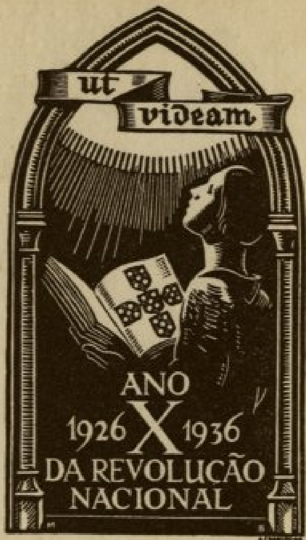
ut
videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

CURVAS PLANAS ALGEBRICAS

POR

HENRIQUE MANUEL DE FIGUEIREDO

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1888

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

APRESENTADA Á

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

AO

ILLUSTRISSIMO E EXCELLENTISSIMO SENHOR

A. DAUBRÉE

MEMBRO DO INSTITUTO DE FRANÇA,
DIRECTOR HONORARIO DA ESCOLA NACIONAL DE MINAS DE PARIS

O. e D.

Henrique Manuel de Figueiredo.

Coordenadas homogeneas

Coordenadas-pontos

1. Entre as coordenadas cartesianas d'um ponto (ξ, η) supponhamos que tem logar a relação linear

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0;$$

e designemos por x_1, x_2, x_3 tres quantidades taes que seja

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1 : \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2 : \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3$$

ou introduzindo um factor de proporcionalidade ρ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \rho(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1) \\ x_2 &= \rho(\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2) \\ x_3 &= \rho(\alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

É claro que, quando forem conhecidas duas razões entre as tres quantidades x_1, x_2, x_2, ficarão determinados ξ e η, e assim fixada a posição d'um ponto no plano.

Mas se suppozermos aquellas duas relações ligadas linearmente e, por isso, que entre x_1, x_2, x_3 existe uma equação linear homogenea da fórma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

a substituição dos valores de x_1, x_2, x_3 tirados de (1) leva a uma equação linear entre ξ e η; isto é, o ponto dependente das duas relações entre os x descreve uma linha recta.

Designemos agora por X_1, X_2, X_3 tres funcções lineares homogeneaes de x_1, x_2, x_3

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \rho\,(a'_1\ x_1 + a'_2\ x_2 + a'_3\ x_3), \\ X_2 &= \rho\,(a''_1\ x_1 + a''_2\ x_2 + a''_3\ x_3), \\ X_3 &= \rho\,(a'''_1 x_1 + a'''_2 x_2 + a'''_3 x_3). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Conhecidas duas razões entre X_1, X_2, X_3 podem, por (2), determinar-se as duas relações entre os x que introduzidos em (1) darão ξ e η: isto é, aquellas duas relações entre os X fixam o ponto (ξ, η) no plano.

Se os X estiverem ligados por uma equação linear homogenea da fórma

$$b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 = 0,$$

teremos por (2) uma equação linear em x, e (1) conduz-nos em seguida a uma outra equação tambem linear entre ξ e η: o ponto dependente das duas relações dos X descreverá, n'este caso, uma linha recta.

Concluimos, pois, que as grandezas X não são essencialmente differentes das grandezas x; a substituição de (1) em (2) dá para os X valores que só differem dos x nas constantes.

Assentamos, portanto, a seguinte

Definição.—Denominam-se *coordenadas-pontos homogeneas* tres grandezas x_1, x_2, x_3 que tem as propriedades seguintes:

1) Dadas duas razões entre ellas fica determinado o logar d'um ponto no plano.

2) O ponto dependente d'essas relações descreve uma linha recta se aquellas quantidades x_1, x_2, x_3 estão ligadas por uma equação linear homogenea.

2. As equações mais simples que se podem apresentar em coordenadas-pontos homogeneas são

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

ou em coordenadas cartesianas

$$\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1 = 0, \ \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2 = 0, \ \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3 = 0.$$

Estas tres rectas, excluido o caso de ser

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

formam um triangulo denominado *triangulo fundamental*, ao qual se referem x_1, x_2, x_3 como coordenadas d'um ponto.

3. A passagem das coordenadas cartesianas ás coordenadas-pontos homogeneas effectua-se por meio de (1); isto é, estabelecemos que estas ultimas são proporcionaes a expressões formadas linearmente em relação ás primeiras, com coefficientes arbitrarios cujo determinante está unicamente sujeito a não ser nullo.

Para passar inversamente das coordenadas-pontos homogeneas ás cartesianas resolvem-se em relação a ξ, η, ρ as equações (1) e obtem-se para fórmulas de transformação expressões lineares de denominadôr commum.

Esse denominador commum é da fórma

$$\Lambda_1 x_1 + \Lambda_2 x_2 + \Lambda_3 x_3;$$

egualado a zero representa uma recta, para cujos pontos e só para elles é $\xi = \infty$, $\eta = \infty$.

O conjuncto de pontos do plano que estão a uma distancia infinita, representados por aquella equação linear, denomina-se *recta no infinito.*

Se, em vez de x_1, x_2, x_3, tomarmos para coordenadas tres funcções lineares homogeneas dos x, $X_{i=1,2,3}$, referir-se-hão estas a um novo triangulo fundamental cujos lados são

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0.$$

4. Supponhamos agora que do ponto (ξ, η) se baixam tres perpendiculares sobre os lados do *triangulo fundamental*

$$\alpha_i \xi + \beta_i \eta + \gamma_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Chamando p_1, p_2, p_3 os respectivos comprimentos d'ellas e ω o angulo das coordenadas cartesianas teremos

$$p_1 = A_1 (\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1)$$
$$p_2 = A_2 (\alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2)$$
$$p_3 = A_3 (\alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3)$$

em que as quantidades

$$A = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega}}$$

só dependem da posição das rectas.

Em virtude de (1) vem

$$p_1 : p_2 : p_3 = A_1 x_1 : A_2 x_2 : A_3 x_3,$$

ou, sendo ρ um factor de proporcionalidade,

$$p_1 = \rho A_1 x_1, \quad p_2 = \rho A_2 x_2, \quad p_3 = \rho A_3 x_3. \qquad (3)$$

Podemos portanto dizer que:

As coordenadas homogeneas d'um ponto, taes como as definimos, são tres grandezas que tem entre si as mesmas relações que as distancias do ponto aos lados do triangulo fundamental *multiplicadas respectivamente por uma constante arbitraria, mas fixa.*

5. Para fixar os signaes das coordenadas assentamos as regras seguintes:

1) A perpendicular baixada d'um ponto sobre uma recta considera-se como mudando de signal quando o ponto atravessa a recta.

2) Cada um dos lados do *triangulo fundamental* póde successivamente suppôr-se que divide o plano em duas partes taes que o *triangulo fundamental* esteja totalmente em uma d'ellas.

Se d'um ponto baixarmos sobre um dos lados $x_i = 0$ uma perpendicular p_i esta é considerada positiva se o ponto está n'aquella das duas partes em que se encontra o triangulo fundamental, e portanto negativa se o ponto está do outro lado.

6. Vejamos como se póde estabelecer em coordenadas homogeneas a equação d'uma linha recta que passa por dois pontos fixos e exprimir as coordenadas d'um ponto movel sobre ella: problema de que adeante faremos applicação.

A recta cuja equação é

$$az_1 + bz_2 + cz_3 = 0$$

passa pelos dois pontos x e y se for ao mesmo tempo

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = 0.$$

Estas equações são homogeneas e do primeiro gráu relativamente aos coefficientes; para que sejam compativeis é, pois, necessario que tenhamos

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

que, considerando os z como variaveis, representa a recta que passa por x e por y.

Mas este determinante não só se annulla pela substituição dos x e y por z mas tambem pondo

$$z_i = x_i + \lambda y_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

que representa, portanto, as coordenadas d'um ponto de $\overline{xy}$.

Vejamos a significação de λ.

Abaixadas dos pontos x, y, z, sobre os lados $z_i = 0$ do *tri-*

angulo fundamental, as perpendiculares p_i, q_i, r_i, facilmente se vê que é

$$\left(1-\frac{\overline{xz}}{\overline{yz}}\right)r_i=p_i-\frac{\overline{xz}}{\overline{yz}}q_i.$$

Mas, por (3), designando ρ, ρ', ρ'' os respectivos factores de proporcionalidade, temos

$$p_i=\rho A_i x_i, \quad q_i=\rho' A_i y_i, \quad r_i=\rho'' A_i z_i,$$

logo

$$z_1:z_2:z_3=x_1-\frac{\rho'}{\rho}\cdot\frac{\overline{xz}}{\overline{yz}}y_1:x_2-\frac{\rho'}{\rho}\cdot\frac{\overline{xz}}{\overline{yz}}y_2:x_3-\frac{\rho'}{\rho}\cdot\frac{\overline{xz}}{\overline{yz}}y_3.$$

Comparando com a expressão anterior de z_i segue-se que é

$$\lambda=-\frac{\rho'}{\rho}\cdot\frac{\overline{xz}}{\overline{yz}}.$$

$-\frac{\rho'}{\rho}$ é uma quantidade arbitraria que se conserva invariavel, em quanto x e y permanecem os mesmos.

A grandeza λ é, portanto, proporcional á razão dos segmentos $\overline{xz}$, $\overline{yz}$ em que o ponto z divide $\overline{xy}$.

Coordenadas-linhas

7. As coordenadas homogeneas a que acabamos de referir-nos são relativas á determinação da posição d'um ponto no plano. Uma equação existente entre os elementos determinadores do ponto representa uma curva como descripta pelas posições successivas, em numero infinito, d'esse ponto.

Mas uma curva póde egualmente suppôr-se gerada pelas posições successivas, em numero infinito, d'uma recta; e n'esta hypothese, a representação analytica d'este modo de geração, a representação d'uma curva considerada como a involvente das suas tangentes, por meio d'uma equação, effectua-se tomando como variaveis os elementos determinadores da recta: as *coordenadas-linhas.*

Assim uma equação em coordenadas-pontos representa uma curva como logar geometrico dos seus pontos: uma equação em coordenadas-linhas representa uma curva como a involvente das suas tangentes.

Ás *coordenadas-pontos homogeneas* correspondem as *coordenadas-linhas homogeneas,* que caracterisamos d'um modo inteiramente analogo áquellas pela seguinte

Definição. — Denominam-se *coordenadas linhas homogeneas* tres grandezas v_1, v_2, v_3, que tem as seguintes propriedades:

1) Dadas duas razões entre ellas fica determinado o logar d'uma recta do plano.

2) A recta dependente d'estas relações move-se em volta d'um ponto, se aquellas quantidades v_1, v_2, v_3 estão ligadas por uma equação linear homogenea.

N'esta definição vemos, pois, que o ponto tem o mesmo papel que tinha a recta na definição do n.° 1, e inversamente.

Quando se consideram os pontos e em seguida as rectas como elementos constituintes das figuras, os desenvolvimentos geometricos que tem por base, um o ponto, outro a recta, apresentam uma reciprocidade completa: os theoremas de natureza descriptiva, que tem logar para as figuras pontuaes, podem ser transportados para aquellas figuras de que a linha recta é o elemento.

Esta reciprocidade de relações, que constitue o *principio da* *dualidade geometrica*, está em correlação intima com a introducção das coordenadas-linhas, em cujo emprego ella tem a sua expressão fundamental.

É assim que, demonstrados os theoremas de natureza descriptiva em coordenadas pontuaes, aquellas nos dão ao mesmo tempo os seus correlativos, em que a recta é considerada como o elemento da figura.

E é isto que constitue a principal importancia das *coordenadas-linhas*.

Curvas planas algebricas

I

8. Uma curva plana é formada por todos os pontos que satisfazem a uma condição unica, expressa por uma relação entre as suas coordenadas: a noção de logar geometrico, ligando-se intimamente com a idéa d'uma equação entre as coordenadas, identifica a classificação das curvas com a das equações que as representam.

É assim que uma curva se diz de ordem n quando ella póde ser expressa em coordenadas-pontos por uma equação do gráu n.

Quando por u designarmos uma funcção racional e inteira do gráu n, entre duas coordenadas cartesianas ou uma tal funcção homogenea entre tres coordenadas-pontos homogeneas, a curva representada por

$$u=0$$

denomina-se uma *curva plana algebrica* de ordem n.

É d'estas curvas que, no que se segue, nos vamos occupar.

9. No caso em que a funcção u é decomponivel em duas ou mais funcções racionaes, a curva de ordem n é formada então de complexos de duas ou mais curvas de ordem inferior.

Se a funcção não se póde decompôr d'aquella maneira, a curva denomina-se uma *curva simples* de ordem n.

10. Sejam $u=0$, $v=0$ duas equações homogeneas de ordem m e n em x_1, x_2, x_3. É sabido que se eliminarmos d'estas equações uma das variaveis, x_1 por exemplo, o resultado da eliminação é uma equação homogenea entre x_2 e x_3 de gráu mn.

Do que facilmente concluimos que:

Duas curvas respectivamente de ordem m *e* n *intersectam-se em* mn *pontos.*

Se, porém, entre as funcções u e v existir um factor racional commum, é claro que esse factor, egualado a zero, representa uma curva de ordem inferior, que, ao mesmo tempo, faz parte das duas curvas propostas $u=0$, $v=0$, as quaes, n'este caso, tem uma infinidade de pontos communs.

11. *A equação geral d'uma curva de ordem* n, $\mathrm{u}=0$, *compõe-se de* $\frac{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}{2}$ *termos.*

Com effeito: sejam x_1, x_2, x_3 as coordenadas homogeneas e u_h uma funcção homogenea do grau h de x_1 e x_2; ordenando a funcção segundo as potencias de x_3 teremos

$$u_0\, x_3^n + u_1\, x_3^{n-1} + u_2\, x_3^{n-2} + \ldots + u_n = 0$$

em que são formados

u_0	de	1	termo
u_1	»	2	»
u_2	»	3	»
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
u_n	»	$n+1$	» ,

Portanto o numero dos termos é

$$1+2+3+\ldots+(n+1)$$

ou

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

12. Substituindo na equação geral d'uma curva de ordem n as coordenadas d'um ponto determinado, obter-se-ha uma equação linear entre os coefficientes. Para que estes possam ser determinados é, pois, necessario conhecer tantos pontos quantos são os coefficientes. Ora como, pela divisão, um d'elles se póde sempre reduzir á unidade, segue-se que o numero dos pontos necessarios para a determinação d'uma curva é egual ao numero dos termos da equação $u=0$ menos um, ou

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}.$$

Os valores que resultam para os coefficientes tem, como é sabido, a fórma de fracções com o denominador commum. Representemol-os por

$$\frac{A}{\Delta},\ \frac{B}{\Delta},\ \frac{C}{\Delta},\ \ldots\ \frac{K}{\Delta}.$$

1) Se Δ é differente de zero, ou mesmo se, sendo Δ nullo, não o forem todos os numeradores A, B, C, ... K, facilmente se reconhece que a introducção d'aquelles valores em $u=0$ dá uma equação que representa uma curva determinada.

2) Supponhamos, porém, que Δ se annulla, e que o mesmo tem logar para *todos* os numeradores A, B, ... K: n'este caso

as equações lineares não são independentes umas das outras, e para as incognitas haverá, em vez d'um só, infinitos systemas de valores que satisfazem ás equações: isto é, haverá então um numero infinito de curvas que passam pelos $\frac{n(n+3)}{2}$ pontos dados.

Do que deixamos dicto se conclue que:

Por $\frac{n(n+3)}{2}$ *pontos póde sempre fazer-se passar uma curva de ordem* n *que, em geral, é determinada por elles: mas ha casos em que por aquelles pontos podem passar infinitas curvas de ordem* n.

13. Sejam agora $\frac{n(n+3)}{2}-1$ os pontos dados.

Para a determinação dos coefficientes da curva podem, n'este caso, obter-se sómente $\frac{n(n+3)}{2}-1$ equações lineares, e portanto fica um dos coefficientes indeterminado; isto é, ha infinitas curvas de ordem n que passam pelos pontos dados.

Se u e v forem duas d'estas curvas, a equação

$$u+\lambda v=0$$

representa, para cada valor de λ, uma curva que evidentemente passa pelos n^2 pontos de intersecção de u e v: isto é, que passa pelos $\frac{n(n+3)}{2}-1$ pontos dados que estão comprehendidos n'aquellas intersecções e por

$$n^2-\frac{n(n+3)}{2}+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

outros pontos.

Mas a equação $u+\lambda v=0$ é a equação geral das curvas de ordem n que passam por $\frac{n(n+3)}{2}-1$ pontos, pois que podemos, com effeito, determinar λ de modo que a curva passe além d'estes pontos por um outro qualquer p, o que a determina completamente.

Portanto:

Por $\frac{n(n+3)}{2}-1$ *pontos, escolhidos arbitrariamente, passa um numero infinito de curvas de ordem* n: *e todas as curvas de ordem* n *que passam pelos* $\frac{n(n+3)}{2}-1$ *pontos tem, além d'isso, ainda* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *pontos communs, intersectando-se todas em* n^2 *pontos communs.*

11. Designemos por u' e v' os valores que tem u e v no ponto p considerado no numero anterior. A curva

$$u+\lambda v=0$$

passa por p quando fôr $u'+\lambda v'=0$ ou $\lambda=-\frac{u'}{v'}$.

Cada uma das curvas que passam pelos $\frac{n(n+3)}{2}-1$ pontos ficará, pois, completamente determinada se passar por um outro ponto tal que, para elle, o valor de $\lambda=-\frac{u'}{v'}$ tambem seja determinado; e como isto só não tem logar quando p é um ponto de intersecção de u e v, segue-se que:

Se $\frac{n(n+3)}{2}$ *pontos são taes que por elles passam duas curvas* *de ordem* n, *podem por aquelles fazer-se passar infinitas curvas, que tem, umas com outras e com as dadas,* n^2 *intersecções communs.*

15. Um systema de curvas que tem n^2 pontos de intersecção communs chama-se *um fasciculo de curvas de ordem* n, e as n^2 intersecções os *pontos de base* do fasciculo.

Se u e v são duas curvas particulares do systema, a equação do fasciculo será

$$u+\lambda v=0.$$

Todas as curvas de ordem n que passam por $\frac{n(n+3)}{2}-1$ pontos dados formam (n.º 13) um fasciculo de ordem n.

As n^2 intersecções de duas curvas de ordem n são ao mesmo tempo os pontos de base d'um fasciculo de ordem n, e d'estes só podem ser escolhidos arbitrariamente (n.º 13)

$$n^2-\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

16. *Se* np *dos* n^2 *pontos de intersecção de duas curvas de ordem* n *existem sobre uma curva de ordem* p, Cp (*sendo* $p<n$), *os restantes* $n(n-p)$ *ficam sobre uma curva de ordem* $n-p$, C_{n-p}.

Façamos

$$A_n=\frac{n(n+3)}{2},\quad B_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

ter-se-ha, como facilmente se vê,

$$A_n-1-A_{n-p}=np-B_p.$$

Posto isto, tracemos por A_{n-p} dos pontos restantes uma curva de ordem $(n-p)$, C_{n-p}: esta curva fórma com a curva C_p uma outra de ordem n (Cp, C_{n-p}) que passa por $np + A_{n-p}$ pontos.

Ora este numero é egual, pelo que assentámos acima, a

$$A_n - 1 + B_p,$$

e como B_p é nullo (para $p = 1$, $p = 2$) ou positivo, teremos

$$np + A_{n-p} \geqq A_n - 1.$$

A curva de ordem n (C_p, C_{n-p}) passa, pois, por $A_n - 1$ d'aquellas intersecções e portanto (n.º 13) tambem por todas as restantes. Estas existem então ou sobre C_p ou sobre C_{n-p}: mas sobre C_p não podem existir mais de que np (n.º 10), logo as outras $n(n-p)$ estão sobre C_{n-p}.

II

17. Designando por

$$u(x_1, x_2, x_3) = u_x$$

uma funcção homogenea racional e inteira de gráu n entre as variaveis x_1, x_2, x_3 e por y_1, y_2, y_3 tres novas variaveis, representaremos por

$$\Delta_y(u_x)$$

a operação definida pela expressão

$$y_1 \frac{du}{dx_1} + y_2 \frac{du}{dx_2} + y_3 \frac{du}{dx_3};$$

e por

$$\Delta_y^2(u_x)$$

a operação

$$\Delta_y^2(u_x) = y_1^2 \frac{d^2u}{dx_1^2} + y_2^2 \frac{d^2u}{dx_2^2} + y_3^2 \frac{d^2u}{dx_3^2} +$$

$$+ 2\, y_1\, y_2 \frac{d^2u}{dx_1\, dx_2} + 2\, y_1\, y_3 \frac{d^2u}{dx_1\, dx_3} + 2\, y_2\, y_3 \frac{d^2u}{dx_2\, dx_3},$$

etc.

D'este modo ter-se-ha

$$\Delta_y(u_x) = \Sigma\, y_h \frac{du}{dx_h}, \quad \Delta_y^2(u_x) = \Sigma\, \Sigma\, y_h\, y_i \frac{d^2u}{dx_h\, dx_i},$$

$$\Delta_y^3(u_x) = \Sigma\, \Sigma\, \Sigma\, y_h\, y_i\, y_k \frac{d^3u}{dx_h\, dx_i\, dx_k},$$

....

onde devem successivamente attribuir-se a h, i, k os valores **1**, **2**, **3**.

Posto isto, é claro que será

$$\frac{d}{dx_h}\left[\Delta_y^k(u_x)\right] = \Delta_y^k\left(\frac{du}{dx_h}\right).$$

18. Se desenvolvermos pela fórmula de Taylor a expressão

$$U = u\,(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2,\ x_3 + \lambda y_3)$$

ter-se-ha, pelo que deixamos indicado,

$$\left.\begin{aligned} U = u_x + \lambda\Delta_y(u_x) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta_y{}^2(u_x) + \\ + \frac{\lambda^3}{3!}\Delta_y{}^3(u_x) + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}\Delta_y{}^n(u_x). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

Supponhamos, porém, que a expressão de que partimos é

$$U = u(\mu x_1 + \lambda y_1,\ \mu x_2 + \lambda y_2,\ \mu x_3 + \lambda y_3);$$

separando o factor μ vem

$$U = \mu^n . u\left(x_1 + \frac{\lambda}{\mu}y_1,\ x_2 + \frac{\lambda}{\mu}y_2,\ x_3 + \frac{\lambda}{\mu}y_3\right),$$

desenvolvendo por (A), vem

$$U = \mu^n u_x + \mu^{n-1}\lambda\,\Delta_y(u_x) + \frac{\mu^{n-2}\lambda^2}{2!}\Delta_y{}^2(u_x) +$$

$$+ \ldots + \frac{\mu\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\Delta_y{}^{n-1}(u_x) + \frac{\lambda^n}{n!}\Delta_y{}^n(u_x).$$

Se em vez do factor μ separarmos o factor λ virá

$$U = \lambda^n . u\left(\frac{\mu}{\lambda}x_1 + y_1,\ \frac{\mu}{\lambda}x_2 + y_2,\ \frac{\mu}{\lambda}x_3 + y_3\right),$$

d'onde

$$U = \lambda^n u_y + \mu\lambda^{n-1}\Delta_x(u_y) + \frac{\mu^2\lambda^{n-2}}{2!}\Delta_x{}^2(u_y) +$$

$$+ \ldots + \frac{\mu^{n-1}\lambda}{(n-1)!}\Delta_x{}^{n-1}(u_y) + \frac{\mu^n}{n!}\Delta_x{}^n(u_y),$$

e como os dois desenvolvimentos devem ser identicos, segue-se que em geral é

$$\frac{\Delta_y{}^i(u_x)}{i!}=\frac{\Delta_x{}^{n-i}(u_y)}{(n-i)!}.$$

Passamos agora a estudar os systemas de pontos de intersecção d'uma recta com uma curva.

19. Seja, como anteriormente, $u=0$ a equação da curva de ordem n.

Para obtermos os pontos em que uma recta, que passa pelos dois pontos x e y, encontra a curva dada, substituimos em $u=0$ a expressão

$$z_i=x_i+\lambda y_i \ (i=1,2,3)$$

que representa (n.º 6) as coordenadas de cada ponto z sobre a recta $\overline{xy}$.

Teremos assim (n.º 18) a equação

$$u_x+\lambda\Delta_y(u_x)+\frac{\lambda^2}{2!}\Delta_y(u_x)+\ldots+\frac{\lambda^n}{n!}\Delta_y{}^n(u_x)=0 \ \ldots \ (B)$$

que determina os n valores de λ que correspondem aos n pontos em que a recta encontra a curva em questão.

Supponhamos, porém, que o ponto x existe sobre a curva. É claro que, n'esse caso, será $u_x=0$ e a equação (B) tem uma raiz $\lambda=0$.

Se o ponto y tiver uma posição tal que seja $\Delta_y(u_x)=0$, a equação (B) terá então duas raizes $\lambda=0$; isto é, dois dos pontos em que a recta encontra a curva coincidem em x.

..

O ponto y é claro que estará sobre a tangente á curva no ponto x, e como, n'este caso, y satisfaz a

$$y_1 \frac{du}{dx_1} + y_2 \frac{du}{dx_2} + y_3 \frac{du}{dx_3} = 0,$$

conclue-se que:

Se for x *um ponto da curva* u = 0 *e se considerarem* y_1, y_2, y_3 *como coordenadas variaveis é*

$$\Delta_y (u_x) = y_1 \frac{du}{dx_1} + y_2 \frac{du}{dx_2} + y_3 \frac{du}{dx_3} = 0$$

a equação da tangente á curva no ponto x.

20. Vejamos agora o que é necessario para que, conservando-se x fixo, se annulle para todas as posições de y a expressão $\Delta_y (u_x)$.

É evidente que, n'este caso, o ponto x deve occupar uma posição tal que, para elle, sejam

$$\frac{du}{dx_1} = 0, \quad \frac{du}{dx_2} = 0, \quad \frac{du}{dx_3} = 0.$$

Mas então, como a equação (B) tem para cada posição da recta $\overline{xy}$ duas raizes $\lambda = 0$, esta recta encontrará, em todas as suas posições, a curva dada em dois pontos que coincidem em x; isto é, a curva passa duas vezes pelo mesmo ponto x.

Este ponto x, assim caracterisado, denomina-se um *ponto duplo* da curva.

Portanto:

Para que x *seja um* ponto duplo *da curva* u = 0, *devem ser satisfeitas simultaneamente para esse ponto as equações*

$$u=0,\quad \frac{du}{dx_1}=0,\quad \frac{du}{dx_2}=0,\quad \frac{du}{dx_3}=0. \ldots\ldots \text{(C)}$$

21. A primeira $u=0$ é, em virtude do *theorema de Euler* sobre as funcções homogeneas, uma consequencia das outras tres.

As ultimas são tres equações homogeneas entre as variaveis x_1, x_2, x_3; da eliminação d'essas variaveis resultará uma equação de condição entre as coefficientes de $u=0$

$$R=0.$$

Esta expressão R denomina-se o *discriminante da curva* u = 0.

Assim:

Para que uma curva possa ter um ponto duplo é necessario que seja nullo o seu discriminante.

22. Seja x um ponto duplo da curva, e portanto para cada posição de y

$$u_x=0,\quad \Delta_y(u_x)=0.$$

Supponhamos, porém, que y tem uma posição tal que tambem é $\Delta_y{}^2(u_x)=0$: então a equação (B) admitte tres raizes $\lambda=0$; isto é, tres dos pontos em que a recta em questão encontra a curva coincidem no mesmo ponto x: a recta $\overline{xy}$ é uma das duas tangentes á curva no ponto duplo.

Mas a condição

$$\Delta_y{}^2(u_x)=\Sigma\,\Sigma\, y_h\, y_i\, \frac{d^2u}{dx_h\, dx_i}=0\quad (h, i=1, 2, 3)$$

que, fazendo

$$\frac{d^2u}{dx_h\,dx_i} = u_{hi},$$

dá

$$\left.\begin{array}{l} u_{11}\,y_1^2 + u_{22}\,y_2^2 + u_{33}\,y_3^2 + 2u_{23}\,y_2\,y_3 + \\ \quad + 2u_{31}\,y_3\,y_1 + 2u_{12}\,y_1\,y_2 = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(D)}$$

mostra que o logar geometrico de y é uma conica. E como o ponto y póde ser qualquer dos das duas tangentes em x, segue-se que a conica representada por (D) é identica com as duas tangentes.

Do que se conclue que:

Se x *é um ponto duplo da curva* u = 0 *a equação*

$$\Sigma\,\Sigma\, y_h\, y_i \frac{d^2u}{dx_h\,dx_i} = 0 \quad (h, i = 1, 2, 3) \ldots\ldots\ldots \text{(E)}$$

representa as duas tangentes em x.

23. As duas tangentes representadas por (E) podem coincidir ou ser imaginarias. O primeiro caso corresponde a ser o primeiro membro da equação das tangentes formado de dois factores lineares eguaes.

O ponto duplo denomina-se então um *ponto de reversão;* e as duas tangentes formam a *tangente de reversão.*

É muito facil de ver que a equação da tangente de reversão é

$$\sqrt{u_{11}}\,.\,y_1 + \sqrt{u_{22}}\,.\,y_2 + \sqrt{u_{33}}\,.\,y_3 = 0.$$

No segundo caso o primeiro membro da equação (E) póde decompôr-se em dois factores lineares imaginarios, e, embora o ponto seja real, as tangentes e os ramos da curva que por elle passam, são imaginarios.

Um tal ponto duplo chama-se um *ponto isolado* ou *conjugado*.

Recapitulando temos a distinguir os seguintes casos:

Ponto duplo propriamente dicto. . duas tangentes reaes.

Ponto de reversão . . . . uma tangente de reversão.

Ponto conjugado . . . . : duas tangentes imaginarias.

24. *Uma curva simples de ordem* n, C_n, *não póde ter mais do que*

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

pontos duplos.

Supponhamos que podia ter mais: por exemplo

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1.$$

Façamos passar por estes pontos duplos uma curva de ordem $(n-2)$, C_{n-2}. Como o numero de pontos necessario para a determinação d'uma tal curva é (n.º 12)

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2}$$

ainda faltam

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1=n-3$$

que escolheremos sobre C_n.

Ora como a curva C_{n-2} tem em cada ponto duplo duas intersecções com C_n, as intersecções de C_n com C_{n-2} são

$$n-3+(n-1)(n-2)+2=n(n-2)+1,$$

o que é impossivel, porque sendo C_n uma curva simples de ordem n e C_{n-2} de ordem $(n-2)$, o numero das intersecções de C_n com C_{n-2} não póde exceder $n(n-2)$. Concluimos, pois, que é verdadeiro o theorema enunciado.

25. Uma dada curva simples de ordem n, $u=0$, é intersectada por outra de ordem m, $u'=0$, em mn pontos (n.º 10). Se $u'=0$ é dada, estes mn pontos são completamente determinados por uma equação do gráu mn. Mas se a curva $u'=0$ não é dada, torna-se necessario que seja conhecido um certo numero de intersecções para determinar as restantes.

Temos a considerar duas hypotheses.

1.º caso. Os pontos de intersecção das duas curvas não coincidem com os pontos duplos de $u=0$.

1) Seja $m<n$.

Então são evidentemente conhecidos $\frac{m(m+3)}{2}$ pontos de intersecção, que, determinando completamente $u'=0$, dão as restantes intersecções de $u'=0$ com $u=0$.

É claro que o numero dos pontos de intersecção dados pelos outros é

$$mn-\frac{m(m+3)}{2}.$$

2) Seja $m \geqq n$.

A curva representada por

$$U=u'+\mu u=0,$$

em que μ é um polynomio de gráu $(m-n)$, tem com $u=0$ as mesmas intersecções que $u'=0$; e podem ser escolhidos

$$\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}$$

coefficientes de μ de modo que se annulle um egual numero de coefficientes de $U=0$: póde-se, pois, sem mudar o systema de intersecções, substituir a curva $u'=0$ pela curva $U=0$, que depende sómente de

$$\frac{m(m+3)}{2}-\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}=mn-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

constantes.

Esta curva fica, portanto, determinada por $mn-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pontos: se forem dadas intersecções de $u=0$ e $U=0$ em numero egual a este, as restantes

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

ficam determinadas: e o mesmo relativamente a $u=0$ e $u'=0$, por isso que o systema de pontos de intersecção é identico.

Os dois numeros determinados em 1) e 2), que indicam quantos pontos de intersecção são dados pelos outros, confundem-se, como é facil verificar, para $m=n-1$ e $m=n-2$: póde, pois, dizer-se que para $m>n-3$ é sempre aquelle numero egual a

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

o qual, como se vê, é completamente independente de m.

2.° caso. A curva $u' = 0$ passa pelos $d + r$ pontos duplos (propriamente dictos e de reversão) da curva $u = 0$.

Os pontos duplos da curva contam-se, para a determinação de $u' = 0$, uma só vez, mas considerados como pontos de intersecção de $u = 0$, $u' = 0$ devem ser contados duas vezes: portanto, o numero dos pontos de intersecção determinados pelos outros deve ser diminuido do numero de pontos que coincidem com os duplos de $u = 0$; e estes são, por hypothese, conhecidos.

Do que fica dicto se conclue que:

Entre os mn *pontos de intersecção d'uma curva dada de ordem* n, $u = 0$, *com uma curva de ordem* m, $u' = 0$, *que passa pelos* $d + r$ *pontos duplos de* $u = 0$ *sem que ahi tenha pontos d'essa natureza,*

1.° $$mn - \frac{m(m+3)}{2} - d - r$$

ficam determinados pelos restantes, se é

$$m < n - 2;$$

2.° $$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$$

ficam determinados pelos restantes, se é

$$m \gtreqless n - 2.$$

Se considerarmos o caso especial $m = n$, vemos que entre os n^2 *pontos de base* d'um fasciculo de curvas de ordem n

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

ficam determinados pelos restantes e que por conseguinte são arbitrarios

$$\frac{n(n+3)}{2}-1,$$

o que já sabiamos pelo n.º 15.

26. O theorema do numero anterior suppõe que os pontos de intersecção dados não dependem de modo algum uns dos outros.

Se, por exemplo, a curva $u'=0$ se decompozer n'outras de ordem inferior, então o systema total dos pontos de intersecção decompõe-se egualmente em outros, e em cada um d'estes systemas devem sómente encontrar-se tantos pontos, entre os que são dados, quantos bastem para determinar os restantes, segundo o theorema, n'uma curva de ordem assim abaixada.

27. Se entre as equações $u=0$, $u'=0$ se elimina uma das variaveis, $\frac{x_1}{x_3}$ por exemplo, obtem-se uma equação de gráu mn, que é satisfeita por aquelles valores das incognitas que correspondem aos pontos de intersecção dados.

Se, portanto, designamos as incognitas por z, por $z_1, z_2, \ldots z_k$ os valores d'ellas correspondentes aos pontos de intersecção dados, e por $Z=0$ a equação resultante da eliminação, será

$$\frac{Z}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_k)}=0$$

a equação que dá os pontos restantes.

O grau d'esta equação no caso de ser $m \gtreqless n-2$ é, claramente,

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r.$$

Este numero p, independente de m, denomina-se o *genero da curva* $u=0$; e, attendendo ao que foi demonstrado no n.º 24, podemos definil-o:

Genero d'uma curva é o numero que indica a differença que ha entre o maximo numero de pontos duplos que essa curva póde ter e os que realmente tem.

Foi Riemann quem primeiro introduziu a noção de genero d'uma funcção algebrica, que depois foi applicada, principalmente por Clebsch, á theoria das curvas onde tem uma importancia fundamental.

III

28. Denomina-se *ponto multiplo* de ordem k d'uma curva um ponto p, pelo qual passam k ramos d'essa curva; isto é, um ponto tal que qualquer recta tirada arbitrariamente por elle encontra a curva em k pontos coincidentes em p.

As k tangentes aos ramos da curva n'esse ponto tem $k+1$ pontos communs com a curva em p, em quanto que todas as outras rectas tem sómente k pontos communs.

29. *Se na equação d'uma curva de ordem* n, $u=0$, *a mais alta potencia d'uma das variaveis,* x_3 *por exemplo, é* $(n-k)$, *o vertice do triangulo fundamental* $(x_1=0,\ x_2=0)$ *é um ponto multiplo de ordem* k: *e reciprocamente.*

Ordenando o primeiro membro da equação em relação a x_3, os coefficientes são funcções homogeneas de x_1 e x_2; e designando estas funcções do gráu h por v_h ter-se-ha

$$v_k x_3^{n-k} + v_{k+1} x_3^{n-k-1} + \ldots + v_n = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(F)}$$

Façamos passar pelo vertice $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ uma recta indeterminada

$$x_2 = \mu x_1 :$$

se eliminarmos x_2 entre esta e a equação (F) teremos as intersecções da recta com a curva.

Feito isto é claro que, designando por a uma constante, teremos

$$a_k x_1^k x_3^{n-k} + a_{k+1} x_1^{k+1} x_3^{n-k-1} + \ldots + a_n x_1^n = 0,$$

que dá os n valores de $\dfrac{x_1}{x_3}$ correspondentes ás intersecções.

Dividindo por x_3^n vem

$$a_k \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^k + a_{k+1} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{k+1} + \ldots + a_n \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = 0,$$

que admitte k raizes nullas.

No ponto $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ ha, portanto, k intersecções coincidentes da curva com a recta, e como esta é completamente arbitraria segue-se que o vertice $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ é um ponto multiplo de ordem k.

30. *Se uma curva de ordem* n *tem no vertice* $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ *do triangulo fundamental um ponto multiplo de ordem* k, *a equa-*

ção $v_k=0$ *dá o producto das* k *differentes tangentes no ponto em questão.*

N'este caso a equação da curva é da fórma (F).

A equação $v_k=0$ é homogenea e do gráu k entre x_1 e x_2, tendo só a variavel $\frac{x_2}{x_1}$: póde, pois, decompôr-se em k factores lineares, e representa, por isso, k rectas que passam por $(x_1=0, x_2=0)$. Essas rectas são tangentes á curva.

Com effeito: se $\frac{x_2}{x_1}=\frac{m}{n}$ é uma das raizes de $v_k=0$, será

$$mx_1-nx_2=0$$

uma d'aquellas rectas, e pela substituição de $x_2=\frac{m}{n}x_1$ em (F) obtem-se uma equação homogenea em x_1 e x_3 que dá os valores de $\frac{x_1}{x_3}$, correspondentes ás n intersecções de $mx_1-nx_2=0$ com a curva.

A substituição indicada annulla evidentemente o coefficiente v_k, mas um outro v_h tornar-se-ha em $b_h x_1{}^h$, onde b é uma constante.

Temos pois

$$b_{k+1}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{k+1}+b_{k+2}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{k+2}+\ldots+b_n\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n=0.$$

Esta equação tem $k+1$ raizes $\frac{x_1}{x_3}$ nullas, e portanto a recta $mx_1-nx_2=0$ encontra a curva no vertice $(x_1=0, x_2=0)$ em $k+1$ pontos coincidentes: é, pois, uma tangente n'este ponto.

Notamos os seguintes casos simples, de que faremos applicação:

1.° Sendo a equação da curva

$$ax_1 x_3^{n-1} + v_2 x_3^{n-2} + \ldots + v_n = 0,$$

o lado $x_1 = 0$ do *triangulo fundamental* é tangente a ella no vertice $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$.

2.° Se for

$$ax_1 x_2 x_3^{n-2} + v_3 x_3^{n-3} + \ldots + v_n = 0$$

o vertice $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ é um ponto duplo, e os lados $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ as tangentes n'esse ponto.

3.° Seja

$$ax_1^2 x_3^{n-2} + v_3 x_3^{n-3} + \ldots + v_n = 0;$$

$(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ é um ponto de reversão, e $x_1 = 0$ a tangente de reversão.

31. *Um ponto multiplo de ordem* k *póde dizer-se que tem a sua origem na reunião de* $\frac{k(k-1)}{2}$ *pontos duplos.*

Com effeito: se figurarmos um numero de rectas k que se intersectem todas mutuamente, obtem-se assim um systema de $\frac{k(k-1)}{2}$ pontos duplos, representados pelas intersecções d'aquellas rectas: mas se as intersecções se junctam todas no mesmo ponto, é claro que, d'este modo, se terá um ponto multiplo de ordem k.

Para as curvas o principio é o mesmo, e portanto se as linhas são ramos de curvas o numero $\frac{k(k-1)}{2}$ dá precisamente o numero das intersecções dos k ramos differentes. Se estes passam todos pelo mesmo ponto, os pontos duplos são substituidos por um ponto multiplo de ordem k.

32. *Se um ponto determinado deve ser multiplo de ordem* k *para uma curva, esta condição, para a determinação da curva, é equivalente a* $\frac{k(k+1)}{2}$ *pontos simples.*

Supponhamos que o vertice ($x_1=0$, $x_2=0$) do *triangulo fundamental* está no ponto multiplo: faltarão n'este caso, na equação da curva (n.° 29) os termos

$$v_0 x_3^n, \; v_1 x_3^{n-1}, \; \ldots \; v_{k-1} x_3^{n-k+1},$$

que tem

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

coefficientes.

Para determinar os coefficientes restantes é, pois, necessario (n.° 12) conhecer, além do ponto multiplo

$$\frac{n(n+3)}{2}-\frac{k(k+1)}{2},$$

outros pontos.

Ora este numero é egual ao dos que seria preciso conhecer se, em vez do ponto multiplo de ordem k, tivessem sido dados $\frac{k(k+1)}{2}$ pontos simples: do que concluimos ser verdadeira a proposição enunciada.

IV

33. Seja x um ponto duplo da curva $u=0$. Os quocientes differenciaes $\frac{du}{dx_i}$ são funcções homogeneas de gráu $(n-1)$; logo temos

$$(n-1)\frac{du}{dx_1}=x_1\frac{d^2u}{dx_1{}^2}+x_2\frac{d^2u}{dx_1\,dx_2}+x_3\frac{d^2u}{dx_1\,dx_3},$$

$$(n-1)\frac{du}{dx_2}=x_1\frac{d^2u}{dx_2\,dx_1}+x_2\frac{d^2u}{dx_2{}^2}+x_3\frac{d^2u}{dx_2\,dx_3},$$

$$(n-1)\frac{du}{dx_3}=x_1\frac{d^2u}{dx_3\,dx_1}+x_2\frac{d^2u}{dx_3\,dx_2}+x_3\frac{d^2u}{dx_3{}^2}.$$

Estas expressões annullam-se quando é x um ponto duplo; e se designarmos, como no n.º 22, $\frac{d^2u}{dx_h\,dx_i}$ por u_{hi}, tornam-se em

$$u_{11}\,x_1+u_{12}\,x_2+u_{13}\,x_3=0,$$

$$u_{21}\,x_1+u_{22}\,x_2+u_{23}\,x_3=0,$$

$$u_{31}\,x_1+u_{32}\,x_2+u_{33}\,x_3=0,$$

que para serem compativeis exigem

$$\mathrm{H}(u)=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Este determinante é denominado *determinante de Hesse.*

Como os quocientes differenciaes são do gráu $(n-2)$, $H(u)$ será do gráu $3(n-2)$.

Se se consideram variaveis os x_i, a equação $H(u)=0$ representa uma curva que é chamada a *hessiana* da curva originaria $u=0$.

34. Como os valores que tornam

$$\frac{du}{dx_1}=0, \quad \frac{du}{dx_2}=0, \quad \frac{du}{dx_3}=0$$

annullam o determinante $H(u)$ é claro que:

Se uma curva $u=0$ *tem pontos duplos, a sua hessiana* $H(u)=0$ *passa por elles.*

A reciproca, porém, não póde manifestamente estabelecer-se.

35. *N'um ponto duplo da curva originaria* $u=0$, *a hessiana tem egualmente um ponto duplo e as tangentes das duas curvas n'esse ponto são precisamente as mesmas.*

Tomemos para tangentes no ponto duplo de $u=0$ os dois lados do *triangulo fundamental,* $x_1=0$, $x_2=0$; a equação da curva terá então a fórma seguinte (n.º 30)

$$u=x_1 x_2 x_3^{n-2}+v_3 x_3^{n-3}+\ldots+v_n=0.$$

Formando $H(u)$ obtem-se

$$H(u)=\begin{vmatrix} \frac{d^2 v_3}{dx_1^2}x_3^{n-3}+\ldots\ldots, & x_3^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & (n-2)x_2x_3^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_3^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \frac{d^2 v_3}{dx_2^2}x_3^{n-3}+\ldots\ldots, & (n-2)x_1x_3^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (n-2)x_2x_3^{n-3}+\ldots, & (n-2)x_1x_3^{n-3}+\ldots, & (n-2)(n-3)x_1x_2x_3^{n-4}+\ldots, \end{vmatrix}.$$

Se considerarmos que $\frac{d^2 v_3}{dx_1^2}$ e $\frac{d^2 v_3}{dx_2^2}$ são da primeira dimensão relativamente a x_1 e x_2, vê-se facilmente que o determinante desenvolvido só contém os seguintes termos inferiores á segunda dimensão em x_1 e x_2

$$(n-2)^2 x_1 x_2 x_3^{3n-8}, \quad -(n-2)(n-3) x_1 x_2 x_3^{3n-8},$$
$$(n-2)^2 x_1 x_2 x_3^{3n-8},$$

cuja somma tem por coefficiente

$$2(n-2)^2 - (n-2)(n-3) = (n-1)(n-2):$$

tomando para V funcções analogas a v, ter-se-ha

$$\mathrm{H}(u) = (n-1)(n-2) x_1 x_2 x_3^{3n-8} + \mathrm{V}_3 x_3^{3n-9} + \ldots \mathrm{V}_{3n-6} = 0$$

para equação da hessiana.

Ora a ordem d'ella é $3n-6$, e como a mais alta potencia de x_3 que n'ella entra é $3n-8$ segue-se (n.º 29) que ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) é um ponto duplo da hessiana: além d'isto as tangentes n'esse ponto são dadas (n.º 30) por

$$(n-1)(n-2) x_1 x_2 = 0,$$

isto é, são as duas rectas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, como se queria demonstrar.

36. *N'um ponto de reversão da curva originaria* u $= 0$, *a hessiana tem um ponto triplo, e duas das suas tangentes coincidem com a tangente de reversão de* u $= 0$, *sendo a terceira uma tangente separada.*

Fazendo coincidir o vertice $(x_1=0, x_2=0)$ do *triangulo fundamental* com o ponto triplo e suppondo $x_1=0$ a tangente de reversão, demonstra-se, seguindo um caminho inteiramente analogo ao do numero anterior, que sendo quasi todos os termos do determinante $\mathrm{H}(u)$ de quarta dimensão e superiores em x_1 e x_2, os de terceira são unicamente

$$2(n-2)(n-3)x_1^2\frac{d^2v_3}{dx_2^2}x_3^{3n-9}, \quad -4(n-2)^2x_1^2\frac{d^2v_3}{dx_2^2}x_3^{3n-9},$$

e assim a hessiana tem por equação

$$\mathrm{H}(u)=-2(n-1)(n-2)x_1^2\frac{d^2v_3}{dx_2^2}x_3^{3n-9}+$$

$$+\mathrm{V}_4x_3^{3n-10}+\ldots+\mathrm{V}_{3n-6}=0.$$

Como a mais elevada potencia de x_3 é $(3n-9)$ e a ordem da hessiana $3n-6$, é (n.º 29) o vertice $(x_1=0, x_2=0)$ um ponto triplo.

A equação

$$x_1^2\frac{d^2v_3}{dx_2^2}=0,$$

que representa as tangentes n'aquelle ponto, mostra que duas coincidem com a tangente de reversão de $u=0$, $x_1=0$, e que a terceira é separada tendo por equação

$$\frac{d^2v_3}{dx_2^2}=0,$$

o que demonstra a proposição enunciada.

V

37. Vimos (n.º 19) que a tangente a uma curva $u=0$ n'um ponto simples é expressa, considerando y como variavel, por $\Delta_y(u_x)=0$.

Supponhamos agora que x se desloca sobre a curva, e que x e y adquirem posições taes que é, ao mesmo tempo $\Delta_y(u_x)=0$, $\Delta_y^2(u_x)=0$.

Evidentemente a recta $\overline{xy}$ é uma tangente á curva, e além d'isso tem no ponto simples x tres pontos communs com a curva.

Este ponto x chama-se um *ponto de inflexão* da curva $u=0$, e a tangente n'elle *tangente de inflexão.*

38. Se x é um ponto de inflexão as duas equações

$$\Delta_y(u_x)=0,\quad \Delta_y^2(u_x)=0$$

coexistem quando y estiver sobre a tangente de inflexão $\overline{xy}$: mas a equação $\Delta_y^2(u_x)=0$ não póde ser satisfeita por cada ponto d'essa tangente senão se $\Delta_y(u_x)$ for um factor de $\Delta_y^2(u_x)$. A conica

$$\Delta_y^2(u_x)=\Sigma\Sigma\, y_h\, y_i\, u_{h,i}=0,\quad (h, i=1, 2, 3)$$

deve, pois, decompôr-se em duas rectas, e a condição para que isto tenha logar é, como se sabe pela theoria das conicas e muito facilmente se vê, dada pela annullação do determinante

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = \mathrm{H}(u).$$

D'onde se conclue que:

Os pontos de inflexão d'uma curva u = 0 *são pontos de intersecção da hessiana com a curva originaria.*

39. Demonstremos a reciproca.

Havemos de ver adeante, quando nos referirmos ás curvas polares, que a conica $\Delta_y^2(u_x) = 0$ toca a curva $u = 0$ no ponto x; o que agora admittimos como demonstrado.

Supponhamos que x é um ponto commum á curva e á hessiana $H(u) = 0$: a annullação do determinante $H(u)$ leva a concluir (pela reciproca do theorema das conicas citado acima) que a conica $\Delta_y^2(u_x) = 0$ se decompõe em duas rectas. Ora como ella deve ser tangente a $u = 0$, uma d'essas rectas é a propria tangente e por isso terá por equação $\Delta_y(u_x) = 0$; isto é, $\Delta_y(u_x)$ é um factor de $\Delta_y^2(u_x)$.

Em virtude d'isto ter-se-ha simultaneamente

$$\Delta_y(u_x) = 0, \quad \Delta_y^2(u_x) = 0$$

e serão na equação (B) do n.º 19 tres raizes $\lambda = 0$.

A recta $\overline{xy}$ encontra a curva $u = 0$ em tres pontos coincidentes em x; logo é x um ponto de inflexão de $u = 0$.

Portanto:

Cada um dos pontos em que a hessiana H(u) = 0 *encontra a curva originaria é um ponto de inflexão d'esta.*

D'isto e do que deixámos dicto no numero anterior resulta a seguinte proposição:

Os pontos de inflexão d'uma curva u = 0 *são os pontos de intersecção d'ella com a hessiana* H(u) = 0; *e o seu numero é, em geral,* 3n(n − 2).

40. Este modo de determinar os pontos de inflexão torna-se illusorio quando a curva tem pontos em que a tangente é indeterminada, o que traz como consequencia a annullação do determinante $H(u)$; como tem logar nos pontos duplos pelos quaes já sabemos (n.º 34) que tambem passa a hessiana.

O enunciado da proposição do numero anterior deve, pois, ser modificado no caso da existencia de pontos d'aquella natureza, por isso que um certo numero de intersecções da hessiana com a curva originaria, que indicariam em geral pontos de inflexão, é absorvido por aquelles pontos.

Assim passamos a demonstrar a seguinte proposição:

41. *Cada ponto duplo d'uma curva reduz o numero* w *dos seus pontos de inflexão de seis unidades, e cada ponto de reversão redul-o de oito unidades; será, pois,*

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r \; \dots\dots\dots\dots \quad (\alpha)$$

Se a curva tem d pontos duplos e r de reversão, vimos (n.º 34) que a hessiana passa por elles.

Mas em cada ponto duplo da curva originaria a hessiana tem egualmente um ponto duplo, e além d'isso as tangentes ás duas curvas são as mesmas n'esse ponto como anteriormente vimos (n.º 35).

Um ramo da curva é, pois, encontrado no ponto duplo por um dos ramos da hessiana em dois pontos coincidentes: pelo outro n'um ponto unico: e como no ponto em questão passam dois ramos da curva originaria, segue-se que o numero dos pontos de intersecção d'ella com a hessiana, reunidos no ponto duplo, é egual a *seis*.

N'um ponto de reversão tem a hessiana um ponto triplo, e duas tangentes n'elle coincidem com a tangente de reversão (n.º 36).

Um ramo da curva originaria é encontrado, no ponto de reversão, por um dos ramos da hessiana em dois pontos coincidentes; pelo segundo n'um ponto unico; e pelo terceiro egualmente n'um só ponto: ao todo, as intersecções de *cada um* dos ramos da curva com os tres ramos da hessiana são, no ponto de reversão, quatro; mas como os ramos da curva n'esse ponto são dois, segue-se que no ponto de reversão estão reunidas *oito* intersecções da curva com a sua hessiana.

Concluimos, portanto, que o numero dos pontos de inflexão que deveria ser dado pelas intersecções da curva originaria e da hessiana tem de ser diminuido de

$$6d + 8r,$$

como se pretendia demonstrar.

VI

42. Seja x um ponto dado no plano d'uma curva de ordem n, $u = 0$; z_h $(h = 1, 2, \ldots n)$ os n pontos em que uma transversal tirada por x encontra a curva; y um outro ponto da transversal.

Formando a somma dos productos das n grandezas $\frac{yz_h}{xz_h}$ combinadas r a r exprimiremos o resultado por

$$\sum \left(\frac{yz_h}{xz_h}\right)_r.$$

Supponhamos que é

$$\Sigma\left(\frac{yz_h}{xz_h}\right)_r = \Sigma\left(\frac{xz_h - xy}{xz_h}\right)_r = 0 : \ldots\ldots\ldots \quad (G)$$

esta equação indica-nos immediatamente que sobre a transversal tirada por x existem r pontos y taes que os valores de xy que lhe correspondem satisfazem a (G). Cada um d'estes pontos y denomina-se *um centro harmonico de ordem* n *do polo* x *relativamente ás* n *intersecções da curva com a transversal.*

Se imaginarmos agora que a transversal gira em volta do ponto x, o logar geometrico dos *centros harmonicos de ordem* r denomina-se *a* (n — r) *polar do polo* x *relativamente á curva* u = 0.

43. Como x, y e z_h estão sobre a transversal podemos pôr (n.° 6)

$$z_i = x_i + \lambda y_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

em que, designando K um factor arbitrario, é $\lambda = \mathrm{K}\dfrac{\overline{xz}}{\overline{yz}}$.

A substituição de z na equação da curva dá (n.° 18)

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n u_x + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} \Delta_y(u_x) + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-2} \frac{\Delta_y{}^2(u_x)}{2!} + \\ &+ \ldots + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-r} \frac{\Delta_y{}^r(u_x)}{r!} + \ldots + \frac{\Delta_y{}^n(u_x)}{n!} = 0, \end{aligned}\right\} \ldots (H)$$

cujas n raizes λ correspondem ás intersecções da curva com a transversal.

Chamemos λ_h os valores de λ correspondentes a z_h, ter-se-ha $\frac{yz_h}{xz_h} = \frac{K}{\lambda_h}$, e portanto (G) torna-se em

$$\Sigma \left(\frac{1}{\lambda_h} \right)_r = 0.$$

Ora como os n valores de $\frac{1}{\lambda_h}$ que aqui estão são as raizes de (H) segue-se, como é sabido pela theoria das equações, que é

$$\Delta_y{}^r (u_x) = 0;$$

equação a que devem satisfazer as coordenadas de y.

Se suppozermos agora que a transversal gira em volta de x, representará aquella equação, tomando os y_i como variaveis, o logar geometrico dos *centros harmonicos* y, ou é a equação da $(n-r)$ polar do ponto x.

Além d'isso, pelo n.º 18, temos

$$\frac{\Delta_y{}^r (u_x)}{r!} = \frac{\Delta_x{}^{n-r} (u_x)}{(n-r)!}.$$

Portanto:

A $(n-r)$ *polar d'um ponto* x *relativamente a uma curva de ordem* n, $u=0$, *é uma curva de ordem* r *que tem por equação*

$$\Delta_y{}^r (u_x) = 0, \quad \text{ou} \quad \Delta_x{}^{n-r} (u_y) = 0$$

considerando y_i *como variaveis.*

Devemos observar que estas equações representam tambem a r polar do ponto y, considerados os x_i como variaveis.

44. A $(n-1)$ polar d'um ponto x é evidentemente a recta que tem por equação, para y_i variaveis,

$$\Delta_y(u_x) = y_1 \frac{du}{dx_1} + y_2 \frac{du}{dx_2} + y_3 \frac{du}{dx_3} = 0, \ldots\ldots\ (\mathrm{I})$$

e que se denomina *a recta polar.*

A equação $\Delta_y(u_x) = 0$ representa tambem, para x_i variaveis, a primeira polar do ponto y, que é uma curva de ordem $(n-1)$.

A $(n-2)$ polar do ponto x é a conica que tem por equação

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_y^2(u_x) = u_{11}y_1^2 + u_{22}y_2^2 + u_{33}y_3^2 + \\ + 2u_{23}y_2y_3 + 2u_{31}y_3y_1 + 2u_{12}y_1y_2 = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (\mathrm{J})$$

e se chama *a conica polar.*

Se o ponto x está sobre a curva primitiva a recta polar é, claramente, a tangente á curva n'esse ponto. Mas se o ponto é duplo a sua recta polar é completamente indeterminada, porque, em virtude do n.° **20**, a equação (I) é satisfeita para todos os valores de y_i.

N'esse ponto duplo as duas tangentes são evidentemente representadas pela conica polar.

45. *Se o ponto* x *está situado sobre a curva* u = 0, *todas as suas proprias polares passam por elle, tocando ahi a curva primitiva.*

A r polar de x, pelo que observámos no fim do n.° **43**, é representada por $\Delta_x^r(u_y) = 0$ para y_i variaveis.

Mas pela theoria das funcções homogeneas é sabido que

$$\Delta_x^r(u_x) = n(n-1)\ldots(n-r+1)\,u_x,$$

e como sendo x um ponto de $u=0$ esta expressão se annulla, a polar passa por x.

Vejamos agora como as polares e a curva tem em x a mesma tangente.

Attendendo á equação ultima do n.º 19 e a que é (n.º 17)

$$\frac{d}{dy_i}\left[\Delta_x{}^r(u_y)\right]=\Delta_x{}^r\frac{du}{dy_i};$$

e a que, além d'isso, se devem tomar as coordenadas do ponto de contacto em vez dos y_i, muito facilmente se vê que a equação da tangente á polar em x é, tomando z_i para coordenadas variaveis,

$$z_1\,\Delta_x{}^r\left(\frac{du}{dx_1}\right)+z_2\,\Delta_x{}^r\left(\frac{du}{dx_2}\right)+z_3\,\Delta_x{}^r\left(\frac{du}{dx_3}\right)=0:$$

esta equação, por ser, como se sabe, da theoria das funcções homogeneas

$$\Delta_x{}^r\left(\frac{du}{dx_i}\right)=(n-1)(n-2)\ldots(n-r)\frac{du}{dx_i}$$

transfórma-se em

$$z_1\frac{du}{dx_1}+z_2\frac{du}{dx_2}+z_3\frac{du}{dx_3}=0,$$

que é, (n.º 19), a tangente á curva $u=0$ no ponto x: do que se conclue a verdade do theorema enunciado.

A proposição que démos como demonstrada no n.º 39 é, como se vê, um caso particular d'esta.

46. *Se o ponto* y *está situado sobre a* (n—r) *polar de* x, *estará* x *situado sobre a* r *polar de* y *relativamente á mesma curva primitiva.*

Com effeito, tomando z_i para variaveis é

$$\text{a } (n-r) \text{ polar de } x \ldots \; \Delta_z{}^r (u_x) = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$\text{a } r \text{ polar de } y \ldots\ldots\ldots \; \Delta_z{}^{n-r} (u_y) = 0. \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Se (a) passa por y é $\Delta_y{}^r (u_x) = 0$; mas se isto tem logar é, em virtude da ultima relação do n.º 18, $\Delta_x{}^{n-r} (u_y) = 0$, o que indica que (b) passa por x.

47. *Se uma curva primitiva tem um ponto duplo, a primeira polar de qualquer ponto do plano passa pelo ponto duplo.*

É isto manifesto se attendermos a que (n.º 44) a primeira polar de y, para x_i variaveis, é $\Delta_y (u_x) = 0$, e que além d'isso no ponto duplo é $\dfrac{du}{dx_i} = 0$.

48. *Se a curva primitiva tem um ponto de reversão, a primeira polar de qualquer ponto do plano passa por elle e toca a tangente de reversão n'esse ponto.*

Supponhamos o ponto de reversão no vertice ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) e seja $x_1 = 0$ a tangente de reversão: a equação da curva será (n.º 30)

$$u = x_1{}^2 x_3{}^{n-2} + v_3 x_3{}^{n-3} + \ldots + v_n = 0.$$

Partindo d'esta expressão facilmente se fórma (n.º 44) a equação da primeira polar d'um ponto y, considerando x_i como variaveis, que será da fórma

$$2y_1 x_1 x_3{}^{n-2} + V_3 x_3{}^{n-3} + \ldots + V_n = 0,$$

que immediatamente mostra (n.° 30) que a polar passa pelo vertice ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) e toca o lado $x_1 = 0$.

49. Supponhamos que d'um ponto y se tiram tangentes á curva de ordem n, $u = 0$: se x é um dos pontos de contacto, a tangente em x é (n.° 44) a recta polar de x relativamente a $u = 0$; e como ella passa por y, passa (n.° 46) a primeira polar de y por x.

Assim: se se tirarem d'um ponto y tangentes a $u = 0$, a primeira polar do ponto y passa pelos pontos de contacto.

Reciprocamente: se x fôr uma intersecção da curva com a primeira polar d'um ponto y, sem que seja um ponto duplo ou de reversão, a tangente em x passará por y.

Se o ponto é duplo ou de reversão, a primeira polar de y ainda passa por elle (n.os 47 e 48), mas a recta polar de x é (n.° 44) indeterminada e não coincide com nenhuma das tangentes em x.

Portanto:

As intersecções da primeira polar d'um ponto y *com a curva primitiva, se esta não tem pontos duplos nem de reversão, são os pontos de contacto das tangentes tiradas por* y *á curva.*

50. Como a primeira polar d'um ponto y é uma curva de ordem $(n-1)$, as intersecções d'ella com a curva primitiva $u = 0$ serão em numero de $n(n-1)$; isto é, *a uma curva de ordem* n, *que não tem pontos duplos nem de reversão, podem tirar-se por um ponto* y, n (n — 1) *tangentes.*

Se, porém, o ponto y está sobre $u = 0$, a primeira polar de y (n.° 45) toca a curva em y, e duas das $n(n-1)$ tangentes que d'este ponto se podem tirar á curva confundem-se com a sua propria tangente. Assim: *d'um ponto* y *que está sobre uma curva de* *ordem* n, *que não tem pontos duplos nem de reversão, podem tirar-se além da tangente em* y, n (n — 1) — 2 *tangentes á curva.*

O numero de tangentes que se podem tirar, d'um ponto exterior, a uma dada curva denomina-se *a classe* da curva.

Portanto:

Uma curva de ordem n, *sem pontos duplos nem de reversão, é, em geral, de classe* n (n — 1).

51. Como acabamos de vêr a classe d'uma curva é, geralmente, definida pelo numero de intersecções d'ella com a primeira polar d'um ponto exterior.

Se a curva primitiva $u=0$ tem pontos duplos e de reversão, a primeira polar de y relativa a ella passa (n.os 47 e 48) por elles sem que as tangentes a $u=0$ passem por y (n.º 49): por isso deve-se tirar do numero $n(n-1)$, que em geral indica a classe da curva, o numero de pontos de intersecção da curva e da primeira polar que ha nos pontos duplos e de reversão.

Ora é claro que n'um ponto duplo estão reunidas *duas* d'estas intersecções, e n'um ponto de reversão, como a tangente de reversão é (n.º 48) ao mesmo tempo tangente da polar, estão reunidas *tres*.

Chamando k a classe da curva de ordem n, $u=0$; d o numero de pontos duplos propriamente dictos d'esta, e r o dos pontos de reversão, ter-se-ha

$$k=n(n-1)-2d-3r \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha')$$

52. Já observámos anteriormente que uma curva póde ser considerada não só como o logar geometrico d'um ponto movel, mas tambem como a involvente d'uma recta variavel.

O primeiro modo de geração das figuras geometricas planas tem a sua expressão analytica no emprego das coordenadas-pontos; ao segundo correspondem as coordenadas-linhas.

Definida a curva em coordenadas-pontos, uma tangente é a recta que une dois pontos infinitamente proximos da curva.

Definida em coordenadas-linhas, cada um dos seus pontos, isto é, a curva como figura pontual, resulta das intersecções successivas de duas tangentes infinitamente proximas.

A um ponto da curva corresponde dualisticamente a tangente: á ordem corresponde a classe.

Assim: uma equação de gráu n, em que as variaveis se referem não a coordenadas-pontos mas a coordenadas-linhas, representa uma curva (considerada como a involvente d'uma recta) de classe n.

N'este caso considerações analogas ás que deixámos feitas em coordenadas pontos mostrar-nos-hiam a correspondencia dualistica dos seguintes elementos:

Coordenadas-pontos	Coordenadas-linhas
Ponto duplo com duas tangentes reaes.	*Tangente dupla com dois pontos de contacto reaes.*
Ponto de reversão.	*Tangente de inflexão.*
Ponto duplo com duas tangentes imaginarias (ponto isolado).	*Tangente dupla com dois pontos de contacto imaginarios (tangente isolada).*
Ponto de inflexão.	*Tangente de reversão.*

53. Em virtude do que deixâmos apontado, das relações (α) do n.º 41 e (α') do n.º 51, deduzem-se outras duas fórmulas: para isso temos a substituir n'ellas

w	por	r
r	»	w
n	»	k
k	»	n
d	»	t

designando t o numero das *tangentes duplas;* isto é, das tangentes que tem dois pontos de contacto differentes.

Pela transformação dualistica de (α) e (α') temos, pois, as quatro fórmulas seguintes:

$$\left.\begin{aligned} w &= 3n(n-2) - 6d - 8r \\ k &= n(n-1) - 2d - 3r \\ r &= 3k(k-1) - 6t - 8w \\ n &= k(k-1) - 2t - 3w \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(L)}$$

Esta serie de relações, a que satisfazem os numeros caracteristicos d'uma curva, são conhecidas com o nome de *fórmulas de Plücker.*

As quatro relações não são independentes umas das outras, pois tanto das duas primeiras como das duas ultimas resulta a relação

$$3(k-n) = w - r,$$

que não póde ser modificada, como é claro, por considerações dualisticas: portanto, dos seis elementos que entram em (L), tres são determinados pelos outros tres.

Assim, por exemplo, serão

$$w = 3n(n-2),$$

$$k = n(n-1),$$

$$t = \frac{n(n-2)(n^2-9)}{2},$$

para uma curva de ordem n, que não tem pontos duplos nem pontos de reversão.

Curvas unicursaes planas

54. O *genero* das curvas definido no n.° 27 pela expressão

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$$

tem na Geometria das curvas algebricas e na sua applicação ás questões de Analyse como, por exemplo, na theoria das funcções abelianas, uma importancia de tal ordem que torna necessario estudar as curvas segundo o *genero*, dividindo-as debaixo d'esse ponto de vista em especies essencialmente distinctas.

Assim em vez de classificar as curvas pela sua *ordem*, fazendo em seguida subdivisões relativas ao maior ou ao menor numero de pontos duplos e de reversão que ellas tem, podem dividir-se em *generos*, segundo o numero p que lhes pertence, e então as diversas ordens apparecem como subdivisões: d'esta maneira encontram-se todas as ordens em todos os generos, desde $p = 0$ até $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, sendo n'este ultimo que está comprehendida a curva mais geral de ordem n, isto é, aquella que não é sujeita á annullação do seu discriminante.

Clebsch denomina do *primeiro genero* as curvas para as quaes é $p=0$, do *segundo* aquellas em que é $p=1$; etc.

No que se segue vamos occupar-nos das curvas de genero $p=0$.

55. As curvas algebricas de genero $p=0$, isto é, aquellas que tem o seu maximo numero de pontos duplos, são geralmente denominadas *curvas unicursaes:* os mathematicos allemães chamam-lhes, com todo o fundamento como veremos, *curvas racionaes.*

56. Se entre os pontos duplos d'uma curva unicursal de ordem n não ha pontos de reversão, o numero dos pontos de inflexão, a classe e o numero das tangentes duplas são (n.º 53) respectivamente expressos por

$$w=3(n-2),$$

$$k=2(n-1),$$

$$t=2(n-2)(n-3).$$

Mas se entre os $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pontos duplos ha r de reversão, as grandezas w, k, t são dadas, como facilmente se vê (n.º 53) por

$$w=3(n-2)-2r,$$

$$k=2(n-1)-r,$$

$$t=2(n-3)(n-2-r)+\frac{r(r-1)}{2}.$$

Como w nunca póde ser negativo, da expressão

$$w = 3(n-2) - 2r$$

conclue-se que:

O maximo numero de pontos de reversão que póde ter uma curva unicursal de ordem n *é* $\frac{3}{2}(\mathrm{n}-2)$.

E por isso:

O numero minimo de pontos duplos propriamente dictos que póde ter uma curva unicursal de ordem n *é* $\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-6)}{2} + 4$.

57. As curvas unicursaes tem a propriedade fundamental seguinte:

As coordenadas d'um ponto qualquer da curva podem ser expressas sob a fórma de funcções algebricas racionaes d'um parametro variavel.

Façamos passar pelos $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pontos duplos e por $(2n-3)$, outros pontos d'uma curva unicursal de ordem n, um fasciculo de curvas de ordem $n-1$

$$u + \lambda v = 0.$$

Por isso que são dados

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2n - 3 = \frac{n^2+n-4}{2}$$

pontos, o fasciculo de curvas de ordem $(n-1)$ é completamente determinado.

Além d'isso estas curvas de ordem $(n-1)$ encontram a unicursal nos pontos mencionados e ainda *n'um outro* ponto variavel. Com effeito as intersecções das curvas com a unicursal são: $2 \times \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nos pontos duplos; $(2n-3)$ nos outros pontos dados da unicursal: isto é, são

$$(n-1)(n-2)+2n-3=n(n-1)-1,$$

o que prova o que deixamos dicto, pois as intersecções da unicursal com cada uma d'aquellas curvas são $n(n-1)$.

Obteriamos identico resultado, como facilmente se vê, se empregassemos um fasciculo de ordem $(n-2)$, fazendo-o passar pelos pontos duplos e por $(n-3)$, outros pontos da unicursal.

Suppondo, pois, que a unicursal e o fasciculo estão expressos em coordenadas cartesianas, se eliminarmos uma das variaveis entre a equação do fasciculo e a da curva dada, obtemos uma equação em que, pelo que temos visto, todas as raizes são conhecidas com excepção d'uma. Teremos assim uma equação da fórma

$$\varphi(x) \cdot \psi(x)=0,$$

em que $\varphi(x)$ representa o producto dos factores lineares correspondentes ás raizes conhecidas e o outro $\psi(x)$ é do primeiro gráu.

Os coefficientes de $\psi(x)=0$ são funcções racionaes dos coefficientes de $U=0$ e de $u+\lambda v=0$, e será, por isso,

$$x=f_1(\lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

uma funcção racional de λ.

A outra variavel é tambem, evidentemente, uma funcção racional de λ

$$y=f_2(\lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta')$$

Suppondo que o ponto variavel coincide successivamente com todos os da curva unicursal, as suas coordenadas estão, para todos esses pontos, ligados por (3) e (3'); portanto as coordenadas de todos os pontos da unicursal podem ser expressas em funcção racional d'um parametro λ: como se pretendia demonstrar.

58. A reciproca da proposição anterior é tambem verdadeira.

Supponhamos dada uma curva de ordem n, cujas coordenadas são funcções racionaes d'um parametro λ: isto é,

$$x = \frac{f(\lambda)}{\psi(\lambda)}, \quad y = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},$$

em que f, φ, ψ são funcções inteiras de gráu n em λ.

Para um ponto duplo tem λ os valores λ' e $\lambda'' \gtrless \lambda'$, em quanto que x e y se conservam invariaveis. Devem, pois, λ' e λ'' satisfazer ás equações

$$\frac{1}{\lambda' - \lambda''}[f(\lambda')\psi(\lambda'') - f(\lambda'')\psi(\lambda')] = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda' - \lambda''}[\varphi(\lambda')\psi(\lambda'') - \varphi(\lambda'')\psi(\lambda')] = 0.$$

Se eliminarmos entre estas equações λ'' que, assim como λ', entra n'ellas no gráu $(n-1)$, obtem-se uma equação $G(\lambda') = 0$, que conterá λ' no gráu $(n-1)^2$. Excluindo $(n-1)$ valores que satisfazem a $\psi(\lambda) = 0$ as equações propostas serão satisfeitas pelos $(n-1)(n-2)$ valores restantes que satisfazem $G(\lambda') = 0$.

Mas se em vez de λ'' tivessemos eliminado λ' ter-se-hia obtido uma equação $G(\lambda'') = 0$, que era a mesma equação para λ'' que tinha anteriormente sido para λ'; isto é, as $(n-1)(n-2)$ raizes de $G(\lambda') = 0$ são ao mesmo tempo raizes de $G(\lambda'') = 0$, ou os valores de λ' e λ'' dois a dois dão

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

pontos duplos para a curva dada de ordem n.

Portanto:

Uma curva de ordem n, *cujas coordenadas são funcções racionaes d'um parametro, tem* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *pontos duplos.*

A proposição do numero anterior e a que acabamos de vêr estabelecem em toda a sua generalidade a propriedade caracteristica das curvas de genero $p = 0$.

59. N'uma curva unicursal, em que as coordenadas de qualquer dos seus pontos se podem exprimir como funcções racionaes d'um parametro λ, corresponde a cada valor de λ um só ponto da curva, mas nem sempre a cada ponto da curva corresponde só um valor de λ.

Mas:

Se a cada ponto d'uma curva unicursal correspondem n *valores de* λ, *póde sempre substituir-se por* λ *um novo parametro tal que os seus valores e os pontos da curva se correspondam d'um modo uniforme.*

A demonstração d'esta proposição, em que não insistimos, encontra-se feita e exemplificada por Lüroth nos *Math. Annalen. Band* IX, *pag. 163.*

60. Para exprimir as coordenadas da unicursal em funcção do parametro variavel seguimos o caminho da demonstração do n.º 57.

Sendo dada a equação da curva de ordem n, $U = 0$, em coordenadas cartesianas, determinamos os systemas de valores que satisfazem simultaneamente a

$$U = 0, \quad \frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0,$$

o que determina os pontos duplos de $U = 0$, pois corresponde em coordenadas cartesianas ás condições do n.º 20.

Com estes pontos, e além d'isso com $(2n - 3)$ outros tomados arbitrariamente sobre $U = 0$, determinamos um fasciculo de curvas de ordem $(n - 1)$

$$u + \lambda v = M(x, y) = 0$$

que passa pelos $\dfrac{n^2 + n - 4}{2}$ pontos.

A eliminação entre $U = 0$ e $M = 0$, pelo methodo de Liouville, dá-nos em seguida, d'uma maneira simples e elegante, as expressões das coordenadas da unicursal em funcção do parametro variavel.

A equação final em x, resultante da eliminação de y entre as duas equações, é

$$M(x, y_1) M(x, y_2) \ldots M(x, y_n) = 0,$$

em que $y_1, y_2, \ldots y_n$ são as raizes de $U(x, y) = 0$.

No polynomio U agrupemos os termos de gráu n, os de gráu $(n - 1)$, etc.: então a equação $U = 0$ poderá escrever-se

$$x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

que fazendo $\frac{y}{x} = \eta$ se torna em

$$x^n f(\eta) + x^{n-1} f_1(\eta) + x^{n-2} f_2(\eta) + \ldots = 0, \ldots . (M)$$

em que $f_1, f_2, f_3, \ldots$ são quando muito respectivamente do gráu $n, (n-1), (n-2), \ldots$

Os n valores de η dados por (M) reduzem-se para $x = \infty$ ás n raizes da equação

$$f(\alpha) = 0.$$

Assim, em geral, uma raiz η da equação (M) poderá ser posta sob a fórma

$$\eta = \alpha + \varepsilon, \ldots\ldots\ldots\ldots . (N)$$

em que ε se torna infinitamente pequeno quando fôr x infinitamente grande.

Supponhamos que $f(\alpha) = 0$ é satisfeita por n raizes distinctas: por (M) e (N) ter-se-ha

$$x^n f(\alpha + \varepsilon) + x^{n-1} f_1(\alpha + \varepsilon) + x^{n-2} f_2(\alpha + \varepsilon) + \ldots = 0;$$

desenvolvendo e attendendo a que é $f(\alpha) = 0$ teremos

$$(\varepsilon x) f'(\alpha) + f_1(\alpha) + \frac{1}{x}\left[\frac{(\varepsilon x)^2}{2!} f''(\alpha) + (\varepsilon x) f'_1(\alpha) + f_2(\alpha)\right] + \ldots = 0.$$

Fazendo n'esta equação $x = \infty$ e designando por α' o limite de εx virá

$$\alpha' f'(\alpha) + f_1(\alpha) = 0,$$

d'onde

$$\alpha' = -\frac{f_1(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

É claro que podemos então pôr

$$\varepsilon x = \alpha + \varepsilon'$$

ou

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{x} + \frac{\varepsilon'}{x},$$

em que ε' se annulla para $x = \infty$.

A expressão (N) converte-se, pois, em

$$\eta = \alpha + \frac{\alpha}{x} + \frac{\varepsilon'}{x},$$

d'onde

$$y = \alpha x + \alpha' + \varepsilon'.$$

Poderiamos continuar, d'um modo analogo, na determinação dos outros termos que constituem o desenvolvimento de y segundo as potencias decrescentes de x; mas para o nosso caso é isso desnecessario, e limitamo'-nos aos dois primeiros termos mais elevados: assim temos

$$y = \alpha x - \frac{f_1(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Chamando $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ ás raizes da equação

$$f(\alpha) = 0$$

teremos os valores approximados das n raizes de $U = 0$,

$$y_1 = \alpha_1 x - \frac{f_1(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}, \quad y_2 = \alpha_2 x - \frac{f_1(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)}, \quad \ldots \quad y_n = \alpha_n - \frac{f_1(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}.$$

Exprimindo M d'um modo egual áquelle como exprimimos U anteriormente, teremos

$$M(x, y) = x^{n-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} F_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots;$$

introduzindo os y_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ anteriores temos

$$M(x, y_1) = x^{n-1} F\left(\alpha_1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{f_1(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\right) +$$

$$+ x^{n-2} F_1\left(\alpha_1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{f_1(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\right) + \ldots = x^{n-1} F(\alpha_1) -$$

$$- x^{n-2} \frac{f_1(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \cdot F'(\alpha_1) + \ldots + x^{n-2} F_1(\alpha_1) - \ldots =$$

$$= x^{n-1} F(\alpha_1) - x^{n-2} \frac{F'(\alpha_1) \cdot f_1(\alpha_1) - F_1(\alpha_1) \cdot f'(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} + \ldots;$$

e

$$M(x, y_2) = x^{n-1} F(\alpha_2) - x^{n-2} \frac{F'(\alpha_2) \cdot f_1(\alpha_2) - F_1(\alpha_2)\ f'(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)} + \ldots$$

. . . .

Multipliquemos membro a membro e dividamos por

$$F(\alpha_1) \cdot F(\alpha_2) \cdot F(\alpha_3) \ldots F(\alpha_n),$$

virá

$$\left.\begin{aligned} &\frac{M(x, y_1) \cdot M(x, y_2) \ldots M(x, y_n)}{F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_n)} = \\ &= x^{n(n-1)} - x^{n(n-1)-1} \sum_{1}^{n} k\, \Theta(\alpha_k) + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (O)$$

que teremos de egualar a zero, e em que é

$$\Theta(x) = \frac{F'(x) f_1(x) - F_1(x) f'(x)}{f'(x) F(x)}.$$

Relativamente á equação final em y, se observarmos que as expressões U e M podem escrever-se

$$U(x, y) = y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = y^{n-1} \varphi_1\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots,$$

$$M(x, y) = y^{n-1} \psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{n-2} \psi_1\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots,$$

e que são

$$\varphi(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \varphi_1(x) = x^{n-1} f_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\psi(x) = x^{n-1} F\left(\frac{1}{x}\right), \quad \psi_1(x) = x^{n-2} F_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

é claro que a obteremos mudando no resultado anterior f, f_1, F, F_1 em φ, φ_1, ψ, ψ_1, e as raizes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ pelas da equação $\varphi = 0$, que são as suas inversas. Designando por ξ, ξ_1 os coefficientes de x^n e x^{n-1} em f e f_1, ter-se-ha

$$y^{n(n-1)} - y^{n(n-1)-1} \left[(n-1)\frac{\xi_1}{\xi} + \sum_1^n k\, \alpha_k \Theta(\alpha_k)\right] = 0 \ldots \text{(P)}$$

para equação final em y.

Ora como sabemos (n.º 57) são conhecidas todas as intersecções das duas curvas com excepção d'*uma* que é variavel.

As intersecções conhecidas correspondem:

1.° Aos $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pontos duplos da unicursal $U=0$: designamos as suas coordenadas por

$$\left.\begin{array}{l} x=a_i \\ y=b_i \end{array}\right\} \quad \left[i=1,2,\ldots\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right].$$

2.° Aos $(2n-3)$ pontos simples dados sobre a unicursal e cujas coordenadas chamamos

$$\left.\begin{array}{l} x=p_h \\ y=q_h \end{array}\right\} \quad [h=1,2,\ldots(2n-3)].$$

E como as coordenadas das intersecções são precisamente as raizes das expressões (O) e (P) segue-se, por um theorema conhecido da theoria das equações, e attendendo á multiplicidade das soluções nos pontos duplos, que é

$$x+2\sum a_i+\sum p_h=\sum_1^n{}^k\,\Theta(\alpha_k),$$

$$y+2\sum b_i+\sum q_h=(n-1)\frac{\xi_1}{\xi}+\sum_1^n{}^k\,\alpha_k\,\Theta(\alpha_k).$$

Estas expressões dão as coordenadas x e y de qualquer ponto da unicursal em funcção do parametro variavel; e attendendo a que as quantidades α que entram n'ellas são independentes de λ, e que $\Theta(x)$ contém esta grandeza no primeiro gráu em F e F_1, concluimos facilmente que x e y são funcções racionaes de λ (o que já sabiamos que devia ter logar), representadas por fracções de denominador commum cujos termos são polynomios de gráu n em λ.

61. A questão de que acabamos de occupar-nos tem no Calculo integral uma applicação notavel.

A resolução do integral

$$\int f(x, y)\, dx,$$

em que f designa uma expressão racional da variavel x e da funcção algebrica y definida por

$$F(x, y) = 0,$$

póde ser reduzida á integração de funcções racionaes, todas as vezes que se possam estabelecer as relações

$$x = f_1(\lambda), \quad y = f_2(\lambda),$$

em que f_1 e f_2 designem funcções racionaes de λ: com effeito, o integral

$$\int f(x, y)\, dx$$

reduz-se n'esse caso, por substituição, ao integral d'uma funcção racional em λ

$$\int f[f_1(\lambda), f_2(\lambda)]\, f'_1(\lambda)\, d\lambda.$$

É claro pois, pelo que temos visto, que a theoria das curvas unicursaes consegue resolver a questão na sua generalidade determinando d'um modo uniforme quaes são as condições em que sendo dada aquella equação que define y

$$F(x, y) = 0,$$

se podem chegar a estabelecer as expressões racionaes de x e de y n'uma outra variavel λ

$$x = f_1(\lambda), \quad y = f_2(\lambda).$$

FIM.

INDICE

5

1888

M. DE FIGUEIREDO - DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

MATHEMATICA