoje a imperfeição da sciencia quando tracta de resolver as equações do quarto gráo pelo methodo da sua decomposição em factores. A mesma imperfeição se nota egualmente na resolução das equações do terceiro gráo por Cardan, resolução que depende de uma reduzida do segundo gráo. No mesmo caso está, finalmente, a solução dada por Euler para as equações do quarto gráo, solução que depende do conhecimento das raizes de uma equação do terceiro gráo.

Vejamos agora a que se reduz o methodo de Daniel Bernouilli. Este geometra, sem saber que as funcções alephs constituiam os termos geraes das series recurrentes (nota 3.ª), formadas com os coefficientes das equações a que pertencem estas funcções; sem conhecer mesmo a existencia de similhantes funcções; formava a relação de dois coefficientes consecutivos da serie recurrente, cuja relação, quando era constante para dois coefficientes consecutivos quaesquer, lhe dava uma das raizes da proposta. Ora, considerando que, no methodo teleologico, o primeiro factor complementar $z-\frac{\aleph[q]}{\aleph[q-1]}$, que dá uma das raizes z, não é mais do que a relação de duas funcções alephs consecutivas, concebe-se que este primeiro factor podia ser descoberto pela comparação dos coefficientes dos termos das series recurrentes provenientes de equações conhecidas. Foi assim que Bernouilli descobriu effectivamente este primeiro factor complementar. O conhecimento d'este factor deu o meio de descobrir uma das raizes das equações, quando ellas realmente se podem decompor no factor principal (2) [cap. III]. Este processo, que póde ser sufficiente para as equações do terceiro gráo, está bem longe de ser geral. Além d'isso, só se podia explicar este methodo pela consideração de que, nos termos geraes das series recurrentes, as potencias das maiores raizes, quando são muito elevadas, fazem desapparecer as potencias das menores, explicação muito pouco exacta, e que deixa de se poder aplicar, quando são eguaes as maiores ou reciprocamente as menores raizes da proposta. Neste caso aquelle primeiro factor complementar tornava-se insufficiente.

D'aqui se vê que este methodo não passa de um pequenissimo fragmento do methodo teleologico, e que apenas se funda sobre uma simples consequencia logica, isto é, sobre o factor complementar (6) [cap. III] que deriva, como um simples corollario, do factor principal (2) [cap. III], no qual propriamente reside o methodo de Wronski.

Assim, o methodo de Bernouilli, que só é aplicavel quando se realisa a condição (7), que corresponde a este caso singular, apenas póde assignar o valor numerico da raiz $z=\frac{\aleph[q]}{\aleph[q-1]}$, e não póde de modo algum remontar ao principio (2) [cap. III] do methodo teleologico, dando, para este factor principal (2), a sua expressão geral por meio das novas funcções alephs. Esta aplicação izolada, e mesmo indefinidamente limitada, que offerece o methodo de Bernouilli, comparando-a com o methodo teleologico completo, servirá para dar uma ideia da extensão indefinida e da generalidade absoluta d'este ultimo methodo.

Depois de Bernouilli, Euler, comprehendendo bem a causa d'esta insufficiencia, procurou descobrir o factor complementar da segunda ordem (35), ao menos para o caso em que as duas raizes d'este factor, que dá as duas maiores ou as duas menores raizes da equação proposta, são imaginarias. Para o conseguir, deu a este factor complementar a fórma conhecida para as raizes imaginarias...... (37)

$$0=z^2-2pz.\cos\varphi+p^2;$$

e designando, na serie recurrente que pertence a uma equação proposta, por P, Q, R e S quatro termos consecutivos e muito afastados da origem da serie, chegou a determinar as quantidades p e cos φ, que formam os coefficientes neste factor trinomial e problematico; a saber...... (38)

$$p=\sqrt{\left\{\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}\right\}}\qquad \cos\varphi=\frac{QR-PS}{2\sqrt{[(Q^2-PR)(R^2-QS)]}}.$$

Mas, este factor trinomial não é mais do que um caso particular do *factor complementar* de segunda ordem (35); e não póde por consequencia servir em geral para todas aquellas equações que se podem decompor no segundo *factor principal* (8) e seu *factor complementar* (35).

Afim de melhor explicar esta insufficiencia do factor trinomial de Euler, vamos mostrar que elle não é effectivamente mais do que um caso particular, um simples esboço do *factor complementar* de segunda ordem (35). Para isso fassamos...... (39)

$$\aleph(q-1)=P,\ \aleph(q)=Q,\ \aleph(q+1)=R,\ \aleph(q+2)=S;$$

e teremos, para coefficientes d'este factor geral (35), os valores...... (40)

$$\aleph(q)(1|1)=\aleph(q).\aleph(q+1)-\aleph(q-1).\aleph(q+2)=QR-PS,$$

$$\aleph(q+1)(1|0)=\aleph(q+1)^2-\aleph(q).\aleph(q+2)=R^2-QS,$$

$$\aleph(q)(1|0)=\aleph(q)^2-\aleph(q-1).\aleph(q+1)=Q^2-PR;$$

e por consequencia, para o factor (35), a expressão geral...... (41)

$$0=z^2-z.\frac{QR-PS}{Q^2-PR}+\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}.$$

Já vimos que este factor geral (35), combinado com o seu *factor principal* e correspondente (8), serve geralmente para a resolução de todas aquellas equações que se podem decompor no factor principal (8), e, por consequencia, no seu *factor complementar* (35). Mas devendo-se advirtir que, neste ultimo factor, se devem entender as quantidades P, Q, R e S tomadas em toda a generalidade que lhe dão as hypotheses (40), e por tanto independentes da condição que lhe fixa a segunda das expressões (38) de Euler, a saber, da condição...... (42)

$$4(Q^2-PR)(R^2-QS)>(QR-PS)^2.$$

Em quanto ao factor trinomial de Euler, por meio do qual se acha introduzida esta condição no factor geral (35), basta comparar os seus coefficientes respectivos, e formar assim as egualdades condicionaes...... (43)

$$2p.\cos\varphi=\frac{QR-PS}{Q^2-PR},\ \text{e}\ p^2=\frac{R^2-QS}{Q^2-PR},$$

para d'ahi tirar immediatamente os valores particulares (38) de Euler, os quaes introduzem assim, nos coefficientes geraes (43), a condição (42), e, tornando-lhe inherente esta condição, destroem necessariamente a generalidade d'estes coefficientes, e por consequencia a generalidade do factor complementar de segunda ordem (35) ou (41).

A sciencia tinha chegado a este ponto, e nenhum dos geometras que se seguiram a Bernouilli e Euler poude, seguindo o mesmo caminho, ampliar-lhes o methodo. Com effeito, concebe-se á priori que, por este caminho na aparencia tão directo, isto é, derigindo-nos pela expressão do termo geral da serie recurrente, é impossivel ir além do ponto a que chegou Euler; porque é absolutamente impossivel deduzir da expressão a mais geral dos termos das series recurrentes, tal como Wronski a faz conhecer na sua theoria das funcções alephs, não só os *factores complementares* das ordens superiores á segunda, mas mesmo, em toda a sua generalidade, o factor complementar da segunda ordem (35), fazendo desapparecer a condição (42) de Euler. E todavia, estes factores ulteriores tornam-se indispensaveis para a resolução geral das equações.

Póde-se pois concluir que o *methodo teleologico* não tem analogia alguma com os diversos methodos que os geometras tentaram apresentar para a resolução das equações. É verdade que nelle se contém o methodo precario de Bernouilli e a sua extensão final por Euler, e talvez mesmo o methodo particular de Ferrari, para a resolução das equações do quarto gráo; mas, todos estes methodos apenas ahi apparecem como casos particulares ou mesmo como simples corollarios, como consequencias puramente logicas do methodo teleologico. E em verdade é preciso que este methodo, se é realmente geral, conduza, entre os seus casos particulares, ou entre os seus corollarios, a todos os methodos que se tem tentado no mesmo sentido, isto é, decompondo as equações nos seus factores de gráos inferiores. Assim não pode existir, entre estes primeiros ensaios e a resolução definitiva das equações, feita pelo methodo de Wronski, outra analogia mais do que a que ha do particular ao geral, ou das consequencias ao principio. Infelizmente a demonstração do theorema fundamental (1) e (2), que é o principio unico e a lei primordial d'este methodo, é absolutamente desconhecida. A respeito d'esta demonstração diz Wronski no terceiro volume do Messianismo (ultima obra que publicou):

«Esta demonstração, que exige muito mais espaço e tempo do que podemos empregar nesta obra, da-la-he-mos na obra annunciada, que apresentará o tractado completo da *Resolução teleologica das Equações*».

Esta obra não apareceu ainda. Que isto nos sirva de desculpa.

FIM.

Nota 1.ª

Wronski, depois de ter descoberto os principios absolutos do saber humano, isto é, depois de ter creado a *Philosophia absoluta,* fez a reforma geral de todas as sciencias. Para dar ideia do modo como se fez esta verdadeira creação, aqui reproduzimos as seguintes linhas, copiadas do *Messianismo:* «Reflectindo sôbre a *unidade* necessaria do absoluto, e por consequencia sôbre a unidade correspondente do universo, concebe-se que a geração dos diversos systemas de seres ou de connexões de saber que compõem o universo, deve seguir uma unica e mesma lei, formando de algum modo a *Lei de Creação.* Então, observando que são precizamente estes diversos systemas de seres ou de factos do saber componentes do universo, que constituem respectivamente os objectos das diversas sciencias, concebe-se que antes mesmo de conhecer positivamente estes objectos respectivos das sciencias, se poderá, se for conhecida a lei de creação, deduzir á priori a natureza geral de todos estes diversos systemas scientificos.»

A *Lei de Creação* é constituida por tres elementos fundamentaes, a saber: *Lei Suprema, Problema-Universal e Lei teleologica.* A cada um d'estes elementos corresponde um methodo para a resolução das equações. É do methodo que se filia na lei teleologica que nos ocupámos no texto.

Nota 2.ª

Methodo para obter a raiz quadrada dos numeros, por meio das funcções alephs

Designemos por z a raiz quadrada de um numero qualquer M, ou a raiz da equação...... (1)

$$z^2 - M = 0.$$

Tomemos um numero N cuja segunda potencia seja a mais proxima de M, e estabeleça-se, entre a raiz pedida z e uma nova incognita x, a relação

$$z = x - N.$$

Esta hypothese transforma (1) em...... (2)

$$x^2 - 2Nx + (N^2 - M) = 0,$$

e, se construirmos com estes coefficientes $2N$ e $(N^2 - M)$, a serie progressiva das funcções alephs, por meio da fórmula...... (3)

$$\aleph(\omega) = 2N . \aleph(\omega - 1) - (N^2 - M) . \aleph(\omega - 2),$$

será o factor principal, correspondente á equação (2)

$$x = \frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)};$$

e portanto...... (4)

$$Z = \sqrt{M} = \frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)} - N.$$

Para exemplo, busquemos a raiz quadrada de 14. Como o quadrado mais proximo de 14 é 16, toma-se $N=4$; e então vem $N^2-M=2$, e (3) dá

$$\aleph(\omega)=8.\,\aleph(\omega-1)-2.\,\aleph(\omega-2),$$

e será

$$\begin{array}{lll}
\aleph(1)=8, & \aleph(4)=3716, & \aleph(7)\ =1724160, \\
\aleph(2)=62, & \aleph(5)=28768, & \aleph(8)\ =13347856, \\
\aleph(3)=480, & \aleph(6)=222712, & \aleph(9)\ =103334528, \\
 & & \aleph(10)=799980512, \\
 & & \text{etc.}=\text{etc.}
\end{array}$$

estes valores introduzidos na fórmula (4), e limitando-nos a $\aleph(6)$, fazem conhecer com sete algarismos exactos a raiz quadrada de 14, a saber

$$\sqrt{14}=\frac{\aleph(6)}{\aleph(5)}-4=\frac{222712}{28768}-4=3{,}741657.$$

Se tomassemos os valores das funcções alephs até ao expoente 10, obteriamos facilmente a raiz pedida com dez decimaes, o que se não poderia conseguir tão rapidamente, nem por meio dos logarithmos ordinarios, que não vão alem de sete decimaes, nem por nenhum outro dos processos usados.

Nota 3.ª

BIBLIOTHECA DA UNIVERSIDADE
28 JAN
COIMBRA

Seja a proposta...... (1)

$$z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} \ldots\ldots + (-1)^m z^0 = 0.$$

Se fizer-mos em (1) $z = \frac{1}{x}$, e com a transformada formarmos o denominador da fracção...... (2)

$$\frac{1}{1 - A_1 x + A_2 x^2 \ldots\ldots + (-1)^m x^m} = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_\omega x^\omega + \ldots;$$

é sabido que qualquer coefficiente B_ω da serie recurrente é dado pela fórmula...... (3)

$$B_\omega = A_1 B_{\omega-1} - A_2 B_{\omega-2} + A_3 B_{\omega-3} \ldots\ldots + (-1)^m A_{m-1} B_{\omega-m+1}$$

Ora se compararmos (3) com a fórmula (2) (cap. II) do texto, que é.... (4)

$$\aleph(\omega) = A_1 \aleph(\omega - 1) - A_2 \aleph(\omega - 2) + A_3 \aleph(\omega - 3) \ldots\ldots + \\ + (-1)_{m-1} A_m \aleph(\omega - m),$$

vê-se que os differentes coefficientes dos termos da serie recurrente (2) são as funcções alephs consecutivas, que tem por elementos as raizes da equação (1), cujos coefficientes formam o que se chama a *escalla de relação.*

PRICE
PRICE
23456 78900 5