

# BIOFÍSICA MÉDICA

J. J. PEDROSO DE LIMA  
MARIA FILOMENA BOTELHO  
(COORDENAÇÃO)

# EXERCÍCIOS PRÁTICOS

3ª EDIÇÃO

IMPRESA DA  
UNIVERSIDADE  
DE COIMBRA

COIMBRA  
UNIVERSITY  
PRESS

O livro de *Biofísica Médica. Exercícios práticos* pretende ser um auxiliar para o estudo desta matéria. Constitui a compilação dos exercícios desenvolvidos pelo conjunto de assistentes desde que a Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra decidiu apostar na formação específica em Biofísica. Os temas para os quais se fizeram os problemas referem-se a 3 capítulos: transporte de massa através de membranas, fluidos e radioatividade. Todos os problemas desenvolvidos visam aplicações biomédicas, e auxiliam a compreensão prática dos mesmos temas apresentados no livro *Biofísica Médica*, da autoria de João José Pedroso de Lima, também editado pela Imprensa da Universidade de Coimbra e que representa o livro recomendado para a disciplina. Aliás, as explicações teóricas são mesmo remetidas para esse livro. Em todos os capítulos existem problemas resolvidos e comentados, outros problemas para os quais se apresentam soluções e ainda outro tipo que são problemas propostos, mas sem solução apresentada. Esperamos que este livro seja um bom auxiliar para o estudo da Biofísica.



E N S I N O



**EDIÇÃO**

Imprensa da Universidade de Coimbra  
Email: imprensa@uc.pt  
URL: [http://www.uc.pt/imprensa\\_uc](http://www.uc.pt/imprensa_uc)  
Vendas online: <http://livrariadaimprensa.uc.pt>

**COORDENAÇÃO EDITORIAL**

Imprensa da Universidade de Coimbra

**CONCEÇÃO GRÁFICA**

Imprensa da Universidade de Coimbra

**INFOGRAFIA DA CAPA**

Mickael Silva

**EXECUÇÃO GRÁFICA**

KDP - KindleDirectPublishing

**ISBN**

978-989-26-1743-5

**ISBN DIGITAL**

978-989-26-1744-2

**DOI**

<http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-1744-2>

**1.ª EDIÇÃO • 2010**

**2.ª EDIÇÃO • 2014**

**3.ª EDIÇÃO • 2019**

# BIOFÍSICA MÉDICA

J. J. PEDROSO DE LIMA  
MARIA FILOMENA BOTELHO  
(COORDENAÇÃO)

# EXERCÍCIOS PRÁTICOS

3ª EDIÇÃO

IMPRESA DA  
UNIVERSIDADE  
DE COIMBRA  
COIMBRA  
UNIVERSITY  
PRESS

Coordenação

João José Pedroso de Lima

Maria Filomena Botelho

Autores

Ana Margarida Abrantes

Ana Salomé Pires

Francisco Caramelo

Helena Cristina Vasconcelos

João Casalta Lopes

Maria Filomena Botelho

Maria João Ribeiro

Miguel Castelo Branco

Miguel Couceiro

Nuno Ferreira

Rafael Silva Teixeira

# Í N D I C E

Prefácio.....	11
---------------	----

## Capítulo 1 – Membranas

1. Introdução.....	15
1.1. Primeira lei de Fick da difusão.....	16
1.1.1. Exercícios resolvidos.....	18
1.1.2. Exercícios propostos.....	22
1.2. Transporte de soluto por difusão através de membranas .....	24
1.2.1. Membranas homogêneas.....	24
1.2.1.1. Exercícios resolvidos .....	26
1.2.1.2. Exercícios propostos.....	30
1.2.2. Membranas porosas.....	36
1.2.2.1. Exercícios resolvidos .....	38
1.2.2.2. Exercícios propostos.....	43
1.2.3. Sistemas de membranas .....	48
1.2.3.1. Membranas mistas.....	48
1.2.3.2. Membranas homogêneas atravessadas por poros .....	50
1.2.3.3. Exercícios resolvidos .....	51
1.2.3.4. Exercícios propostos.....	56
1.3. Transporte de soluto por arrastamento.....	61
1.3.1. Exercícios resolvidos.....	63
1.3.2. Exercícios propostos.....	68
1.4. Correntes de solvente devidas a diferenças de pressão .....	72
1.4.1. Aplicações: espaço pleural.....	75
1.4.2. Exercícios resolvidos.....	79
1.4.3. Exercícios propostos.....	83
1.5. Membrana de Donnan .....	88
1.5.1. Membrana de Donnan para iões bivalentes .....	90
1.5.1.1. Ião proteinato monovalente.....	91
1.5.1.2. Ião proteinato de valência par.....	93

1.5.1.3. Ião proteínato de valência ímpar.....	94
1.5.2. Exercícios resolvidos.....	95
1.5.3. Exercícios propostos.....	99

## Capítulo 2 – Biofísica dos Fluidos

2.1. Fluidos em repouso.....	105
2.1.1. Princípio fundamental da hidrostática.....	106
2.1.1.1. Pressão atmosférica.....	109
2.1.2. Princípio de Pascal.....	110
2.1.3. Princípio de Arquimedes.....	113
2.2. Fluidos em movimento.....	115
2.2.1. Movimento estacionário e linhas de corrente.....	116
2.2.2. Equação da continuidade.....	118
2.2.3. Lei de Bernoulli.....	122
2.2.3.1. Exercícios resolvidos.....	128
2.2.3.2. Exercícios propostos.....	134
2.2.4. Fluidos reais e fórmula de Poiseuille.....	138
2.2.4.1. Resistência hidrodinâmica e associações.....	145
2.2.4.2. Regime turbulento e número de Reynolds.....	150
2.2.4.3. Exercícios resolvidos.....	151
2.2.4.4. Exercícios propostos.....	156
2.3. Tensão superficial.....	159
2.3.1. Fórmula de Laplace.....	161
2.3.1.1. Embolias capilares.....	164
2.3.1.2. Capilaridade em tubos e lei de Jurin.....	166
2.3.2. Exercícios resolvidos.....	169
2.3.3. Exercícios propostos.....	172



### Capítulo 3 – Decaimento Radioactivo

3. Introdução.....	177
3.1. Tipos de transformações radioactivas .....	178
3.1.1. Exercícios resolvidos.....	179
3.1.2. Exercícios propostos.....	181
3.2. Lei do decaimento radioactivo .....	185
3.2.1. Exercícios resolvidos.....	186
3.2.2. Exercícios propostos.....	189
3.3. Doses em órgãos devido a decaimento radioactivo .....	192
3.3.1. Exercícios resolvidos.....	193
3.3.2. Exercícios propostos.....	196
3.4. Modelos de agressão celular.....	200
3.4.1. Modelo de um só alvo e um só toque .....	201
3.4.1.1. Exercícios resolvidos .....	203
3.4.1.2. Exercícios propostos.....	203
3.4.2. Modelo de vários alvos e um só toque .....	204
3.4.2.1. Exercícios resolvidos .....	205
3.4.2.2. Exercícios propostos.....	207
3.4.3. Modelo misto.....	207
3.4.3.1. Exercícios resolvidos .....	208
3.4.3.2. Exercícios propostos.....	209
Capítulo 4 – Problemas em formato de teste.....	211
Capítulo 5 – Problemas de integração da matéria.....	245
Capítulo 6 – Soluções.....	277
Anexo I.....	303



## H O M E N A G E M

O Prof. Pedroso de Lima, falecido a 2 de outubro de 2016, foi um Homem excepcional a vários níveis.

Foi um Investigador brilhante, criativo, professor exigente, conhecedor, que estimulava a crítica, sabia ouvir e reconhecia quando não tinha razão, se convenientemente provado. “Não acredite em tudo o que vem nos livros”, dizia-me recorrentemente quando discutíamos uma matéria. A este respeito lembro, com frequência, discussões sobre um qualquer assunto, onde me dizia que tínhamos de estar no topo do conhecimento e que acima daquele nível era o desconhecido.

Foi um pedagogo distinto, que se distinguiu dos seus colegas. Quem não se lembra das suas aulas de Biofísica? Segundas-feiras, às 8h da manhã! O anfiteatro cheio! Na realidade, as suas aulas eram o primeiro contacto do aluno de medicina com o ensino superior. E que contacto avassalador elas eram! Novas abordagens, novos conhecimentos. Era o abrir de novos horizontes. Gerações de alunos ainda se lembram da 1ª aula. Gerações de alunos foram marcados pela sua abordagem científica à medicina.

Foi capaz de fazer amigos. E, de facto, teve muitos amigos, que o seguiam incondicionalmente. Esta sua particular característica leva-nos a outra vertente da sua personalidade. Foi capaz de ter muitos seguidores, ou seja, fez escola, numa época de cultura do individualismo, que se repercute a todos os níveis, inclusivamente na ciência.

Foi um visionário. Deixou património científico e técnico de referência em Portugal. Pertenceu ao grupo de físicos e de médicos que iniciou a Medicina Nuclear no nosso País. Esteve na génese do IBILI e, sem ele, o ICNAS, Instituto de Ciências Nucleares Aplicadas à Saúde, não seria hoje uma realidade.

Por fim, mas de longe e não menos importante, criou uma área de ensino e de investigação em Portugal. A Biofísica Médica. Ele próprio dedica o seu livro, utilizado em inúmeras Universidades como livro de ensino, à Faculdade de Medicina, que reconheceu há muitos anos a sua importância. Na verdade, a Biofísica no contexto da Medicina tem tudo a ver com a paixão que nutria pelo conhecimento e pela abordagem científica da biologia. A Biofísica, a física das funções

biológicas, teve em si alguém que construiu novos conhecimentos, tendo por base a sua investigação e formou novos profissionais, capazes de levar adiante seus estudos e ensinamentos, tornando duradoura a sua memória. Deste modo, podemos dizer que o Professor Pedroso de Lima continua vivo, já que não será esquecido, pois “os verdadeiros mortos são aqueles que nos são indiferentes”.

Aos discípulos e aos alunos do Professor Pedroso de Lima, desejo também que continuem a obra por ele iniciada e que a levem a novos e mais altos patamares científicos. Assim ele se fará presente nas gerações futuras.

Pelo exemplo que foi, por tudo o que fez e nos deixou, temos uma dívida de gratidão para com o Prof. Pedroso de Lima.

Acerca de gratidão, São Tomás de Aquino, na Suma Teológica explica que a gratidão se compõe em diversos graus. O primeiro grau traduz o reconhecimento de um benefício recebido, a obtenção de uma graça, o aceitar um favor. O segundo grau consiste em louvar e em dar graças àquele que nos deu algo gratuito, em troca de nada. O terceiro grau é o da retribuição, de acordo com as possibilidades de cada um, segundo as circunstâncias de tempo e de lugar. “Muito obrigada”, segundo Lauand traduz, pois, o terceiro grau, o nível mais profundo da gratidão: “o do vínculo (o *ob-ligatus*), o do dever de retribuir”.

*Ao Professor Pedroso de Lima,  
o nosso Muito Obrigada.*

*Maria Filomena Botelho*

## P R E F Á C I O

O presente trabalho é uma iniciativa do Instituto de Biofísica/Biomatemática da Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra, sob a direcção da Prof. Doutora Filomena Botelho.

Surge para complementar a obra "Biofísica Médica" da autoria do Prof. Doutor João José Pedroso de Lima em boa hora publicada pela Imprensa da Universidade de Coimbra. Embora ele próprio integre a equipa de autores do presente trabalho, trata-se de continuar uma «obra de mestre». De facto, é (re)conhecido o papel daquele professor e investigador na afirmação da Física na Medicina em Portugal. A ele se deve, em grande parte, o empolgante desenvolvimento da Medicina Nuclear em Coimbra, área que fez crescer desde um pequeno Laboratório de Radioisótopos da década de sessenta, ao bem gizado plano que permitiu a recente instalação do ICNAS com as suas múltiplas valências.

O grupo de Biofísica e Biomatemática da Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra, a par da contribuição que dá, tanto na formação propedêutica dos estudantes de Medicina como na formação avançada de muitos dos que vêm a desenvolver trabalho, mormente trabalho científico, em áreas afins, tem mantido um papel de charneira na articulação entre a Medicina e a Física.

Isto é manifesto tanto a nível da docência – nomeadamente, através da leccionação de disciplinas do Mestrado Integrado em Engenharia Biomédica – como a nível científico, campo em que vale a pena sublinhar as inúmeras e proveitosas colaborações estabelecidas com equipas de investigação de centros de investigação do Departamento de Física da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e do Laboratório de Instrumentação e Física Experimental de Partículas (LIP). Quanto ao LIP, é-me particularmente grato sublinhar o trabalho realizado (ou em curso) em colaboração com elementos do Grupo de Biofísica e Biomatemática no campo da investigação em instrumentação para medicina nuclear, que tenho tido o privilégio de observar de perto. Trata-se de trabalho que começa a ser significativo, até na

diversidade de temas, e no qual creio que ambos os grupos depositam fundadas esperanças.

Sentiu o grupo de Biofísica e Biomatemática a necessidade de produzir uma obra que ajude os alunos de Medicina na aprendizagem e na aplicação à Medicina de ferramentas fundamentais da Física. Ora se é importante ensinar (e ensinar bem) a Física ou as suas aplicações nas ciências e nas tecnologias – tal é o objectivo do ensino da Física que se faz numa Faculdade de Ciência e Tecnologia que directamente conheço – por maioria de razão será meritório apostar na melhoria de qualidade do ensino para alunos que, à partida, possam ser menos facilmente atraídos pela beleza das leis da Física.

É minha convicção que a Biofísica deve, como disciplina de formação propedêutica de futuros médicos, contribuir para a formação de profissionais que, por um lado, sejam capazes de reconhecer os princípios físicos por detrás da enorme variedade de mecanismos subjacentes à vida e, por outro, possam perceber o funcionamento de meios de diagnóstico que são cada vez mais sofisticados na exploração de efeitos que só a Física permite esclarecer – trata-se de condições necessárias ao pleno desempenho da Medicina do Séc. XXI. Ora tal formação exige a criação pelos estudantes de rotinas de análise e resolução de problemas que não são porventura muito vulgares nas outras áreas do conhecimento que fazem parte do leque da formação básica para os estudantes de medicina. Daí a importância de dispor de um trabalho em que tal aproximação é seguida com rigor e que o estudante poderá consultar sempre que necessite.

Vale a pena referir que alguns dos assuntos cobertos neste livro – nomeadamente, Membranas, Fluidos – são dos mais úteis para os futuros médicos, na medida em que ajudam a consolidar conceitos e criam a aptidão para responder de forma adequada a questões que se lhes colocarão na vida profissional. Por outro lado, face à importância crescente que tem a utilização das radiações, tanto no diagnóstico médico como na terapia, o capítulo que aborda os problemas de Decaimento Radioactivo e efeitos biológicos das radiações, é oportunidade única para os estudantes questionarem e

esclarecerem conceitos que, de outro modo, não passariam de mera formulação matemática.

Mesmo tendo em conta que os assuntos cobertos não vão além das Membranas, Fluidos e Radioactividade, – fazendo o leitor perguntar-se para quando o surgimento de obra que cubra os capítulos restantes da Biofísica Médica – não deixa de ser um facto que a forma de encarar os problemas e as técnicas de análise empregues têm toda a generalidade. Por isso, o treino na resolução destes exercícios, num quadro formal correcto e exigente, tem um valor formativo que ultrapassa em muito os temas abordados.

Acresce aparecer este livro num momento particular da universidade portuguesa. Refiro-me à recente remodelação dos cursos superiores decorrente do acordo de Bolonha. Na verdade, ao impor um acréscimo do trabalho individual dos estudantes, a reforma exige que eles disponham de auxiliares consistentes para levar a cabo com êxito o seu estudo pessoal.

Estão pois de parabéns a equipa de autores e a Imprensa da Universidade de Coimbra, que agora inclui o trabalho nas suas publicações.

Rui Ferreira Marques

(Professor Catedrático da FCTUC e Membro da Direcção do LIP)





# M E M B R A N A S

## 1. Introdução

Entende-se por difusão o movimento de moléculas num determinado meio dos locais de maior concentração molecular para os de menor concentração, ou seja, a favor do gradiente de concentração. Deste modo, as concentrações nos vários pontos do meio em questão tendem a igualar-se ao longo do tempo, desaparecendo os gradientes. Trata-se de um dos tipos de transporte que ocorrem através de membranas biológicas, não sendo necessária energia externa para que ocorra (transporte passivo).

Nos exercícios deste capítulo iremos considerar as seguintes convenções (salvo indicação contrária):

- a) Os compartimentos serão numerados da esquerda para a direita, utilizando numeração romana;
- b) Dois compartimentos contíguos estão separados por uma membrana;
- c) O sentido positivo do movimento das partículas é da esquerda para a direita;
- d) Os sistemas encontram-se em regime estacionário;

### 1.1. Primeira lei de Fick da difusão

O transporte de massa por difusão através de uma membrana pode ser quantificado pela determinação da intensidade de corrente, um valor que traduz a quantidade de moléculas que atravessam a membrana por unidade de tempo. Representa-se por  $I$  e tem como unidades  $\text{mol s}^{-1}$  no sistema c.g.s. Podemos também quantificar o transporte de massa utilizando a densidade de corrente,  $J$ , que indica a quantidade de moléculas que, por unidade de tempo, atravessa uma unidade de área da membrana, normal à direcção do movimento das moléculas. Tem por unidades no sistema c.g.s.  $\text{mol cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ . Estes dois conceitos relacionam-se segundo a equação

$$J = \frac{I}{A_m} \quad (1.1)$$

onde  $A_m$  representa a área da membrana.

A primeira lei de Fick da difusão relaciona a densidade de corrente de um soluto por difusão com o seu gradiente de concentração  $\left(\frac{dC_s}{dx}\right)$ , sendo traduzida pela equação seguinte:

$$J_s = -D \cdot \frac{dC_s}{dx} \quad (1.2)$$

$D$  é a constante de difusão translacional livre da molécula no meio considerado e tem por unidades do sistema c.g.s.  $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ .

Numa situação estacionária, a densidade de corrente de soluto através de uma membrana é a mesma qualquer que seja o ponto considerado, supondo a constituição da membrana igual em toda a sua extensão. Deste modo, sendo  $D$  uma constante, podemos considerar o gradiente de concentração constante para qualquer ponto da membrana.

$$\frac{dC_s}{dx} = a \quad (1.3)$$

Resolvendo a equação 1.3 em ordem a  $C_s$  podemos obter a função que representa a concentração de soluto através da membrana e que designaremos por  $C_s(x)$ .

$$\frac{dC_s}{dx} = a \Rightarrow \int \frac{dC_s}{dx} \cdot dx = \int a \cdot dx \Rightarrow C_s(x) = a \cdot x + b \quad (1.4)$$

Podemos assim afirmar que a concentração varia de forma linear ao longo da membrana e que a concentração de soluto num ponto depende da sua distância a uma das interfaces da membrana com os compartimentos. Designando a sua espessura por  $\Delta x$ , podemos desenhar o seguinte esquema:

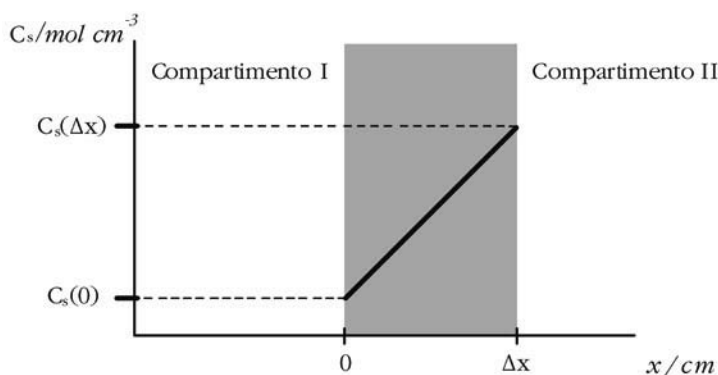


Fig. 1.1 – Representação da variação da concentração de soluto através de uma membrana.

A recta representa a concentração do soluto ao longo da membrana. Repare-se que considerámos a interface da membrana com o compartimento I como  $x = 0$ , ou seja, como um dos eixos do nosso referencial. Nesta situação  $C_s(x)$  representa a concentração de soluto no ponto que dista  $x$  cm do compartimento I, correspondendo a interface da membrana com o compartimento II ao ponto de abcissa  $x = \Delta x$ .

Pelas equações 1.3 e 1.4 podemos verificar que o declive da recta que representa a função  $C_s(x)$  corresponde ao gradiente de concentração do soluto. Deste modo, a equação 1.4 pode reescrever-se:

$$C_s(x) = \frac{dC_s}{dx} \cdot x + b \quad (1.5)$$

Se a concentração na interface da membrana com o compartimento I ( $C_s(0)$ ) for conhecida, podemos substituir esse valor na equação 1.5 para calcular a ordenada na origem ( $b$ ).

$$C_s(0) = \frac{dC_s}{dx} \times 0 + b \Leftrightarrow b = C_s(0) \quad (1.6)$$

A função  $C_s(x)$  pode então assumir a forma

$$C_s(x) = \frac{dC_s}{dx} \cdot x + C_s(0) \quad (1.7)$$

É importante referir ainda que podemos calcular a equação de  $C_s(x)$  a partir das concentrações em dois pontos cujas distâncias ao compartimento I sejam conhecidas e diferentes. Consideremos as suas abcissas com os valores  $x = x_1$  e  $x = x_2$ . O declive da recta (gradiente de concentração) pode ser determinado por

$$\frac{dC_s}{dx} = \frac{C_s(x_1) - C_s(x_2)}{x_1 - x_2} \quad (1.8)$$

O valor da ordenada na origem da recta ( $b$ ) calcula-se pela substituição do valor de uma das concentrações conhecidas na equação 1.5, obtendo-se assim a expressão analítica da função  $C_s(x)$ .

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo I, pp. 13-20.

### 1.1.1. Exercícios resolvidos

Exercício 1.1. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana. Sabe-se que através da membrana passam 3 mol de soluto por minuto, do compartimento II para o compartimento I, e que a sua área é de 50 cm<sup>2</sup>. Sabendo que a constante de difusão tem o valor de 4×10<sup>-2</sup> cm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup> e que a

concentração no interior da membrana a  $20\ \mu\text{m}$  da sua interface com o compartimento I é de  $6 \times 10^{-2}\ \text{mol L}^{-1}$ , determine:

- A função que traduz a concentração de soluto ao longo da membrana
- A espessura da membrana, sabendo que a concentração na interface com o compartimento II é de  $3,85 \times 10^{-4}\ \text{mol cm}^{-3}$ .

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$$|I_s| = 3\ \text{mol min}^{-1}$$

$$A_{\text{membrana}} = 50\ \text{cm}^2$$

$$D = 4 \times 10^{-2}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$$

$$C_s(20\ \mu\text{m}) = C_s(2 \times 10^{-3}\ \text{cm}) = 6 \times 10^{-5}\ \text{mol cm}^{-3}$$

a) A difusão faz-se do compartimento II para o I, ou seja, no sentido contrário ao convencionado como positivo.

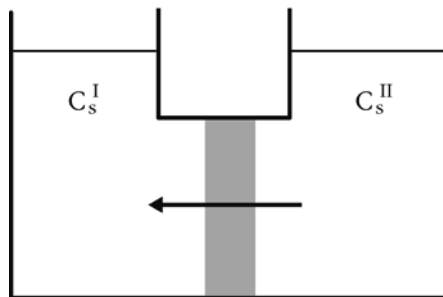


Fig. 1.2 – Sistema de compartimentos considerado no exercício. A corrente de soluto tem o sentido indicado pela seta.

Deste modo, a intensidade de corrente de difusão ( $I_s$ ) terá que ter sinal negativo.

$$I_s = -3 \text{ mol min}^{-1} = -\frac{3}{60} \text{ mol s}^{-1} = -5 \times 10^{-2} \text{ mol s}^{-1} \quad (1.9)$$

Conhecendo o valor da área da membrana podemos calcular a densidade de corrente de soluto ( $J_s$ ).

$$J_s = \frac{I_s}{A_{\text{membrana}}} = \frac{-5 \times 10^{-2}}{50} = -10^{-3} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.10)$$

Pela primeira lei de Fick da difusão (equação 1.2), temos a seguinte relação:

$$J_s = -D \cdot \frac{dC_s}{dx} \Leftrightarrow \frac{dC_s}{dx} = -\frac{J_s}{D} \quad (1.11)$$

Substituindo os valores conhecidos obtemos

$$\frac{dC_s}{dx} = -\frac{J_s}{D} = -\frac{-10^{-3}}{4 \times 10^{-2}} = 2,5 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-4} \quad (1.12)$$

Como o gradiente de concentração é constante, podemos afirmar que a variação da concentração ao longo da membrana é linear, sendo expressa pela seguinte função:

$$C_s(x) = \frac{dC_s}{dx} \cdot x + b \Leftrightarrow C_s(x) = 2,5 \times 10^{-2} \cdot x + b \quad (1.13)$$

Utilizando os dados do exercício:

$$C_s(2 \times 10^{-3}) = 6 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.14)$$

e a equação 1.13, obtemos:

$$\begin{aligned} 6 \times 10^{-5} &= 2,5 \times 10^{-2} \times 2 \times 10^{-3} + b \Leftrightarrow 6 \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-5} + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b = 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Podemos agora reescrever a equação 1.13, obtendo a função pedida:

$$C_s(x) = 2,5 \times 10^{-2} \cdot x + 10^{-5} \left( \text{mol cm}^{-3} \right) \quad (1.16)$$

b) Nesta alínea temos um novo dado:

$$C_s(\Delta x) = 3,85 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.17)$$

Utilizando este dado e a equação 1.16, podemos calcular a espessura da membrana do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 3,85 \times 10^{-4} &= 2,5 \times 10^{-2} \cdot \Delta x + 10^{-5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2,5 \times 10^{-2} \cdot \Delta x &= 3,75 \times 10^{-4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Delta x &= \frac{3,75 \times 10^{-4}}{2,5 \times 10^{-2}} \Leftrightarrow \Delta x = 1,5 \times 10^{-2} \text{ cm} = 150 \mu\text{m} \end{aligned} \quad (1.18)$$

---

Exercício 1.2. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana. As concentrações nos compartimentos I e II são, respectivamente,  $8 \times 10^{-2}$  e  $3 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$  e a espessura da membrana é de  $40 \mu\text{m}$ . Sabendo que as concentrações nos compartimentos e nas respectivas interfaces são iguais e que a constante de difusão para o soluto é de  $4 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , determine:

- A função que traduz a concentração de soluto ao longo da membrana.
- A densidade de corrente de soluto, indicando o sentido do movimento das partículas.
- A concentração de soluto no ponto médio da membrana.

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$$C_s(0) = C_s^I = 8 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} = 8 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$C_s(\Delta x) = C_s^{II} = 3 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} = 3 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$\Delta x = 40 \mu\text{m} = 4 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$D = 4 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

a)

$$C_s(x) = \frac{dC_s}{dx} \cdot x + C_s(0) \quad (1.19)$$

$$\frac{dC_s}{dx} = \frac{C_s(\Delta x) - C_s(0)}{\Delta x} = \frac{3 \times 10^{-5} - 8 \times 10^{-5}}{4 \times 10^{-3}} = -1,25 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-4} \quad (1.20)$$

$$C_s(x) = -1,25 \times 10^{-2} \cdot x + 8 \times 10^{-5} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)} \quad (1.21)$$

b)

$$J_s = -D \cdot \frac{dC_s}{dx} = -4 \times 10^{-5} \times (-1,25 \times 10^{-2}) = 5 \times 10^{-7} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.22)$$

O soluto desloca-se de I para II, uma vez que  $J_s > 0$ .

c)

$$C_s\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{C_s(0) + C_s(\Delta x)}{2} = \frac{8 \times 10^{-5} + 3 \times 10^{-5}}{2} = 5,5 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.23)$$

---

### 1.1.2. Exercícios propostos

1. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana, através da qual passam 0,09 mol de soluto por minuto. A área da membrana é de 120 cm<sup>2</sup> e a sua espessura é de 200 μm. As concentrações de soluto na interface da membrana com o compartimento I e no ponto médio da membrana são, respectivamente, 1,1 × 10<sup>-4</sup> e 6 × 10<sup>-5</sup> mol cm<sup>-3</sup>. Calcule:

- A concentração na interface da membrana com o compartimento II.
- O gradiente de concentração de soluto ao longo da membrana.
- A densidade de corrente de soluto no ponto médio da membrana.



- d) A constante de difusão do soluto.
2. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana de  $150\ \mu\text{m}$  de espessura. Sabe-se que a constante de difusão para o soluto é de  $8 \times 10^{-4}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$ , que o seu gradiente de concentração ao longo da membrana é de  $4 \times 10^{-3}\ \text{mol}\ \text{cm}^{-4}$  e que a concentração no interior da membrana a  $40\ \mu\text{m}$  da sua interface com o compartimento II tem o valor de  $5 \times 10^{-5}\ \text{mol}\ \text{cm}^{-3}$ . Determine:
- A densidade de corrente de soluto, indicando o sentido da corrente.
  - A concentração do soluto na interface da membrana com o compartimento II.
3. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana de espessura  $200\ \mu\text{m}$ . A constante de difusão para o soluto é de  $5 \times 10^{-4}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$ ; as concentrações na interface da membrana com o compartimento II e no seu interior a  $50\ \mu\text{m}$  do compartimento I são, respectivamente,  $3 \times 10^{-2}$  e  $6 \times 10^{-2}\ \text{mol}\ \text{dm}^{-3}$ . Determine:
- A função que descreve a concentração de soluto ao longo da membrana.
  - A densidade de corrente de soluto, indicando o sentido da corrente.
  - A área da membrana, sabendo que através da mesma passam  $9 \times 10^{-3}\ \text{mol}$  durante um minuto.
4. Considere uma membrana com  $8 \times 10^{-5}\ \text{dm}^3$  de volume a separar duas soluções de um mesmo soluto. Sabe-se que por minuto atravessam a membrana  $7,2 \times 10^{-3}\ \text{mol}$  de soluto do compartimento I para o compartimento II e que a constante de difusão é de  $5 \times 10^{-3}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$ . São ainda conhecidas as concentrações das interfaces da membrana com os compartimentos I e II, que são de  $6 \times 10^{-5}$  e  $3 \times 10^{-5}\ \text{mol}\ \text{cm}^{-3}$ , respectivamente. Determine a espessura da membrana.

## 1.2. Transporte de soluto por difusão através de membranas

### 1.2.1. Membranas homogéneas

Entende-se por membrana homogénea aquela cuja composição é igual em qualquer ponto, sendo toda a sua área permeável ao soluto. Vamos determinar a densidade de corrente de soluto para este tipo de membranas.

Para isso consideremos um sistema de dois compartimentos com soluções de um mesmo soluto separadas por uma membrana homogénea. Vamos supor igualdade de pressão hidrostática nos dois compartimentos. Segundo a primeira lei de Fick (equação 1.2), temos que conhecer a constante de difusão do soluto no meio em questão. No caso da membrana homogénea não poderemos utilizar a constante de difusão livre do soluto, uma vez que a membrana corresponde a um meio diferente do solvente presente nos compartimentos. Teremos então que considerar uma constante de difusão na membrana, que representaremos por  $D_m$ . A equação 1.2 reescrever-se-á então da seguinte forma:

$$J_s = -D_m \cdot \frac{dC_s}{dx} \quad (1.24)$$

Utilizando a equação 1.8, podemos escrever o gradiente de concentração em função da espessura da membrana e das concentrações de soluto nas suas interfaces com os compartimentos I e II:

$$J_s = -D_m \cdot \frac{C_s(\Delta x) - C_s(0)}{\Delta x} \quad (1.25)$$

Numa membrana homogénea, as concentrações nos compartimentos I e II podem não coincidir com as concentrações nas respectivas interfaces com a membrana, uma vez que o meio onde se difunde o soluto é diferente nos compartimentos e no interior da membrana. A relação entre essas concentrações é dada pelo coeficiente de partição ( $k$ ), que se define por

$$k = \frac{C_s(0)}{C_s^I} = \frac{C_s(\Delta x)}{C_s^{II}} \quad (1.26)$$

As concentrações no nosso sistema podem representar-se em esquema do seguinte modo (para  $k > 1$ ):

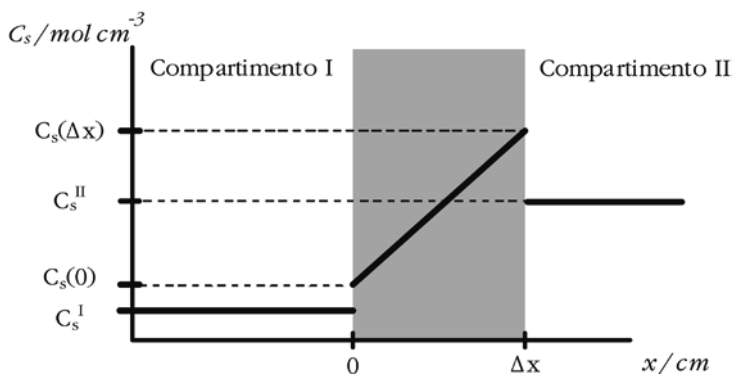


Fig. 1.3 – Representação da variação da concentração de um soluto num sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogênea.

Para determinar os valores de  $C_s(0)$  e  $C_s(\Delta x)$  em função das concentrações nos respectivos compartimentos recorreremos à equação 1.26.

$$C_s(0) = k \cdot C_s^I \quad (1.27)$$

$$C_s(\Delta x) = k \cdot C_s^{II} \quad (1.28)$$

Substituindo estes valores na equação 1.25, obtemos

$$J_s = -D_m \cdot \frac{k \cdot C_s^{II} - k \cdot C_s^I}{\Delta x} = D_m \cdot k \cdot \frac{C_s^I - C_s^{II}}{\Delta x} \quad (1.29)$$

Representando a diferença de concentrações entre os compartimentos ( $C_s^I - C_s^{II}$ ) por  $\Delta C_s$  a equação 1.29 toma a seguinte forma:

$$J_s = \frac{D_m \cdot k}{\Delta x} \cdot \Delta C_s \quad (1.30)$$

que permite determinar a densidade de corrente de soluto devida a forças de difusão para uma membrana homogênea.

Podemos ainda definir a permeabilidade da membrana homogénea a um soluto, representada por  $P_s$ . É dada por

$$P_s = \frac{D_m \cdot k}{\Delta x} \quad (1.31)$$

e tem por unidades  $\text{cm s}^{-1}$  no sistema c.g.s. Utilizando esta definição e a equação 1.30 obtemos

$$J_s = P_s \cdot \Delta C_s \quad (1.32)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo I, pp. 21-23.

#### 1.2.1.1. Exercícios resolvidos

Exercício 1.3. Considere um sistema de dois compartimentos, contendo soluções de um mesmo soluto, separados por uma membrana homogénea com  $60 \mu\text{m}$  de espessura. Sabendo que as concentrações de soluto nos compartimentos I e II são  $1 \times 10^{-2} \text{ M}$  e  $6 \times 10^{-3} \text{ M}$ , respectivamente, que o coeficiente de partição é igual a 1,2 e a constante de difusão do soluto na fase da membrana é igual a  $5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , determine:

- A expressão analítica da concentração de soluto no interior da membrana.
- O valor da concentração do soluto no ponto médio da membrana.
- A densidade de corrente de soluto através da membrana.
- A densidade de corrente de difusão do soluto no ponto médio da membrana.

---

## Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$C_s^I = 1 \times 10^{-2} M = \frac{1 \times 10^{-2} \text{ mol}}{1 \times 10^3 \text{ cm}^3} = 1 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$C_s^{II} = 6 \times 10^{-3} M = \frac{6 \times 10^{-3} \text{ mol}}{1 \times 10^3 \text{ cm}^3} = 6 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$k = 1,2$$

$$\Delta x = 60 \mu\text{m} = 6 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$D_m = 5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

a) Sabemos que a concentração no interior da membrana varia de uma forma linear, uma vez que o gradiente é constante. Por outro lado, conhecemos a relação entre as concentrações nos recipientes e nas interfaces da membrana respectivas (que é dada pelas equações 1.27 e 1.28). A função que traduz a concentração de soluto ao longo da membrana terá a seguinte forma:

$$C_s(x) = a \cdot x + b \quad (1.33)$$

São conhecidos dois pontos da recta, pelo que os parâmetros  $a$  (declive) e  $b$  (ordenada na origem), podem ser determinados por um sistema de duas equações.

$$\begin{cases} C_s(0) = 1,2 \times 10^{-5} = 1,2 \times 10^{-5} \\ C_s(6 \times 10^{-3}) = 1,2 \times 6 \times 10^{-6} = 7,2 \times 10^{-6} \end{cases} \quad (1.34)$$

Logo:

$$\begin{cases} 1,2 \times 10^{-5} = a \times 0 + b \\ 7,2 \times 10^{-6} = a \times 6 \times 10^{-3} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1,2 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \\ a = -8 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-4} \end{cases} \quad (1.35)$$

A expressão analítica que traduz a variação de concentração no interior da membrana será:

$$C_s(x) = -8 \times 10^{-4} x + 1,2 \times 10^{-5} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)} \quad (1.36)$$

b) O ponto médio da membrana situa-se em  $x = 3 \times 10^{-3} \text{ cm}$ . A concentração pedida será:

$$C_s(3 \times 10^{-3}) = -8 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^{-3} + 1,2 \times 10^{-5} = 9,6 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.37)$$

c) A densidade de corrente ( $J_s$ ) é dada pela expressão:

$$J_s = -D_m \frac{dC_s}{dx} \quad (1.38)$$

em que  $D_m$  representa a constante de difusão na membrana. Recordando que a derivada da concentração em ordem a  $x$  é igual ao declive da recta, vem:

$$\frac{dC_s}{dx} = a = -8 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-4} \quad (1.39)$$

Para determinar a densidade de corrente de difusão basta então substituir os valores:

$$J_s = -5 \times 10^{-6} \times (-8 \times 10^{-4}) = 4 \times 10^{-9} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.40)$$

d) Não havendo perdas nem criação de soluto ao longo da membrana e sendo a sua composição semelhante em todos os pontos, a densidade de corrente será constante ao longo da membrana. A resposta será

$$J_s = 4 \times 10^{-9} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.41)$$

Exercício 1.4. Numa experiência com uma membrana homogénea verificou-se que esta apresentava uma permeabilidade de  $4 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$  a um dado soluto. Sabendo que a concentração do soluto num dos compartimentos é igual a  $10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$  e que o

módulo da densidade de corrente devido a difusão é  $2 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , determine:

- A concentração de soluto no outro compartimento.
- O módulo da densidade de corrente de difusão para esta situação, caso a permeabilidade ao soluto tivesse um valor de  $6 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$ .

---

### Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$P_s = 4 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$$

$$C_s^I = 1 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$|J_s| = 2 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

a) Vamos assumir que a concentração que nos é dada é a do compartimento I.

$$J_s = P_s (C_s^I - C_s^{II}) \quad (1.42)$$

Como não sabemos o sentido da corrente, temos que considerar duas situações:

Situação I:  $J_s > 0$

$$\begin{aligned} 2 \times 10^{-8} &= 4 \times 10^{-3} (10^{-6} - C_s^{II}) \Leftrightarrow \\ 5 \times 10^{-6} &= 10^{-6} - C_s^{II} \quad \Leftrightarrow \\ C_s^{II} &= -4 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Este resultado não tem significado físico.

Situação II:  $J_s < 0$

$$\begin{aligned} -2 \times 10^{-8} &= 4 \times 10^{-3} (10^{-6} - C_s^{II}) \Leftrightarrow \\ -5 \times 10^{-6} &= 10^{-6} - C_s^{II} \quad \Leftrightarrow \\ C_s^{II} &= 6 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3} \end{aligned} \quad (1.44)$$

b)

$$\begin{aligned} J_s &= 6 \times 10^{-3} (10^{-6} - 6 \times 10^{-6}) \Leftrightarrow \\ J_s &= 6 \times 10^{-3} \times (-5 \times 10^{-6}) \quad \Leftrightarrow \\ J_s &= -3 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Logo

$$|J_s| = 3 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.46)$$

#### 1.2.1.2. Exercícios propostos

1. Considere um sistema formado por dois compartimentos separados por uma membrana homogênea. Cada um dos compartimentos contém soluções de um mesmo soluto, a diferentes concentrações. Por unidade de área de membrana e unidade de tempo (ambas em unidades c.g.s.) atravessam a membrana  $5 \times 10^{-9}$  mol de soluto por difusão (do compartimento II para o compartimento I). Sabendo que a constante de difusão do soluto na membrana é igual a  $2 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , que a variação de concentração no interior da membrana é dada por  $C_s(x) = Ax + 10^{-6}$  (mol  $\text{cm}^{-3}$ ) e que o coeficiente de partição da membrana para o soluto em questão é igual a 0,8, determine:

- a) O valor de  $A$  em  $C_s(x)$ .
- b) A espessura da membrana sabendo que a concentração de soluto no compartimento II é igual a  $5 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$ .
- c) A permeabilidade da membrana.



- d) A concentração de soluto no ponto médio da membrana.
2. Considere um sistema formado por dois compartimentos separados por uma membrana homogénea, através da qual passam, por difusão e durante um minuto, 480 mol de um soluto. Sabendo que a área da membrana é de  $20 \text{ cm}^2$ , a concentração na interface membrana/compartimento I é de  $4 \text{ mol cm}^{-3}$ , a espessura da membrana é de  $4 \text{ mm}$ , o coeficiente de partição é  $0,2$  e a concentração do soluto no interior da membrana à distância de  $0,1 \text{ mm}$  da interface com o compartimento I é de  $10 \text{ mol cm}^{-3}$ , determine:
- a) A concentração de soluto no compartimento II.
  - b) A constante de difusão do soluto na fase da membrana.
3. Uma membrana homogénea com  $1,5 \text{ m}^2$  de área total e  $0,5 \text{ mm}$  de espessura separa duas soluções de dois solutos, A e B, num sistema de dois compartimentos. As concentrações do soluto B no compartimento I e na interface da membrana com o compartimento II são iguais a  $1 \text{ mol cm}^{-3}$  e  $3,1 \text{ mol cm}^{-3}$ , respectivamente. Sabe-se ainda que a permeabilidade da membrana é igual para os dois solutos,  $\Delta C_A (C_A^I - C_A^{II})$  é igual a  $20 \text{ mol cm}^{-3}$  e o coeficiente de partição é  $0,1$  para os dois solutos. Tendo em conta que por minuto atravessam a membrana  $3600 \text{ mol}$  do soluto A de I para II, determine a densidade total de corrente de difusão.
4. Uma membrana homogénea com  $10 \text{ cm}^2$  de área é atravessada por uma corrente de difusão de solução de dois solutos, A e B, transportando um total de  $600 \text{ mol}$  por minuto, do compartimento I para o compartimento II. Sabendo que  $P_A = 2P_B$  e  $\frac{2}{3}\Delta C_A = \Delta C_B$ , determine a densidade de corrente de difusão de cada soluto que atravessa a membrana.
5. Considere um sistema formado por dois compartimentos separados por uma membrana homogénea de  $20 \text{ dm}^2$  de área e  $1 \text{ dm}^3$  de volume. As concentrações de soluto no ponto médio da membrana, na interface membrana/compartimento II e nesse compartimento são, respectivamente,

- 0,7 M, 0,8 M e 1 M. Sabendo que a permeabilidade da membrana ao soluto em causa é igual a  $0,1 \text{ dm s}^{-1}$ , determine:
- O número de moles de soluto que atravessa a membrana por minuto, indicando o sentido do deslocamento.
  - A constante de difusão do soluto na membrana.
6. Considere uma membrana homogénea de  $200 \text{ cm}^2$  de área e  $75 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura, que separa dois compartimentos com soluções de um mesmo soluto com concentrações de  $3,5 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$  e  $6,5 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ . Por minuto passam  $2,16 \times 10^{-3} \text{ mol}$  de soluto através da membrana, do compartimento II para o compartimento I. Sabe-se que a constante de difusão tem o valor de  $3 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Determine:
- O coeficiente de partição.
  - O gradiente de concentração de soluto.
  - A concentração de soluto no interior da membrana a  $20 \text{ }\mu\text{m}$  da sua interface com o compartimento II.
  - A intensidade de corrente de soluto neste sistema para um coeficiente de partição de 0,5.
7. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogénea com  $0,18 \text{ mm}$  de espessura. As concentrações no compartimento I, no ponto médio da membrana e na interface membrana/compartimento II são, respectivamente,  $1 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ ,  $2 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$  e  $3,2 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ . A constante de difusão na membrana é de  $3 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Determine:
- O gradiente de concentração de soluto.
  - A função que traduz a concentração de soluto ao longo da membrana.
  - O coeficiente de partição para este soluto.
  - A densidade de corrente do soluto por difusão, indicando o sentido da

corrente.

8. Considere uma membrana homogénea com  $2,25 \text{ cm}^3$  de volume e  $150 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura, através da qual passam, por minuto,  $6,48 \times 10^{-3} \text{ mol}$  de soluto. A sua concentração ao longo da membrana é dada pela função  $C_s(x) = -1,6 \times 10^{-3} x + 4,8 \times 10^{-5} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$ . Determine:
- A densidade de corrente de soluto, indicando o sentido da corrente.
  - A constante de difusão do soluto na membrana.
  - A concentração no compartimento II, sabendo que a concentração no compartimento I é de  $4 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ .
9. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogénea com  $100 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura. O gradiente de concentração tem o valor de  $1,6 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-4}$ , a constante de difusão na membrana é de  $3 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e o coeficiente de partição é  $0,4$ . Calcule:
- A densidade de corrente do soluto.
  - A diferença de concentração existente entre os dois compartimentos, indicando em qual dos dois a concentração é maior.
  - As concentrações nos compartimentos I e II, sabendo que no ponto médio da membrana o soluto se encontra a uma concentração de  $2 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ .
10. Uma membrana homogénea com  $300 \text{ cm}^2$  de área separa dois compartimentos com soluções de um mesmo soluto, através da qual passam  $1,2 \times 10^{-4} \text{ mol}$  de soluto por segundo (do compartimento I para o compartimento II). Sabe-se que a permeabilidade da membrana ao soluto é de  $2,67 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$  e que o coeficiente de partição é  $0,8$ . Determine:
- A diferença de concentração existente entre os dois compartimentos, indicando o que tem a maior concentração.
  - A espessura da membrana, sabendo que as concentrações no interior

da membrana a  $20 \mu\text{m}$  da sua interface com os compartimentos I e II são, respectivamente,  $1,44 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$  e  $5,6 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ .

c) A constante de difusão do soluto na membrana.

11. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogênea com  $500 \text{ cm}^2$  de área. Sabe-se que por difusão atravessam a membrana  $4 \times 10^{-4} \text{ mol}$  de soluto por segundo, do compartimento I para o compartimento II. A constante de difusão do soluto na membrana é  $2 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , a concentração na interface da membrana com o compartimento I é  $0,56 \text{ mol dm}^{-3}$  e o coeficiente de partição é 0,8. Calcule:

a) A função que traduz a concentração ao longo da membrana.

b) A espessura da membrana, sabendo que a concentração no compartimento II é de  $0,1 \text{ mol dm}^{-3}$ .

12. Considere uma membrana homogênea de  $30 \mu\text{m}$  de espessura que separa dois recipientes contendo soluções com dois solutos diferentes (A e B) dissolvidos. Para cada soluto, o módulo da diferença de concentrações entre os dois recipientes tem o mesmo valor. A razão entre os valores absolutos das densidades de corrente do soluto A e do soluto B é igual a  $5/4$  e a constante de difusão do soluto A na membrana é  $8 \times 10^{-6} \text{ dm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Sabe-se que a concentração do soluto B no compartimento I é de  $2 \text{ mol dm}^{-3}$ , que a sua concentração ao longo da membrana é dada por  $C_s(x) = 0,8x + 2,4 \times 10^{-3} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$  e que a soma das duas densidades de corrente é igual a  $8 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Determine:

a) As densidades de correntes dos soluto A e B, indicando o sentido de deslocamento de cada soluto.

b) A concentração do soluto B no compartimento II.

c) O coeficiente de partição do soluto A.

d) A constante de difusão do soluto B na membrana.

13. Uma membrana homogénea separa duas soluções com dois solutos cada, sendo a sua permeabilidade para soluto A 1,75 vezes superior à permeabilidade ao soluto B. Sabe-se que:

$$C_A^I = C_B^{II}$$

$$C_B^I = C_A^{II}$$

$$J_A + J_B = -1 \times 10^{-8} \text{ mol dm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$C_A \left( \frac{\Delta x}{2} \right) = \frac{7}{4} \times C_B \left( \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Determine:

- As densidades de corrente de A e B, indicando o sentido da corrente de cada um dos solutos.
  - A razão entre as constantes de difusão dos solutos A e B.
14. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogénea de 200  $\mu\text{m}$  de espessura, contendo cada compartimento uma solução com dois solutos, A e B. A permeabilidade da membrana é igual para os dois solutos. Sabe-se que o coeficiente de partição para o soluto A é 0,9, que a constante de difusão para o soluto B é  $6 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e que  $J_A + J_B = 2,7 \times 10^{-5} \text{ mol dm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Sabe-se ainda que, por  $\text{dm}^3$ , há 0,75 mol de solutos no compartimento I e 0,6 mol no compartimento II. Calcule:
- O coeficiente de partição para o soluto B.
  - A constante de difusão para o soluto A.
  - A concentração do soluto A no ponto médio da membrana, sabendo que a concentração do soluto B nesse mesmo ponto é de  $1,65 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$ .
15. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogénea de 200  $\text{cm}^2$  de área e 100  $\mu\text{m}$  de espessura. Por minuto passam  $5,76 \times 10^{-3} \text{ mol}$  de soluto do compartimento II para o

compartimento I. O módulo da diferença de concentrações entre os dois compartimentos é de  $0,02 \text{ mol dm}^{-3}$  e a concentração no ponto médio da membrana é de  $3,6 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$ . A constante de difusão do soluto na membrana é de  $2 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Calcule:

- a) O coeficiente de partição.
- b) A concentração do soluto na membrana a  $30 \mu\text{m}$  da sua interface com o compartimento II.

### 1.2.2. Membranas porosas

Entendemos como membrana porosa aquela em que o soluto a atravessa através de canais (poros), sendo a restante área de membrana impermeável à sua passagem. Podemos, para este tipo de membranas, determinar a fracção de área permeável (ou fracção de área ocupada por poros), que representaremos por  $\phi$ .

$$\phi = \frac{A_{\text{poros}}}{A_{\text{total}}} \quad (1.47)$$

Na aplicação da primeira lei de Fick da difusão (equação 1.2) a esta situação temos que ter em conta que, por cada unidade de área da membrana, apenas uma fracção  $\phi$  é permeável. Por outro lado, ao contrário do que acontece nas membranas homogéneas, devemos utilizar a constante de difusão livre do soluto caso os poros tenham dimensões suficientemente grandes em comparação com as do soluto que os atravessa. Isto deve-se ao facto de os poros se encontrarem ocupados pelo mesmo solvente que existe nos compartimentos. Conseguimos assim obter a densidade de corrente de soluto por difusão pela expressão

$$J_s = -D \cdot \phi \cdot \frac{dC_s}{dx} \quad (1.48)$$

O gradiente de concentração pode ser escrito em função da espessura da membrana e das concentrações de soluto nas suas interfaces com os compartimentos I e II, utilizando a equação 1.8.

$$J_s = -D \cdot \phi \cdot \frac{C_s(\Delta x) - C_s(0)}{\Delta x} \quad (1.49)$$

Para as membranas porosas, as concentrações nos compartimentos I e II coincidem com as concentrações nas respectivas interfaces membranares, uma vez que nos poros se encontra o mesmo solvente que nos compartimentos.

$$C_s(0) = C_s^I \quad (1.50)$$

$$C_s(\Delta x) = C_s^{II} \quad (1.51)$$

Podemos representar as concentrações ao longo de um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana porosa através do seguinte esquema:

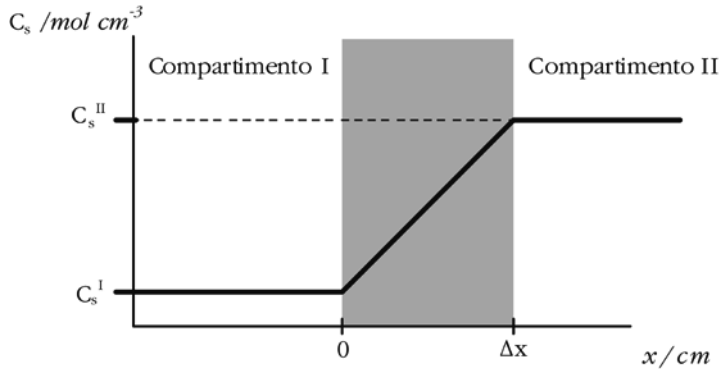


Fig. 1.4 – Representação da variação da concentração de um soluto num sistema de dois compartimentos separados por uma membrana porosa.

Repare-se que a função que representa a concentração nos compartimentos e na membrana é contínua, não existindo a descontinuidade que se verificava na membrana homogénea a nível das interfaces membranares.

Utilizando na equação 1.49 os valores obtidos nas equações 1.50 e 1.51, podemos escrever

$$J_s = -D \cdot \phi \cdot \frac{C_s^{II} - C_s^I}{\Delta x} = \frac{D \cdot \phi}{\Delta x} \cdot \Delta C_s \quad (1.52)$$

Também para este caso podemos definir a permeabilidade de uma membrana porosa a um soluto, que se representa por  $\omega'$  e tem por unidades  $\text{cm s}^{-1}$  no sistema c.g.s.

$$\omega' = \frac{D \cdot \phi}{\Delta x} \quad (1.53)$$

A densidade de corrente de soluto numa membrana porosa poderá então ser obtida por

$$J_s = \omega' \cdot \Delta C_s \quad (1.54)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo I, pp. 24-25.

#### 1.2.2.1. Exercícios resolvidos

Exercício 1.5. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana porosa com 1 mm de espessura e  $120 \text{ cm}^2$  de área total. Através dos poros passam 12 mol de soluto por segundo e 30% da área total de membrana é atravessada por poros. Sabendo que as concentrações de soluto no ponto médio da membrana e no compartimento I são, respectivamente,  $3 \text{ mol dm}^{-3}$  e  $4,5 \text{ mol dm}^{-3}$ , determine:

- A concentração do soluto no compartimento II.
- A constante de difusão livre do soluto.
- A densidade de corrente de difusão de soluto e respectivo sentido.



---

## Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\Delta x = 1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$$

$$A_{total} = 120 \text{ cm}^2$$

$$I_s = 12 \text{ mol s}^{-1}$$

$$A_{poros} = 0,3 A_{total}$$

$$C_s^I = 4,5 \text{ mol dm}^{-3} = 4,5 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$C_s\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 3 \text{ mol dm}^{-3} = 3 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$$

a) Para determinar a concentração no compartimento II podemos desenhar um gráfico que traduz a sua variação ao longo do sistema. No caso das membranas porosas não existem descontinuidades de concentração nas interfaces da membrana com os compartimentos pelo facto desta ser atravessada por poros e, portanto, o solvente preencher também esse espaço.

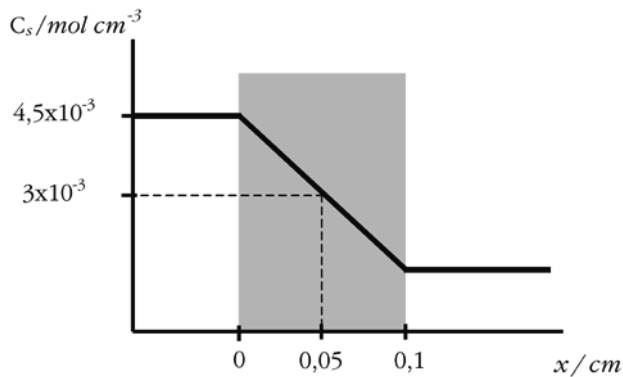


Fig. 1.5 – Esquema do sistema de compartimentos considerado. Por ser tratar de uma membrana porosa, não existem descontinuidades da função que representa a concentração de soluto no sistema.

Como a variação da concentração de soluto ao longo da espessura da membrana é linear, representa-se matematicamente por uma recta, cuja equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_s(x) = a \cdot x + b \quad (1.55)$$

Tendo em conta as condições do problema, podemos determinar os valores em falta por um sistema de equações:

$$\begin{cases} C_s(0) = 4,5 \times 10^{-3} \\ C_s(0,05) = 3 \times 10^{-3} \end{cases} \quad (1.56)$$

$$\begin{cases} 4,5 \times 10^{-3} = a \times 0 + b \\ 3 \times 10^{-3} = a \times 0,05 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4,5 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3} \\ a = -3 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-4} \end{cases} \quad (1.57)$$

Logo,

$$C_s(x) = -3 \times 10^{-2} x + 4,5 \times 10^{-3} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)} \quad (1.58)$$

Para determinar a concentração no compartimento II, basta substituir, na equação 1.58, a variável  $x$  por 0,1 (espessura da membrana). Note-se que o valor da concentração no compartimento II é igual ao valor da concentração na interface da membrana com esse mesmo compartimento. Assim, tem-se:

$$C_s^{II} = C_s(0,1) = -3 \times 10^{-2} \times 0,1 + 4,5 \times 10^{-3} = 1,5 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.59)$$

b) A constante de difusão livre do soluto no solvente pode ser determinada com base na equação 1.52. Para isso temos que determinar primeiro a densidade de corrente de soluto por difusão:

$$J_s = \frac{I_s}{A} \Rightarrow J_s = \frac{12}{120} = 0,1 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.60)$$

Note-se que a área de poros representa 30% da área total ( $A_{\text{poros}} = 0,3 A_{\text{total}}$ ), relação que nos permite calcular o valor de  $\phi$ :

$$\phi = \frac{A_{\text{poros}}}{A_{\text{Total}}} \Rightarrow \phi = \frac{0,3 \times A_{\text{Total}}}{A_{\text{Total}}} = 0,3 \quad (1.61)$$

A diferença de concentrações entre os compartimentos I e II será dada por:

$$\begin{aligned}\Delta C_s &= C_s^I - C_s^{II} \Rightarrow \\ \Delta C_s &= 4,5 \times 10^{-3} - 1,5 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \\ \Delta C_s &= 3 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}\end{aligned} \quad (1.62)$$

Finalmente, substituindo os valores anteriormente calculados na equação 1.52, e resolvendo a equação em ordem a  $\phi$ , teremos:

$$0,1 = \frac{D \times 0,3}{0,1} \times 3 \times 10^{-3} \Leftrightarrow D = 11,11 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad (1.63)$$

c) A densidade de corrente de difusão de soluto foi calculada na alínea anterior (equação 1.60), pelo que a resposta é:

$$J_s = 0,1 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.64)$$

Como  $J_s > 0$ , podemos afirmar que a corrente vai do compartimento I para o compartimento II., ou seja, no sentido convencionado como positivo.

---

Exercício 1.6. Uma membrana porosa com 100  $\mu\text{m}$  de espessura, 100  $\text{cm}^2$  de área total e 20  $\text{cm}^2$  da sua área ocupada por poros, separa duas soluções de um mesmo soluto num sistema de dois compartimentos. Supondo que através da membrana passam 20 mol de soluto por unidade de tempo (do Sistema Internacional) e que a constante de difusão livre do soluto no solvente é igual a 0,02  $\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , determine:

- A concentração de uma das soluções, sabendo que a concentração da outra solução é de 0,2  $\text{mol cm}^{-3}$ .
- A densidade de corrente de difusão através da membrana.

---

## Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\Delta x = 100 \mu m = 1 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

$$A_{total} = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_{poros} = 20 \text{ cm}^2$$

$$|I_s| = 20 \text{ mol s}^{-1}$$

$$D = 2 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

a) Sabemos que a concentração num dos compartimentos (I ou II) é igual a:

$$C_s = 0,2 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.65)$$

Considerando o movimento do soluto no sentido convencionado como positivo, podemos escrever

$$J_s = \frac{I_s}{A} \Rightarrow J_s = \frac{20}{100} = 0,2 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.66)$$

$$\phi = \frac{A_{poros}}{A_{total}} \Rightarrow \phi = \frac{20}{100} = 0,2 \quad (1.67)$$

Substituindo os valores na equação 1.52, temos

$$0,2 = 0,02 \times 0,2 \frac{\Delta C_s}{100 \times 10^{-4}} \Leftrightarrow \Delta C_s = 0,5 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.68)$$

onde

$$\Delta C_s = C_s^I - C_s^{II} \quad (1.69)$$

Pelas equações 1.68 e 1.69, podemos concluir que

$$C_s^I > C_s^{II} \quad (1.70)$$

Pelas equações 1.69 e 1.70 podemos concluir que a concentração dada no enunciado terá que corresponder ao compartimento II (caso contrário, obteríamos uma concentração negativa para um dos compartimentos).

$$C_s^{II} = 0,2 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.71)$$

Substituindo os valores das equações 1.68 e 1.71 na equação 1.69, vem:

$$0,5 = C_s^I - 0,2 \Leftrightarrow C_s^I = 0,7 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.72)$$

b) A densidade de corrente de difusão através da membrana foi já determinada na alínea anterior (equação 1.66), pelo que a resposta é:

$$\underline{J_s = 0,2 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}} \quad (1.73)$$

#### 1.2.2.2. Exercícios propostos

1. Uma membrana porosa com 0,05 mm de espessura separa duas soluções de dois solutos, A e B, num sistema de dois compartimentos. No compartimento I as concentrações dos solutos A e B são 0,3 M e 0,2 M, respectivamente. No compartimento II as suas concentrações são, respectivamente, 0,1 M e 0,5 M. Sabendo que as dimensões das moléculas de qualquer dos solutos são inferiores às dimensões dos poros, que os coeficientes de difusão livre dos solutos A e B são iguais a  $10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , respectivamente e que a densidade total de corrente de difusão é igual a  $3 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , determine a percentagem de área permeável.
2. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana porosa. No compartimento I encontra-se uma solução de um só soluto (solute A) cuja concentração é 0,6 M, e no compartimento II encontra-se uma solução de um só soluto (solute B) cuja concentração é 0,4 M. A relação entre o volume da membrana e o volume dos seus poros é igual a 10 e a espessura da membrana é igual a 20  $\mu\text{m}$ . Sabendo que os coeficientes de difusão dos solutos A e B são iguais a  $5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $1 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , respectivamente, e que as dimensões dos poros são muito superiores às das moléculas dos solutos A e B, determine a densidade total de corrente de difusão através da membrana.

3. Uma membrana porosa separa soluções de dois solutos, A e B, num sistema de dois compartimentos. Sabendo que:

$$D_{(A)} = D_{(B)}$$

$$C_A^I = 0,1 \text{ mol cm}^{-3}$$

$$C_B^{II} = 0,05 \text{ mol cm}^{-3}$$

$$\Delta C_A + \Delta C_B = 0,05 \text{ mol cm}^{-3}$$

$$J_A = 0,5 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$J_s(\text{total}) = 0,25 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

e que as dimensões das moléculas dos dois solutos são inferiores às dimensões dos poros, determine as concentrações dos solutos A e B em cada um dos compartimentos.

4. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana porosa com 0,05 cm de espessura, 2,5 cm<sup>2</sup> de área total. A membrana tem 1500 poros, cada um com um raio igual a  $\sqrt{4/\pi} \times 10^{-2}$  cm. Sendo a constante de difusão igual a  $2,5 \times 10^{-5}$  cm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup> e sabendo que as concentrações de soluto no compartimento I e no interior da membrana, a 0,04 cm da interface membrana - compartimento I, são de 6 M e  $2 \times 10^{-3}$  mol cm<sup>-3</sup>, respectivamente, calcule:

- A concentração do soluto no recipiente II.
- A corrente de difusão do soluto através da membrana durante 1 minuto.

5. Suponha uma membrana porosa com 1 mm de espessura e área total de 140 cm<sup>2</sup> a separar dois compartimentos. Através dos poros passam 14 mol de soluto por segundo. Sabe-se que a área permeável é de 42 cm<sup>2</sup> e que as concentrações do soluto no compartimento I e no ponto médio da membrana são, respectivamente, 4500 mol dm<sup>-3</sup> e 5 mol cm<sup>-3</sup>. Determine:

- A concentração de soluto no compartimento II.
- A constante de difusão livre do soluto.

- c) A densidade de corrente de soluto, indicando o sentido da corrente.
6. Considere uma membrana porosa com  $200\ \mu\text{m}$  de espessura e  $150\ \text{cm}^2$  de área total a separar duas soluções de um mesmo soluto. Por minuto atravessam a membrana  $1,08 \times 10^{-2}\ \text{mol}$  de soluto e a constante de difusão livre do soluto é  $4 \times 10^{-4}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$ . Sabendo que o gradiente de concentração é  $1,5 \times 10^{-2}\ \text{mol cm}^{-4}$  e que a concentração no ponto médio da membrana é  $3,5 \times 10^{-4}\ \text{mol cm}^{-3}$ , calcule:
- A densidade de corrente, indicando o sentido do deslocamento do soluto.
  - A diferença de concentração existente entre os dois compartimentos, indicando aquele em que esta é maior.
  - A área da membrana ocupada por poros.
7. Considere uma membrana porosa com  $54\ \text{cm}^2$  de área ocupada por poros, através da qual passam  $2,16 \times 10^{-4}\ \text{mol}$  de um soluto por segundo. Sabe-se que as concentrações do soluto no compartimento I e no ponto médio da membrana são, respectivamente,  $5 \times 10^{-5}\ \text{mol cm}^{-3}$  e  $3 \times 10^{-2}\ \text{mol dm}^{-3}$  e que a constante de difusão livre do soluto é  $3 \times 10^{-4}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$ . Determine:
- A concentração de soluto no compartimento II.
  - A espessura da membrana.
  - A função que traduz a concentração do soluto ao longo da membrana.
  - A área total da membrana, se a densidade de corrente de soluto através dela tiver um valor absoluto de  $1,6 \times 10^{-6}\ \text{mol cm}^{-2}\ \text{s}^{-1}$ .
8. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana porosa com  $75\ \mu\text{m}$  de espessura e  $50\ \text{cm}^2$  de área total, da qual  $30\ \text{cm}^2$  está ocupada por poros. Por minuto atravessam a membrana  $3,9 \times 10^{-4}\ \text{mol}$  de soluto. Sabendo que as concentrações a  $27\ \mu\text{m}$  das interfaces da membrana com os compartimentos I e II são, respectivamente,  $4,66 \times 10^{-5}\ \text{mol dm}^{-3}$  e  $2,84 \times 10^{-2}\ \text{mol dm}^{-3}$ , calcule:

- a) A densidade de corrente de soluto através da membrana, indicando o sentido da corrente.
- b) A função que traduz a concentração de soluto ao longo da membrana.
- c) A constante de difusão de soluto.
9. Uma membrana porosa com  $125\ \mu\text{m}$  de espessura e  $40\ \text{cm}^2$  de área total, da qual 80% está ocupada por poros, separa dois compartimentos com soluções de um mesmo soluto, cuja diferença de concentrações é de  $1 \times 10^{-5}\ \text{mol cm}^{-3}$ . Sabendo que a constante de difusão livre do soluto é de  $7,5 \times 10^{-4}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$ , que a concentração de soluto no compartimento I é superior à do compartimento II e que a concentração no ponto médio da membrana é de  $4,5 \times 10^{-5}\ \text{mol cm}^{-3}$ , calcule:
- a) As concentrações de soluto nos compartimento I e II.
- b) A permeabilidade da membrana ao soluto.
- c) A intensidade de corrente através dos poros, indicando o sentido de deslocamento do soluto.
10. Considere um sistema com dois compartimentos com dois solutos cada, separados por uma membrana porosa com  $150\ \mu\text{m}$  de espessura e  $3\ \text{cm}^3$  de volume, do qual  $0,9\ \text{cm}^3$  são poros. A constante de difusão livre para o soluto A é  $8 \times 10^{-6}\ \text{dm}^2\ \text{s}^{-1}$  e a concentração do soluto B na membrana é dada por  $C_B(x) = 2 \times 10^{-2}x + 7 \times 10^{-4}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ). Sabendo que a soma das densidades de corrente dos dois solutos é  $1,8 \times 10^{-6}\ \text{mol cm}^{-2}\ \text{s}^{-1}$  e que  $|\Delta C_A| = |\Delta C_B|$ , calcule a constante de difusão do soluto B.
11. Uma membrana porosa com  $125\ \mu\text{m}$  de espessura e 70% de área permeável separa duas soluções de dois solutos cada. A concentração dos solutos A e B no ponto médio da membrana são iguais a  $8 \times 10^{-4}\ \text{mol cm}^{-3}$  e a concentração do soluto B no compartimento I é de  $1 \times 10^{-5}\ \text{mol cm}^{-3}$ . Sabendo que a permeabilidade da membrana ao soluto A é  $3,36 \times 10^{-3}\ \text{cm s}^{-1}$  e que  $\Delta C_A = 2 \times \Delta C_B$ , calcule:



- a) A densidade de corrente do soluto A, indicando o sentido do seu deslocamento.
- b) A concentração do soluto B no compartimento II.
- c) A concentração do soluto A nos compartimentos I e II.
- d) A constante de difusão livre do soluto A.
- e) A densidade de corrente total, sabendo que  $\omega'_A = 3 \times \omega'_B$ .
12. Considere uma membrana porosa com  $300 \text{ cm}^2$  de área total a separar um sistema de dois compartimentos, contendo soluções de um mesmo soluto. Por segundo atravessam a membrana  $1,08 \times 10^{-3} \text{ mol}$  de soluto. Sabe-se que a concentração de soluto ao longo da membrana é dada por  $C_s(x) = -4 \times 10^{-2}x + 6 \times 10^{-4} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$ , que a constante de difusão livre do soluto é  $3 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e que a permeabilidade da membrana ao soluto é de  $1,8 \times 10^{-2} \text{ cm s}^{-1}$ . Determine:
- a) A espessura da membrana.
- b) A área ocupada por poros.
13. Um sistema de dois compartimentos é separado por uma membrana porosa com  $0,125 \text{ mm}$  de espessura e  $240 \text{ cm}^2$  de área, com 10% de área permeável. No compartimento I encontra-se uma solução de um só composto (soluto A) a uma concentração de  $3 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$ ; no compartimento II encontra-se dissolvido apenas um soluto B, a uma concentração de  $0,1 \text{ mol L}^{-1}$ . Sabendo que a constante de difusão livre do soluto B é metade da constante de difusão livre do soluto A, calcule:
- a) A relação existente entre as densidades de corrente dos dois solutos.
- b) A permeabilidade da membrana ao soluto B, considerando que por segundo atravessam a membrana  $5,76 \times 10^{-5} \text{ mol}$  de soluto A.
14. Considere dois sistemas de dois compartimentos cada, contendo duas soluções de um mesmo soluto. Num dos sistemas, as duas soluções estão

separadas por uma membrana homogénea com coeficiente de partição igual a 0,8 e constante de difusão igual a  $0,1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . No outro sistema, as soluções estão separadas por uma membrana porosa de igual espessura e constante de difusão, com 40% de área permeável. Sabendo que a densidade de corrente de soluto que atravessa cada membrana por difusão é a mesma, determine a relação que se observa para as diferenças de concentração entre os dois compartimentos nos dois sistemas.

### 1.2.3. Sistemas de membranas

Até este momento considerámos sistemas de dois compartimentos separados por um de dois tipos de membranas. Vamos agora analisar sistemas em que a membrana que separa os compartimentos é composta por mais de que um dos tipos analisados.

#### 1.2.3.1 Membranas mistas

Imaginemos um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana constituída por duas fases: uma delas com características de membrana homogénea e a outra de membrana porosa. Na Fig. 1.6 encontra-se o esquema representativo deste sistema.

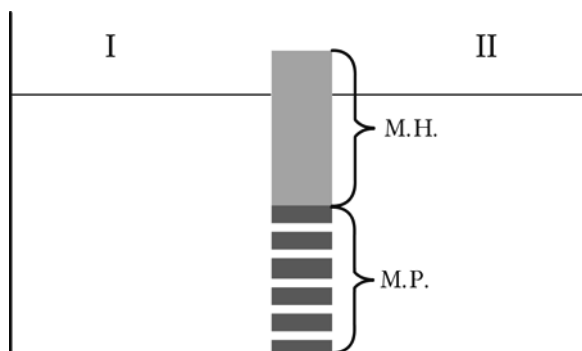


Fig. 1.6 – Esquema representativo de uma membrana mista. M.H. representa a fase homogénea da membrana e M.P. representa a fase que se comporta como uma membrana porosa, onde apenas a área ocupada por poros é permeável.

Para a fase homogénea podemos calcular a densidade de corrente de soluto por difusão utilizando a equação 1.30. Este valor dá-nos o número de mol que atravessam 1 cm<sup>2</sup> de membrana na fase homogénea, por unidade de tempo.

Para a fase porosa podemos usar a equação 1.52 para calcular a densidade de corrente de soluto por forças de difusão. É importante reforçar a ideia que apenas a área ocupada por poros é permeável, sendo o resto da membrana na fase porosa impermeável ao soluto. A fracção permeável da fase porosa, representada por  $\phi$  pode ser calculada por

$$\phi = \frac{A_{poros}}{A_{M.P.}} \quad (1.74)$$

Para determinar a densidade de corrente total nesta membrana temos que ter em conta as fracções de área ocupada por cada uma das fases. Denominando por  $f$  a fracção da membrana ocupada pela fase homogénea, obtemos

$$fracção(M.H.) = \frac{A_{M.H.}}{A_{M.P.} + A_{M.H.}} = f \quad (1.75)$$

$$fracção(M.P.) = \frac{A_{M.P.}}{A_{M.P.} + A_{M.H.}} = 1 - f \quad (1.76)$$

Repare-se que o valor de  $f$  se situa entre 0 e 1 e é adimensional. Por cada cm<sup>2</sup> de área da membrana mista,  $f$  cm<sup>2</sup> encontram-se ocupados por uma fase homogénea, enquanto  $(1 - f)$  cm<sup>2</sup> estão ocupados por uma fase que se comporta como membrana porosa. Portanto, a densidade de corrente da membrana mista é dada pelas respectivas fracções das densidades de corrente calculadas para cada uma das fases, ou seja

$$J_s = f \cdot J_s(M.H.) + (1 - f) \cdot J_s(M.P.) \quad (1.77)$$

Utilizando as equações 1.30, 1.52 e 1.77 obtemos

$$J_s = \frac{A_{M.H.}}{A_{M.P.} + A_{M.H.}} \times \frac{D_m \cdot k}{\Delta x} \cdot \Delta C_s + \frac{A_{M.P.}}{A_{M.P.} + A_{M.H.}} \times \frac{D \cdot \phi}{\Delta x} \cdot \Delta C_s \quad (1.78)$$

### 1.2.3.2 Membranas homogéneas atravessadas por poros

Outro tipo de sistema de membranas é a membrana homogénea atravessada por poros. Corresponderá a uma membrana porosa em que a porção não atravessada por poros se comporta como uma membrana homogénea. A Fig. 1.7 traduz esquematicamente este tipo de sistema.

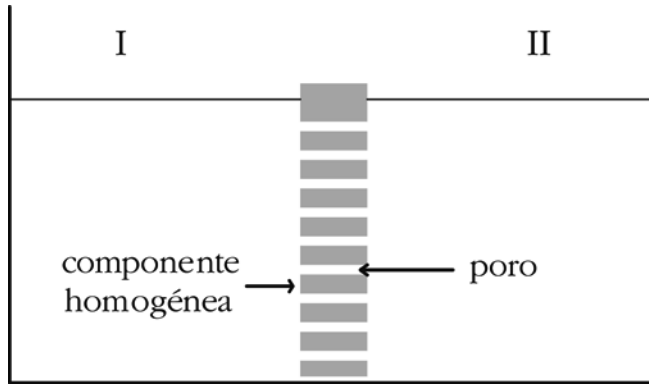


Fig. 1.7 – Representação de uma membrana homogénea atravessada por poros. A área da membrana representada a cinzento comporta-se como uma membrana homogénea, sendo, por isso, permeável.

É de realçar que neste tipo de membrana toda a área é permeável ao soluto, ao contrário do que acontece com as membranas mistas. Podemos calcular a fracção de área ocupada por poros,  $\phi$ , através da equação 1.47. Repare-se que a área ocupada pela componente homogénea da membrana corresponde a  $(1-\phi) \times A_{total}$ .

A densidade de corrente de soluto por difusão nesta membrana pode ser calculada de forma semelhante à utilizada nas membranas mistas. Para isso basta calcular a densidade de corrente através da fase homogénea ( $J_s(M.H.)$ ) e através de  $1 \text{ cm}^2$  completamente ocupado por poros ( $J_s(\text{poros})$ ), multiplicando-as pelas respectivas fracções de ocupação da membrana, ou seja,

$$J_s = (1-\phi) \cdot J_s(M.H.) + \phi \cdot J_s(\text{poros}) \quad (1.79)$$

A densidade de corrente para a fase homogénea pode ser calculada pela equação 1.30. A densidade de corrente através de  $1 \text{ cm}^2$  de poros calcula-se pela aplicação directa da primeira lei de Fick (uma vez que toda a área considerada é permeável).

$$J_s(\text{poros}) = -D \cdot \frac{dC_s}{dx} = \frac{D}{\Delta x} \cdot \Delta C_s \quad (1.80)$$

Assim, a densidade de corrente por difusão numa membrana homogénea atravessada por poros é dada por

$$J_s = (1-\phi) \cdot \frac{D_m \cdot k}{\Delta x} \cdot \Delta C_s + \frac{D \cdot \phi}{\Delta x} \cdot \Delta C_s \quad (1.81)$$

que pode ser escrita como

$$J_s = (1-\phi) \cdot J_s(M.H.) + J_s(M.P.) \quad (1.82)$$

onde  $J_s(M.P.)$  representa a densidade de corrente através da totalidade da membrana, considerando a porção homogénea impermeável.

### 1.2.3.3. Exercícios resolvidos

Exercício 1.7. Uma membrana com  $5 \mu\text{m}$  de espessura e  $200 \text{ cm}^2$  de superfície total separa duas soluções de um mesmo soluto, num sistema de dois compartimentos. A membrana divide-se em duas porções: a primeira, que constitui 90% do total da membrana, comporta-se como membrana homogénea e a segunda, que se comporta como membrana porosa, tem  $10 \text{ cm}^2$  de área ocupada por poros. Sabendo que a permeabilidade da componente homogénea é igual a  $2 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$ , que a constante de difusão do soluto na componente porosa é igual a  $3 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e que através da componente homogénea da membrana passam  $9 \times 10^{-6} \text{ mol}$  de soluto por unidade de tempo do sistema c.g.s. (do compartimento I para o compartimento II), determine o número total de moles de soluto que atravessam a membrana por difusão e por unidade de tempo do sistema c.g.s.

---

## Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\Delta x = 5 \mu m = 5 \times 10^{-4} cm$$

$$A_{total} = 200 cm^2$$

$$A_{M.H.} = 0,9 \times A_{total}$$

$$A_{poros} = 10 cm^2$$

$$P_s = 2 \times 10^{-3} cm s^{-1}$$

$$D = 3 \times 10^{-6} cm^2 s^{-1}$$

$$I_s(M.H.) = 9 \times 10^{-6} mol s^{-1}$$

Podemos começar por calcular a fracção de poros relativa à parte da membrana que é porosa. A membrana porosa ocupa 10% da área total, pelo que:

$$A_{M.P.} = 0,10 \times A_{total} \Rightarrow A_{M.P.} = 0,10 \times 200 = 20 cm^2 \quad (1.83)$$

Como a área ocupada pelos poros é dada, podemos determinar a fracção ocupada por poros:

$$\phi = \frac{A_{poros}}{A_{M.P.}} \Rightarrow \phi = \frac{10}{20} = 0,5 \quad (1.84)$$

A diferença de concentração entre os dois compartimentos pode ser calculada a partir da expressão de densidade de corrente para a membrana homogénea, a qual é dada pela equação 1.32.

Apesar de não nos ser dado o valor de densidade de corrente, podemos determiná-lo, uma vez que conhecemos o valor da corrente de difusão que atravessa a fase homogénea da membrana. Calculando a área de membrana homogénea,

$$A_{M.H.} = 0,90 \times A_{total} \Rightarrow A_{M.H.} = 0,90 \times 200 = 180 cm^2 \quad (1.85)$$

podemos calcular a densidade de corrente de difusão na parte relativa à membrana homogénea, que será igual a:

$$J_s(M.H.) = \frac{I_s(M.H.)}{A_{M.H.}} = \frac{9 \times 10^{-6}}{180} = 5 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.86)$$

Podemos agora determinar a diferença de concentração entre os compartimentos I e II por substituição dos valores na equação 1.32

$$5 \times 10^{-8} = 2 \times 10^{-3} \Delta C_s \Leftrightarrow \Delta C_s = 2,5 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.87)$$

Estamos agora em condições de determinar a densidade de corrente de difusão que atravessa a parte porosa da membrana, através da expressão:

$$J_s(M.P.) = D \phi \frac{\Delta C_s}{\Delta x} \quad (1.88)$$

Substituindo os valores, vem:

$$J_s(M.P.) = 3 \times 10^{-6} \times 0,5 \times \frac{2,5 \times 10^{-5}}{5 \times 10^{-4}} = 7,5 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.89)$$

A relação entre o número de moles que, por unidade de tempo, atravessa a parte porosa da membrana (que é a corrente de difusão) e a densidade de corrente é dada pela expressão:

$$J_s(M.P.) = \frac{I_s(M.P.)}{A_{M.P.}} \quad (1.90)$$

Substituindo os valores e resolvendo a equação em ordem a  $I_s(M.P.)$ , temos:

$$7,5 \times 10^{-8} = \frac{I_s(M.P.)}{20} \Leftrightarrow I_s(M.P.) = 1,5 \times 10^{-6} \text{ mol s}^{-1} \quad (1.91)$$

Para sabermos o número total de moles que, por unidade de tempo, atravessa toda a membrana basta somar as contribuições das partes homogénea e porosa. Assim:

$$\begin{aligned} I_s(\text{total}) &= I_s(M.H.) + I_s(M.P.) \Rightarrow \\ I_s(\text{total}) &= 9 \times 10^{-6} + 1,5 \times 10^{-6} = 1,05 \times 10^{-5} \text{ mol s}^{-1} \end{aligned} \quad (1.92)$$


---

Exercício 1.8. Uma membrana homogénea atravessada por poros com  $3\ \mu\text{m}$  de espessura separa dois compartimentos contendo soluções de um mesmo soluto. Sabe-se que a componente homogénea da membrana ocupa uma área duas vezes superior à ocupada por poros. Sabendo que para a componente homogénea a permeabilidade ao soluto é igual a  $5 \times 10^{-3}\ \text{cm s}^{-1}$ , a densidade de corrente de difusão é igual a  $-3 \times 10^{-8}\ \text{mol cm}^{-2}\ \text{s}^{-1}$ , a concentração do soluto varia segundo a expressão  $C_s(M.H.) = 1 \times 10^{-2}x + 2 \times 10^{-6}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ), e que a constante de difusão do soluto através da componente porosa é igual a  $8 \times 10^{-6}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$ , determine a densidade de corrente de difusão através da totalidade da membrana e a concentração do soluto em cada compartimento.

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\Delta x = 3\ \mu\text{m} = 3 \times 10^{-4}\ \text{cm}$$

$$A_{M.H.} = 2 A_{poros}$$

$$P_s = 5 \times 10^{-3}\ \text{cm s}^{-1}$$

$$J_s(M.H.) = -3 \times 10^{-8}\ \text{mol cm}^{-2}\ \text{s}^{-1}$$

$$C_s(M.H.) = 1 \times 10^{-2}x + 2 \times 10^{-6}\ (\text{mol cm}^{-3})$$

$$D = 8 \times 10^{-6}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$$

Sendo este sistema composto por dois compartimentos separados por uma membrana homogénea atravessada por poros, podemos escrever a seguinte relação:

$$A_{total} = A_{M.H.} + A_{poros} \quad (1.93)$$

Como a relação entre a área de membrana homogénea e a ocupada por poros é  $A_{M.H.} = 2 \times A_{poros}$ , vem:



$$A_{total} = 2A_{M.H.} + A_{poros} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{M.H.} = \frac{2}{3}A_{total} \\ A_{poros} = \frac{1}{3}A_{total} \end{cases} \quad (1.94)$$

$$\phi = \frac{A_{poros}}{A_{total}} = \frac{1}{3} \quad (1.95)$$

$$J_s(M.H.) = P_s \Delta C_s \quad (1.96)$$

$$-3 \times 10^{-8} = 5 \times 10^{-3} \Delta C_s \Leftrightarrow \Delta C_s = -6 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.97)$$

$$C_s(M.H., 0) = 1 \times 10^{-2} \times 0 + 2 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.98)$$

$$C_s(M.H., 3 \times 10^{-4}) = 1 \times 10^{-2} \times 3 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.99)$$

$$C_s(M.H., 0) = kC_s^I \quad (1.100)$$

$$C_s(M.H., 3 \times 10^{-4}) = kC_s^{II} \quad (1.101)$$

Subtraindo membro a membro as equações 1.100 e 1.101, conclui-se que:

$$C_s(M.H., 0) - C_s(M.H., 3 \times 10^{-4}) = k\Delta C_s \quad (1.102)$$

$$2 \times 10^{-6} - 5 \times 10^{-6} = k \times (-6 \times 10^{-6}) \Leftrightarrow k = 0,5 \quad (1.103)$$

Substituindo, agora os valores nas equações 1.100 e 1.101, obtemos os valores das concentrações nos compartimentos I e II:

$$2 \times 10^{-6} = 0,5 \times C_s^I \Leftrightarrow C_s^I = 4 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.104)$$

$$5 \times 10^{-6} = 0,5 \times C_s^{II} \Leftrightarrow C_s^{II} = 1 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.105)$$

$$J_s(\text{porosa}) = D\phi \frac{\Delta C_s}{\Delta x} \quad (1.106)$$

Note-se que a densidade de corrente relativa à componente porosa calculada desta forma é referida à totalidade de membrana e não apenas à secção permeável. Substituindo os valores conhecidos, vem:

$$J_s(\text{porosa}) = 8 \times 10^{-6} \times \frac{1}{3} \times \frac{(-6 \times 10^{-6})}{3 \times 10^{-4}} = -5,33 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.107)$$

Pela equação 1.82, temos

$$J_s(\text{total}) = \frac{2}{3} \times (-3 \times 10^{-8}) + (-5,33 \times 10^{-8}) \quad (1.108)$$

$$J_s(\text{total}) = -7,33 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.109)$$

#### 1.2.3.4. Exercícios propostos

1. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogénea com  $1 \text{ dm}^2$  de área total,  $10 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura e 20% de área atravessada por poros. Os compartimentos contêm soluções de um soluto cujas dimensões das moléculas são muito inferiores às dimensões dos poros. Sabendo que a constante de difusão livre do soluto no solvente é igual a  $10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , a concentração média de soluto interior de um poro é igual a  $1,75 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ , a concentração de soluto no compartimento I é igual a  $2,5 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ , e que a relação entre as densidades de corrente é dada por  $J_s(\text{Difusão M.H.}) = J_s(\text{Difusão M.P.})/15$ , determine a corrente de difusão de soluto que atravessa a membrana por minuto.
2. Uma membrana com  $150 \text{ cm}^2$  de área total e  $50 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura separa soluções de dois solutos, A e B, num sistema de dois compartimentos. 60% da área total da membrana comporta-se como membrana homogénea, e os restantes 40% como membrana porosa com  $15 \text{ cm}^2$  de área permeável. Determine a permeabilidade da componente homogénea relativamente ao soluto B.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$D_A = 8 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$D_B = 4 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$P_A = 5 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$$

$$J_A(M.P.) = 6 \times 10^{-9} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$J_B(M.P.) = -9 \times 10^{-9} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$J_s(\text{total}) = J_A + J_B = -1,8 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

3. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana com  $200 \text{ cm}^2$  de área total e  $5 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura. 70% da área total da membrana é uma membrana homogénea atravessada por poros, sendo a área ocupada por poros igual a  $35 \text{ cm}^2$ . Os restantes 30% da área total de membrana são constituídos por uma membrana porosa com  $15 \text{ cm}^2$  de área ocupada por poros. Para a membrana homogénea o coeficiente de partição e o coeficiente de difusão são, respectivamente, 1,25 e  $3 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , sendo o coeficiente de difusão livre do soluto no solvente igual  $5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Considerando que as dimensões das moléculas de soluto são muito inferiores ao diâmetro dos poros e sabendo que a concentração de soluto num ponto da componente homogénea que dista  $1 \text{ }\mu\text{m}$  da interface com o compartimento I é de  $8 \times 10^{-3} \text{ mol dm}^{-3}$  e que a concentração de soluto no interior de um poro junto da interface com o compartimento II é de  $1,2 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$ , determine a densidade de corrente de difusão de soluto através da membrana, indicando qual o sentido do deslocamento.
4. Considere um sistema formado por três compartimentos. Os compartimentos I e II encontram-se separados por uma membrana porosa com  $2 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura,  $200 \text{ cm}^2$  de área total e 20% de área permeável. Os compartimentos II e III encontram-se separados por uma membrana homogénea de espessura igual a  $2 \text{ }\mu\text{m}$  e coeficiente de partição igual a 0,8. Sabendo que a constante de difusão do soluto na membrana porosa é igual a  $8 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e que a concentração no interior da membrana homogénea é dada por  $C_s(x) = 3 \times 10^{-2} x + 2 \times 10^{-6}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ), determine:
- A constante de difusão para a membrana homogénea, sabendo que o módulo da densidade de corrente de difusão que atravessa a membrana homogénea é igual a  $6 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .
  - A concentração do soluto no compartimento I, sabendo que por unidade de tempo do sistema c.g.s. atravessam a membrana porosa  $4,4 \times 10^{-6} \text{ mol}$  de soluto, do compartimento I para o compartimento II, devido a difusão.

5. Considere duas soluções de um mesmo soluto separadas por uma membrana com  $200 \text{ cm}^2$  de área, dos quais  $60 \text{ cm}^2$  se comportam como membrana homogénea e o restante como membrana porosa com  $98 \text{ cm}^2$  de poros. Sabe-se que  $D = 2 \times D_m$ , que a densidade total de corrente de soluto devido a difusão é de  $6,1 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , que a concentração do soluto na interface membrana homogénea/compartimento I é de  $3,2 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$ . A concentração de soluto ao longo da fase porosa da membrana é dada por  $C_s(x) = -1 \times 10^{-3}x + 4 \times 10^{-5}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ). Calcule a constante de difusão do soluto na fase homogénea da membrana.
6. Um sistema de dois compartimentos é separado por uma membrana mista com  $100 \mu\text{m}$  de espessura, constituída por duas porções: uma fase homogénea com  $60 \text{ cm}^2$  de área e uma fase porosa com  $20 \text{ cm}^2$  de área, sendo 40% ocupada por poros. A permeabilidade da fase homogénea ao soluto é de  $5,6 \times 10^{-2} \text{ cm s}^{-1}$  e a constante de difusão livre do soluto é de  $2 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Sabendo que a intensidade total de corrente de soluto é de  $1,408 \times 10^{-3} \text{ mol s}^{-1}$  (do compartimento I para o compartimento II) e que a concentração no ponto médio da membrana na fase porosa é de  $5 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$  determine as concentrações de soluto nos compartimentos I e II.
7. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogénea atravessada por poros com  $100 \mu\text{m}$  de espessura e  $100 \text{ cm}^2$  de área total, da qual  $30 \text{ cm}^2$  são poros. A permeabilidade da fase porosa ao soluto ( $\omega'$ ) é  $9 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$ , o coeficiente de partição na fase homogénea é 0,8 e a constante de difusão livre do soluto é 10 vezes maior que a constante de difusão na fase homogénea. Sabendo que a concentração de soluto ao longo da fase homogénea é dada por  $C_s(x) = 1,6 \times 10^{-3}x + 1,6 \times 10^{-5}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ), determine:
- A diferença de concentração existente entre os dois compartimentos.
  - A densidade de corrente de soluto através da membrana.

8. Uma membrana homogénea atravessada por poros com  $200 \text{ cm}^2$  de área separa dois compartimentos contendo soluções de um mesmo soluto. Por minuto atravessam a membrana  $1,8144 \times 10^{-2}$  mol de soluto e as constantes de difusão para as fases homogénea e porosa são, respectivamente,  $8 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $6 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Sabe-se que a concentração de soluto ao longo da fase porosa da membrana é dada por  $C_s(x) = -2 \times 10^{-3}x + 6 \times 10^{-5}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ) e que a concentração na interface da fase homogénea da membrana com o compartimento I tem o valor de  $8,4 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ . Calcule a área da membrana ocupada por poros.

9. Considere uma membrana mista que separa duas soluções de dois solutos cada, composta por duas fases: uma comporta-se como membrana homogénea, com  $40 \text{ cm}^2$  de área, e a outra comporta-se como membrana porosa, com  $60 \text{ cm}^2$  de área, 50% da qual é permeável. A fase homogénea da membrana é impermeável ao soluto B. A densidade de corrente de soluto A na fase homogénea da membrana tem o mesmo valor absoluto que a densidade de corrente de soluto B na fase porosa. Sabe-se ainda que:

$$\Delta C_A = -\Delta C_B$$

$$D_{m(A)} = D_{(B)}$$

$$D_{(A)} = 4 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$C_A(x) \text{ (MH)} = 1,875 \times 10^{-3}x + 3 \times 10^{-5} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$$

$$J_A + J_B = 2,25 \times 10^{-7} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Determine:

- O coeficiente de partição da fase homogénea para o soluto A.
  - A concentração de soluto A no compartimento I.
  - A constante de difusão livre do soluto B.
10. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogénea atravessada por poros, contendo cada recipiente uma solução de dois solutos, A e B. Sabe-se que:

$$C_A^II = 1 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$C_B^II = 5 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$C_A(0) (MH) = 3,5 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$C_A(x) (MP) = -7,5 \times 10^{-2} x + 7 \times 10^{-4} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$$

$$C_B(x) (MH) = 4,5 \times 10^{-2} x + 2,4 \times 10^{-4} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$$

$$D_{m(A)} = D_{m(B)} = D_m = 2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$D_{(B)} = 2 \times D_{(A)}$$

$$P_B = \omega'_B$$

$$J_A + J_B = -9 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Determine:

- A espessura da membrana.
- O coeficiente de partição da fase homogénea para o soluto B.
- A percentagem de área de membrana ocupada por poros.
- A densidade de corrente do soluto B, indicando o sentido do deslocamento do soluto

### 1.3. Transporte de solutos por arrastamento

Para além dos movimentos de soluto através da membrana devidos a forças de difusão devemos também ter em conta movimentos de soluto devidos a convecção. Entende-se por convecção o movimento de moléculas resultante do movimento do meio onde se encontram.

Consideremos um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana. Através dela existem correntes de soluto devidas da força de difusão e devidas ao movimento de solvente, ou seja, por arrastamento. Podemos afirmar que

$$J_s(\text{total}) = J_s(\text{difusão}) + J_s(\text{arrastamento}) \quad (1.110)$$

A intensidade de corrente de solvente define-se como a quantidade de solvente que, por unidade de tempo, atravessa a membrana. Pode ser dada em número de moles ou em volume, designando-se por  $I_w$  e  $I_v$ , respectivamente. Tal como os solutos, podemos ainda definir a densidade de corrente de solvente, que é dada por

$$J_w = \frac{I_w}{A_{\text{membrana}}} \quad (1.111)$$

ou por

$$J_v = \frac{I_v}{A_{\text{membrana}}} \quad (1.112)$$

consoante a calculemos em quantidade molecular ou em volume. A primeira terá como unidades  $\text{mol cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  no sistema c.g.s., enquanto a segunda tem por unidades  $\text{cm s}^{-1}$  no mesmo sistema.  $J_v$  e  $J_w$  relacionam-se pelo volume molar médio do solvente,  $\overline{V_w}$ , que traduz o volume que uma mol do solvente ocupa e que tem por unidades  $\text{cm}^3 \text{mol}^{-1}$ , no sistema c.g.s. A relação é dada por

$$J_v = J_w \cdot \overline{V_w} \quad (1.113)$$

Designemos por  $\overline{C}_s$  o valor médio da concentração no interior da membrana. Como a concentração ao longo da membrana varia de forma linear, temos

$$\overline{C}_s = \frac{C_s(0) + C_s(\Delta x)}{2} = C_s \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (1.114)$$

Aplicando a equação 1.114 a uma membrana porosa vamos obter

$$\overline{C}_s = \frac{C_s^I + C_s^{II}}{2} \quad (1.115)$$

enquanto que para uma membrana homogénea a mesma equação pode ser reescrita na forma

$$\overline{C}_s = \frac{C_s^I + C_s^{II}}{2} \times k \quad (1.116)$$

pela aplicação do conceito de coeficiente de partição (equação 1.26).

Ao atravessar a membrana,  $1 \text{ cm}^3$  de solvente irá transportar, em média,  $\overline{C}_s$  mol de soluto. Nesse caso, a densidade de corrente de soluto devida ao arrastamento poderia ser calculada da seguinte maneira

$$J_s(\text{arrastamento}) = \overline{C}_s \cdot J_v = \overline{C}_s \cdot J_w \cdot \overline{V}_w \quad (1.117)$$

Mas nem todas as moléculas são arrastadas; algumas delas são reflectidas pela membrana, sendo essa a fracção representada pelo coeficiente de reflexão de Staverman ( $\sigma$ ). Deste modo, a equação 1.117 terá que ser reescrita

$$J_s(\text{arrastamento}) = \overline{C}_s \cdot (1 - \sigma) \cdot J_v = \overline{C}_s \cdot (1 - \sigma) \cdot J_w \cdot \overline{V}_w \quad (1.118)$$

pois  $(1 - \sigma)$  representa a fracção de moléculas que não é reflectida na membrana, ou seja, que a atravessa.

Assim, substituindo os valores na equação 1.110 obtemos

$$J_s(\text{total}) = \frac{D_m \cdot k}{\Delta x} \cdot \Delta C_s + \frac{C_s^I + C_s^{II}}{2} \cdot k \cdot (1 - \sigma) \cdot J_w \cdot \overline{V}_w \quad (1.119)$$

para membranas homogéneas e



$$J_s (total) = \frac{D \cdot \phi}{\Delta x} \cdot \Delta C_s + \frac{C_s^I + C_s^{II}}{2} \cdot (1 - \sigma) \cdot J_w \cdot \overline{V_w} \quad (1.120)$$

para membranas porosas.

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo I, pp. 29-31.

### 1.3.1. Exercícios resolvidos

Exercício 1.9. Considere duas soluções separadas por uma membrana homogênea com  $2 \mu\text{m}$  de espessura e  $80 \text{ cm}^2$  de área. Sabendo que por difusão atravessam a membrana  $1,44 \times 10^{-2} \text{ mol}$  de soluto por unidade de tempo do sistema internacional, que a corrente de solvente é igual a  $16 \text{ mol s}^{-1}$  do compartimento I para o II e que a concentração de soluto no compartimento I é igual a  $2 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ , determine:

- A densidade total de corrente de soluto
- O número total de moles arrastadas por unidade de tempo e por unidade de área.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$\begin{aligned} D_m &= 5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} & k &= 1,2 \\ \sigma &= 0,2 & \overline{V_w} &= 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1} \end{aligned}$$

---

### Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\Delta x = 2 \mu\text{m} = 2 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$A = 80 \text{ cm}^2$$

$$|I_s| = 1,44 \times 10^{-2} \text{ mol s}^{-1}$$

$$I_w = 16 \text{ mol s}^{-1}$$

$$C_s^I = 2 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$D_m = 5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$k = 1,2$$

$$\sigma = 0,2$$

$$\bar{V}_w = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

a) A densidade total de corrente de soluto através de uma homogénea é dada pela expressão:

$$J_s = J_s(\text{total}) + J_s(\text{arrastamento}) = D_m k \frac{\Delta C_s}{\Delta x} + \bar{C}_s (1 - \sigma) J_v \quad (1.121)$$

Começemos por determinar a função que traduz a concentração de soluto ao longo da membrana. Como sabemos que a sua variação é linear, podemos-la representar por uma recta.

$$C_s(x) = a \cdot x + b \quad (1.122)$$

O declive da recta,  $a$ , representa o gradiente de concentração e pode ser determinado através da densidade de corrente de soluto. O seu módulo é dado por:

$$|J_s| = \frac{|I_s|}{A} \Rightarrow |J_s| = \frac{1,44 \times 10^{-2}}{80} = 1,8 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.123)$$

A densidade de corrente relaciona-se com o declive da recta através da expressão:

$$J_s = -D_m \frac{dC_s}{dx} \Leftrightarrow |J_s| = D_m |a| \quad (1.124)$$

Substituindo os valores conhecidos, vem:

$$1,8 \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-4} \times |a| \Leftrightarrow |a| = 0,36 \text{ mol cm}^{-4} \quad (1.125)$$

A concentração no interface da membrana com o compartimento I é dada pela expressão:

$$C_s(0) = k C_s^I \quad (1.126)$$

Substituindo valores, vem:

$$C_s(0) = 1,2 \times 2 \times 10^{-5} \Leftrightarrow C_s(0) = 2,4 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.127)$$

O valor desta concentração corresponde à ordenada na origem,  $b$ . Falta determinar o sinal do gradiente de concentração,  $a$ , para escrever a equação da recta. Para isso temos que calcular a concentração na interface da membrana com o compartimento II para as seguintes situações:

Situação I:  $a < 0$

$$C_s(\Delta x) = C_s(2 \times 10^{-4}) = -0,36 \times 2 \times 10^{-4} + 2,4 \times 10^{-5} = -4,8 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.128)$$

O valor calculado não tem significado físico, uma vez que  $C_s(\Delta x)$  tem que ser um valor positivo. Portanto  $a$  terá que ter um valor positivo.

Situação II:  $a > 0$

$$C_s(\Delta x) = C_s(2 \times 10^{-4}) = 0,36 \times 2 \times 10^{-4} + 2,4 \times 10^{-5} = 9,6 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.129)$$

A concentração no compartimento II é dada por

$$C_s(\Delta x) = k C_s^{II} \quad (1.130)$$

Pelo que,

$$9,6 \times 10^{-5} = 1,2 \times C_s^{II} \Leftrightarrow C_s^{II} = 8 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.131)$$

Podemos determinar a concentração média:

$$\bar{C}_s = \frac{C_s(0) + C_s(\Delta x)}{2} = \frac{2,4 \times 10^{-5} + 9,6 \times 10^{-5}}{2} = 6 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.132)$$

A densidade de corrente de solvente expressa em volume,  $J_v$ , é dada por:

$$J_v = \bar{V}_w J_w \quad (1.133)$$

onde que  $J_w$  corresponde à densidade de solvente através da membrana e é dada por:

$$J_w = \frac{I_w}{A} \Rightarrow J_w = \frac{16}{80} = 0,2 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.134)$$

Substituindo este resultado na equação 1.133, vem:

$$J_v = 20 \times 0,2 = 4 \text{ cm s}^{-1} \quad (1.135)$$

A densidade total de corrente de difusão pode agora ser determinada substituindo os valores na equação 1.119. Tem que se ter em conta que  $J_s(\text{difusão}) < 0$ , uma vez que  $C_s^{II} > C_s^I$ .

$$J_s = -1,8 \times 10^{-4} + 6 \times 10^{-5} \times (1 - 0,2) \times 4 = 1,2 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.136)$$

b) A densidade de corrente de arrastamento total é dada por

$$J_s(\text{arrast.}) = \overline{C_s} \cdot J_v \quad (1.137)$$

uma vez que tem que contabilizar as moléculas reflectidas e as não reflectidas. Substituindo os valores vem:

$$J_s(\text{arrast.}) = 6 \times 10^{-5} \times 4 = 2,4 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.138)$$

Exercício 1.10. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogénea com 20 cm<sup>2</sup> de área total e 10 μm de espessura. Os compartimentos I e II contêm soluções de um mesmo soluto cujas concentrações são 3×10<sup>-4</sup> mol cm<sup>-3</sup> e 4×10<sup>-4</sup> mol cm<sup>-3</sup>, respectivamente. Sabendo que por unidade de tempo do sistema c.g.s. atravessam a membrana 0,1 moles de solvente, do compartimento II para o compartimento I, determine:

- O número total de moles de soluto que atravessam a membrana, por unidade de tempo do sistema internacional, indicando o sentido do deslocamento.
- O número total de moles reflectidas, por unidade de tempo.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$D_m = 5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$k = 1,2$$

$$\sigma = 0,4$$

$$\bar{V}_w = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

### Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$A = 20 \text{ cm}^2$$

$$\Delta x = 10 \mu\text{m} = 1 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$C_s^I = 3 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$C_s^{II} = 4 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$I_w = -0,1 \text{ mol s}^{-1}$$

$$D_m = 5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$k = 1,2$$

$$\sigma = 0,4$$

$$\bar{V}_w = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

a)

$$J_s(\text{dif.}) = D_m k \frac{\Delta C_s}{\Delta x} \quad (1.139)$$

$$J_s(\text{dif.}) = 5 \times 10^{-4} \times 1,2 \times \frac{(3 \times 10^{-4} - 4 \times 10^{-4})}{1 \times 10^{-3}} \quad (1.140)$$

$$J_s(\text{dif.}) = -6 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$J_s(\text{arrast.}) = \bar{C}_s (1 - \sigma) J_w \bar{V}_w = \bar{C}_s (1 - \sigma) \frac{I_w \bar{V}_w}{A} \quad (1.141)$$

$$\begin{aligned} J_s(\text{arrast.}) &= \frac{3 \times 10^{-4} + 4 \times 10^{-4}}{2} \times 1,2 \times (1 - 0,4) \times \frac{(-0,1)}{20} \times 20 \\ &= -2,52 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (1.142)$$

$$J_s(\text{total}) = J_s(\text{dif.}) + J_s(\text{arrast.}) \quad (1.143)$$

$$J_s(\text{total}) = -6 \times 10^{-5} + (-2,52 \times 10^{-5}) = -8,52 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.144)$$

$$I_s(\text{total}) = -8,52 \times 10^{-5} \times 20 = -1,704 \times 10^{-3} \text{ mol s}^{-1} \quad (1.145)$$

b)

$$I_s(\text{reflectidas}) = \bar{C}_s \times \sigma \times |J_w| \times \bar{V}_w \times A \quad (1.146)$$

$$\begin{aligned} I_s(\text{reflectidas}) &= \frac{3 \times 10^{-4} + 4 \times 10^{-4}}{2} \times 1,2 \times 0,4 \times \left( \frac{0,1}{20} \times 20 \right) \times 20 \\ &= 3,36 \times 10^{-4} \text{ mol s}^{-1} \end{aligned} \quad (1.147)$$


---

### 1.3.2. Exercícios propostos

1. Uma membrana homogénea com 1  $\mu\text{m}$  de espessura separa duas soluções de um mesmo soluto num sistema de dois compartimentos. Sabendo que as concentrações de soluto no interior da membrana a uma distância de 0,2  $\mu\text{m}$  das interfaces com os compartimentos I e II são  $1,2 \times 10^{-2} \text{ M}$  e  $9 \times 10^{-3} \text{ M}$ , respectivamente, que 70% das moléculas de soluto que incidem na membrana por arrastamento são reflectidas e que atravessam a membrana 0,1 moles de solvente por unidade de tempo e de área de membrana do sistema c.g.s., do compartimento I para o II, determine:

- a) A concentração de soluto em cada um dos compartimentos.
- b) A densidade total de corrente de soluto através da membrana.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$D_m = 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad k = 0,5 \quad \bar{V}_w = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

2. Uma membrana porosa com 100  $\text{cm}^2$  de superfície total, dos quais 20  $\text{cm}^2$  são ocupados por poros, e 1  $\mu\text{m}$  de espessura separa duas soluções de um mesmo soluto. A concentração de soluto no compartimento II é igual a  $5 \times 10^{-3} \text{ M}$  e no ponto médio da membrana é igual a  $3 \times 10^{-3} \text{ M}$ . Sabendo que

por segundo atravessam a membrana 20 moles de solvente do compartimento I para o II, 20% das moléculas de soluto que incidem na membrana são reflectidas, a constante de difusão livre do soluto no solvente é  $2 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e o volume parcial molar do solvente é igual a  $20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ , determine a densidade total de corrente de soluto que atravessa a membrana.

3. Uma membrana homogénea com espessura de  $100 \mu\text{m}$  e área de  $150 \text{ cm}^2$  separa duas soluções de um mesmo soluto. Por minuto atravessam a membrana  $57,6 \text{ mol}$  de solvente do compartimento I para o compartimento II. A concentração de soluto neste último compartimento é de  $6 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$  e a sua concentração ao longo da membrana é dada por  $C_s(x) = 1,6 \times 10^{-2}x + 3,2 \times 10^{-4}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ). Sabendo que a constante de difusão do soluto na membrana tem o valor de  $5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , que  $\sigma$  é de  $0,8$  e que o volume molar médio do solvente tem o valor de  $20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ , calcule:
- O coeficiente de partição.
  - A densidade de corrente de soluto devida ao arrastamento, indicando o sentido do movimento de soluto.
  - A densidade total de corrente de soluto.
  - A densidade de corrente de solvente (em mol) necessária para que a corrente de soluto através da membrana seja nula.
4. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogénea de  $120 \mu\text{m}$  de espessura através da qual passam  $1,74528 \times 10^{-3} \text{ mol}$  de um soluto por minuto, do compartimento I para o compartimento II, das quais  $1,08 \times 10^{-3} \text{ mol}$  são devidas a forças de difusão. A constante de difusão do soluto na membrana é de  $6 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\sigma$  tem o valor de  $0,6$ , o volume molar médio do solvente é  $20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$  e a concentração na interface da membrana com o compartimento II é

- $2,4 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ . Sabendo que módulo do gradiente de concentração de soluto é de  $3 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-4}$ , determine:
- A concentração no ponto médio da membrana.
  - A área da membrana.
  - A densidade de corrente de solvente (em  $\text{mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ).
5. Um sistema é constituído por dois compartimentos com soluções de um mesmo soluto, separados por uma membrana homogénea. No compartimento I a concentração de soluto é de  $1 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$  e na interface da membrana com o compartimento II é de  $8,4 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ . A corrente total de soluto através da membrana é nula e o coeficiente de partição tem o valor de 1,4. Sabe-se ainda que a constante de difusão do soluto na membrana é de  $3 \times 10^{-6} \text{ dm}^2 \text{ s}^{-1}$ , que o gradiente de concentração de soluto tem o valor de  $-7 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-4}$  e que  $\sigma = 0,8$ . Calcule:
- A permeabilidade da membrana ao soluto.
  - A densidade de corrente de soluto devida a forças de difusão.
  - A densidade de corrente de solvente em volume.
6. Considere dois compartimentos separados por uma membrana porosa com  $120 \mu\text{m}$  de espessura e  $20 \text{ cm}^2$  de área ocupada por poros. Por minuto passam, devido a forças de difusão,  $9 \times 10^{-3} \text{ mol}$  de soluto do compartimento II para o compartimento I. A concentração de soluto na membrana a  $20 \mu\text{m}$  do compartimento I é de  $2,5 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$  e a constante de difusão livre do soluto é  $3 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Sabendo que  $\sigma = 0,8$  e que  $\bar{V}_w = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$  determine:
- A função que traduz a concentração de soluto ao longo da membrana
  - A concentração média do soluto na membrana.
  - A densidade de corrente de solvente em volume para que a corrente de soluto seja nula, considerando a área da membrana igual a  $200 \text{ cm}^2$ .



7. Uma membrana porosa com  $150 \text{ cm}^2$  de área separa dois compartimentos contendo soluções de um mesmo soluto. Sabe-se que a concentração de soluto ao longo da membrana é dada por  $C_s(x) = -3,75 \times 10^{-1}x + 6 \times 10^{-3}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ) e no compartimento II tem o valor de  $3 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ . Tendo a constante de difusão livre do soluto o valor de  $3 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e sabendo que  $30 \text{ cm}^2$  da área da membrana é ocupada por poros, que  $\sigma = 0,8$  e que o volume molar médio do solvente é de  $2 \times 10^{-2} \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$ , calcule:
- A espessura da membrana
  - A intensidade total de corrente de soluto que atravessa a membrana (e respectivo sentido) se, por minuto, passarem  $3,24 \text{ mol}$  de solvente do compartimento II para o compartimento I.
8. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana porosa com  $100 \text{ cm}^2$  de área e  $200 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura. Sabe-se que através dessa membrana passa, por minuto, uma corrente total de soluto de  $5,20608 \times 10^{-4} \text{ mol}$  do compartimento II para o compartimento I e uma corrente de solvente de  $2,868 \times 10^{-1} \text{ mol}$  no mesmo sentido. A concentração de soluto ao longo da membrana é dada por  $C_s(x) = 3 \times 10^{-3}x + 4 \times 10^{-5}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ) e a constante de difusão livre do soluto tem o valor de  $5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Sabendo que  $\sigma = 0,6$  e  $\overline{V}_w = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ , calcule a área da membrana ocupada por poros.

#### 1.4. Correntes de solvente devidas a diferenças de pressão

As correntes de solvente através de membranas são devidas a diferenças de pressão existentes entre os dois compartimentos. Devemos considerar dois tipos de pressão nos nossos sistemas: pressão hidrostática (que representaremos por  $P$ ) e pressão osmótica (que iremos representar por  $\pi$ ).

É possível fazer variar a pressão hidrostática de um fluido pela utilização de êmbolos. Ao exercer pressão sobre o êmbolo, estamos a aumentar a pressão hidrostática a nível do fluido. Em termos de movimento de solvente, a que corresponde este aumento de pressão? Para responder a essa questão, consideremos uma seringa com fluido e um filtro na sua extremidade (que se comporta como uma membrana). Ao exercermos força sobre o êmbolo, aumentamos a pressão do líquido no interior da seringa e este irá atravessar o filtro. Em esquema será

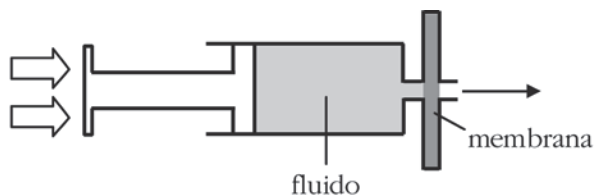


Fig. 1.8 – Representação esquemática de uma seringa contendo um fluido, estando a sua extremidade ocupada por um filtro. As setas representam o local onde se exerce pressão e o sentido de saída do fluido.

Apliquemos agora este conceito a sistemas de dois compartimentos separados por uma membrana. Começemos por considerar que apenas se encontra solvente em cada um dos compartimentos e que existe um êmbolo a aumentar a pressão no compartimento I. Definindo  $\Delta P = P^I - P^{II}$  temos

$$P^I > P^{II} \Leftrightarrow \Delta P > 0 \quad (1.148)$$

Sabemos ainda que a corrente de solvente se vai estabelecer do compartimento I para o compartimento II, ou seja

$$I_w > 0 \Rightarrow J_w > 0 \quad (1.149)$$

$\Delta P$  e  $J_w$  têm o mesmo sinal, situação que se mantém na quando  $P^I < P^{II}$ . Por outro lado sabe-se que à medida que aumenta a diferença de pressão o valor absoluto da densidade de corrente de solvente aumenta de forma proporcional, o que se traduz pela equação

$$J_w = L_p \cdot \Delta P \quad (1.150)$$

onde a constante de proporcionalidade ( $L_p$ ) se denomina coeficiente de filtração e tem por unidades no sistema c.g.s.  $\text{mol dyn}^{-1} \text{s}^{-1}$ .

Consideremos agora um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana semipermeável ideal e onde as pressões hidrostáticas e as concentrações são tais que  $P^I = P^{II}$  e  $C_s^I > C_s^{II}$ . Uma membrana semipermeável ideal é aquela que apenas permite a passagem de solvente (é impermeável a qualquer soluto). Neste sistema apenas ocorre movimento de solvente por osmose, ou seja, devido à presença de moléculas em solução incapazes de atravessar a membrana. Esse movimento ocorre no sentido de igualar as concentrações de soluto, do compartimento com menor concentração para o de maior concentração. Neste caso específico, será do compartimento II para o compartimento I, pelo que

$$I_w < 0 \Rightarrow J_w < 0 \quad (1.151)$$

Estes movimentos decorrem, em última análise, devido a diferenças de pressão osmótica, que corresponde à pressão gerada pelos solutos em solução. Quanto maior for a concentração de solutos na solução, maior será a pressão que é gerada, sendo a relação entre estas duas grandezas dada por

$$\pi_s = C_s \cdot R \cdot T \quad (1.152)$$

onde  $R$  é a constante dos gases ideais e  $T$  corresponde à temperatura a que é realizada a experiência, em graus Kelvin.

Repare-se que o solvente se desloca para o compartimento com maior pressão osmótica. No sistema por nós considerado temos

$$\Delta C_s > 0 \Rightarrow \Delta \pi_s > 0 \quad (1.153)$$

Analisando as equações 1.151 e 1.153 podemos verificar que  $J_w$  e  $\Delta \pi_s$  têm sinais contrários. Estes dois valores relacionam-se pela seguinte equação:

$$J_w = -L_p \cdot \Delta \pi_s \quad (1.154)$$

Repare-se que a constante de proporcionalidade para esta relação é a mesma que a utilizada na equação 1.150. Isto deve-se ao facto de relacionarem as mesmas grandezas (densidade de corrente de solvente e pressão). Esta equação também funciona quando  $C_s^I < C_s^{II}$  (onde  $J_w > 0$ ).

Neste sistema considerámos uma membrana que não permita passagem de soluto, contribuindo todas as moléculas em solução para o movimento de solvente. Num sistema em que a membrana seja permeável ao soluto (mantendo as restantes condições do sistema anterior) o movimento de solvente é gerado pela fracção de moléculas que é reflectida pela membrana, representada pelo coeficiente de reflexão de Staverman ( $\sigma$ ). À pressão osmótica gerada por estas moléculas chama-se pressão osmótica efectiva e o seu valor é dado por

$$\sigma \cdot \pi_s = \sigma \cdot C_s \cdot R \cdot T \quad (1.155)$$

Podemos agora reescrever a equação 1.154:

$$J_w = -L_p \cdot \sigma \cdot \Delta \pi_s \quad (1.156)$$

O caso da membrana semipermeável ideal será aquele em que se verifica a condição  $\sigma = 1$ .

Por fim, consideremos uma membrana em que  $C_s^I \neq C_s^{II}$  e  $P^I \neq P^{II}$ . A densidade de corrente de solvente será então dada pela soma das equações 1.150 e 1.156:

$$J_w = L_p \cdot \Delta P - L_p \cdot \sigma \Delta \pi = L_p (\Delta P - \sigma \Delta \pi) \quad (1.157)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo I, pp. 32-35;50-52.

#### 1.4.1. Aplicações: espaço pleural

A equação 1.157 pode ser aplicada a diversas situações em sistemas biológicos. Iremos abordar a circulação de fluidos através do espaço pleural.

A pleura é uma membrana serosa composta por um epitélio pavimentoso simples de origem mesodérmica, que se situa entre os pulmões e a parede torácica. É composta por dois folhetos, resultantes da sua reflexão a nível dos hilos pulmonares: um folheto parietal, que reveste a parede torácica, e um folheto visceral, que reveste directamente os pulmões. Entre estes dois folhetos existe um espaço que contém uma pequena quantidade de líquido pleural. Esta membrana tem como funções compartimentalizar, diminuir a fricção entre os pulmões e a parede da cavidade torácica (pela presença do líquido pleural) e gerar um gradiente de pressão.

A vascularização dos folhetos parietal e visceral é distinta. No folheto parietal a vascularização é feita por ramos das artérias intercostais, diafragmáticas, mediastínicas e mamárias internas, que têm origem, em última análise, na aorta torácica. Já o folheto visceral da pleura é vascularizado através das artérias pulmonares (circulação pulmonar) e, acessoriamente, por ramos das artérias brônquicas, provenientes da aorta torácica (circulação sistémica).

No que diz respeito à drenagem linfática também há diferenças entre os dois folhetos. A pleura parietal apresenta uma rede muito rica de linfáticos na camada conjuntiva submesotelial que comunicam directamente com o espaço pleural através de estomas. Os estomas são aberturas entre as células mesoteliais com diâmetro entre 1 e 6  $\mu\text{m}$ , cujo número por unidade de superfície é variável entre as várias regiões da pleura e que aumentam com o estiramento da caixa torácica durante a inspiração. A linfa é drenada através de lacunas linfáticas submesoteliais para vasos colectivos, atingindo o canal direito e o canal torácico via mamária interna, intercostal e linfáticos mediastínicos. A pleura visceral não apresenta estomas, não havendo comunicação directa entre o espaço pleural e a rica rede linfática que recobre a superfície pulmonar.

Em esquema podemos representar o espaço pleural do seguinte modo:

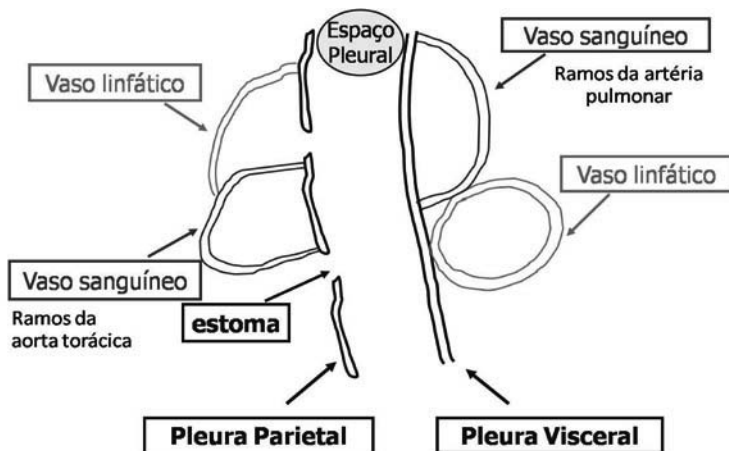


Fig 1.9 – Representação esquemática do espaço pleural.

Para determinar a corrente de soluto entre os vasos e o espaço pleural, podemos utilizar a seguinte equação:

$$J_w = L_p \left[ (P_c - P_{liq}) - \sigma \cdot (\pi_c - \pi_{liq}) \right] \quad (1.158)$$

onde  $P_c$  e  $\pi_c$  representam as pressões hidrostática e osmótica nos capilares subpleurais e  $P_{liq}$  e  $\pi_{liq}$  as pressões hidrostática e osmótica no líquido pleural.

Repare-se que o sentido considerado como positivo para a corrente é dos capilares para o espaço pleural.

Consideremos agora os movimentos de solvente para cada um dos folhetos pleurais. As pressões osmótica e hidrostática do líquido pleural são:

$$P_{liq} = -5 \text{ mmHg} \quad (1.159)$$

$$\pi_{liq} = 6 \text{ mmHg} \quad (1.160)$$

Para o folheto parietal temos as seguintes pressões nos diferentes compartimentos:

$$P_{c.sanguineo} = 23 \text{ mmHg} \quad (1.161)$$

$$\pi_{c.sanguineo} = 26 \text{ mmHg} \quad (1.162)$$

$$P_{c.linfático} = 4 \text{ mmHg} \quad (1.163)$$

$$\pi_{c.linfático} = 19 \text{ mmHg} \quad (1.164)$$

$$P_{interstício} = -6 \text{ mmHg} \quad (1.165)$$

$$\pi_{interstício} = 4,5 \text{ mmHg} \quad (1.166)$$

Com estes valores podemos determinar as pressões eficazes de filtração entre cada par de compartimentos, que estão representadas na Fig. 1.10.

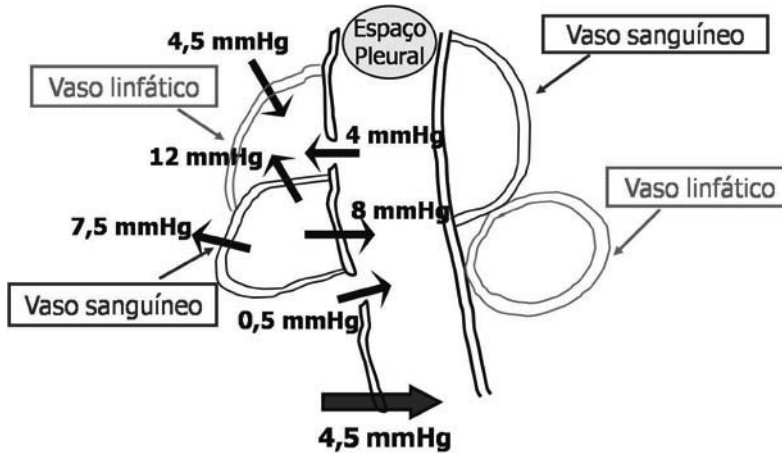


Fig. 1.10 – Pressões de filtração no folheto parietal da pleura.

A pressão de filtração total através do folheto parietal da pleura encontra-se representada no esquema anterior e tem o valor de 4,5 mmHg, sendo responsável pela entrada de fluido no espaço pleural. Fazemos agora as mesmas contas para a pleura visceral. Para isso é necessário ter os valores das pressões nos capilares e no interstício:

$$P_{c.sanguíneo} = 8 \text{ mmHg} \quad (1.167)$$

$$\pi_{c.sanguíneo} = 26 \text{ mmHg} \quad (1.168)$$

$$P_{c.linfático} = 4 \text{ mmHg} \quad (1.169)$$

$$\pi_{c.linfático} = 19 \text{ mmHg} \quad (1.170)$$

$$P_{intersticio} = -6 \text{ mmHg} \quad (1.171)$$

$$\pi_{intersticio} = 4,5 \text{ mmHg} \quad (1.172)$$

As pressões de filtração serão as seguintes:

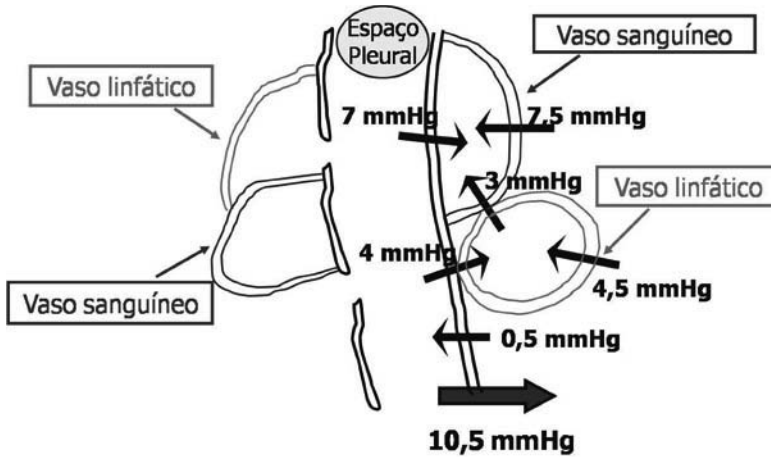


Fig. 1.11 – Pressões de filtração no folheto visceral da pleura.

Analisando o esquema verificamos que a pressão de filtração total através da pleura visceral tem o valor de 10,5 mmHg, saindo o fluido do espaço pleural.

A pressão total de filtração através da pleura parietal é inferior àquela que se encontra no folheto visceral da pleura. Assumindo que ambos os folhetos têm o mesmo coeficiente de filtração, obtnhamos:

$$|J_w(\text{parietal})| < |J_w(\text{visceral})| \quad (1.173)$$

Nesta situação deixaria de existir fluido no espaço pleural, uma vez que saía mais líquido que aquele que entrava. Para que se mantenha a quantidade de líquido nesse espaço será necessário que as densidades de corrente sejam iguais para os dois folhetos. Nessa condição, e tendo em conta as pressões de filtração totais através da pleura temos:

$$|J_w(\text{parietal})| = |J_w(\text{visceral})| \Rightarrow L_p(\text{parietal}) > L_p(\text{visceral}) \quad (1.174)$$



Deste modo concluímos que a pleura parietal terá que ter um maior coeficiente de filtração que a visceral, ou seja, terá que permitir uma passagem de maior quantidade de solvente por unidade de área e de tempo quando submetida a uma diferença de pressão efectiva igual à do folheto visceral.

#### 1.4.2. Exercícios resolvidos

Exercício 1.11. Um sistema de dois compartimentos encontra-se dividido por uma membrana porosa com  $10\ \mu\text{m}$  de espessura, e 30% de área ocupada por poros. As pressões hidrostáticas nos compartimentos I e II são  $760\ \text{mmHg}$  e  $900\ \text{mmHg}$ , respectivamente. Sabendo que as concentrações do soluto no compartimento II e num ponto da membrana situado na interface com o compartimento I são, respectivamente,  $2 \times 10^{-3}\ \text{M}$  e  $4 \times 10^{-3}\ \text{M}$ , determine a densidade total de corrente de soluto através da membrana.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$D = 5 \times 10^{-7}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1} \quad R = 8,314\ \text{J}\ \text{mol}^{-1}\ \text{K}^{-1} \quad \sigma = 0,2$$

$$L_p = 1 \times 10^{-11}\ \text{mol}\ \text{dyn}^{-1}\ \text{s}^{-1} \quad \bar{V}_w = 20\ \text{cm}^3\ \text{mol}^{-1} \quad t = 37\ \text{°C}$$

#### Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\Delta x = 10\ \mu\text{m} = 1 \times 10^{-3}\ \text{cm}$$

$$\phi = 0,3$$

$$P_I = 760\ \text{mmHg}$$

$$P_{II} = 900\ \text{mmHg}$$

$$C_s^I = 4 \times 10^{-3}\ \text{M} = 4 \times 10^{-6}\ \text{mol}\ \text{cm}^{-3}$$

$$C_s^{II} = 2 \times 10^{-3}\ \text{M} = 2 \times 10^{-6}\ \text{mol}\ \text{cm}^{-3}$$

$$D = 5 \times 10^{-7}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$$

$$R = 8,314\ \text{J}\ \text{mol}^{-1}\ \text{K}^{-1} = 8,314 \times 10^7\ \text{erg}\ \text{mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}$$

$$\sigma = 0,2$$

$$L_p = 1 \times 10^{-11} \text{ mol dyn}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$\bar{V}_w = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$T = 37^\circ \text{C} = 310 \text{ K}$$

A densidade total de corrente de soluto através de uma membrana porosa é dada pela equação 1.120. A densidade de corrente devido à difusão pode ser determinada com base na expressão

$$J_s(\text{dif.}) = D\phi \frac{\Delta C_s}{\Delta x} \quad (1.175)$$

onde  $\Delta C_s = C_s^I - C_s^{II}$ . Substituindo os valores conhecidos, vem:

$$J_s(\text{dif.}) = 5 \times 10^{-7} \times 0,3 \times \frac{(4 \times 10^{-6} - 2 \times 10^{-6})}{1 \times 10^{-3}} = 3 \times 10^{-10} \text{ mol cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad (1.176)$$

A densidade de corrente de soluto devido ao arrastamento é dada por

$$J_s(\text{arrast.}) = \bar{C}_s (1 - \sigma) J_v \quad (1.177)$$

onde

$$J_v = J_w \bar{V}_w \quad (1.178)$$

e  $J_w$  é dada pela equação 1.157.

A diferença de pressão osmótica,  $\Delta\pi$ , é dada pela seguinte expressão:

$$\Delta\pi_s = RT \Delta C_s \quad (1.179)$$

Substituindo os valores, temos:

$$\Delta\pi_s = 8,314 \times 10^7 \times 310 \times 2 \times 10^{-6} = 51546,8 \text{ dyn cm}^{-2} \quad (1.180)$$

A diferença de pressão hidrostática é calculada da seguinte forma:

$$\Delta P = P_I - P_{II} \Rightarrow \Delta P = 760 - 900 = -140 \text{ mmHg} \quad (1.181)$$

A conversão das unidades de pressão para o sistema c.g.s. pode fazer-se tendo em conta a pressão que uma coluna de mercúrio de altura  $h$  exerce sobre a sua base. Esta pressão é dada pela expressão.

$$P = \rho g h \quad (1.182)$$

Em que  $\rho$  é a massa volúmica do fluido considerado (neste caso o mercúrio),  $g$  é o valor da aceleração da gravidade e  $h$  é a altura da coluna de fluido. Uma vez que a altura de mercúrio seria de 140 mm (14 cm), podemos substituir na equação 1.182, para obter a pressão nas unidades c.g.s.

$$P = 13,56 \times 980 \times 14 = 186043,2 \text{ dyn cm}^{-2} \quad (1.183)$$

Portanto a diferença de pressão hidrostática nas unidades c.g.s. é:

$$\Delta P = -186043,2 \text{ dyn cm}^{-2} \quad (1.184)$$

Podemos determinar o valor da densidade de corrente de solvente

$$\begin{aligned} J_w &= 1 \times 10^{-11} \times (-186043,2 - 0,2 \times 51546,8) \\ &= -1,964 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (1.185)$$

Pelo que,

$$J_v = -1,964 \times 10^{-6} \times 20 = -3,928 \times 10^{-5} \text{ cm s}^{-1} \quad (1.186)$$

A densidade de corrente de soluto devido ao arrastamento vem então

$$\begin{aligned} J_s(\text{arrast.}) &= \frac{(4 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-6})}{2} \times (1 - 0,2) \times (-3,928 \times 10^{-5}) \\ &= -9,4272 \times 10^{-11} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (1.187)$$

Logo, a densidade total de corrente de soluto é igual a:

$$J_s(\text{total}) = 3 \times 10^{-10} + (-9,4272 \times 10^{-11}) = 2,057 \times 10^{-10} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.188)$$

Exercício 1.12. Uma membrana semipermeável ideal separa duas soluções de um mesmo soluto num sistema de dois compartimentos, que se encontra a 37 °C. Num dos compartimentos a concentração de soluto é  $5 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$ , tendo o valor de  $5 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$  no outro compartimento. Calcule a diferença de pressão que deve existir entre os dois compartimentos para que a densidade de corrente de solvente

seja nula, indicando em qual dos compartimentos a pressão deverá ser maior.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

---

### Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\sigma = 1$$

$$T = 37^\circ \text{C} = 310 \text{ K}$$

$$C_s^I = 5 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$C_s^{II} = 5 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$J_w = 0 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 8,314 \times 10^7 \text{ erg mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$J_w = L_p (\Delta P - \sigma \Delta \pi_s) \quad (1.189)$$

$$0 = L_p (\Delta P - \sigma \Delta \pi_s) \Rightarrow \Delta P = \sigma \Delta \pi_s \quad (1.190)$$

$$\Delta \pi_s = RT \Delta C_s \quad (1.191)$$

$$\Delta \pi_s = 8,314 \times 10^7 \times 310 \times (5 \times 10^{-6} - 5 \times 10^{-5}) \quad (1.192)$$

$$\Delta \pi_s = -1159803 \text{ dyn cm}^{-2}$$

Substituindo este resultado na equação 1.190, temos:

$$\Delta P = 1 \times (-1159803) = -1159803 \text{ dyn cm}^{-2} \quad (1.193)$$

O resultado em milímetros de mercúrio é:

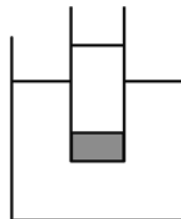
$$\Delta P = -\frac{1159803 \times 10}{13,56 \times 980} = -872,77 \text{ mmHg} \quad (1.194)$$

A pressão de verá ser maior no compartimento II, que corresponde à maior concentração.

---

### 1.4.3. Exercícios propostos

1. Um tubo de 10 cm de altura e  $1 \text{ dm}^3$  de volume, cujo fundo é formado por uma membrana homogênea, encontra-se mergulhado numa tina como mostra a figura. Ambos os recipientes contêm soluções de glicose à temperatura de  $37^\circ\text{C}$ , sendo a corrente de difusão de glicose através da membrana igual a



$2,4 \times 10^{-2} \text{ mol s}^{-1}$ , do tubo para a tina. Calcule a pressão (em mmHg) que um êmbolo deve exercer sobre a solução que se encontra dentro do tubo de modo a que a densidade de corrente de soluto por arrastamento seja nula, sabendo que a pressão hidrostática na tina, ao nível da membrana, é igual a 800 mmHg.

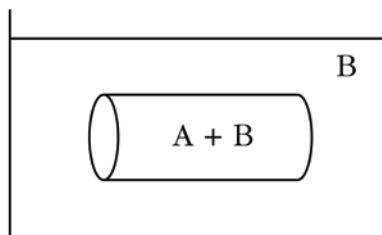
Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$P_s = 0,24 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\sigma = 0,7$$

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

2. No interior de um tubo capilar, com 20 cm de comprimento e 0,1 cm de raio, existe uma solução com 2 solutos, A e B. O tubo é mergulhado num recipiente contendo uma solução apenas com soluto B numa concentração de  $2 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ , à



temperatura de  $37^\circ\text{C}$ . As paredes do tubo apresentam propriedades de membrana homogênea, com permeabilidade ao soluto B igual a  $6 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$ , sendo impermeável ao soluto A. A diferença de pressão hidrostática entre o interior e o exterior do tubo é de  $1 \times 10^7 \text{ dyn cm}^{-2}$  e a concentração total de solutos A e B no interior do tubo é de  $5 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ . Se o número de moles de soluto B que sai do cilindro por segundo for igual a  $2,01 \times 10^{-7} \pi$ , qual é o valor da concentração do soluto A no interior do capilar cilíndrico?

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$\sigma_B = 0,7 \quad R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad k_B = 1,2$$

$$L_p = 2 \times 10^{-10} \text{ mol dyn}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad \bar{V}_W = 18 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

3. Considere um sistema formado por dois compartimentos separados por uma membrana porosa de  $1 \mu\text{m}$  de espessura e permeabilidade igual a  $6 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$ . A concentração média do soluto no interior da membrana é igual  $1,5 \times 10^{-2} \text{ M}$  e o gradiente de concentração é igual a  $-0,2 \text{ mol cm}^{-4}$ . Calcule a diferença de pressão hidrostática que deve existir entre os dois compartimentos para que a corrente total de soluto através da membrana seja nula.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$\sigma = 0,8 \quad R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad t = 37 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$L_p = 2 \times 10^{-11} \text{ mol dyn}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad \bar{V}_W = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

4. Uma membrana semi-permeável ideal com  $100 \text{ cm}^2$  de área total, separa duas soluções de um mesmo soluto num sistema de dois compartimentos. Sabendo que a concentração de soluto no compartimento II é dupla da do compartimento I, determine:
- A corrente de solvente que atravessa a membrana por minuto, indicando o respectivo sentido.
  - A corrente de soluto que atravessa a membrana, justificando a sua resposta.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$C_S^I = 10^{-3} \text{ M} \quad L_p = 10^{-12} \text{ mol dyn}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad P^I = 760 \text{ mmHg}$$

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad \bar{V}_W = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$P^{II} = 4500 \text{ mmHg} \quad t = 37 \text{ }^\circ\text{C}$$

5. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogênea com  $5 \mu\text{m}$  de espessura. A concentração de soluto

no compartimento I é igual a  $2 \times 10^{-3}$  M e num ponto interior da membrana que dista  $1 \mu\text{m}$  da interface com o compartimento I é igual a  $4,5 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$ . Calcule a densidade total de corrente de soluto através da membrana.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$\bar{V}_W = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1} \quad D_m = 2 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad k = 1,5$$

$$L_p = 5 \times 10^{-11} \text{ mol dyn}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 0,3 \quad t = 37 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad P^I = 20 \text{ N cm}^{-2} \quad P^{II} = 12 \text{ N cm}^{-2}$$

6. Uma membrana porosa com  $1,5 \text{ dm}^2$  de área e  $150 \mu\text{m}$  de espessura separa dois compartimentos contendo soluções de um mesmo soluto a diferentes concentrações. Sabe-se que a concentração de soluto ao longo da membrana é dada por  $C_s(x) = 4 \times 10^{-2}x + 3 \times 10^{-4}$  ( $\text{mol cm}^{-3}$ ), que a área ocupada por poros é de  $45 \text{ cm}^2$  e que a constante de difusão livre do soluto é de  $6 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Calcule a densidade total de corrente de soluto.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$\bar{V}_W = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1} \quad L_p = 5 \times 10^{-12} \text{ mol dyn}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$\sigma = 0,8 \quad t = 20 \text{ }^\circ\text{C} \quad R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$P^I = 1500 \text{ mmHg} \quad P^{II} = 900 \text{ mmHg}$$

7. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana porosa com  $80 \text{ cm}^2$  de área total e  $60 \mu\text{m}$  de espessura, através da qual passam  $1,023 \times 10^{-5} \text{ mol}$  de soluto por segundo do compartimento II para o compartimento I, devido a forças de difusão e a arrastamento. A constante de difusão livre do soluto é  $4 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , a concentração no ponto médio da membrana é  $5,5 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$  e o gradiente de concentração do soluto é  $1,67 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-4}$ . Sabendo que as pressões hidrostáticas nos compartimentos I e II são iguais, determine:

- a) A equação que traduz a concentração de soluto ao longo da membrana.

b) A densidade de corrente de soluto devida ao arrastamento.

c) A área de membrana ocupada por poros.

Se necessário, considere os seguintes dados na resolução do problema:

$$\bar{V}_W = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$L_p = 6 \times 10^{-9} \text{ mol dyn}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$\sigma = 0,8$$

$$t = 37 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

8. Uma membrana semipermeável ideal com  $175 \text{ cm}^2$  de área separa dois compartimentos contendo soluções de um mesmo soluto. As concentrações nos compartimentos I e II são, respectivamente,  $0,3 \text{ mol dm}^{-3}$  e  $0,5 \text{ mol dm}^{-3}$ , e as pressões hidrostáticas são, respectivamente,  $760 \text{ mmHg}$  e  $910 \text{ mmHg}$ . Sabe-se que o volume molar médio do solvente é  $20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$  e que, por segundo, passam através da membrana  $0,3399 \text{ mol}$  de moléculas do compartimento I para o compartimento II. Determine a temperatura a que foi realizada a experiência.

Se necessário, utilize os seguintes dados:

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$L_p = 4 \times 10^{-10} \text{ mol dyn}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

9. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana homogênea com  $180 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura. Por minuto e devido a forças de difusão passam a membrana  $3 \times 10^{-4} \text{ mol}$  de soluto, a uma temperatura de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . A concentração de soluto ao longo da membrana é dada por  $C_s(x) = -6,67 \times 10^{-6}x + 2,4 \times 10^{-7} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$  e no compartimento II tem o valor de  $2 \times 10^{-7} \text{ mol cm}^{-3}$ . Sabendo que a constante de difusão do soluto na membrana é de  $3 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e que o coeficiente de reflexão de Staverman tem o valor de  $0,8$  calcule:

a) A área da membrana.

b) A diferença de pressão hidrostática necessária para que não haja movimento de soluto através da membrana, indicando o compartimento em que esta terá que ser maior.



Considere, se necessário, os seguintes dados:

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\bar{V}_w = 20 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$L_p = 8 \times 10^{-3} \text{ mol N}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

### 1.5. Membrana de Donnan

Consideremos um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana semipermeável que não permite a passagem de componentes macromoleculares. No compartimento I é dissolvido cloreto de sódio ( $NaCl$ ), que atravessa a membrana por difusão até se atingir o equilíbrio, altura em que teremos iguais concentrações de ião sódio ( $Na^+$ ) e ião cloreto ( $Cl^-$ ) nos dois compartimentos.

$$[Na^+]^I = [Na^+]^{II} = [Cl^-]^I = [Cl^-]^{II} = n \quad (1.195)$$

Adicionamos agora ao compartimento I um proteínato de sódio a uma concentração  $p$ . Simultaneamente, colocamos um êmbolo nesse mesmo compartimento, para que não haja movimento de solvente através da membrana. Designamos por  $Z_p$  a valência do ião proteínato resultante da dissociação da molécula de proteínato de sódio. Attingir-se-á um novo equilíbrio após movimento de microiões do compartimento I para o compartimento II por difusão, uma vez que não se pode atingir por movimentos de solvente. Vamos considerar que até se atingir a nova situação de equilíbrio a concentração de cada ião varia por  $x$ . Podemos determinar a concentração de cada um dos iões, tendo em conta a verificação da condição de electroneutralidade:

$$[P^{Z_p-}]^I = p \quad (1.196)$$

$$[Na^+]^I = n - x + p \cdot Z_p \quad (1.197)$$

$$[Cl^-]^I = n - x \quad (1.198)$$

$$[Na^+]^{II} = [Cl^-]^{II} = n + x \quad (1.199)$$

O potencial de membrana para cada ião pode ser calculado utilizando a equação de Nernst, que é dada por

$$\Delta\psi = \psi^I - \psi^{II} = -\frac{R \cdot T}{F \cdot Z} \times \ln \frac{C_s^I}{C_s^{II}} \quad (1.200)$$

onde  $T$  é a temperatura a que é realizada a experiência,  $R$  é a constante dos gases ideais e  $F$  é o número de Faraday.

Como a valência ( $Z$ ) do ião sódio é +1, a aplicação da equação de Nernst a este ião é

$$\Delta\psi = -\frac{R \cdot T}{F \times 1} \times \ln \frac{[Na^+]^I}{[Na^+]^{II}} = \frac{R \cdot T}{F} \times \ln \frac{[Na^+]^{II}}{[Na^+]^I} \quad (1.201)$$

Por outro lado, a valência do ião cloreto tem o valor -1, pelo que a aplicação da equação é

$$\Delta\psi = -\frac{R \cdot T}{F \times (-1)} \times \ln \frac{[Cl^-]^I}{[Cl^-]^{II}} = \frac{R \cdot T}{F} \times \ln \frac{[Cl^-]^I}{[Cl^-]^{II}} \quad (1.202)$$

O valor da temperatura utilizado nas equações 1.201 e 1.202 é o mesmo, uma vez que se referem ao mesmo sistema. Assim  $\frac{R \cdot T}{F}$  é constante, pelo que obtemos

$$[Na^+]^I \times [Cl^-]^I = [Na^+]^{II} \times [Cl^-]^{II} \quad (1.203)$$

relação que se designa por equação de Gibbs-Donnan. A aplicação desta equação ao nosso caso concreto é

$$(n - x + p \cdot Z_p) \times (n - x) = (n + x)^2 \quad (1.204)$$

que podemos resolver em ordem a  $x$ , obtendo

$$x = \frac{n \cdot p \cdot Z_p}{4n + p \cdot Z_p} \quad (1.205)$$

Este valor traduz a variação ocorrida na concentração de iões sódio e cloreto nos dois compartimentos.

Calculemos agora as concentrações totais de microiões em cada um dos compartimentos. Para o compartimento I temos

$$C^I = [Cl^-]^I + [Na^+]^I = 2n - 2x + p \cdot Z_p \quad (1.206)$$

e para o compartimento II vem

$$C^{II} = [Cl^-]^{II} + [Na^+]^{II} = 2n + 2x \quad (1.207)$$

A diferença entre estas duas concentrações é dada por

$$d = C^I - C^{II} = 2n - 2x + p \cdot Z_p - 2n - 2x = -4x + p \cdot Z_p \quad (1.208)$$

Utilizando o valor calculado na equação 1.205, podemos reescrever a equação 1.208:

$$d = -4 \times \frac{n \cdot p \cdot Z_p}{4n + p \cdot Z_p} + p \cdot Z_p = \frac{p^2 \cdot Z_p^2}{4n + p \cdot Z_p} \quad (1.209)$$

Verificamos que  $d > 0$ , pelo que a concentração de microiões é maior no compartimento I. Isto significa que há um número de pequenos iões contidos nesse compartimento que correspondem a partículas não difusíveis sendo, deste modo, capazes de gerar pressão osmótica.

Temos agora condições de calcular a diferença de pressão osmótica que se gera entre os dois compartimentos. Essa diferença deve-se às partículas não difusíveis, ou seja, o ião proteinato e os microiões não difusíveis. A sua concentração ( $C_{nd}$ ) é dada por

$$C_{nd} = p + d = p + \frac{p^2 \cdot Z_p^2}{4n + p \cdot Z_p} \quad (1.210)$$

pelo que a diferença de pressão osmótica tem o valor de

$$\Delta\pi = \pi^I - \pi^{II} = R \cdot T \cdot C_{nd} = R \cdot T \cdot \left( p + \frac{p^2 \cdot Z_p^2}{4n + p \cdot Z_p} \right) \quad (1.211)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo I, pp. 63-69.

### 1.5.1. Membrana de Donnan para iões bivalentes

Consideremos novamente um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana semipermeável. Dissolvemos cloreto de cálcio ( $CaCl_2$ ) em ambos os compartimentos a uma concentração

$$[CaCl_2]^I = [CaCl_2]^II = n \quad (1.212)$$

Em solução cada molécula de  $CaCl_2$  origina um ião cálcio ( $Ca^{2+}$ ) e dois iões cloreto ( $Cl^-$ ). Deste modo, podemos afirmar que

$$[Ca^{2+}]^I = [Ca^{2+}]^II = n \quad (1.213)$$

e

$$[Cl^-]^I = [Cl^-]^II = 2n \quad (1.214)$$

Dissolve-se um proteinato de cálcio no compartimento I e aplica-se um êmbolo nesse mesmo compartimento para anular a corrente de solvente através da membrana. Designemos por  $p$  concentração de proteinato de cálcio nesse compartimento. Attingir-se-á uma nova situação de equilíbrio após movimento de microiões do compartimento I para o compartimento II. Sendo  $x$  a variação da concentração de ião cálcio no compartimento II até se atingir o equilíbrio, podemos afirmar que a concentração de ião cloreto nesse mesmo compartimento varia por  $2x$ , para que se mantenha a condição de electroneutralidade. Assim, na situação de equilíbrio podemos escrever

$$[Ca^{2+}]^II = n + x \quad (1.215)$$

$$[Cl^-]^II = 2n + 2x \quad (1.216)$$

As concentrações dos componentes iónicos no compartimento I no equilíbrio dependem da valência do ião proteinato ( $Z_p$ ). Temos que considerar três casos distintos, que analisaremos de seguida.

#### 1.5.1.1. Ião proteinato monovalente ( $Z_p = 1$ )

Neste caso, cada molécula de proteinato de cálcio origina, em solução, um ião cálcio e dois iões proteinato, sendo a sua fórmula química  $CaP_2$ . Tendo em conta a variação de microiões que se verificou no compartimento II, podemos escrever

$$[P^-]^I = 2p \quad (1.217)$$

$$[Ca^{2+}]^I = p + n - x \quad (1.218)$$

$$[Cl^-]^I = 2n - 2x \quad (1.219)$$

A equação de Gibbs-Donnan aplicada ao cloreto de cálcio escreve-se da seguinte forma:

$$[Ca^{2+}]^I \times [Cl^-]^I = [Ca^{2+}]^{II} \times [Cl^-]^{II} \quad (1.220)$$

Neste caso em concreto podemos reescreve-la:

$$(p + n - x) \times (2n - 2x) = (n + x) \times (2n + 2x) \quad (1.221)$$

Resolvendo a equação 1.221 em ordem a  $x$ , obtemos

$$x = \frac{n \cdot p}{4n + p} \quad (1.222)$$

As concentrações totais de microiões nos compartimentos I e II são dadas por

$$C^I = [Cl^-]^I + [Ca^{2+}]^I = 3n - 3x + p \quad (1.223)$$

$$C^{II} = [Cl^-]^{II} + [Ca^{2+}]^{II} = 3n + 3x \quad (1.224)$$

A sua diferença ( $d$ ) terá o valor

$$d = C^I - C^{II} = 3n - 3x + p - 3n - 3x = p - 6x = p - \frac{6np}{4n + p} = \frac{p^2 - 2np}{4n + p} \quad (1.225)$$

que corresponde à concentração de microiões não difusíveis. Podemos agora calcular a concentração de partículas não difusíveis e a o valor da pressão osmótica por elas geradas.

$$C_{nd} = [P^-]^I + d = 2p + \frac{p^2 - 2np}{4n + p} = \frac{3p^2 - 6np}{4n + p} \quad (1.226)$$

$$\Delta\pi = \pi^I - \pi^{II} = R \cdot T \cdot C_{nd} = R \cdot T \cdot \left( \frac{3p^2 - 6np}{4n + p} \right) \quad (1.227)$$

1.5.1.2. Ião proteinato de valência par

Nesta situação sabemos que a valência do ião proteinato é múltipla da valência do ião cálcio. Assim o proteinato de cálcio liberta, em solução, um ião proteinato (de valência  $Z_p$ ) e  $\frac{Z_p}{2}$  iões cálcio, pelo que as concentrações iónicas no compartimento I serão as seguintes:

$$[P^-]^I = p \quad (1.228)$$

$$[Ca^{2+}]^I = \frac{Z_p}{2} \times p + n - x \quad (1.229)$$

$$[Cl^-]^I = 2n - 2x \quad (1.230)$$

Aplicando a equação de Gibbs-Donnan (equação 1.220) a este caso obtemos

$$\left(\frac{Z_p}{2} \times p + n - x\right) \times (2n - 2x) = (n + x) \times (2n + 2x) \quad (1.231)$$

Resolvendo-a em ordem a  $x$  vem

$$x = \frac{n \cdot p \cdot Z_p}{8n + p \cdot Z_p} \quad (1.232)$$

A diferença de concentrações de microiões existente entre os dois compartimentos (concentração de microiões não difusíveis) é dada por

$$d = C^I - C^{II} = 3n - 3x + p \times \frac{Z_p}{2} - 3n - 3x = \frac{p \cdot Z_p}{2} - 6x \quad (1.233)$$

Substituindo o valor de  $x$  temos

$$d = \frac{p^2 \cdot Z_p^2 - 4np \cdot Z_p}{16n + 2p \cdot Z_p} \quad (1.234)$$

A concentração de partículas não difusíveis e o valor da pressão osmótica por elas geradas são dadas por

$$C_{nd} = [P^-]^I + d = p + \frac{p^2 \cdot Z_p^2 - 4np \cdot Z_p}{16n + 2p \cdot Z_p} \quad (1.235)$$

$$\Delta\pi = \pi^I - \pi^{II} = R \cdot T \cdot C_{nd} = R \cdot T \cdot \left( p + \frac{p^2 \cdot Z_p^2 - 4np \cdot Z_p}{16n + 2p \cdot Z_p} \right) \quad (1.236)$$

### 1.5.1.3. Ião proteinato de valência ímpar

Tendo o ião proteinato valência ímpar, cada molécula de proteinato de cálcio terá que libertar, em solução, dois iões proteinato e  $Z_p$  iões cálcio, por uma questão de electroneutralidade. Portanto, as concentrações iónicas no compartimento I serão as seguintes:

$$[P^-]^I = 2p \quad (1.237)$$

$$[Ca^{2+}]^I = Z_p \times p + n - x \quad (1.238)$$

$$[Cl^-]^I = 2n - 2x \quad (1.239)$$

Podemos aplicar a equação de Gibbs-Donnan (equação 1.220) a este caso e resolvê-la em ordem a  $x$ .

$$(Z_p \times p + n - x) \times (2n - 2x) = (n + x) \times (2n + 2x) \quad (1.240)$$

$$x = \frac{n \cdot p \cdot Z_p}{4n + p \cdot Z_p} \quad (1.241)$$

A concentração de microiões não difusíveis pode ser calculada do seguinte modo:

$$d = C^I - C^{II} = 3n - 3x + p \times Z_p - 3n - 3x = p \cdot Z_p - 6x \quad (1.242)$$

Substituindo o valor de  $x$  na equação anterior obtemos

$$d = \frac{p^2 \cdot Z_p^2 - 2np \cdot Z_p}{4n + p \cdot Z_p} \quad (1.243)$$

A concentração de partículas não difusíveis e a o valor da pressão osmótica por elas geradas são dadas por

$$C_{nd} = [P^-]^I + d = 2p + \frac{p^2 \cdot Z_p^2 - 2np \cdot Z_p}{4n + p \cdot Z_p} \quad (1.244)$$



$$\Delta\pi = \pi^I - \pi^{II} = R \cdot T \cdot C_{nd} = R \cdot T \cdot \left( 2p + \frac{p^2 \cdot Z_p^2 - 2np \cdot Z_p}{4n + p \cdot Z_p} \right) \quad (1.245)$$

Outros casos podem ser considerados, mas o raciocínio terá por base a situação concreta.

### 1.5.2. Exercícios resolvidos

Exercício 1.13. Considere dois recipientes separados por uma membrana impermeável a macromoléculas. Dissolve-se cloreto de potássio no compartimento II e espera-se que seja atingido o equilíbrio por difusão. A concentração de íão potássio nesse compartimento e nesse momento é de  $6 \text{ mol cm}^{-3}$ . Dissolve-se proteinato de potássio no compartimento I, ficando em solução 2 cargas negativas por cada molécula dissolvida. Sabendo que até se atingir uma nova situação de equilíbrio a concentração de microiões no compartimento II varia em  $8 \text{ mol cm}^{-3}$  e que a diferença de pressões hidrostáticas entre os dois compartimentos é tal que não há movimento de solvente, calcule:

- A concentração inicial de íão proteinato.
- A diferença de pressão osmótica existente entre os dois recipientes.

Considere, se necessários, os seguintes dados:

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad t = 37 \text{ }^\circ\text{C}$$

#### Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$[K^+]_{início}^{II} = n = 6 \text{ mol cm}^{-3}$$

$$Z_p = 2$$

$$|C_{início}^{II} - C_{equil}^{II}| = 8 \text{ mol cm}^{-3}$$

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 8,314 \times 10^7 \text{ erg mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$T = 37^\circ \text{C} = 310 \text{ K}$$

a) Sabemos que no início da experiência (primeira situação de equilíbrio, antes de se dissolver o proteinato de potássio) as concentrações dos íons são iguais em ambos os compartimentos (são todos íons monovalentes).

$$[Cl^-]^I_{início} = [K^+]^I_{início} = [Cl^-]^{II}_{início} = [K^+]^{II}_{início} = n = 6 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.246)$$

Designando a variação da concentração de cada íon (após a adição de proteinato de potássio e até se atingir novo equilíbrio) por  $x$ , podemos afirmar que

$$|C_{início}^{II} - C_{equil}^{II}| = 2x = 8 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.247)$$

de onde se conclui que

$$x = 4 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.248)$$

Após se atingir a nova situação de equilíbrio as concentrações de íons nos dois compartimentos têm que cumprir a condição de electroneutralidade. Designando por  $p$  a concentração de íon proteinato, podemos escrever as seguintes equações:

$$[Cl^-]^{II} = n + x = 10 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.249)$$

$$[K^+]^{II} = n + x = 10 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.250)$$

$$[Cl^-]^I = n - x = 2 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.251)$$

$$[K^-]^I = n - x + p \cdot Z_p = 2 + 2p \quad (1.252)$$

Sabemos que a equação de Gibbs-Donnan se verifica para esta situação. Deste modo temos

$$2 \times (2 + 2p) = 10^2 \quad (1.253)$$

Resolvendo a equação 1.253 em ordem a  $p$ , obtemos a concentração pretendida:

$$p = 24 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.254)$$

b) A diferença de pressão osmótica existente entre os dois recipientes ( $\Delta\pi = \pi^I - \pi^{II}$ ) deve aos componentes não difusíveis, que são o ião proteinato (cuja concentração foi calculada na alínea anterior) e uma porção dos microiões existentes no compartimento I. A concentração dos componentes não difusíveis ( $C_{nd}$ ) é dada pela equação 1.210. Para o presente caso temos

$$C_{nd} = p + d = 24 + \frac{24^2 \times 2^2}{4 \times 6 + 24 \times 2} = 24 + 32 = 56 \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.255)$$

A diferença de pressão osmótica pode ser calculada por

$$\Delta\pi = R \times T \times C_{nd} \quad (1.256)$$

Substituindo os valores conhecidos obtemos

$$\Delta\pi = 8,314 \times 10^7 \times 310 \times 56 = 1,443 \times 10^{12} \text{ dyn cm}^{-2} \quad (1.257)$$

Exercício 1.14. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana impermeável a macromoléculas. Inicialmente encontram-se nos compartimentos I e II soluções de cloreto de sódio à mesma concentração de  $3 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$ . No compartimento II dissolveu-se um proteinato de sódio. Sabe-se que durante a experiência houve uma variação da concentração de iões cloreto no compartimento II de  $1,2 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$  e que no final (situação de equilíbrio) o módulo da diferença de pressões osmóticas entre os compartimentos I e II é de  $1,34022 \times 10^9 \text{ dyn cm}^{-2}$ . Sabendo que não há movimentos de solvente através da membrana, determine a concentração de proteinato e a sua valência.

Se necessário considere os seguintes dados:

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$t = 37 \text{ }^\circ\text{C}$$

Resolução

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\Delta\pi = 1,34022 \times 10^9 \text{ dyn cm}^{-2}$$

$$[NaCl]^I = [NaCl]^{II} = n = 3 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$|\Delta[Cl]^{II}| = x = 1,2 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$$

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 8,314 \times 10^7 \text{ erg mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$T = 37^\circ\text{C} = 310 \text{ K}$$

a)

$$C^{II} > C^I \Rightarrow \pi^{II} > \pi^I \quad (1.258)$$

$$|\Delta\pi| = |\pi^I - \pi^{II}| = R \cdot T \cdot C_{nd} \quad (1.259)$$

$$C_{nd} = \frac{|\Delta\pi|}{R \cdot T} = \frac{1,34022 \times 10^9}{8,314 \times 10^7 \times 310} = 5,2 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.260)$$

$$C_{nd} = p + |d| = p + p \cdot Z_p - 4x = (1 + Z_p) \cdot p - 4x \quad (1.261)$$

onde

$$d = C^I - C^{II} \quad (1.262)$$

$$5,2 \times 10^{-2} = (1 + Z_p) \cdot p - 4 \times 1,2 \times 10^{-2} \Leftrightarrow (1 + Z_p) \cdot p = 1 \times 10^{-1} \quad (1.263)$$

Pela equação de Gibbs-Donnan temos

$$\left(3 \times 10^{-2} + 1,2 \times 10^{-2}\right)^2 = \left(3 \times 10^{-2} - 1,2 \times 10^{-2}\right) \times \left(3 \times 10^{-2} - 1,2 \times 10^{-2} + p \cdot Z_p\right) \quad (1.264)$$

Resolvendo a equação 1.264 em ordem a  $p \cdot Z_p$  vem

$$p \cdot Z_p = 8 \times 10^{-2} \quad (1.265)$$

Pelas equações 1.263 e 1.265 podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{0,1 \times Z_p}{1 + Z_p} = 8 \times 10^{-2} \Leftrightarrow Z_p = \frac{8 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}} = 4 \quad (1.266)$$

Substituindo o valor obtido na equação 1.265 obtemos a concentração do proteinato:

$$p = \frac{8 \times 10^{-2}}{Z_p} = \frac{8 \times 10^{-2}}{4} = 2 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3} \quad (1.267)$$

### 1.5.3. Exercícios propostos

1. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana impermeável a macromoléculas. No início da experiência o sistema encontra-se em equilíbrio, contendo ambos os compartimentos soluções de cloreto de sódio. A concentração do ião cloreto no compartimento II nesse momento é de  $4 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$ . Adicionou-se ao compartimento II um proteinato de sódio, ficando o ião proteinato a uma concentração de  $2 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$ . Atingiu-se um novo estado de equilíbrio, sendo a concentração de ião sódio no compartimento I nesse momento de  $4,8 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$ . Sabe-se que a experiência foi realizada a uma temperatura de  $20^\circ\text{C}$  e que  $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Considerando que a diferença de pressões hidrostáticas entre os dois compartimentos é tal que não há movimento de solvente através da membrana, determine:
  - a) A valência do ião proteinato.
  - b) A diferença de pressão osmótica existente entre os dois compartimentos.
2. Num sistema de dois compartimentos separados por uma membrana semipermeável encontra-se dissolvido cloreto de potássio em iguais concentrações. No início da experiência a concentração do ião potássio no compartimento II é de  $2 \text{ mol cm}^{-3}$  e é adicionado proteinato de potássio ao compartimento I, que liberta 3 iões de potássio por molécula dissolvida. A concentração do ião proteinato no compartimento I é  $8 \text{ mol cm}^{-3}$ . Sabendo

que é exercida pressão (utilizando um êmbolo) num dos compartimentos para que não haja movimento de solvente através da membrana e que apenas há movimento de microiões de um compartimento para o outro, determine:

- a) A concentração de ião potássio no compartimento II quando é atingida a nova situação de equilíbrio.
- b) A diferença de pressão hidrostática necessária para manter as condições do problema na nova situação de equilíbrio, indicando o compartimento em que se aplica o êmbolo.

Considere, se necessário, os seguintes dados:

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \qquad t = 25 \text{ }^\circ\text{C}$$

3. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana impermeável a macromoléculas, através da qual não há corrente de solvente (por manutenção de diferenças de pressão hidrostática adequadas). Dissolveu-se cloreto de magnésio nos recipientes de forma a concentração do ião cloreto fosse igual em ambos, com um valor de  $4 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ . Posteriormente adicionou-se um proteinato de magnésio ao compartimento I, na concentração de  $8 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ . Sabe-se que a experiência decorreu à temperatura de  $37 \text{ }^\circ\text{C}$  e que, por cada molécula de proteinato de magnésio dissolvida são libertados três iões magnésio, tendo o proteinato valência par. Calcule:
  - a) O módulo da variação ocorrida na concentração de ião cloreto no compartimento I, desde o início da experiência (antes da adição de proteinato de magnésio) até se atingir um novo estado de equilíbrio.
  - b) A concentração de componentes não difusíveis em solução.
  - c) A diferença de pressão osmótica existente entre os dois compartimentos.

4. Num sistema de dois compartimentos separados por uma membrana impermeável a macromoléculas, dissolveu-se cloreto de potássio em cada um dos compartimentos, ficando em concentrações iguais. Adicionou-se ainda proteinato de potássio ao compartimento I, colocando-se simultaneamente um êmbolo nesse compartimento para evitar movimentos de solvente através da membrana. Sabe-se que a concentração de componentes não difusíveis no sistema tem o valor de  $24,4 \text{ mol dm}^{-3}$  e que a diferença de pressão osmótica entre os dois compartimentos tem o valor de  $6,004 \times 10^8 \text{ dyn cm}^{-2}$ . Após ser atingido o equilíbrio, a concentração de íão potássio no compartimento I e a de íão cloreto no compartimento II são, respectivamente,  $23,12 \text{ mol dm}^{-3}$  e  $10,88 \text{ mol dm}^{-3}$ . Determine:
- A temperatura a que se realizou a experiência.
  - O módulo da variação ocorrida na concentração de íão cloro no compartimento II, desde o início até ao equilíbrio.
  - A concentração inicial de íão potássio no compartimento II.
  - A concentração de proteinato no compartimento I.
  - A valência do íão proteinato.
5. Uma membrana semipermeável separa dois compartimentos contendo soluções com igual concentração de cloreto de cálcio. Adicionou-se um proteinato de cálcio ao compartimento II, exercendo pressão com um êmbolo sobre esse compartimento para impedir movimentos. Após se ter atingido um novo estado de equilíbrio, as concentrações de íão cálcio no compartimento I e de íão cloreto no compartimento II são, respectivamente,  $18 \text{ mol dm}^{-3}$  e  $4 \text{ mol dm}^{-3}$ . A diferença de pressão necessária exercer para que não haja corrente de solvente é de  $3,5677 \times 10^9 \text{ dyn cm}^{-2}$ , em módulo. Sabendo que cada íão proteinato tem um número par de cargas negativas, determine:
- A concentração de íão cálcio no compartimento I no início da experiência.

- b) O valor absoluto da variação da concentração de íon cloreto entre o início e o final da experiência no compartimento II.
- c) A concentração de componentes não difusíveis.
- d) A concentração de íon proteinato no compartimento II.
- e) A valência do íon proteinato.

Considere, se necessário, os seguintes dados:

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \qquad t = 25 \text{ }^\circ\text{C}$$

6. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana impermeável a macromoléculas. No início da experiência o sistema encontra-se em equilíbrio, contendo ambos os compartimentos soluções iodeto de magnésio em concentrações iguais. Adicionou-se proteinato de magnésio ao compartimento I, atingindo-se uma nova situação de equilíbrio, para a qual as concentrações de magnésio e de iodeto no compartimento I são, respectivamente,  $0,135 \text{ mol cm}^{-3}$  e  $0,03 \text{ mol cm}^{-3}$ . Considerando que cada molécula de proteinato de magnésio se dissocia em dois íons proteinato e um íon magnésio em solução e que a diferença de pressões hidrostáticas entre os dois compartimentos é tal que não há movimento de solvente através da membrana, calcule:
- a) A concentração de íon proteinato no compartimento I.
  - b) A concentração de íon magnésio no compartimento II na situação de equilíbrio.
  - c) A concentração de íon iodeto no compartimento II na situação de equilíbrio.
  - d) A concentração de componentes não difusíveis.
7. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana impermeável a macromoléculas. Inicialmente encontram-se nos compartimentos I e II soluções de brometo de cálcio. O íon brometo nos compartimentos I e II apresenta a mesma concentração:  $6 \text{ mol cm}^{-3}$ . No



compartimento I dissolveu-se um proteinato de cálcio. Sabe-se que durante a experiência houve uma variação da concentração de íons brometo (em módulo) no compartimento II de  $5,04 \text{ mol cm}^{-3}$  e que no final (situação de equilíbrio) a diferença de pressões osmóticas entre os compartimentos I e II é de  $1,6048 \times 10^{14} \text{ dyn dm}^{-2}$ . Sabendo que uma mol de proteinato de cálcio em solução origina um número ímpar de moles de íons cálcio e que não há movimentos de solvente através da membrana, determine:

- a) A valência do íon proteinato.
- b) A concentração desse mesmo íon no compartimento I.

Se necessário considere os seguintes dados:

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \qquad t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

8. Considere um sistema de dois compartimentos separados por uma membrana impermeável a macromoléculas, contendo cada um o mesmo volume de solvente. Dissolveu-se cloreto férrico em igual quantidade nos dois recipientes, ficando a sua concentração no compartimento II igual a  $4 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ . Adicionou-se ao compartimento I um proteinato férrico na concentração de  $8 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$ . Sabendo que uma molécula de proteinato férrico em solução origina três íons do elemento ferro e um íon proteinato e que não existe corrente de solvente através da membrana, determine:

- a) A concentração de componentes não difusíveis.
- b) A diferença de pressão osmótica estabelecida entre os dois compartimentos se fossem utilizadas as respectivas moléculas no estado ferroso e em iguais concentrações.

Se necessário considere os seguintes dados:

$$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \qquad t = 25 \text{ }^\circ\text{C}$$



# B I O F Í S I C A   D O S   F L U I D O S

## 2.1 Fluidos em repouso

Os fluidos representam uma grande parte da matéria de que é composto o corpo humano. O seu entendimento nos mais diversos aspectos torna-se por isso essencial. Pretende-se neste capítulo abordar alguns aspectos físicos dos mesmos.

A matéria apresenta-se num de três estados físicos<sup>1</sup>: sólido, líquido ou gasoso. Do ponto de vista operacional a distinção dos três estados faz-se de forma simples tendo em conta apenas o volume e a forma. Desta maneira, um sólido apresenta forma própria e volume constante, um líquido tem volume constante mas a forma é variável (depende do recipiente) e, finalmente, um gás não apresenta nem forma própria nem volume constante.

Do ponto de vista microscópico, também é possível estabelecer uma distinção entre os três estados. As ligações inter-moleculares são preponderantes na fase que uma substância apresenta. No estado sólido, as partículas constituintes encontram-se fortemente ligadas entre si, limitando a alteração de forma e mantendo o volume constante. A deformação dos sólidos é diminuta havendo apenas ligeira alteração de forma quando submetidos a elevadas tensões. Já para os líquidos, as forças inter-moleculares são inferiores ao caso anterior, apresentando uma distância média superior entre as partículas constituintes. Esta natureza permite compreender a razão da preservação do volume e também a fácil deformação relativamente a tensões de corte, adaptando-se o líquido às formas do recipiente. As forças entre as partículas constituintes de um gás são tão diminutas que o gás ocupa todo o volume disponível e, conseqüentemente, a forma do recipiente que o confina. Estas propriedades microscópicas coadunam-se com as propriedades macroscópicas descritas anteriormente.

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 361-366.

---

<sup>1</sup> O plasma é considerado o quarto estado da matéria mas a sua análise ultrapassa o âmbito do presente livro.

### 2.1.1. Princípio fundamental da hidrostática

Num fluido homogêneo em equilíbrio hidrostático qualquer porção de fluido também se encontra em equilíbrio. Sem perda de generalidade, consideremos um cubo (de aresta  $h$ ) de fluido isolado e as forças nele aplicadas como se representa na Fig. 2.1.

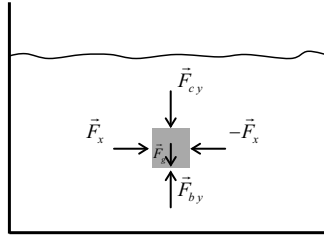


Fig. 2.1 – Representação esquemática a 2D de um cubo isolado imerso no interior de um líquido e das forças nele exercidas. As forças  $\vec{F}_x$ ,  $-\vec{F}_x$ ,  $\vec{F}_{c,y}$  e  $\vec{F}_{b,y}$  são forças de pressão e a força  $\vec{F}_g$  é o peso do elemento de volume.

Em equilíbrio a resultante das forças é nula, pelo que se tem:

$$-\vec{F}_x + \vec{F}_x + \vec{F}_{c,y} + \vec{F}_{b,y} + \vec{F}_g = \vec{0}. \quad (2.1)$$

As forças segundo a horizontal anulam-se. As restantes podem ser traduzidas algebricamente e em termos de pressão por:

$$-P_c h^2 + P_b h^2 - m g = 0, \quad (2.2)$$

em que  $g$  representa a aceleração gravítica e  $m$  a massa do cubo de fluido. A massa pode ser definida em função do volume ( $h^3$ ) e da massa específica ( $\rho$ ) simplificando a Eq. 2.2:

$$(P_b - P_c) h^2 = \rho h^3 g. \quad (2.3)$$

A divisão de ambos os membros por  $h^2$  resulta na equação que traduz a Lei Fundamental da Hidrostática:

$$P_b - P_c = \rho g h. \quad (2.4)$$

O enunciado desta lei pode ser estabelecido da seguinte forma: a diferença de pressão existente entre dois pontos dentro do mesmo fluido depende directamente da diferença de profundidade entre os pontos, da massa específica do líquido e da aceleração gravítica.

Da lei fundamental da hidrostática também se infere que a pressão,  $P$ , num ponto qualquer à profundidade  $h$  dentro de um líquido em equilíbrio hidrostático é dada por:

$$P = P_0 + \rho g h, \quad (2.5)$$

em que  $P_0$  representa a pressão exercida na superfície livre do líquido.

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 368-371.

Exercício 2.1. Recorra à lei fundamental da hidrostática para explicar o princípio dos vasos comunicantes.

---

### Resolução

O princípio dos vasos comunicantes estabelece que um líquido atinge a mesma altura em todos os vasos que comunicam entre si através de um duto aberto.

A pressão ao nível da superfície livre do líquido é igual à pressão atmosférica. Desta forma, entre dois pontos quaisquer situados em A e B (Fig. 2.2) tem-se, segundo a lei fundamental da hidrostática:

$$P_A - P_B = \rho g h, \quad (2.6)$$

em que  $h$  é a diferença de alturas entre os pontos considerados.

Sendo as pressões,  $P_A$  e  $P_B$ , iguais, vem

$$0 = \rho g h \Rightarrow h = 0, \quad (2.7)$$

donde se conclui que as alturas são iguais verificando-se e explicando-se o princípio dos vasos comunicantes.

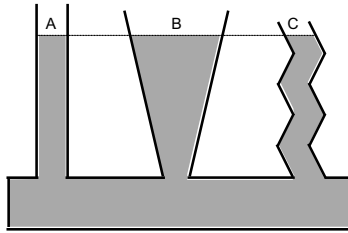
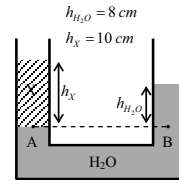


Fig. 2.2 – Esquema relativo ao princípio dos vasos comunicantes. A altura atingida pela superfície livre é independente da forma do vaso e é sempre a mesma.

Exercício 2.2. Para determinação da densidade de um líquido desconhecido colocou-se uma determinada quantidade do mesmo num tubo em U juntamente com água ( $\rho_{H_2O} = 1 \text{ g cm}^{-3}$ ). O esquema do ensaio experimental e respectivas medidas encontram-se representadas na figura anexa. Com base nos dados determine a densidade do líquido.



Resolução:

Segundo a lei fundamental da hidrostática a pressão nos pontos A e B, que se encontram à mesma profundidade e dentro do mesmo líquido, é igual:

$$P_A = P_B. \quad (2.8)$$

Por outro lado, a pressão sentida nos pontos A e B é dada por:

$$P_A = P_0 + \rho_X g h_X \text{ e } P_B = P_0 + \rho_{H_2O} g h_{H_2O}. \quad (2.9)$$

Combinando as Eq. 2.8 e 2.9, vem:

$$P_0 + \rho_X g h_X = P_0 + \rho_{H_2O} g h_{H_2O} \Leftrightarrow \rho_X h_X = \rho_{H_2O} h_{H_2O} \quad (2.10)$$

Finalmente, substituindo valores obtém-se:

$$\rho_x = 1 \frac{8}{10} = 0,8 \text{ g cm}^{-3} \quad (2.11)$$

---

#### 2.1.1.1. Pressão atmosférica

O ar exerce pressão sobre todas as superfícies com que está em contacto designando-se geralmente esta pressão por pressão atmosférica a qual é medida por barómetros. Um dos primeiros cientistas a reconhecer a pressão atmosférica foi Torricelli<sup>2</sup> tendo desenvolvido os princípios que estão na base do funcionamento do barómetro de mercúrio. Este é constituído por um longo tubo de vidro ( $\approx 1m$ ) que depois de cheio de mercúrio se inverte sobre uma tina contendo também mercúrio. O mercúrio dentro do tubo desce até que as pressões exercidas pela coluna de mercúrio e do ar, sobre a superfície do líquido na tina, se igualem entre si, o que acontece na situação normal para cerca de 76 cm de mercúrio (Fig. 2.3).

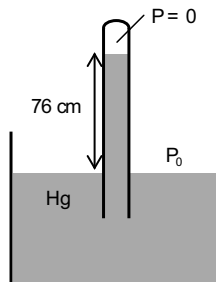


Fig. 2.3 – Esquema de um barómetro de mercúrio.

Ainda que a pressão atmosférica dependa de vários factores e que, por isso, o valor exacto da coluna de mercúrio varie ligeiramente em torno de 76 cm é usualmente aceite como medida da pressão atmosférica normal. Também é

---

<sup>2</sup> Evangelista Torricelli (1608-1647) foi um físico e matemático italiano reconhecido pela descoberta do princípio do barómetro e pelo sólido infinito denominado por trombeta de Gabriel que tem a particularidade de apresentar um volume finito mas uma superfície infinita.

uma unidade de pressão designada de atmosfera (atm). Desta forma, a pressão de uma atmosfera é facilmente determinado como a pressão exercida por uma coluna de mercúrio com 76 cm de altura:

$$1 \text{ atm} = \rho_{\text{Hg}} g h = 13,6 \times 980 \times 76 = 1,013 \times 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}. \quad (2.12)$$

O milímetro de mercúrio (mmHg) é uma unidade corrente de pressão e, corresponde naturalmente a:

$$1 \text{ mmHg} = \rho_{\text{Hg}} g h = 13,6 \times 980 \times 0,1 = 1,333 \times 10^3 \text{ dyn cm}^{-2}, \quad (2.13)$$

ou no Sistema Internacional de unidades a

$$1 \text{ mmHg} = \rho_{\text{Hg}} g h = 13,6 \times 10^3 \times 9,8 \times 1 \times 10^{-3} = 1,333 \times 10^2 \text{ Nm}^{-2}. \quad (2.14)$$

O mmHg também é conhecido como Torr em homenagem a Torricelli.

Outra unidade de pressão usual na área da Medicina é o cmH<sub>2</sub>O cuja conversão também é bastante simples. Assim, no sistema c.g.s.:

$$1 \text{ cmH}_2\text{O} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} g h = 1 \times 980 \times 1 = 9,8 \times 10^2 \text{ dyn cm}^{-2}. \quad (2.15)$$

e no Sistema Internacional:

$$1 \text{ cmH}_2\text{O} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} g h = 1 \times 10^3 \times 9,8 \times 1 \times 10^{-3} = 9,8 \times 10^1 \text{ Nm}^{-2}. \quad (2.16)$$

### 2.1.2. Princípio de Pascal

O princípio de Pascal<sup>3</sup> estabelece que a pressão exercida sobre um ponto num líquido incompressível transmite-se integralmente a todos os pontos do líquido e às paredes que o contém.

Uma aplicação directa deste princípio é a prensa hidráulica (Fig. 2.4). Na medição de pressão arterial através de um esfigmomanómetro também é usado este princípio uma vez que a pressão medida é a que é exercida sobre as paredes da artéria braquial, a qual, é comunicada à braçadeira.

---

<sup>3</sup> Blaise Pascal (1623 - 1662), físico e matemático francês. As suas contribuições quer na física quer na matemática foram várias sendo bastante conhecido, por exemplo, o triângulo de Pascal no cálculo combinatório.



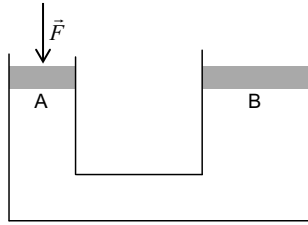


Figura 2.4 – Prensa hidráulica. A força aplicada na superfície A vai ser transmitida uniformemente a todo o líquido. A força exercida sobre a superfície B vai ser aumentada por um factor que depende das áreas A e B.

A força,  $\vec{F}$ , que é exercida sobre a superfície A (Fig. 2.4) gera uma pressão no líquido que é dada por:

$$P_A = \frac{|\vec{F}|}{A_A}, \quad (2.17)$$

em que  $A_A$  representa a área da superfície A. Segundo o princípio de Pascal a pressão exercida é transmitida integralmente a todo o líquido, pelo que a pressão em qualquer ponto à mesma profundidade será igual a  $P_A$ .

Considerando um ponto imediatamente abaixo da superfície B, vem que:

$$P_B = \frac{|\vec{F}_B|}{A_B} = P_A, \quad (2.18)$$

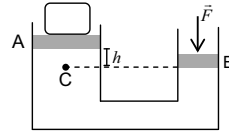
sendo  $A_B$  a área da superfície B e  $\vec{F}_B$  a força a que esta superfície fica sujeita. Combinando as Eq. 2.12 e 2.13 temos

$$|\vec{F}_B| = \frac{A_B}{A_A} |\vec{F}|. \quad (2.19)$$

Ora, se a área B for superior à área A então existe uma multiplicação da força. Este mecanismo é usado, por exemplo, em macacos ou travões hidráulicos.

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 370-371.

Exercício 2.3. O sistema representado na figura encontra-se em equilíbrio. As áreas dos êmbolos A e B são, respectivamente, iguais a  $250 \text{ cm}^2$  e  $50 \text{ cm}^2$  e a altura  $h$  é 2 cm. Sabendo que a massa do bloco que se encontra sobre o êmbolo A é igual a 200 g e que a massa específica do líquido da prensa é  $1 \text{ g cm}^{-3}$ , determine a intensidade da força  $\vec{F}$ .




---

Resolução:

A força que actua sobre o êmbolo A é numericamente igual ao peso do bloco. Assim:

$$F_A = m g \Rightarrow F_A = 200 \times 980 = 196000 \text{ dyn}, \quad (2.20)$$

em que  $g (= 980 \text{ cm s}^{-2})$  é a aceleração gravítica expressa em unidades c.g.s..

A pressão criada no líquido pelo êmbolo A é então dada por:

$$P_A = \frac{F_A}{A_A} \Rightarrow P_A = \frac{196000}{250} = 784 \text{ dyn cm}^{-2}. \quad (2.21)$$

Pela lei fundamental da hidrostática a pressão no ponto C, vem:

$$P_C = P_A + \rho g h \Rightarrow P_C = 784 + 1 \times 980 \times 2 = 2744 \text{ dyn cm}^{-2}, \quad (2.22)$$

a qual é igual à pressão num ponto imediatamente abaixo do êmbolo B. Desta forma:

$$P_C = P_B = \frac{F}{A_B} \Rightarrow 2744 = \frac{F}{50} \Leftrightarrow F = 137200 \text{ dyn} \quad (2.23)$$


---

### 2.1.3. Princípio de Arquimedes

O peso de um corpo diminui quando mergulhado num líquido, designando-se nesta situação o seu peso por “peso aparente”. Crê-se que Arquimedes (287-212 a.C.) foi o primeiro a pensar nesta diminuição quando o rei de Siracusa, Hierão, o instou a planear um método para verificar a composição autêntica da sua coroa. Além de ter observado a redução do peso, Arquimedes, comprovou que a mesma era exactamente igual ao peso do volume de líquido que o corpo deslocava quando era mergulhado. Esta observação designa-se, geralmente, por princípio de Arquimedes o qual pode ser enunciado da seguinte forma:

“Um corpo quando mergulhado num fluido sofre por parte deste uma força vertical de baixo para cima cuja intensidade é igual ao peso do volume de fluido deslocado”.

A força exercida no corpo é usualmente designada por impulsão,  $\vec{I}$ , sendo o seu módulo igual a:

$$I = m_{\text{fluido}} g \quad (2.24)$$

Tendo em conta a massa específica<sup>4</sup>,  $\rho$ , de uma dado material é usual reescrever a Eq. 2.24 sob a forma:

$$I = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{deslocado}} g \quad (2.25)$$

E uma vez que o volume deslocado é igual ao volume imerso de um determinado objecto vem:

$$I = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{imerso}} g \quad (2.26)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 371-372.

---

<sup>4</sup> A massa específica de um material define a relação entre a massa e o volume do mesmo. A unidade no Sistema Internacional é o kg/m<sup>3</sup> enquanto que no sistema c.g.s. é o g/cm<sup>3</sup>. Por vezes, usa-se abusivamente o termo densidade quando se refere à massa específica. A densidade,  $d$ , de um líquido é uma grandeza adimensional que reflecte o quociente entre a massa específica do material em causa e a massa específica da água ( $d = \rho_{\text{material}} / \rho_{\text{água}}$ ). A massa específica da água no sistema c.g.s. é igual a 1 g/cm<sup>3</sup>.

Exercício 2.4. Determine o valor da força de impulsão que um cubo de aresta igual a 10 cm sofre quando é parcialmente mergulhado em água ( $d_{\text{água}} = 1$ ) até metade da sua altura. Apresente o resultado no Sistema Internacional de Unidades.

---

Resolução:

O volume de fluido deslocado é igual ao volume imerso do cubo, assim

$$V_{\text{deslocado}} = a \times a \times \frac{a}{2} \Rightarrow V_{\text{deslocado}} = 0,1 \times 0,1 \times \frac{0,1}{2} = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \quad (2.27)$$

em que  $a$  representa a aresta do cubo.

A massa específica da água é 1 g/cm<sup>3</sup> no sistema c.g.s. a conversão para o Sistema Internacional é directa:

$$\rho_{\text{água}} = \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ kg}}{1 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad (2.28)$$

Desta forma o valor da impulsão é igual a:

$$I = \rho_{\text{água}} V_{\text{imerso}} g \Rightarrow I = 1 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-4} \times 9,8 = 4,9 \text{ N} \quad (2.29)$$

---

Exercício 2.5. Tendo em conta que a densidade do gelo e da água do mar são respectivamente iguais a 0,92 e 1,03, determine qual é a fracção volúmica de um iceberg que se encontra submersa.

---

Resolução:

As forças que actuam no iceberg são o peso e a impulsão (Fig. 2.5), as quais se anulam quando o mesmo flutua.

Temos então:

$$\vec{I} + \vec{p} = \vec{0}. \quad (2.30)$$

Considerando que na direcção vertical o sentido positivo é de baixo para cima, podemos simplificar a equação vectorial anterior a:

$$I - p = 0. \quad (2.31)$$

Assumindo que o iceberg é maciço, o seu peso pode ser determinado em função do seu volume ( $V_{\text{gelo}}$ ), então a Eq. 2.31 fica:

$$\rho_{\text{água}} V_{\text{imerso}} \mathbf{g} - \rho_{\text{gelo}} V_{\text{gelo}} \mathbf{g} = 0. \quad (2.32)$$

A fracção submersa é então obtida directamente:

$$\frac{V_{\text{imerso}}}{V_{\text{gelo}}} = \frac{\rho_{\text{gelo}}}{\rho_{\text{água}}} \Rightarrow \frac{V_{\text{imerso}}}{V_{\text{gelo}}} = \frac{0,92}{1,03} = 0,893 = 89,3\%. \quad (2.33)$$

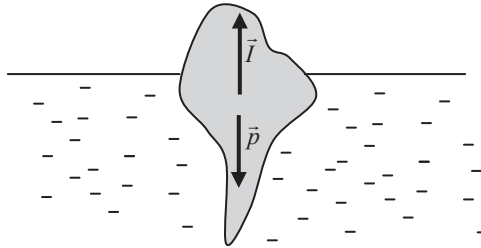


Fig. 2.5 – Representação de um iceberg semi-submerso e as forças nele aplicadas.  $\vec{I}$  é a impulsão e  $\vec{p}$  o peso.

## 2.2. Fluidos em movimento

Duas formas de análise podem ser aplicadas aos fluidos em movimento. Uma delas consiste em considerar o mesmo composto por pequenas partículas ou elementos de volume nos quais se aplicam as leis da mecânica. Esta foi a via delineada por Lagrange<sup>5</sup> que foi um primeiros físicos a aliar o cálculo diferencial à probabilidade e aos sistemas de partículas. Nesta perspectiva cada partícula é seguida “individualmente” ao longo do tempo.

A outra via consiste em considerar o movimento observado a partir de uma determinada posição ou posições. Descreve-se, pois, como varia em cada ponto a velocidade e a densidade do fluido. Este processo foi proposto por Euler<sup>6</sup> sendo por isso conhecido o formalismo pelo seu nome. A velocidade é então neste caso uma função da posição e do tempo:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (2.34)$$

em que  $\vec{r}$  representa o vector posição. O foco não é colocado nas partículas mas sim na posição pelo que ao longo do tempo passarão numa determinada posição várias partículas.

### 2.2.1. Movimento estacionário e linhas de corrente

Diz-se que o movimento de um fluido é estacionário quando a velocidade de cada volume elementar de fluido apresenta a uma velocidade invariante no tempo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{escoamento estacionário.} \quad (2.35)$$

Isto não significa que a velocidade seja igual para todos os pontos mas sim que ela depende apenas da posição. Se para além de ser constante relativamente ao

---

<sup>5</sup> Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático francês que se distinguiu tanto na matemática como na física. O teorema do valor médio e a solução do problema da oscilação da Lua são alguns dos seus legados.

<sup>6</sup> Leonhard Euler (1707-1783), um dos mais proeminentes matemáticos do séc. XVII, que também se dedicou a problemas físicos. Nasceu na Suíça (Basileia) mas viveu parte da sua vida na Alemanha e na Rússia. Ficou conhecido pelos seus trabalhos em cálculo e grafos e, também em mecânica, óptica e astronomia.

tempo também for igual para todos os pontos o escoamento é estacionário e uniforme.

No caso da velocidade num determinado ponto variar ao longo do tempo o escoamento diz-se não estacionário.

O escoamento estacionário é característico de um pequeno ribeiro que corre a baixa velocidade. Se num escoamento deste tipo fosse largado uma pequenina bola de esferovite esta mover-se-ia de forma semelhante a uma das partículas (elemento de volume) de fluido. A trajectória definida por esta bola constitui uma linha de corrente. As linhas de corrente num escoamento estacionário coincidem com as trajectórias das partículas de fluido e não alteram a sua configuração. A trajectória de um corpo é definida como uma linha que é tangente ao vector velocidade em cada ponto (Fig. 2.6). Por conseguinte, a linha de corrente define-se igualmente como uma linha que é tangente à velocidade em cada ponto.

Os regimes de escoamento podem distinguir-se em laminar e turbulento. O regime laminar, ou irrotacional, caracteriza-se pelo facto das linhas de corrente não se cruzarem enquanto que no regime turbulento estas cruzam-se. O regime laminar é característico de escoamento de baixa velocidade e por vezes apelidado de “bem-comportado”.

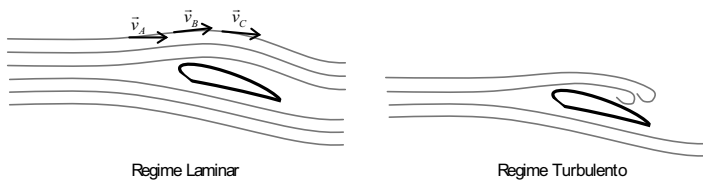


Fig. 2.6 – Representação das linhas de corrente num escoamento de um fluido. As linhas de corrente são linhas tangentes ao vector velocidade em cada ponto. Em regime laminar as linhas de corrente não se intersectam, contrariamente ao que acontece em regime turbulento.

### 2.2.2. Equação da continuidade

Considerando o escoamento de um fluido dentro de um tubo, a massa que entra é igual à massa que sai, verificando-se assim conservação da massa no escoamento. Outra forma de enunciar o princípio de conservação da massa seria afirmar que num escoamento não existe nem criação nem perda de massa.

A massa que passa num determinado intervalo de tempo por uma secção transversal de um tubo é facilmente determinada considerando o volume correspondente.

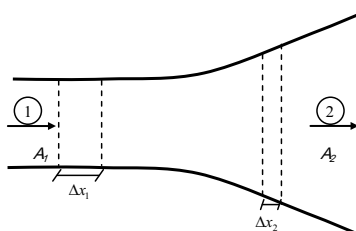


Fig. 2.7 – Escoamento de um fluido num tubo de secção recta variável. A massa que entra por unidade de tempo em 1 é igual à massa que sai por unidade de tempo em 2.

Na Fig. 2.7 representa-se o escoamento de um fluido dentro de um tubo. O deslocamento percorrido pelo fluido no intervalo de tempo  $\Delta t$  é igual a  $\Delta x$ . A área de secção recta é variável ao longo do tubo e é representada por  $A_x$ .

A aplicação do princípio de conservação da massa ao sistema representado leva a:

$$\dot{M}_1 = \dot{M}_2, \quad (2.36)$$

em que  $\dot{M}$  representa a massa por unidade de tempo que atravessa a secção transversal do tubo. Tendo em conta a definição de massa específica,  $\rho$ , a Eq. 2.36 pode ser transformada em:

$$\rho_1 \dot{V}_1 = \rho_2 \dot{V}_2, \quad (2.37)$$



em que  $\dot{V}$  é o volume por unidade de tempo que atravessa a secção transversal do tubo. O volume é directamente determinado por considerações geométricas, pelo que se tem:

$$\rho_1 A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \rho_2 A_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}, \quad (2.38)$$

mas por definição o deslocamento por unidade de tempo é a velocidade média de escoamento do fluido. Por conseguinte, a Eq. 2.38 transforma-se em:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2. \quad (2.39)$$

Assuma-se que a velocidade de escoamento se refere sempre à velocidade média de escoamento de uma secção de fluido excepto se dito em contrário.

No caso de fluidos incompressíveis a massa específica,  $\rho$ , não varia e o princípio de conservação da massa reduz-se a um princípio de conservação do caudal, mais conhecido por “equação da continuidade”:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow \dot{V}_1 = \dot{V}_2, \quad (2.40)$$

em que  $\dot{V}$  designa o caudal do escoamento. O caudal é o volume de fluido que atravessa a área de secção por unidade de tempo; a sua unidade no sistema internacional é  $m^3 s^{-1}$  e no sistema c.g.s é  $cm^3 s^{-1}$ .

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 404-407.

Exercício 2.6. Um fio de água sai de uma torneira com um caudal de  $0,1 \ell s^{-1}$ . O diâmetro interno da torneira é igual a 2 cm e 4 cm abaixo da mesma a velocidade de escoamento é igual a 80 cm/s.

- Qual é a velocidade de saída da água?
- Qual é o diâmetro do fio de água 4 cm abaixo da torneira?



---

Resolução:

a) O caudal pode ser definido pelo produto entre a velocidade de escoamento e a área da secção recta, assim:

$$\dot{V} = v A \quad . \quad (2.41)$$

E a área da secção recta é, neste caso a área de um círculo:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \times 1^2 = \pi \text{ cm}^2 \quad . \quad (2.42)$$

O valor do caudal do escoamento no sistema c.g.s. é:

$$\dot{V} = 0,1 \text{ l s}^{-1} = 0,1 \text{ dm}^3 \text{ s}^{-1} = 0,1 \times 10^3 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \quad . \quad (2.43)$$

Então o valor de velocidade de saída é:

$$1 \times 10^2 = v \pi \Leftrightarrow v = 31,8 \text{ cm s}^{-1} \quad . \quad (2.44)$$

b) A equação da continuidade pode ser aplicada directamente no ponto 4 cm abaixo da saída de água, o que significa que o caudal não varia de ponto para ponto. Então, temos:

$$\dot{V}_{\text{saída}} = \dot{V}_{4 \text{ cm abaixo}} \quad . \quad (2.45)$$

Uma vez mais o caudal pode ser relacionado com a velocidade e com a área da secção recta:

$$\dot{V}_{4 \text{ cm abaixo}} = v A_{4 \text{ cm abaixo}} \Leftrightarrow \dot{V}_{4 \text{ cm abaixo}} = v \pi r_{4 \text{ cm abaixo}}^2 \quad . \quad (2.46)$$

Substituindo valores obtém-se directamente o raio da secção recta:

$$1 \times 10^2 = 80 \pi r_{4 \text{ cm abaixo}}^2 \Leftrightarrow r_{4 \text{ cm abaixo}} = 0,63 \text{ cm} \quad . \quad (2.47)$$

Finalmente o diâmetro será:

$$\phi = 2r \Leftrightarrow \phi = 1,26 \text{ cm} \quad . \quad (2.48)$$

---

Exercício 2.7. O diâmetro na aorta humana é, em média de 2 cm. O débito sanguíneo na aorta é de 5 litros por minuto. Sendo o diâmetro médio dos capilares 8  $\mu\text{m}$  e a velocidade média do sangue, nestes vasos, 0,33 mm/s, qual é o número de capilares existentes no corpo?

Resolução:

A aorta vai-se dividindo, sendo os vasos cada vez menores em diâmetro até aos capilares.

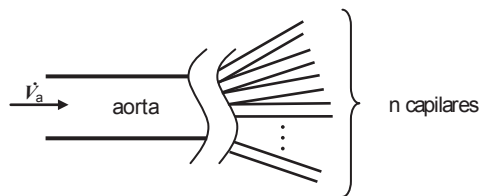


Fig. 2.8 – Representação esquemática da divisão dos vasos desde a aorta até aos capilares. O caudal de sangue que passa na aorta divide-se pelos diversos capilares. O caudal da aorta é igual à soma dos caudais nos capilares.

A aplicação da equação da continuidade resulta em:

$$\dot{V}_{aorta} = \dot{V}_{capilar1} + \dot{V}_{capilar2} + \dots + \dot{V}_{capilar n} , \quad (2.49)$$

i.e., o caudal na aorta é igual à soma dos caudais que atravessam os capilares. Assumindo, como aliás indica o enunciado, capilares com igual diâmetro o caudal que passa em cada um deles é igual, então:

$$\dot{V}_{aorta} = n_{capilares} \dot{V}_{capilares} . \quad (2.50)$$

Recordando a relação do caudal com a área de secção recta e a velocidade, vem:

$$\dot{V}_{aorta} = n_{capilares} v_{capilares} \pi r_{capilares}^2 , \quad (2.51)$$

Antes de substituir os valores vamos reduzi-los a unidades do sistema c.g.s.:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{aorta} &= 5 \ell / \text{min} = \frac{5 \text{ dm}^3}{1 \text{ min}} = \frac{5 \times 10^3 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}} = 83,33 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \\ r_{capilar} &= 4 \mu\text{m} = 4 \times 10^{-4} \text{ cm} \\ v_{capilar} &= 0,33 \text{ mm s}^{-1} = 0,033 \text{ cm s}^{-1} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Finalmente, temos:

$$83,33 = n_{capilares} \times 0,033 \times \pi \times (4 \times 10^{-4})^2 \Leftrightarrow n_{capilares} \approx 5 \times 10^9 \quad (2.53)$$

O número de capilares é aproximadamente  $5 \times 10^9$ .

---

### 2.2.3. Lei de Bernoulli

A Lei de Bernoulli<sup>7</sup> reflecte a conservação da energia no escoamento de um fluido. Para um fluido ideal são estabelecidas três formas de energia – energia cinética, energia potencial gravítica e energia potencial de pressão – cuja soma se conserva ao longo do escoamento:

$$E_{cinética} + E_{potencial gravítica} + E_{potencial de pressão} = c^{te}, \quad (2.54)$$

Cada uma das formas de energia depende de factores distintos podendo ser estabelecidas fórmulas características que usualmente são apresentadas normalizadas à quantidade de fluido (massa ou volume). Em função da massa (por unidade de massa), temos:

$$\frac{E_{cinética}}{m} = \frac{1}{2} v^2, \quad (2.55)$$

$$\frac{E_{potencial gravítica}}{m} = g h, \quad (2.56)$$

$$\frac{E_{potencial de pressão}}{m} = \frac{P}{\rho}, \quad (2.57)$$

---

<sup>7</sup> Daniel Bernoulli (1700-1782) nasceu na Holanda no seio de uma família de matemáticos que no decorrer do séc. XVIII desenvolveram vários ramos da matemática. Ficou conhecido no domínio da física, especialmente na mecânica de fluidos, mas também na matemática.

em que  $v$  é a velocidade do escoamento,  $g$  é a aceleração gravítica,  $h$  é a cota do eixo do escoamento,  $P$  é a pressão e  $\rho$  a massa específica do fluido.

As formas de energia por unidade de volume serão:

$$\frac{E_{\text{cinética}}}{V} = \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (2.58)$$

$$\frac{E_{\text{potencial gravítica}}}{V} = \rho g h, \quad (2.59)$$

$$\frac{E_{\text{potencial de pressão}}}{V} = P. \quad (2.60)$$

As duas formas são equivalentes podendo ser usadas indistintamente.

Uma avaliação qualitativa prévia sobre situações simples leva a conclusões interessantes. Consideremos o escoamento num tubo horizontal de secção recta constante (Fig. 2.9).

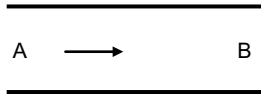


Fig. 2.9 – Escoamento de um fluido ideal num tubo horizontal de secção recta constante. A energia em A é igual à energia B.

A aplicação de Lei de Bernoulli a esta situação daria:

$$E_{\text{cinética}}^A + E_{\text{pot. gravítica}}^A + E_{\text{pot. pressão}}^A = E_{\text{cinética}}^B + E_{\text{pot. gravítica}}^B + E_{\text{pot. pressão}}^B \quad (2.61)$$

A energia potencial gravítica é igual em  $A$  e  $B$  pois o tubo é horizontal e a cota é invariante:  $E_{\text{pot. gravítica}}^A = E_{\text{pot. gravítica}}^B$ .

A energia cinética é também igual em  $A$  e  $B$  pois a secção recta é a mesma e pela equação da continuidade a velocidade também terá de ser:

$$E_{\text{cinética}}^A = E_{\text{cinética}}^B.$$

Sendo a energia cinética e a potencial de pressão iguais em  $A$  e  $B$ , a lei de Bernoulli (Eq. 2.54) implica que a energia potencial de pressão terá de ser igual em  $A$  e  $B$ :  $E_{\text{pot. pressão}}^A = E_{\text{pot. pressão}}^B$ .

Consideremos agora o escoamento num tubo ascendente de secção recta constante.

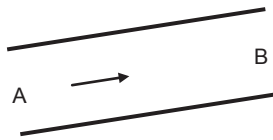


Fig. 2.10 – Escoamento de um fluido num tubo ascendente de secção recta constante. A energia em  $A$  é igual à energia  $B$ .

A Eq. 2.54 aplica-se uma vez mais, mas apesar da soma das formas de energia ser invariável as formas de energia individuais não permanecem constantes.

A energia cinética mantém-se constante visto a secção recta ser a mesma e a conservação do caudal (equação da continuidade) assim obrigar:  $E_{\text{cinética}}^A = E_{\text{cinética}}^B$ .

A energia potencial gravítica aumenta de  $A$  para  $B$  na medida em que a cota aumenta:  $E_{\text{pot. gravítica}}^A < E_{\text{pot. gravítica}}^B$ .

A validade da lei de Bernoulli implica então que a energia potencial de pressão diminua de  $A$  para  $B$ :  $E_{\text{pot. pressão}}^A > E_{\text{pot. pressão}}^B$ .

Consideremos ainda o caso de um escoamento num tubo horizontal com um estrangulamento.

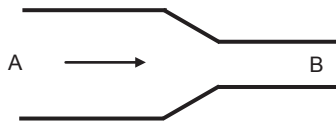


Fig. 2.11 – Escoamento de um fluido num tubo horizontal com um estrangulamento.

Como o tubo é horizontal a energia potencial gravítica é igual em  $A$  e  $B$  :  
 $E_{\text{pot. gravítica}}^A = E_{\text{pot. gravítica}}^B$  .

Devido ao estrangulamento a área de secção recta diminui e por via da conservação do caudal a velocidade aumenta de  $A$  para  $B$  . Por conseguinte, a energia cinética aumenta de  $A$  para  $B$  :  $E_{\text{cinética}}^A < E_{\text{cinética}}^B$  .

Finalmente, resulta das relações anteriores que a energia potencial de pressão diminui de  $A$  para  $B$  :  $E_{\text{pot. pressão}}^A > E_{\text{pot. pressão}}^B$  .

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 401-404;408-412.

Exercício 2.8. Verificou-se que no escoamento de um líquido de densidade 0,8 a sua velocidade é igual a 4 m/s num ponto em que a pressão é 2 N/cm<sup>2</sup>. Para um ponto do tubo situado numa zona cuja área de secção recta é dupla da anterior e altura a 20 cm acima, determine:

- a) a velocidade de escoamento
- b) a pressão

---

Resolução:

A Fig. 2.12 esquematiza a situação descrita.

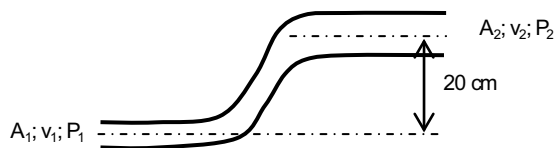


Fig. 2.12 – Representação esquemática dos dados do exercício 2.8. A velocidade  $v_1$  e a pressão  $P_1$  são dadas, bem como a relação entre as áreas  $A_1$  e  $A_2$ . São pedidas a velocidade  $v_2$  e a pressão  $P_2$ .

a) Para determinarmos a velocidade de escoamento aplicamos a equação da continuidade entre os dois pontos considerados:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (2.62)$$

em que  $v$  representa a velocidade e  $A$  a área. Uma vez que a relação de áreas e a velocidade  $v_1$  são conhecidas, a velocidade  $v_2$  é determinada directamente:

$$4 = v_2 \times 2 \Leftrightarrow v_2 = 2 \text{ m s}^{-1} \quad (2.63)$$

b) A aplicação da Lei de Bernoulli (por unidade de massa) entre os dois pontos considerados resulta em:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + g h_1 + \frac{P_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + g h_2 + \frac{P_2}{\rho}. \quad (2.64)$$

Vamos antes reduzir as unidades de pressão ao Sistema Internacional:

$$P_1 = \frac{2 \text{ N}}{1 \text{ cm}^2} = \frac{2 \text{ N}}{1 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 2 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}. \quad (2.65)$$

Note-se ainda que o valor da densidade converte-se directamente:

$$d = \frac{\rho_X}{\rho_{H_2O}} \Leftrightarrow 0,8 = \frac{\rho_X}{1 \times 10^3} \quad \rho_X = 8 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}. \quad (2.66)$$

Substituindo valores, vem:

$$\frac{1}{2} \times 4^2 + 9,8 \times 0 + \frac{2 \times 10^4}{8 \times 10^2} = \frac{1}{2} \times 2^2 + 9,8 \times 0,2 + \frac{P_2}{8 \times 10^2}, \quad (2.67)$$

e resolvendo em ordem a  $P_2$ :

$$P_2 = 23232 \text{ N m}^{-2}. \quad (2.68)$$


---



Exercício 2.9. Determine a altura máxima a que uma bomba de sucção de água ( $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ) pode trabalhar. Considere a pressão atmosférica igual a  $1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ .

Resolução:

O problema pode ser esquematizado como se segue (Fig. 2.13).

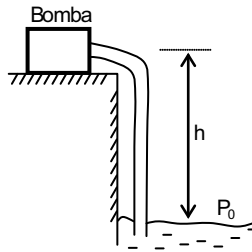


Fig. 2.13 – Representação esquemática dos dados do exercício 2.9. A bomba encontra-se a uma altura  $h$  acima da superfície livre do líquido.

Podemos aplicar a Lei de Bernoulli entre a superfície livre do líquido e a bomba de sucção, resultando em:

$$\frac{1}{2}v_{\text{bomba}}^2 + gh_{\text{bomba}} + \frac{P_{\text{bomba}}}{\rho} = \frac{1}{2}v_{\text{sup.}}^2 + gh_{\text{sup.}} + \frac{P_{\text{sup.}}}{\rho}. \quad (2.69)$$

A pressão mínima (teórica) admitida na bomba de sucção é zero, e admitindo um tubo de secção recta constante vem:

$$\cancel{\frac{1}{2}v_{\text{bomba}}^2} + gh = \cancel{\frac{1}{2}v_{\text{sup.}}^2} + \frac{P_0}{\rho} \Leftrightarrow h = \frac{P_0}{g\rho}. \quad (2.70)$$

Substituindo valores:

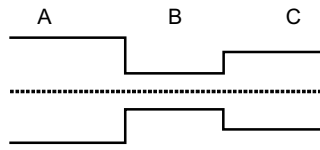
$$h = \frac{1,013 \times 10^5}{9,8 \times 1 \times 10^3} = 10,34 \text{ m}. \quad (2.71)$$

A altura máxima a que a bomba de sucção pode estar é de 10,34 m, o que significa que uma bomba de sucção colocada a uma altura superior a 10,34 m não terá a capacidade de bombear água.

---

### 2.2.3.1. Exercícios resolvidos

Exercício 2.10 – Considere o sistema horizontal representado na figura, onde circula um fluido líquido, sem atrito interno, de massa específica  $0,9 \text{ g cm}^{-3}$ . Sabendo que a massa de fluido que atravessa a secção B por segundo é de  $900 \pi \text{ g}$ , determine a variação da energia potencial por unidade de massa entre as secções A e C. Considere, se necessário, que diâmetros das secções A, B e C são iguais a  $4\sqrt{2}$ , 2 e 4 cm, respectivamente.



Resolução:

Dados do problema e conversão de unidades

$$\rho = 0,9 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\dot{m} = 900\pi \text{ g s}^{-1}$$

$$\phi_A = 4\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow r_A = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\phi_B = 2 \text{ cm} \Rightarrow r_B = 1 \text{ cm}$$

$$\phi_C = 4 \text{ cm} \Rightarrow r_C = 2 \text{ cm}$$

Aplicando o teorema de Bernoulli entre um ponto da secção A e um ponto da secção C, temos:

$$E_{\text{cinética A}} + E_{\text{p. gravítica A}} + E_{\text{p. pressão A}} = E_{\text{cinética C}} + E_{\text{p. gravítica C}} + E_{\text{p. pressão C}} \quad (2.72)$$

As energias potenciais gravíticas em A e C são iguais, uma vez que a cota é a mesma, pelo que a equação anterior se reduz a:

$$E_{\text{cinética A}} + E_{\text{p, pressão A}} = E_{\text{cinética C}} + E_{\text{p, pressão C}} . \quad (2.73)$$

Rearranjando a equação vem:

$$E_{\text{p, pressão A}} - E_{\text{p, pressão C}} = E_{\text{cinética C}} - E_{\text{cinética A}} . \quad (2.74)$$

A variação da energia potencial de pressão é, neste caso, igual ao simétrico da variação da energia cinética. A energia cinética por unidade de massa é dada pela expressão:

$$\frac{E_c}{m} = \frac{1}{2} v^2 . \quad (2.75)$$

A Eq. 2.74 pode ser reescrita na forma:

$$\frac{E_{\text{p, pressão A}}}{m} - \frac{E_{\text{p, pressão C}}}{m} = \frac{1}{2} v_c^2 - \frac{1}{2} v_a^2 . \quad (2.76)$$

É necessário, então, determinar as velocidades em A e C. Como há conservação da massa que se traduz pelo facto do caudal mássico que passa na secção A ser igual ao que passa na secção C, tem-se:

$$\dot{M}_A = \dot{M}_B = \dot{M}_C . \quad (2.77)$$

Sabendo que a massa de líquido que por unidade de tempo atravessa uma secção ( $\dot{M}$ ) está relacionado com o caudal  $F$  através da expressão  $\dot{M} = \rho F$ , temos:

$$\dot{M} = \rho v \pi r^2 . \quad (2.78)$$

Podemos determinar as velocidades nas secções A e C,

$$\dot{M}_A = \dot{M}_B \Leftrightarrow \rho v_A \pi r_A^2 \Rightarrow \dot{M}_B = 0,9 v_A \pi (2\sqrt{2})^2 = 900 \pi ; \quad (2.79)$$

$$\Leftrightarrow v_A = 125 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\dot{M}_C = \dot{M}_B \Leftrightarrow \rho v_C \pi r_C^2 \Rightarrow \dot{M}_B = 0,9 v_C \pi (2)^2 = 900 \pi \quad (2.80)$$

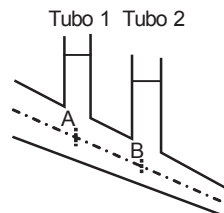
$$\Leftrightarrow v_C = 250 \text{ cm s}^{-1}$$

Substituindo na Eq. 2.76 os valores já calculados:

$$\frac{E_{\text{p.pressão A}}}{m} - \frac{E_{\text{p.pressão C}}}{m} = \frac{1}{2} 250^2 - \frac{1}{2} 125^2 = 23437,5 \text{ erg g}^{-1}. \quad (2.81)$$

Exercício 2.11. Considere o sistema representado na figura, no qual escoo um líquido não viscoso com densidade  $\rho$  e caudal constante. O raio em A é duplo do raio em B, que se situa 50 mm abaixo de A.

- a) Se no tubo 1 o líquido subir a uma altura de 3 dm, medidos a partir do ponto A, e se a velocidade média em A for de  $12 \text{ m min}^{-1}$ , quanto subirá o líquido no tubo 2, relativamente ao ponto B?



- b) Qual deve ser a relação entre os raios de A e B, para que o líquido nos tubos 1 e 2 atinja a mesma altura relativamente ao ponto B?

Resolução:

Dados do problema e conversão de unidades

$$\rho = c^{te}$$

$$\dot{V} = c^{te}$$

$$r_A = 2r_B$$

$$h_B = h_A - 50 \text{ (mm)} = h_A - 5 \text{ (cm)}$$

a) Além dos dados gerais do problema temos de considerar para a resolução da presente alínea os seguintes dados:

$$h_1 = 3 \text{ dm} = 30 \text{ cm}$$

$$v_A = 12 \text{ m min}^{-1} = \frac{1200}{60} = 20 \text{ cm s}^{-1} \quad (2.82)$$

Designa-se por  $h_1$  a altura que o fluído atinge no tubo 1, e por  $h_2$  a altura que o líquido atinge no tubo 2.

A partir da conservação da massa pode estabelecer-se uma relação entre as velocidades nos pontos A e B,

$$S_A v_A = S_B v_B \Leftrightarrow \pi r_A^2 v_A = \pi r_B^2 v_B \Leftrightarrow v_A = \frac{r_B^2}{r_A^2} v_B. \quad (2.83)$$

A relação entre os raios é conhecida pelo que:

$$v_A = \frac{r_B^2}{(2r_B)^2} v_B \Leftrightarrow v_A = \frac{1}{4} v_B \Leftrightarrow v_B = 4v_A. \quad (2.84)$$

As pressões em A e B podem ser relacionadas com as alturas a que o líquido sobe nos tubos 1 e 2, respectivamente. Assim, teremos:

$$P_A = \rho g h_1 + P_0 \text{ e } P_B = \rho g h_2 + P_0, \quad (2.85)$$

em que  $P_0$  representa a pressão atmosférica.

Aplicando agora o teorema de Bernoulli entre os pontos A e B,

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g h_A + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g h_B + P_B. \quad (2.86)$$

Continuando a assumir para nível de energia potencial gravítica zero o do ponto A, e substituindo na expressão anterior os resultados expressos nas Eqs. 2.84 e 2.85:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + \rho g h_1 + P_0 = \frac{1}{2}\rho(4v_A)^2 + \rho g(h_A - 5) + \rho g h_2 + P_0. \quad (2.87)$$

Resolvendo esta equação em ordem a  $h_2$ , obtemos:

$$h_2 = h_1 + 5 - \frac{15}{2g} v_A^2. \quad (2.88)$$

Substituindo os valores, vem:

$$h_2 = 30 + 5 - \frac{15}{2 \times 980} 20^2 = 32 \text{ cm}. \quad (2.89)$$

b) Nesta alínea temos de considerar:

$$h_2 = h_1 + 5. \quad (2.90)$$

Aplicando, novamente, o teorema de Bernoulli entre os pontos A e B e, fazendo uso das expressões para as pressões nos pontos A e B obtidas anteriormente, tem-se:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + \rho g h_1 + P_0 = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g(h_A - 5) + \rho g h_2 + P_0. \quad (2.91)$$

Tendo em conta a relação entre as alturas nos tubos 1 e 2, expressa pela Eq. 2.90, a expressão 2.91 simplifica-se, obtendo-se:

$$v_A^2 = v_B^2. \quad (2.92)$$

A conservação da massa permite estabelecer a relação:

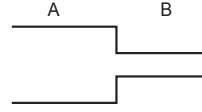
$$S_A v_A = S_B v_B \Leftrightarrow \pi r_A^2 v_A = \pi r_B^2 v_B \Leftrightarrow \frac{r_A}{r_B} = \sqrt{\frac{v_B}{v_A}}. \quad (2.93)$$

Como as velocidades  $v_A$  e  $v_B$  são iguais, conclui-se que:

$$\frac{r_A}{r_B} = 1 \Leftrightarrow r_A = r_B. \quad (2.94)$$


---

Exercício 2.12. Considere a figura, que representa um tubo horizontal com um estrangulamento percorrido por um líquido não viscoso de densidade  $10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . Sabendo que a energia total da massa de líquido que por segundo percorre o sistema é igual a  $3 \times 10^{-3} \text{ J}$ , determine a pressão em A e em B. Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:



$$S_A = 0,04 \text{ m}^2 \quad S_B = 0,01 \text{ m}^2 \quad v_A = 0,02 \text{ m s}^{-1}$$

Resolução:

Dados do problema e conversão de unidades

$$\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$P = 3 \times 10^{-3} \text{ J s}^{-1}$$

$$S_A = 0,04 \text{ m}^2$$

$$S_B = 0,01 \text{ m}^2$$

$$v_A = 0,02 \text{ m s}^{-1}$$

O enunciado refere-se à energia total do líquido que por segundo percorre o sistema; esta grandeza é a potência de escoamento do fluido. Recordando que a potência é a energia por unidade de tempo, facilmente se entende que esta pode ser representada pelo produto da energia por unidade de volume pelo caudal,

$$P = \frac{E}{t} \Leftrightarrow P = \frac{E}{V} \dot{V}. \quad (2.95)$$

A energia por unidade de volume,  $(E/V)$ , é dada pela expressão:

$$E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + P. \quad (2.96)$$

E o caudal,  $(\dot{V})$ , é dado por:

$$\dot{V} = S v, \quad (2.97)$$

então,

$$P = \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + P \right) S v. \quad (2.98)$$

Considerando que o nível a que o líquido escoia situa-se numa linha do campo gravítico a que corresponde energia potencial zero ( $h_A = h_B = 0$ ) e, tendo em conta o valor da velocidade em A, vem:

$$3 \times 10^{-3} = \left( \frac{1}{2} \times 10^3 \times 0,02^2 + 0 + P_A \right) \times 0,04 \times 0,02 \Leftrightarrow P_A = 3,55 \text{ N m}^{-2}. \quad (2.99)$$

A velocidade de escoamento na secção B pode ser determinada pela conservação da massa, que pode ser traduzida pela expressão:

$$S_A v_A = S_B v_B. \quad (2.100)$$

Substituindo os valores e resolvendo em ordem a  $v_B$  temos:

$$0,04 \times 0,02 = 0,01 v_B \Leftrightarrow v_B = 0,08 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.101)$$

Aplicando, o teorema de Bernoulli entre as secções A e B, podemos determinar a pressão em B,

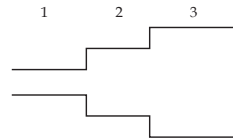
$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g h_A + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g h_B + P_B. \quad (2.102)$$

Substituindo os respectivos valores:

$$\frac{1}{2} \times 10^3 \times 0,02^2 + 3,55 = \frac{1}{2} \times 10^3 \times 0,08^2 + P_B \Leftrightarrow P_B = 0,55 \text{ N m}^{-2}. \quad (2.103)$$

### 2.2.3.2. Exercícios propostos

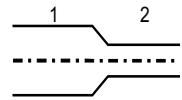
- No sistema representado na figura circula um fluido de viscosidade nula, massa específica de  $1 \text{ g cm}^{-3}$  e caudal constante. Se as pressões nas secções 2 e 3 forem  $975374 \text{ dyn cm}^{-2}$  e  $975504 \text{ dyn cm}^{-2}$ , respectivamente, calcule o caudal de líquido que atravessa o sistema. Na





resolução do problema considere desprezáveis as perdas de energia nos estrangulamentos e os seguintes valores para os raios das diferentes secções:  $R_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 2 \text{ cm}$ ,  $R_3 = 3 \text{ cm}$ .

2. Considere o sistema representado na figura, onde circula um fluido líquido. Admitindo que o volume de líquido que, por unidade de tempo, atravessa uma secção do circuito, normal à direcção da velocidade do líquido, é de  $0,2 \ell$ , determine:

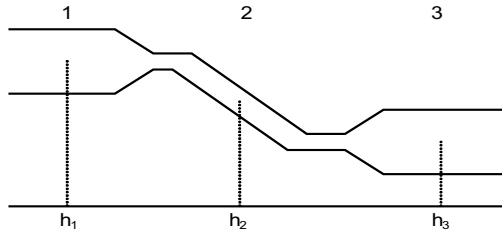


- A variação de energia potencial de pressão por unidade de massa entre 1 e 2.
- A energia potencial de pressão por unidade de massa na secção 2, sabendo que a energia potencial de pressão por unidade de massa na secção 1 é de  $200,6 \text{ erg g}^{-1}$ .

Na resolução do problema considere ainda que o raio da secção 2 é igual a  $10/(3\sqrt{\pi}) \text{ cm}$  e que a área da secção 1 é o triplo da área da secção 2.

3. Considere o sistema representado na figura. Supondo que no sistema circula um líquido de massa específica  $1 \text{ g cm}^{-3}$ , determine:
- A pressão do líquido na zona 1, de modo a que a pressão na zona 3 seja nula.
  - A secção do tubo na zona 2, de modo a que a velocidade do líquido nesta zona seja igual à semi-soma das velocidades em 1 e 3.
  - A pressão no tubo 2, tendo em conta os resultados obtidos nas alíneas anteriores.

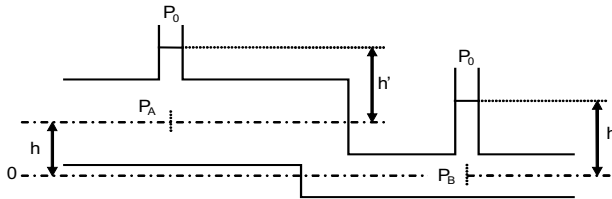
Supõe-se que as diferenças de pressão resultantes dos desníveis correspondentes aos diferentes diâmetros dos tubos são desprezáveis.



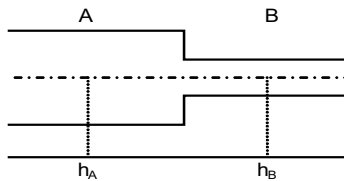
Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$\begin{array}{lll}
 h_1 = 0,2 \text{ m} & S_1 = 10 \text{ cm}^2 & v_1 = 100 \text{ cm s}^{-1} \\
 h_2 = 15 \text{ cm} & h_3 = 10 \text{ cm} & S_3 = 5 \text{ cm}^2
 \end{array}$$

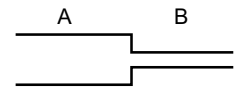
4. Considere o sistema da figura, percorrido por um fluido ideal. Se os raios dos tubos A e B forem de 4 e 2 cm, respectivamente, e a velocidade do líquido no tubo A for de  $1 \text{ cm s}^{-1}$ , qual é o valor da altura  $h$ ?



5. Considere um líquido de massa específica  $0,8 \text{ g cm}^{-3}$  e viscosidade desprezável, que percorre o sistema da figura com caudal 200 mililitros por minuto. Calcule a diferença de pressão entre A e B, sabendo que os raios destas secções são 10 e 2 cm, respectivamente.



6. Calcule a velocidade do líquido não viscoso de densidade  $10^3 \text{ kg m}^{-3}$  no ramo A da figura sabendo que  $P_A = 6 \text{ N m}^{-2}$ ,  $P_B = 1 \text{ N m}^{-2}$ , e que as áreas das secções A e B são 0,06 e  $0,01 \text{ m}^2$ .

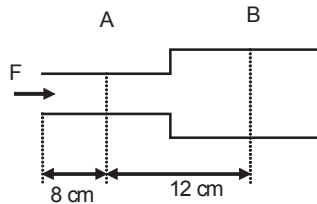


7. O diâmetro na aorta humana é, em média de 2 cm. O débito sanguíneo na aorta é de 5 litros por minuto.

a) Qual é a velocidade média do sangue na aorta?

b) Sendo o diâmetro médio dos capilares  $8 \mu\text{m}$  e a velocidade média do sangue, nestes vasos,  $0,33 \text{ mm s}^{-1}$ , qual é o número de capilares existentes no corpo?

8. Considere o sistema representado na figura, no qual circula um líquido de densidade  $1 \text{ g cm}^{-3}$ . Sabendo que a massa de fluido que atravessa a secção B, por unidade de tempo, é igual a  $1600 \pi \text{ g}$ , determine a variação de energia potencial de pressão entre as secções A e B (por unidade de massa).

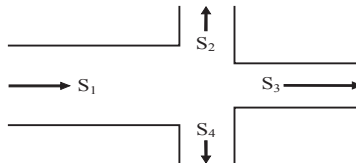


Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$r_A = 4 \text{ cm}$$

$$r_B = 10 \text{ cm}$$

9. Considerar o sistema coplanar representado na figura conforme visto de cima, no qual escoam um líquido incompressível não viscoso de massa específica  $1,2 \text{ g cm}^{-3}$ . Sabendo que a velocidade no ramo 1 é  $v_1 = 2 \text{ m s}^{-1}$ , determine a velocidade a velocidade nos ramos de saída e a pressão P.



Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

$$P_1 = P$$

$$P_2 = P_3 = P_4 = 2P$$

$$S_1 = 1,5 S$$

$$S_2 = S_3 = S_4 = S$$

10. Admitindo que o número de capilares sanguíneos é de  $10^{10}$  e que estes têm um raio igual a  $R_A/10^4$  cm, onde  $R_A$  é o raio da aorta, relacione as energias cinéticas por unidade de massa, entre estes dois sistemas de vasos.

#### 2.2.4. Fluidos reais e fórmula de Poiseuille

Os fluidos reais distinguem-se dos ideais porque apresentam atrito interno havendo por essa razão perda de energia. Geralmente, associa-se o conceito de viscosidade ( $\eta$ ) à existência de atrito interno. Um fluido ideal apresenta viscosidade nula enquanto que para um fluido real a viscosidade é diferente de zero.

A unidade de viscosidade no sistema c.g.s é o Poise e para o Sistema Internacional de unidades é o  $\text{Pa}\cdot\text{s}$  ou Poiseuille.

O escoamento de um fluido ideal por um tubo horizontal de secção recta constante é tal que a pressão é constante ao longo do tubo. No entanto, para um fluido real a pressão diminui uma vez que há perda de energia devido ao atrito interno. Ainda assim continua a verificar-se conservação de energia se se tiver em conta a energia dissipada. A Lei de Bernoulli nestas circunstâncias engloba um termo relativo à dissipação de energia.

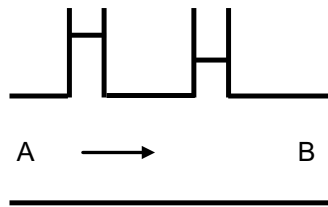


Fig. 2.14 – Escoamento de um fluido real num tubo horizontal de secção recta constante. A energia em A é igual à energia B.

Aplicando a Lei de Bernoulli para o escoamento de um fluido real num tubo horizontal de secção recta constante (Fig 2.14) teríamos:

$$E_{\text{cinética}}^A + E_{\text{pot. gravítica}}^A + E_{\text{pot. pressão}}^A = E_{\text{cinética}}^B + E_{\text{pot. gravítica}}^B + E_{\text{pot. pressão}}^B + Q_{A \rightarrow B} \quad (2.104)$$

em que o termo  $Q_{A \rightarrow B}$  representa a energia dissipada devido ao atrito interno. Neste caso, a energia cinética mantém-se constante uma vez que a secção recta também é a mesma e a conservação da massa assim o obriga. A energia potencial gravítica também é a mesma visto que a cota é igual. Desta forma, a energia dissipada por atrito interno é igual à perda de energia potencial de pressão:

$$Q_{A \rightarrow B} = E_{\text{pot. pressão}}^A - E_{\text{pot. pressão}}^B \quad (2.105)$$

Recordando que a expressão da energia potencial de pressão por unidade de volume é simplesmente a pressão, podemos concluir que a energia dissipada por unidade de volume é igual à perda de pressão ao longo do escoamento:

$$\frac{Q_{A \rightarrow B}}{V} = P_A - P_B \quad (2.106)$$

A perda de pressão num escoamento de um fluido real num tubo cilíndrico horizontal de secção recta constante foi estudada por Poiseuille<sup>8</sup> tendo-a relacionado com as características físicas do tubo, com o fluido e com o caudal. Esta relação é conhecida por lei ou fórmula de Poiseuille e é, para o regime laminar, dada por:

$$P_A - P_B = \frac{8\eta \ell}{\pi r^4} F, \quad (2.107)$$

em que  $\eta$  é a viscosidade do fluido,  $\ell$  o comprimento do tubo (ou a distância entre os pontos A e B),  $r$  o raio do tubo e  $F$  o caudal do escoamento.

O escoamento num tubo cilíndrico em regime laminar não apresenta a mesma velocidade para todos os pontos do fluido. Na realidade, a velocidade de diferentes camadas cilíndricas varia parabolicamente desde o eixo do tubo, onde a velocidade é máxima, até à fronteira do tubo, onde a velocidade é nula (Fig. 2.15).

A velocidade da camada cilíndrica de raio  $r$  é dada pela expressão:

---

<sup>8</sup> Jean Louis Marie Poiseuille (1797 – 1869) foi um médico e fisiologista francês. Em 1846 publicou a lei pela qual ficou conhecido.

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta\ell} (R_T^2 - r^2). \quad (2.108)$$

A velocidade máxima, que ocorre no eixo do tubo ( $r = 0$ ), é dada por:

$$v_{\max} = \frac{\Delta P R_T^2}{4\eta\ell}, \quad (2.109)$$

a velocidade média,  $\bar{v}$ , por:

$$\bar{v} = \frac{\Delta P R_T^2}{8\eta\ell}, \quad (2.110)$$

sendo a relação entre a velocidade máxima e média

$$v_{\max} = 2\bar{v}. \quad (2.111)$$

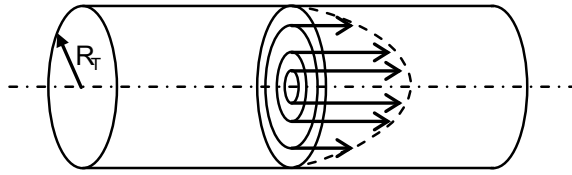


Fig. 2.15 – Escoamento em regime laminar num tubo cilíndrico: as camadas cilíndricas do escoamento apresentam velocidades distintas sendo máxima no eixo do tubo e nula na periferia.

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 395-401;412-415.

Exercício 2.13. Uma mangueira de diâmetro 4,0 cm encontra-se ligada a uma torneira cuja pressão máxima é de 1,2 atm. Determine o comprimento máximo que a mangueira, suposta horizontal, pode ter de forma a que o caudal de água ( $\eta_{H_2O} = 0,01$  Poise) seja igual a  $60,0 \ell \text{ min}^{-1}$ .

---

## Resolução

A pressão à saída é a pressão atmosférica que se supõe igual a 1 atm. Por conseguinte, a queda de pressão entre a entrada e a saída é de 0,2 atm. Convertendo primeiro as unidades de pressão para Torr (ou mmHg), vem:

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} \Rightarrow 0,2 \text{ atm} = 152 \text{ mmHg}, \quad (2.112)$$

e agora para o sistema c.g.s., temos

$$P = \rho g h \Rightarrow P = 13,6 \times 980 \times 15,2 = 202585,6 \text{ dyn cm}^{-2}. \quad (2.113)$$

É também necessário converter as unidades de caudal. Assim:

$$F = \frac{60 \ell}{1 \text{ min}} = \frac{60 \text{ dm}^3}{60 \text{ s}} = \frac{60000 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}} = 1000 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}. \quad (2.114)$$

Aplicando agora a fórmula de Poiseuille obtemos:

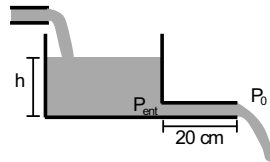
$$\Delta P = \frac{8 \eta \ell}{\pi r^4} F \Rightarrow 202585,6 = \frac{8 \times 0,01 \times \ell}{\pi \times 2^4} \times 1000, \quad (2.115)$$

resolvendo em ordem ao comprimento  $\ell$ ,

$$\ell = 127288,3 \text{ cm} \approx 1273 \text{ m}. \quad (2.116)$$

---

Exercício 2.14. A figura mostra um depósito de água cúbico de aresta 20 cm, que tem junto à base um tubo horizontal de diâmetro igual a 1 cm. O caudal de enchimento do depósito é constante e igual a  $2,0 \ell \text{ s}^{-1}$ .



Sabendo que inicialmente o depósito está vazio determine:

- A altura máxima ( $h$ ) que a água atinge no depósito.
- O tempo que o depósito demora a esvaziar até metade da altura máxima após cessar o enchimento.

---

Resolução:

Se o caudal de vazamento fosse sempre superior ao de enchimento o depósito nunca encheria. Se, pelo contrário, o caudal de enchimento fosse sempre superior ao de vazamento o depósito encheria completamente e transbordaria. O caudal de vazamento é, contudo variável, uma vez que depende da pressão à entrada do tubo cilíndrico a qual depende da altura de água no depósito. Deixará de haver variação de altura de água no depósito quando os dois caudais, de enchimento e de vazamento, se igualarem.

$$\dot{V}_{\text{vaz}} = \dot{V}_{\text{ench}} = 0,2 \text{ l s}^{-1}. \quad (2.117)$$

O caudal,  $F$ , de vazamento é dado pela fórmula de Poiseuille:

$$\dot{V}_{\text{vaz}} = \frac{\pi r^4}{8\eta\ell} \Delta P. \quad (2.118)$$

A queda de pressão entre a entrada e a saída do tubo cilíndrico é:

$$\Delta P = P_{\text{ent}} - P_0, \quad (2.119)$$

mas a pressão à entrada,  $P_{\text{ent}}$ , pode ser obtida pela lei fundamental da hidrostática,

$$P_{\text{ent}} = P_0 + \rho g h. \quad (2.120)$$

Combinando a Eq. 2.119 com a Eq. 2.120, obtém-se:

$$\Delta P = \rho g h. \quad (2.121)$$

A altura máxima de água no depósito ocorre, então, para a seguinte condição:

$$\dot{V}_{\text{ench}} = \dot{V}_{\text{vaz}} = \frac{\pi r^4}{8\eta\ell} \rho g h \Rightarrow 2000 = \frac{\pi \times 0,5^4}{8 \times 0,01 \times 20} \times 1 \times 980 \times h. \quad (2.122)$$

Resolvendo em ordem à altura,  $h$ ,

$$h = 16,6 \text{ cm}. \quad (2.123)$$

A altura máxima que a água atinge no depósito é 16,6 cm.



b) Como vimos anteriormente o caudal de vazamento depende da altura a que se encontra a superfície livre de água no depósito. À medida que a altura diminui o caudal também diminui, pelo que o cálculo do tempo torna-se um pouco mais complexo. Recordando que, por definição, o caudal é o volume por unidade de tempo, o volume elementar,  $dV$ , que é vazado num intervalo elementar de tempo,  $dt$ , é dado por:

$$dV = \dot{V} dt . \quad (2.124)$$

Desta forma, o volume vazado,  $V_{\text{vaz}}$ , no intervalo de tempo  $[0, t_m]$ s será dado pelo integral definido:

$$V_{\text{vaz}} = \int_0^{t_m} \dot{V} dt . \quad (2.125)$$

Substituindo a expressão do caudal de vazamento (Eq. 2.122) no integral (Eq. 2.125), vem:

$$V_{\text{vaz}} = \int_0^{t_m} \frac{\pi r^4}{8\eta \ell} \rho g h dt . \quad (2.126)$$

À exceção da altura,  $h$ , todas os outros valores são constantes podendo passar para fora do integral,

$$V_{\text{vaz}} = \frac{\pi r^4}{8\eta \ell} \rho g \int_0^{t_m} h dt \Leftrightarrow V_{\text{vaz}} = \kappa \int_0^{t_m} h dt , \quad (2.127)$$

com

$$\kappa = \frac{\pi r^4}{8\eta \ell} \rho g . \quad (2.128)$$

É necessário agora deduzir a expressão que traduz a variação da altura,  $h$ , em ordem ao tempo. Para isso, vamos considerar o volume elementar,  $dV$ , correspondente a prisma de área da base igual ao do depósito e altura elementar,  $dh$ . Consideremos ainda que este volume se encontra à cota  $h$  (Fig. 2.16).

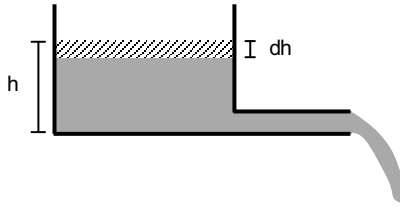


Fig. 2.16 – escoamento da água: no intervalo de tempo elementar,  $dt$ , vaza pelo tubo cilíndrico horizontal o volume elementar  $dV = A_{\text{base}} \times dh$ .

O volume escoado,  $dV$ , é igual ao produto do caudal pelo intervalo de tempo elementar,  $dt$ ,

$$dV = F dt \Leftrightarrow dV = \kappa h dt, \quad (2.129)$$

mas o volume de um prisma é igual ao produto da área da base,  $A_{\text{base}}$ , pela altura,

$$A_{\text{base}} dh = \kappa h dt. \quad (2.130)$$

Tendo em conta que a altura vai diminuindo ao longo do tempo vem:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\kappa h}{A_{\text{base}}}, \quad (2.131)$$

o que constitui uma equação diferencial de 1ª ordem com resolução directa. Deixando de lado os pormenores de resolução da Eq. 2.131 verifica-se que a solução do problema a equação:

$$h(t) = h_{\text{max}} e^{-\frac{\kappa}{A_{\text{base}}}t}. \quad (2.132)$$

Substituindo então este resultado na Eq. 2.127 obtém-se:

$$V_{\text{vaz}} = \kappa \int_0^{t_m} h_{\text{max}} e^{-\frac{\kappa}{A_{\text{base}}}t} dt. \quad (2.133)$$

O problema da determinação do tempo,  $t_m$ , que demora a esvaziar metade do depósito é matematicamente equivalente a resolver a equação:

$$\frac{A_{\text{base}} h_{\text{max}}}{2} = \kappa \int_0^{t_m} h_{\text{max}} e^{-\frac{\kappa}{A_{\text{base}}}t} dt. \quad (2.134)$$

Resolvendo o integral definido ficamos com

$$-\frac{1}{2} = \left[ e^{-\frac{\kappa}{A_{\text{base}}} t} \right]_0^{t_m} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = e^{-\frac{\kappa}{A_{\text{base}}} t_m} - e^0. \quad (2.135)$$

E em ordem ao tempo vem:

$$t_m = \ln 2 \frac{h_{\text{max}}}{\kappa}. \quad (2.136)$$

O tempo,  $t_m$ , que demora a esvaziar metade do depósito será tanto maior quanto maior for a altura a que água se encontra no interior do depósito e quanto menor for o caudal.

O problema apresentado reveste-se de especial interesse uma vez que a modelização do mesmo é semelhante a outros fenómenos da biologia e fisiologia humana. Este é um problema típico de 1ª ordem<sup>9</sup> que é comum na natureza.

A captação e o efluxo de uma substância por uma célula ou o transporte de gases entre o alveólo e o sangue são exemplos que seguem, *mutatis mutandis*, o mesmo modelo.

#### 2.2.4.1. Resistência hidrodinâmica e associações

Um conceito interessante no âmbito da dinâmica dos fluidos reais é o de resistência hidrodinâmica. Este surge por analogia ao conceito de resistência eléctrica. A lei de Ohm relaciona a intensidade de corrente,  $I$ , com a diferença de potencial,  $V$ , segundo a equação:

$$V = R I, \quad (2.137)$$

em que  $R$  representa a resistência eléctrica.

Se o caudal,  $F$ , for encarado como análogo da intensidade de corrente e a queda de pressão,  $\Delta P$ , como análogo da diferença de potencial, a fórmula de Poiseuille pode, por conseguinte, ser reescrita de forma análoga à Lei de Ohm:

<sup>9</sup> É usual referir-se a ordem da equação diferencial que está na base de um determinado fenómeno para tipificação do mesmo. Assim um problema de 1ª ordem é tal que a equação diferencial que o descreve é de 1ª ordem.

$$\Delta P = R_H \dot{V} \quad , \quad (2.138)$$

em que  $R_H$  representa a resistência hidrodinâmica dada por,

$$R_H = \frac{8\eta \ell}{\pi r^4} \quad . \quad (2.139)$$

A unidade de resistência hidrodinâmica no Sistema Internacional é o  $\text{Pa} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}$  (ou  $\text{Poiseuille} \cdot \text{m}^{-3}$ ) e no sistema c.g.s. é o  $\text{poise} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

Também de forma análoga à resistência eléctrica a resistência hidrodinâmica representa a oposição (a dificuldade) que um determinado tubo apresenta ao escoamento de um fluido de viscosidade  $\eta$ . Desta forma, a resistência varia proporcionalmente com o comprimento do tubo e inversamente com a quarta potência do raio. Também varia linearmente com a viscosidade do fluido do escoamento. A variação com o raio é de extrema importância uma vez que basta uma pequena alteração do mesmo para ter um grande impacto sobre o escoamento.

Exercício 2.15. Um tubo de diâmetro 2 cm e comprimento 20 cm, é percorrido por um fluido de viscosidade igual a 0,02 Poise. Determine a resistência hidrodinâmica.

---

Resolução:

A resistência hidrodinâmica é dada pela Eq. 2.139; substituindo valores:

$$R_H = \frac{8\eta \ell}{\pi r^4} \Rightarrow R_H = \frac{8 \times 0,02 \times 20}{\pi \times 1^4} = 1,018 \text{ poise cm}^{-3} \quad . \quad (2.140)$$


---

O conceito de resistência hidrodinâmica facilita a compreensão do que acontece em sistemas de tubos complexos, uma vez que se pode raciocinar em termos de associação de resistências. Distingue-se assim dois tipos fundamentais de associação de resistências: a associação de resistências em paralelo e em série.

Considera-se que dois ou mais tubos estão associados em paralelo quando a queda de pressão aos seus terminais é igual, ou, de forma equivalente, quando os seus terminais são comuns. Uma associação em série ocorre quando o caudal que percorre os tubos é o mesmo.

A vantagem de se considerar associações de resistências é que estas podem ser substituídas por apenas um tubo mantendo as características do escoamento (caudal e queda de pressão). Diz-se neste caso que a associação é substituída pela sua resistência equivalente.

A fórmula das resistências equivalentes é facilmente obtida tendo em conta a Eq. 2.138. Consideremos uma associação em paralelo (Fig. 2.17) de  $n$  tubos (resistências hidrodinâmicas).

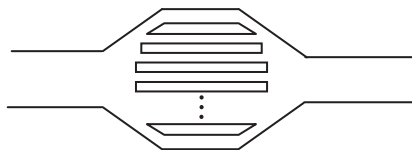


Fig. 2.17 – Associação de  $n$  tubos (resistências) em paralelo. Cada tubo apresenta uma resistência hidrodinâmica  $R_i$ .

O caudal,  $\dot{V}_i$ , que passa em cada tubo individual é

$$\dot{V}_i = \frac{\Delta P}{R_i}, \quad (2.141)$$

em que  $\Delta P$  é a queda de pressão aos extremos do tubo, sendo igual para todos os tubos. O caudal total,  $\dot{V}$ , que passa pelo sistema é igual à soma dos caudais individuais segundo a equação da continuidade. Assim:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dots + \dot{V}_n = \frac{\Delta P}{R_1} + \frac{\Delta P}{R_2} + \dots + \frac{\Delta P}{R_n}. \quad (2.142)$$

Se o sistema de tubos fosse substituído por apenas um que mantivesse o mesmo caudal e queda de pressão, a resistência,  $R_{\text{cq}}$ , teria de ser

$$R_{\text{cq}} = \frac{\Delta P}{\dot{V}}. \quad (2.143)$$

Rearranjando a Eq. 2.142 em função do caudal,  $F$ , e substituindo na Eq. 2.143 vem

$$\frac{\Delta P}{R_{\text{cq}}} = \frac{\Delta P}{R_1} + \frac{\Delta P}{R_2} + \dots + \frac{\Delta P}{R_n}. \quad (2.144)$$

De onde se retira imediatamente que a resistência equivalente,  $R_{\text{cq}}$ , de uma associação em paralelo é dada por:

$$\frac{1}{R_{\text{cq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (2.145)$$

Um raciocínio similar pode ser efectuado para o caso de haver uma associação de resistências em série.

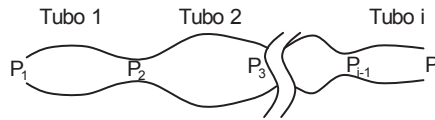


Fig. 2.18 – Associação de  $n$  tubos (resistências) em série. O caudal que passa em cada tubo individual é igual. As pressões aos extremos de cada tubo são representadas por  $P_i$ .

O caudal,  $\dot{V}$ , que passa pelos diversos tubos individuais é igual mas a queda de pressão é diferente de tubo para tubo sendo genericamente, para o tubo  $i$  dada por:

$$P_{i-1} - P_i = R_i \dot{V}. \quad (2.146)$$

Somando todas as quedas de pressão individuais obtemos a queda de pressão entre os extremos da associação,

$$(P_1 - P_2) + (P_2 - P_3) + \dots + (P_{i-1} - P_i) = P_1 - P_i. \quad (2.147)$$

Uma vez mais um tubo equivalente deverá ter uma resistência que tem de obedecer à Eq. 2.143. Fazendo as devidas alterações temos então:

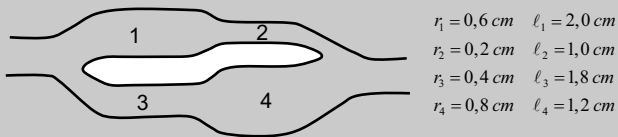
$$R_1 \dot{V} + R_2 \dot{V} + \dots + R_n \dot{V} = R_{\text{cq}} \dot{V}. \quad (2.148)$$

Finalmente, tem-se que a resistência equivalente de uma associação em série de resistências hidrodinâmicas é dada pela soma das resistências individuais:

$$R_{\text{cq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (2.149)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 416-421.

Exercício 2.16. Um fluido de viscosidade igual a  $\pi \times 10^{-2}$  poise escoo no sistema representado na figura. Determine o comprimento que um tubo de 1 cm de raio deverá ter para substituir o sistema em causa e manter o mesmo caudal e a mesma perda de pressão.



Resolução:

O que é pedido do exercício é o valor da resistência equivalente ao sistema e a partir desta determinar o comprimento de um tubo de secção conhecida. Como se pode observar a associação de resistências é complexa: o tubo 1 está em série com o tubo 2 e o tubo 3 está em série com o tubo 4; as séries descritas estão por sua vez em paralelo entre si. Esquemáticamente, temos:

$$R_{\text{cq}} = (R_1 \oplus R_2) // (R_3 \oplus R_4), \quad (2.150)$$

em que  $\oplus$  representa associação em série e  $//$  associação em paralelo.

Vamos então começar por determinar as associações em série. Assim:

$$(R_1 \oplus R_2) = \frac{8\eta \ell_1}{\pi r_1^4} + \frac{8\eta \ell_2}{\pi r_2^4} \quad \text{e} \quad (R_3 \oplus R_4) = \frac{8\eta \ell_3}{\pi r_3^4} + \frac{8\eta \ell_4}{\pi r_4^4}. \quad (2.151)$$

Substituindo valores,

$$(R_1 \oplus R_2) = \frac{8 \times \pi \times 10^{-2} \times 2}{\pi \times (0,6)^4} + \frac{8 \times \pi \times 10^{-2} \times 1}{\pi \times (0,2)^4} = 51,2 \text{ poise cm}^{-3}; \quad (2.152)$$

$$(R_3 \oplus R_4) = \frac{8 \times \pi \times 10^{-2} \times 1,8}{\pi \times (0,4)^4} + \frac{8 \times \pi \times 10^{-2} \times 1,2}{\pi \times (0,8)^4} = 5,9 \text{ poise cm}^{-3}. \quad (2.153)$$

A associação em paralelo é obtida pela Eq. 2.145 para o caso de duas resistências, logo

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{(R_1 \oplus R_2)} + \frac{1}{(R_3 \oplus R_4)} \Rightarrow \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{51,2} + \frac{1}{5,9}, \quad (2.154)$$

donde a resistência equivalente é

$$R_{\text{eq}} = 5,3 \text{ poise cm}^{-3}. \quad (2.155)$$

Para determinar o comprimento do tubo basta então substituir os valores na fórmula da resistência hidrodinâmica (Eq. 2.139),

$$R_{\text{eq}} = \frac{8\eta\ell}{\pi r^4} \Rightarrow 5,3 = \frac{8 \times \pi \times 10^{-2} \times \ell}{\pi \times 1^4} \Leftrightarrow \ell = 66,25 \text{ cm}. \quad (2.156)$$

Portanto o comprimento do tubo deve ser 66,25 cm.

---

#### 2.2.4.2. Regime turbulento e número de Reynolds

O número de Reynolds é um número indicador que indica a relação entre as forças inerciais e as viscosas num escoamento. A expressão que traduz o número de Reynolds,  $Re$ , é:

$$Re = \frac{\rho v \phi}{\eta}. \quad (2.157)$$

em que  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $v$  é a velocidade média do escoamento,  $\phi$  é o diâmetro do tubo e  $\eta$  a viscosidade do fluido.

Considera-se, no presente contexto, que quando o valor do número de Reynolds é superior a 2000 o regime é turbulento e caso contrário é laminar. No caso do número de Reynolds ser igual a 2000 diz-se que a situação é crítica significando que haverá uma alteração do regime do escoamento.



Exercício 2.17. Considere o escoamento de água ( $\eta = 0,01 \text{ poise}$ ) num tubo de diâmetro igual a 2 cm e comprimento 50 cm.

Determine:

- O caudal crítico;
- A queda de pressão quando o caudal é o da alínea anterior.

---

Resolução:

a) O caudal crítico refere-se à situação em que o número de Reynolds é igual a 2000, logo

$$\text{Re} = \frac{\rho v \phi}{\eta} \Rightarrow 2000 = \frac{1 \times v \times 2}{0,01}, \quad (2.158)$$

de onde se pode determinar a velocidade média do escoamento,

$$v = 10 \text{ cm s}^{-1}, \quad (2.159)$$

Finalmente o caudal crítico,  $\dot{V}_c$ , vem

$$\dot{V}_c = v \pi r^2 \Rightarrow \dot{V}_c = 10 \times \pi \times 1^2 = 10 \pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}. \quad (2.160)$$

b) A queda de pressão determina-se directamente por aplicação da fórmula de Poiseuille,

$$\Delta P_c = \frac{8 \eta \ell}{\pi r^4} \dot{V}_c \Rightarrow \Delta P_c = \frac{8 \times 0,01 \times 50}{\pi 1^4} \times 10 \pi = 40 \text{ dyn cm}^{-2}. \quad (2.161)$$

---

#### 2.2.4.3. Exercícios resolvidos

Exercício 2.18. Considere um tubo cilíndrico com 3,5 m de comprimento e raio interior 1,2 cm. Faz-se circular no tubo um

líquido de viscosidade  $3,5 \times 10^{-2}$  poise. Qual é o caudal de líquido quando a queda de pressão através do tubo é igual a  $5,3 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}$ ?

---

Resolução:

Dados do problema e conversão de unidades:

$$\ell = 3,5 \text{ m} = 350 \text{ cm}$$

$$r = 1,2 \text{ cm}$$

$$\eta = 3,5 \times 10^{-2} \text{ poise}$$

$$\Delta P = 5,3 \times 10^4 \text{ N m}^{-2} = 53 \times 10^4 \text{ dyn cm}^{-2}$$

Pela equação de Poiseuille temos:

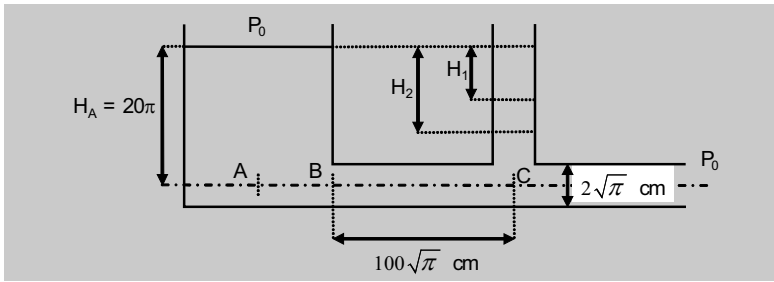
$$\dot{V} = \frac{\pi r^4}{8\eta \ell} \Delta P. \quad (2.162)$$

Pelo que basta substituir na equação para resolver o exercício,

$$\dot{V} = \frac{\pi \times 1,2^4}{8 \times 3,5 \times 10^{-2} \times 350} \times 53 \times 10^4 = 3,52 \times 10^4 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}. \quad (2.163)$$

---

Exercício 2.19. No sistema representado na figura circula um fluido líquido de massa específica  $1 \text{ g cm}^{-3}$  e viscosidade nula. Posteriormente faz-se circular um outro fluido líquido de massa específica  $1 \text{ g cm}^{-3}$  e viscosidade  $10^{-2}\pi$  poise. Sabendo que a velocidade média do fluido no ponto C é igual a  $4\sqrt{\pi} \text{ cm s}^{-1}$ , para os dois fluidos, determine a relação entre as alturas  $H_2$  e  $H_1$ , representadas na figura, relacionadas  $H_1$  com  $\eta = 0$  poise e  $H_2$  com  $\eta = 10^{-2}\pi$  poise. (Desprezar fenómenos de capilaridade).



Resolução:

Dados do problema e conversão de unidades

Situação I (fluido ideal)

$$\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\eta = 0$$

Situação II (fluido real)

$$\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\eta = 10^{-2} \pi \text{ poise}$$

Geral

$$v_c = 4\sqrt{\pi} \text{ cm s}^{-1}$$

$$H_A = 20\pi \text{ cm}$$

$$\ell_{BC} = 100\sqrt{\pi} \text{ cm}$$

$$\phi = 2\sqrt{\pi} \text{ cm} \Rightarrow r = \sqrt{\pi} \text{ cm}$$

Este problema apresenta duas situações distintas, em que o mesmo sistema é usado com dois fluidos de características diferentes. Por esta razão vamos tratar as duas situações de forma independente e, por fim, obter a relação pedida.

Situação I (fluido ideal)

Aplicando o teorema de Bernoulli entre os pontos B e C, tem-se:

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + P_B = \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g h_C + P_C. \quad (2.164)$$

Tendo em conta que os pontos B e C estão ao mesmo nível ( $h_B = h_C$ ) e resolvendo em ordem à pressão em C ( $P_C$ ), vem:

$$P_C = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_C^2) + P_B. \quad (2.165)$$

Aplicando novamente o teorema de Bernoulli entre os pontos A e B, temos:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + P_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + P_B. \quad (2.166)$$

O nível a que se encontra os pontos A e B é o mesmo ( $h_A = h_B$ ). Assumindo que as dimensões do recipiente são bastante grandes, pode considerar-se nula a velocidade no ponto A ( $v_A = 0$ ). Resolvendo esta equação em ordem à pressão no ponto B,  $P_B$ , obtemos a seguinte expressão:

$$P_B = P_A - \frac{1}{2}\rho v_B^2. \quad (2.167)$$

Por outro lado a pressão em A é dada por:

$$P_A = \rho g H_A + P_0. \quad (2.168)$$

Substituindo-se esta expressão na Eq. 2.167, fica-se com:

$$P_B = \rho g H_A + P_0 - \frac{1}{2}\rho v_B^2. \quad (2.169)$$

Podemos agora substituir na Eq. 2.165,

$$P_C = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_C^2) + \rho g H_A + P_0 - \frac{1}{2}\rho v_B^2 = P_0 + \rho g H_A - \frac{1}{2}\rho v_C^2. \quad (2.170)$$

Mas a pressão em C também é dada pela expressão:

$$P_C = \rho g(H_A - H_1) + P_0. \quad (2.171)$$

Pelo que igualando as Eqs. 2.170 e 2.171, e resolvendo em ordem a  $H_1$  se obtém:

$$P_0 + \rho g H_A - \frac{1}{2} \rho v_C^2 = \rho g (H_A - H_1) + P_0 \Leftrightarrow H_1 = \frac{v_C^2}{2g}. \quad (2.172)$$

Situação II (fluido real)

Nesta situação podemos começar por aplicar a equação de Poiseuille entre os pontos B e C. Assim:

$$P_B - P_C = \frac{8\eta \ell}{\pi r^4} \dot{V}. \quad (2.173)$$

Recordando que o caudal,  $\dot{V}$ , é dado por:

$$\dot{V} = \pi r^2 v. \quad (2.174)$$

A Eq. 2.173 pode ser reescrita em função da velocidade e resolvida em ordem à pressão,  $P_C$ , em C:

$$P_B - P_C = \frac{8\eta \ell}{r^2} v \Leftrightarrow P_C = P_B - \frac{8\eta \ell}{r^2} v. \quad (2.175)$$

Entre os pontos A e B pode ser aplicado o teorema de Bernoulli. Este raciocínio já foi feito anteriormente pelo que podemos usar o mesmo resultado expresso na Eq. 2.169,

$$P_B = \rho g H_A + P_0 - \frac{1}{2} \rho v_B^2. \quad (2.176)$$

Substituindo este resultado na Eq. 2.175, fica-se com:

$$P_C = \rho g H_A + P_0 - \frac{1}{2} \rho v_B^2 - \frac{8\eta \ell}{r^2} v. \quad (2.177)$$

Por outro lado a pressão em C, pode ser expressa, por:

$$P_C = \rho g (H_A - H_2) + P_0. \quad (2.178)$$

Igualando agora as Eqs. 2.177 e 2.178, e resolvendo em ordem a  $H_2$ , vem:

$$\rho g H_A + P_0 - \frac{1}{2} \rho v_B^2 - \frac{8\eta \ell}{r^2} v = \rho g (H_A - H_2) + P_0, \quad (2.179)$$

e

$$H_2 = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{8\eta\ell}{\rho g r^2} v. \quad (2.180)$$

Finalmente, podemos obter a relação entre as alturas  $H_2$  e  $H_1$ , usando as expressões 2.180 e 2.172 obtidas anteriormente. Assim, notando que  $v = v_B = v_C$ :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\frac{v_B^2}{2g} + \frac{8\eta\ell}{\rho g r^2} v}{\frac{v_C^2}{2g}} \Leftrightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{\rho r^2 v + 16\eta\ell}{\rho r^2 v}. \quad (2.181)$$

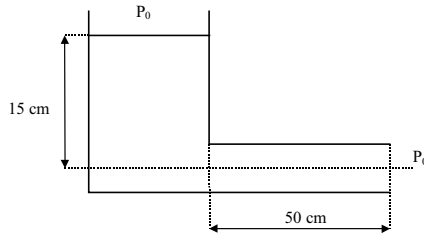
Substituindo os valores, vem:

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{1 \times (\sqrt{\pi})^2 \times 4\sqrt{\pi} + 16 \times 10^{-2} \pi \times 100\sqrt{\pi}}{1 \times (\sqrt{\pi})^2 \times 4\sqrt{\pi}} = \frac{20\pi\sqrt{\pi}}{4\pi\sqrt{\pi}} = 5. \quad (2.182)$$

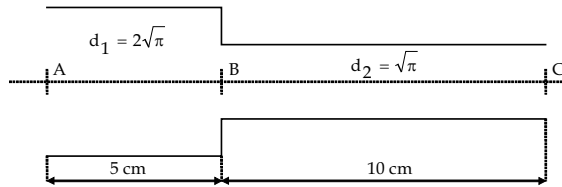
---

#### 2.2.4.4. Exercícios propostos

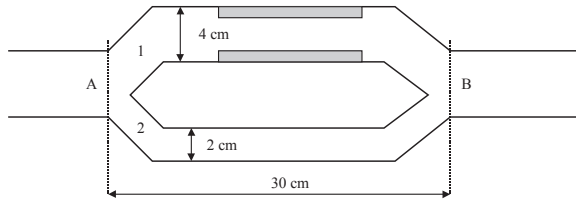
1. Qual é diferença de pressão entre dois pontos distanciados de 10 m, num tubo cilíndrico de raio 4 cm, percorrido por um caudal de 6 L min<sup>-1</sup>? A viscosidade do líquido é igual a 0,02 poise.
2. Considere o sistema representado na figura, no qual circula um fluido de massa específica 0,9 g cm<sup>-3</sup> e viscosidade 1,5 poise. Sabendo que o reservatório é de grandes dimensões e que o diâmetro do tubo é igual a 1 cm, determine a velocidade máxima do líquido no tubo.



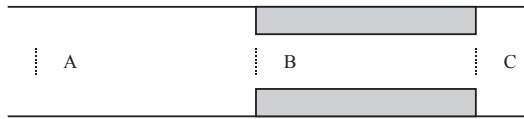
3. Considere o sistema representado na figura, no qual circula um fluido real em regime laminar, com caudal igual a  $20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  de um fluido real com viscosidade  $10^{-2} \pi$  poise. Sabendo que a pressão em  $A$  é igual a  $300 \text{ dyn cm}^{-2}$  e que a queda de pressão no estrangulamento  $B$  é de  $6 \text{ dyn cm}^{-2}$ , represente graficamente a variação da pressão em função da distância percorrida pelo fluido no interior do sistema.



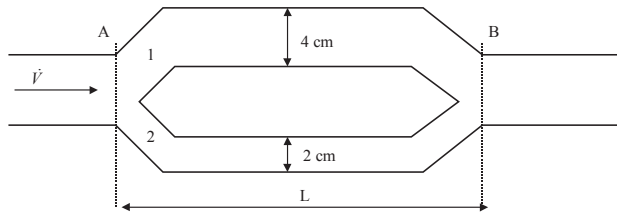
4. Determine a resistência hidrodinâmica de dois capilares associados em paralelo com comprimentos de  $3\pi \text{ cm}$  e  $20\pi \text{ mm}$  e cujos raios são  $30 \mu\text{m}$  e  $10 \mu\text{m}$ , respectivamente, quando atravessados por um líquido de viscosidade 2 poise.
5. Considere o sistema representado na figura no qual circula um fluido líquido de viscosidade 0,04 poise e massa específica  $0,9 \text{ g cm}^{-3}$ . Admitindo que na parede do ramo 1 e numa extensão de 10 cm se depositou uma placa de certa substância com 1 cm de espessura, determine a relação que deve existir entre as variações de pressão de  $A$  e  $B$ , para que o sistema seja percorrido pelo mesmo caudal, com e sem placa.



6. No sistema representado na figura circula um fluido com caudal constante, massa específica igual a  $1 \text{ g cm}^{-3}$  e viscosidade  $0,01 \text{ poise}$ . Determine a perda de carga linear ao longo do estreitamento  $\overline{BC}$ , sabendo que o número de Reynolds em  $\overline{AB}$  é igual a 400, que os comprimentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  são iguais e que os raios das referidas secções são 2 cm e 1 cm, respectivamente.



7. Considere o sistema representado na figura, no qual circula um fluido líquido de viscosidade diferente de zero, caudal de entrada constante e igual a  $170\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  e determine as velocidades médias do fluido nos ramos 1 e 2.





### 2.3. Tensão superficial

A tensão superficial é uma propriedade da superfície de um líquido que podemos constatar no dia-a-dia numa grande variedade de fenómenos. Por exemplo, num dia de chuva, podemos observá-la na forma e dimensão das gotas, no modo como elas aderem às diferentes superfícies, na forma como se juntam formando gotas maiores, num filme de óleo numa poça, que pode conter também bolhas de ar ou de sabão, na forma dos meniscos, no modo como a água se infiltra no terreno ou sobe numa planta, etc. Diversos comportamentos de um líquido e das suas interfaces com outros meios (líquidos, sólidos ou gasosos) dependem directamente do fenómeno da tensão superficial, que está por isso na base de diversos fenómenos e técnicas de interesse em biomedicina.

A tensão superficial resulta do facto das interacções entre as moléculas constituintes do líquido serem diferentes consoante estas se situem à superfície ou no interior. Num líquido puro em repouso, as moléculas estão em permanente agitação devido à temperatura a que o líquido se encontra, interagindo entre elas constantemente. As que estão no interior do líquido têm interacções com as suas vizinhas que tendem a cancelar-se em termos médios, ou seja, a resultante dessas interacções é nula ao longo de um intervalo de tempo suficientemente grande quando comparado com a duração das interacções – por exemplo, uma pequena fracção de um segundo (Fig. 2.19a). Por outro lado, as moléculas à superfície têm interacções de tipo diferente, consoante estas ocorram com as moléculas de líquido ou com as moléculas do meio com o qual estão em contacto, pelo que sofrem a acção de uma força resultante não nula. Se o líquido estiver em contacto com um gás, as interacções líquido-gás são tipicamente muito mais fracas do que as interacções líquido-líquido. Por simetria conclui-se que a resultante dessas interacções é perpendicular à superfície do líquido, orientando-se para o seu interior (Fig. 2.19b), levando a que as moléculas da superfície tendam a fugir para o interior e que seja necessário realizar um trabalho,  $W$ , (ou seja, fornecer

energia) para que moléculas no interior se desloquem para a superfície do líquido, fazendo aumentar a sua área de  $\Delta S$ .

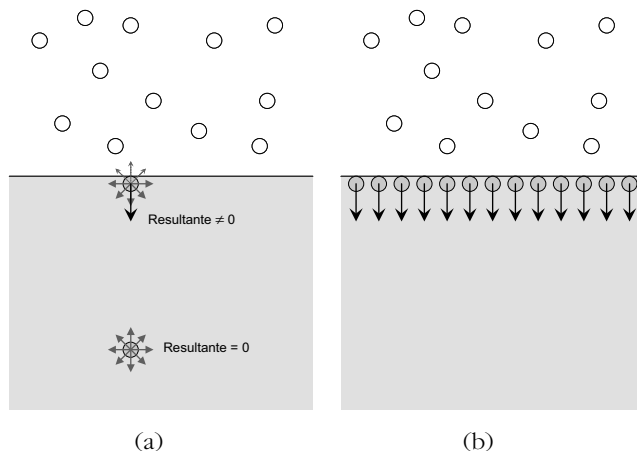


Fig. 2.19 – A tensão superficial resulta do facto das moléculas à superfície de um líquido em repouso não estarem nas mesmas condições que as restantes moléculas do líquido: a) a resultante das interações não é nula para as moléculas à superfície devido a estarem em contacto com moléculas de um meio diferente. b) o mesmo acontece para as restantes moléculas à superfície, levando a que esta se comporte como uma película tensa que comprime o líquido.

A tensão superficial  $\sigma$  pode então ser definida pela relação:

$$W = \sigma \Delta S, \quad (2.183)$$

podendo-se exprimir em  $\text{J/m}^2$  no S.I. ou em  $\text{erg/cm}^2$  no sistema c.g.s., embora seja frequente também a utilização das unidades  $\text{N/m}$  (S.I) ou  $\text{dyn/cm}$  (c.g.s.), que são equivalentes e que se obtêm directamente a partir de uma outra definição da tensão superficial. Em geral a tensão superficial diminui com o aumento de temperatura. O seu valor depende da intensidade não só das forças de coesão entre as moléculas do líquido, mas também das que existem entre as moléculas de líquido e as do meio com o qual está em contacto. A energia associada à criação de uma superfície de líquido de área  $S$  designa-se por energia de superfície  $E_s$  e é dada por:

$$E_s = \sigma S . \quad (2.184)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 372-376.

Exercício 2.20. Determine a energia de superfície de uma gota de água com raio igual a 2 cm ( $\sigma_{H_2O(25^\circ C)} = 72 \text{ dyn cm}^{-1}$ ).

---

Resolução:

A energia de superfície para uma esfera é dada por

$$E_s = \sigma S_{\text{esfera}} \Leftrightarrow E_s = \sigma 4\pi r^2 \quad (2.185)$$

Substituindo valores,

$$E_s = 72 \times 4 \times \pi \times 2^2 = 1152\pi \text{ erg} . \quad (2.186)$$


---

### 2.3.1. Fórmula de Laplace

O líquido tende espontaneamente a minimizar esta energia de superfície, pelo que tem tendência a reduzir a superfície de líquido ao mínimo. Por esta razão uma gota de líquido em condições de imponderabilidade (ausência de peso) adquire a forma esférica, que minimiza a superfície para um dado volume de líquido.

Quando a superfície líquida está sujeita a forças externas, as quais podem ser representadas como uma diferença de pressão  $P_1 - P_2$  entre os dois lados da superfície, a superfície de líquido curvar-se-á, variando a sua área, de acordo com a fórmula de Laplace:

$$P_1 - P_2 = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) . \quad (2.187)$$

Nesta expressão,  $P_1$  é a pressão no lado côncavo da superfície e é maior do que  $P_2$ . As variáveis  $r_1$  e  $r_2$  caracterizam a curvatura da superfície e designam-se por raios principais de curvatura. Eles correspondem ao máximo e ao mínimo dos valores de raio de curvatura que se obtêm a partir de todas as linhas que passam por um ponto P de uma superfície curva, segundo qualquer direção.

No caso de uma esfera, que tem um raio de curvatura constante em qualquer ponto e segundo qualquer direção,  $r_1 = r_2 = R$ , onde R é o raio da esfera. Deste modo, no caso de uma gota de líquido esférica (Fig. 2.20a), a fórmula de Laplace permite determinar a diferença de pressão  $\Delta P$  entre o interior e o exterior da gota:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{2\sigma}{R}. \quad (2.188)$$

Exercício 2.21. Uma gota esférica de mercúrio ( $\sigma_{Hg} = 480 \text{ dyn cm}^{-1}$ ) de raio 5 cm encontra-se numa atmosfera cuja pressão é 700 mmHg. Determine a pressão no interior da esfera apresentando o resultado no S.I.

---

Resolução:

Comecemos por reduzir as unidades ao S.I.,

$$\sigma_{Hg} = \frac{480 \text{ dyn}}{1 \text{ cm}} = \frac{480 \times 10^{-5} \text{ N}}{1 \times 10^{-2} \text{ m}} = 0,480 \text{ N m}^{-1}; \quad (2.189)$$

$$P_0 = \rho_{Hg} g h \Rightarrow P_0 = 13,6 \times 10^3 \times 9,8 \times 0,7 = 93296 \text{ N m}^{-2}; \quad (2.190)$$

$$r = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}. \quad (2.191)$$

A pressão solicitada obtém-se aplicando a fórmula de Laplace para superfícies esféricas:

$$P_{\text{interior}} - P_0 = \frac{2\sigma_{Hg}}{r} \Rightarrow P_{\text{interior}} - 93296 = \frac{2 \times 0,480}{0,05}, \quad (2.192)$$

e a pressão interior vem,

$$P_{\text{interior}} = 93315,2 \text{ N m}^{-2} . \quad (2.193)$$

No caso de uma bola de sabão esférica acontece o mesmo, com a diferença de que há duas superfícies esféricas de separação líquido/ar em vez de uma só: uma interna e outra externa (Fig. 2.20b). Fazendo a aproximação de que o raio interno da bola é igual ao raio externo (i.e., a espessura é desprezável), temos que a diferença de pressão para a superfície de líquido interna é  $\Delta P_{\text{sup.int}} = P_1 - P' = 2\sigma/R$ , o mesmo se passando para a superfície externa,  $\Delta P_{\text{sup.ext}} = P' - P_2 = 2\sigma/R$ . A diferença de pressão entre o interior e o exterior da bola de sabão é assim igual a  $\Delta P = \Delta P_{\text{sup.int}} + \Delta P_{\text{sup.ext}} = 4\sigma/R$ , ou seja, o dobro da que existe para uma gota esférica com o mesmo raio.

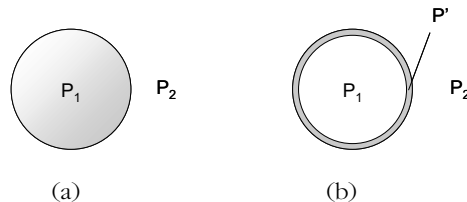


Fig. 2.20 – Fórmula de Laplace aplicada a superfícies esféricas. a) A diferença de pressão entre o interior e o exterior de uma gota de líquido esférica de raio  $R$  é dada por:  $\Delta P = 2\sigma/R$ . b) Numa bola de sabão, a diferença de pressão entre o interior e o exterior é o dobro,  $\Delta P = 4\sigma/R$ . Em ambos os casos a maior pressão é a do lado da concavidade, ou seja, a pressão interna.

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 377-383.

Exercício 2.22. Um alvéolo com uma estrutura semelhante a uma bola de sabão apresenta  $\sigma = 50 \text{ dyn cm}^{-1}$ . Determine a variação da diferença de pressão (em mmHg) entre o interior e o exterior,

durante a insuflação, quando o raio alveolar aumenta de 0,05 mm para 0,1 mm.

---

Resolução:

Uma vez que se considera uma estrutura semelhante a uma bola de sabão a diferença de pressão é determinada pela expressão,

$$\Delta P = \frac{4\sigma}{r}. \quad (2.194)$$

Então, para os dois raios temos

$$\Delta P|_{r_1} = \frac{4 \times 50}{0,005} = 40000 \text{ dyn cm}^{-2}; \quad (2.195)$$

$$\Delta P|_{r_2} = \frac{4 \times 50}{0,01} = 20000 \text{ dyn cm}^{-2}. \quad (2.196)$$

A variação é, então

$$\left| \Delta P|_{r_2} - \Delta P|_{r_1} \right| = 20000 \text{ dyn cm}^{-2} = 15 \text{ mmHg}. \quad (2.197)$$

Notável é que a variação típica de pressão na respiração é de apenas 1 mmHg. É a existência de uma substância que envolve os alvéolos e diminui a sua tensão superficial de um factor de cerca de 15 que possibilita que a variação de pressão seja menor. Essa substância designa-se por surfactante.

---

### 2.3.1.1. Embolias capilares

O mecanismo das embolias (aparecimento de um obstrução num vaso sanguíneo devido à presença de bolhas gasosas ou de tecido adiposo) pode ser melhor compreendido recorrendo à noção de tensão superficial. Por exemplo, se um mergulhador de profundidade ascender demasiado depressa à superfície, o ar dissolvido no sangue expande-se devido à súbita diminuição de

pressão (devido à menor profundidade), formando bolhas que podem bloquear o vaso. Tal situação é muito perigosa podendo mesmo provocar a morte do mergulhador se este não for levado rapidamente para uma câmara hiperbárica. Nesta câmara restabelece-se a pressão elevada que existia a grande profundidade, provocando de novo a dissolução do gás no sangue. Diminui-se depois a pressão lentamente até se chegar à pressão atmosférica, simulando uma subida lenta até à superfície. O processo é análogo à abertura de uma garrafa de espumante: quando a rolha salta bruscamente da garrafa, formam-se bolhas devido à rápida diminuição da pressão do líquido e do gás nele dissolvido. Essas bolhas não se formam quando se abre cuidadosamente a garrafa não deixando saltar a rolha, permitindo que o gás se escape lentamente até que a pressão no interior da garrafa iguale a atmosférica.

Consideremos então um vaso sanguíneo de raio  $R$  onde se formou uma bolha de gás que impede a passagem do sangue (Fig. 2.21).

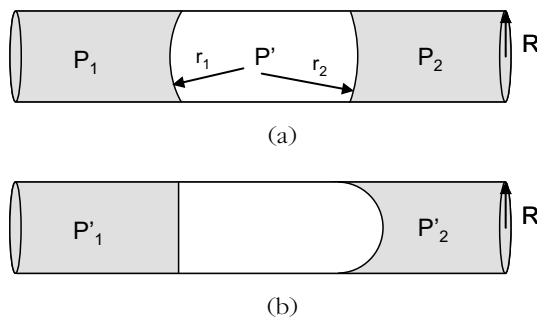


Fig. 2.21 – a) Um êmbolo gasoso (zona a branco) bloqueando um vaso sanguíneo de raio  $R$ . O êmbolo tem duas superfícies esféricas de raios  $r_1$  e  $r_2$ . b) Uma pressão igual a  $\Delta P_{\max} = P'_1 - P'_2 = 2\sigma/R$ , dependente apenas do raio do tubo e da tensão superficial do líquido, é a máxima que o êmbolo suporta, sendo portanto igual à pressão mínima que é necessário exercer para desbloquear o vaso.

A diferença de pressão  $\Delta P = P_1 - P_2$  existente nos extremos do êmbolo pode ser escrita recorrendo à fórmula de Laplace:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = -(P' - P_1) + (P' - P_2) = 2\sigma \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (2.198)$$

Se aumentarmos gradualmente a diferença de pressão  $\Delta P$  nos extremos do êmbolo, podemos ver que a expressão acima atinge um valor máximo quando  $r_1$  aumenta até ao valor máximo (infinito) e  $r_2$  diminui até ao valor mínimo (igual a  $R$ , o raio do tubo), correspondendo à Fig. 2.21b e à seguinte expressão:

$$\Delta P_{\max} = 2\sigma \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{2\sigma}{R} \quad (2.199)$$

Tal situação corresponde efectivamente à diferença de pressão máxima que o êmbolo consegue suportar sem se destruir (na prática a “destruição” do êmbolo pode corresponder à divisão deste em pequenas gotas ou ao deslocamento deste até uma zona mais larga do vaso, em ambos os casos permitindo a passagem do líquido).

É fácil concluir que no caso de existirem  $N$  êmbolos em série (seguidos) no tubo, a diferença de pressão máxima que o conjunto suporta é:

$$\Delta P_{\max} = \frac{2N\sigma}{R} \quad (2.200)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 437-439.

### 2.3.1.2. Capilaridade em tubos e lei de Jurin

Se mergulharmos um tubo fino num líquido, observamos que o líquido dentro do tubo estabiliza a sua altura a uma altura diferente do líquido fora do tubo, como mostra a Fig. 2.22. Se o líquido molha o tubo, como é o caso da água em contacto com um tubo de vidro ou de plástico, o líquido sobe espontaneamente até uma altura  $h$ . Se o líquido não molha o tubo, como é o caso do mercúrio, acontece o contrário: o nível dentro do tubo diminui.

Fenómenos de capilaridade como este determinam por exemplo a subida de água e nutrientes nas plantas, estando intimamente relacionados com a aderência e coesão do líquido, dependendo da tensão superficial. Num líquido



que molha o tubo, o líquido liga-se preferencialmente ao vidro, porque as forças de ligação líquido-sólido são mais fortes do que as líquido-líquido. A ligação de algumas destas moléculas ao vidro provoca uma ligeira subida que facilita a subida e ligação às paredes de outras moléculas e assim sucessivamente, num processo que vai sendo contrariado pela força de gravidade até se atingir um equilíbrio. No caso do mercúrio, as forças de ligação líquido-líquido são mais fortes do que as forças líquido-sólido, conduzindo à redução espontânea da superfície de contacto entre o tubo e o líquido e conseqüentemente a uma descida do líquido.

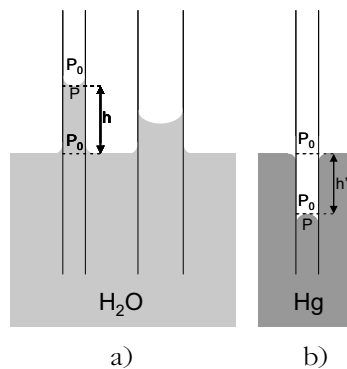


Fig. 2.22 – Fenómeno de capilaridade em tubos finos: a) líquido que molha o tubo; b) líquido que não molha o tubo.

Observa-se também que quanto mais fino é o tubo, maior é o desnível entre as superfícies de líquido dentro e fora do capilar. Supondo a pressão do ar igual a  $P_0$ , observamos que no caso da água (Fig. 2.22a), a pressão dentro do tubo é igual a  $P_0$  ao nível da superfície do líquido fora do tubo, diminuindo gradualmente à medida que a altura aumenta até o valor mínimo de pressão,  $P$ , à altura  $h$ . Verifica-se a equação fundamental da hidrostática e a equação de Laplace:

$$P_0 = P + \rho gh \quad \text{e} \quad P_0 = P + \frac{2\sigma}{R}, \quad (2.201)$$

onde  $\sigma$  é a tensão superficial do líquido e  $R$  é o raio da superfície do menisco, que se supõe esférica (aproximação aceitável para tubos muito finos, de raio inferior ao milímetro). O raio  $R$  relaciona-se por sua vez com o raio do tubo,  $r$ , e com o ângulo de contacto (Fig. 2.23) através da relação:  $r = R \cos \alpha$ . Igualando as equações, obtém-se a lei de Jurin, que dá a altura a que sobe o líquido no capilar em função das características do tubo (raio interno  $r$ ) e do líquido (massa específica  $\rho$  e tensão superficial  $\sigma$ ):

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r \rho g} \quad (2.202)$$

Chega-se à mesma expressão para o caso do mercúrio. Nesse caso a equação fundamental da hidrostática e a equação de Laplace relacionam as pressões da seguinte forma:

$$P = P_0 + \rho g h \quad \text{e} \quad P = P_0 + \frac{2\sigma}{R}, \quad (2.203)$$

obtendo-se de novo a Eq. 2.202 que traduz a lei de Jurin. Nesse caso a altura tem um valor negativo, uma vez que o ângulo de corte é maior do que  $\pi/2$  (é menor do que  $\pi/2$  no caso da água).

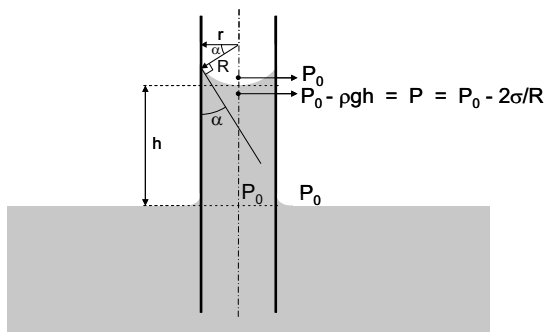


Fig. 2.23 – Pressões no capilar e grandezas relacionadas pela lei de Jurin.

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo IV, pp. 383-388.

Exercício 2.23. Numa experiência pretende-se medir a tensão superficial de um líquido de massa específica  $1,1 \text{ g/cm}^3$ , mergulhando um tubo capilar cilíndrico com raio interno de  $0,2 \text{ mm}$  e raio externo de  $0,4 \text{ mm}$ . Observa-se que o líquido, que molha perfeitamente o sólido, sobe a uma altura de  $3 \text{ cm}$ . Qual é a tensão superficial do líquido?

---

Resolução:

Se o líquido molha perfeitamente o sólido, então o menisco tem a forma de uma semi-esfera perfeita e  $\cos \alpha = 1$ , correspondendo a  $R = r$ . Pela fórmula de Jurin, tira-se que

$$\sigma = \frac{\rho g h r}{2 \cos \alpha} = \frac{1,1 \times 980 \times 3 \times 0,02}{2} = 32,3 \text{ dyn/cm} \quad (2.204)$$

### 2.3.2. Exercícios resolvidos

Exercício 2.24. Sabendo que a tensão superficial de uma solução de sabão é igual a  $25 \text{ dyn cm}^{-1}$ , calcule o trabalho necessário para aumentar o diâmetro de uma bola de sabão de  $2 \text{ cm}$  para  $4 \text{ cm}$ .

---

Resolução:

Dados do problema e conversão de unidades

$$\sigma = 25 \text{ dyn cm}^{-1}$$

$$\phi_1 = 2 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = 1 \text{ cm}$$

$$\phi_2 = 4 \text{ cm} \Rightarrow r_2 = 2 \text{ cm}$$

O trabalho realizado por forças de pressão quando há uma variação ( $\Delta S$ ) da superfície de uma esfera de fluido é dado por:

$$W = \sigma \Delta S . \quad (2.205)$$

No presente caso estamos perante uma bola de sabão a qual apresenta uma superfície externa e uma superfície interna pelo que quando o diâmetro da bola de sabão aumenta estas duas superfícies aumentam também. Assim, o trabalho realizado é dado para este caso por:

$$W = \sigma (\Delta S_{\text{int}} + \Delta S_{\text{ext}}) = 2 \sigma \Delta S . \quad (2.206)$$

Notar que se despreza a espessura da bola de sabão, pelo que o raio interno da bola de sabão é igual ao raio externo e a variação da superfície interna  $\Delta S_{\text{int}}$  é igual à variação da superfície externa,  $\Delta S_{\text{ext}}$ .

A variação de superfície pode ser determinada da seguinte forma:

$$\Delta S = 4 \pi r_2^2 - 4 \pi r_1^2 \Rightarrow \Delta S = 4 \pi (2^2 - 1^2) = 12 \pi . \quad (2.207)$$

Substituindo os valores na Eq. 2.206, vem:

$$W = 2 \times 25 \times 12 \pi = 1885 \text{ erg} . \quad (2.208)$$

---

Exercício 2.25. Calcule a pressão no interior de uma bola de sabão de raio exterior  $R$ , sendo  $\sigma$  a tensão superficial da solução de sabão e  $P_0$  a pressão no exterior.

---

Resolução:

Dados do problema e conversão de unidades

$$r_{\text{ext}} = R$$

$$P_0 = P_0$$

$$\sigma = \sigma$$

A diferença de pressão entre o interior e o exterior numa bola de sabão é dada por:

$$\Delta P = \frac{4\sigma}{r}. \quad (2.209)$$

A diferença de pressão é, por outro lado, dada por:

$$\Delta P = P_{\text{int}} - P_0. \quad (2.210)$$

Vem então,

$$P_{\text{int}} - P_0 = \frac{4\sigma}{r} \Leftrightarrow P_{\text{int}} = P_0 + \frac{4\sigma}{r}. \quad (2.211)$$

---

Exercício 2.26. Considere um vaso sanguíneo onde se formaram 3 êmbolos gasosos. A tensão superficial do sangue é de  $47 \text{ dyn cm}^{-1}$ . Suponha ainda as seguintes constantes:

$$\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g cm}^{-3} \quad g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

- Se a pressão do lado venoso for de 15 mmHg e se o vaso tiver um diâmetro de 1 mm, calcule a pressão do lado arterial que coloca os êmbolos na iminência de se desfazerem.
- Se a pressão do lado arterial for de 40 mmHg, qual o raio do vaso sanguíneo abaixo do qual os êmbolos já não se desfazem?

---

Resolução:

Dados do problema e conversão de unidades

$$\sigma = 47 \text{ dyn cm}^{-1}$$

$$\rho = 13,6 \text{ g cm}^{-3}$$

$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

No presente caso, havendo três êmbolos, a diferença de pressão entre o lado arterial e o lado venoso é dada por:

$$P_{\text{art}} - P_{\text{ven}} = 3 \times \frac{2\sigma}{r}. \quad (2.212)$$

A pressão do lado venoso é conhecida. Podemos converter para unidades do sistema c.g.s.:

$$P_{\text{ven}} = 15 \text{ mmHg} = 1,5 \text{ cmHg} \Rightarrow P_{\text{ven}} = \rho g h \quad (2.213)$$

$$P_{\text{ven}} = 13,6 \times 980 \times 1,5 = 19992 \text{ dyn cm}^{-2}$$

O diâmetro do vaso também é dado, e é igual a 1 mm, pelo que o raio é igual a 0,05 cm.

Substituindo os valores na Eq. 2.212, vem:

$$P_{\text{art}} - 19992 = 3 \times \frac{2 \times 47}{0,05} \Leftrightarrow P_{\text{art}} = 25632 \text{ dyn cm}^{-2} \quad (2.214)$$

b) A pressão do lado arterial é agora igual a 40 mmHg. Convertendo para o sistema c.g.s., temos:

$$P_{\text{art}} = 40 \text{ mmHg} = 4 \text{ cmHg} \Rightarrow P_{\text{art}} = \rho g h \quad (2.215)$$

$$P_{\text{art}} = 13,6 \times 980 \times 4 = 53312 \text{ dyn cm}^{-2}$$

Substituindo os valores das pressões na Eq. 2.212 e resolvendo em ordem ao raio, vem:

$$53312 - 19992 = 3 \times \frac{2 \times 47}{r} \Leftrightarrow r = 8,46 \times 10^{-3} \text{ cm} \quad (2.216)$$

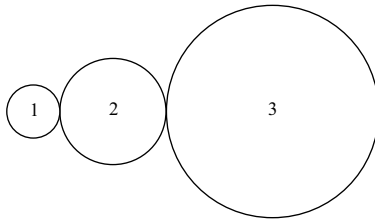

---

### 2.3.3. Exercícios propostos

1. Num capilar com 5  $\mu\text{m}$  de raio as pressões médias do lado arterial e do lado venoso são de 40 mmHg e 15 mmHg, respectivamente. Sabendo que a

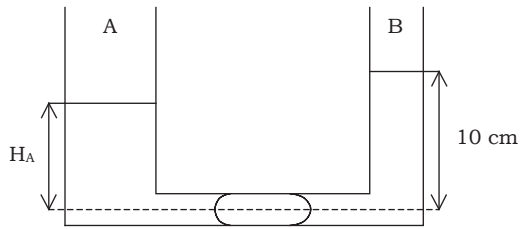
- tensão superficial do sangue é de  $60 \text{ dyn cm}^{-1}$ , calcular a razão entre a pressão necessária para vencer uma série de cinco êmbolos gasosos e a diferença de pressão média no capilar.
2. Sabendo que a tensão superficial de uma solução de sabão é igual a  $25 \text{ dyn cm}^{-1}$ , calcule o trabalho necessário para aumentar o diâmetro de uma bola de sabão de 2 cm para 4 cm.
  3. Sabendo que a tensão superficial do mercúrio é de  $470 \text{ dyn cm}^{-1}$ , calcule a diferença existente entre a energia de superfície de duas esferas de mercúrio de raios  $\sqrt[3]{2}$  e  $\sqrt[3]{6}$  cm, e a energia de superfície de uma esfera de mercúrio com volume igual à soma dos volumes das duas gotas separadas.
  4. Considere um cilindro de película de sabão obtido com o auxílio de dois anéis de fio de cobre fino que se mergulharam numa solução de sabão. Sabendo que a tensão superficial da solução de sabão é igual a  $25 \text{ dyn cm}^{-1}$ , determine:
    - a) A diferença de pressão entre o interior e o exterior do sistema, sabendo que o raio do cilindro é igual a 0,5 cm.
    - b) Os raios das superfícies esféricas nas bases do cilindro.
  5. Um mergulhador de profundidade ascendeu demasiado depressa à superfície e, devido à passagem repentina do azoto dissolvido no sangue ao estado gasoso, formaram-se bolhas gasosas nos capilares. Sabendo que a tensão superficial do sangue é igual a  $60 \text{ dyn cm}^{-1}$ , qual o valor limite, em atmosferas, da pressão que uma bolha gasosa pode suportar, em capilares com um raio interno de  $15 \mu\text{m}$ ?
  6. Um líquido de densidade 0,8, eleva-se de 50 cm num tubo capilar com 0,04 mm de diâmetro interior. Sabendo que o diâmetro do menisco é igual ao diâmetro do tubo, calcule a tensão superficial do líquido.

7. Um tubo capilar com diâmetro interior de 0,25 mm está mergulhado em água, cuja tensão superficial é igual a  $0,0727 \text{ N m}^{-1}$ . Se o ângulo de contacto do líquido como tubo for de  $0^\circ$ , a que altura se eleva a água dentro do tubo? Diga o que se observa se o tubo capilar continuar a ser mergulhado gradualmente na água.
8. Considere a figura abaixo representada. Sabendo que os raios de curvatura das três bolas de sabão são iguais a 1 cm, 3 cm e 6 cm, calcule os raios de curvatura das superfícies de junção entre as várias bolas, indicando para que lado ficam voltadas as concavidades. A tensão superficial da solução de sabão é de  $25 \text{ dyn cm}^{-1}$ .

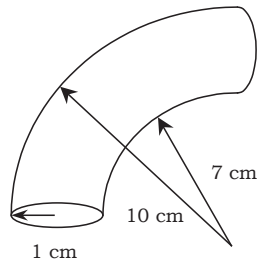


9. Calcular a pressão no interior de um gota líquida esférica com 2 mm de raio, sendo a pressão atmosférica igual a 760 mmHg. Considerar que a tensão superficial do líquido em questão é igual a  $72,8 \text{ dyn cm}^{-1}$ .
10. Calcule a pressão no interior de uma bola de sabão de raio exterior  $R$ , sendo  $\sigma$  a tensão superficial da solução de sabão e  $P_0$  a pressão no exterior.
11. As densidades dos líquidos  $A$  e  $B$  no sistema da figura são 13,6 e 1, respectivamente, e as tensões superficiais são  $0,09 \text{ dyn cm}^{-1}$  para o líquido  $A$  e  $0,01 \text{ dyn cm}^{-1}$  para o líquido  $B$ . Sabendo que o raio do tubo horizontal é igual a 0,01 mm, calcule entre que valores deve estar compreendido  $H_A$  por forma a que o êmbolo não se desfaça.

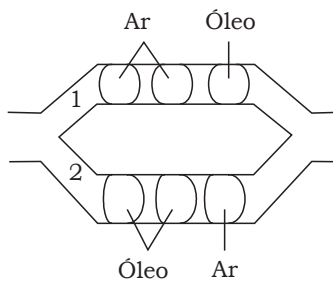




12. Calcular os valores da tensão a que ficam sujeitas as paredes superior e inferior da crossa da aorta, representada na figura, sabendo que a pressão transmural é de 150 mmHg.



13. Considere o sistema representado na figura, e determine a diferença de pressão mínima necessária para deslocar simultaneamente os êmbolos nos dois ramos do sistema.



Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados:

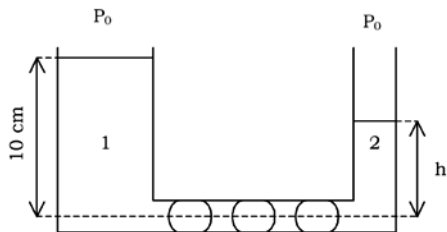
$$R_1 = 0,2 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\text{ar}/\text{água}} = 70 \text{ dyn cm}^{-1}$$

$$R_2 = 0,3 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\text{óleo}/\text{água}} = 60 \text{ dyn cm}^{-1}$$

14. O sistema da figura contém um líquido de massa específica  $1 \text{ g cm}^{-3}$ . Existem 3 êmbolos gasosos no tubo horizontal que tem um diâmetro igual a  $2 \text{ mm}$ . Sabendo que a tensão superficial do líquido no sistema é igual a  $72 \text{ dyn cm}^{-1}$ , calcule a altura que o líquido atinge no ramo 2 do sistema, imediatamente antes dos êmbolos serem desfeitos.



# D E C A I M E N T O R A D I O A C T I V O

## 3. Introdução

A radioactividade foi descoberta em 1886 por Antoine Henri Becquerel, que reparou que uma película fotográfica enegrecia quando eram colocados sobre ela sais de urânio. Foi-lhe atribuído o Prmio Nobel da Física pela sua descoberta, juntamente com Pierre e Marie Curie, que descobriram outros elementos radioactivos.

Entende-se por decaimento radioactivo a transformao de um átomo instável num átomo de um outro elemento, com emissão de radiao.

Neste capítulo iremos abordar exercícios relacionados com os tipos de transformao radioactivas, com a lei do decaimento, com energias emitidas por amostras radioactivas e doses de radiao em rgos.

### 3.1. Tipos de transformações radioactivas

Existem diversos tipos de transformações radioactivas. Podemos separá-las em três grupos: emissões de partículas  $\alpha$ , transformações isobáricas e transformações isoméricas.

As partículas  $\alpha$  correspondem ao núcleo de um átomo de  ${}^4_2\text{He}$ , constituídas, portanto, por dois prótons e dois neutrões. A sua emissão ocorre em núclídeos instáveis por excesso de prótons e neutrões, segundo a reacção



Entende-se por transformação isobárica aquela em que o núclídeo resultante tem o mesmo número de massa que o núclídeo-pai. Dentro destas podemos considerar as emissões  $\beta^-$ , emissões  $\beta^+$  e captura electrónica. As equações que traduzem estas transformações são, respectivamente



As transformações isoméricas são aquelas em que o núclídeo resultante tem os mesmos números atómico e de massa que o núclídeo-pai, diferindo apenas no estado de energia. Dentro destas incluem-se as emissões  $\gamma$  por núclídeos em estado excitado, estado metastável e conversão interna.

As transformações radioactivas descritas podem ser representadas graficamente por esquemas de decaimento, como se encontra representado na Fig. 3.1.

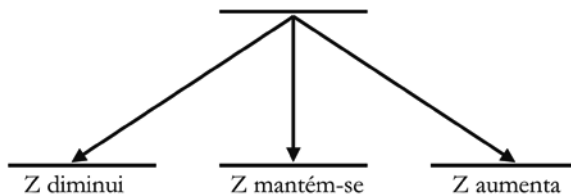


Fig. 3.1 – Esquemas de decaimento. Os níveis de energia são representados por linhas horizontais.

Após uma transformação o nuclídeo resultante representa-se abaixo do nuclídeo-pai. Se o número atômico se mantiver, representa-se imediatamente abaixo do nuclídeo-pai; caso o número atômico diminua durante a transformação, representa-se deslocado para a esquerda; caso aumente, representa-se deslocado para a direita.

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo V, pp. 564-586.

### 3.1.1. Exercícios resolvidos

Exercício 3.1. O azoto-15 ( ${}^{15}_7N$ ) resulta da emissão  $\beta^+$  de um radionuclídeo utilizado em Medicina Nuclear para avaliação da perfusão cerebral.

- a) Qual o radionuclídeo-pai?
- b) Desenhe o esquema de decaimento.

---

### Resolução

Dados do problema e conversões de unidades



resulta de emissão  $\beta^+$

a) A emissão de positrões é uma transformação isobárica, ou seja, os números de massa ( $A$ ) do nuclídeo-pai e do nuclídeo resultante são iguais. A emissão da partícula  $\beta^+$  resulta da transformação de um próton num neutrão, verificando-se uma diminuição do número atómico ( $Z$ ) durante a transformação. Logo, o radionuclídeo-pai do  ${}^{15}_7N$  é o oxigénio-15 ( ${}^{15}_8O$ ).

b)

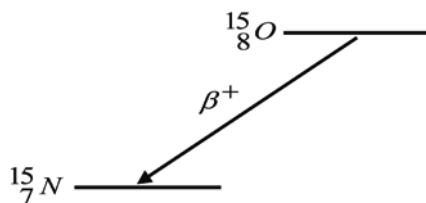


Fig. 3.2 – Esquema de decaimento do  ${}^{15}_8O$ , quando emite um positrão.

---

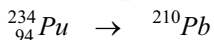
Exercício 3.2. O plutónio-234 ( ${}^{234}_{94}Pu$ ) dá origem ao chumbo-210 ( ${}^{210}_{82}Pb$ ) por emissões alfa sucessivas.

- Quantas emissões  $\alpha$  são necessárias para que esta transformação ocorra?
- Determine o número atómico do chumbo.
- Indique os números atómicos dos nuclídeos que se formam durante esta transformação e os respectivos números de massa.

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades



*emissões  $\alpha$  sucessivas*

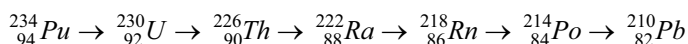
a) Sabemos que em cada emissão  $\alpha$  o número de massa (A) diminui 4 unidades. Como a diferença entre os números de massa dos dois núclídeos é 24, temos

$$\text{número de emissões} = \frac{24}{4} = 6 \text{ emissões} \quad (3.5)$$

b) Por cada emissão  $\alpha$  o número atómico (Z) diminui 2 unidades. Deste modo, nas 6 emissões irá ocorrer uma diminuição de 12 unidades no número atómico. Assim, o número atómico do chumbo é

$$Z(\text{Pb}) = Z(\text{Pu}) - 12 = 94 - 12 = 82 \quad (3.6)$$

c) Pelas afirmações das alíneas anteriores, podemos calcular os números atómicos e de massa dos diversos núclídeos resultantes. Em esquema será



### 3.1.2. Exercícios propostos

1. O gálio-78 ( ${}_{31}^{78}\text{Ga}$ ) torna-se num núclídeo estável após 3 decaimentos  $\beta^-$  sucessivos.
  - a) Determine os números atómico e de massa do núclídeo resultante.
  - b) Desenhe o esquema de decaimento da primeira transformação radioactiva que ocorre neste processo.

2. O tecnécio-99 metastável ( ${}^{99m}_{43}\text{Tc}$ ) é um radionuclídeo muito utilizado para adquirir imagens em Medicina Nuclear. É obtido a partir do molibdénio  $\text{Mo}$  por emissão  $\beta^-$ .
- Determine o número atómico e número de massa do isótopo de molibdénio que origina  ${}^{99m}_{43}\text{Tc}$ .
  - Calcule o número de neutrões do  ${}^{99m}_{43}\text{Tc}$ .
  - Qual é o nuclídeo obtido pelo decaimento do  ${}^{99m}_{43}\text{Tc}$ ? Que tipo de radiação é emitida?
  - Desenhe o esquema de decaimento da transformação do molibdénio em  ${}^{99m}_{43}\text{Tc}$  e da reacção descrita na alínea anterior.
3. O irídio-192 ( ${}^{192}_{77}\text{Ir}$ ) é um emissor  $\beta^-$  utilizado para braquiterapia em tumores da mama.
- Determine o número atómico e o número de massa do nuclídeo resultante.
  - Desenhe o esquema de decaimento deste radionuclídeo.
4. O krypton-81 metastável ( ${}^{81m}_{36}\text{Kr}$ ) é um isótopo que pode ser utilizado para estudos de ventilação/perfusão. É obtido a partir de um gerador contendo rubídio ( $\text{Rb}$ ), por decaimento  $\beta^+$ .
- Determine o número de massa do  $\text{Rb}$  contido no gerador.
  - Sabendo que o número atómico do  $\text{Rb}$  é 37, determine o número atómico do nuclídeo resultante do decaimento do  ${}^{81m}_{36}\text{Kr}$ .
  - Desenhe o esquema de decaimento das transformações descritas nas alíneas anteriores.
5. O polónio-210 ( ${}^{210}_{84}\text{Po}$ ) é um isótopo resultante de dois decaimentos consecutivos do chumbo-210 ( ${}^{210}_{82}\text{Pb}$ ).
- Indique o tipo de decaimentos radioactivos que ocorrem na



transformação de  ${}^{210}_{82}\text{Pb}$  a  ${}^{210}_{84}\text{Po}$ .

- b) Sabendo que o  ${}^{210}_{84}\text{Po}$  se transforma num isótopo estável por decaimento  $\alpha$ , determine o número de massa e número atómico do nuclídeo resultante.
- c) Desenhe o esquema de decaimento que traduz as transformações das alíneas anteriores.
6. O gálio-67 ( ${}^{67}_{31}\text{Ga}$ ) é um radioisótopo utilizado na pesquisa de processos inflamatórios crónicos, em doenças como a sarcoidose ou em doentes imunocomprometidos. É usado sob a forma de citrato de gálio. Sabe-se que se desintegra por captura electrónica seguida por emissão de fotões.
- a) Indique o número de massa e número atómico do nuclídeo resultante.
- b) Desenhe o esquema de decaimento referente a esta transformação.
7. O carbono-14 ( ${}^{14}_6\text{C}$ ) é um isótopo radioactivo que se encontra em quantidades residuais na natureza, sendo usado para datação de, por exemplo, peças arqueológicas. Sabe-se que decai por emissão  $\beta^-$ .
- a) Determine o número de protões e de neutrões deste radionuclídeo e do isótopo resultante do seu decaimento.
- b) Desenhe o esquema de decaimento desta transformação.
8. O oxigénio-15 ( ${}^{15}_8\text{O}$ ) é um isótopo radioactivo que decai para nitrogénio ( $N$ ) por emissão de positrões.
- a) Determine o número atómico e número de massa do nuclídeo resultante.
- b) Desenhe o esquema de decaimento referente a esta transformação.
- c) Que tipo de transformação poderia originar o mesmo isótopo a partir do  ${}^{15}_6\text{C}$  ?

9. O iodo-123 ( $^{123}_{53}\text{I}$ ) desintegra-se por captura electrónica, observando-se seguidamente uma emissão de raios-X.
- Indique o número de massa e o número atómico do nuclideo resultante.
  - Desenhe o esquema de decaimento referente a esta transformação.
  - De que elemento provém o fóton-x descrito? Justifique.

### 3.2. Lei do decaimento radioactivo

Sabe-se que a variação do número de átomos de um dado elemento radioactivo numa amostra em função do tempo é proporcional ao número de átomos presentes na amostra. Representando por  $N$  o número de átomos da amostra, podemos escrever a equação

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda \cdot N \quad (3.7)$$

onde  $\lambda$  é a constante de decaimento, característica do isótopo considerado. Podemos reescrever a equação 3.7 do seguinte modo:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.8)$$

$N(t)$  traduz o número de átomos radioactivos presentes numa amostra para um instante  $t$ .  $N_0$  representa o número de átomos existentes no instante  $t = 0$ .

A velocidade de decaimento de uma amostra radioactiva designa-se por actividade. Representando essa grandeza por  $A(t)$  podemos escrever

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} \quad (3.9)$$

Utilizando a expressão obtida na equação 3.8, obtemos

$$A(t) = \lambda \cdot N(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.10)$$

onde  $A_0$  representa a actividade para o instante  $t = 0$ . A actividade de uma amostra tem por unidades Becquerel (Bq) ou Curie (Ci). 1 Bq representa um decaimento por segundo, enquanto 1 Ci equivale a  $3,7 \times 10^{10}$  Bq.

Podemos ainda definir dois valores característicos de cada radioisótopo: período de semi-desintegração ( $T$ ) e vida média ( $\tau$ ). O primeiro representa o tempo que uma amostra de um determinado radionuclídeo demora a reduzir-se a metade por decaimento. O segundo é definido pelo tempo médio de vida provável de um radionuclídeo. Estes valores podem ser obtidos, respectivamente, por

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (3.11)$$

e

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (3.12)$$

Bibliografia a consultar:

PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo V, pp. 587-592.

PEDROSO DE LIMA, J.J., *et al.* - *Biomatemática: Uma introdução para o curso de Medicina*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2006. Capítulo 8, pp. 253-257.

### 3.2.1. Exercícios resolvidos

Exercício 3.3. O tecnécio-99m ( $^{99m}\text{Tc}$ ), o radionuclídeo mais utilizado em Medicina Nuclear, permite avaliar diversas patologias quando associado a fármacos com princípio activo específico, sendo exemplo os derivados dos fosfonatos, utilizados para imagem óssea. Considere que este fármaco é marcado às 8h30 com uma actividade de 300mCi em 5mL.

- Determine o período de semi-desintegração do  $^{99m}\text{Tc}$ , sabendo que a actividade do radiofármaco às 10h30 era de 238,5 mCi.
- Um doente chega ao serviço de Medicina Nuclear às 11h30. Considerando que para realizar a cintigrafia óssea a este doente (de acordo com o seu peso) seria necessário administrar 20 mCi, qual seria o volume a injectar?
- Se um doente com o mesmo peso chegar ao serviço às 16h00, ser-lhe-á um administrado um volume superior a 1 mL?

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$^{99m}\text{Tc} - \text{Fosfonatos}$

$$A_{total}(8h30) = 300 \text{ mCi}$$

$$A_{total}(10h30) = 238,5 \text{ mCi}$$

$$V = 5 \text{ mL}$$

a) A função que traduz o decaimento radioactivo de um determinado radionuclídeo em função do tempo ( $t$ ) é

$$A = A_0 \times e^{-\frac{\ln 2}{T}t} \quad (3.13)$$

onde  $A_0$  é a actividade inicial e  $T$  o período de semi-desintegração. Conhecendo a actividade do radiofármaco aquando da marcação ( $A_0$ ) e 2 horas após a mesma ( $A(2h)$ ), podemos utilizar a equação 3.13 para calcular o valor de  $T$ .

$$\begin{aligned} A(2h) &= 300 \times e^{-\frac{\ln 2}{T} \times 2} \\ 238,5 &= 300 \times e^{-\frac{\ln 2}{T} \times 2} \\ T &= 6,04 \text{ h} \end{aligned} \quad (3.14)$$

b) Tendo em conta que o doente chegou ao serviço de Medicina Nuclear às 11h30, o radiofármaco já decaiu, sendo a actividade da amostra menor. Deste modo, teremos que a calcular, usando a equação 3.13 com o valor  $t = 3h$ .

$$A(3) = 300 \times e^{-\frac{\ln 2}{6,04} \times 3} = 212,6 \text{ mCi} \quad (3.15)$$

Sendo a actividade total às 11h30 de 212,6 mCi, a actividade volúmica (actividade por mL) é de

$$212,6 \div 5 = 42,52 \text{ mCi / mL} \quad (3.16)$$

Se num mL existem 42,52 mCi, proporcionalmente, para administrar ao doente 20 mCi, é necessário retirar um volume de

$$20 \div 42,52 = 0,47 \text{ mL} \quad (3.17)$$

c) Se um doente chegar ao serviço de Medicina Nuclear às 16h00 já terão passado 7h30 desde a marcação do fármaco. Assim, e de acordo com a equação 3.13, a actividade no frasco será de

$$A = 300 \times e^{-\frac{0,693}{6,04} \times 7,5} = 126,9 \text{ mCi} \quad (3.18)$$

ou seja, a actividade volúmica será

$$126,9 \div 5 = 25,38 \text{ mCi / mL} \quad (3.19)$$

Como  $25,38 \text{ mCi} > 20 \text{ mCi}$ , não será necessário injectar um volume superior a 1 mL para realizar o exame com 20 mCi. O volume a injectar é de

$$20 \div 25,38 = 0,79 \text{ mL} \quad (3.20)$$

---

Exercício 3.4. O índio-111 ( $^{111}\text{In}$ ) é um radionuclídeo utilizado em Medicina Nuclear para detecção de infecção e inflamação. A sua vida média é de 4,08 dias. Supondo que no dia 15 de Março de 2007 às 10h00 um serviço de Medicina Nuclear recebeu uma amostra de  $^{111}\text{In}$  com 296 MBq de actividade, determine:

- O período de semi-desintegração do  $^{111}\text{In}$ .
- A actividade da amostra no dia 20 de Março pelas 16h00.

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\tau = 4,08 \text{ dias}$$

$$A(10h00 - 15/03/2007) = 296 \text{ MBq}$$

a) Utilizando as equações 3.11 e 3.12 podemos obter a seguinte relação, que permite calcular o período se semi-desintegração:

$$T = \tau \cdot \ln 2 \Leftrightarrow T = 2,83 \text{ dias} = 67,92 \text{ h} \quad (3.20)$$

b) Para calcular a actividade no dia 20 de Março de 2007 pelas 16h00 é necessário ter em conta que passaram 126 horas desde que o serviço recebeu a amostra. Utilizando a equação 3.13 e tendo em consideração  $t$  e  $T$  têm que estar na mesma unidade, obtemos

$$A(126) = A_0 \times e^{-\frac{\ln 2}{T}t} \Leftrightarrow A(126) = 296 \times e^{-\frac{\ln 2}{67,92} \times 126} \quad (3.21)$$

Assim, o resultado pretendido é

$$A(126) = 81,8 \text{ MBq} \quad (3.22)$$

### 3.2.2. Exercícios propostos

1. A amónia marcada com azoto-13 ( $^{13}\text{N}$  – Amónia) constitui uma das opções para cintigrafia do miocárdio utilizando radiofármacos marcados com emissores positrões. Sabendo que a  $^{13}\text{N}$  – Amónia é produzida com uma actividade volúmica de 100 mCi/mL num volume total de 10 mL, determine:
  - a) O período de semi-desintegração deste radiofármaco, tendo em conta que a sua actividade total uma hora após a produção é de 509,1 MBq.
  - b) O número de doentes a que se pode administrar a  $^{13}\text{N}$  – Amónia na altura da sua produção, sabendo que para realizar cada cintigrafia com

este radiofármaco é necessário injectar 5 mCi.

- c) Se um doente que chegou ao serviço de Medicina Nuclear 90 minutos após produção de  $^{13}\text{N}$  – Amónia nas condições referidas no enunciado ainda pode realizar o exame.
2. O iodo-131 ( $^{131}_{53}\text{I}$ ) é um emissor  $\beta^-$  que constitui uma das abordagens terapêuticas em tumores malignos da tiróide e apresenta um período de semi-desintegração de oito dias. Sabe-se que uma cápsula de  $^{131}_{53}\text{I}$  com uma actividade de 262 mCi foi adquirida no dia 12 de Fevereiro de 2009, às 8h30.
- a) Calcule a actividade da cápsula de  $^{131}_{53}\text{I}$  no dia 24 de Fevereiro de 2009, às 17h30.
- b) Determine o dia em que a cápsula terá 20 mCi de actividade.
- c) Desenhe o esquema de decaimento, tendo em conta que este nuclídeo dá origem a um átomo de xénon ( $Z = 54$ ).
3. O estrôncio-90 ( $^{90}_{38}\text{Sr}$ ) foi um dos radioisótopos mais perigosos produzidos no acidente de Chernobyl uma vez que tem a capacidade de substituir o cálcio nos ossos. Este radionuclídeo tem um período de semi-desintegração de 29 anos, aproximadamente.
- a) Quantos anos deverão passar para que 1 g desse isótopo se transforme em 125 mg?
- b) Tendo em conta que este radionuclídeo decai para o radionuclídeo  $^{90}_{39}\text{Y}$ , que tipo de radiação emite do seu decaimento?
- c) Desenhe o esquema de decaimento.
4. Uma das opções para realização de estudos cardíacos em Medicina Nuclear é o tálio-201 ( $^{201}\text{Tl}$ ). Este radionuclídeo tem um período de semi-desintegração de, aproximadamente, 73 horas e decai por captura



- electrónica. Suponha que um serviço de Medicina Nuclear adquire 333 MBq num volume de 1,5 mL.
- Considerando que o radiofármaco chegou ao serviço no dia 3 de Dezembro de 2008 às 14h00, qual a sua actividade no dia 7 do mesmo mês, pelas 15h00?
  - Para injectar uma actividade de 2,5 mCi no dia 7 de Dezembro, pelas 15h00, qual seria o volume necessário?
  - Que partícula(s) é/são emitida(s) neste decaimento?
5. Um doente foi convocado para fazer um exame dez dias após a chegada de um produto em cuja caixa se lê: “Actividade: 12 mCi; Volume total: 6 ml; Vida média: 20 dias”. O exame é efectuado com uma actividade de 100  $\mu$ Ci do produto. Qual é o volume a injectar?
6. Uma amostra de sódio-24 ( $^{24}\text{Na}$ ), cujo período de semi-vida é de 15,03 horas, foi enviada de Lisboa para os HUC. A sua actividade ao chegar ao Hospital, passadas 3 horas, era de 10 mCi.
- Determine a vida média deste nuclideio.
  - Qual era a sua actividade ao sair de Lisboa?
  - Determine o número de átomos radioactivos presentes na amostra 20 horas após a sua chegada aos HUC.
7. Dispõe-se, num dado instante, de 10 mg de sódio-22 ( $^{22}\text{Na}$ ) e da mesma quantidade (em mol) de sódio-24 ( $^{24}\text{Na}$ ), cujos períodos são, respectivamente, 2,6 anos e 15,03 horas.
- Calcule, em Curie e em Becquerel, a actividade das duas fontes radioactivas nesse instante.
  - Calcule a actividade da fonte de  $^{24}\text{Na}$ , 15 horas depois
  - Determine a massa de uma amostra de  $^{24}\text{Na}$  que teria a mesma actividade que os 10 mg de  $^{22}\text{Na}$  tinham inicialmente.

### 3.3. Doses em órgãos devido a decaimento radioactivo

Conhecendo a expressão que traduz a actividade de uma determinada amostra em função do tempo, podemos calcular a actividade acumulada num intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ ,  $\tilde{A}(t_1, t_2)$ , do seguinte modo:

$$\tilde{A}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} A(t) \cdot dt \quad (3.23)$$

Esta expressão dá-nos o número de decaimentos ocorridos no intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ . Se conhecermos a energia média libertada por decaimento,  $\bar{E}$ , a energia libertada nesse mesmo intervalo de tempo é dada por

$$E = \bar{E} \cdot \tilde{A}(t_1, t_2) = \bar{E} \cdot \int_{t_1}^{t_2} A(t) \cdot dt \quad (3.24)$$

Consideremos agora que foi administrada uma determinada quantidade de radiofármaco a um doente e este foi totalmente e instantaneamente fixado num órgão de massa  $m$ . A energia libertada nesse órgão por unidade de massa chama-se dose absorvida pelo órgão, e pode ser obtida por

$$D = \frac{\bar{E} \cdot \tilde{A}(t_1, t_2)}{m} \quad (3.25)$$

sendo a sua unidade no Sistema Internacional o gray (Gy).

Bibliografia a consultar:

PEDROSO DE LIMA, J.J. - *Biofísica Médica*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2005. Capítulo V, pp. 667-675.

PEDROSO DE LIMA, J.J., *et al.* - *Biomatemática: Uma introdução para o curso de Medicina*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2006. Capítulo 8, pp. 260-267.

### 3.3.1. Exercícios resolvidos

Exercício 3.5. Um dos radionuclídeos mais utilizados em Medicina Nuclear é o tecnécio-99 metastável ( $^{99m}\text{Tc}$ ), que emite radiação gama com energia igual a 140 keV e cujo período de semi-desintegração é de 6 horas.

Consideremos uma amostra de  $^{99m}\text{Tc}$  que apresenta uma actividade inicial de 500 MBq. Determine:

- O número total de desintegrações ocorridas entre os instantes  $t = 1 \text{ min}$  e  $t = 10 \text{ min}$ .
- A energia total libertada pelo radionuclídeo no mesmo intervalo de tempo.
- A dose absorvida por um órgão com 1,3 Kg de massa nesse mesmo intervalo de tempo, considerando que a amostra foi administrada a um doente e foi totalmente e instantaneamente fixada por esse órgão.

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$$A_0 = 500 \text{ MBq}$$

$$\bar{E} = 140 \text{ keV}$$

$$T = 6 \text{ h} = 21600 \text{ s}$$

$$m = 1,3 \text{ Kg}$$

$$t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$t_2 = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$$

a) O número de desintegrações por segundo num determinado instante é traduzido pela actividade, cuja equação pode ser escrita sob a seguinte forma:

$$A = A_0 \times e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \quad (3.26)$$

em que  $T$  representa o período de semi-desintegração, característico de cada radionucléido, e  $A_0$  representa a actividade no instante inicial. Com este exercício pretende-se a determinação do número de desintegrações ocorridas num determinado intervalo de tempo, o qual é dado pelo seguinte integral definido:

$$\tilde{A}(60, 600) = \int_{60}^{600} A(t) \cdot dt \quad (3.27)$$

Substituindo pela função da equação 3.26 vem:

$$\int_6^{600} A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} t} dt = \left[ -\frac{A_0 \cdot T}{\ln 2} e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right]_{60}^{600} \quad (3.28)$$

Substituindo pelos valores conhecidos obtemos

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{500 \times 10^6 \times 21600}{\ln 2} e^{-\frac{\ln 2}{21600} t} \right]_{60}^{600} = \\ & = -1,558 \times 10^{13} \cdot \left[ e^{-\frac{\ln 2}{21600} \times 600} - e^{-\frac{\ln 2}{21600} \times 60} \right] = \\ & = -1,558 \times 10^{13} \cdot \left[ 9,809 \times 10^{-1} - 9,981 \times 10^{-1} \right] = \\ & = 2,680 \times 10^{11} \text{ desintegrações} \end{aligned} \quad (3.29)$$

b) A energia total emitida é dada por:

$$E_{total} = N \cdot \bar{E} \quad (3.30)$$

em que o  $N$  é o número de desintegrações ocorridas e  $\bar{E}$  representa a energia média por decaimento. Assim:

$$E_{total} = 2,680 \times 10^{11} \times 140 = 3,752 \times 10^{13} \text{ keV} \quad (3.31)$$

Sabendo que

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (3.32)$$

a energia total libertada expressa em unidades do Sistema Internacional será:

$$E_{total} = 3,752 \times 10^{13} \times 10^3 \times 1,6 \times 10^{-19} = 6,003 \times 10^{-3} \text{ J} \quad (3.33)$$

c) A dose absorvida por um órgão é dada por

$$D = \frac{E_{total}}{m} \quad (3.34)$$

Considerando que toda a amostra foi fixada pelo órgão no instante  $t = 0$ , basta substituir na equação 3.34 o valor obtido na equação 3.33:

$$D = \frac{6,003 \times 10^{-3} \text{ J}}{1,3 \text{ Kg}} = 4,618 \times 10^{-3} \text{ Gy} \quad (3.35)$$

Exercício 3.6. Na medicina nuclear o Índio-111 ( $^{111}\text{In}$ ) é um radionuclídeo utilizado para detecção de infecção e inflamação. Sabe-se que este radionuclídeo emite radiação com energia de 171 keV e tem um tempo de semi-vida é de 2,83 dias. Considerando uma amostra de  $^{111}\text{In}$  com 15 mCi, determine:

- O número total de desintegrações ocorridas entre os instantes  $t = 2 \text{ min}$  e  $t = 8 \text{ min}$ .
- A energia total libertada por este radionuclídeo no mesmo intervalo de tempo.

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$$A_0 = 15 \text{ mCi} = 555 \text{ MBq}$$

$$\overline{E}({}^{111}\text{In}) = 171 \text{ keV}$$

$$T = 2,83 \text{ dias} = 4075,2 \text{ min} = 244512 \text{ s}$$

$$t_1 = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$$

$$t_2 = 8 \text{ min} = 480 \text{ s}$$

a)

$$A = A_0 \times e^{-\frac{\ln 2}{T}t} \quad (3.36)$$

$$\tilde{A}(120, 480) = \int_{120}^{480} A(t) \cdot dt \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \int_{120}^{480} A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t} dt &= \left[ -\frac{A_0 \cdot T}{\ln 2} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T}t} \right]_{120}^{480} = \\ &= \left[ -\frac{555 \times 10^6 \times 244512}{\ln 2} \times e^{-\frac{\ln 2}{244512}t} \right]_{120}^{480} = 1,996 \times 10^{11} \text{ desint.} \end{aligned} \quad (3.38)$$

b)

$$E_{total} = N \cdot \bar{E} \quad (3.39)$$

$$E_{total} = 1,996 \times 10^{11} \times 171 = 3,414 \times 10^{13} \text{ keV} \quad (3.40)$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (3.41)$$

$$E_{total} = 3,414 \times 10^{13} \times 10^3 \times 1,6 \times 10^{-19} = 5,462 \times 10^{-3} \text{ J} \quad (3.42)$$

### 3.3.2. Exercícios propostos

1. A  $^{18}\text{F}$ -fluorodesoxiglicose ( $^{18}\text{F}$  – FDG) é um radiofármaco utilizado na Medicina Nuclear para diagnóstico e estadiamento de tumores malignos. Este radiofármaco emite positrões que, por reacções de aniquilação, geram dois fotões com 511 keV de energia. Sabendo que o seu período de semi-desintegração é de 110 minutos e considerando uma amostra deste radiofármaco que foi calibrada às 10h00 cuja actividade era de 296 MBq, determine:

- O número total de desintegrações ocorridas entre as 10h01 e as 10h30.
- A energia total dos fotões emitidos por reacções de aniquilação neste intervalo de tempo, em unidades do Sistema Internacional.

2. Uma das possíveis abordagens para diagnóstico e estadiamento de tumores malignos é a utilização de colina marcada com carbono-11, um emissor de positrões. Este radionuclídeo tem uma semi-vida de 20,4 minutos. Por reacções de aniquilação, os positrões emitidos por este nuclídeo geram dois fótons com energia de 511 keV cada. Considerando uma amostra deste radiofármaco com 2 mCi de actividade determine:
- O número total de desintegrações ocorridas entre os instantes  $t = 2 \text{ min}$  e  $t = 5 \text{ min}$ .
  - A energia total dos fótons gerados por reacções de aniquilação no mesmo intervalo de tempo, em unidades do Sistema Internacional.
3. O iodo-131 ( $^{131}_{53}\text{I}$ ) é um emissor  $\beta^-$  que constitui uma das abordagens terapêuticas em tumores malignos da tiróide. Cada decaimento deste radionuclídeo emite, em média, 606 keV de energia. Considere uma cápsula de  $^{131}_{53}\text{I}$  com 337 mCi de actividade às 8h do dia 4 de Janeiro de 2010. Sabe-se que às 8h do dia 7 de Janeiro de 2010 a actividade se encontra reduzida a 260,03 mCi. A cápsula foi administrada nesse mesmo dia a um doente, para terapêutica pós-cirúrgica de um tumor da tiróide.
- Desenhe o esquema de decaimento da transformação descrita.
  - Calcule o tempo de semi-desintegração deste radionuclídeo.
  - Determine o número de decaimentos ocorridos durante os primeiros 3 dias de terapêutica do doente.
  - Sabendo que o tecido tiroideu residual do doente tinha 15 g de massa, calcule a dose total absorvida por esse tecido. Considere que a fixação do iodo pelo tecido residual foi instantânea e completa.
4. O bismuto-213 ( $^{213}_{83}\text{Bi}$ ) é um emissor alfa com período de semi-vida de 45,7 min que apresenta uma energia média por decaimento é de 8,32 MeV.
- Desenhe o esquema de decaimento do  $^{213}_{83}\text{Bi}$ , indicando os números atômico e de massa do nuclídeo resultante.

- b) Calcule a energia total emitida por uma amostra com 100 mCi deste radionuclídeo.
5. O rénio-186 ( $^{186}_{75}\text{Re}$ ) é um radionuclídeo utilizado em terapêutica da dor devida a tumores ósseos. Decai por emissão  $\beta^-$  e tem um tempo de vida média de 5,48 dias. Uma amostra deste isótopo com 50 mCi de actividade é administrada a um doente com um osteossarcoma para alívio da dor. Sabe-se que durante os primeiros 3 dias após a administração do isótopo, o tumor recebeu uma dose de 137,48 Gy. Considere que há fixação total e instantânea desta amostra pelo tumor.
- Determine o período de semi-desintegração deste radionuclídeo.
  - Calcule a actividade desta amostra 3 dias após a sua administração.
  - Sabendo que o tumor tem 150 g de massa, calcule a energia média por decaimento do  $^{186}_{75}\text{Re}$  (em keV).
6. No tratamento da sinovite crónica de pequenas articulações pode-se proceder à sinovectomia com radioisótopos, utilizando-se o érbio-169 ( $^{169}_{68}\text{Er}$ ), um emissor  $\beta^-$  com 9,4 dias de período de semi-vida. Considere uma amostra deste isótopo radioactivo com 20 mCi de actividade ( $t = 0$ ), contida numa solução com 2 mL de volume. Sabendo que a energia média por decaimento deste isótopo é de 99 keV, determine:
- O número de prótons e de neutrões do nuclídeo resultante.
  - A actividade volúmica desta amostra para  $t = 15$  dias.
  - O volume necessário para injectar uma actividade de 40 MBq na articulação de um doente, para  $t = 15$  dias.
  - A energia total emitida dentro da articulação pela quantidade injectada na alínea anterior.
7. O rádio-224 ( $^{224}_{88}\text{Ra}$ ) e o rádio-225 ( $^{225}_{88}\text{Ra}$ ) são dois isótopos radioactivos que decaem, respectivamente, por emissões  $\alpha$  e  $\beta^-$ . O primeiro tem um período de semi-desintegração de 3,63 dias e uma energia



média por decaimento de 5,789 MeV; o segundo apresenta uma vida média de 21,49 dias e uma energia média de 1,42 MeV. Considere duas amostras destes isótopos, ambas com actividade inicial de 200 mCi.

- a) Desenhe os esquemas de decaimento de cada isótopo, indicando o número atómico e o número de massa dos núclídeos resultantes.
  - b) Calcule o número de decaimentos de  ${}^{224}_{88}\text{Ra}$  ocorridos nos primeiros 5 dias.
  - c) Determine o número de dias necessários para que, na amostra de  ${}^{225}_{88}\text{Ra}$ , ocorram o mesmo número de decaimentos que os calculados na alínea anterior.
  - d) Calcule a energia total emitida pela amostra de  ${}^{224}_{88}\text{Ra}$ .
  - e) Determine o tempo necessário para que a amostra de  ${}^{225}_{88}\text{Ra}$  emita a mesma energia que a calculada na alínea anterior.
8. O estrôncio-89 ( ${}^{89}_{38}\text{Sr}$ ) é um emissor  $\beta^-$  eficaz na redução da dor em tumores ósseos e da próstata, que apresenta um tempo médio de vida de 72,9 dias. Considere que uma amostra deste radionuclídeo é produzida com 10 mCi de actividade. Essa amostra é administrada a um doente com adenocarcinoma da próstata 10 dias após a sua produção. Sabendo que a energia média por decaimento deste radioisótopo é de 583 keV, determine:
- a) O número de prótons e de neutrões do nuclídeo resultante.
  - b) A constante de decaimento deste radionuclídeo.
  - c) A actividade desta amostra aquando da administração.
  - d) A dose total absorvida pelo tumor, tendo em conta que o nuclídeo foi totalmente e instantaneamente fixado e que a sua massa era de 100 g.

### 3.4. Modelos de agressão celular

Um modelo que traduza os efeitos biológicos da radiação ionizante sobre tecidos deve ter em conta duas possibilidades:

*i)* Acção indirecta: a radiação ionizante pode interagir com moléculas do meio no qual as células se encontram, levando à formação de produtos citotóxicos.

*ii)* Acção directa: a radiação ionizante pode interagir com moléculas importantes nas funções celulares, com consequente destruição das capacidades funcionais das células.

A teoria do alvo representa o modelo matemático da acção directa da radiação sem ter de entrar em conta com os mecanismos biológicos da destruição celular. Nesta teoria, a probabilidade de aparecimento de determinados fenómenos radiobiológicos é função da probabilidade de que o acontecimento físico primário tenha ocorrido em determinadas zonas da célula, denominadas zonas sensíveis, que corresponderão às estruturas vitais.

Para uma mesma intensidade da radiação a probabilidade de uma determinada molécula, ou estrutura, se encontrar no trajecto da radiação e ser afectada por acção directa, aumenta com as dimensões da molécula.

O número de moléculas atingidas, relativamente ao total existente na célula é, em geral, muito pequeno, mas os seus efeitos poderão ser importantes.

A teoria do alvo assenta em dois postulados:

*i)* natureza estatística da deposição da energia;

*ii)* existência de uma relação de um para um entre o número de lesões iniciadas e o efeito biológico final.

No que se segue vamos considerar uma colónia de células todas do mesmo tipo, designando cada célula por unidade biológica. Cada unidade biológica tem uma ou mais regiões sensíveis à radiação incidente, ou alvos, e designaremos por toque a interacção da radiação com um dado alvo.

Por forma a simplificar a linguagem vamos admitir que a radiação que interage com o meio biológico é radiação electromagnética, tal como radiação X ou radiação  $\gamma$ .

Quando se irradia um meio biológico, o número de fotões que nele incidem é extremamente elevado. No entanto, a probabilidade de um fotão em particular interagir com uma região sensível é extremamente pequena. Nestas condições podemos dizer que a probabilidade de ocorrerem  $x$  toques numa região sensível segue uma distribuição de Poisson, dada por:

$$P(x, m) = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{x!} \quad (3.43)$$

onde  $m$  é número médio de toques por região sensível.

É possível mostrar que  $m$  é proporcional à dose de radiação absorvida, isto é,

$$m = a \cdot D = \frac{D}{D_0} \quad (3.44)$$

em que o significado de  $D_0$  será explicado na secção seguinte.

#### 3.4.1. Modelo de um só alvo e um só toque

O modelo mais simples de sobrevivência celular considera que cada unidade biológica contém uma só região sensível cujo estado é alterado por um só toque conduzindo à sua inactivação. Este modelo de agressão celular é normalmente designado por modelo de um só alvo e um só toque.

A probabilidade de sobrevivência da cultura de células é então igual à probabilidade de não ocorrer nenhum toque por região sensível, dada pela equação de Poisson com  $x = 0$ , ou seja,

$$S = P(0) = \frac{m^0 \cdot e^{-m}}{0!} = e^{-\frac{D}{D_0}} \quad (3.45)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J., *et al.* – *Biomatemática: Uma introdução para o curso de Medicina*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2006. Capítulo 8, pp. 269-270.

### 3.4.1.1. Exercícios resolvidos

Exercício 3.7. Considere uma população celular submetida a radiação ionizante. A dose letal média para esta população é de 15 Gy. Tendo em conta o modelo de um só alvo e um só toque, determine:

- a) A sobrevivência quando esta população celular é submetida a uma dose de 5 Gy.
- b) A dose necessária para que a sobrevivência seja reduzida a 20%.

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades

$$D_0 = 15 \text{ Gy}$$

a) A equação da sobrevivência para o modelo de um só alvo e um só toque é dada pela equação 3.45. Conhecendo a dose letal média, basta substituir os valores e obtemos

$$S = e^{-\frac{5}{15}} = 0,717 \quad (3.46)$$

b) Neste caso basta aplicar novamente a equação 3.45, resolvendo-a em ordem a  $D$  :

$$0,2 = e^{-\frac{D}{15}} \Leftrightarrow D = -15 \times \ln 0,2 = 24,14 \text{ Gy} \quad (3.47)$$

---

Exercício 3.8. Uma população celular é submetida a uma dose de radiação ionizante de 10,2 Gy, ficando a sua sobrevivência reduzida a 60%. Considerando o modelo de um só alvo e um só toque, determine:

- a) A dose letal média.
- b) A dose necessária para que a sobrevivência desta população tivesse o valor de 30%.

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades

$$D = 10,2 \text{ Gy} \Rightarrow S = 0,6$$

a)

$$S = e^{-\frac{D}{D_0}} \Rightarrow 0,6 = e^{-\frac{10,2}{D_0}} \Leftrightarrow D_0 = -\frac{10,2}{\ln 0,6} = 19,968 \text{ Gy} \quad (3.48)$$

b)

$$0,3 = e^{-\frac{D}{19,968}} \Rightarrow D = 24,04 \text{ Gy} \quad (3.49)$$

#### 3.4.1.2. Exercícios propostos

1. Considere que a dose letal média de uma radiação ionizante para determinada população celular é de 1,5 Gy. Tendo em conta o modelo de um só alvo e um só toque, calcule:
  - a) A sobrevivência para uma dose de 5 Gy.
  - b) A dose necessária para que a sobrevivência tenha o valor de 25%.

2. Determine a probabilidade de uma célula submetida a uma dose de 3 Gy morrer segundo o modelo de um só alvo e um só toque, sabendo que a dose letal média é de 2,5 Gy.
3. Uma população celular com 100 g de massa é irradiada durante 20 min com uma amostra de tecnécio-99 metastável ( $^{99m}_{43}Tc$ ), cujo período de semi-desintegração e a energia média por decaimento são, respectivamente, 6 h e 140 keV. Sabendo que a actividade inicial da amostra era de 10 mCi e que a dose letal média da população celular é de 0,5 Gy, e considerando o modelo de um só alvo e um só toque, determine a sua sobrevivência no final da experiência.

#### 3.4.2. Modelo de vários alvos e um só toque

A maior parte das células dos mamíferos possuem diversas zonas sensíveis. Nestas condições, para que ocorra morte celular, terão que ser atingidas todas as zonas sensíveis com um ou mais toques.

Consideremos que cada região sensível é desactivada com um só toque. Neste caso, a probabilidade de uma região sensível não ser atingida é dada pela equação de sobrevivência obtida para o modelo anterior (equação 3.45).

A probabilidade de uma qualquer região sensível receber pelo menos um toque,  $P(x \geq 1)$ , será então a probabilidade contrária, isto é

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - e^{-\frac{D}{D_0}} \quad (3.50)$$

Havendo  $h$  zonas sensíveis, a probabilidade de ocorrer pelo menos um toque em todas as regiões  $P_h$  é igual ao produto das probabilidades individuais, ou seja

$$P_h = [P(x \geq 1)]^h = \left(1 - e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^h \quad (3.51)$$

Assim, a probabilidade de sobrevivência da célula com  $h$  zonas sensíveis é a probabilidade contrária a esta:

$$S = 1 - P_h = 1 - \left( 1 - e^{-\frac{D}{D_0}} \right)^h \quad (3.52)$$

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J., *et al.* – *Biomatemática: Uma introdução para o curso de Medicina*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2006. Capítulo 8, pp. 270-274.

### 3.4.2.1. Exercícios resolvidos

Exercício 3.9. Considere uma célula submetida a radiação ionizante. Considerando o modelo de vários alvos e um só toque, sabe-se que a dose letal média para as 6 regiões sensíveis da célula é de 3 Gy. Determine:

- A probabilidade de sobrevivência quando a célula é submetida a uma dose de 5 Gy.
- A dose necessária para que a probabilidade de sobrevivência seja de 90%.

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades

$$D_0 = 3 \text{ Gy}$$

$$h = 6$$

a) A equação da sobrevivência para o modelo de vários alvos e um só toque é dada pela equação 3.52. Utilizando os dados do problema obtemos:

$$S = 1 - \left( 1 - e^{-\frac{5}{3}} \right)^6 = 0,715 \quad (3.53)$$

b) Neste caso basta aplicar novamente a equação 3.52, resolvendo-a em ordem a  $D$  :

$$0,9 = 1 - \left(1 - e^{-\frac{D}{3}}\right)^6 \Leftrightarrow D = -3 \times \ln\left(1 - \sqrt[6]{1 - 0,9}\right) = 3,43 \text{ Gy} \quad (3.54)$$


---

Exercício 3.10. Uma população celular é submetida a uma dose de radiação ionizante de 5 Gy, ficando a sua sobrevivência reduzida a 40%. Considerando o modelo de vários alvos e um só toque com oito regiões sensíveis, determine:

- A dose letal média.
- A dose necessária para que a sobrevivência desta população seja de 70%.

---

Resolução

Dados do problema e conversões de unidades

$$D = 5 \text{ Gy} \Rightarrow S = 0,4$$

$$h = 8$$

a)

$$S = 1 - \left(1 - e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^h \Rightarrow 0,4 = 1 - \left(1 - e^{-\frac{5}{D_0}}\right)^8 \Leftrightarrow \quad (3.55)$$

$$\Leftrightarrow D_0 = -\frac{5}{\ln\left(1 - \sqrt[8]{1 - 0,4}\right)} = 1,7967 \text{ Gy}$$

b)

$$D = -1,7969 \times \ln\left(1 - \sqrt[8]{1 - 0,7}\right) = 3,536 \text{ Gy} \quad (3.56)$$



### 3.4.2.2. Exercícios propostos

1. Considere que a dose letal média por zona sensível para determinada população celular é de 4 Gy. Tendo em conta o modelo de vários alvos e um só toque com 5 áreas sensíveis, calcule:
  - a) A sobrevivência para uma dose de 4 Gy.
  - b) A dose necessária para que a sobrevivência tenha o valor de 50%.
  - c) Considerando o modelo de um só alvo e um só toque, determine a sobrevivência para uma dose igual à calculada na alínea anterior (considere a dose letal média com o valor de 4 Gy).
2. Uma célula é submetida a uma dose de 4 Gy. Sabendo que a sua probabilidade de sobrevivência segundo o modelo de vários alvos e um só toque e para uma dose letal média de 2,969 Gy é de 70%, calcule o número de zonas sensíveis subletais.
3. Demonstre que segundo o modelo de vários alvos e um só toque não há efeito biológico para doses baixas.
4. Mostre que, para doses elevadas, a sobrevivência celular para o modelo de vários alvos e um só toque se pode aproximar a uma exponencial simples.

### 3.4.3. Modelo misto

Neste modelo considera-se uma região sensível dita letal e  $h$  regiões sensíveis subletais. Ocorrerá efeito biológico ou por toque na região letal ou por  $h$  toques acumulados nas  $h$  regiões subletais.

Assim, a probabilidade de sobrevivência é igual ao produto da probabilidade de sobrevivência da zona letal pela probabilidade de sobrevivência do conjunto das  $h$  zonas subletais, ou seja,

$$S = e^{-\frac{D}{D_l}} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - e^{-\frac{D}{D_h}} \right)^h \right] \quad (3.57)$$

Nesta equação,  $D_l$  é a dose letal média para a zona sensível letal e  $D_h$  é a dose média para o toque nas  $h$  regiões subletais.

Bibliografia a consultar: PEDROSO DE LIMA, J.J., *et al.* – *Biomatemática: Uma introdução para o curso de Medicina*, 2ª edição. Coimbra : Imprensa da Universidade de Coimbra, 2006. Capítulo 8, pp. 275-276.

### 3.4.3.1. Exercícios resolvidos

Exercício 3.11. Considere uma população celular em que as células têm 4 regiões sensíveis subletais e uma letal. As doses letais médias para as regiões subletais e letal são, respectivamente, 9 Gy e 6 Gy. Determine a probabilidade de sobrevivência das células para uma dose de 3 Gy.

---

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades

$$D_l = 6 \text{ Gy}$$

$$D_h = 9 \text{ Gy}$$

$$h = 4$$

$$D = 3$$

A probabilidade de sobrevivência celular para o modelo misto de agressão celular é dada pela equação 3.57. Substituindo os valores conhecidos obtemos

$$S = e^{-\frac{3}{6}} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - e^{-\frac{3}{9}} \right)^4 \right] = 0,6026 \quad (3.58)$$


---

Exercício 3.12. Considere uma população de células com 6 regiões sensíveis subletais e uma letal. A dose média para as regiões sensíveis subletais é de 4,5 Gy. Sabendo que para uma dose de 1,5 Gy a sobrevivência celular tem o valor de 0,60622 determine a dose letal média.

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades

$$D = 1,5 \text{ Gy} \Rightarrow S = 0,60622$$

$$h = 6$$

$$D_h = 4,5 \text{ Gy}$$

$$0,60622 = e^{-\frac{1,5}{D_l} \left( 1 - \left( 1 - e^{-\frac{1,5}{4,5}} \right)^6 \right)} \quad (3.59)$$

$$e^{-\frac{1,5}{D_l}} = 0,606535 \Leftrightarrow D_l = 3 \text{ Gy} \quad (3.60)$$

### 3.4.3.2. Exercícios propostos

1. Considere uma população de células com 8 regiões sensíveis subletais e uma região letal que é submetida a uma dose de 0,5 Gy. Sabendo que as doses letais médias para as regiões sensíveis subletais e para a região letal são, respectivamente, 4 Gy e 2 Gy, determine a sobrevivência desta população.
2. Uma população celular é submetida a uma dose de radiação de 4 Gy. Cada célula tem uma região sensível letal, cuja dose letal média é de 6 Gy, e 5 regiões subletais. Sabendo que a sobrevivência desta população para as condições referidas é de 0,50858 determine a dose letal média para as regiões subletais.
3. Demonstre que para o modelo misto de agressão celular há efeito biológico para doses baixas.



P R O B L E M A S   E M  
F O R M A T O   D E   T E S T E

**Módulo 1:**

**Problema 1**

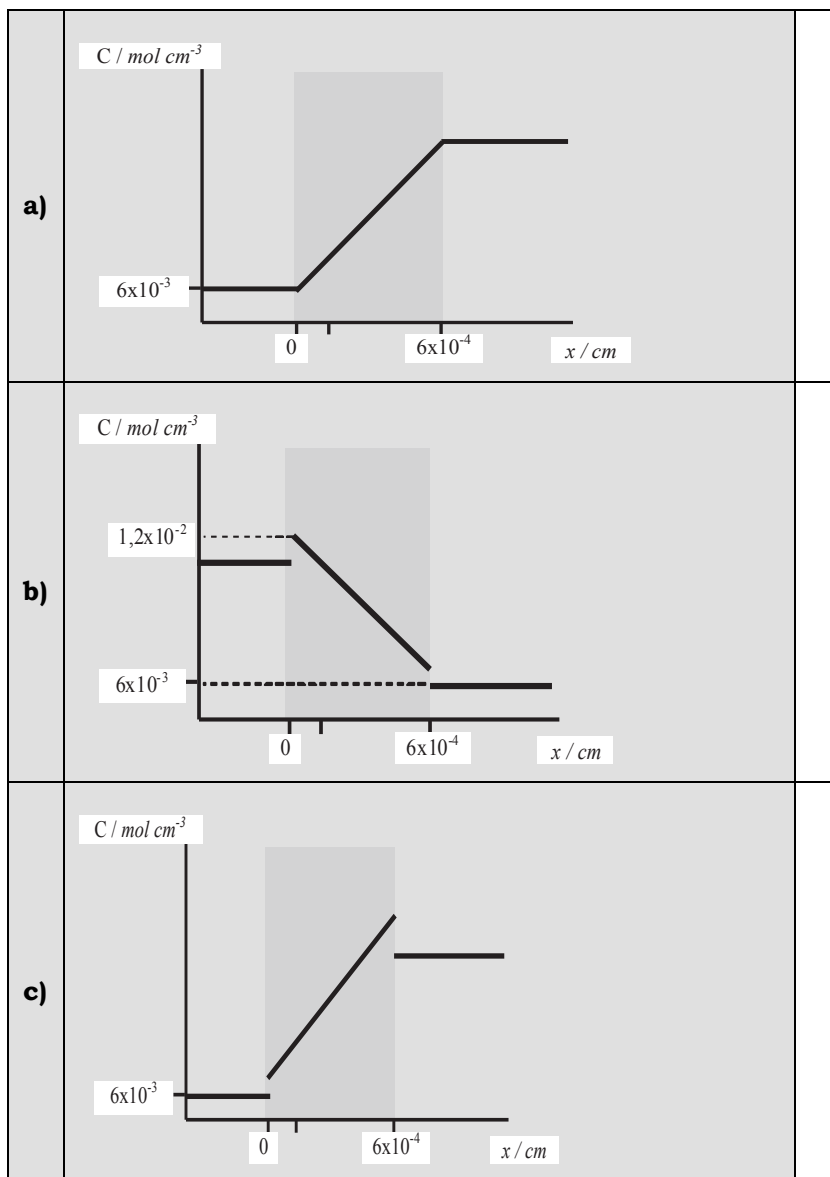
Considere um sistema formado por dois compartimentos separados por uma membrana homogénea de espessura  $6 \mu\text{m}$ . As concentrações nos 2 recipientes são respectivamente 10 e 6M, o coeficiente de partição é 1,2 e a constante de difusão  $0,5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

---

1. A espessura da membrana no sistema cgs é igual a:

<b>a)</b>	0,6 cm	
<b>b)</b>	$6 \times 10^{-3} \text{ m}$	
<b>c)</b>	$6 \times 10^{-4} \text{ cm}$	
<b>d)</b>	6 mm	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

2. O gráfico concentração *vs.* distância que melhor traduz os dados do problema é:



<b>d)</b>		
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

**3.** A expressão da recta  $C_s(x)$  é:

<b>a)</b>	$C_s(x) = -30x + 10$ (mol cm <sup>-3</sup> )	
<b>b)</b>	$C_s(x) = -10x + 1,2 \times 10^{-2}$ (mol cm <sup>-3</sup> )	
<b>c)</b>	$C_s(x) = 10x + 1,2 \times 10^{-3}$ (mol cm <sup>-3</sup> )	
<b>d)</b>	$C_s(x) = -30x + 7,2 \times 10^{-3}$ (mol cm <sup>-3</sup> )	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

---

4. Considere as seguintes afirmações:

1) A determinação da expressão da recta ( $C_s(x) = m x + b$ ) que traduz a variação da concentração em função da distância permite o cálculo da concentração de soluto na interface da membrana com o compartimento II;

2) A densidade de corrente à entrada da membrana tem de ser igual à saída porque o número de moles de soluto que por  $\text{cm}^2$  e por segundo entra na membrana deve igualar o que sai;

3) A densidade de corrente de soluto no interior da membrana é constante;

Escolha a resposta correcta:

<b>a)</b>	As três afirmações são falsas	
<b>b)</b>	A afirmação 1) está correcta mas 2) e 3) estão incorrectas	
<b>c)</b>	A afirmação 1) está incorrecta mas 2) e 3) estão correctas	
<b>d)</b>	As três afirmações estão correctas	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	



---

---

5. A lei de Fick aplicada a este problema é dada por:

$$1) J_s = D_m K \frac{C_s^I - C_s^{II}}{\Delta x};$$

$$2) J_s = D_m K \frac{C_s(0) - C_s(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$3) J_s = -D_m \frac{dC(x)}{dx}$$

<b>a)</b>	Todas as expressões estão correctas	
<b>b)</b>	Apenas as expressões 1) e 2) estão correctas	
<b>c)</b>	Apenas as expressões 2) e 3) estão correctas	
<b>d)</b>	Apenas as expressões 1) e 3) estão correctas	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

---

6. O valor da Permeabilidade é:

<b>a)</b>	1000 cm s <sup>-1</sup>	
<b>b)</b>	0,01m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	
<b>c)</b>	0,01 cm s <sup>-1</sup>	
<b>d)</b>	1000 cm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

## Problema 2

Uma membrana homogénea atravessada por poros com  $3 \mu\text{m}$  de espessura separa dois compartimentos contendo soluções de um mesmo soluto. A área da membrana é igual  $4 \text{ dm}^2$  e a ocupada por poros é de  $20 \text{ cm}^2$ . Para a componente homogénea a permeabilidade ao soluto é igual a  $2 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$ , a densidade de corrente de difusão é igual a  $50 \times 10^{-9} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  (por  $\text{cm}^2$  de componente homogénea), e o gradiente de concentração do soluto nessa componente é igual a  $-5 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-4}$ . Sabe-se ainda que a constante de difusão do soluto através da componente porosa é igual a  $2 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  e que a concentração no compartimento I é  $40 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$ .

1. A diferença de concentrações,  $\Delta C_s = C_s^I - C_s^{II}$ , entre os compartimentos é dada por

<b>a)</b>	$\Delta C_s = 25 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>b)</b>	$\Delta C_s = -25 \times 10^{-6} \text{ M}$	
<b>c)</b>	$\Delta C_s = 25 \times 10^{-6} \text{ M}$	
<b>d)</b>	$\Delta C_s = -25 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

2. A diferença de concentração nas interfaces ( $C_s(0) - C_s(\Delta x)$ ) da componente homogénea relaciona-se com o gradiente de concentrações,  $\frac{dC_s}{dx}$ , pela expressão

a)	$\frac{dC_s}{dx} = \frac{C_s(0) - C_s(\Delta x)}{\Delta x}$	
b)	$\frac{dC_s}{dx} = K \frac{C_s(0) - C_s(\Delta x)}{\Delta x}$	
c)	$\frac{dC_s}{dx} = -K \frac{C_s(0) - C_s(\Delta x)}{\Delta x}$	
d)	$\frac{dC_s}{dx} = -\frac{C_s(0) - C_s(\Delta x)}{\Delta x}$	
e)	Nenhuma das restantes opções está correcta	

3. O valor do coeficiente de partição,  $K$ , é:

a)	$k = 0,25$	
b)	$k = 0,75$	
c)	$k = 2,0$	
d)	$k = 1,25$	
e)	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

---

4. A concentração no compartimento II, é igual a:

<b>a)</b>	$C_s^{II} = 38,5 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>b)</b>	$C_s^{II} = 15 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>c)</b>	$C_s^{II} = 65 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>d)</b>	$C_s^{II} = 41,5 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

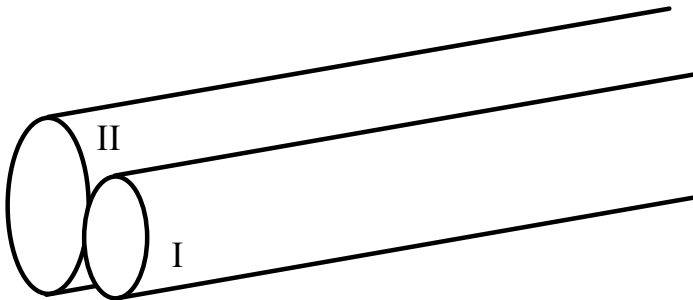
5. A densidade de corrente através da membrana porosa,  $J_s(\text{porosa})$ , admitindo que pela porção homogénea não ocorre passagem de soluto, é igual a:

<b>a)</b>	$J_s(\text{porosa}) = 8,33 \times 10^{-9} \text{ mol s}^{-1}$	
<b>b)</b>	$J_s(\text{porosa}) = 8,33 \times 10^{-9} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$	
<b>c)</b>	$J_s(\text{porosa}) = -8,33 \times 10^{-9} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$	
<b>d)</b>	$J_s(\text{porosa}) = -8,33 \times 10^{-9} \text{ mol s}^{-1}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

### Problema 3

Dois vasos cilíndricos estão em contacto, como mostra a figura. A sua parede é uma membrana porosa com  $\sigma = 0,8$ . A pressão exercida no primeiro vaso é de 5 mmHg e, no segundo é de 20 mmHg. A corrente de soluto por arrastamento é nula, e a concentração da solução existente no vaso I é igual a 0,1 M. A área de contacto efectiva é de 200 mm<sup>2</sup>.

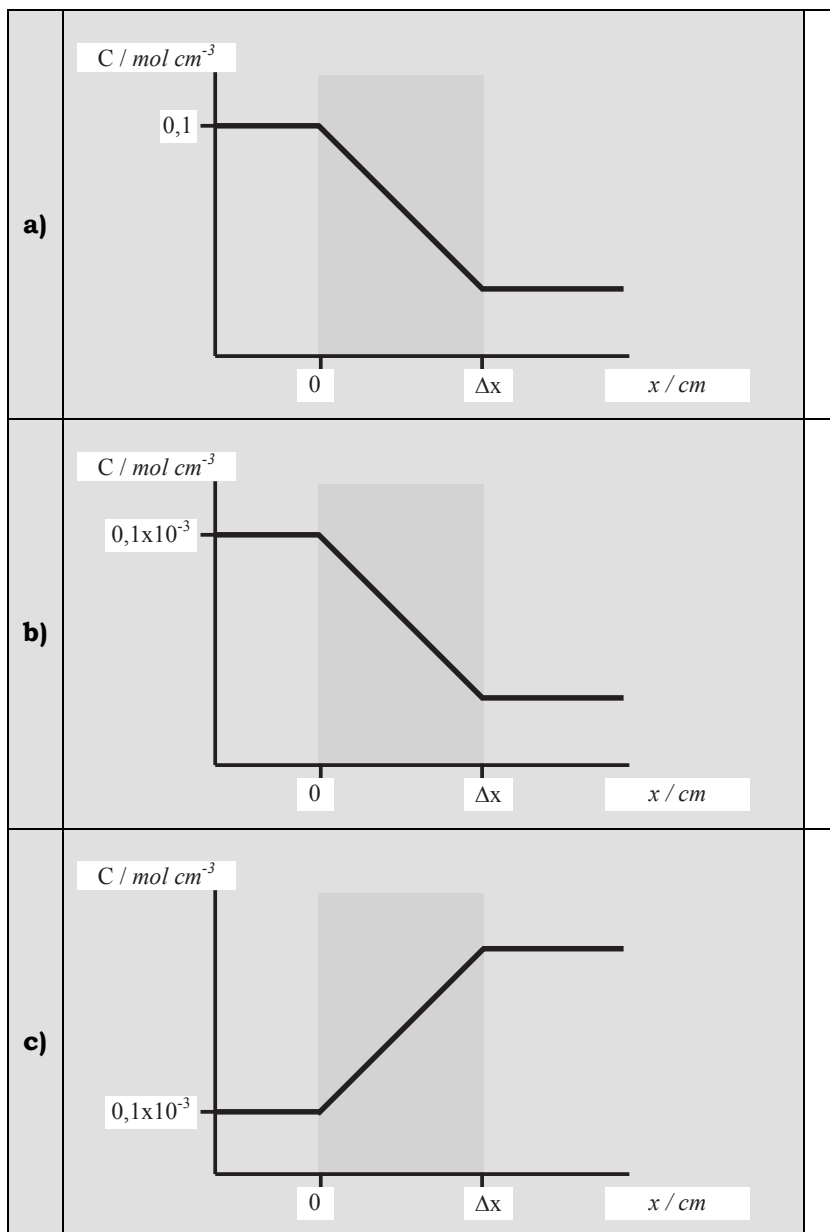
$$t = 37^\circ\text{C} \quad R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad L_p = 5 \text{ mol dyn}^{-1} \text{ s}^{-1}$$
$$\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g/cm}^3 \quad g = 10 \text{ m/s}^2$$

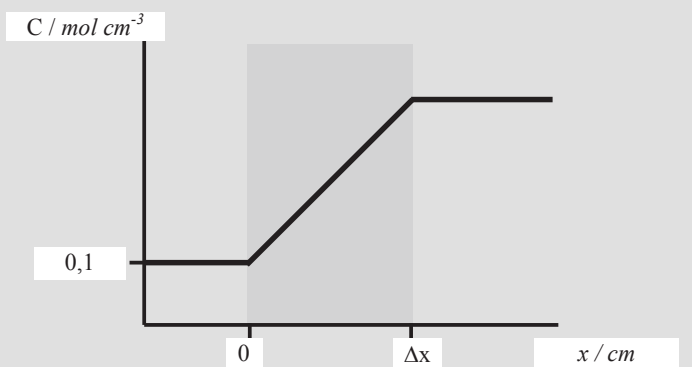


**1** O valor da diferença de pressão hidrostática no sistema cgs é:

<b>a)</b>	$\Delta P$ é a pressão em cgs $\rho$ é a massa volúmica do mercúrio $g$ é a aceleração gravítica $h$ é a altura do mercúrio	$\Delta P = 13,6 \times 10 \times 15 = 204 \times 10^3 \text{ Pa}, P^{II} > P^I$
<b>b)</b>	$\Delta P$ é a pressão em cgs $\rho$ é a massa volúmica do mercúrio $g$ é a aceleração gravítica $h$ é a altura do mercúrio	$\Delta P = 13,6 \times 1000 \times 1,5 = 204 \times 10^5 \text{ Pa}, P^I > P^{II}$
<b>c)</b>	$\Delta P$ é a pressão em cgs $\rho$ é a massa volúmica do mercúrio $g$ é a aceleração gravítica $h$ é a altura do mercúrio	$\Delta P = 13,6 \times 10 \times 1,5 = 204 \text{ dyn cm}^{-2}, P^I > P^{II}$
<b>d)</b>	$\Delta P$ é a pressão em cgs $\rho$ é a massa volúmica do mercúrio $g$ é a aceleração gravítica $h$ é a altura do mercúrio	$\Delta P = 13,6 \times 1000 \times 1,5 = 204 \times 10^2 \text{ dyn cm}^{-2}, P^{II} > P^I$
<b>e)</b>	$\Delta P$ é a pressão em cgs $\rho$ é a massa volúmica do mercúrio $g$ é a aceleração gravítica $h$ é a altura do mercúrio	$\Delta P = 13,6 \times 1000 \times 15 = 204 \times 10^3 \text{ dyn cm}^{-2}, P^{II} > P^I$

2 O gráfico concentração *vs.* distância que melhor traduz os dados do problema é:



<b>d)</b>		
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

**3** A diferença de pressão osmótica é igual a:

<b>a)</b>	25500 dyn/cm <sup>2</sup> , superior em II	
<b>b)</b>	25500 dyn/cm <sup>2</sup> , superior em I	
<b>c)</b>	255000 dyn/cm <sup>2</sup> , superior em II	
<b>d)</b>	255000 dyn/cm <sup>2</sup> , superior em I	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	



---

---

**4** Considere as seguintes afirmações:

1) O sentido da corrente de solvente é definido apenas pela diferença de pressão hidrostática entre os compartimentos;

2) Numa solução com apenas um soluto, a corrente de difusão de soluto é sempre de sinal oposto à corrente total de solvente.

3) Para uma membrana semi permeável ideal a densidade de corrente de solvente é sempre nula;

Escolha a resposta correcta:

<b>a)</b>	As três afirmações são falsas	
<b>b)</b>	A afirmação 1) está correcta mas 2) e 3) estão incorrectas	
<b>c)</b>	A afirmação 1) está incorrecta mas 2) e 3) estão correctas	
<b>d)</b>	As três afirmações estão correctas	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

#### Problema 4:

Considere uma membrana impermeável a macromoléculas que separa dois compartimentos e através da qual não existe movimento de água. Dissolveu-se iodeto de potássio a uma concentração de  $4 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$  em cada um dos compartimentos. Seguidamente dissolveu-se no compartimento I proteinato de potássio a uma concentração igual. Sabe-se que por cada molécula de proteinato dissolvida em solução são libertados 6 iões potássio.

Na resolução considere os seguintes dados (se necessário):

$$t = 35^\circ\text{C} \quad R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

$$\rho(\text{Hg}) = 13,56 \text{ g cm}^{-3}$$

- 
- 
1. A concentração de iões no compartimento II entre o momento de adição de proteinato de potássio e o estado de equilíbrio:

<b>a)</b>	Aumenta $4,8 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ .	
<b>b)</b>	Diminui $4,8 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ .	
<b>c)</b>	Aumenta $2,4 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ .	
<b>d)</b>	Diminui $2,4 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ .	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

---

**2.** Considere as seguintes afirmações:

1) A pressão osmótica neste sistema depende apenas da concentração de macromoléculas.

2) A concentração de ião potássio no compartimento I no estado de equilíbrio é  $5,6 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$ .

3) Na situação de equilíbrio, as concentrações de ião iodeto e ião potássio no compartimento II são iguais.

Escolha a resposta correcta:

<b>a)</b>	As três afirmações são falsas	
<b>b)</b>	A afirmação 1) está correcta mas 2) e 3) estão incorrectas	
<b>c)</b>	A afirmação 1) está incorrecta mas 2) e 3) estão correctas	
<b>d)</b>	As três afirmações estão correctas	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

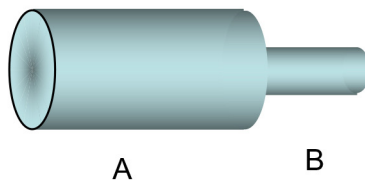
- 
- 
3. Na situação de equilíbrio, a diferença de concentração de iões potássio,  $\Delta[K^+] = [K^+]^I - [K^+]^{II}$ , é igual a:

<b>a)</b>	$1,92 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>b)</b>	$-8 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>c)</b>	$-1,92 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>d)</b>	$8 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

## Módulo 2:

### Problema 1

Ao lado encontra-se representado um sistema constituído por uma associação em série de dois tubos cilíndricos horizontais com áreas de secção transversal respectivamente de  $0,06 \text{ m}^2$  e de  $0,01 \text{ m}^2$ . Este sistema é percorrido por um caudal constante de um líquido de viscosidade nula e de massa específica  $1 \text{ g/cm}^3$ . As pressões motoras são em A de  $150 \text{ dyn/cm}^2$  e em B de  $80 \text{ dyn/cm}^2$ .



1. A velocidade média em B é:

<b>a)</b>	3 vezes maior do que a velocidade em A.	
<b>b)</b>	6 vezes maior do que a velocidade em A.	
<b>c)</b>	12 vezes maior do que a velocidade em A.	
<b>d)</b>	18 vezes maior do que a velocidade em A.	
<b>e)</b>	36 vezes maior do que a velocidade em A.	

---

---

**2.** Quando o fluido se desloca de A para B:

<b>a)</b>	A diferença entre as energias cinéticas à entrada e à saída é igual à diferença entre as energias potenciais de pressão entre a entrada e a saída.	
<b>b)</b>	A diferença entre as energias cinéticas à entrada e à saída é igual à diferença entre as energias potenciais gravíticas entre a saída e a entrada.	
<b>c)</b>	A perda de energia potencial de pressão é compensada pelo ganho de energia cinética.	
<b>d)</b>	A energia potencial gravitacional tem um papel importante nas variações energéticas do sistema.	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

---

**3.** As velocidades são:

<b>a)</b>	$\bar{v}_A = 20 \text{ cm / s}; \bar{v}_B = 60 \text{ cm / s}$	
<b>b)</b>	$\bar{v}_A = 2 \text{ cm / s}; \bar{v}_B = 36 \text{ cm / s}$	
<b>c)</b>	$\bar{v}_A = 2 \text{ cm / s}; \bar{v}_B = 12 \text{ cm / s}$	
<b>d)</b>	$\bar{v}_A = 20 \text{ cm / s}; \bar{v}_B = 120 \text{ cm / s}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

- 
- 
4. Considerando a velocidade em A igual a 0,5 m/s, o caudal em B é:

<b>a)</b>	30 L / s	
<b>b)</b>	0,03 L / s	
<b>c)</b>	300 cm <sup>3</sup> / s	
<b>d)</b>	3 cm <sup>3</sup> / s	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

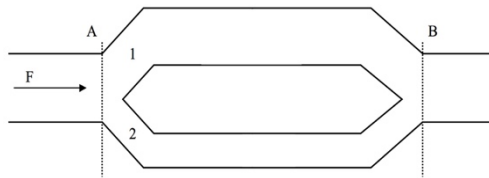
- 
- 
5. Mantendo o caudal e a pressão em A constante, se a altura a que está a secção A aumentar para  $h = 2$  cm (considerando que a secção B se mantém à altura  $h = 0$  cm), comparando com a situação inicial:

<b>a)</b>	A velocidade em B diminui e a pressão motora em B também diminui.	
<b>b)</b>	A velocidade em B não se altera mas a pressão motora em B diminui.	
<b>c)</b>	A velocidade em B não se altera e a pressão motora em B também não se altera.	
<b>d)</b>	A velocidade em B não se altera mas a pressão motora em B aumenta.	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

## Problema 2

Considere o sistema representado na figura, onde escoia um líquido com densidade igual a 1 e viscosidade 0,01 poise. Os tubos 1 e 2 têm o mesmo comprimento e o raio do tubo 1 é três vezes maior do que o do tubo 2. O caudal que atravessa o sistema é  $82 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

$$g = 980 \text{ cm/s}^2$$



1. A resistência hidrodinâmica do tubo 1 é:

<b>a)</b>	81 vezes maior do que a do tubo 2.	
<b>b)</b>	81 vezes menor do que a do tubo 2.	
<b>c)</b>	3 vezes menor do que a do tubo 2.	
<b>d)</b>	3 vezes maior do que a do tubo 2.	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	



---

---

2. Os caudais nos tubos 1 e 2 são, respectivamente:

<b>a)</b>	$F_1=81 \text{ cm}^3/\text{s}$ e $F_2=1 \text{ cm}^3/\text{s}$ .	
<b>b)</b>	$F_1=41 \text{ cm}^3/\text{s}$ e $F_2=41 \text{ cm}^3/\text{s}$ .	
<b>c)</b>	$F_1=1 \text{ cm}^3/\text{s}$ e $F_2=81 \text{ cm}^3/\text{s}$ .	
<b>d)</b>	$F_1=82 \times 3/4 \text{ cm}^3/\text{s}$ e $F_2=82/4 \text{ cm}^3/\text{s}$ .	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções	

---

---

3. Considerando um tubo equivalente a este sistema com 2 cm de raio, a velocidade média do fluido é:

<b>a)</b>	$20,5/\pi \text{ cm/s}$	
<b>b)</b>	$1/4\pi \text{ cm/s}$	
<b>c)</b>	$81/4\pi \text{ cm/s}$	
<b>d)</b>	Não há dados suficiente para responder.	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções	

- 
- 
4. Sabendo que o raio do tubo 1 é 3 cm, o número de Reynolds nesse tubo é:

<b>a)</b>	$5400/\pi$ , o que corresponde a um regime laminar	
<b>b)</b>	$2700/\pi$ , o que corresponde a um regime laminar	
<b>c)</b>	$200/\pi$ , o que corresponde a um regime turbulento	
<b>d)</b>	$100/\pi$ , o que corresponde a um regime turbulento	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

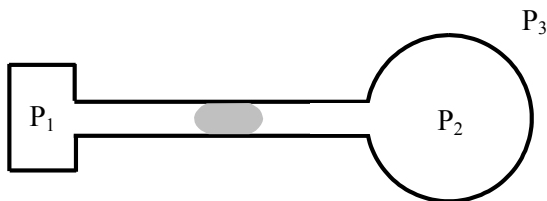
- 
5. A perda de carga linear no tubo 1:

<b>a)</b>	É 3 vezes maior do que no tubo 2.	
<b>b)</b>	É 9 vezes menor do que no tubo 2.	
<b>c)</b>	É 81 vezes maior do que no tubo 2.	
<b>d)</b>	É igual à do tubo 2.	
<b>e)</b>	Não há dados suficientes para responder.	

### Problema 3

Na figura seguinte encontra-se representado um sistema com um tubo cilíndrico de raio igual a 1 mm. Numa extremidade do tubo encontra-se um recipiente com um gás com uma pressão  $P_1 = 4560 \text{ dyn cm}^{-2}$ , e na outra extremidade encontra-se um balão de borracha de raio igual a 10 cm cuja estrutura é semelhante à de uma bola de sabão, cuja tensão superficial é igual a  $400 \text{ dyn cm}^{-1}$ . No interior do tubo encontra-se um êmbolo na iminência de se desfazer ( $P_2 > P_1$ ). A tensão superficial êmbolo/gás é igual a  $60 \text{ dyn cm}^{-1}$ .

$$(g = 9,8 \text{ m/s}^2 \quad \rho (\text{Hg}) = 13,6 \text{ g/cm}^3)$$



---

1. A pressão  $P_2$  é dada pela expressão:

<b>a)</b>	$P_2 = P_1 + \frac{2\sigma_{\text{êmbolo}}}{r_{\text{tubo}}}$	
<b>b)</b>	$P_2 = P_1 - \frac{2\sigma_{\text{êmbolo}}}{r_{\text{tubo}}}$	
<b>c)</b>	$P_2 = P_3 - \frac{2\sigma_{\text{balão}}}{r_{\text{balão}}}$	
<b>d)</b>	$P_2 = P_3 + \frac{2\sigma_{\text{balão}}}{r_{\text{balão}}}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

2. O valor da pressão  $P_2$  é igual a:

<b>a)</b>	$3360 \text{ dyn cm}^{-2}$	
<b>b)</b>	$5760 \text{ mmHg}$	
<b>c)</b>	$5760 \text{ dyn cm}^{-2}$	
<b>d)</b>	$20560 \text{ dyn cm}^{-2}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

---

3. Assumindo  $P_2 = 1460 \text{ dyn cm}^{-2}$ , o valor da pressão  $P_3$  é:

<b>a)</b>	$P_3 = 1380 \text{ dyn cm}^{-2}$	
<b>b)</b>	$P_3 = 1300 \text{ dyn cm}^{-2}$	
<b>c)</b>	$P_3 = 1300 \text{ mmHg}$	
<b>d)</b>	$P_3 = 1380 \text{ mmHg}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

---

4. Assumindo  $P_2 = 4320 \text{ dyn cm}^{-2}$ , o valor máximo do raio do tubo para o qual ainda existe êmbolo:

<b>a)</b>	$50 \text{ mm}$	
<b>b)</b>	$5 \text{ cm}$	
<b>c)</b>	$0,5 \text{ mm}$	
<b>d)</b>	$5 \text{ mm}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

- 
- 
5. No caso de não haver êmbolo e para uma pressão  $P_3 = 4360 \text{ dyn cm}^{-2}$  o raio do balão seria:

<b>a)</b>	$r_{\text{balão}} = 4 \text{ cm}$	
<b>b)</b>	$r_{\text{balão}} = 8 \text{ cm}$	
<b>c)</b>	$r_{\text{balão}} = 4 \text{ mm}$	
<b>d)</b>	$r_{\text{balão}} = 8 \text{ mm}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

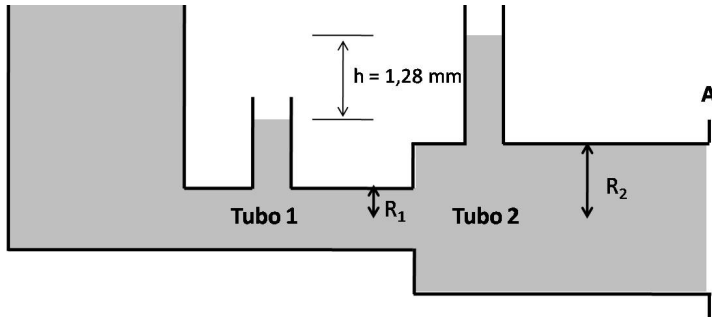
#### Problema 4

O sistema da figura representa um módulo de síntese de  ${}^{37}_{17}\text{Cl}$ . A actividade por unidade de volume em  $t = 0$  s é  $10 \mu\text{Ci cm}^{-3}$ . O fluido comporta-se como ideal, com massa específica de  $10^3 \text{ Kg m}^{-3}$ . A velocidade média no tubo 1 é de  $20 \text{ cm s}^{-1}$  e ao fim de 15 minutos foi detectada na secção A uma taxa de actividade de  $120,992 \mu\text{Ci s}^{-1}$ , sendo o tempo de trânsito desprezável. Admita que a diferença de alturas,  $h$ , é mantida constante.

Considere, se necessário, os seguintes dados:

$$g = 10 \text{ m s}^{-2}$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

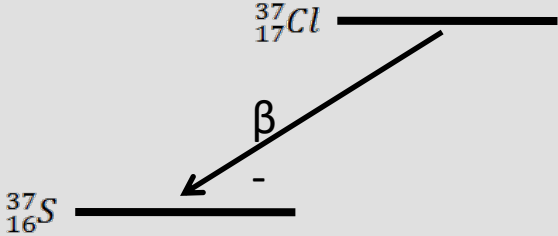
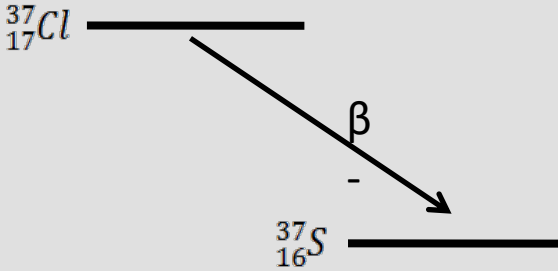
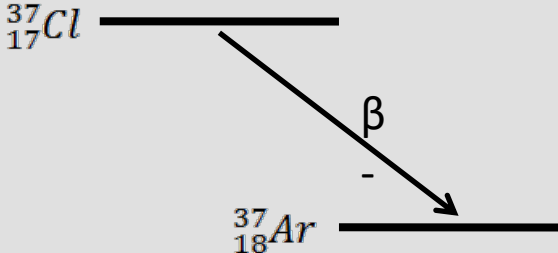
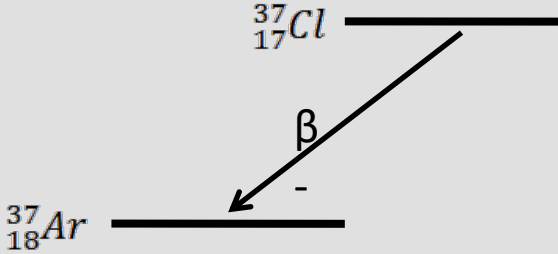


- 
- 
1. A actividade de 2 cm<sup>3</sup> deste fluído 74min 24s antes do início da síntese era 80 μCi. O período de semi-desintegração ( $T_{1/2}$ ) do <sup>37</sup>Cl é:

<b>a)</b>	9,3 min	
<b>b)</b>	18,6 min	
<b>c)</b>	24,8 min	
<b>d)</b>	37,2 min	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	



2. Sabendo que o decaimento do  $^{37}\text{Cl}$  se faz por emissão de  $\beta^-$ , o seu esquema é:

a)		
b)		
c)		
d)		
e)	Nenhuma das restantes opções está correcta	

- 
- 3.** O número de decaimentos que ocorrem em 2 mL do fluido entre os instantes  $t = 0$  min e  $t = 10$  min é dado por:

1)  $\int_0^{600} 7,4 \times 10^5 \times e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \cdot dt$ , com  $T_{1/2}$  em

segundos;

2)  $\int_0^{10} 7,4 \times 10^5 \times e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \cdot dt$ , com  $T_{1/2}$  em

minutos;

3)  $\int_0^{10} 20 \times e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \cdot dt$ , com  $T_{1/2}$  em minutos

<b>a)</b>	Todas as afirmações estão correctas.	
<b>b)</b>	Apenas as expressões 1 e 2 estão correctas.	
<b>c)</b>	Apenas a expressão 1 está correcta.	
<b>d)</b>	Apenas a expressão 2 está correcta.	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

- 
- 
4. Foram administrados os 2 mL referidos na alínea anterior no instante  $t = 0$  e forem instantaneamente e totalmente fixados por um órgão de massa 2 kg. Sabendo que a energia média por decaimento é 400 keV, a dose administrada em 10 minutos é:

<b>a)</b>	$3,50 \times 10^{-10}$ Gy	
<b>b)</b>	$5,84 \times 10^{-12}$ Gy	
<b>c)</b>	$1,30 \times 10^{-5}$ Gy	
<b>d)</b>	$2,16 \times 10^{-7}$ Gy	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

- 
- 
5. O raio do tubo 2 ( $R_2$ ) é:

<b>a)</b>	$R_2 = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \text{ cm}$	
<b>b)</b>	$R_2 = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \text{ cm}$	
<b>c)</b>	$R_2 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \text{ cm}$	
<b>d)</b>	$R_2 = \frac{4}{3\pi} \text{ cm}$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

### Módulo 3:

#### Problema 1

Considere uma população de células com 5 regiões subletais. Sabe-se a probabilidade de 3 regiões receberem pelo menos um toque é de 25% quando submetida uma dose de radiação de 5 Gy.

1. A equação que traduz a Probabilidade de toque, P, da população celular nestas condições é:

<b>a)</b>	$P = 3 \left( e^{-\frac{5}{D_h}} \right)^1 = 0,25$	
<b>b)</b>	$P = \left( \frac{5}{D_h} e^{-\frac{5}{D_h}} \right)^3 = 0,25$	
<b>c)</b>	$P = 1 - 3 \left( e^{-\frac{5}{D_h}} \right)^1 = 0,25$	
<b>d)</b>	$P = \left( 1 - e^{-\frac{5}{D_h}} \right)^3 = 0,25$	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

---

2. O valor da Dose letal média  $D_h$  é:

<b>a)</b>	5 Gy	
<b>b)</b>	1,1 Gy	
<b>c)</b>	8,15 Gy	
<b>d)</b>	15 Gy	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

---

3. Considere agora que  $D_h=6$  Gy. Admitindo a presença de uma zona letal adicional cuja dose letal média é de 3 Gy, a sobrevivência da população de células quando submetida a uma dose de radiação de 5 Gy é:

<b>a)</b>	50%	
<b>b)</b>	90%	
<b>c)</b>	33%	
<b>d)</b>	25%	
<b>e)</b>	Nenhuma das restantes opções está correcta	

## Soluções:

### Módulo 1

Problema 1:

- 1) C
- 2) B
- 3) E
- 4) D
- 5) D
- 6) A

Problema 2:

- 1) A
- 2) D
- 3) E
- 4) B
- 5) B

Problema 3:

- 1) D
- 2) C
- 3) A
- 4) A

Problema 4:

- 1) A
- 2) E
- 3) A

### Módulo 2

Problema 1:

- 1) B
- 2) C
- 3) C
- 4) A
- 5) D

Problema 2:

- 1) B
- 2) A
- 3) A
- 4) A
- 5) D

Problema 3:

- 1) A
- 2) C
- 3) B
- 4) D
- 5) B

Problema 4:

- 1) D
- 2) C
- 3) C
- 4) C
- 5) A

### Módulo 3

Problema 1:

- 1) D
- 2) A
- 3) E

# P R O B L E M A S   D E I N T E G R A Ç Ã O   D A M A T É R I A

## I

As duas artérias vertebrais que fazem a irrigação do cérebro têm origem numa ramificação das artérias subclávias, respetivamente na artéria subclávia esquerda e direita, e ascendem em direção ao crânio onde convergem para formar uma união, a artéria basilar do cérebro (Fig. I.1)

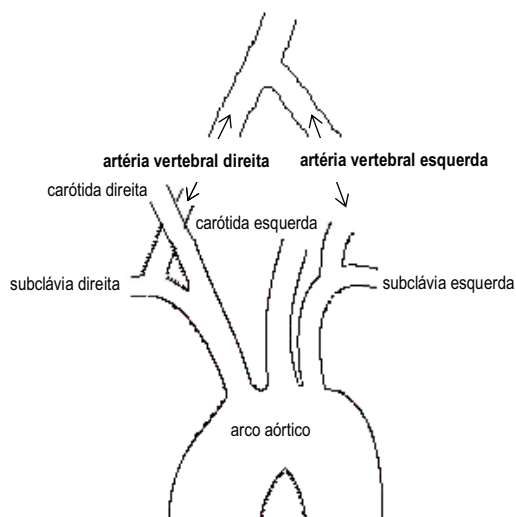


Fig.I.1

- Determine o diâmetro da artéria vertebral considerando que os diâmetros da artéria subclávia, antes e após a ramificação da artéria vertebral, são, respetivamente, 10 mm e 9,6 mm. Considere que a velocidade na artéria subclávia ao longo de todo o seu trajecto é 3 vezes superior à velocidade medida na artéria vertebral.
- Considere agora a ocorrência de uma obstrução aterosclerótica da artéria vertebral direita, imediatamente após a origem e durante  $\frac{1}{4}$  do seu comprimento, condicionando uma redução do diâmetro luminal para  $\frac{1}{3}$  do seu valor normal. Compare a resistência equivalente do sistema constituído pelas duas artérias

vertebrais antes e após a obstrução, no sistema considerado (Fig.I.2).

Dados:  $\eta_{\text{sangue}} \sim 4 \text{ mPa s}$ .

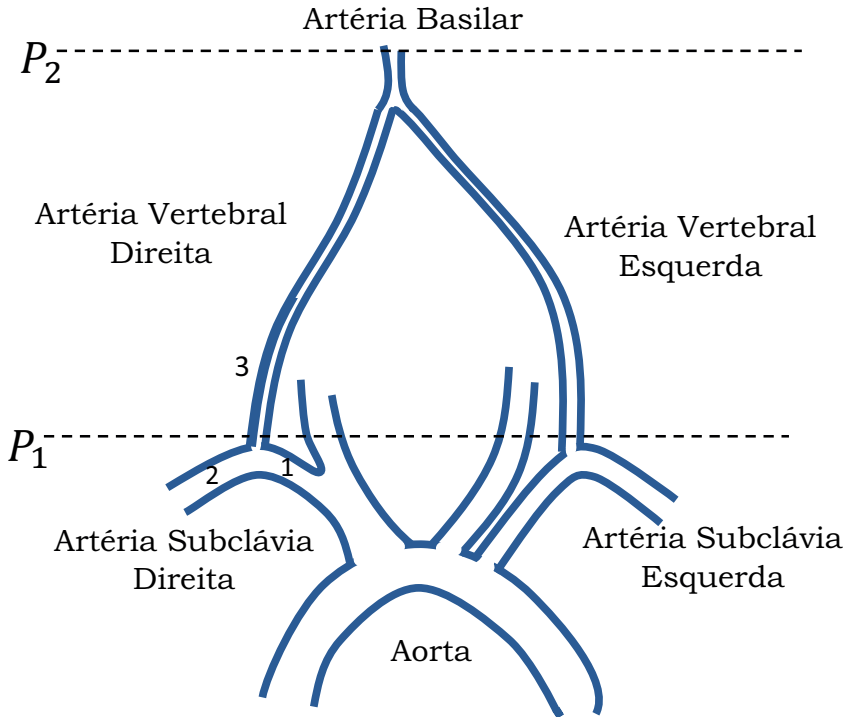


Fig.I.2

- c) Se o valor médio da pressão arterial vertebral, próximo da origem, for de 90 mm Hg, qual será o valor da pressão na origem da artéria basilar, num doente sentado? Considere que a distancia na vertical, entre o ponto de origem e o ponto de convergência é  $\sim 24,5 \text{ cm}$ .

Dados: densidade do sangue igual a  $1,4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  e a densidade do mercúrio igual a  $13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$



Resolução:

a)

Dados do problema e conversões de unidades:

$$d_1 = 10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$$

$$d_2 = 9,6 \text{ mm} = 0,96 \text{ cm}$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 3\bar{v}_3$$

A equação da continuidade pode ser aplicada diretamente no ponto da ramificação, o que significa que o caudal ( $\dot{V}$ ) antes e depois desse ponto, é o mesmo, ou seja:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

sendo,  $\dot{V}_1$  o caudal antes da ramificação e,  $\dot{V}_2 + \dot{V}_3$  o caudal após a ramificação, em que  $\dot{V}_2$  é o caudal que passa na artéria subclávia e  $\dot{V}_3$  o caudal que ascende na artéria vertebral.

Uma vez que o valor do caudal é dado pela expressão:

$$\dot{V} = \bar{v} \pi r^2$$

sendo  $\bar{v}$  a velocidade média do fluido que atravessa uma secção transversal da artéria de raio  $r$ , tem-se:

$$\bar{v}_1 \pi r_1^2 = \bar{v}_2 \pi r_2^2 + \bar{v}_3 \pi r_3^2$$

Como dito no enunciado:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 3\bar{v}_3$$

Então:

$$\bar{v}_1 r_1^2 = \bar{v}_1 r_2^2 + \frac{1}{3} \bar{v}_1 r_3^2$$

$$\Leftrightarrow r_1^2 = r_2^2 + \frac{1}{3} r_3^2$$

sendo  $r_1$  o raio da artéria subclávia antes da ramificação,  $r_2$  o raio da artéria subclávia depois da ramificação e,  $r_3$  o raio da artéria vertebral que se pretende determinar. Substituindo pelos valores, obtém-se diretamente o raio da artéria vertebral:

$$r_3 = \sqrt{3(r_1^2 - r_2^2)} \Leftrightarrow r_3 = \sqrt{3(5^2 - 4,8^2)} = 2,4 \text{ mm} = 0,24 \text{ cm}$$

Finalmente, o diâmetro ( $d$ ) será:

$$d_3 = 2r_3 \Leftrightarrow d_3 = 2 \times 0,24 = 0,48 \text{ cm}$$

Portanto, assumindo que não se verificam diferenças nas dimensões das duas artérias vertebrais (esquerda e direita), então  $d_3 = d_{\text{dir}} = d_{\text{esq}} = 0,48 \text{ cm}$

b)

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\eta_{\text{sangue}} = 4 \text{ mPa s} = 40 \times 10^{-3} \text{ poise}$$

$$r_3 = r_{\text{esq}} = r_{\text{dir}} = 0,24 \text{ cm}$$

$$r'_{\text{ata}} = \frac{1}{3} r_{\text{ata}} = \frac{1}{3} \times 0,24 = 0,08 \text{ cm}$$

1) Antes da obstrução:

O sistema representado é um sistema em paralelo das artérias subclávias após a origem das respectivas artérias

e antes da terminação na artéria basilar. A resistência hidrodinâmica por unidade de comprimento,  $(R_H/L)$  é:

$$\left(\frac{R_H}{L}\right)_{antes} = \left[ \left(\frac{R_H}{L}\right)_{esq}^{-1} + \left(\frac{R_H}{L}\right)_{dta}^{-1} \right]^{-1}$$

em que  $\left(\frac{R_H}{L}\right) = \frac{8\eta}{\pi r^4}$ ,

Fazendo a substituição, ter-se-á:

$$\left(\frac{R_H}{L}\right)_{antes} = \left[ \left(\frac{8\eta}{\pi r_{esq}^4}\right)^{-1} + \left(\frac{8\eta}{\pi r_{dta}^4}\right)^{-1} \right]^{-1}$$

A resistência equivalente da associação em paralelo é obtida pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\left(\frac{8\eta}{\pi r_{esq}^4}\right)^{-1} + \left(\frac{8\eta}{\pi r_{dta}^4}\right)^{-1}} \right] &= \left[ \frac{1}{\frac{\pi r_{esq}^4}{8\eta} + \frac{\pi r_{dta}^4}{8\eta}} \right] = \left[ \frac{1}{\frac{\pi r_{esq}^4 + \pi r_{dta}^4}{8\eta}} \right] \\ &= \frac{8\eta}{\pi r_{esq}^4 + \pi r_{dta}^4} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição pelos valores em c.g.s. e realizando os cálculos, obtém-se:

$$\left(\frac{R_H}{L}\right)_{antes} = \frac{8 \times 40 \times 10^{-3}}{\pi [(0,24)^4 + (0,24)^4]} = 15,35 \text{ poise cm}^{-4}$$

2) Após a obstrução:

O sistema é formado pela artéria vertebral esquerda em paralelo com a artéria vertebral direita, por sua vez constituída por um porção obstruída em série.

A resistência hidrodinâmica por unidade de comprimento,  $(R_H/L)$  do sistema irá corresponder à soma das resistências dos respectivos ramos (artérias), de acordo com a expressão:

$$\left(\frac{R_H}{L}\right)_{depois} = \left[ \left(\frac{R_H}{L}\right)_{esq}^{-1} + \left(\frac{R_H}{L}\right)_{dta}^{-1} \right]^{-1}$$

$$\left(\frac{R_H}{L}\right)_{esq} = \frac{8\eta}{\pi r_{esq}^4} = \frac{8 \times 40 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,24^4} = 30,7 \text{ poise cm}^{-4}$$

Devido à formação da obstrução, o diâmetro da artéria vertebral depois da ramificação, diminuiu para 1/3 do seu valor normal, pelo que  $r'_{dta} = \frac{1}{3}r_{dta} = \frac{1}{3} \times 0,24 = 0,08 \text{ cm}$

Então a artéria vertebral direita pode ser vista com um sistema em série de 2 vasos, o primeiro (L/4) obstruído com  $R'_{dta}$  e o segundo ( $\frac{3L}{4}$ ), com  $R_{dta}$

$$\left(\frac{R_H}{L}\right)_{dta} = \frac{R'_{dta}}{\frac{L}{4}} + \frac{R_{dta}}{\frac{3L}{4}}$$

Pelo que:

$$\left(\frac{R_H}{L}\right)_{dta} = \frac{4 \times 8\eta}{\pi r_{dta'}^4} + \frac{4}{3} \times \frac{8\eta}{\pi r_{dta}^4}$$

Fazendo a substituição pelos valores em unidades c.g.s. e realizando os cálculos, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_H}{L}\right)_{\text{dta}} &= \frac{4 \times 8 \times 40 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,08^4} + \frac{4}{3} \times \frac{8 \times 40 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,24^4} = 9947,2 + 40,9 \\ &= 9988,1 \text{ poise cm}^{-4} \end{aligned}$$

Como a Resistência total por unidade de comprimento do sistema vertebral pode ser calculada pela associação a um sistema em paralelo, então:

$$\left(\frac{R_H}{L}\right)_{\text{após}} = [(30,7)^{-1} + (9988,1)^{-1}]^{-1} = 30,61 \text{ poise cm}^{-4}$$

Comparando as resistências  $\left(\frac{R_H}{L}\right)_{\text{após}}$  e  $\left(\frac{R_H}{L}\right)_{\text{antes}}$ , obtém-se

$$\frac{\left(\frac{R_H}{L}\right)_{\text{após}}}{\left(\frac{R_H}{L}\right)_{\text{antes}}} = \frac{30,61}{15,35} \approx 1,99$$

Verificando-se que na presença da obstrução, a resistência hidrodinâmica do sistema é cerca de 2 vezes maior.

c)

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\rho_{\text{sangue}} = 1,4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 = 1,4 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 = 13,6 \text{ g/cm}^3$$

$$h = 24,5 \text{ cm}$$

$$P_1 = 90 \text{ mm Hg} = 119952 \text{ dyn cm}^{-2}$$

Se o caudal sanguíneo não fosse regulado pela capacidade de distensão das artérias, a diferença de pressão arterial entre o coração e a cabeça de um indivíduo em pé seria

somente de natureza hidrostática. Contudo, usaremos esta aproximação na resolução desta alínea.

Assim, pelo princípio fundamental da hidrostática (ou teorema de Stevin), tem-se:

$$P_2 = P_1 + \rho gh$$

cujos parâmetros envolvidos adaptados ao caso do problema, tendo em conta a figura I.2, têm os seguintes significados:

$P_2$  é a pressão da artéria vertebral, na cabeça;

$P_1$  é a pressão da artéria vertebral, junto à artéria subclávia;

$\rho$  é a densidade do sangue;

$g$  é a força gravítica:

$h$  é a distancia na vertical entre os dois pontos de pressão considerados. Note-se que  $h$  é considerado “negativo”, sempre que se considera a determinação de um ponto de pressão ascendente, ou seja, acima da aorta (cabeça). Contudo,  $h$  seria “positivo”, se o ponto de pressão fosse abaixo da aorta (por exemplo, nos pés).

Então, fazendo a conversão de unidades de mmHg para  $dines\ cm^{-2}$ , tem-se:

$$P_1 = 90\ mmHg$$

$$P_1 = 13,6 \times 980 \times 9 = 119952\ dyn\ cm^{-2}$$

e substituindo os valores conhecidos na equação de Stevin, obtém-se:

$$P_2 = 119952 - 1,4 \times 980 \times 24,5 = 86338\ dyn\ cm^{-2}$$

Convertendo o valor obtido para as unidades de mmHg, tem-se:

$$P = 86338 = 13,6 \times 980 \times h$$
$$\Leftrightarrow h \approx 6,48 \text{ cm}$$

Portanto, o resultado indica que a pressão na cabeça, no ponto considerado, será de 64,8 mmHg

## II

Considere o sistema horizontal representado na figura II.1.

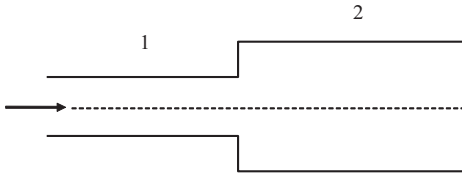


Fig.II.1

Faz-se circular pelo sistema um líquido, sem atrito interno, de massa específica  $1 \text{ g cm}^{-3}$ . Considere o sistema referido a 3 cm de altura.

- Determine a pressão na secção 1 do sistema, sabendo que a energia total por unidade de massa nessa secção é de  $3040 \text{ erg g}^{-1}$ . Sabe-se ainda que a velocidade do líquido na secção 2 é igual a  $2 \text{ cm s}^{-1}$ .
- Qual o valor da energia total da massa de líquido que percorre o sistema num segundo?

Posteriormente faz-se circular pelo mesmo sistema um outro líquido com o mesmo valor de massa específica, mas com viscosidade de valor igual a  $10^{-2}$  poise.

- c) Se na secção 2 o perfil de velocidades for dado pela equação  $v(r) = 120 \left(1 - \frac{r^2}{8}\right)$  em  $\text{cm.s}^{-1}$ , sendo  $r$  a coordenada radial em cm, determine a distância radial, para a qual a velocidade do líquido é igual à velocidade média.
- d) Tendo em conta os resultados da alínea anterior, represente graficamente o perfil de velocidades do fluido no interior da secção 2.

Na resolução do problema considere, se necessário, os seguintes dados para os diâmetros das duas secções do sistema:

$$D_2 = 4\sqrt{2} ; \quad D_1 = \frac{1}{2} D_2$$

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

Líquido ideal

$$\rho = 1 \text{ g/cm}^3$$

$$\frac{E_T}{m} = 3040 \text{ erg g}^{-1}$$

$$h = 3 \text{ cm}$$

$$v_2 = 2 \text{ cm s}^{-1}$$

Líquido viscoso

$$\eta = 10^{-2} \text{ poise.}$$



Geral

$$D_2 = 4\sqrt{2} ; \quad D_1 = \frac{1}{2} D_2$$

$$g = 980 \text{ cm s}^{-2}$$

a)

Como se trata de um líquido sem atrito interno (ou viscosidade), aplicado o princípio de Bernoulli entre um ponto da secção 1 e um ponto da secção 2, tem-se:

$$\frac{1}{2} \bar{v}_1^2 + \frac{P_1}{\rho} + gh = \frac{1}{2} \bar{v}_2^2 + \frac{P_2}{\rho} + gh$$

Note-se que, como o sistema é horizontal, não se consideraram as energias potenciais gravíticas por estas serem iguais nas duas secções (estas encontram-se à mesma cota).

O valor de  $P_1$  será dado por:

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + P_2$$

O que torna necessário determinar as velocidades em 1 e em 2, bem como  $P_2$ .

É conhecido o valor da energia total por unidade de massa na secção 1, pelo que:

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} + gh = 3040 \text{ erg g}^{-1}$$

Como há conservação de energia, este também será o valor da energia total por unidade de massa na secção 2:

$$\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho} + gh = 3040 \text{ erg } g^{-1}$$

$$\Leftrightarrow P_2 = 3040\rho - \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \rho gh$$

Como a velocidade do líquido na secção 2 é conhecida, a  $P_2$  pode ser calculada:

$$P_2 = 3040 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 - 1 \times 980 \times 3$$

$$\Leftrightarrow P_2 = 98 \text{ dyn } cm^{-2}$$

Como o caudal que atravessa o sistema é constante e dado por:

$$\dot{V} = \bar{v}\pi R^2$$

o caudal volumétrico que passa na secção 1 é igual ao caudal volumétrico que passa na secção 2,  $\dot{V}_1 = \dot{V}_2$ , pelo que podemos determinar o caudal do sistema calculando o caudal na secção 2:

$$\dot{V}_2 = \bar{v}_2\pi R_2^2$$

$$\Rightarrow \dot{V}_2 = 2\pi \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 16\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

Então,  $\bar{v}_1$  poderá ser obtido,

$$\dot{V}_1 = \bar{v}_1\pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 16\pi = \bar{v}_1\pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{v}_1 = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm } s^{-1}$$

Finalmente, o valor se  $P_1$  será:

$$P_1 = \frac{1}{2}(2^2 - 8^2) + 98 = 68 \text{ dyn cm}^{-2}$$

b)

O valor da energia total da massa de líquido que percorre o sistema num segundo corresponde à potência de escoamento ( $PE$ ). Esta grandeza física que sendo energia por unidade de tempo, é dada por:

$$PE = \frac{E_{\text{sistema}}}{t} = \frac{E}{m} \dot{M}$$

Sendo  $\frac{E}{m}$  a energia total da massa de líquido por unidade de massa e  $\dot{M}$  o caudal mássico que passa no sistema. O caudal mássico relaciona-se com o caudal volumétrico, através de:

$$\dot{M} = \rho \dot{V}$$

Então, o caudal mássico pode ser calculado:

$$\dot{M} = \rho 16\pi = 16\pi \text{ g s}^{-1}$$

Finalmente,  $PE$  será dado por:

$$PE = 3040 \times 16\pi = 48640\pi \text{ erg s}^{-1}$$

c)

O enunciado diz-nos que o sistema é, neste caso, percorrido por um líquido viscoso, sendo a velocidade radial no ramo 2, dada por:

$$v(r) = 120 \left( 1 - \frac{r^2}{8} \right)$$

Considerando  $r = 0$  em  $v(r)$ , o raio da camada líquida ( $r$ ) coincide com o eixo (centro) do tubo e por isso não ocorre atrito com as paredes do tubo; obtém-se, portanto, a velocidade máxima no tubo 2,  $(v_{max})_2$ :

$$v(0) = (v_{max})_2 = 120 \text{ cm s}^{-1}$$

Por outro lado, quando  $r = R$ , sendo  $R$  o raio do tubo 2, está-se a considerar uma camada do líquido, infinitamente fina, junto à periferia do tubo, para a qual a velocidade de deslocamento é nula, sendo esta a velocidade mínima no tubo 2,  $(v_{min})_2$ :

$$v(2\sqrt{2}) = (v_{min})_2 = 120 \left( 1 - \frac{(2\sqrt{2})^2}{8} \right) = 0$$

Então, a velocidade média no tubo 2,  $(\bar{v}_2)$ , poderá ser determinada através da semi-soma de  $(v_{max})_2$  e  $(v_{min})_2$ :

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= \frac{(v_{max})_2 + (v_{min})_2}{2} \\ \bar{v}_2 &= \frac{120 + 0}{2} = 60 \text{ cm s}^{-1} \end{aligned}$$

A distância, tendo como origem o eixo do tubo, para a qual a velocidade do líquido é igual à velocidade média,  $(r_{\bar{v}})$ , será o valor de  $r$  quando  $v(r) = 60 \text{ cm s}^{-1}$ :

$$60 = 120 \left( 1 - \frac{r^2}{8} \right)$$

Resolvendo em ordem a  $r$ , tem-se:

$$1 - \frac{60}{120} = \frac{r^2}{8}$$

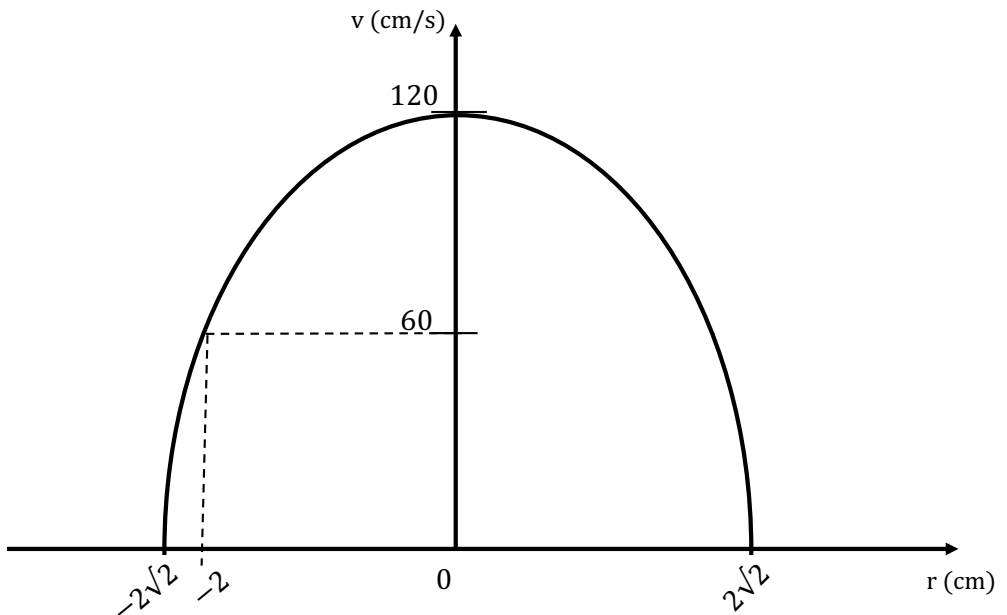
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{r^2}{8}$$

$$\Rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

Ou seja, a velocidade do líquido é igual à velocidade média, ( $r_{\bar{v}}$ ), à distância de 2 cm do centro do tubo.

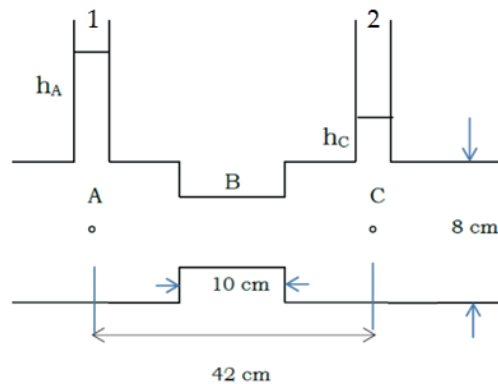
d)

Representação gráfica do perfil de velocidades, na direção  $r$ , do fluido no interior da secção 2



### III

O sistema da figura é percorrido por um líquido de densidade  $1 \text{ g cm}^{-3}$  e viscosidade  $0,2 \text{ poise}$ . O líquido ascende no tubo 2 até uma altura igual a  $h_A - 0,1 \text{ cm}$ . Se no estrangulamento B o perfil da velocidade do líquido for dado pela equação  $v(r) = 125 \left(1 - \frac{r^2}{4}\right)$ , em que  $v(r)$  é a velocidade radial em  $\text{cm s}^{-1}$  e,  $r$  é a coordenada radial em cm.



Calcule:

- O diâmetro do estrangulamento B;
- O caudal mássico que atravessa o sistema;
- A relação entre a velocidade média em B e a velocidade crítica em A (ou em C).

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\eta = 0,2 \text{ poise}$$

$$h_C = h_A - 0,1 \text{ cm}$$

a) Ao considerar  $v(r) = 0$ , na equação abaixo

$$v(r) = 125 \left( 1 - \frac{r^2}{4} \right)$$

$r = R$ , pelo que o valor do raio no estrangulamento B, será:

$$125 \left( 1 - \frac{R_B^2}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{R_B^2}{4} = 0$$

$$R_B = \sqrt{4} = 2 \text{ cm}$$

Então, o diâmetro de B é  $2R_B = 4 \text{ cm}$

b) Aplicando a equação de Poiseuille ao sistema, tem-se:

$$P_A - P_C = \dot{V}(R_{HA} + R_{HC})$$

$$\Leftrightarrow \rho g h_A - \rho g h_C = \dot{V} \left( \frac{8\eta L_A}{\pi R_A^4} + \frac{8\eta L_C}{\pi R_C^4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \rho g (h_A - h_C) = \frac{16\eta(L_A + L_B)}{\pi} \frac{1}{R^4} \dot{V}$$

$$\Leftrightarrow \dot{V} = \frac{\pi R^4 \rho g (h_A - h_C)}{16\eta L}$$

Substituindo pelos valores dados, obtém-se:

$$\Leftrightarrow \dot{V} = \frac{\pi 4^4 \times 1000 \times 0,1}{16 \times 0,2 \times 32}$$

$$\Leftrightarrow \dot{V} = 250\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

Então, o caudal mássico é  $\dot{M} = \rho \dot{V} = 250\pi \text{ g s}^{-1}$

No estrangulamento B, a velocidade máxima é obtida de

$v(r) = 125 \left( 1 - \frac{r^2}{4} \right)$  quando  $r = 0$ , tendo-se:

$$v_{\max B} = 125 \text{ cm s}^{-1}$$

A velocidade média é a que deve ser considerada como a velocidade nesse trecho. Tem-se, portanto:

$$\bar{v}_B = \frac{v_{\max B}}{2} = 62,5 \text{ cm s}^{-1}$$

A velocidade crítica ( $v_c$ ) em A determina-se através do número de Reynolds crítico:

$$N_R = \frac{\rho D v_c}{\eta}$$

Substituindo pelos valores conhecidos, tem-se:

$$2000 = \frac{8 v_c}{0,2}$$

$$v_c = 50 \text{ cm s}^{-1}$$

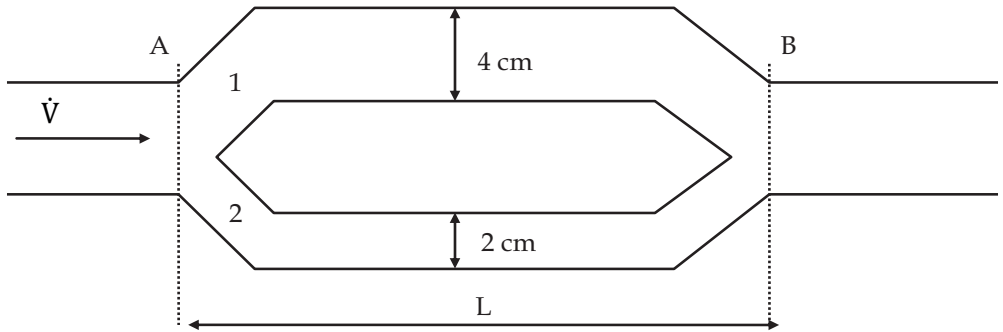
Finalmente, a relação entre as duas velocidades será:

$$\frac{\bar{v}_B}{v_c} = \frac{62,5}{50} = 1,25$$



#### IV

Considere o sistema de vasos representado na figura, no qual circula um fluido líquido de viscosidade diferente de zero e caudal de entrada constante igual a  $340\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ .



- Determine a perda de carga linear  $\frac{\Delta P}{L}$  entre A e B.
- Se no ramo 1 o perfil de velocidades for dado pela equação  $v(r) = \frac{\Delta P}{L\eta} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right)$ , em que  $r$  é a coordenada radial do vaso em cm, determine a velocidade média do fluido no ramo 1.
- Determine a força viscosa que líquido exerce sobre o tubo no troço 1.

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\eta \neq 0$$

$$\dot{V} = 340\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

a) No sistema paralelo, dos ramos 1 e 2, tem-se, aplicando a lei de Poiseuille:

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{V} = \Delta P \left( \frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \dot{V} = \Delta P \left( \frac{1}{\frac{8\eta L_1}{\pi R_1^4}} + \frac{1}{\frac{8\eta L_2}{\pi R_2^4}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \dot{V} = \Delta P \left( \frac{\pi R_1^4}{8\eta L_1} + \frac{\pi R_2^4}{8\eta L_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \dot{V} = \Delta P \left( \frac{\pi R_1^4}{8\eta L} + \frac{\pi R_2^4}{8\eta L} \right)$$

$$\Leftrightarrow \dot{V} = \frac{\Delta P \pi}{8\eta L} (R_1^4 + R_2^4)$$

Substituindo pelos valores dados, fica:

$$\dot{V} = \frac{\Delta P \pi}{8\eta L} (2^4 + 1^4)$$

$$\Leftrightarrow 340\pi = \frac{\Delta P \pi}{8\eta L} 17$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta P}{L} = \frac{340 \times 8\eta}{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta P}{L} = 160\eta \text{ dyn cm}^{-3}$$

b) O perfil de velocidades no ramo 1 é dado por:

$$v(r) = \frac{\Delta P}{L\eta} \left( 1 - \frac{r^2}{4} \right)$$

Substituindo na equação  $\frac{\Delta P}{L}$  por  $160\eta$ , vem:

$$v(r) = 160 \left( 1 - \frac{r^2}{4} \right)$$

Fazendo  $r = 0$ , tem-se a velocidade máxima:

$$v_{max} = v(0) = 160 \text{ cm s}^{-1}$$

A velocidade média é metade da  $v_{max}$ :

$$\bar{v} = \frac{160}{2} = 80 \text{ cm s}^{-1}$$

c) Tendo em conta a lei de Newton da viscosidade

$$\tau = \eta \frac{dv(r)}{dr}$$

O gradiente de velocidade obtém-se fazendo a derivada de  $v(r)$ :

$$\frac{d}{dr} \left( 160 \left( 1 - \frac{r^2}{4} \right) \right) = 80r$$

No entanto, junto à parede do tubo,  $r=R$ , pelo que

$$\tau = 80\eta R$$

Sendo  $\tau$  a tensão tangencial, esta é dada por:

$$\tau = \frac{f}{S_T}$$

Em que  $S_T$  é a área da superfície do tubo. A força viscosa ( $f$ ) é então calculada de acordo com:

$$f = \tau S_T$$

$$\Leftrightarrow f = 80\eta R S_T$$

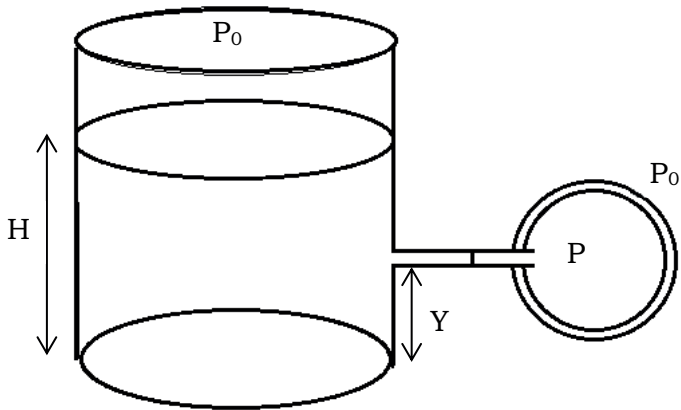
$$\Leftrightarrow f = 80\eta R \times 2\pi R L$$

$$\Leftrightarrow f = 160\eta L \pi R^2 \text{ dyn}$$

## V

Um recipiente cheio de um líquido até à altura  $H$ , tem um orifício situado a uma altura  $Y$  da sua base, ao qual se liga um tubo estreito, como mostra o desenho. Na extremidade desse tubo encontra-se um balão de borracha cheio de ar, com diâmetro de 10,8 cm. Sabe-se, contudo, que se o furo fosse feito na base do recipiente, o equilíbrio do sistema estaria assegurado ao ligar-se um balão de 8 cm de diâmetro.

Admita que o balão cheio de ar tem uma estrutura semelhante à bola de sabão e que a tensão elástica da borracha é 140 N/m. A massa específica do líquido contido no recipiente é igual a 0,7 g  $\text{cm}^{-3}$ .



Determine a altura  $Y$  por forma a que o sistema esteja em equilíbrio, ou seja, que a altura  $H$  não varie.

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

Balão na base do recipiente

$$d_b = 8 \text{ cm}$$

Balão à distancia  $Y$  da base do recipiente

$$d_b = 10,8 \text{ cm}$$

Geral

$$\sigma_{\text{borracha}} = 140 \text{ N/m}$$

$$\rho = 0,7 \text{ g cm}^{-3}$$

$$g = 980 \text{ cm s}^{-2}$$

A altura H pode ser determinada considerando que o furo se encontra na base do recipiente. Assim, tem-se:

$$P = P_0 + \rho_{Liq}gH \Leftrightarrow$$

$$P - P_0 = \rho_{Liq}gH$$

$$P - P_0 = \rho_{Liq}gH = 0,7 \times 980H \text{ dyn cm}^{-2}$$

e, no interior do balão cheio de ar, de diâmetro igual a 8 cm (R=4 cm), tem-se:

$$P = P_0 + \frac{4\sigma_{borracha}}{R}$$

$$\Leftrightarrow P - P_0 = \frac{4 \times 140000}{4} \text{ dyn cm}^{-2}$$

Então, igualando as pressões, tem-se:

$$0,7 \times 980H = 140000 \text{ dyn cm}^{-2}$$

E substituindo pelos valores, obtém-se:

$$H = \frac{140000}{0,7 \times 980} = 204 \text{ cm}$$

Conhecendo o valor de H, já se pode substituir na expressão abaixo, a qual diz respeito à aplicação do teorema de Stevin ao furo que dista Y da base:

$$P = P_0 + \rho_{Liq}g(H - Y) \Leftrightarrow$$

$$P - P_0 = \rho_{Liq}g(204 - Y)$$

Sabendo que à altura  $Y$ , o balão apresenta um diâmetro de 10,8 cm ( $R = 5,4$  cm), tem-se:

$$P = P_0 + \frac{4\sigma_{borracha}}{R} \Leftrightarrow$$
$$P - P_0 = \frac{4\sigma_{borracha}}{5,4} = 0,74\sigma_{borracha} \text{ dyn cm}^{-2}$$

Então, igualando as pressões, tem-se:

$$\rho_{Liq}g(204 - Y) = 103704 \text{ dyn cm}^{-2}$$

E substituindo pelos valores, obtém-se:

$$204 - Y = \frac{103704}{0,7 \times 980} \Leftrightarrow$$
$$Y = 204 - \frac{103704}{0,7 \times 980} \approx 53 \text{ cm}$$

## VI

Um tubo capilar de 1 mm de raio contém uma coluna de mercúrio no seu interior. O extremos da coluna formam uma superfície de curvatura convexa (o mercúrio não molha o vidro).

- a) Determine o valor das pressões  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_0$  na situação do capilar colocado na posição horizontal (Fig. 1),

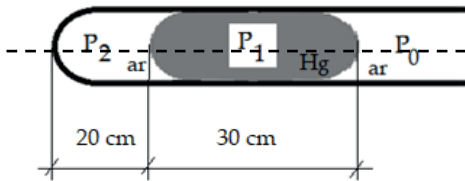


Fig. 1

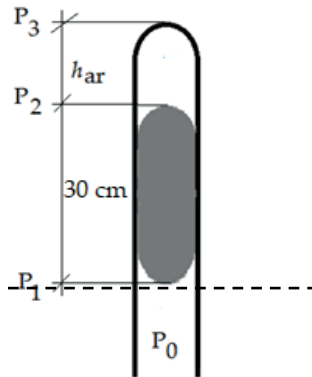


Fig. 2

- b) Se o capilar for colocado na vertical, o embolo apresentase como na Fig. 2. Nesta situação, que valores terão as pressões  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . A altura  $h_{ar}$  será maior, menor ou igual à exibida na posição horizontal? Justifique a resposta.

Considere, na resolução do problema, que a tensão superficial do mercúrio é de  $470 \text{ dyn cm}^{-1}$ , a densidade do



mercúrio é  $13,6 \text{ g cm}^{-3}$ , o ângulo de contacto entre o mercúrio e o vidro é de  $150^\circ$  e a pressão atmosférica ( $P_0$ ) é cerca de  $10^6 \text{ dyn cm}^{-2}$

Resolução:

Dados do problema e conversões de unidades:

$$\sigma_{\text{Hg-ar}} = 470 \text{ dyn cm}^{-1}$$

$$\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\theta_{\text{Hg-vidro}} = 150^\circ$$

$$P_0 = 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}$$

- a) Nesta situação, a coluna não está a suportar qualquer diferença de pressão, isto é,  $P_2 = P_0 = 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}$ , portanto, a curvatura das duas superfícies curvas (menisco), nas interfaces Hg-ar, são iguais. Aplicando a equação de Laplace a cada um dos extremos da coluna de mercúrio, considerando que  $R_1$  e  $R_2$  são, respetivamente, os raios de curvatura esféricos da interface Hg-ar (lado  $P_2$ ) e da interface Hg-ar (lado  $P_0$ ), tem-se:

$$P_1 - P_0 = \frac{2\sigma_{\text{Hg-ar}}}{R_1}$$

e

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma_{\text{Hg-ar}}}{R_2}$$

Como,  $R_1 = R_2 = R$ , basta usar uma das duas equações acima para determinar  $P_1$ , então:

$$P_1 = \frac{2\sigma_{\text{Hg-ar}}}{R} + P_0$$

O tubo capilar tem um raio  $r$ , o qual se relaciona com o raio  $R$  do menisco, através de:

$$R = \frac{r}{\cos \alpha}$$

sendo  $\alpha$  o angulo de contacto entre o mercúrio e o vidro da parede do capilar. Portanto,  $P_1$  vem igual a:

$$P_1 = \frac{2\sigma_{\text{Hg-ar}} \cos \alpha}{r} + P_0$$

Substituindo pelos valores dados, tem-se:

$$P_1 = \frac{2 \times 470 \times \cos 30^\circ}{0,1} + P_0$$

Sendo  $\cos (180^\circ - 150^\circ) = \cos (30^\circ) = 0,866$   
vem,

$$P_1 = \frac{2 \times 470 \times 0,866}{0,1} + 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}$$

E, finalmente:

$$P_1 = 1008140,6 \text{ dyn cm}^{-2}$$

- b) Na posição vertical, podemos aplicar o teorema fundamental da hidrostática à coluna de mercúrio, do seguinte modo:

$$P_1 = \rho_{\text{Hg}} g h_{\text{Hg}} + P_2$$

Sendo o valor de  $P_1$  igual ao determinado anteriormente, e substituindo pelos restantes valores dados, a expressão anterior, fica:

$$1008140,6 = 13,6 \times 980 \times 30 + P_2$$

E, finalmente

$$P_2 = 608300,6 \text{ dyn cm}^{-2}$$

Aplicando agora a equação de Laplace à interface Hg-ar (lado  $P_3$ ), tem-se:

$$P_2 = \frac{2\sigma_{\text{Hg-ar}} \cos \alpha}{r} + P_3$$

Substituindo pelos valores conhecido, obtém-se:

$$P_3 = 608300,6 - \frac{2 \times 470 \times 0,866}{0,1} \text{ dyn cm}^{-2}$$

Ou seja,

$$P_3 = 608300,6 - 8140,4 = 600160 \text{ dyn cm}^{-2}$$

Finalmente, a altura  $h_{\text{ar}}$  pode ser calculada por aplicação da lei dos gases ideais

$$PV = nRT$$

às extremidades fechadas do tubo não ocupadas pela coluna de mercúrio, respetivamente na horizontal e na vertical:

Na horizontal, tem-se:

$$P_2 \times 20 \times \pi r^2 = nRT$$

e, na vertical, vem:

$$P_3 \times h_{ar} \times \pi r^2 = nRT$$

Não havendo alterações de temperatura nem no número de moles de ar, pode-se igualar estas duas expressões:

$$P_2 \times 20 = P_3 \times h_{ar}$$

Substituindo pelos valores conhecidos, tem-se:

$$10^6 \times 20 = 600160 \times h_{ar}$$

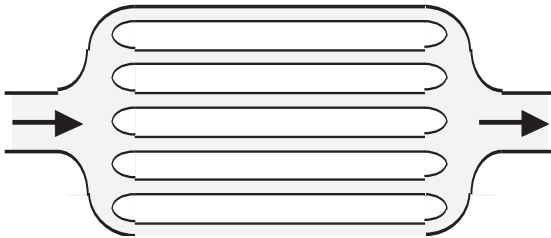
E, finalmente, o valor de  $h_{ar}$  é:

$$h_{ar} = 33,3 \text{ cm}$$

## VII

No sistema de vasos capilares representado na figura circula um fluido com viscosidade de 40 centipoise. O sistema é constituído por 1000 capilares, cada um com 20 cm de comprimento e 50  $\mu\text{m}$  de raio.

Considere  $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g cm}^{-3}$  e a aceleração da gravidade igual a  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ .



Sendo as pressões de entrada e saída nos capilares iguais a 40 e 15 mm Hg, respetivamente, calcule:

- O caudal que atravessa todo o sistema;
- A velocidade média do fluido através dos vasos capilares;

Resolução:

**Dados do problema e conversões de unidades:**

$$\eta = 40 \text{ centipoise} = 40 \times 10^{-2} \text{ poise}$$

$$n = 1000 \text{ capilares}$$

$$L = 20 \text{ cm}$$

$$R = 50 \mu\text{m} = 50 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g cm}^{-3}$$

$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

$$P_E = 40 \text{ mm Hg} = 53312 \text{ dyn cm}^{-2}$$

$$P_S = 15 \text{ mm Hg} = 19992 \text{ dyn cm}^{-2}$$

- a) Para determinar o caudal que atravessa sistema ( $\dot{V}$ ), utilizamos a equação de Poiseuille aplicada a este sistema de vasos em paralelo:

$$\dot{V} = \sum_{n=1}^{1000} \dot{V}_n = \Delta P \frac{1}{R_T}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_T} = \sum_{Hn=1}^{1000} \frac{1}{R_{Hn}} = \frac{1000}{\frac{8\eta L}{\pi R^4}} = 1000 \frac{\pi R^4}{8\eta L}$$

Substituindo pelos valores conhecidos, tem-se:

$$\frac{1}{R_T} = 1000 \frac{\pi(0,005)^4}{8 \times 0,4 \times 20} = 9,8 \times 10^{-9} \pi$$

$$R_T = 32 \times 10^6 \text{ poise cm}^{-3}$$

Então o caudal que atravessa o sistema será:

$$\dot{V} = \frac{153312 - 19992}{32 \times 10^6} = 1,04 \times 10^{-3} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

- b) A velocidade do líquido através dos vasos capilares é determinada através de:

$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{nS}$$

$$\Leftrightarrow \bar{v} = \frac{1,04 \times 10^{-3}}{1000 \times \pi(0,005)^2} = 1,32 \times 10^{-2} \text{ cm s}^{-1}$$

# S O L U Ç Õ E S

## 1.1. Primeira lei de Fick da difusão

1.

a)  $C_s(\Delta x) = 1 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $\frac{dC_s}{dx} = -5 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-4}$

c)  $J_s \left( \frac{\Delta x}{2} \right) = J_s = 1,25 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

d)  $D = 2,5 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

2.

a)  $J_s = -3,2 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ; de II para I

b)  $C_s(\Delta x) = 6,6 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

3.

a)  $C_s(x) = -2 \times 10^{-3}x + 7 \times 10^{-5} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$

b)  $J_s = 1 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

c)  $A = 150 \text{ cm}^2$

4.  $\Delta x = 1 \times 10^{-2} \text{ cm}$

## 1.2. Transporte de solutos por difusão através de membranas

### 1.2.1. Membranas homogéneas

1.

a)  $A = 2,5 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-4}$

b)  $\Delta x = 1,2 \times 10^{-3} \text{ cm} = 12 \text{ }\mu\text{m}$

c)  $P_s = 1,333 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$

d)  $C_s \left( \frac{\Delta x}{2} \right) = 2,5 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$

2.

a)  $C_s^{II} = 1220 \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $D_m = 6,667 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

3.  $J_s(\text{total}) = J_A + J_B = -2 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

4.  $J_A = 0,75 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ;  $J_B = 0,25 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

5.

a)  $I_s = -30 \text{ mol min}^{-1}$ ; de II para I

b)  $D = 0,625 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

6.

a)  $k = 1,5$

b)  $\frac{dC_s}{dx} = 6 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-4}$

c)  $C_s(5,5 \times 10^{-3}) = 8,55 \times 10^{-5} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$

d)  $I_s = -1,2 \times 10^{-5} \text{ mol s}^{-1}$



7.

- a)  $\frac{dC_s}{dx} = 1,333 \times 10^{-1} \text{ mol cm}^{-4}$   
b)  $C_s(x) = 1,333 \times 10^{-1} \cdot x + 8 \times 10^{-4} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$   
c)  $k = 0,8$   
d)  $J_s = -4 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ; de II para I

8.

- a)  $J_s = 7,2 \times 10^{-7} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$   
b)  $D_m = 4,5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$   
c)  $C_s^{II} = 2 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

9.

- a)  $J_s = -4,8 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ,  
b)  $\Delta C_s = C_s^I - C_s^{II} = -4 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$   
c)  $C_s^I = 3 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ ,  $C_s^{II} = 7 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

10.

- a)  $\Delta C_s = C_s^I - C_s^{II} = 1,5 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$ ,  
*a concentração é superior no Compartimento I*  
b)  $\Delta x = 1,5 \times 10^{-2} \text{ cm}$   
c)  $D_m = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

11.

- a)  $C_s(x) = -4 \times 10^{-3}x + 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$   
b)  $\Delta x = 0,12 \text{ cm}$

12.

- a)  $J_A = 4 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ,  $J_B = -3,2 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$   
b)  $C_B^{II} = 4 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$   
c)  $K_A = 0,75$   
d)  $D_{m(B)} = 4 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

13.

- a)  $J_A = -2, (3) \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , de II para I  
 $J_B = 1, (3) \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , de I para II
- b)  $D^A/D^B = 1$

14.

- a)  $K_B = 0,6$
- b)  $D_A = 4 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$
- c)  $C_A \left( \frac{\Delta X}{z} \right) = 3,6 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$

15.

- a)  $k = 1,2$
- b)  $C_B(7 \times 10^{-3}) = 4,08 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

### 1.2.2. Membranas porosas

1. 30%

2.  $J_A + J_B = -5 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

3.  $C_A^II = 0 \text{ mol cm}^{-3}$ ;  $C_B^I = 0 \text{ mol cm}^{-3}$

4.

- a)  $C_s^II = 1 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$
- b)  $I_s = 9 \times 10^{-5} \text{ mol min}^{-1}$

5.

a)  $C_s^{II} = 5,5 \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $D = 3,333 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

c)  $J_s = -0,1 \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

6.

a)  $J_s = -1,2 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ; de II para I

b)  $\Delta C_s = C_s^I - C_s^{II} = -3 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$

c)  $A_{\text{poros}} = 30 \text{ cm}^2$

7.

a)  $C_s^{II} = 1 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $\Delta x = 3 \times 10^{-3} \text{ cm} = 30 \text{ }\mu\text{m}$

c)  $C_s(x) = -1,333 \times 10^{-2} \cdot x + 5 \times 10^{-5} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$

d)  $A_{\text{total}} = 135 \text{ cm}^2$

8.

a)  $J_s = 1,3 \times 10^{-7} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  sendo que o soluto se desloca do compartimento I para II

b)  $C_s(x) = -8,6 \times 10^{-3}x + 7 \times 10^{-5} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$

c)  $D = 2,5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

9.

a)  $C_s^I = 5 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$  e  $C_s^{II} = 4 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $\omega' = 4,8 \times 10^{-2} \text{ cm s}^{-1}$

c)  $I_s = 1,9 \times 10^{-5} \text{ mol s}^{-1}$ , sendo que o soluto se desloca do compartimento I para II

10.  $D_B = 5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

11.

a)  $J_A = 2,7 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

b)  $C_B^{\text{II}} = 6 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$

c)  $C_A^{\text{I}} = 1,2 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$  e  $C_A^{\text{II}} = 4 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$

d)  $D_A = 6 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

e)  $J_{\text{total}} = 3,1 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

12.

a)  $\Delta x = 5 \times 10^{-3} \text{ cm}$

b)  $A = 90 \text{ cm}^2$

13.

a)  $J_A/J_B = -0,6$

b)  $\omega' = 4 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$

14.  $\Delta C_s (M.P.) = 2\Delta C_s (M.H.)$

### 1.2.3. Sistemas de membranas

1.  $I_s(\text{total}) = 1,896 \times 10^{-4} \text{ mol min}^{-1}$

2.  $P_B = 2,289 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$

3.  $J_s(\text{total}) = -4,50625 \times 10^{-7} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ; de II para I

4.

a)  $D_m = 2 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

b)  $C_s^{\text{I}} = 5,25 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-3}$

5.  $D_m = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

6.  $C_s^I = 7 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$  e  $C_s^{II} = 3 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$

7.

a)  $\Delta C_s = -2 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $J_s = -2,136 \times 10^{-7} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

8.  $A = 140 \text{ cm}^2$

9.

a)  $K_A = 0,5$

b)  $C_A^I = 6 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

c)  $D_B = 7,2 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

10.

a)  $\Delta x = 8 \times 10^{-3} \text{ cm}$

b)  $K = 1,2$

c)  $\phi = 0,4$

d)  $J_B = -1,44 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , de II para I

### 1.3. Transporte de solutos por arrastamento

1.

a)  $C_s^I = 2,6 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$ ;  $C_s^{II} = 1,6 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $J_s(\text{total}) = 1,13 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

2.  $J_s(\text{total}) = 8 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

3.

a)  $k = 0,8$

b)  $J_s(\text{arrastamento}) = 1,024 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

c)  $J_s(\text{total}) = 2,24 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

d)  $J_w = 5 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

4.

a)  $C_s\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 4,2 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $A_m = 100 \text{ cm}^2$

c)  $J_w = 3,3 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

5.

a)  $P_s = 5,25 \times 10^{-2} \text{ cm s}^{-1}$

b)  $I_s(\text{difusão}) = 2,1 \times 10^{-6} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

c)  $I_v = -9,375 \times 10^{-2} \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

6.

a)  $C_s(x) = 2,5 \times 10^{-2}x + 2 \times 10^{-4} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$

b)  $C_s\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 3,5 \times 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3}$

c)  $I_v = 1,071 \times 10^{-2} \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

7.

a)  $\Delta x = 8 \times 10^{-3} \text{ cm}$

b)  $I_s(\text{total}) = -6,345 \times 10^{-4} \text{ mol s}^{-1}$  , de II para I

8.  $A_{\text{poros}} = 40 \text{ cm}^2$

#### 1.4. Correntes de solvente devidas a diferenças de pressão

1.  $P^I = 14376,38 \text{ mmHg}$

2.  $C_A^I = 4,563 \times 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$

3.  $\Delta P = P^I - P^{II} = -99587625,6 \text{ dyn cm}^{-2}$

4.

a)  $I_w = -2,9664 \times 10^{-2} \text{ mol min}^{-1}$

b)  $I_s = 0 \text{ mol min}^{-1}$

5.  $J_s(\text{total}) = -2,60 \times 10^{-8} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

6.  $J_s(\text{total}) = -5,701 \times 10^{-7} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

7.

a)  $C_s(x) = 1,67 \times 10^{-3}x + 5 \times 10^{-5} \text{ (mol cm}^{-3}\text{)}$

b)  $J_s(\text{arrastamento}) = 2,722 \times 10^{-7} \text{ mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

c)  $A_{\text{poros}} = 48 \text{ cm}^2$

8.  $T = 304,15 \text{ K}$

9.

a)  $A_{\text{poros}} = 250 \text{ cm}^2$

b)  $\Delta P = P^I - P^{II} = -3,43 \times 10^5 \text{ dyn cm}^{-2}$

## 1.5. Membrana de Donnan

1.

a)  $Z_p = 2$

b)  $\Delta\pi = \pi^I - \pi^{II} = -6,8208 \times 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}$

2.

a)  $[K^+]^{II} = 3,5 \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $\Delta P = P^I - P^{II} = 6,44169 \times 10^{11} \text{ dyn cm}^{-2}$ ; no compartimento I

3.

a)  $\left| [Cl^-]_{\text{inicio}}^I - [Cl^-]_{\text{equilibrio}}^I \right| = 3 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $C_{nd} = 2,3 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$

c)  $\Delta\pi = \pi^I - \pi^{II} = 5,928 \times 10^8 \text{ dyn cm}^{-2}$

4.

a)  $T = 22^\circ C$

b)  $\left| [Cl^-]_{\text{inicio}}^{II} - [Cl^-]_{\text{equilibrio}}^{II} \right| = 2,88 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$

c)  $[Na^+]_{\text{inicio}}^{II} = 8 \times 10^{-3} \text{ mol cm}^{-3}$

d)  $[P^{Z_p-}]^I = 1,8 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$

e)  $Z_p = 1$

5.

a)  $[Ca^{2+}]_{\text{inicio}}^{II} = 1 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $[Cl^-]_{\text{inicio}}^I - [Cl^-]_{\text{equilibrio}}^I = 1,6 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$

c)  $C_{nd} = 1,44 \times 10^{-1} \text{ mol cm}^{-3}$

d)  $[P^{Z_p-}] = 3,2 \times 10^{-2} \text{ mol cm}^{-3}$

e)  $Z_p = 10$



6.

a)  $[P^{Z_p^-}] = 0,24 \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $[Mg^{2+}]^{II} = 0,045 \text{ mol cm}^{-3}$

c)  $[I^-]^{II} = 0,09 \text{ mol cm}^{-3}$

d)  $C_{nd} = 0,27 \text{ mol cm}^{-3}$

7.

a)  $Z_p = 7$

b)  $[P^{Z_p^-}] = 18 \text{ mol cm}^{-3}$

8.

a)  $C_{nd} = 2,9 \times 10^{-1} \text{ mol cm}^{-3}$

b)  $\Delta\pi = \pi^I - \pi^{II} = 2,122 \times 10^{10} \text{ dyn cm}^{-2}$

### 2.2.3. Lei de Bernoulli

1.  $\dot{V} = 72\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} = 226 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$

2.

a)  $\frac{E_p(1) - E_p(2)}{m} = 144 \text{ erg/g}$

b)  $\frac{E_p(2)}{m} = 56,6 \text{ erg/g}$

3.

a)  $P_1 = 5200 \text{ dyn/cm}^2$

b)  $S_2 = 6,67 \text{ cm}^2$

c)  $P_2 = 3850 \text{ dyn/cm}^2$

4.  $h = 7,653 \times 10^{-3} \text{ cm}$

5.  $P_A - P_B = 28 \times 10^{-3} \text{ dyn cm}^{-2}$

6.  $\bar{v}_A = 1,69 \text{ cm s}^{-1}$

7.

a)  $\bar{v}_{Aorta} = 26,5 \text{ cm s}^{-1}$

b)  $n_{capilares} = 5,024 \times 10^9$

8.  $\frac{E_{PP(A)}}{m} - \frac{E_{PP(B)}}{m} = -4872 \text{ erg/g}$

9.  $\bar{v}_2 = \bar{v}_3 = \bar{v}_4 = 100 \text{ cm s}^{-1}; P = 7,143 \times 10^4 \text{ dyn cm}^{-2}$

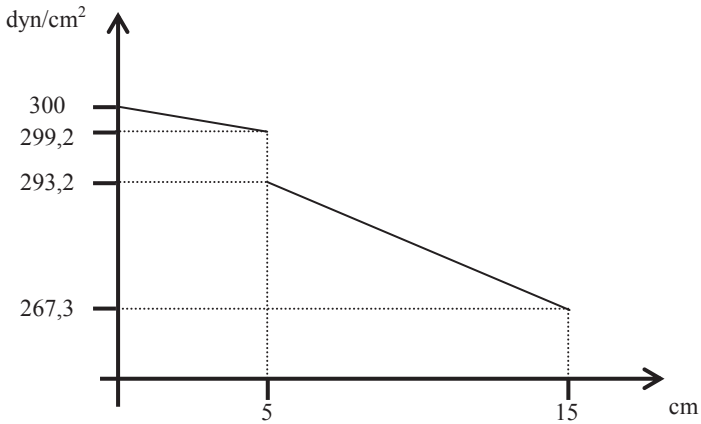
10.  $\frac{E_c(A)}{m} / \frac{E_c(B)}{m} = 10^4$

#### 2.2.4. Fluidos reais e fórmula de Poiseuille

1.  $\Delta P = 19,9 \text{ dyn cm}^{-2}$

2.  $v_{\max} = 11,025 \text{ cm/s}$

3.



4.  $R_{eq} = 5,82 \times 10^{11}$  poise/cm<sup>3</sup>

5.  $\frac{\Delta P_{com\ placa}}{\Delta P_{sem\ placa}} = 4,64$

6.  $\frac{\Delta P}{L} = 0,32$  dyn cm<sup>-3</sup>

7.  $\bar{v}_1 = 40$  cm s<sup>-1</sup> e  $\bar{v}_2 = 10$  cm s<sup>-1</sup>

### 2.3. Tensão superficial

1.  $\frac{\Delta P_{5\ \acute{e}mbolos}}{\Delta P_{capilar}} = 36,12$

2.  $W = 600\pi$  erg  $\approx 1885$  erg

$$3. (E_{s_1} + E_{s_2}) - E_{s_3} = 5253 \text{ erg}$$

4.

a)  $\Delta P = 100 \text{ dyn/cm}^2$

b)  $r = 1 \text{ cm}$

5.  $P = 79,21 \times 10^{-3} \text{ atm}$

6.  $\sigma = 39,2 \text{ dyn/cm}$

7.  $h = 11,869 \text{ cm}$

8.  $r_{1/2} = 1,5 \text{ cm}$  e  $r_{2/3} = 6 \text{ cm}$

9.  $P_{int} = 1,01 \times 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}$

10.  $P_{int} = \frac{4\sigma}{R} + P_0$

11.  $0,722 \text{ cm} < h < 0,737 \text{ cm}$

12.  $T_{superior} = 1,81 \times 10^5 \text{ dyn cm}^{-1}$  e  $T_{inferior} = 2,33 \times 10^5 \text{ dyn cm}^{-1}$

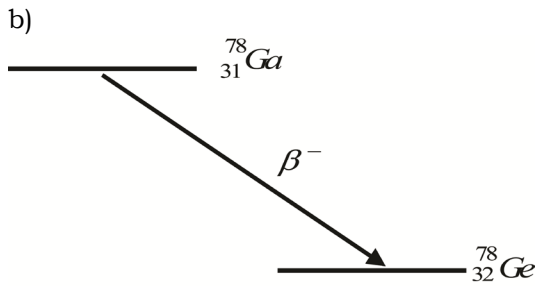
13.  $\Delta P = P^I - P^{II} = 2000 \text{ dyn cm}^{-2}$

14.  $h_2 = 5,6 \text{ cm}$

### 3.1. Tipos de transformações radioactivas

1.

a)  $A = 78; Z = 34$



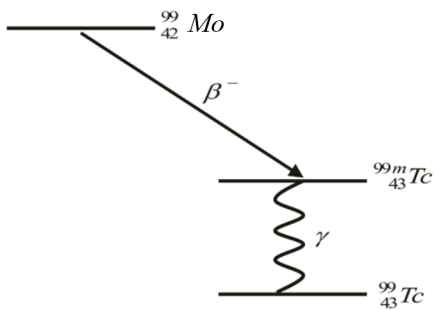
2.

a)  $A = 99; Z = 42$

b) 56 neutrões

c)  $^{99}_{43}\text{Tc}$  ; radiação  $\gamma$

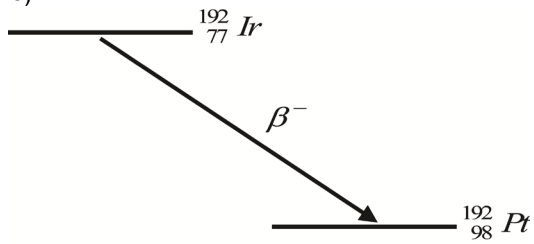
d)



3.

a)  $A = 192$ ;  $Z = 78$

b)

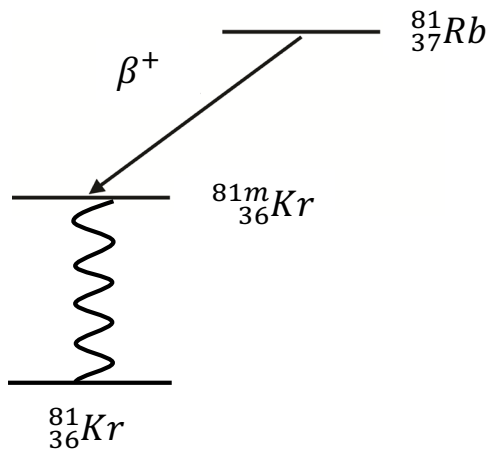


4.

a)  $A = 81$

b)  $Z = 36$

c)

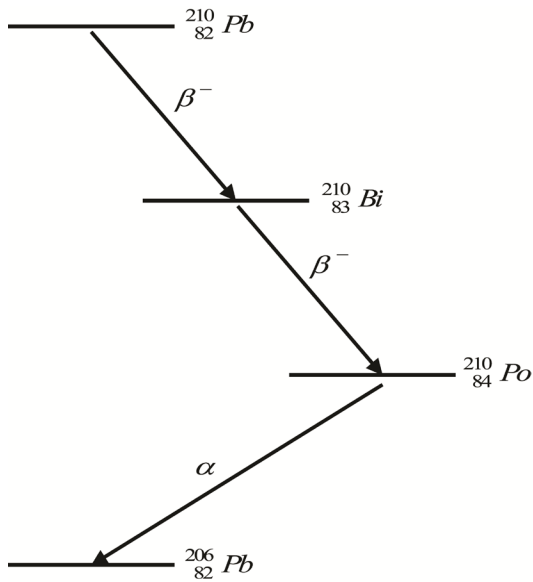


5.

a)  $\beta^-$

b)  $A = 206$ ;  $Z = 82$

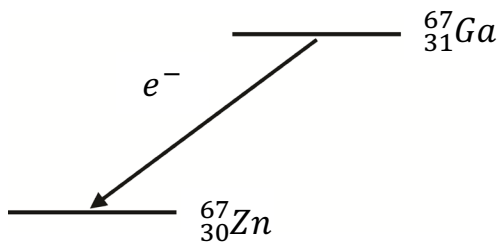
c)



6.

a)  $A=67, Z=30$

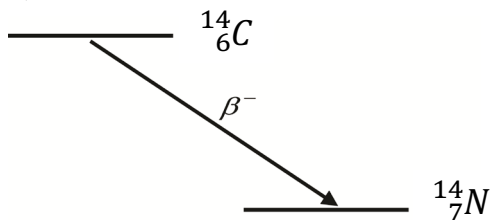
b)



7.

a) O carbono-14 tem 6 prótons e 8 nêutrons. O nuclídeo filho tem 7 prótons e 7 nêutrons.

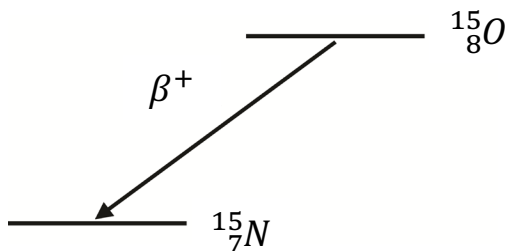
b)



8.

a)  $A = 15, Z = 7$

b)

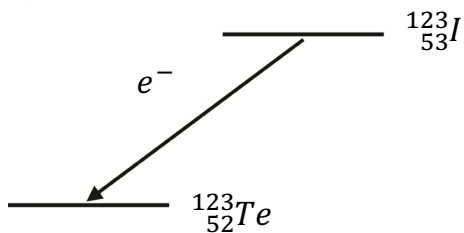


c) Captura electrónica ou emissão  $\beta^+$ .

9.

a)  $A = 123, Z = 52$

b)



### 3.2. Lei do decaimento radioactivo

1.

a)  $T = 9,7 \text{ min}$

b) 200 doentes

c) Não.  $A(90) = 1,61 \text{ mCi}$

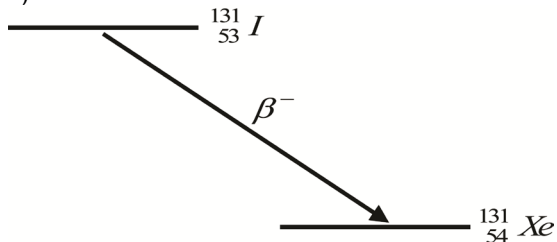


2.

a) 89,67 mCi

b) Dia 14 de Março de 2009, pelas 1h03

c)

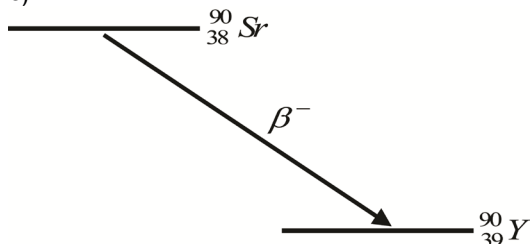


3.

a) 87 anos

b)  $\beta^-$

c)



4.

a) 132,57 MBq

b)  $V = 1,047 \text{ ml}$

c) É emitido um neutrino por decaimento.

5.  $V = 0,082 \text{ ml}$

6.

a)  $\tau = 21,68 \text{ h}$

b)  $A_0 = 11,48 \text{ mCi}$

c)  $1,143 \times 10^{13}$  átomos radioactivos

7.

a)  $A_0(^{22}\text{Na}) = 2,13 \times 10^{12} \text{ Bq} = 62,5 \text{ Ci}$

$$A_0(^{24}\text{Na}) = 3,505 \times 10^{15} \text{ Bq} = 9,47 \times 10^4 \text{ Ci}$$

b)  $A_0(15h) = 4,74 \times 10^4 \text{ Ci}$

c)  $m = 7,2 \mu\text{g}$

### 3.3. Doses em órgãos devidas a decaimento radioativo

1.

a)  $4,678 \times 10^{11}$  desintegrações

b)  $7,65 \times 10^{-2} \text{ J}$

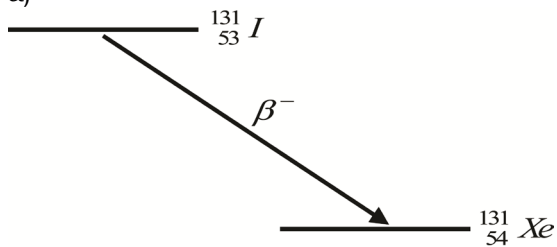
2.

a)  $1,183 \times 10^{10}$  desintegrações

b)  $1,93 \times 10^{-3} \text{ J}$

3.

a)



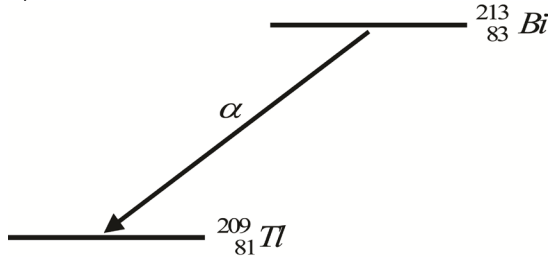
b)  $T = 8,02$  dias

c)  $2,197 \times 10^{15}$  desintegrações

d)  $14201,4 \text{ Gy}$

4.

a)  $Z = 81$ ;  $A = 209$



b)  $1,218 \times 10^{17} \text{ keV} = 19,49 \text{ J}$

5.

a)  $t_{1/2} = 3,8 \text{ dias}$

b)  $A(3 \text{ dias}) = 28,9 \text{ mCi}$

c)  $\bar{E} = 34,9 \text{ KeV}$

6.

a) 100 neutrões e 69 protões

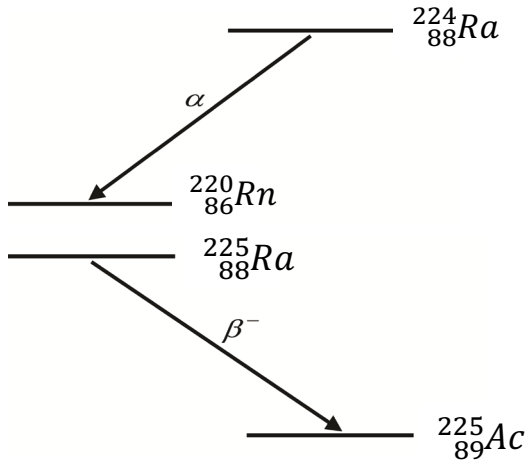
b)  $\frac{A(15 \text{ dias})}{V} = 1,22 \times 10^8 \text{ Bq cm}^{-3}$

c)  $V = 0,33 \text{ cm}^3$

d) Energia total entre 15 dias e  $+\infty$   $E_{total} = 7,42 \times 10^{-1} \text{ J}$

7.

a)



b)  $2,06 \times 10^{15}$  desintegrações

c)  $t = 3,49$  dias

d) Energia total entre 0 dias e  $+\infty$   $E_{total} = 3,1 \times 10^3 \text{ J}$

e) 109,548 dias

8.

a) 39 prótons e 50 neutrões

b)  $\lambda = 1,37 \times 10^{-2} \text{ dia}^{-1}$

c)  $A = 8,72 \text{ mCi}$

d)  $D = 1,895 \times 10^3 \text{ Gy}$

### 3.4. Modelos de agressão celular

#### 3.4.1. Modelo de um só alvo e um só toque

1.

a)  $S = 0,0357$

b)  $D = 2,079 \text{ Gy}$

2.  $P = 0,699$

3.  $S = 82,3\%$

#### 3.4.2. Modelo de vários alvos e um só toque

1.

a)  $S = 0,899$

b)  $D = 8,178 \text{ Gy}$

c)  $S = 0,129$

2.  $h = 4$

3.  $\lim_{D \rightarrow 0} S_h = 1 - \lim_{D \rightarrow 0} \left(1 - e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^h = 1$

Calculando o declive da recta tangente à curva de sobrevivência, pela derivada, para qualquer dose vem:

$$\frac{dS_h}{dD} = -\frac{h}{D_0} e^{-\frac{D}{D_0}} \left(1 - e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^{h-1}$$

Quando a dose absorvida é pequena e D tende para 0, então:

$$\lim_{D \rightarrow 0} \frac{dS_h}{dD} = 0$$

O que significa que não há variação da sobrevivência nas vizinhanças de D=0

4.  $s_h = 1 - \left(1 - e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^h$  por aplicação da expansão do binómio de Newton vem  $s_h = 1 - \sum_{i=0}^h C_i^h \left(-e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^{h-i} \times 1^i =$

$$1 - \left[ C_0^h \left(-e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^h + \dots + C_{h-1}^h \left(-e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^1 + C_h^h \left(-e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^0 \right]$$

Considerando valores de dose, D, elevados, então o termo  $e^{-\frac{D}{D_0}}$  é infinitesimal, pelo que infinitesimais elevados a potências superiores a 1 tornam-se muito pequenos quando comparados com os dois últimos termos da expansão, sendo desprezáveis. Assim vem:

$$\begin{aligned} s_h &= 1 - \left[ C_{h-1}^h \left(-e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^1 + C_h^h \left(-e^{-\frac{D}{D_0}}\right)^0 \right] \\ &= 1 - \left[ \frac{h!}{(h-1)!1!} \left(-e^{-\frac{D}{D_0}}\right) + \frac{h!}{h!0!} \right] \\ &= h e^{-\frac{D}{D_0}} \end{aligned}$$

### 3.4.3. Modelo misto

1.  $S = 0,7788$

2.  $D_h = 8 \text{ Gy}$

3.

$$s = e^{-\frac{D}{D_1}} \left[ 1 - \left( 1 - e^{-\frac{D}{D_h}} \right)^n \right]$$

Tal como o modelo de vários alvos e um só toque, para  $D=0$  então  $S=1$ . No entanto, quando calculamos o declive da recta tangente à curva de sobrevivência para qualquer dose,  $D$ , pela derivada do produto, vem:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dD} = & -\frac{1}{D_1} e^{-\frac{D}{D_1}} \left[ 1 - \left( 1 - e^{-\frac{D}{D_h}} \right)^n \right] \\ & - \frac{h}{D_h} e^{-\frac{D}{D_h}} \left( 1 - e^{-\frac{D}{D_h}} \right)^{n-1} e^{-\frac{D}{D_1}} \end{aligned}$$

Quando a dose absorvida é pequena e  $D$  tende para 0, então:

$$\begin{aligned} \lim_{D \rightarrow 0} \frac{dS}{dD} &= -\frac{1}{D_1} e^{-\frac{0}{D_1}} \left[ 1 - \left( 1 - e^{-\frac{0}{D_h}} \right)^n \right] - \frac{h}{D_h} e^{-\frac{0}{D_h}} \left( 1 - e^{-\frac{0}{D_h}} \right)^{n-1} e^{-\frac{0}{D_1}} \\ &= -\frac{1}{D_1} e^0 [1 - (1 - e^0)^n] - \frac{h}{D_h} e^0 (1 - e^0)^{n-1} e^0 \\ &= -\frac{1}{D_1} \end{aligned}$$

O que significa que, mesmo para doses pequenas, há variações da sobrevivência com a dose e o efeito biológico não é nulo.





# A N E X O I

Tabela 1 – Constantes fundamentais (unidades c.g.s):

Constante	Símbolo	Valor
Constante dos gases	R	$8,314 \times 10^7 \text{ erg K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Avogadro	$N_A$	$6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Aceleração gravítica	G	$980 \text{ cm s}^{-2}$
Massa específica da água	$\rho_{\text{H}_2\text{O}}$	$1 \text{ g cm}^{-3}$
Massa específica do mercúrio	$\rho_{\text{Hg}}$	$13,56 \text{ g cm}^{-3}$
Viscosidade da água	$\eta_{\text{H}_2\text{O}}$	0,01 poise
Tensão superficial da água	$\sigma_{\text{H}_2\text{O}}$	$72 \text{ dyn cm}^{-1}$ (a 25°C)

Tabela 2 – Factores de conversão

Unidade	Conversão
Tempo	1 min = 60 s
	1 h = 3600 s
Comprimento	1 m = 10 <sup>2</sup> cm
	1 dm = 10 cm
	1 mm = 10 <sup>-1</sup> cm
	1 μm = 10 <sup>-4</sup> cm
Área	1 m <sup>2</sup> = 10 <sup>4</sup> cm <sup>2</sup>
	1 dm <sup>2</sup> = 10 <sup>2</sup> cm <sup>2</sup>
	1 mm <sup>2</sup> = 10 <sup>-2</sup> cm <sup>2</sup>
Volume	1 m <sup>3</sup> = 10 <sup>6</sup> cm <sup>3</sup>
	1 dm <sup>3</sup> = 10 <sup>3</sup> cm <sup>3</sup> = 1 ℓ
	1 mm <sup>3</sup> = 10 <sup>-3</sup> cm <sup>3</sup>
Concentração	1 M = 1 mol dm <sup>-3</sup> = 10 <sup>-3</sup> mol cm <sup>-3</sup>
Velocidade	1 m s <sup>-1</sup> = 10 <sup>2</sup> cm s <sup>-1</sup>
Aceleração	1 m s <sup>-2</sup> = 10 <sup>2</sup> cm s <sup>-2</sup>
Massa	1 kg = 10 <sup>3</sup> g
Força	1 N = 10 <sup>5</sup> dyn
Energia	1 J = 10 <sup>7</sup> erg
Pressão	1 N m <sup>-2</sup> = 1 Pa = 10 dyn cm <sup>-2</sup>
Temperatura	K = 273,15 + °C





**J. J. Pedroso de Lima.** Professor Catedrático jubilado da Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra. Foi Director do Instituto de Biofísica/Biomatemática da Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra, Presidente do Conselho Directivo do IBILI, Fac. de Medicina e Responsável pelo Projecto PET, Univ. de Coimbra. Os seus interesses científicos incidem sobre a Biofísica, os estudos funcionais com radionuclédeos e as imagens médicas. Tem cerca de trezentos artigos científicos em publicações nacionais e internacionais. É autor de diversos livros destacando-se: *Biofísica Médica*, IUC, 2003 e 2005; *Técnicas de diagnóstico com raios X Aspectos físicos e Biofísicos*, IUC, 2005 e 2009; *Ouvido, ondas e vibrações. Aspectos físicos e biofísicos*, IUC/ESTESC, 2012; *Nuclear Medicine Physics*, Editor/co-autor, Taylor & Francis/ IUC) (Series in Med Phys and Biomed. Eng.), 2010; *Biomatemática. Uma introdução para o curso de Medicina*, IUC, co-autor, 2004 e 2007.

**Maria Filomena Botelho.** Licenciou-se em Medicina pela Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra em 1981 e apresentou, em 1992, a Tese de Doutoramento em Medicina (Ciências Fisiológicas – Biofísica), na Universidade de Coimbra. Docente na Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra desde 1988 é, atualmente, Professora Catedrática de Biofísica e Diretora do Instituto de Biofísica/Biomatemática da mesma Faculdade. O seu percurso profissional é também marcada por um forte interesse na área da investigação científica, nomeadamente, Biofísica, desenvolvimento de modelos animais para doenças humanas (cancro, isquémia cardíaca), oncologia nuclear (da biologia molecular à imagem molecular), terapia fotodinâmica em modelos *in vitro* e *in vivo* e radiofarmácia. É autora ou co-autora de 150 artigos científicos publicados em revistas nacionais e internacionais e mais de 800 trabalhos científicos apresentados em reuniões científicas nacionais e internacionais. É membro de 11 Sociedades Científicas nacionais e internacionais.



SÉRIE ENSINO  
IMPrensa DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
COIMBRA UNIVERSITY PRESS  
2019

