

ADDTAMENTO

CALCELO DOS ECLIPSES

OBSERVATÓRIO ASTRONÓMICO
UNIVERSIDADE DE COIMBRA
PORTUGAL

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
540 EAST 57TH STREET
CHICAGO, ILL. 60637

Por occasião de ter de annunciar-se o eclipse do sol de 22 de dezembro de 1870, pareceu conveniente ajunctar ás elegantes formulas, que para o calculo dos eclipses em logares determinados dera o sr. José Monteiro da Rocha, algumas modificações pouco trabalhosas, que as approximassem sufficientemente das mais exactas. E, além d'isso, adicionar ás formulas, que dão as circumstancias geraes ordinariamente annunciadas nas ephemerides astronomicas de Coimbra, as da linha dos limites da totalidade, e da linha central; partindo as mais das vezes das equações fundamentaes estabelecidas por aquelle insigne astronomo.

O director do observatorio astronomico

Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto.

I

Eclipses do sol, e occultações dos planetas e das estrellas pela lua, em um logar determinado

1 Sejam: P a latitude geocentrica do logar; p a differença, nesse logar, entre as parallaxes horizontaes da lua e do sol ou do astro occultado, no tempo T da conjunção verdadeira em ascensão recta; d', d , as declinações verdadeiras da lua e do sol, no mesmo instante; $\Delta_0 = d' - d$ a differença das declinações verdadeiras; $A = A_C - A_\odot$, $\delta = \delta_C - \delta_\odot$, as differenças dos movimentos horarios em ascensão recta e em declinação; H_0 o angulo horario do astro eclipsado; c a somma ou a differença dos semidiametros apparentes da lua e do sol, segundo se tracta do principio e do fim do eclipse ou do principio e do fim do eclipse total ou annular, sendo em ambos os casos o semidiametro da lua correcto com o augmento devido á altura sobre o horizonte; γ o factor de conversão do tempo em arco, ou o arco correspondente a uma hora; γ' este arco rectificad.

Chamando n parallaxe relativa em angulo horario, transportada ao paralelo da lua; m a parallaxe relativa em distancia polar; e fazendo

$$h = A \cos d', \quad g = p \cos P, \quad j = p \sin P;$$

darão os tempos das phases, até as segundas potencias das parallaxes, as formulas seguintes:

1.º

$$\left\{ \begin{aligned} \tau &= \frac{g}{h} \operatorname{sen} (H_0 + \gamma\tau) - \frac{B}{A} \tau^2 = \frac{g}{h} \operatorname{sen} H - \frac{B}{A} \tau^2, \\ d' &= d'_0 + \delta_C \cdot \tau, \quad \Delta = \Delta_0 + \delta\tau, \quad n = h\tau, \\ m &= j \cos (d' - m) - g \operatorname{sen} (d' - m) \cos (H + \frac{1}{2} A\tau), \quad \Delta' = \Delta - m, \\ (a) \quad h' &= (h - \gamma'g \cos H) \frac{\cos \left(\frac{d' + d - m}{2} \right)}{\cos d'_0}, \quad \delta' = \delta - \gamma'g \operatorname{sen} d' \operatorname{sen} H, \\ \operatorname{tang} \alpha &= \frac{\delta'}{h'}, \quad \cos \varphi = \frac{\Delta' \cos \alpha}{c}, \quad t = \frac{c \operatorname{sen} (-\alpha \mp \varphi)}{h'}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{Tempo da phase} = T + \tau + t.$$

Pode desprezar-se ordinariamente o segundo termo de τ , no qual, suppondo as ascensões rectas dadas de hora a hora, é

$$B = \frac{1}{2}(A' - A).$$

Calcular-se-ha m por duas aproximações successivas.

Em quanto á correcção do semidiámetro da lua, bastará muitas vezes tomar a media $6''$; mas se a altura da lua a exigir diferente, calcular-se-ha pelas formulas:

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } z = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{p}, \\ \text{ou } \text{tang } \mu = \frac{n}{m}, \text{ sen } z = \frac{m}{p \cos \mu} = \frac{n}{p \text{ sen } \mu}; \\ \text{correcção} = \text{sem. hor. } C \times \text{sen } p \cos z. \end{array} \right.$$

2.º

Se t passar d'uma hora, repetir-se-hão os calculos de α , φ , t , usando dos valores de h' e δ' seguintes:

$$h' = [h - \gamma'g \cos(H + \frac{1}{2}\gamma t)] \cdot \frac{\cos \frac{d' + d - m}{2}}{\cos d'_0}, \quad \delta' = \delta - \gamma'g \text{ sen } d' \text{ sen}(H + \frac{1}{2}\gamma t).$$

E se, durante o intervallo de tempo t , variar consideravelmente a correcção do semidiámetro da lua, repetir-se-ha o calculo d'esta correcção, para cada um dos valores de t , usando, nas formulas d'ella, de $n + \gamma'g \cos H \cdot t$ em logar de n , e de $m + \gamma'g \text{ sen } d' \text{ sen } H \cdot t$ em logar de m .

2 Para os annuncios esta approximação é sufficiente; mas, se quizessemos ainda maior exactidão nas parallaxes de distancia polar, poderíamos usar, sem grande trabalho, das formulas:

$$\text{tang } \psi = \frac{\cot P \cos(H + \frac{1}{2}A\tau)}{\cos \frac{1}{2}A\tau}, \quad \text{sen } m = \frac{\text{sen } p \text{ sen } P \cos(d' + \psi - m)}{\cos \psi}.$$

E para a correcção do semidiámetro da lua, de

$$\text{correcção} = \text{sem. hor. } C [\text{tang}(d' + \psi) \text{ sen } m - \frac{1}{2} \text{sen}^2 m]:$$

advertindo porém que, no caso de variar consideravelmente esta correcção no intervallo t , se deveria fazer o calculo d'ella empregando, nas tres formulas,

$d' + \delta_C \cdot t$ em logar de d' , $\frac{1}{2}(A\tau + \frac{\gamma'g \cos(H + \frac{1}{2}\gamma t)}{\cos d'} \cdot t)$ em logar de $\frac{1}{2}A\tau$, e $H + \gamma t$ em logar de H .

Foram assim calculados os annuncios do eclipse do sol de 22 de dezembro de 1870 para Coimbra, Lisboa, Loulé, Monchique e Tavira.

II

Linhas limites da totalidade dos eclipses do sol

3 Em primeiro logar, fazendo

$$\Sigma' = \text{sem} \cdot C - \text{sem} \cdot \odot + p,$$

darão os tempos $T + t$ em que começa e acaba para a terra o eclipse total, e as posições dos logares respectivos que veem, um o primeiro, outro o ultimo, este eclipse, as formulas:

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{h} = \text{tang } \alpha, \frac{\Delta \cos z}{\Sigma'} = \cos \varphi, t = \frac{\Sigma' \text{sen}(-\alpha \mp \varphi)}{h}, \\ \text{sen } P = \frac{\Delta + \delta t}{\Sigma'} \cos d, \cos H = -\text{tang } P \text{ tang } d, \text{sen } H = \frac{ht}{\Sigma' \cos P}, \end{array} \right.$$

$$\sigma, \text{ em tempo medio do logar, } T' = \frac{H}{15} - \text{eq} \cdot t - t,$$

$$\text{long. occ. do logar} = T - T':$$

devendo repetir-se os calculos com os valores de p correspondentes aos de P .

Foi assim que calculamos o respectivo annuncio.

4 Depois, para tempos comprehendidos entre estes e sufficientemente approximados, calcular-se-hão as coordenadas dos logares que nelles terão o eclipse total instantaneo; como se segue:

Porque nestes logares devem coincidir os dois valores de t , o que exige que seja 0° ou 180° o angulo ψ (calc. das Eph. astr. n.º 145), resolverão o problema as formulas:

1.º até a 1.ª potencia das parallaxes,

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} n = ht \pm c \operatorname{sen} \alpha, \quad m = \frac{\Delta \cos \alpha \mp c + n \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}, \\ r = \operatorname{sen} (d' - m) \sqrt{(p + n)(p - n)}, \quad k = \frac{\sqrt{(m + r)(m - r)}}{p}, \\ \operatorname{sen} \varphi = \frac{kp}{m \cos (d' - m)}; \end{array} \right.$$

depois, para cada valor de φ , os dois de $\operatorname{sen} P$,

$$\operatorname{sen} P = k \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi, \quad \operatorname{sen} P = k \operatorname{cot} \frac{1}{2} \varphi;$$

e finalmente, para cada valor de P , o de H dado por

$$\operatorname{sen} H = \frac{n}{p \cos P}, \quad \cos H = \frac{p \operatorname{sen} P \cos (d' - m) - m}{p \cos P \operatorname{sen} (d' - m)}.$$

2.º até os quadrados das parallaxes:

Com os valores achados de P e H , com os respectivos de p , com $h = A \cos (d' - m)$, e com $m' = m + \frac{1}{2} pn \operatorname{sen} 1' \cos P \operatorname{tang} d' \operatorname{sen} H$ em lugar de m , repitam-se os calculos de P e H .

Os angulos horarios verdadeiros serão $H' = H - \frac{n}{\cos (d' - m)}$;
e σ , em tempo do logar, $= \frac{H}{15} - \frac{n}{15 \cos (d' - m)}$ — eq. t. — t.

Devendo adoptar-se as soluções, para as quaes a comparação com o H , achado pela formula $\cos H = -\operatorname{tang} P \operatorname{tang} d$, der o sol sobre o horizonte.

Em todos estes calculos é c a differença dos semidiametros apparentes, ojunctando ao da lua a correcção dada pelas formulas (b) do n.º 1.

4 Haviamos primeiramente calculado os tempos das phases do eclipse de 22 de dezembro em logares correspondentes ás longitudes extremas da parte annunciada da linha central, e escolhidos de tal modo que na proximidade d'elles se dava a obscuração instantanea; accertando depois pela interpolação as latitudes em que tinha logar este phenomeno.

Os resultados assim obtidos, que foram uma fita de terreno de 91',5 de differença de latitudes para cada longitude, e no meio d'ella aproximadamente a linha da centralidade inclinada 17º 16' ao equador (*): concordam com a appli-

(*) A linha mais boreal passa, pouco mais ou menos, alguma cousa ao norte do cabo Espichel, meia legua ao norte de Grandola, pouco ao sul de Ferreira, uma legua ao sul de Beja, e legua e meia ao sul de Serpa.

A linha mais austral fica ao sul do Algarve.

cação que fizemos d'estas formulas a um dos tempos intermedios entre os achados pelas formulas (c) do n.º 3.

6 Se quizermos tomar para raizes H, e não t, acharemos facilmente as coordenadas respectivas pelas formulas:

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen}(d' - m)}{\text{tang } \alpha} = \text{tang } \varphi, \quad \frac{\text{tang } \alpha \text{ sen}(\varphi + H)}{\cos(d' - m) \cos \varphi} = \text{tang } \psi, \\ \left(\Delta \mp \frac{c}{\cos \alpha} \right) \cos \psi \\ \frac{\quad}{p \cos(d' - m)} = \text{sen}(P - \psi), \quad P = (P - \psi) + \psi: \end{array} \right.$$

depois

$$t = \frac{p \cos P \text{ sen } H \pm c \text{ sen } \alpha}{h};$$

e σ , em t. m. do logar, = $\frac{H}{15} - \text{eq. t.} - t$.

Nestas formulas despreza-se primeiramente m: e depois repetem-se os calculos, usando:

dos p respectivos;

de $n = g \text{ gen}\left(H + \frac{n}{\cos d'}\right)$, $m = j \cos(d' - m) - g \text{ sen}(d' - m) \cos\left(H + \frac{1}{2} \frac{n}{\cos d'}\right)$;

e de $\Delta + \frac{1}{2} pn \text{ sen } 1' \cos P \text{ tang } d' \text{ sen } H$, em logar de Δ .

III

Linha dos eclipses centraes

7 Em primeiro logar as formulas (c) do n.º 3, fazendo nellas $\Sigma' = p$, darão os tempos T + t, em que começa e acaba para a terra o eclipse central.

Depois calcular-se-hão, para os tempos intermedios, as coordenadas dos logares que nelles veem o eclipse central, do modo seguinte:

Porque nestes logares deve ser nullo c (Cal. das Eph. n.º 145), resolverão o problema as formulas:

$$(f) \left\{ \begin{array}{l} n = ht, \quad m = \Delta + \delta t, \\ r = \text{sen}(d' - m) \sqrt{(p + n)p - n}, \quad k = \frac{\sqrt{(m + r)(m - r)}}{p}; \end{array} \right.$$

e as restantes do n.º 4.

8 Os resultados d'estas formulas concordam sufficientemente com os que achamos pelas seguintes, de que primeiramente nos serviram para formar a tabella das posições geographicas do respectivo annuncio do eclipse de 22 de dezembro (*):

$$(g) \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } S = \frac{(a_{\text{C}} - a_{\odot}) \cos d_{\text{C}}}{d_{\text{C}} - d_{\odot}}, \quad \bar{\omega} = \frac{d_{\text{C}} - d_{\odot}}{\cos S}, \\ \text{sen } z = \frac{\bar{\omega}}{p}, \quad \text{tang } \theta = \cos S \text{ tang } z, \\ \text{tang } H = \text{tang } S \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } (d + \theta)}, \\ \text{tang } P = \cos H \text{ tang } (d + \theta), \quad \cos P = \frac{\text{sen } S \text{ sen } z}{\text{sen } H}. \end{array} \right.$$

E, querendo maior exactidão nos valores de S e $\bar{\omega}$, podem calcular-se pelas formulas:

$$\text{tang } \varphi = \cos (a_{\text{C}} - a_{\odot}) \text{ tang } d_{\text{C}},$$

$$\text{tang } S = \frac{\text{sen } \varphi \text{ tang } (a_{\text{C}} - a_{\odot})}{\cos (d_{\odot} + \varphi)}, \quad \text{sen } \bar{\omega} = \frac{\text{sen } (a_{\text{C}} - a_{\odot}) \cos d_{\text{C}}}{\text{sen } S}.$$

Nestas formulas, que se fundam em ser vertical, e igual á differença das parallaxes d'altura, a distancia angular verdadeira da lua ao sol, a_{C} e d_{C} , a_{\odot} e d_{\odot} , representam as ascensões rectas e as declinações verdadeiras da lua e do sol no instante da phase.

9 Se quizermos tomar H para raizes, acharemos facilmente as coordenadas respectivas pelas formulas (e) do n.º 6, suppondo nellas $c = 0$; e calculando-as, como alli se diz.

(*) A linha central passará, pouco mais ou menos: 16kil. ao sul de ODEMIRA, 11kil. ao norte de MEXCHIQUE, 20kil. ao norte de SILVES, 10kil. ao norte de LOULÉ, e 1kil. ao sul de TAVIRA; o que basta para reconhecer a sua direcção sobre a *Carta Geographica de Portugal*. E tambem 2kil. ao sul de *S. Marcos da Serra*, 1kil. ao sul de *Salir*, 2kil. ao norte de *Guerouca*, menos de 1kil. ao norte de *Sancta Catharina da Fonte do Bispo*, e mais de 1kil. ao norte de *Sancto Estevão*.

IV

Linhas limites dos eclipses

10 Em primeiro lugar, fazendo

$$\Sigma' = \text{sem} . C + \text{sem} . \odot + p = c + p,$$

darão os tempos $T + t$ em que começa e acaba no horizonte o eclipse para a terra, e as posições dos logares respectivos que vêm este eclipse, um o primeiro, outro o ultimo, as formulas:

$$(h) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{h} = \text{tang } \alpha, \frac{\Delta \cos \alpha}{\Sigma'} = \cos \varphi, t = \frac{\Sigma' \text{sen} (-\alpha \mp \varphi)}{h}, \\ \text{sen } P = \frac{\Delta + \delta t}{\Sigma'} \cos d, \cos H = -\text{tang } d \text{ tang } P, \\ \text{sen } H = \frac{ht}{\Sigma' \cos P}, \\ T' = \frac{H}{15} - \text{eq. t.} - t, \end{array} \right.$$

$$\text{long occ.} = T - T',$$

a occidente do logar onde o tempo da conjuncção em ascensão recta é T.

Devendo, em segunda approximação, repetir-se os calculos com os valores de p correspondentes aos de P dados pela primeira.

11 Depois, para tempos compreendidos entre estes, e sufficientemente approximados, calcular-se-hão as coordenadas dos logares, que nelles devem ter o principio ou o fim do eclipse no horizonte, pelas formulas:

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta + \delta t}{ht} = \cot \lambda, \quad \frac{\text{sen } \lambda \sqrt{(p+c)(p-c)}}{ht} = \text{tang } \psi, \\ \\ \frac{ht}{2p \text{ sen } \lambda \cos^2 \psi} = \text{sen } \chi, \quad x = \chi \pm \lambda, \\ \\ \text{sen } P = \cos d \text{ sen } x, \quad \cos H = - \text{tang } P \text{ tang } d, \\ \\ T' = \frac{H}{15} - \text{eq. } t. - t. \end{array} \right.$$

A phase pertencerá ao nascimento ou ao occaso do sol, segundo se tomar o signal superior ou o inferior de λ ; e pertencerá ao principio ou ao fim do eclipse, segundo for negativa ou positiva a differença $t - \frac{p \cos P \text{ sen } H}{h}$.

12 Se quizermos tomar para raizes P , e não t , acharemos facilmente as coordenadas respectivas pelas formulas seguintes (Mem. Astr. n.º 90 e Calc. das Eph. n.º 145):

$$(k) \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \alpha = \frac{\delta}{h}, \quad \cos H = - \text{tang } P \text{ tang } d, \\ \\ m = j \cos d - g \text{ sen } d \cos H, \quad n = g \text{ sen } H, \\ \\ \cos \psi = \frac{(\Delta - m) \cos \alpha + n \text{ sen } \alpha}{c}, \\ \\ t = \frac{n + c \text{ sen } (-\alpha \mp \psi)}{h}, \\ \\ T' = \frac{H}{15} - \text{eq. } t. - t. \end{array} \right.$$

Mas devem previamente determinar-se os limites, entre os quaes é comprehendido P, pelas formulas (Mem. Astr. n.º 95, e Calc. das Eph. n.º 147):

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \omega = \frac{\delta}{h}, \text{ sen } \omega = \frac{\Delta \cos \alpha \mp c}{p}, \\ \text{sen P} = \cos d \text{ sen } (\omega \mp \alpha). \end{array} \right.$$

FIM.

Mais de ces grandeurs déterminées les limites entre de plus à compo-
 sés de P, les formules (Mem. Astr. n. 98, e Calc. des Éph. n. 143):

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } \omega &= \frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta \cos \alpha \mp c}{b} \\ \text{sen } P &= \cos d \sin (\omega \mp \alpha) \\ \text{cos } P &= \frac{\cos \omega \cos \alpha \mp \sin \omega \sin \alpha \cos d}{\cos \omega \cos \alpha \mp \sin \omega \sin \alpha \cos d} \\ \text{sen } P &= \frac{\cos \omega \cos \alpha \mp \sin \omega \sin \alpha \cos d}{\cos \omega \cos \alpha \mp \sin \omega \sin \alpha \cos d} \\ \text{cos } P &= \frac{\cos \omega \cos \alpha \mp \sin \omega \sin \alpha \cos d}{\cos \omega \cos \alpha \mp \sin \omega \sin \alpha \cos d} \end{aligned} \right\} (9)$$

Il est évident que ces formules se réduisent à celles de l'art. 10, si l'on
 suppose que l'angle α est nul, et que l'angle d est égal à l'angle ω .
 On voit aussi que ces formules se réduisent à celles de l'art. 10, si l'on
 suppose que l'angle α est nul, et que l'angle d est égal à l'angle ω .

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } \omega &= \frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta \cos \alpha \mp c}{b} \\ \text{sen } P &= \cos d \sin (\omega \mp \alpha) \\ \text{cos } P &= \frac{\cos \omega \cos \alpha \mp \sin \omega \sin \alpha \cos d}{\cos \omega \cos \alpha \mp \sin \omega \sin \alpha \cos d} \end{aligned} \right\} (10)$$

