LIÇÕES DE MATEMÁTICA

TERESA PEDROSO DE LIMA

JORGE MARQUES

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS

A edição deste manual insere-se num projeto, ensaiado no âmbito da unidade curricular de Matemática II da Licenciatura em Gestão da FEUC, com o propósito de incentivar a participação nas aulas e realçar a importância do estudo individual e tutorial. O texto foi organizado com três objetivos: (i) ser elemento de consulta durante as sessões presenciais (aulas); (ii) estimular a componente de trabalho autónomo do aluno, tanto no estudo pré-aula como pós-aula; e ainda, (iii) ser um documento autocontido, pressupondo embora a frequência da unidade curricular de Matemática I, que abordasse três tópicos (séries numéricas e representação de funções em séries de potências, funções reais de duas variáveis reais e complementos de equações diferenciais ordinárias) aparentemente disjuntos.
Finalmente, é conveniente referir que, no sentido de incluir alguns conceitos, porventura esquecidos ou pouco amadurecidos, sem sobrecarregar o texto principal foram criados quatro apêndices, designadamente, versando sobre: o conjunto dos números reais e algumas propriedades elementares, sucessões de números reais, algumas noções de topologia em $\mathbb{R}^2$ e exponencial complexa.

E N S I N O

I
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS
U

Edição

Imprensa da Universidade de Coimbra
Email: imprensa@uc.pt
URL: http//www.uc.pt/imprensa_uc
Vendas online: http://livrariadaimprensa.uc.pt

Coordenação editorial

Imprensa da Universidade de Coimbra

Conceção gráfica

António Barros

Infografia da Capa

Carlos Costa

Execução gráfica

Simões & Linhares, Lda

ISBN

978-989-26-1317-8

ISBN Digital

978-989-26-1318-5

DOI

https://doi.org/10.14195/978-989-26-1318-5

Depósito legal

422013/17

LIÇÕES DE MATEMÁTICA

TERESA PEDROSO DE LIMA

JORGE MARQUES

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS

(Página deixada propositadamente em branco.)

ÍNDICE

PREFÁCIO

A Matemática é uma disciplina cada vez mais importante no século XXI, seja qual for a área de trabalho, da Física à Economia, passando pela Biologia, pelas Ciências Sociais ou pelas Finanças, e é igualmente importante mesmo para o cidadão comum (basta pensar nas confusões dos métodos eleitorais usados desde o nível local ao nível internacional, ou das ofertas de empréstimos com condições complexas).

Neste volume os Doutores Teresa Pedroso de Lima e Jorge Marques apresentam de uma forma clara e concisa alguns dos principais métodos de utilidade inquestionável para a Economia e as Finanças (e muitas outras áreas). Primeiro, como simplificar o trabalho com as funções transcendentes, reduzindo-as a somas (embora infinitas) de polinómios. Segundo, como determinar máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais. Terceiro, como resolver algumas equações diferenciais lineares que constituem modelos muito comuns no estudo das populações, da capitalização contínua de juros ou do crescimento económico.

Os modelos matemáticos da Economia e Finanças têm estado nos últimos anos na arena pública, sendo que uns acusam os Matemáticos de elaborarem modelos demasiado simplistas e incapazes de modelarem adequadamente a realidade económica, enquanto outros acusam os Economistas de não saberem lidar com os modelos por incapacidade técnica de perceberem em que situações eles podem produzir conclusões realmente confiáveis.

A realidade é que cada vez mais é preciso investir no conhecimento, tanto abstrato como aplicado, pois, não só as condições do chamado mundo real mudam constantemente, como os problemas que se pretendem resolver são cada vez mais complexos, até porque existem ferramentas informáticas sofisticadíssimas que “alargam”, mas não substituem, o alcance dos métodos teóricos disponíveis.

Uma formação matemática de base é essencial para termos Economistas e Gestores de qualidade, capazes de dialogarem com os técnicos especialistas de cada área e de ao mesmo tempo tomarem decisões informadas sobre os problemas novos que lhes são apresentados.

Este volume de Matemática II apresenta-se como uma excelente ferramenta de trabalho para os estudantes que se iniciam no estudo das séries numéricas e de potências, no estudo das funções de duas variáveis e no estudo das equações diferenciais lineares. O texto apresenta os conceitos base com numerosos exemplos significativos, e propõe uma quantidade generosa de exercícios para os estudantes aferiram se conseguiram ficar a dominar os métodos propostos.

Nunca é demais chamar a atenção dos estudantes para a importância do estudo cuidado de um manual como este; se tiver tempo deve ler o texto antes de ir para a aula, deve ler novamente depois da aula e deve retomar a leitura sempre que tiver alguma dúvida sobre um conceito, o enunciado de um teorema ou a aplicação de um método de resolução. O livro constitui um elemento de referência sólido que deve ser usado e “abusado” sempre que surja a mais pequena dúvida.

Resta-me desejar o maior sucesso a todos os estudantes que trabalharem com este livro.

Coimbra, janeiro de 2017

Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva

Departamento de Matemática

Universidade de Coimbra

NOTAS INICIAIS

Em abril de 2014, a equipa responsável pela disciplina de Matemática II, perante a ausência dos estudantes nas aulas teóricas e consequente falta de empenho e aproveitamento, desenhou uma proposta de reestruturação do funcionamento da unidade curricular com o propósito de incentivar a participação nas aulas e, sobretudo, realçar a importância do estudo individual e tutorial (enquanto ato de pensar, argumentar e conhecer).

Este projeto implicava a edição de um texto com dois objetivos:

(i) ser elemento de consulta durante as sessões presenciais (aulas);

(ii) estimular a componente de trabalho autónomo do aluno, tanto no estudo pré-aula como pós-aula.

Mais concretamente, o desafio consistia em elaborar um documento autocontido, pressupondo embora a frequência da unidade curricular de Matemática I[i], que abordasse três tópicos (séries numéricas e representação de funções em séries de potências, funções reais de duas variáveis reais e complementos de equações diferenciais ordinárias) aparentemente disjuntos.

Assim, a criação deste manual pretende ser uma resposta ao propósito acima enunciado.

Finalmente, é conveniente referir que, no sentido de incluir alguns conceitos, porventura esquecidos ou pouco amadurecidos, sem sobrecarregar o texto principal foram criados quatro apêndices, designadamente, versando sobre: o conjunto dos números reais e propriedades elementares, sucessões de números reais, noções de topologia em $\mathbb{R}^2$ e exponencial complexa.

[i] O Programa de Matemática I inclui os seguintes temas: funções reais de variável real, equações diferenciais de primeira ordem, cálculo integral e matrizes e determinantes e sistemas de equações lineares

(Página deixada propositadamente em branco.)

CAPÍTULO I
SÉRIES NUMÉRICAS E REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS

Neste capítulo vamos estudar séries numéricas e séries de potências, o que nos vai permitir atribuir um significado matemático a uma soma com um número infinito de parcelas. Quando nos referimos a séries numéricas estamos a considerar somas (infinitas) de números reais enquanto designamos por séries de potências as somas (infinitas) de monómios numa variável real.

Importa realçar que, neste contexto, é fundamental recorrer à nossa capacidade de abstração e imaginar uma infinidade de parcelas, equacionar a existência ou não da sua soma, analisar critérios para decidir se a referida soma infinita existe, etc. De outro modo, vai ser necessário desenvolver ideias sobre os conceitos de série, de sucessão de somas parciais, de soma de uma série e, ainda, definir o que entendemos por série convergente e série divergente.

I.1 – Séries numéricas

Como exemplos de séries numéricas destacamos as séries geométricas e as séries de Dirichlet. Veremos, mais adiante, que o conhecimento da natureza (convergência ou divergência) destas séries nos permite determinar a natureza de outras séries utilizando os chamados critérios de comparação.

De entre as séries numéricas estudamos as que possuem termos não negativos pois, neste caso, dispomos de diversos critérios para analisar a sua convergência. Referimo-nos, nomeadamente, à condição necessária de convergência, ao critério do integral, aos dois critérios de comparação, ao critério de Cauchy e ao critério d' Alembert.

Salientamos que para as séries em que quaisquer dois termos consecutivos tenham sinais contrários, designadas por séries alternadas, consideramos dois tipos de convergência (convergência absoluta e convergência simples) e que o critério de Leibniz fornece uma condição suficiente para a convergência destas séries.

Todavia, antes de nos debruçarmos sobre estas questões e abordarmos o estudo das séries (definição, propriedades e algumas aplicações) iniciamos este capítulo com algumas noções intuitivas que serão formalizadas nas secções seguintes.

I.1.1 - Noção intuitiva de série numérica e série convergente. Alguns paradoxos. Representação decimal de um número racional. Leitura e comentário de um texto sobre o número π.

As séries constituem um instrumento matemático deveras interessante. Repare-se que com uma série podemos expressar números reais, como por exemplo alguns números racionais (correspondentes a dízimas infinitas periódicas), o número pi e o número de Neper.

Além disso, podemos representar funções reais de variável real em séries de potências, tais como as funções trigonométricas (seno ou cosseno), hiperbólicas, exponencial, entre outras. Aliás, de um modo geral, as séries de potências dão origem a funções desconhecidas o que para alguns (entre os quais se destacam os matemáticos) é uma motivação aliciante. Contudo, este sentimento está longe de ser consensual. Designadamente, a maioria dos alunos mostra aversão por este tópico, não lhe reconhecendo qualquer utilidade ou interesse. Esperamos ilustrar o contrário nas páginas que se seguem.

Tomamos como ponto de partida três questões.

Como se pode calcular uma “soma infinita”?

Qual o significado de “soma infinita”?

Que interesse pode ter uma “soma infinita”?

Assim, sabendo calcular somas com um número finito de parcelas, vamos analisar somas com um número infinito de parcelas, designadas por séries.

Exemplos I.1.

Consideremos três somas com um número infinito de parcelas (a que chamaremos séries numéricas ou séries de números reais)

(i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2$

Começamos então por calcular somas parciais da série ou seja somamos parcela a parcela.

n	S_n=soma dos n primeiros termos da série
1	$S_1=1$
2	$S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$
3	$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=1{,}75$
4	$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}=1{,}875$
5	$S_5=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}=1{,}9375$
6	$S_6=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{16}+\frac{1}{32}=\frac{63}{32}=1{,}96875$
...	...

Observamos que as somas parciais vão aumentando à medida que adicionamos mais uma parcela. Tendo por base os cálculos realizados, podemos conjeturar que as somas parciais se vão aproximando de 2 à medida que n aumenta. Assim sendo, dizemos que a primeira série

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\cdots+\tfrac{1}{2^{n-1}}+\cdots, \text{ para } n\in\mathbb{N}$$

converge para 2 e escrevemos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2.$$ [ii]

(ii) $1+1+1+1+\cdots=?$

As somas parciais desta série vão aumentando uma unidade à medida que adicionamos mais uma parcela. É evidente que as somas parciais não se vão aproximar de um número real à medida que n aumenta.

Deste modo, afirmamos que a série

$$1+1+1+1+\cdots$$

é divergente.

(iii) $1-1+1-1+1-\cdots=?$

Observamos que as somas parciais ou valem 1 ou 0. Como essas somas oscilam entre dois valores, não é possível descortinar uma tendência para a soma à medida que o número de parcelas aumenta. Assim, como neste caso as somas parciais não se aproximam de um número real à medida que n aumenta, concluímos que a série

$$1-1+1-1+1-\cdots$$

também é divergente.

[ii] Note que podemos indicar esta soma, de forma mais abreviada, recorrendo à noção de somatório que utiliza a letra maiúscula grega Σ (sigma).

No início, o estudo da série (iii) gerou bastante controvérsia. Com efeito, se adotarmos diferentes estratégias para calcular as somas dos termos da série podem surgir situações ambíguas.

Note-se que, se por um lado,

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0,$$

por outro

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots=1,$$

Ou seja, $0=1$!!! O que não tem sentido!

O que se passa afinal? Existe uma propriedade importante que não devemos esquecer:

"Se reagruparmos os termos de uma série podemos obter uma nova série e uma nova soma."

Designamos a situação anterior de paradoxal, isto é, ficamos perante um paradoxo.

Outro caso paradoxal é o seguinte

Seja $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$.

Então

$$2S=2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\cdots\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2S=2-1-\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2S=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\cdots\Leftrightarrow 2S=S.$$

Logo $1=2$!! Não pode ser! Onde falhámos?

Quando reagrupámos os termos da série $2S$.

Sabemos que: “Todo o número racional corresponde a uma dízima finita ou a uma dízima infinita periódica”. Vejamos que as dízimas infinitas periódicas se podem expressar por intermédio de séries.

Exemplos I.2. [Dízimas infinitas periódicas]

a) Aceitamos com naturalidade que se escreva $\frac{1}{3} = 0{,}33333333\ldots = 0,(3)$. Todavia, ao concordar com a igualdade anterior, estamos a assumir que o número racional $\frac{1}{3}$ é o resultado da adição de um número infinito de parcelas, uma vez que

$$\frac{1}{3} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \cdots.$$

Neste contexto, dizemos que a série numérica[iii]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{1000} + \cdots$$

converge para $\frac{1}{3}$.

b) Seja $1{,}11111111\ldots = 1,(1)$. Temos uma dízima infinita periódica de período 1.

Note-se que se assumirmos que $x = 1,(1)$ então $10x = 11,(1)$ e, consequentemente,

$$10x - x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{9}.$$

Ou seja, podemos garantir que $\frac{10}{9} = 1,(1)$ e afirmar que

$$\frac{10}{9} = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \cdots.$$

[iii] De um modo geral, no que se segue, designaremos esta série por série geométrica de primeiro termo $\frac{3}{10}$ e razão $\frac{1}{10}$.

Logo dizemos que a série[iv]

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\cdots$$

converge para o número racional $\frac{10}{9}$ e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{10}{9}.$$

c) No caso da dízima infinita periódica

$$7{,}7777777\ldots=7,(7)$$

podemos usar a alínea anterior e concluir que

$$7{,}7777777\ldots=7\times 1{,}111111\ldots=7\times\frac{10}{9}=\frac{70}{9}$$

e, ainda, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}7\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{70}{9}.$$

d) E quando deparamos com a dízima infinita periódica $1{,}0101010101\ldots=1,(01)$?

O que devemos fazer?

Começamos por fixar $x=1,(01)$. Deste modo, verificamos que $100x-x=100$, e, assim, $x=\frac{100}{99}$.

Consequentemente

$$1,(01)=1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000000}+\cdots=\frac{100}{99},$$

e dizemos que a série[v] converge para $\frac{100}{99}$ e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}=\frac{100}{99}.$$

[iv] Note-se que se trata de uma série geométrica de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{10}$.

[v] Note-se que se trata de uma série geométrica de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{100}$.

Existem muitos outros casos de dízimas. Por exemplo

$$\frac{1}{7} = 0{,}14285714285714\ldots$$

é, também, uma dízima infinita periódica, uma vez que $\frac{1}{7} = 0,(142857)$.

Embora não seja tão simples como as anteriores, prova-se que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{70}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{9}{70} + \frac{9}{700} + \frac{9}{7000} + \cdots = \frac{1}{7}.$$

Todavia, sabemos que grande parte dos números (os chamados irracionais) que conhecemos não pode ser representada por uma fração. Um bom exemplo disso é o número pi,

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \cdots = 3{,}14159\ldots$$

Observação I.3. [Sobre o número π]

O número irracional π é transcendente, isto é, π é um número não algébrico, ou seja, π *não* é raiz de nenhuma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Os primeiros exemplos de números transcendentes foram dados por Joseph Liouville (1809-1882) em 1844. O número e também é transcendente – resultado obtido por Charles Hermite (1822-1901) em 1873. Foi, no entanto, Ferdinand Lindemann (1852-1939) que, em 1882, provou que π é um número transcendente, donde se deduziu, como consequência, a impossibilidade da quadratura do círculo[vi].

[vi] Problema da quadratura do círculo: É possível construir um quadrado que tenha a mesma área de um círculo?

O seguinte texto, extraído (e adaptado) do livro "Contacto" de Carl Sagan (1934-1996), publicado em 1985, é extremamente elucidativo na forma como apresenta o número pi.

«*No 7º ano andavam a estudar o "pi". Era uma letra grega que lembrava a arquitetura de Stonehenge, em Inglaterra: duas colunas verticais com uma trave em cima –* π. *Medindo a circunferência de um círculo e dividindo-a depois pelo diâmetro do círculo, obtinha-se o valor de pi. Em casa, Ellie pegou na tampa de um boião de maionese, passou-lhe um cordel à volta, endireitou o cordel e com uma régua mediu a circunferência do círculo. Fez o mesmo ao diâmetro e dividiu um número pelo outro. Obteve* $3{,}21$. *Parecia simples.*

No dia seguinte, o professor, Mr. Weisbrod, disse que π *era cerca de* $\frac{22}{7}$, *aproximadamente* $3{,}1416$. *Mas, na realidade, se se queria ser exato, era um número decimal que se prolongava indefinidamente sem repetir o padrão dos números. Indefinidamente, pensou Ellie. Levantou a mão. O ano escolar começara havia pouco e ela não fizera nenhumas perguntas naquela aula.*

— Como pode alguém saber que os números decimais se prolongam indefinidamente?

— Porque é assim — respondeu o professor, com alguma rispidez.

— Mas porquê? Como sabe? Como se podem contar decimais indefinidamente?

— Miss Arroway — o professor começava a consultar a caderneta da turma —, essa pergunta é estúpida. Está a desperdiçar o tempo da aula.

Nunca ninguém chamara estúpida a Ellie, …. …

Depois das aulas foi de bicicleta à biblioteca de um colégio próximo, a fim de consultar livros de matemática. Tanto quanto conseguiu depreender do que leu, a sua pergunta não tivera nada de estúpida. Segundo a Bíblia, os antigos Hebreus tinham aparentemente pensado que π *era exatamente igual a* 3. *Os Gregos e os Romanos, que sabiam montes de coisas a respeito de matemática, não tinham a mínima ideia de que os dígitos de* π *se prolongavam* *indefinidamente sem se repetir. Tratava-se de um facto que só fora descoberto havia cerca de 250 anos. Como queriam que ela soubesse se não podia fazer perguntas? Mas Mr.Weisbrod tivera razão acerca dos primeiros dígitos. Pi não era* $3{,}21$*. Talvez a tampa do boião da maionese estivesse um bocadinho amachucada ou não fosse um círculo perfeito. Ou talvez ela tivesse sido descuidada ao medir o cordel. No entanto mesmo que tivesse sido muito mais cuidadosa, não podiam esperar que conseguisse determinar um número infinito de casas decimais.*

Havia, porém, uma alternativa. Era possível calcular pi tão exatamente quanto se quisesse. Se estudasse uma disciplina chamada Cálculo, poderia experimentar fórmulas para π *que lhe possibilitariam calculá-lo com tantas casas decimais quanto o tempo que lhe permitisse. O livro enunciava fórmulas para pi dividido por 4. Embora não conseguisse compreender algumas delas, havia outras que a fascinavam:* $\frac{\pi}{4}$*, dizia o livro, era o mesmo que*

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

com as frações a continuar indefinidamente. Sem perda de tempo, tentou pôr a fórmula em prática, adicionando e subtraindo frações alternadamente. O resultado saltava de maior do que $\frac{\pi}{4}$ *para menor do que* $\frac{\pi}{4}$*, mas ao fim de algum tempo podia ver-se que esta série de números seguia em linha reta para a resposta certa. Nunca lá se podia chegar exatamente, mas era possível alguém aproximar-se tanto quanto quisesse, desde que fosse muito paciente. Pareceu-lhe um milagre que a fórmula de todos os círculos do mundo estivesse relacionada com aquela série de frações. Como podiam os círculos saber alguma coisa de frações? Decidiu aprender Cálculo …*».

Foi só a partir do século XX que, com a ajuda dos computadores, se começou a descobrir um número significativo de casas decimais para π.

Hoje em dia é possível determinar com doze triliões de casas decimais.[vii]

Exercícios I.4

1. Use o símbolo de somatório, Σ, para representar cada uma das seguintes somas:

   (i) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\cdots$. Resposta: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

   (ii) $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdots$. Resposta: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$;

   (iii) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\frac{6}{64}+\cdots$. Resposta: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$;

   (iv) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{5}{32}+\frac{3}{32}-\cdots$. Resposta: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$.

2. Diga, justificando, se cada um dos números racionais seguintes corresponde a uma dízima finita ou infinita periódica, e expresse por meio de uma série as dízimas infinitas periódicas:

   (i) $x=\frac{1}{4}$. Resposta: É uma dízima finita;

   (ii) $x=\frac{1}{11}$. Resposta: É uma dízima infinita periódica;
   $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{10^{2n}}=\frac{1}{11}$;

   (iii) $x=\frac{1}{15}$. Resposta: É uma dízima infinita periódica;
   $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{10^{n+1}}=\frac{1}{15}$.

3. Expresse as dízimas infinitas periódicas seguintes por meio de séries:

   (i) $0,(01)$. Resposta: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{10^{2n}}$;

   (ii) $0{,}0(09)$. Resposta: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{10^{2n+1}}$;

   (iii) $0,(621)$. Resposta: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{621}{10^{3n}}$.

[vii] Recorde, registado em dezembro de 2013, por Shigeru Kondo e Alexander Yee.

4. Determine o número racional, cuja representação decimal é dada por cada uma das séries seguintes:
   (i) $0,(18)$. Resposta: $x = \frac{2}{11}$;
   (ii) $0{,}0(18)$. Resposta: $x = \frac{1}{55}$;
   (iii) $0{,}2(18)$. Resposta: $x = \frac{12}{55}$.

5. Indique, justificando devidamente, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
   (i) $0{,}99999\ldots = 1$;
   (ii) $0{,}2499999\ldots = 0{,}25$.

I.1.2 – Definição de série numérica, sucessão das somas parciais ou sucessão associada a uma série, série convergente e série divergente. Séries geométricas e série harmónica. Condição necessária de convergência e algumas operações com séries convergentes.

Nesta secção formalizamos os conceitos abordados anteriormente.

Definição I.5.

Dada uma sucessão de números reais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chamamos série de números reais à soma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toma o nome de termo geral da série.

Observamos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é a soma de uma infinidade numerável de parcelas, dado que é a soma de todos os termos da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Para calcular a referida soma procedemos como se tivéssemos um número finito de parcelas, ou seja, adicionamos u_1 com u_2, depois ao resultado adicionamos u_3, e assim sucessivamente.

Deste modo formamos a sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida como se segue

$S_1 = u_1,$

$S_2 = u_1 + u_2 = S_1 + u_2,$

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3, \ldots$

cujo termo geral é definido por

$S_1 = u_1$ e $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$, para $n \geq 2$.

A esta sucessão – que pode ser definida por recorrência, visto que $S_1 = u_1$ e $S_n = S_{n-1} + u_n$ – damos o nome de sucessão das somas parciais ou sucessão associada à série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

No que se segue, assumimos que analisar a natureza de uma série consiste em descobrir se a série é convergente ou divergente.

Deste modo, verificamos que esse estudo depende da convergência de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Distinguimos dois casos: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente.

Definição I.6.

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente se a sua sucessão associada, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é convergente para $S \in \mathbb{R}$ e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Ao número S damos o nome de soma da série.

Caso contrário, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.[viii]

Exemplos I.7.

a) A soma $0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} 0$ é designada por série nula.
Neste caso temos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para zero, uma vez que $S_n = 0$, e, consequentemente, $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0$.
Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ é convergente e tem soma $S = 0$.

b) A soma $a + a + a + a + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a$, sendo $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, é designada por série constante.

[viii] No entanto no caso em que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty\ (-\infty)$ alguns autores afirmam que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge para $+\infty\ (-\infty)$ e escrevem $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$=$+\infty\ (-\infty)$.

Verificamos que $S_n = na$, logo a sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 0 \\ -\infty, & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Deste modo, podemos afirmar que $\sum_{n=1}^{+\infty} a$ é divergente, pelo que não tem soma.

c) A soma $a - a + a - a + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a$, sendo $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é uma série alternada.

Observamos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem duas subsucessões associadas definidas por

$$S_{2n} = 0 \text{ e } S_{2n-1} = a.$$

Como, por hipótese, $a \neq 0$, não existe $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ e, assim, dizemos que a série dada, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a$, é divergente, ou seja, não tem soma.

Notemos que as séries (ii) e (iii) do Exemplo I.1 são casos particulares das séries das alíneas b) e c) com $a = 1$.

Analisemos outro exemplo recordando que uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão r é uma sucessão em que, fixado o primeiro termo, cada termo se obtém do anterior multiplicando-o pela razão.

Deste modo, a soma dos seus n primeiros termos é dada por

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Note-se ainda que, para $r \neq 1$, se tem

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

e, também,

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Deste modo, subtraindo, membro a membro, as duas igualdades anteriores, obtemos

$$S_n - rS_n = a - ar^n \Leftrightarrow (1-r)S_n = a(1-r^n) \Leftrightarrow S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Com base neste conceito apresentamos a definição de série geométrica.

Definição I.8.

Seja $a, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Chamamos série geométrica, de primeiro termo a e razão r, a toda a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cujo termo geral se pode escrever na forma $u_n = ar^{n-1}$.[ix]

Analisemos, de seguida, a sua natureza.

Proposição I.9.

Seja $a, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ é convergente se e só se $|r| < 1$.

Além disso,

(i) Se $|r| < 1$ então $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$.
Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ tem soma $S = \frac{a}{1-r}$;

(ii) Se $r \geq 1$ e $a > 0$ então $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.
Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ é divergente;

(iii) Se $r \geq 1$ e $a < 0$ então $\lim_{n \to +\infty} S_n = -\infty$.
Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ é divergente;

(iv) Se $r \leq -1$ então não existe $\lim_{n \to +\infty} S_n$.
Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ é divergente.

[ix] Sendo $p \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, podemos escrever a série $\sum_{n=p}^{+\infty} ar^{n-p}$ na forma $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$. Trata-se de uma série geométrica de primeiro termo a e razão r.

Demonstração:

Consideremos o termo geral da sucessão associada à série geométrica

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

(a) Se $r = 1$ então $S_n = a + a + a + \cdots + a = na$.

Deste modo

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} +\infty, \text{se } a > 0 \\ -\infty, \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

(b) Se $r \neq 1$, então $S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$.[x] Assim:

(b-i) quando $|r| < 1$ obtemos $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$ e, consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Assim a série geométrica é convergente e tem soma $S = \frac{a}{1-r}$.

(b-ii) quando $r > 1$ obtemos $\lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty$.

Neste caso, uma vez que $1 - r < 0$, concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} +\infty, \text{se } a > 0 \\ -\infty, \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Deste modo, dado que a sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente, concluímos que a série geométrica também é divergente.

(b-iii) Se $r \leq -1$ então $\lim_{n\to+\infty} r^n$ não existe. Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ é divergente.

[x] Trata-se da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

Exemplos I.10.

a) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica de primeiro termo $a=-\frac{4}{5}$ e razão $r=-\frac{4}{5}$. Dado que $|r|=\frac{4}{5}<1$, concluímos que a série é convergente, sendo a sua soma

$S=\frac{-\frac{4}{5}}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}=-\frac{4}{9}$.

b) Seja $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)^{n+1}$. Podemos reescrever a série como

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)^{n-1}.$$

Assim trata-se de uma série geométrica de primeiro termo $a=\frac{8}{5\sqrt{3}}$ e razão $r=\frac{8}{5\sqrt{3}}$,.

É convergente visto que $|r|=\frac{8}{5\sqrt{3}}<1$.

Neste caso temos $S=\frac{\frac{8}{5\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)}=\frac{8}{11}\left(5\sqrt{3}+8\right)$.

c) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}3\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{15\sqrt{2}}{7}\right)\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica de razão $r=\frac{5\sqrt{2}}{7}>1$, logo é divergente.

Analisamos, ainda, a série harmónica que é definida por

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

Começamos por calcular as somas parciais indicadas na tabela:

n	S_n
1	$S_1 = 1$
2	$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
3	$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} = 1{,}8(3)$
4	$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 2{,}08(3)$
5	$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60} = 2{,}28(3)$
6	$S_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{137}{60} + \frac{1}{6} = \frac{147}{60} = 2{,}45$
...	...

Observamos que as somas parciais vão aumentando à medida que adicionamos mais uma parcela. Porém, nada nos garante que, à medida que n aumenta, as as somas parciais se aproximam de um número real positivo.
Surge então a questão: Será que a série harmónica é convergente?

Com o objectivo de analisar a natureza desta série, de seguida, consideramos a subsucessão (S_{2^n}) de (S_n), constituída pelos termos de ordem $2^1,\ 2^2, 2^3, \ldots$.
Por indução matemática, provamos que $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, para $n = 1$ temos $S_2 = \frac{3}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$. Além disso, para todo $k \in \mathbb{N}$, observamos que:

(i) $S_{2^{k+1}} = S_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$;

(ii) $S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, por hipótese de indução;

(iii) $\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$.

Assim obtemos

$$S_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2},$$

ou seja, provámos assim a tese de indução.

A desigualdade anterior permite-nos afirmar que (S_{2^n}) é um infinitamente grande positivo, logo (S_n) também é um infinitamente grande positivo. Assim a sucessão das somas parciais, (S_n) , não converge para um real positivo e portanto concluímos que a série harmónica é divergente.

Contrariamente aos exemplos anteriores, de um modo geral, não é possível determinar o valor da soma de uma série convergente, embora, em alguns casos, se consiga encontrar um valor aproximado da referida soma a partir de um termo, de ordem suficientemente elevada, da sua sucessão associada.

Assim, no âmbito do nosso curso, o estudo de séries numéricas consistirá, essencialmente, no desenvolvimento de condições que nos permitam estabelecer se uma série é convergente ou não – isto é, determinar a sua natureza.

Além disso, atendendo às Definições I.5 e I.6, constatamos que a natureza de uma série (isto é, a sua convergência ou divergência) não depende dos seus primeiros dez, vinte ou mil termos. Ou seja se $p > 1$ é um número natural então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ são da mesma natureza.

Existe, contudo, uma propriedade bastante importante das séries relacionada com a convergência da sucessão dos seus termos.

Teorema I.11. [Condição necessária de convergência]

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente então $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Demonstração:

Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão associada à série dada, então $u_1 = S_1$ e $u_n = S_n - S_{n-1}$, $n > 1$.

Além disso, uma vez que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Como consequência deste resultado podemos obter uma regra bastante útil na prática.

Corolário I.12.

Se a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um número diferente de zero ou diverge então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Exemplos I.13.

a) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3n+1}$ é divergente uma vez que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0$;

b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(1 - cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ é divergente dado que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1-cos\, y}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

c) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos n$ é divergente pois não existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n$.

É muito importante salientar que o Teorema I.11. apresenta uma condição necessária para a convergência de uma série e que esta condição não é suficiente. Ou seja, não basta que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja um infinitésimo para garantir a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Por exemplo, a série harmónica, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, é divergente, mas a série geométrica de primeiro termo $a=1$ e razão $r=\frac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$, é convergente, embora $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

Vamos, agora, analisar a natureza do resultado de algumas operações com séries numéricas convergentes, nomeadamente, a adição e a multiplicação por um número real.

Teorema I.14. [Propriedade linear]

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são duas séries convergentes e λ é um número real então as séries

$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n-v_n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda u_n$são convergentes.

Além disso, temos:

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(u_n \pm v_n)$;

(ii) $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda u_n$.

Demonstração:

Seja $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$ e $T_n=\sum_{k=1}^{n} v_k$.

Ora se, por hipótese, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ são duas séries convergentes então $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também são convergentes, o que nos permite escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S = \lim_n S_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = T = \lim_n T_n.$$

Consequentemente, as sucessões $(S_n \pm T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\lambda S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes e, ainda,

$$\lim_n (S_n \pm T_n) = S \pm T \text{ e } \lim_n (\lambda S_n) = \lambda S.$$

Deste modo, obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n \pm v_n) = S \pm T \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda S.$$

Exemplo I.15.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$ é uma série convergente uma vez que é a soma de duas séries convergentes:

(i) a série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, de primeiro termo $a = 2$ e razão $r = \frac{1}{3}$, tem soma $S = \frac{2}{1-\frac{1}{3}}$=3;

(ii) a série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, de primeiro termo $a = -\frac{1}{3}$ e razão $r = -\frac{1}{3}$, tem soma $S = \frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{1}{4}$;

Deste modo, obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}.$$

Note-se que se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + v_n)$ é divergente. A demonstração deste resultado decorre da aplicação do método de redução ao absurdo. Basta utilizar

$\sum_{n=1}^{+\infty}[(u_n + v_n) - u_n] = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ e o Teorema I.14. para obter uma contradição.

Exercícios I.16.

1. Consideremos a série (i) do Exemplo I.1:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

(i) Determine o termo geral, S_n, da sucessão das somas parciais. Resposta: $S_n = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$;

(ii) Calcule $\lim_n S_n$. Resposta: 2;

(iii) Classifique a série quanto à natureza (convergência ou divergência) e calcule, se possível, a sua soma. Resposta: A série é convergente e a soma da série é igual a 2.

2. Seja $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x < 1$ e $x = \frac{p}{q}$ onde $mdc(p,q) = 1$. Se a sua representação decimal é dada por

$$x = 0, c_1c_1c_1 \ldots = \frac{c_1}{10}+\frac{c_1}{100}+\frac{c_1}{1000}+\cdots$$

onde c_1 é um algarismo não nulo então mostre que a série é convergente.

3. Usando o exercício anterior averigue se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(i) $0{,}99999 \ldots = 1$;

(ii) $0{,}2499999 \ldots = 0{,}25$;

4. Considere a série

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots.$$

(a) Justifique que se trata de uma série geométrica.

(b) Determine o termo geral, S_n, da sucessão das somas parciais. Resposta: $S_n = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$;

(c) Classifique a série quanto à natureza (convergência ou divergência) e calcule, se possível, a soma da série. Resposta: A série é convergente e a sua soma é igual a 1,5.

5. Justifique que as seguintes séries são geométricas e calcule, sempre que possível, a respetiva soma:
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$. Resposta: convergente, $S = 3$;
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3}(-2)^{n-1}$. Resposta: divergente.
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2t^{n-1}$, onde $|t| < 1$. Resposta: convergente, $S = \frac{2}{1-t}$.
   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^{n-2}}\right)$. Resposta: convergente, $S = 7$.
   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{2^{3n-2}} + \frac{3}{2^{3n}}\right)$. Resposta: convergente, $S = \frac{23}{7}$.

6. Determine a natureza de cada uma das séries seguintes e, sempre que possível, calcule a sua soma:
   (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Resposta: convergente, $S = 4$;
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^{-n}}{3}$. Resposta: convergente, $S = \frac{1}{27}$;
   (c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}}$. Resposta: convergente, $S = -\frac{1}{20}$;
   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}}$. Resposta: divergente;
   (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n+1}$. Resposta: convergente, $S = \frac{e^3}{e^2-1}$;
   (f) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-2)^{3-n}}{3^{2n-4}}$. Resposta: convergente, $S = \frac{2}{19}$.

7. Utilizando o corolário da condição necessária de convergência, verifique que as séries são divergentes:
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{9n^2-4}$. Resposta: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{9}$;
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}}$. Resposta: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
   (c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln(n)}$. Resposta: Não existe $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$;

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3}$. Resposta: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Resposta: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$;

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$. Resposta: $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-2}$;

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$. Resposta: Uma vez que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$ concluímos que $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$ não existe.[xi]

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}+1}{4(2^{n-1})}$. Resposta: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n-1}+1}{4(2^{n-1})} = \frac{1}{4} \neq 0$.

8. Usando operações com séries, mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{3}{2^n}\right)$ é convergente e calcule a sua soma. Resposta $S = 7$.

9. Investigue a natureza de cada uma das séries seguintes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$. Resposta: convergente.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{5^n}$. Resposta: convergente.

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{3}{\pi}\right)^n + \frac{n^2}{n(n+1)}\right]$. Resposta: divergente.

10. Suponha que a sucessão associada à série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é definida por $S_n = \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calcule $\lim_{n} u_n$. Resposta: 0.

(b) Determine o termo geral da série, u_n. Resposta: $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

[xi] No que se segue escreveremos $\lim_{n} u_n$, ou apenas $\lim u_n$, para indicar $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

I.1.3 – Séries numéricas de termos de sinal constante. Critérios para o estudo da convergência de séries numéricas de termos não negativos: critério do integral, critérios de comparação, critério de Cauchy e critério d'Alembert. Séries de Dirichlet.

Consideremos a série de termos não negativos[xii], diferente da série nula[xiii],

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ com } u_n \geq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tal como vimos anteriormente, a sua sucessão associada $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por recorrência através de

$$S_1 = u_1 \text{ e } S_{n+1} = S_n + u_{n+1}.$$

Uma vez que $u_{n+1} \geq 0$, temos $S_{n+1} - S_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que garante que

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

Então esta sucessão ou é convergente para um número real positivo ou é um infinitamente grande positivo. Assim, podemos afirmar que:

Proposição I.17.

Seja $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente se só se a sua sucessão associada, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é limitada superiormente.

Exemplo I.18.

Vejamos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente.

Trata-se de uma série de termos positivos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots.$$

[xii] Ou, em particular, séries de termos positivos.

[xiii] No que se segue, e se nada for dito em contrário, quando nos referimos a uma série de termos não negativos estamos a excluir a série nula.

Tendo em conta que, $2^{k-1} \leq k!$, para todo $k \in \mathbb{N}$, [xiv] obtemos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Deste modo a sucessão associada à série satisfaz $1 \leq S_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, de primeiro termo $a = 1$ e razão $r = \frac{1}{2}$, é igual a $2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Como $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente.

Dedicamos, agora, a nossa atenção ao estudo de critérios que nos permitem analisar a convergência de séries numéricas de termos não negativos.

Comecemos por explorar uma relação interessante entre integrais impróprios e séries que nos vai ser útil na prática.

Vamos verificar que dada uma série de termos não negativos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n,$$

se for possível definir uma função f, real de variável real, positiva, contínua e decrescente no intervalo $[1, +\infty[$ tal que

$$f(n) = u_n,$$

então podemos determinar a natureza da série anterior, recorrendo ao próximo resultado.

Teorema I.19. [Critério do integral]

Seja f uma função positiva, contínua e decrescente no intervalo $[1, +\infty[$.

Então o integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ são da mesma natureza, isto é, ou são ambos convergentes ou são ambos divergentes.

[xiv] Esta desigualdade prova-se por indução matemática (ver Exemplo A.II.19 no Apêndice II).

Demonstração:

Como, por hipótese, f é contínua no intervalo $[1,+\infty[$, podemos assegurar que f é integrável em $[1,+\infty[$ ou em qualquer subintervalo contido em $[1,+\infty[$, nomeadamente em subintervalos do tipo $[k,k+1]$ para $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, também por hipótese, sabemos que f é decrescente em $[1,+\infty[$ o que nos permite afirmar que

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

para $x \in [k,k+1]$.

Logo, por um lado,

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k)\int_k^{k+1} 1\,dx = f(k),$$

e, por outro lado

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx = f(k+1)\int_k^{k+1} 1\,dx = f(k+1).$$

Assim, temos

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k).$$

Tomando $k = 1,\dots,n$ obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

dado que

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots +$$
$$+ \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

Uma vez que, por hipótese, f é positiva em $[1,+\infty[$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ tem termos positivos.

E o termo geral da sua sucessão associada é dado por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots f(n).$$

Da desigualdade anterior, $\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$, resulta

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n.$$

Notamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Supondo que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge para $L \in \mathbb{R}$ temos

$$S_{n+1} \leq L + f(1)$$

ou seja, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, por conseguinte a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ é convergente.

Caso contrário, suponhamos que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Utilizando a desigualdade $S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\, dx$ verificamos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente, o que implica que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ também é divergente.

Assim, concluímos que:

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ é convergente se e só se $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ é convergente;

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ é divergente se e só se $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ é divergente.

Exemplos I.20.

a) O integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ é divergente.

A função, de domínio $[1, +\infty[$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$:

(i) É positiva, isto é, $f(x) > 0$, para $x \in [1, +\infty[$;

(ii) É contínua;

(iii) É estritamente decrescente dado que $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, para $x \in [1, +\infty[$.

Pelo critério do integral, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ são da mesma natureza.

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente então esse integral também é divergente.

b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$ é convergente.

Seja f a função, de domínio $[1, +\infty[$, definida por $f(x) = xe^{-x^2}$.

Então

(i) f é positiva, isto é, $f(x) > 0$, para $x \in [1, +\infty[$;

(ii) f é contínua pois é o produto de duas funções contínuas;

(iii) f é estritamente decrescente dado que

$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} < 0$, para $x \in [1, +\infty[$.

O valor do integral impróprio é dado por

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b xe^{-x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_1^b,$$

ou seja, $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \left(e^{-b^2} - e^{-1}\right) = \frac{1}{2e}$.

Assim, este integral é convergente e pelo critério do integral concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$ é convergente.

Definição I.21.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Chamamos série de Dirichlet a toda a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cujo termo geral é dado por $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Em particular, a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$.

Analisemos, de seguida, a natureza destas séries.

Proposição I.22. [Séries de Dirichlet]

Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Podemos afirmar que:

(i) Se $\alpha > 1$ então a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é convergente;

(ii) Se $0 < \alpha \leq 1$ então a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é divergente.

Demonstração:

Definimos, para cada $\alpha \in \mathbb{R}^+$, uma função f_α de domínio $[1, +\infty[$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

É evidente que f_α é contínua e positiva. Além disso, f_α é estritamente decrescente pois

$$f_\alpha{}'(x) = (x^{-\alpha})' = -ax^{-\alpha-1} = -\frac{a}{x^{\alpha+1}} < 0,$$

para todo $x \in [1, +\infty[$.

Verificámos que, nestas condições, pelo critério do integral, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ e o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ são da mesma natureza.

Se $\alpha \neq 1$ então

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} (b^{-\alpha+1} - 1).$$

No primeiro caso, quando $\alpha > 1$, obtemos que $\lim_{b\to+\infty} b^{-\alpha+1} = 0$ e, consequentemente, temos $\lim_{b\to+\infty} (b^{-\alpha+1} - 1) = -1$. Logo o integral é convergente, dado que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ também é convergente.

No segundo caso, quando $\alpha < 1$, o limite $\lim_{b\to+\infty} (b^{-\alpha+1} - 1)$ vale $+\infty$ e portanto a série é divergente.

Por fim, no caso em que $\alpha = 1$, vem

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty,$$

pelo que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. Note-se que neste último caso temos a série harmónica que, tal como provámos anteriormente, é divergente.

Já estudámos a natureza de algumas séries particulares (séries geométricas e séries de Dirichlet) que se vão revelar particularmente úteis no que se segue, uma vez que vamos verificar que podemos analisar a natureza de uma série por comparação com outra de natureza conhecida.

Teorema I.23. [1º critério de comparação]

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ duas séries de termos não negativos. Suponhamos que existe um número real positivo M tal que $u_n \leq Mv_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

(i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente;

(ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente.

Demonstração:

Basta demonstrar (i) pois (i) e (ii) são equivalentes.

Sejam $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as sucessões associadas às séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, respetivamente. Assim temos

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad ; \quad T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \,.$$

Ora se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente então $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente. Como, por hipótese, existe um número real positivo M tal que $u_n \leq Mv_n$, então

$S_n \leq MT_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada superiormente e, assim, concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

Exemplos I.24.

(i) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+5^n}$ é convergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$.

Temos uma série geométrica de primeiro termo $a = \frac{1}{5}$ e razão $r = \frac{1}{5}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$. Para $n \geq 1$ obtemos

$$\frac{1}{2+5^n} \leq \frac{1}{5^n}.$$

Usando o 1º critério de comparação concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+5^n}$ também é convergente.

(ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n-\sqrt{n}}$ é divergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Para $n \geq 1$ obtemos

$$\frac{1}{1+n-\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}.$$

Como a série harmónica, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n-\sqrt{n}}$ também é divergente.

De seguida enunciamos outro critério de comparação em que não é necessário construir uma desigualdade entre os termos gerais de duas séries, exigindo-se apenas que esses termos tenham o mesmo comportamento assintótico quando n tende para infinito.

Note-se que o 2º critério de comparação é um corolário do Teorema I.23, pelo que o utilizaremos na forma de regra.

Regra I.25. [2º Critério de comparação]

Pretendemos conhecer a natureza da série de termos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Assumimos que conhecemos a natureza de outra série de termos positivos, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Seja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda$.

(i) Se $\lambda \in]0, +\infty[$ então as duas séries iniciais são da mesma natureza, isto é,

(i.1) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente;

(i.2) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente.

(ii) Se $\lambda = 0$ então da convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ deduzimos a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, ou seja, se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente;[xv]

[xv] Se $\lambda = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente, nada podemos concluir acerca da natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

(iii) Se $\lambda = +\infty$ então da divergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ deduzimos a divergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, isto é, se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.[xvi]

Exemplos I.26.

(i) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$ é convergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Note-se que esta última é uma série geométrica de primeiro termo $a = \frac{1}{2}$ e razão $r = \frac{1}{2}$ e, também, que

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{n^2+1} = 3 > 0.$$

(ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ é divergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Sabemos que a série harmónica é divergente. Além disso,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 > 0.$$

Pelo 2º critério de comparação ambas as séries são da mesma natureza. Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ também diverge.

(iii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Então

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e $\lambda = +\infty$ então usando o 2º critério de comparação concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

[xvi] Se $\lambda = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente, nada podemos concluir acerca da natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

(iv) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ é convergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Temos uma série de Dirichlet com $\alpha = \frac{3}{2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, logo convergente. Então

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ é convergente e $\lambda = 0$ então concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ converge pelo 2º critério de comparação.

De seguida enunciamos mais dois critérios – que também usaremos como regras - para testar a convergência de uma série de termos positivos, sem recorrer a outras séries como termo de comparação.

Regra I.27. [Critério de Cauchy ou critério da raiz]

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos não negativos e suponhamos que $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Podemos afirmar que:

(i) Se $\lambda \in [0,1[$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente;

(ii) Se $\lambda = 1^+$ ou $\lambda \in]1,+\infty[$ ou $\lambda = +\infty$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.[xvii]

Exemplos I.28.

(i) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)^n}{[(n+2)!]^n}$ é convergente. Recorrendo ao critério de Cauchy obtemos

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)^n}{[(n+2)!]^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3n}{(n+2)} \times \frac{1}{(n+1)!}\right] = 0 \in [0,1[.$$

[xvii] Quando pretendemos indicar que uma sucessão de termo geral u_n tende para 1 por valores superiores a 1, escrevemos, $\lim_n u_n = 1^+$.

(ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ é divergente. Por aplicação do critério de Cauchy, verificamos que

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1.$$

Regra I.29. [Critério d'Alembert ou critério da razão]

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos positivos e suponhamos que $\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Podemos afirmar que:

(i) Se $\lambda \in [0,1[$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente;

(ii) Se $\lambda = 1^+$ ou $\lambda \in]1,+\infty[$ ou $\lambda = +\infty$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

Note-se que o critério de Cauchy é mais geral do que o critério d'Alembert uma vez que

«Se $u_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = A$ então $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = A$».

Exemplos I.30

(i) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$ é convergente.

Usando o critério d'Alembert obtemos

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \in [0,1[.$$

(ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{5^n}$ é divergente.

Usando o critério d'Alembert, verificamos que

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty.$$

(iii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n$ é divergente. Usando o critério d'Alembert vem

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1^+.$$

(iv) Por aplicação do critério d'Alembert, nada podemos concluir sobre a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$, visto que

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{1}{n(2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{2n^2+3n+1} = 1^-.$$

Porém, a série é convergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Com efeito, temos

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(2n-1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2-n} = \frac{1}{2} > 0.$$

Note-se que, se pretendermos aplicar os critérios de Cauchy e d'Alembert à série de termos positivos, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, então a convergência ou divergência dessa série depende do valor de λ.

Recordamos que, em ambos os critérios, se $\lambda < 1$ então a série converge, mas se $\lambda = 1^+$ ou $\lambda > 1$ ou $\lambda = +\infty$ então a série diverge.

Porém, se $\lambda = 1^-$ a série poderá ser convergente ou divergente[xviii]. Assim, estamos perante um caso duvidoso.

Exemplos I.31.

(i) Aplicando o critério d' Alembert à série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ obtemos

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1^-,$$

e nada podemos concluir. No entanto, esta série é divergente uma vez que se trata da série harmónica.

[xviii] Quando pretendemos indicar que uma sucessão tende para 1 por valores inferiores a 1, escrevemos, $\lim_n w_n = 1^-$.

(ii) Aplicando o critério d' Alembert à série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ obtemos

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)^2 = 1^-,$$

e nada podemos concluir. No entanto, esta série é convergente pois é uma série de Dirichlet com $\alpha = 2$.

É importante salientar que podemos utilizar o estudo das séries no cálculo de limites de sucessões, dado que, pela condição necessária de convergência, podemos afirmar que:

«Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente então $\lim_n u_n$=0».

Deste modo, visto que pela alínea 4.a) do Exercício I.31., sabemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ é convergente, podemos concluir que $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$.

Analogamente, constatamos que $\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$, uma vez que, pelo critério d'Alembert,

$$\lambda = \lim_n \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_n \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

o que garante a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Consideremos, agora, o problema de uma série de termos não positivos, isto é, uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ com } u_n \leq 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty}(-u_n)$ é uma série de termos não negativos, podemos determinar a sua natureza utilizando os critérios desta secção, dado que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = (-1)\sum_{n=1}^{+\infty}(-u_n).$$

Deste modo concluímos que

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-u_n)$ é convergente para S se e só se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente para $-S$;

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-u_n)$ é divergente se e só se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Se, por outro lado, pretendemos determinar a natureza de uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cujos termos têm sinal constante apenas a partir de uma certa ordem $p \geq 2$, podemos começar por analisar a natureza da série $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ e concluir que

(i) $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ converge para T se e só se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge para $S = T + \sum_{n=1}^{p-1} u_n$;

(ii) $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ é divergente se e só se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Exercícios I.32.

1. Utilizando o critério do integral determine a natureza das séries:
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$. Resposta: convergente;
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. Resposta: divergente.

2. Recorrendo aos critérios de comparação determine a natureza das séries:
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{7^n+22}$. Resposta: convergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{7^n}$;
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1+3\sqrt{n}}$. Resposta: divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{4+n\sqrt{n}}$. Resposta: divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$;
   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5^n\sqrt{n}}$. Resposta: convergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$.

3. Seja $u_n = (1 + (-1)^n)v_n$ com $v_n > 0$, para $n \in \mathbb{N}$.
   Mostre que, se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.
   Sugestão: Utilize o 1º critério de comparação.

4. Utilizando o critério d'Alembert ou o critério de Cauchy determine a natureza das séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, sendo $a > 0$. Resposta: convergente, $\lambda = 0 < 1$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n^2}}$. Resposta: Resposta: convergente, $\lambda = 0 < 1$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$. Resposta: divergente, $\lambda = \frac{e}{2} > 1$;

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^{n+2}}$. Resposta: convergente, $\lambda = \frac{1}{2} < 1$;

5. Determine a natureza das séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$. Resposta: divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Resposta: convergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$. Resposta: divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$;

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}$. Resposta: convergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$;

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$. Resposta: divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$;

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-2}}$. Resposta: divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$;

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Resposta: divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$;

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n}$. Resposta: convergente;

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$. Resposta: convergente;

(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{5^n+5}$. Resposta: convergente;

(k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^{4n+1}$. Resposta: divergente;

(l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$. Resposta: convergente;

(m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$. Resposta: convergente;

(n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$. Resposta: divergente.

6. Considere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recorrência através de $u_1 = 1$ e $u_{n+1} = \left(\frac{1+2n}{n+2}\right)u_n$. Diga, justificando, qual a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

7. Verifique que:

   (a) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ é divergente uma vez que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente;

   (b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ é convergente e tem soma $S = -2$ visto que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 2$.

8. Recorrendo ao estudo de séries, calcule:

   (a) $\lim_n \frac{n^{2015}}{2^n}$. Resposta: 0;

   (b) $\lim_n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Resposta: 0.

I.1.4 - Séries numéricas cujos termos não têm sinal constante. Séries absolutamente convergentes e séries simplesmente convergentes. Séries alternadas e critério de Leibniz.

Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{3^n} = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{9} + \frac{\cos 3}{27} + \frac{\cos 4}{81} + \frac{\cos 5}{243} + \cdots.$$

Começamos por verificar o sinal dos primeiros termos de $u_n = \frac{\cos n}{3^n}$.

Assim, temos

$$u_1 = \frac{\cos 1}{3} \approx 0{,}18 \ ;$$

$$u_2 = \frac{\cos 2}{9} \approx -0{,}046;\ u_3 = \frac{\cos 3}{27} \approx -0{,}037;\ u_4 = \frac{\cos 4}{81} \approx -0{,}008 \ ;$$

$$u_5 = \frac{\cos 5}{243} \approx 0{,}001 \ ;\ \ u_6 = \frac{\cos 6}{729} \approx 0{,}001 \ ;\ u_7 = \frac{\cos 7}{2187} \approx 0.$$

Observamos que o 1º termo é positivo, os 2º, 3º e 4º termos são negativos, os 5º, 6º e 7º são positivos, etc.

Tendo em conta que $-1 < \cos n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que o cosseno é uma função periódica de período 2π podemos afirmar que os termos da série não têm sinal constante e, ainda, que não é possível determinar uma ordem a partir da qual a constância de sinal se verifique.

Vamos então averiguar como se pode estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{3^n}$.

As primeiras somas parciais estão indicadas na tabela:

n	S_n
1	$\frac{\cos 1}{3} \approx 0{,}18$
2	$\frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{9} \approx 0{,}134$
3	$\frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{9} + \frac{\cos 3}{27} \approx 0{,}097$
4	$\frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{9} + \frac{\cos 3}{27} + \frac{\cos 4}{81} \approx 0{,}089$
5	$\frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{9} + \frac{\cos 3}{27} + \frac{\cos 4}{81} + \frac{\cos 5}{243} \approx 0{,}09$
6	$\frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{9} + \frac{\cos 3}{27} + \frac{\cos 4}{81} + \frac{\cos 5}{243} + \frac{\cos 6}{729} \approx 0{,}092$
…	…

Reparamos que a sucessão das somas parciais, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, não é monótona.

Assim, é difícil prever se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite, por isso nada podemos dizer quanto à convergência da série. Contudo, se analisarmos a série constituída pelos valores absolutos dos seus termos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{3^n} = \frac{|\cos 1|}{3} + \frac{|\cos 2|}{9} + \frac{|\cos 3|}{27} + \frac{|\cos 4|}{81} + \frac{|\cos 5|}{243} + \cdots$$

podemos concluir, por comparação com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{3^n}\right|$ é convergente o que garante – como veremos no Teorema I.35. – que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{3^n}$ também é convergente e classificamo-la como absolutamente convergente de acordo com a seguinte definição.

Definição I.33.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diz-se absolutamente convergente se a série constituída pelos valores absolutos dos seus termos (também designada por série dos módulos), $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$, é convergente.

Dado que a série dos valores absolutos dos termos de uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é uma série de termos não negativos, podemos recorrer aos critérios anteriores para verificar se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente.

Exemplos I.34.

(i) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{3^n}$ é absolutamente convergente uma vez que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ é convergente. Atendendo a

$$\left|\frac{\cos n}{3^n}\right| = \frac{|\cos n|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, vejamos então que a convergência da série dos valores absolutos dos seus termos, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{3^n}\right|$, é consequência da convergência da série geométrica de razão $r = \frac{1}{3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$. Utilizando o 1º critério de comparação concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{3^n}\right|$ é convergente dado que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ é convergente.

Assim, por definição, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{3^n}$ é absolutamente convergente;

(ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n!}$ é absolutamente convergente visto que podemos garantir a convergência da série dos valores absolutos dos seus termos, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin n}{n!}\right|$, por comparação com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Aplicando o critério d' Alembert vem

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\left|\frac{\sin n}{n!}\right| = \frac{|\sin n|}{n!} \leq \frac{1}{n!}.$$

Utilizando o 1º critério de comparação concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin n}{n!}\right|$ é convergente. Por isso a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n!}$ é absolutamente convergente.

Teorema I.35.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

Demonstração:

Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão associada a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão associada a $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$, isto é,

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad ; \quad T_n = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|.$$

Por hipótese, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente, ou seja, a série dos módulos correspondente, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$, converge.

Assim, a sucessão $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Prova-se que toda a sucessão é uma sucessão de Cauchy, isto é,

«para qualquer $\theta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > p \text{ e } n > p \Longrightarrow |T_m - T_n| < \theta\text{».}$$

Deste modo, para m>n>p, podemos garantir que

$$|S_m - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_m| \leq |T_m - T_n| < \theta.$$

Concluímos, assim, que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, bem como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

O recíproco do Teorema I.35. não é verdadeiro, pois existem séries convergentes que não são absolutamente convergentes. Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.[xix] é convergente (ver Exemplo I.40.) embora a correspondente série dos módulos, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ (série harmónica), seja divergente

Definição I.36.

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ diz-se simplesmente convergente se $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ é divergente.

Todavia, é importante salientar que não é possível encontrar uma série numérica com termos de sinal constante que seja simplesmente convergente, visto que estas séries ou são absolutamente convergentes ou divergentes.

Exemplo I.37. (Reordenação dos termos de uma série simplesmente convergente)

Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots.$$

Sendo uma série simplesmente convergente (como veremos no próximo exemplo), designamos a sua soma por S.

Vejamos o que acontece se reordenarmos os termos dessa série da seguinte forma

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

Temos

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}$$

ou seja,

[xix] Designaremos as séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n}$ por séries harmónicas alternadas.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\right)$$

Deste modo, obtemos uma nova série cuja soma vale $\frac{S}{2}$.

Assim sendo, a série inicial e a série obtida através da reordenação de termos da primeira não são iguais.

Este exemplo é elucidativo dado que evidencia que não podemos alterar a ordem dos termos de uma série simplesmente convergente. De facto, Riemann demonstrou que é possível alterar a ordem dos termos dessas séries de modo a obtermos a soma que quisermos.

Por outro lado, se uma série é absolutamente convergente então qualquer reordenação dos seus termos não afeta a convergência nem a sua soma.

Entre as séries que podem ser absolutamente convergentes e simplesmente convergentes distinguimos as séries alternadas.

Definição I.38.

Séries alternadas são séries em que dois termos consecutivos têm sinal contrário, ou seja, são séries da forma $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}u_n$, onde $u_n \geq 0$, para $n \in \mathbb{N}$.

Designadamente, ou temos uma série cujo termos de ordem par são não positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

ou então uma série cujo termos de ordem ímpar são não positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots.$$

Note-se que, no caso das séries alternadas, podemos afirmar que:

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é absolutamente convergente se e só se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.[xx]

De seguida apresentamos uma condição suficiente de convergência para séries alternadas.

Teorema I.39. [Critério de Leibniz]

Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão tal que:

(i) $u_n \geq 0$, para $n \in \mathbb{N}$, ou seja, é não negativa;

(ii) $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para $n \in \mathbb{N}$, ou seja, é decrescente;

(iii) $\lim_n u_n = 0$, ou seja, é um infinitésimo;

então $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é convergente.

Demonstração:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ uma série alternada.

Então temos de demonstrar que a sua sucessão associada, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é convergente.

Consideremos a subsucessão $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ constituída pelas somas com um número par de termos, definida por

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n}.$$

Verificamos que

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geq 0,$$

dado que, por hipótese, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente pelo que podemos afirmar que esta subsucessão é crescente.

Além disso, verificamos que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tem termos não negativos e é limitada superiormente, pois

---

[xx] Analogamente, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}u_n$ é absolutamente convergente se e só se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \cdots - u_{2n-2} + u_{2n-1} - u_{2n} =$$
$$= u_1 - \left[\underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_4 - u_5)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(u_{2n-2} - u_{2n-1})}_{\geq 0} + u_{2n} \right] \leq u_1.$$

Assim, podemos garantir que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para S, sendo

$$S = \lim_n S_{2n}.$$

Por outro lado, a subsucessão $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ constituída pelas somas com um número ímpar de termos é decrescente, visto que

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -u_{2n} + u_{2n+1} \leq 0,$$

e limitada inferiormente, pois

$$S_{2n-1} = \underbrace{(u_1 - u_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_3 - u_4)}_{\geq 0} + - \cdots + \underbrace{(u_{2n-3} - u_{2n-2})}_{\geq 0} + u_{2n-1} \geq 0.$$

Logo $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para S', sendo $S' = \lim_n S_{2n-1}$.

Finalmente, calculamos

$$S - S' = \lim_n S_{2n} - \lim_n S_{2n-1} = \lim_n (S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim_n (-u_{2n}).$$

Como, por hipótese, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um infinitésimo, então $\lim_n u_{2n} = 0$, ou seja, $S = S'$, o que nos permite assegurar a convergência da sucessão associada $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A demonstração do Teorema I.39. permite-nos concluir que a soma, S, de uma série alternada do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ não excede o primeiro termo dado que satisfaz $0 \leq S \leq u_1$.

Importa, ainda, salientar que o critério de Leibniz também pode ser aplicado a séries do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$, uma vez que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n = (-1)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n.$$

Neste caso, constatamos que ambas as séries são da mesma natureza. Além disso, S é a soma de $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ se e só se $-S$ é a soma de $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$. Assim, temos

$$0 \leq S \leq u_1 \Leftrightarrow -u_1 \leq -S \leq 0.$$

Exemplos I.40.

a) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é simplesmente convergente.

Em primeiro lugar, constatamos que a correspondente série dos módulos, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, é divergente pois trata-se da série harmónica. Aplicamos agora o critério de Leibniz à série alternada. Com efeito, sucessão de termo geral $u_n=\frac{1}{n}$ satisfaz as propriedades:

(i) (u_n) é positiva, isto é, $u_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$;

(ii) (u_n) é estritamente decrescente pois

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}<0, \text{ para todo } n\in\mathbb{N};$$

(iii) (u_n) é um infinitésimo, isto é, $\lim_n \frac{1}{n}=0$.

Assim sendo, a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é simplesmente convergente.

b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n(n+2)}$ é simplesmente convergente.

Em primeiro lugar, é necessário mostrar que a correspondente série dos módulos, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$, é divergente[xxi].

Consideramos de seguida a sucessão de termo geral $u_n=\frac{n+1}{n(n+2)}$.

Esta satisfaz as propriedades:

(i) (u_n) é positiva, isto é, $u_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$;

(ii) (u_n) é estritamente decrescente pois

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{(n+1)(n+3)}-\frac{n+1}{n(n+2)}=-\frac{n^2+3n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}<0, n\in\mathbb{N};$$

[xxi] Usando, por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ como termo de comparação.

(iii) (u_n) é um infinitésimo, isto é, $\lim_n \frac{n+1}{n(n+2)} = \lim_n \frac{1+\frac{1}{n}}{n+2} = 0$.

Assim, podemos aplicar o critério de Leibniz à série alternada e concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n(n+2)}$ é simplesmente convergente.

c) A série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(n)}$ é simplesmente convergente.

Em primeiro lugar, é necessário provar que a correspondente série dos módulos, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n)}$, é divergente[xxii].

Seja $u_n = \frac{1}{\ln(n)}$.

Como

(i) (u_n) é positiva, isto é, $u_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) (u_n) é estritamente decrescente pois

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} < 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

(iii) (u_n) é um infinitésimo, isto é, $\lim_n \frac{1}{\ln(n)} = 0$,

então a série alternada $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(n)}$ é convergente pelo critério de Leibniz. Além disso, concluímos que essa série é simplesmente convergente.

Finalmente, vejamos exemplos de séries alternadas divergentes.

[xxii] Usando, por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ como termo de comparação.

Exemplos I.41.

(i) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{n+2}$ é divergente.

Seja $u_n = \frac{n}{n+2}$. Uma vez que

$$\lim_n u_n = \lim_n \frac{n}{n+2} = \lim_n \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1 \neq 0$$

então o $\lim_n (-1)^n u_n$ não existe. Pelo corolário da condição necessária de convergência a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ é divergente.

(ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n}$ é divergente.

Seja $u_n = \frac{2^n}{n}$. Verificamos que $\lim_n (-1)^n u_n$ não existe, atendendo a que $\lim_n u_n = \lim_n \frac{2^n}{n} = +\infty \neq 0$. Pelo corolário da condição necessária de convergência a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n}$ é divergente.

Regra I.42.

No estudo da natureza de séries alternadas do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$, com $u_n \geq 0$ podemos adotar o seguinte método.

1. Calculamos $\lim_n u_n$;[xxiii]

   (1.a) Se $\lim_n u_n \neq 0$ então não existe $\lim_n (-1)^{n+1}u_n$ e concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é divergente [xxiv];

   (1.b) Se $\lim_n u_n = 0$ então nada podemos concluir e avançamos para 2;

[xxiii] Se não é fácil calcular $\lim_n u_n$, avançamos para 2.

[xxiv] Pelo corolário da condição necessária de convergência.

2. Estudamos a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (série dos módulos correspondente) recorrendo

(i) aos critérios de comparação, ou ao critério do integral;

(ii) ao critério d'Alembert ou ao critério de Cauchy.

(2.a) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é absolutamente convergente;

(2.b) Se, por aplicação dos critérios definidos em (i), $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente então nada podemos concluir e avançamos para 3.

(2.c) Se, por aplicação dos critérios definidos em (ii), a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente então $\lim_n u_n \neq 0$,[xxv] o que implica que não existe $\lim_n (-1)^{n+1}u_n$ e, assim, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é divergente[xxvi].

3. Estudamos a natureza $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$, recorrendo ao critério de Leibniz.

Se $u_n \geq u_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$, e, ainda, $\lim_n u_n = 0$ então podemos concluir que a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é simplesmente convergente.

[xxv] Dado que:

a) pelo critério de Cauchy, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda > 1$ (ou $\lambda = 1^+$) então existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ a partir da qual se verifica que $u_n > 1$, o que garante que $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$;

b) pelo critério d'Alembert, se $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda > 1$ (ou $\lambda = 1^+$) então existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ a partir da qual a sucessão (de termos positivos) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente o que nos permite afirmar que $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

[xxvi] Pelo corolário da condição necessária de convergência.

Exercícios I.43.

1. Escreva duas séries geométricas que sejam séries alternadas, uma absolutamente convergente e outra divergente.

2. Verifique que, embora não seja possível aplicar o critério de Leibniz nestes dois casos, as séries seguintes são absolutamente convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)}{5^n}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}|\sin n|}{n^2}$.

3. Determine a natureza das séries alternadas:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$. Resposta: Absolutamente convergente;

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{n^2+1}$. Resposta: Simplesmente convergente;

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{e^n}$. Resposta: Absolutamente convergente;

   (d) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{[ln(n)]^n}$. Resposta: Absolutamente convergente;

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n}$ Resposta: Divergente;

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 2^n}$. Resposta: Absolutamente convergente;

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Resposta: Divergente;

   (h) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\ln n}}$. Resposta: Simplesmente convergente;

   (i) $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.Resposta: simplesmente convergente;

   (j) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln\sqrt{n}}$. Resposta: simplesmente convergente;

   (k) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^n \ln n}{n!}$. Resposta: absolutamente convergente;

   (l) $\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2}$.Resposta: absolutamente convergente.

4. Sendo $p > 0$ um parâmetro real, determine a natureza das séries alternadas do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$.

5. Recorrendo ao 1º critério de comparação, demonstre que:

   «Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ com $v_n > 0$ é convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, v_n$ é convergente.»
   Sugestão: Utilize $u_n = (1 + (-1)^n)v_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

I.2. Representação de funções em séries de potências

Sabemos que um polinómio de grau $k \in \mathbb{N}$ com coeficientes $c_n \in \mathbb{R}$,

$n = 0,1, \dots, k$, tais que $c_k \neq 0$, é definido por

$$\sum_{n=0}^{k} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k.$$

Se estendermos a operação de adição de monómios na variável real x a um número infinito de parcelas (assumindo que n vai tender para infinito), obtemos a série de potências de x:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Verificaremos que as séries de potências convergem para valores de x pertencentes a um intervalo de números reais. Designadamente, na sequência do Teorema de Abel, determinamos o seu raio de convergência e o seu intervalo de convergência.

Mostraremos, ainda, que estas séries podem definir funções reais de variável real cujo domínio coincide com o seu intervalo de convergência.

Assim, usando o conceito de série de potências e recorrendo a técnicas de derivação introduzimos a noção de série de Taylor de uma função.

Em cursos de matemática avançada, diz-se que uma função f é analítica num ponto do seu domínio se f coincide com a sua série de Taylor na vizinhança desse ponto enquanto no nosso curso diremos que a função é representável pela sua série de Taylor.

No que segue, daremos vários exemplos de representação de funções elementares por intermédio de séries de Taylor (ou séries de Mac-Laurin).

Propomo-nos então responder à seguinte questão:

«Como encontrar séries de potências que coincidam com uma função indefinidamente diferenciável num subconjunto do seu domínio?».

I.2.1 – Definição de série de potências. Teorema de Abel, raio de convergência e intervalo de convergência. Derivação e integração de séries de potências termo a termo.

Começamos por introduzir o conceito de série de potências.

Definição I.44. [Série de potências de $x \in \mathbb{R}$]

Sejam (c_n) uma sucessão de números reais e $x \in \mathbb{R}$ uma variável. Dizemos que a série escrita na forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

é uma série de potências de x.

Aos números, $c_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, chamamos coeficientes da série.

Exemplos I.45.

a) Seja $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
Temos uma série de potências de x, cujos coeficientes são $c_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$;

b) Consideremos a série de potências de x,
$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Os seus coeficientes são $c_n = \frac{1}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$;

c) Seja $x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$. Trata-se de uma série de potências de x com coeficientes $c_n = n^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note-se que, para cada concretização da variável x, a série de potências de x,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

se transforma numa série numérica. Designadamente, supondo que $c_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ então

- Para cada $x > 0$ temos uma série de termos positivos, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n |x|^n$;
- Para cada $x < 0$ temos uma série alternada, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-1)^n |x|^n$;
- Para $x = 0$ a série reduz-se ao primeiro termo c_0.

Definição I.46. [Natureza de uma série de potências]

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dizemos que a série de potências de x, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, é convergente para $x = x_0$ se a série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n {x_0}^n$ é convergente.

Dizemos, ainda, que a série de potências de x, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, é divergente para $x = x_0$ se a respetiva série numérica é divergente.

Notamos que, caso $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n {x_0}^n$ seja absolutamente (ou simplesmente) convergente dizemos que a série de potências de x é absolutamente (ou simplesmente) convergente para $x = x_0$.

Vamos, de seguida, determinar para que valores reais de x uma série de potências converge.

É evidente que toda a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é convergente para $x = 0$.

Com efeito, substituindo $x = 0$ na série, temos $c_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$.

Logo podemos afirmar que a série é convergente e tem soma $S = c_0 \in \mathbb{R}$.

Assim, surge a questão: «Existem outros valores de x para os quais a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ seja convergente?»

Há séries de potências de x que convergem apenas para $x = 0$. Por exemplo, a série (c) do exemplo anterior

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n = x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots$$

não é convergente para $x \neq 0$, visto que

$$\lim_n n^n|x|^n \neq 0$$

sempre que $x \neq 0$.[xxvii]

Por outro lado, há outras séries de potências de x que convergem para todos os valores de x.

Por exemplo, consideremos a série (b) do exemplo anterior

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots.$$

Para cada valor de $x \neq 0$, apliquemos o critério d'Alembert à série dos módulos

$$\lambda = \lim_n \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} == \lim_n \frac{|x|n!}{(n+1)!} = |x|\lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Verificamos que $\lambda < 1$, para todo valor real de $x \neq 0$.

Logo a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por sua vez, a série (a) do exemplo anterior

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

transforma-se numa série geométrica de razão $r = x$, para cada concretização da variável $x \neq 0$.

Logo, trata-se de uma série convergente apenas quando $|x| < 1$, ou seja, o intervalo $]-1,1[$ é o seu domínio de convergência.

[xxvii] Recorde a condição necessária de convergência.

Apesar desta variedade de comportamentos, prova-se que: «O domínio de convergência de uma série de potências é sempre um intervalo de números reais que, em casos-limite, se pode reduzir a um ponto ou coincidir com o conjunto $\mathbb{R}$.

O resultado seguinte vai ser-nos muito útil no estudo destas séries.

Teorema I.47. [Teorema de Abel]

(i) Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é convergente para $x = x_0 \neq 0$ então é absolutamente convergente para todos os valores reais de x tais que $|x| < |x_0|$;

(ii) Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é divergente para $x = x_1 \neq 0$ então é divergente para todos os valores reais de x tais que $|x| > |x_1|$.

Demonstração:

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é convergente para $x = x_0 \neq 0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$ é convergente.

Logo, pela condição necessária de convergência, temos $\lim\limits_{n} c_n x_0^n = 0$.

Como a sucessão de termo geral, $(c_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é convergente então é limitada, isto é, existe um número real M tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, se verifica $|c_n x_0^n| < M$.

Por outro lado,

$$|c_n x^n| = \left|c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Ora $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ – que é uma série geométrica de razão $r = \left|\frac{x}{x_0}\right|$ – é convergente para todos os valores de x tais que $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, ou de modo equivalente, tais que $|x| < |x_0|$.

Consequentemente, pelo 1º critério de comparação e tendo em conta que $|c_n x^n| < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$, constatamos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n x^n|$ é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Deste modo, podemos concluir que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é absolutamente convergente para $x \in \left]-x_0, x_0\right[$.

Por outro lado, se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é divergente para $x = x_1 \neq 0$ então não pode convergir para x_2 tal que $|x_2| > |x_1|$, porque se assim fosse, pela primeira parte do teorema, teria que convergir para todos os valores reais de x tais que $|x| < |x_2|$, o que contradiz a hipótese inicial.

Na sequência do Teorema de Abel verificamos que, no estudo da convergência de uma série de potências do tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, surgem três casos:

(i) A série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge apenas para $x = 0$;

(ii) A série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge para todos valores reais de x;

(iii) Existe um número real positivo r tal que a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é convergente para $x \in \left]-r, r\right[$ e divergente para $x \in \left]-\infty, -r\right[\cup \left]r, +\infty\right[$.

Uma vez que o teorema anterior é omisso em relação à convergência nos extremos do intervalo $\left]-r, r\right[$, a análise da convergência quando $x = -r$ ou $x = r$ será feita caso a caso, à medida que os exercícios forem surgindo.

Chamamos raio de convergência ao número real $r > 0$ e intervalo de convergência ao intervalo I constituído por todos os valores reais para os quais a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é convergente.

Assim em (iii) podemos ter

$$I = \left]-r, r\right[\text{ ou } I = \left[-r, r\right[\text{ ou } I = \left]-r, r\right] \text{ ou } I = [-r, r].$$

Finalmente, em (i) quando a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge apenas para $x = 0$, dizemos que $r = 0$ e $I = \{0\}$. Por sua vez, em (ii) quando $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge para todos valores reais de x, consideramos que $r = +\infty$ e $I = \mathbb{R}$.

Apresentamos, de seguida, duas proposições que nos irão fornecer uma regra para a resolução de exercícios práticos.

Proposição I.48.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma série de potências de x, de termos não nulos.

Se $\lim_n \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ existe então o intervalo de convergência da série tem raio

$r = \lim_n \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

Além disso:

(i) Se $r = 0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge em $I = \{0\}$;

(ii) Se $r = +\infty$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge em $I = \mathbb{R}$;

(iii) Se $r \in]0, +\infty[$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge pelo menos em $]-r, r[$[xxviii].

Demonstração:

Já vimos que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge para $x = 0$.

Considerando a série dos módulos, $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n||x|^n$ e fixando arbitrariamente $x \neq 0$, ficamos perante uma série de termos positivos o que nos permite aplicar o critério d'Alembert.

Assim, uma vez que

$$L = \lim_n \frac{|c_{n+1}||x|^{n+1}}{|c_n||x|^n} = |x| \lim_n \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

podemos garantir que a série dos módulos, $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n||x|^n$, é convergente desde que

$$L < 1 \Leftrightarrow |x| \lim_n \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1.$$

Seja $\lambda = \lim_n \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$.

[xxviii] Neste caso falta, contudo, analisar a convergência da série nos extremos do intervalo $]-r, r[$.

Se $\lambda > 0$ então temos

$$L < 1 \Leftrightarrow |x|\lambda < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lambda}$$

logo $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é convergente para todos os valores de x tais que $|x| < r$, o que equivale a dizer que o seu raio de convergência é $r = \frac{1}{\lambda}$.

Se $\lambda = 0$, ou equivalentemente $r = +\infty$, temos $L < 1$ para todos os valores reais de x, por isso o intervalo de convergência I da série é $\mathbb{R}$.

Por fim, o caso $r = 0$ ocorre quando $\lambda = +\infty$ pois a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge apenas para $x = 0$.

Em alternativa, podemos determinar o raio do intervalo de convergência de séries de potências aplicando o critério de Cauchy.

Proposição I.49.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma série de potências de x, de termos não nulos.

Se $\lim_n \sqrt[n]{|c_n|}$ então o intervalo de convergência da série tem raio $r = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$.

Além disso:

(i) Se $r = 0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge em $I = \{0\}$;

(ii) Se $r = +\infty$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge em $I = \mathbb{R}$;

(iii) Se $r \in]0, +\infty[$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge pelo menos em $]-r, r[$[xxix].

Demonstração:

É evidente que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge para $x = 0$.

Aplicamos o critério de Cauchy à série dos módulos, $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n||x|^n$, considerando $x \neq 0$ fixado arbitrariamente. Obtemos

$$L = \lim_n \sqrt[n]{|c_n||x|^n} = |x| \lim_n \sqrt[n]{|c_n|}.$$

[xxix] Neste caso falta, contudo, analisar a convergência da série nos extremos do intervalo $]-r, r[$.

Deste modo, podemos afirmar que a série dos módulos, $\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n||x|^n$, é convergente desde que

$$L < 1 \Leftrightarrow |x| \lim_n \sqrt[n]{|c_n|} < 1.$$

Seja $\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|}$.

Se $\lambda > 0$ então temos

$$L < 1 \Leftrightarrow |x|\lambda < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lambda},$$

logo $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é convergente para todos os valores de x tais que $|x| < r$, e, ainda, que o seu raio de convergência é $r = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Se $\lambda = 0$, ou equivalentemente $r = +\infty$, temos $L < 1$ para todos os valores reais de x, por isso o intervalo de convergência I da série é $\mathbb{R}$.

Por fim, o caso $r = 0$ ocorre quando $\lambda = +\infty$ pois a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge apenas para $x = 0$.

Regra I.50. [Regra para o estudo da convergência de séries de potências de $x \in \mathbb{R}$]

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma série de potências de x, de termos não nulos.

Tendo em conta a expressão dos coeficientes c_n, aplicamos um de dois critérios.

Se escolhermos o critério d'Alembert, calculamos $\lambda = \lim_n \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ e obtemos o raio de convergência $r = \frac{1}{\lambda} = \lim_n \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Caso optemos pelo critério de Cauchy, calculamos $\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|}$ e obtemos o raio de convergência $r = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Em ambos os casos:

(i) Se $r = 0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge em $I = \{0\}$;

(ii) Se $r = +\infty$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge em $I = \mathbb{R}$;

(iii) Se $r \in]0, +\infty[$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge pelo menos em $]-r, r[$.

No caso (iii) é necessário, ainda, estudar a convergência das séries numéricas $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-1)^n r^n$.

Exemplos I.51.

a) Consideremos $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(-3)^n} x^n$. Trata-se de uma série de potências de x com coeficientes definidos por $c_n = \frac{n}{(-3)^n}$. Escolhemos o critério d'Alembert e calculamos

$$\lambda = \lim_n \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\frac{n+1}{(-3)^{n+1}}}{\frac{n}{(-3)^n}}\right| = \lim_n \frac{n+1}{n} \lim_n \left|\frac{1}{-3}\right| = \frac{1}{3}.$$

Então o raio de convergência é igual a $r = \frac{1}{\lambda} = 3$.

Estudamos agora a convergência das séries para $x = -3$ e para $x = 3$. Assim, temos respetivamente $\sum_{n=0}^{+\infty} n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n$ que são séries divergentes.

Logo o intervalo de convergência da série é dado por $I =]-3,3[$.

b) Consideremos a série de potências de x, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(-3)^n} x^n$. Sendo $c_n = \frac{1}{(-3)^n}$, obtemos, por utilização do critério de Cauchy,

$$\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(-3)^n}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{|3^n|}} = \frac{1}{3}.$$

Então o raio de convergência é igual a $r = \frac{1}{\lambda} = 3$. Substituindo $x = -3$ e $x = 3$ na série de potências temos $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ respetivamente. Em ambos os casos, as séries são divergentes, logo o intervalo de convergência da série de potências é dado por $I =]-3,3[$.

Observação I.52. [Série de potências de $x \in \mathbb{R}$ em que o expoente pertence a um subconjunto próprio infinito de $\mathbb{N}$]

E se pretendermos determinar o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ (ou da série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 9^n x^{2n+1}$)? Como devemos proceder?

Neste caso não podemos recorrer à Regra I.50. (*Porquê?*).

Temos que utilizar o procedimento indicado na demonstração da Proposição I.48 ou da Proposição I.49.

Ou seja, construímos a série dos módulos, $\sum_{n=0}^{+\infty} 9^n |x|^{2n}$. Olhando para a expressão do termo geral da série dos módulos aplicamos o Critério de Cauchy e obtemos

$$L = \lim_n \sqrt[n]{9^n |x|^{2n}} = 9|x|^2.$$

Deste modo

$$L < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < \tfrac{1}{9} \Leftrightarrow x^2 < \tfrac{1}{9} \Leftrightarrow -\tfrac{1}{3} < x < \tfrac{1}{3},$$

o que nos permite concluir que o intervalo de convergência da série tem extremos $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$.

Estudando a convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ para $x = -\frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{3}$ concluímos que o intervalo de convergência é $I = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

Procedendo de modo análogo com a série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 9^n x^{2n+1}$ podemos afirmar que o intervalo de convergência é $I = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

De um modo mais geral, podemos considerar séries de potências de $x - a$, sendo $a \in \mathbb{R}$, ou seja séries escritas na forma

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n.$$

Apresentamos, de seguida, mais alguns exemplos de séries de potências.

Exemplos I.53.

(i) Seja $(x+1)+\frac{(x+1)^2}{3!}+\frac{(x+1)^3}{5!}+\frac{(x+1)^4}{7!}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$. Assim, temos uma série de potências em que $a=-1$ e os seus coeficientes são $c_0=0$ e $c_n=\frac{1}{(2n-1)!}$ para todo $n\in\mathbb{N}$;

(ii) Seja $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x+1)^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n!}$. Assim, temos uma série de potências em que $a=1$ e os seus coeficientes são definidos por $c_0=0$ e $c_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $n\in\mathbb{N}$;

(iii) Seja $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Trata-se de uma série de potências em que $a=0$, sendo os seus coeficientes dados por $c_0=1$, $c_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ e $c_{2n-1}=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Queremos agora estudar a natureza da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots.$$

Como devemos proceder?

Podemos recorrer a uma mudança de variável.

Regra I.54. [Estudo da convergência de séries de potências de $x-a$]

No caso da série $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x-a)^n$, fazemos $x-a=z$ de modo a transformar a série inicial numa série de potências de z, ou seja, na série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots.$$

De seguida aplicamos a Regra I.50. e obtemos o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$.

Regressando à variável x, verificamos que o intervalo de convergência I de uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ é centrado em $x=a$ e tem raio r. Assim:

(i) $r=0 \Leftrightarrow I=\{a\}$

(ii) $r=+\infty \Leftrightarrow I=\mathbb{R}$

(iii) Se $r>0$ então $I=]\,a-r,a+r[$ ou $I=[\,a-r,a+r[$ ou $I=]\,a-r,a+r]$ ou $I=[\,a-r,a+r]$.

Recorde-se que, no caso (iii), nada sabemos em relação à convergência nos extremos do intervalo $]a-r,a+r[$. Deste modo, a análise da convergência quando $x=a-r$ ou $x=a+r$ será feita caso a caso, à medida que os exercícios forem surgindo.

Exemplos I.55.

(i) Consideremos $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2n+1}(x-1)^n$. Assim, temos uma série de potências em que $a=1$ e $c_n=\frac{n!}{2n+1}$. Como

$$\lambda=\lim_n \frac{\frac{(n+1)!}{2n+3}}{\frac{n!}{2n+1}}=\lim_n \frac{(2n+1)(n+1)}{2n+3}=\lim_n \frac{2n^2+3n+1}{2n+3}=+\infty$$

então $r=\frac{1}{\lambda}=0$, logo o intervalo de convergência da série de potências é $I=\{1\}$.

(ii) Consideremos $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!}(x+1)^n$. Agora temos uma série de potências em que $a=-1$ e $c_n=\frac{n}{(2n+1)!}$. Obtemos

$$\lambda=\lim_n \frac{\frac{n+1}{(2n+3)!}}{\frac{n}{(2n+1)!}}=\lim_n \frac{n+1}{n(2n+3)(2n+2)}=\lim_n \frac{n+1}{4n^3+10n^2+6n}=0.$$

Então o intervalo de convergência da série é $I = \mathbb{R}$ uma vez que $r = \frac{1}{\lambda} = +\infty$.

(iii) Consideremos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x-2)^n$. Assim, temos uma série de potências em que $a = 2$ e $c_n = \frac{1}{n}$. Como

$$\lambda = \lim_n \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$$

então o intervalo de convergência da série é $r = \frac{1}{\lambda} = 1$. Notemos que $x = 1$ e $x = 3$ são os extremos do intervalo de convergência. Substituindo $x = 3$ na série de potências temos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, que é divergente pois trata-se da série harmónica. Substituindo $x = 1$ na série de potências temos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, que é simplesmente convergente visto que se trata da série harmónica alternada. Por isso, concluímos que o intervalo de convergência da série de potências é $I = [1,3[$.

Exemplos I.56.

(i) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^n}(x+3)^n$.

Trata-se de uma série de potências em que $a = -3$ e $c_n = \frac{1}{(n!)^n}$. Uma vez que

$$\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{(n!)^n}} = \lim_n \frac{1}{n!} = 0$$

então o raio de convergência é $r = \frac{1}{\lambda} = +\infty$, por isso a série converge em $I = \mathbb{R}$.

(ii) Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n!}^{\,n} (x-3)^n$.

Trata-se de uma série de potências em que $a = 3$ e $c_n = \sqrt{n!}^{\,n}$. Obtemos

$$\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\sqrt{n!}^{\,n}} = \lim_n \sqrt{n!} = +\infty.$$

A série converge em $I = \{3\}$ dado que $r = \frac{1}{\lambda} = 0$.

(iii) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\, 2^n}(x-2)^n$. Temos uma série de potências em que $a = 2$ e $c_n = \frac{1}{n\, 2^n}$. Deste modo

$$\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n\, 2^n}} = \lim_n \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}.$$

Logo $r = \frac{1}{\lambda} = 2$ [xxx]. Assim, $x = a - r = 0$ e $x = a + r = 4$.

Substituindo $x = 4$ na série de potências obtemos a série harmónica, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, que é divergente. Substituindo $x = 0$ na série de potências temos a série harmónica alternada, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, que é simplesmente convergente. Assim, concluímos que o intervalo de convergência da série de potências é $I = [0,4[$.

No que se segue, vamos constatar um facto muito importante do ponto de vista do estudo de funções reais de variável real.

Mostraremos que, dada a série, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$, com intervalo de convergência I, $I \neq \{a\}$, podemos definir uma função diferenciável, f, de domínio $D_f = I$, tal que a cada $x \in I$ faça corresponder a soma $f(x)$ da série de potências de $x - a$.

[xxx] Tendo em conta que se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$»

Exemplo I.57.

Consideremos a série de potências de x, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Atendendo a que o seu intervalo de convergência é $I =]-1,1[$, podemos definir a função

$$f:]-1,1[\to \mathbb{R}$$

por meio de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots.$$

Será que $f(x)$ é a expressão analítica de alguma função conhecida?

Note-se que para cada concretização de x obtemos uma série geométrica de razão $r = x$.

Sabemos que a série geométrica de potências de x é convergente se e só se $|x| < 1$. De facto, se $-1 < x < 1$ então a sucessão das somas parciais é dada por

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Logo

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \lim_n (1 - x^n) = \frac{1}{1 - x}$$

uma vez que $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$.

Deste modo, para cada $x \in]-1,1[$, definimos $f(x)$ como a soma da série, ou seja,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Tal como para as funções reais de variável real, podemos efetuar as operações de derivação e primitivação com séries de potências.

Consideremos então a série de potências de x:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots.$$

Derivando termo a termo a série obtemos

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Observemos que podemos escrever

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(c_n x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Primitivando, agora, termo a termo a série dada obtemos

$$c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} + \frac{c_3 x^4}{4} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + C,$$

sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária.

Reparemos que podemos escrever

$$\int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int c_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

Se o intervalo de convergência da série de potências de x, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, tem raio r então os intervalos de convergência das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ têm o mesmo raio (ver alínea 7 do Exercício I.59.).

No entanto, os intervalos de convergência das três séries podem ser diferentes.

Exemplo I.58.

Consideremos novamente a série geométrica de potências de x,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

cujo intervalo de convergência é $I =]-1, 1[$.

Então a série obtida por derivação é dada por

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n.$$

Sabemos que o seu intervalo de convergência tem centro $a = 0$ e raio $r = 1$.

Assim, basta analisar a convergência em $x = -1$ e $x = 1$. É fácil provar que as respetivas séries numéricas são divergentes, por isso ambas as séries têm o mesmo intervalo de convergência.

Por sua vez, a série obtida por primitivação é dada por

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n + C,$$

sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária.

Como o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ tem centro $a = 0$ e raio $r = 1$ então devemos analisar a convergência em $x = -1$ e em $x = 1$.

Para $x = 1$ temos a série harmónica, que é divergente. Mas, para $x = -1$ temos a série harmónica alternada, que é simplesmente convergente.

Assim o intervalo de convergência da série, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$, é igual a $I = [-1, 1[$.

Exercícios I.59.

1. Determine o intervalo de convergência, indicando o seu raio, de cada uma das séries:
   (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 3^n x^n$. Resposta: $r = \frac{1}{3}$ e $I = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$;
   (ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^n$. Resposta: $r = 1$ e $I =]-1, 1[$;
   (iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n+7} x^n$. Resposta: $r = 1$ e $I = [-1, 1[$;
   (iv) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{5+2n}$. Resposta: $r = 1$ e $I =]-1, 1]$;
   (v) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n+1)}$. Resposta: $r = 1$ e $I = [-1, 1]$.

2. Determine o intervalo de convergência, indicando o seu raio, de cada uma das séries:
   (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}$. Resposta: $r = 3$ e $I =]-6, 0[$;
   (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n (x-7)^n}{n}$. Resposta: $r = \frac{1}{3}$ e $I = \left[\frac{20}{3}, \frac{22}{3}\right[$;

(iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n(x+5)^n}{n}$. Resposta: $r = \frac{1}{4}$ e $I = \left[-\frac{21}{4}, -\frac{19}{4}\right[$;

(iv) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^{2n+1}}$. Resposta: $r = 4$ e $I = [-3,5[$;

(v) $\sum_{n=0}^{+\infty}(2x+1)^n$. Resposta: $r = \frac{1}{2}$ e $I =]-1,0[$.

3. Supondo que o intervalo de convergência da série de potências de x, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, tem raio r , determine o raio do intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(\alpha x)^n$, sendo $\alpha \neq 0$. Resposta: $\frac{r}{|\alpha|}$.

4. Seja $c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ para $n \in \mathbb{N}_0$.

   Determine o intervalo de convergência de cada uma das séries de potências de x:

   (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Resposta: $I = [-1,1[$;

   (ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(2x)^n$. Resposta: $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$;

   (iii) $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+2^n)c_n x^n$. Resposta: $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

5. Mostre que se o intervalo de convergência da série de potências de x, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, tem raio r então o intervalo de convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n}$ tem raio $\sqrt{r}$.

6. Determine o raio e o intervalo de convergência de cada uma das séries:

   (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. Resposta: $r = +\infty$ e $I =]-\infty, +\infty[$;

   (ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n} x^{2n}$. Resposta: $r = 0$ e $I = \{0\}$;

   (iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}$. Resposta: $r = +\infty$ e $I =]-\infty, +\infty[$;

   (iv) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 2^{2n} x^{2n}$. Resposta: $r = \frac{1}{2}$ e $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$;

   (v) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2(n+1)} x^{2n}$. Resposta: $r = 2$ e $I =]-2, 2[$;

   (vi) $\sum_{n=0}^{+\infty} 9^{-n-1}(x-2)^{2n}$. Resposta: $r = 3$ e $I =]-1, 5[$.

7. Mostre que, se o intervalo de convergência da série de potências de x, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, tem raio r então os intervalos de convergência das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ têm o mesmo raio.

8. Considere a função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$.
   (i) Indique o domínio de f. Resposta: $D_f = [-1{,}1[$;
   (ii) Determine a função derivada de f. Resposta: $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n$, $x \in]-1{,}1[$;
   (iii) Calcule $\int_0^x f(t)dt$ e indique o intervalo de convergência da série obtida. Resposta: $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$, $x \in [-1{,}1]$.

9. Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$.
   (i) Indique o domínio de f. Resposta: $D_f = \mathbb{R}$;
   (ii) Verifique que $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in D_f$.
   (iii) Mostre que $f(x) = e^x$.
   (iv) Escreva o desenvolvimento em série do número de Neper. Resposta: $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

I.2.2 – Séries de Taylor e séries de Mac-Laurin. Representação de funções elementares pela sua série de Taylor (ou série de Mac-Laurin). Construção de desenvolvimentos em série de funções utilizando mudança de variável e técnicas de derivação e integração.

Na secção anterior mostrámos que, dada a série, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$, com intervalo de convergência I, $I \neq \{a\}$, podemos definir uma função diferenciável, f, de domínio $D_f = I$, tal que a cada $x \in I$ faça corresponder a soma $f(x)$ da série de potências de $x - a$.

Suponhamos, agora, que temos uma função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciável num intervalo aberto J, isto é, todas as suas derivadas são contínuas em J.

Interessa-nos abordar a questão:

«Como determinar um desenvolvimento em série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \, (x-a)^n$$

da função f de modo que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \, (x-a)^n$$

para todo $x \in I$?».

Se assumirmos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \, (x-a)^n$$

para todo $x \in I$ então os coeficientes da série são determinados por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Vamos então supor que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(x-a)^n$ para todo $x\ \in I$.

Substituindo x por a obtemos $c_0 =\ f(a)$. Derivando vem

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n\,(x-a)^{n-1}$$

e substituindo x por a obtemos $c_1 =\ f'(a)$. Derivando novamente vem

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n\,(x-a)^{n-2}$$

e substituindo x por a obtemos $f''(a) = 2c_2$, ou seja, $c_2 = \frac{f''(a)}{2}$.

Derivando f até à ordem k vem

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)c_n\,(x-a)^{n-k}$$

e substituindo x por a temos $f^{(k)}(x) = k!\,c_k$, ou seja,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Assim sendo, vamos definir séries de Taylor e séries de Mac-Laurin, uma vez que se uma função f coincide com uma série de potências, com raio de convergência positivo (ou infinito), então existe apenas uma série nessas condições, designada por série de Taylor da função f.

Definição I.60.

Seja $f: D_f\ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função indefinidamente diferenciável no ponto de abcissa $x = a \in D_f$. Chamamos série de Taylor, em $x = a$, da função f à série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

No caso particular em que $a = 0$ obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

que designamos por série de Mac-Laurin da função f.

Exemplo I.61.

Consideremos a função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

O seu domínio é $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Fixamos $a = 0 \in D_f$.

Temos $f(0) = 1$. Calculando as sucessivas derivadas de f em $a = 0$ obtemos

$f'(0) = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{x=0} = 1;$

$f''(0) = \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{2}{(1-x)^3}\right]_{x=0} = 2;$

$f^{(3)}(0) = \left[\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{6}{(1-x)^4}\right]_{x=0} = 6;$

$f^{(4)}(0) = \left[\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{6}{(1-x)^4}\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{24}{(1-x)^5}\right]_{x=0} = 24;$

Generalizando, é evidente que a derivada de f ordem n em $x = 0$ é dada por

$$f^{(n)}(0) = \left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right]_{x=0} = n!$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Logo a série de Mac-Laurin da função f é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

ou seja, é a série de potências de x cujos coeficientes são dados por $c_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplificámos como é possível construir uma série de Taylor, em $x = a$, para qualquer função indefinidamente diferenciável num intervalo aberto que contenha o ponto de abcissa $x = a$. Além disso, interessa-nos salientar que, em alguns casos, podemos substituir o estudo da função f pelo da sua série de Taylor. Embora, no âmbito do nosso estudo, essa substituição não acarrete problemas, verificaremos no Exemplo I.64. que nem sempre é possível identificar uma função com a sua série de Taylor.

Definição I.62.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ a série de Taylor, em $x = a$, da função f.

Dizemos que a função f é representável pela série de Taylor, em $x = a$, da função f se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

para todo $x \in I$, sendo que I é o intervalo de convergência da série de potências.

Como primeiro exemplo de representação de uma função, vejamos que a função considerada no Exemplo I.61 é representável pela série geométrica de potências de x.

Exemplo I.63.

Retomamos a função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

No exemplo anterior determinámos a série de Mac-Laurin da função f

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

No Exemplo I.61. provámos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ para } x \in]-1,1[.$$

Assim, podemos dizer que a função f é representável pela série de potências de x no seu intervalo de convergência.

Notemos que essa representação não se verifica para todo o domínio

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, mas apenas no intervalo $]-1,1[\subset D_f$.

Introduzimos, agora, um exemplo de uma função que não pode ser representável pela sua série de Taylor.

Exemplo I.64.

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$.

É possível mostrar que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Uma vez que todas as derivadas de f são nulas na origem, então concluímos que a série de MacLaurin de f é a série nula numa vizinhança da origem dado que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

Porém, a função f é não-nula em qualquer vizinhança da origem pois

$$f(0) = 0 \text{ e } f(x) > 0 \text{ para } x \neq 0,$$

o que significa que f não é representável pela sua série de Mac-Laurin.

A questão da existência da representação de uma função pela sua série de Taylor é difícil de demonstrar. Assim sendo, a partir de agora assumiremos (sem prova) que as funções elementares que considerarmos coincidem, num subconjunto do seu domínio, com as respetivas séries de Taylor.

Pretendemos, agora, determinar os desenvolvimentos em série de algumas funções reais de variável real, assim como os respetivos intervalos de convergência.

Exemplos I.65.

(i) Seja $f(x) = e^x$ e $a = 0$. Todas as derivadas de f coincidem com a função, logo são contínuas em $\mathbb{R}$, isso significa que f é indefinidamente diferenciável em qualquer intervalo que contenha a. Em primeiro lugar, determinamos a série de MacLaurin de f. Atendendo a que $f^{(n)}(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Note-se que a série de potências de x é convergente em $\mathbb{R}$. Assim, podemos assumir que a função exponencial é representada pela série para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Seja $f(x) = \sin x$ e $a = 0$. Note que, as derivadas de ordem $n \in \mathbb{N}_0$ de f são dadas por

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Uma vez que as derivadas são contínuas em $\mathbb{R}$, então f é indefinidamente diferenciável em qualquer intervalo que contenha a. Uma vez que $f^{(2n)}(0) = 0$ e $f^{(2n-1)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ então a série de MacLaurin de f é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Note-se que a série de potências de x é convergente em $\mathbb{R}$.

Além disso, podemos escrever que

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Seja $f(x) = \cos x$ e $a = 0$. Note que, as derivadas de ordem $n \in \mathbb{N}_0$ de f são dadas por

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}n - x\right).$$

Uma vez que as derivadas são contínuas em $\mathbb{R}$, concluímos que f é indefinidamente diferenciável em qualquer intervalo que contenha a.

Como $f^{(2n-1)}(0) = 0$ e $f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ então a série de MacLaurin de f é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Note-se que a série de potências de x é convergente em $\mathbb{R}$. Podemos escrever que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

De seguida, recorrendo a uma mudança de variável obtemos representações em série da mesma função centradas em diferentes pontos do seu domínio.

Exemplo I.66.

Consideremos a função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

O domínio desta função é $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Já vimos que f é representável pela série de MacLaurin no seu intervalo de convergência, ou seja,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ para } x \in]-1, 1[.$$

Vejamos agora como representar a mesma função através de uma série de Taylor na vizinhança de outro ponto, isto é, centrada em $x = a$, para algum $a \notin \{0, 1\}$.

Escolhemos, por exemplo, $a = 2$. Observamos que

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{-1-(x-2)} = -\frac{1}{1+(x-2)}.$$

Fazendo a mudança de variável $y = -(x-2)$ obtemos

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n, \text{ para } -1 < y < 1.$$

Regressando à variável x vem

$$\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n, \text{ para } 1 < x < 3.$$

Enunciamos, agora, dois resultados (Proposições I.67. e I.70.) que permitem efetuar algumas operações com desenvolvimentos em séries, utilizando mudanças de variável assim como as técnicas de derivação e integração.

Proposição I.67.

Suponhamos que:[xxxi] $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ para $x \in I(r)$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ para $x \in I(r')$.

Temos

(i) Se $k \in \mathbb{N}$ então $x^k f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{k+n}$, para $x \in I(r)$;

(ii) Se $k \in \mathbb{N}$ então $f(x^k) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{kn}$, para $x \in I(r'')$, sendo $r" = \sqrt[n]{r}$.

(iii) Se $\alpha \neq 0$ então $f(\alpha x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n x^n$, para $x \in I(r'')$, sendo $r" = \frac{r}{|\alpha|}$;

(iv) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha f(x) + \beta\, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)\, x^n$, para $x \in I(r'')$, sendo $r" = min(r, r')$;

xxxi Temos representado o intervalo de convergência de uma série por I. Quando necessitamos de fazer operações com séries com raios de convergência distintos adotamos a notação $I(s)$ para representar o intervalo de extremos $-s$ e s.

Exemplos I.68.

Seja $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(i) Então

$$x^2 e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2 x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Então

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Então

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(iv) Sabemos que $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Usando as operações para séries obtemos

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[1 + (-1)^n]}{n!} x^n, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Notemos que, se n é ímpar temos $1 + (-1)^n = 0$, mas quando n é par obtemos $1 + (-1)^n = 2$. Assim

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Exemplos I.69.

Seja $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, para $x \in \,]-1, 1[$.

(i) O desenvolvimento de $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ em série de MacLaurin é dado por

$$\frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-(2x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n, \text{ para } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

(ii) O desenvolvimento de $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ em série de MacLaurin é dado por

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-(x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}, \text{ para } x \in]-1,1[.$$

Proposição I.70.

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n$ para $x \in I(r)$[xxxii] então

(i) $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n\, x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$, para, pelo menos, $x \in]-r, r[$;

(ii) $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x c_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x c_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[c_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x$, isto é, $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para, pelo menos, $x \in]-r, r[$.

Exemplos I.71.

Seja $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, para $x \in]-1,1[$.

(i) Consideremos $g(x) = \frac{1}{1+x}$. O desenvolvimento de $g(x)$ em série de MacLaurin é dado por

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \text{ para } x \in]-1,1[.$$

(ii) Consideremos $g(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$. Note-se que $g(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)'$. Então $g(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} ((-1)^n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1}$, para, pelo menos, $x \in]-1,1[$.

[xxxii] Intervalo de extremos $-r$ e r.

Para $x = -1$ temos a série de termos negativos, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-n)$ e para $x = 1$ temos a série alternada, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n$. Em ambos os casos, temos séries divergentes, portanto o desenvolvimento de $g(x)$ em série de MacLaurin verifica-se para $x \in]-1,1[$.

(iii) Consideremos $g(x) = \ln(1+x)$. Notemos que

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$$

então

$$\ln(1+x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^n t^n\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

para, pelo menos, $x \in]-1,1[$.

Para $x = -1$ temos a série de termos negativos, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n+1}$, que é divergente e para $x = 1$ temos a série alternada, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, que é simplesmente convergente. Assim, o desenvolvimento de $g(x)$ em série de MacLaurin verifica-se para $x \in]-1,1]$.

(iv) Consideremos $g(x) = \ln(1-x)$. Notemos que

$$\ln(1-x) = \int_0^x \left(-\frac{1}{1-t}\right)dt = -\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$$

Então

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,dt = -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{n+1}x^{n+1}$$

para, pelo menos, $x \in]-1,1[$.

Para $x = 1$ temos a série de termos negativos, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n+1}$ que é divergente e para $x = -1$ temos a série alternada, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$, que é simplesmente convergente. Assim, o desenvolvimento de $g(x)$ em série de MacLaurin verifica-se para $x \in [-1,1[$.

(v) Consideremos $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Então o seu desenvolvimento em série de MacLaurin é dado por

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}, \text{ para } x\in\,]-1,1[.$$

(vi) Consideremos $h(x)=arctg(x)$. Reparemos que

$$arctg(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Então

$$arctg(x)=\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

para, pelo menos, $x\in\,]-1,1[$. Para $x=-1$ e $x=1$ temos as séries alternadas, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, respetivamente.

Em ambos os casos, temos séries simplesmente convergentes, portanto o desenvolvimento de $h(x)$ em série de MacLaurin verifica-se para $x\in\,[-1,1]$.

Exercícios I.72.

1. Utilizando $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, para $x\in\,]-1,1[$, determine o desenvolvimento em série de MacLaurin das expressões e indique o respetivo intervalo de convergência:

(i) $f(x)=\frac{1}{1+2x}$. Resposta: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^n$, $I=]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$;

(ii) $f(x)=\frac{1}{2+x}$. Resposta: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$, $I=]-2,2[$;

(iii) $f(x)=\frac{x+1}{1-x}$. Resposta: $1+\sum_{n=1}^{+\infty}2x^n$, $I=]-1,1[$;

(iv) $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$. Resposta: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}x^{2n}$, $I=]-2,2[$;

(v) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$. Resposta: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)x^{2n+1}$, $I=]-1,1[$.

2. Sabendo que $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, verifique que $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ e $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

3. Considere $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(i) Sabendo que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, determine o seu desenvolvimento em série de MacLaurin. Resposta: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

(ii) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin de $g(x) = e^{-x^2}$.
Resposta: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$;

(iii) Escreva a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em $x = a$, $a \neq 0$. Resposta: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n$.

4. Seja $sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. Utilizando $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, determine o desenvolvimento em série de MacLaurin de $f(x) = sin^2(x)$.
Resposta: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$.

5. Utilizando $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, para $x \in]-1,1[$, calcule a derivada de ordem 10 dessa função em $a = 0$. Resposta: $10!$

6. Sabendo que $arctg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ para $x \in [-1,1]$, determine o desenvolvimento em série do número π. Resposta: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1}$.

7. Utilizando desenvolvimentos em série, calcule

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Resposta: 1;

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$. Resposta: $\frac{1}{2}$.

8. Suponha que $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é representável pela sua série de Mac-Laurin num subconjunto do seu domínio, ou seja, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ para todo $x \in I \subseteq D_f$.

   Mostre que:

   (i) Se f é par então $c_{2k-1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

   (ii) Se f é impar então $c_{2k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

9. Suponha que a função exponencial de variável complexa é representável pela sua série de Mac-Laurin, ou seja, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Assuma ainda que as operações com séries de potências de números complexos gozam das mesmas propriedades das séries de potências de números reais.

   (i) Escreva o desenvolvimento em série de potências de x para e^{ix} para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo i a unidade imaginária, e indique os coeficientes da série.

   Resposta: $e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n$

   (ii) Mostre a denominada fórmula de Euler, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (iii) Calcule $e^{i\pi}$. Resposta: $e^{i\pi} = -1$.

Tabela I.73. [Desenvolvimento de funções em séries de Mac-Laurin]

$f(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$	Intervalo de convergência
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$]-1,1[$
e^x	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$ [xxxiii]	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$ [xxxiv]	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$	$]-1,1]$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arctg} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1,1]$
$(1+x)^k$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)x^n}{n!}$	$]-1,1[$

[xxxiii] Recorde que $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

[xxxiv] Recorde que $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(Página deixada propositadamente em branco.)

CAPÍTULO II

FUNÇÕES REAIS DE DUAS VARIÁVEIS REAIS

Neste capítulo vamos estudar funções reais de duas variáveis reais e, com o objetivo de ilustrar alguns conceitos e resultados, mencionaremos aplicações num ambiente económico.

Assim, definindo z como função de duas outras variáveis x e y através da expressão $z = f(x, y)$, começaremos por introduzir a noção de domínio, de contradomínio, de gráfico e de curvas de nível de funções reais de duas variáveis reais.

Na teoria económica é usual encontrarmos relações entre três (ou mais) variáveis. Por exemplo, a produção de uma empresa depende do capital investido e da força laboral empregue no processo produtivo enquanto a utilidade (ou satisfação) que um consumidor retira ao adquirir um cabaz de dois (ou mais) bens é função das quantidades desses bens.

O conceito de utilidade marginal[i] foi introduzido no século XIX pelos economistas (chamados de marginalistas). Desde então, a utilidade marginal de um bem tem sido interpretada como a derivada parcial da função utilidade relativamente a esse bem. De modo análogo, o produto marginal do capital (ou do trabalho) é representado pela derivada parcial da função de produção relativamente ao capital (ou do trabalho). Formalizaremos a definição de

[i] Utilidade proporcionada por uma unidade adicional de bem consumido.

derivadas parciais de funções a partir destes conceitos e – atendendo a que nos interessamos pela resolução de problemas – optaremos por usar funções regulares[ii].

Focaremos também – recorrendo ao cálculo diferencial – a obtenção de valores aproximados por intermédio de aproximações lineares de funções, o uso da regra da cadeia na derivada de funções compostas e na derivada de funções implícitas.

As funções homogéneas e homotéticas satisfazem algumas propriedades que se revelam particularmente interessantes no contexto económico, razão pela qual a secção II.4 lhes é dedicada. Recorde-se que entre as funções mais utilizadas pelos economistas estão as funções (homogéneas) de Cobb-Douglas e as funções CES[iii].

Por fim utilizaremos as derivadas parciais para estudar extremos (máximos e mínimos) de funções de duas variáveis. Prestaremos particular atenção aos seguintes problemas de otimização: maximização do lucro de uma empresa, minimização do custo total de uma empresa sujeito a uma produção previamente fixada e maximização da utilidade do consumidor sujeita a uma restrição orçamental.

[ii] Funções que admitem derivadas parciais contínuas num aberto do seu domínio.

[iii] Funções com elasticidade de substituição constante; abreviatura de Constant Elasticity of Substitution (CES).

II.1 –Domínio, contradomínio e curvas de nível de funções de duas variáveis. Função de produção de uma empresa e isoquantas. Função de utilidade do consumidor e curvas de indiferença.

Recordemos o conceito de função real de uma variável real. Trata-se de uma correspondência unívoca definida no conjunto dos números reais que encaramos como um processo que transforma números reais em números reais.

$$\xrightarrow{input\ x} \boxed{f} \xrightarrow{output\, f(x)}$$

De um modo geral, adotamos a notação

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $x \in D_f \to y = f(x)$.

E se o input for o par (x, y)? Neste caso, o conjunto dos inputs (conjunto de partida) é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ enquanto o conjunto dos outputs (conjunto de chegada) é um subconjunto de $\mathbb{R}$,

$$\xrightarrow{input\ (x,y)} \boxed{f} \xrightarrow{output\, f(x,y)}$$

e, escrevemos

$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \in D_f \to z \in \mathbb{R}$, onde $z = f(x, y)$.

E se, em vez de um par de números reais, assumirmos como input um elemento de $\mathbb{R}^n$, isto é, o n-uplo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$?

$$\xrightarrow{\;input\;}\xrightarrow{(x_1,x_2,\dots,x_n)}\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{f}}}}\xrightarrow{\;output\;}\xrightarrow{f(x_1,x_2,\dots,x_n)}$$

Neste caso teremos a função

$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f \to z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Neste capítulo, consideramos $n = 2$, isto é, funções de duas variáveis definidas por

$$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ tal que } (x, y) \in D_f \to z = f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, se a qualquer par $(x, y) \in D_f$ corresponde um e um só $z \in \mathbb{R}$, dizemos que f é uma função real definida em $\mathbb{R}^2$ (ou função de duas variáveis reais), sendo D_f o seu domínio[iv]; às variáveis x e y damos o nome de variáveis independentes[v] enquanto z é dita variável dependente.

Também dizemos que z é a imagem ou transformado do elemento $(x, y) \in D_f$, por intermédio de f e ao conjunto

$$CD_f = \left\{ z \in \mathbb{R}: z = f(x, y) \wedge (x, y) \in D_f \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

constituído por todas as imagens do domínio chamamos contradomínio da função f.

[iv] Ou campo de existência.

[v] Ou variáveis explicativas, ou, ainda, argumentos.

Tal como no caso das funções reais de uma variável faremos a seguinte convenção: sempre que fizermos referência a uma função, definida por uma expressão com duas variáveis x e y, sem indicarmos explicitamente o domínio da função, subentendemos que esse domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por todos os pares cujas componentes, colocadas ordenadamente nos lugares das variáveis x e y, convertem a expressão considerada na designação de um número real.

Importa, também, referir que o gráfico da função real f de duas variáveis e domínio D_f é a superfície G_f definida por

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \ \wedge (x, y) \in D_f \}.$$ [vi]

Podemos ainda traçar curvas no plano XOY, para cada $c \in CD_f$, definidas por

$$I_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in D_f \ \wedge \ f(x, y) = c\}.$$

Estas curvas podem ser visualizadas como sendo a interseção do plano de equação $z = c$ com a superfície G_f de equação $z = f(x, y)$. Chamamos a I_c curva de nível de f para $z = c$.

Deste modo, dizemos que uma curva de nível da função f para $z = c$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) pertencentes ao domínio de f com a mesma imagem, isto é, tais que $f(x, y) = c$.

[vi] $\mathbb{R}^3$ representa o conjunto de todos os ternos ordenados de números reais, isto é, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Exemplos II.1. [Algumas funções polinomiais]

a) A função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = c$, sendo $c \in \mathbb{R}$, é uma função constante cujo domínio é $D_f = \mathbb{R}^2$. No caso em que $c \neq 0$ o gráfico de f é um plano paralelo ao plano XOY mas se $c = 0$ então o gráfico de f é coincidente com esse plano coordenado.

b) Dizemos que a função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = ax + by + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, é um polinómio de grau 1 se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.[vii]
O domínio de f é $\mathbb{R}^2$ e o seu gráfico é um plano.

c) Um polinómio de grau 2 é definido pela função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de domínio $\mathbb{R}^2$, em que

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + mx + ny + p,$$

onde $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$ e, ainda, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

d) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$uma matriz simétrica. Chamamos forma quadrática associada a A à função $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de domínio $\mathbb{R}^2$, definida por

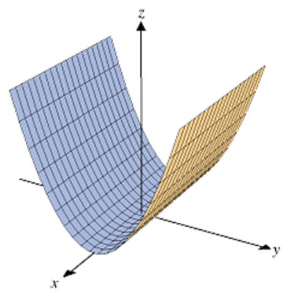
$$Q(X) = X^T A X = ax^2 + 2bxy + cy^2, \text{ para todo } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Notemos que uma forma quadrática tem apenas termos de grau 2. Trata-se de um caso particular das funções polinomiais de segundo grau (sendo estas usualmente designadas por funções quadráticas).

[vii] Designamos f por função afim, ou função linear no caso em que $c = 0$.

Exemplos II.2. [Gráficos e curvas de nível de algumas formas quadráticas]

a) O gráfico de $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = y^2$ é um cilindro parabólico;

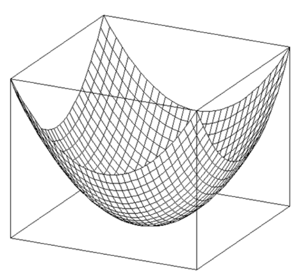


O contradomínio de f é dado por $CD_f = [0, +\infty[$.

As curvas de nível de f para $c > 0$ são parábolas de equação

$y^2 = c$ enquanto a reta de equação $y = 0$ (eixo dos XX) representa a curva de nível de f para $c = 0$.

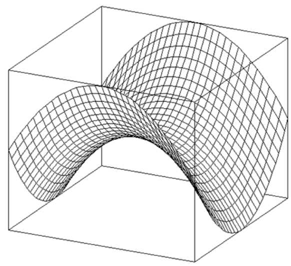
b) O gráfico de $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 + y^2$ é um parabolóide de revolução;



O contradomínio de f é dado por $CD_f = [0, +\infty[$.

As curvas de nível de f para $c > 0$ são circunferências de centro na origem e raio $r = \sqrt{c}$, enquanto o ponto $(0,0)$ representa a curva de nível de f para $c = 0$.

c) O gráfico de $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 - y^2$ é um paraboloide hiperbólico.



O contradomínio de f é $CD_f = \mathbb{R}$.

As curvas de nível de f são: elipses de equação $x^2 - y^2 = c$, para $c > 0$; elipses de equação $y^2 - x^2 = |c|$, para $c < 0$; um par de retas de equação $y = x$ e $y = -x$, para $c = 0$.

Exemplos II.3. [Domínio, contradomínio e curvas de nível de algumas funções]

a) Consideremos a função $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = e^{xy} - 17.$$

Temos $D_g = \mathbb{R}^2$ e $CD_g =]-17, +\infty[$.

As curvas de nível da função g para $c > -17$ são hipérboles de equação

$$xy = \ln(17 + c).$$

b) Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$.

O domínio desta função é dado por $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\}$.

Geometricamente, podemos afirmar que $(x,y) \in D_f$ se e só se (x,y) não pertence à reta de equação $y = x$.

Por sua vez, o contradomínio da função é dado por

$CD_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

As curvas de nível de f para $c \neq 0$ são representadas por retas de declive $m = 1$ e ordenada na origem $b = -c^{-1}$.

c) Seja, agora, $h: D_h \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \to z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Como $h(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \in \mathbb{R}$ desde que $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, podemos afirmar que $(x, y) \in D_h$ se e só se (x, y) é um ponto do círculo de raio 3, centrado na origem, e escrevemos

$D_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Por sua vez, o contradomínio da função é dado por $CD_h = [0,3]$.

As curvas de nível de h para $c \in [0,3[$ são representadas por circunferências de centro $C = (0,0)$ e raio $r = \sqrt{9 - c^2}$. Notemos que a curva nível para $c = 3$ reduz-se ao ponto $(0,0)$.

Exemplo II.4. [Função de produção da empresa e isoquantas]

De um modo geral, podemos dizer que a «produção consiste num processo de transformação de um conjunto de bens noutro conjunto de bens».[viii] Designamos os primeiros por fatores (de produção) e os segundos por produtos.

$$\xrightarrow{fatores\ de\ produção} \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{capital\ K}\to \\ \xrightarrow{trabalho\ L}\to \end{array} \right) \boxed{\boxed{\boxed{\boxed{empresa}}}} \xrightarrow{volume\ de\ produção} \xrightarrow{Q(K,L)}$$

O volume de produção de um certo produto[ix] pode ser determinado em função da quantidade L de trabalho e da quantidade K de capital.

[viii] Introdução à Teoria Microeconómica, Fernando de Jesus, Publicações D. Quixote, 1992, p. 93.

[ix] Um produto é um bem económico pois tem um custo e um valor. Em particular, um bem material, um serviço ou uma informação são exemplos de produtos. [Introdução à Teoria da Microeconomia, João Santana, IST Press, 2012].

Designamos por função de produção a relação entre o volume de produção Q e as quantidades L e K dos fatores de produção e escrevemos

$$\begin{array}{rcl} Q: [0,+\infty[\times [0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (K,L) & \rightarrow & z = Q(K,L). \end{array}$$

Por outro lado, fixando o volume de produção em $z = c \geq 0$, podemos determinar combinações de K e L tais que $Q(K,L) = c$.

Deste modo, definimos isoquanta como o lugar geométrico das combinações dos fatores de produção para as quais a quantidade produzida é a mesma, ou seja,

$$I_c = \{(K,L) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : Q(K,L) = c\}^{\text{x}}, \text{ para cada } c \geq 0.$$

Notemos que, as isoquantas são definidas apenas em $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$.

Existem vários tipos de funções de produção, nomeadamente, as que são definidas por

i) $Q(K,L) = aK + bL$, onde a e b são parâmetros reais positivos;

ii) $Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, onde $A \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ são parâmetros;

iii) $Q(K,L) = (\alpha K^{\delta} + (1-\alpha)L^{\delta})^{1/\delta}$, onde $0 < \alpha < 1$ e $0 \neq \delta < 1$ são parâmetros.

---

x $\mathbb{R}_0^+$ representa o conjunto dos números reais não negativos.

Exemplo II.5. [Função de utilidade do consumidor e curvas de indiferença]

«Para descrever as preferências do consumidor, usa-se uma função utilidade que permite ordenar preferências: um determinado plano de consumo é preferível ou indiferente a outro… O plano de consumo é uma ação do consumidor que especifica as quantidades dos produtos por ele requeridas, de modo a obter a maior satisfação».[xi]

De acordo com a teoria neoclássica do valor, o consumidor é um agente económico dotado de uma função de utilidade que atribui um valor numérico a cada cabaz (x, y) de dois bens X e Y de consumo.[xii]

Considerando, apenas, dois produtos, a função de utilidade

$$\begin{array}{ccc} U: [0, +\infty[\times [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow & z = U(x, y) \end{array}$$

é a quantificação matemática do conceito económico de utilidade atribuída aos bens X e Y por parte do consumidor através de $U(x, y)$, isto é,

$$\xrightarrow{\textit{quantidades } x \textit{ e } y \textit{ dos bens}} \begin{pmatrix} \xrightarrow{\textit{bem } X}\rightarrow \\ \xrightarrow{\textit{bem } Y}\rightarrow \end{pmatrix} \boxed{\boxed{\boxed{\textit{consumidor}}}} \xrightarrow{\textit{utilidade de consumo}} \xrightarrow{U(x,y)}$$

Uma função de utilidade permite descrever as preferências do consumidor entre quaisquer dois cabazes (x_1, y_1) e $(x_2,\ y_2)$ da seguinte forma:

i) (x_1, y_1) é preferido a $(x_2,\ y_2)$ se e só se $U(x_1, y_1) > U(x_2,\ y_2)$;

ii) $(x_2,\ y_2)$ é preferido a (x_1, y_1) se e só se $U(x_2,\ y_2) > U(x_1, y_1)$;

iii) (x_1, y_1) é indiferente a $(x_2,\ y_2)$ se e só se $U(x_1, y_1) = U(x_2,\ y_2)$.

[xi] Introdução à Teoria da Microeconomia, João Santana, IST Press, 2012
[xii] Onde x e y são as quantidades dos bens X e Y, respetivamente.

Neste caso observamos que a utilidade U do consumidor depende das quantidades x e y dos bens de consumo X e Y.

Por outro lado, dado um nível de utilidade c podemos determinar combinações de x e y tais que $U(x,y) = c$. Assim, uma curva de indiferença é o lugar geométrico das combinações das quantidades x e y de dois bens para as quais a utilidade (satisfação) do consumidor é a mesma, isto é, para as quais o consumidor é indiferente.

Assim, uma curva de indiferença é definida por

$$I_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : U(x,y) = c\}, \text{ para cada } c \in \mathbb{R}.$$

Tal como no caso das funções de produção, as funções de utilidade U podem assumir várias formas, designadamente:

i) $U(x,y) = ax + by$, onde a e b são parâmetros reais positivos;

ii) $U(x,y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, onde $A \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ são parâmetros;

iii) $U(x,y) = (\alpha x^{\delta} + (1-\alpha)y^{\delta})^{1/\delta}$, onde $0 < \alpha < 1$ e $0 \neq \delta < 1$ são parâmetros.

Exercícios II.6.

1. Para cada uma das formas quadráticas $Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ determine a matriz simétrica que lhe está associada:

   a) $Q(x,y) = 2xy$. Resposta: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   b) $Q(x,y) = 9x^2 + 5y^2$. Resposta: $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

   c) $Q(x,y) = 9x^2 - 5y^2$. Resposta: $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

   d) $Q(x,y) = 5y^2$. Resposta: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

   e) $Q(x,y) = -9x^2$. Resposta: $A = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   f) $Q(x,y) = 9x^2 + 2xy + 5y^2$. Resposta: $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Determine e represente geometricamente o domínio de cada uma das funções

$$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

   definidas por:

   a) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$. Resposta: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3\}$.

   b) $f(x,y) = \ln(xy)$. Resposta: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$.

   c) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$. Resposta: $D_f = [-1,1] \times [-1,1]$.

   d) $f(x,y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$.

   Resposta: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \leq -2 \vee x \geq 2) \wedge -2 \leq y \leq 2\}$.

   e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4} + \sqrt{16-x^2-y^2}$.

   Resposta: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.

   f) $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$. Resposta: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x^2\}$.

   g) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Resposta: $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   h) $f(x,y) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$. Resposta: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1 \wedge y \neq 0\}$.

3. Considere uma função de utilidade $U: [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$U(x, y) = 3x + 5y.$$

Faça o esboço gráfico das curvas de nível de U para $c = 1, 5, 15$.

4. Considere uma função de produção $Q: [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \text{ onde } A \in \mathbb{R}^{+} \text{ e } 0 < \alpha < 1.$$

Faça o esboço gráfico das curvas de nível de Q nos seguintes casos:

a) $A = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $c = 1, 2, 4$;

b) $A = 1$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $c = 1, 2, 4$;

c) $A = 1$, $\alpha = \frac{1}{8}$, $c = 1, 2, 4$.

II.2. – Derivadas parciais de funções de duas variáveis. Definição de derivadas parciais de primeira ordem e de segunda ordem. Noção de vetor gradiente e de matriz Hessiana. Regras de derivação. Interpretação das derivadas parciais como taxas de variação em economia.

No contexto económico da teoria do produtor – ou do consumidor – torna-se importante conhecer a variação da expressão $Q(K, L)$ – ou da expressão $U(x, y)$ – analisando um incremento (positivo ou negativo) de uma variável independente mantendo a outra variável constante.

Para isso definimos derivadas parciais de uma função.

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \to z = f(x, y)$.

O que se entende por derivada parcial de f em ordem a x?

Como se obtém? Tratando a segunda variável y como constante.

E se pretendermos derivar, parcialmente, f em ordem a y?

Procedemos de modo análogo, isto é, consideramos x constante.

Mais concretamente, adotaremos a seguinte definição.

Definição II.7. [Derivadas parciais de primeira ordem num ponto]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $z = f(x, y)$. A derivada parcial de f em ordem a x no ponto $(x_0, y_0) \in D_f$, é definida por

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

assumindo que o limite anterior existe.

Do mesmo modo, definimos a derivada parcial de f em ordem a y no ponto $(x_0, y_0) \in D_f$ através de

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

supondo que o limite anterior existe.[xiii]

Geometricamente a interseção da superfície G_f, de equação $z = f(x, y)$, com o plano de equação $y = y_0$ é uma curva. Deste modo, a inclinação da reta tangente à curva no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, na direção do eixo dos XX, é dada por $f_x(x_0, y_0)$.

De igual modo, intersectando a superfície G_f com o plano de equação $x = x_0$ obtemos uma curva. Neste caso, $f_y(x_0, y_0)$ é o declive da reta tangente à curva no mesmo ponto na direção do eixo dos YY.

Além disso, supondo que existem ambas as derivadas parciais da função f no ponto $P = (x_0, y_0)$, chamamos vetor gradiente de f em P ao vetor

$$\nabla f(P) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

Exemplos II.8. [Cálculo de derivadas parciais num ponto pela definição]

a) Calculamos $f_x(1, -1)$ sendo $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 2x + y^2.$$

Temos uma função polinomial de grau 2 em que $D_f = \mathbb{R}^2$.

Por definição, vem

$f_x(1, -1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x, -1) - f(1, -1)}{\Delta x}$, ou seja,

---

[xiii] Δx representa o incremento da variável x; é algumas vezes substituído pela letra h.
Δy representa o incremento da variável y; é algumas vezes substituído pela letra k.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(1+\Delta x)+(-1)^2-[2(1)+(-1)^2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = 2.$$

Geometricamente, $f_x(1,-1) = 2$ representa o declive da reta definida por

$$z = 2x + 1 \ \wedge \ y = -1$$

no ponto $(1,-1,3)$.

b) Calculamos $f_y(1,2)$ sendo $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = ye^x$.

Temos uma função de domínio $D_f = \mathbb{R}^2$.

Por definição, obtemos

$$f_y(1,2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(1,2+\Delta y) - f(1,2)}{\Delta y},$$

ou seja,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{(2+\Delta y)e^1 - 2e^1}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} e = e.$$

Geometricamente $f_y(1,2) = e$ representa o declive da reta de equação

$$z = ey \ \wedge \ x = 1$$

no ponto $(1,2,2e)$.

c) Calculamos $f_x(0,0)$ sendo $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

Temos uma função de domínio $D_f = \mathbb{R}^2$. Por definição, vem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x},$$

ou seja, $f_x(0,0) = 1$.

Geometricamente, $f_x(0,0) = 1$ representa o declive da reta definida por

$$z = x \ \wedge \ y = 0$$

no ponto $(0,0,0)$.

Definição II.9. [Função derivada parcial em ordem a x (e em ordem a y)]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $z = f(x,y)$.

Dizemos que a função$f_x: D_{f_x} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

é a (função) derivada parcial de f em ordem a x. Note-se que $D_{f_x} \subseteq D_f$.

Repare-se que f_x mede a taxa de variação de f relativamente a x, quando consideramos y constante.

Do mesmo modo, dizemos que a função $f_y: D_{f_y} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

é a (função) derivada parcial de f em ordem a y. Note-se que $D_{f_y} \subseteq D_f$.

Neste caso, f_y mede a taxa de variação de f relativamente a y, quando consideramos x constante.

Além disso, dizemos que a função f é de classe C^1 num subconjunto aberto A do seu domínio se fe as suas derivadas parciais são contínuas em A.

No que se segue, assumiremos que o domínio de existência das expressões $f(x,y), f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ coincide com o domínio de se segue, assumiremos que o domínio de existência das expressões $f(x,y), f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ coincide com o domínio de continuidade.[xiv]

[xiv] O domínio de continuidade de f, D_c, é constituído por todos os pontos para os quais a função f é contínua.

Exemplos II.10. [Derivada parcial de algumas funções]

a) Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função constante definida por $f(x,y) = a$, onde $a \in \mathbb{R}$. Então

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a-a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0\ ;$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{a-a}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Assim sendo, ambas as derivadas parciais duma constante são nulas.

b) Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x$. Então

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x-x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Neste caso podemos escrever $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$.

c) Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = y$. Então

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y-y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{y+\Delta y - y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1.$$

Logo $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$.

d) Consideremos a função polinomial de grau 1 de domínio $D_f = \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = 7x + 2y.$$

Assim,

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$ ou seja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{7(x+\Delta x)+2y-(7x+2y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 7 = 7;$$

$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$, ou seja,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{7x+2(y+\Delta y)-(7x+2y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 2 = 2.$$

Note-se que se f é uma função polinomial de grau 1, então a função e as suas derivadas parciais de 1ª ordem são contínuas em $\mathbb{R}^2$, por isso dizemos que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

Regras II.11. [Regras de Derivação]

Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $h: D_h \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas, respetivamente, por

$(x,y) \to z = f(x,y)$, $(x,y) \to z = g(x,y)$ e $(x,y) \to z = h(x,y)$.

A partir da definição de derivada parcial podemos verificar que:

(i) Seja $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$, para todo $(x,y) \in D_f$.

Sabemos que $D_f = D_g \cap D_h$. Então

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = g(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}h(x,y)$ e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}h(x,y),$$

para todo $(x,y) \in D$, onde $D \subseteq D_f$.

(ii) Seja $f(x,y) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$, para todo $(x,y) \in D_f$.

Sabemos que $D_f = D_g \cap D_h \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) \neq 0\}$. Então

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{h(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - g(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}}{[h(x,y)]^2}$ e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{h(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} - g(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}}{[h(x,y)]^2},$$

para todo $(x,y) \in D$, onde $D \subseteq D_f$.

(iii) Seja $f(x,y) = [g(x,y)]^k$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, para todo $(x,y) \in D_f$.

Se $k > 0$ então $D_f = D_g$, mas se $k < 0$ então

$D_f = D_g \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \neq 0\}$.

Temos

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = k[g(x,y)]^{k-1} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = k[g(x,y)]^{k-1} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y},$$

para todo $(x,y) \in D$, onde $D \subseteq D_f$.

(iv) Seja $f(x,y) = e^{g(x,y)}$, para todo $(x,y) \in D_f$.

Sabemos que $D_f = D_g$.

Então

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{g(x,y)} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{g(x,y)} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$,

para todo $(x,y) \in D$, onde $D \subseteq D_f$.

(v) Seja $f(x,y) = \ln|g(x,y)|$, para todo $(x,y) \in D_f$.

Sabemos que $D_f = D_g \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \neq 0\}$.

Então

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{g(x,y)}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}}{g(x,y)}$,

para todo $(x,y) \in D$, onde $D \subseteq D_f$.

Exemplos II.12. [Cálculo de derivadas parciais usando regra de derivação]

(i) Seja $f(x,y) = (7x + 2y)(5x + 9)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$f_x(x,y) = 7(5x + 9) + 5(7x + 2y) = 70x + 10y + 63,$$

$$f_y(x,y) = 2(5x + 9) + 0 = 10x + 18,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Seja $f(x,y) = \frac{3x+8y}{4x+7y}$, para todo $(x,y) \in D_f$.

Temos $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + 7y \neq 0\}$. Verificamos que

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{3(4x+7y) - 4(3x+8y)}{(4x+7y)^2} = \frac{-11y}{(4x+7y)^2}$,

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{8(4x+7y) - 7(3x+8y)}{(4x+7y)^2} = \frac{11x}{(4x+7y)^2}$,

para todo $(x,y) \in D_f$.

(iii) Seja $f(x,y) = (x^4 + 5y^2)^3$, para todo $(x,y) \in D_f$. Então

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 12x^3(x^4 + 5y^2)^2$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 30y(x^4 + 5y^2)^2$,

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iv) Seja $f(x,y) = e^{5xy^2}$, para todo $(x,y) \in D_f$.

Sendo $D_f = \mathbb{R}^2$, então

$$f_x(x,y) = 5y^2e^{5xy^2} \quad \wedge \quad f_y(x,y) = 10xye^{5xy^2}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(v) Seja $f(x,y) = \ln|4x + y^2|$, para todo $(x,y) \in D_f$.

Temos $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + y^2 \neq 0\}$. Então

$$f_x(x,y) = \frac{4}{4x + y^2} \wedge f_y(x,y) = \frac{2y}{4x + y^2},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(vi) Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, para todo $(x,y) \in D_f$.

A função tem domínio $D_f = \mathbb{R}^2$. Então obtemos

$$f_x(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}} \quad \wedge \quad f_y(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$$

para todo $(x,y) \in D$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$.

Definição II.13. [Derivadas parciais de 2ª ordem]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $(x,y) \to z = f(x,y)$ que admite derivadas parciais de 1ª ordem.

Por definição, se f é uma função de duas variáveis então f_x e f_y são também funções de duas variáveis pelo que podemos considerar as derivadas parciais (tanto em ordem a x como em ordem a y) de f_x e f_y.

Deste modo, obtemos quatro derivadas parciais de 2ª ordem de f:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

$$f_{yx} = \left(f_y\right)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

$$f_{yy} = \left(f_y\right)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Note-se que a ordem de derivação é indicada da esquerda para a direita. Assim f_{xy} indica que se deriva, primeiro, em ordem a x, e, depois, em ordem a y. Designamos f_{xx} e f_{yy} por derivadas quadradas ou diretas, enquanto que as derivadas de 2ª ordem f_{xy} e f_{yx} dizem-se retangulares, mistas ou cruzadas.

Além disso, dizemos que a função f é de classe C^2 num subconjunto aberto A do seu domínio se f e as suas derivadas parciais de primeira ordem e de segunda ordem são contínuas em A.

No que se segue, vamos admitir que o domínio de existência das expressões $f(x,y), f_x(x,y),\ f_y(x,y),\ f_{xx}(x,y),\ f_{xy}(x,y),\ f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y)$ coincide com o domínio de continuidade.

Finalmente, e assumindo que existem as derivadas parciais de 2ª ordem de f no ponto $P = (x_0, y_0)$, chamamos a matriz Hessiana de f em $P = (x_0, y_0)$ à matriz seguinte

$$H(P) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

A partir das derivadas de 2ª ordem de f podem definir-se as derivadas de 3ª ordem e assim sucessivamente.

Exemplo II.14. [Cálculo de derivadas parciais de segunda ordem]

Determinamos as derivadas de 2ª ordem de $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^2y + 7xy + y^2.$$

É evidente que $D_f = \mathbb{R}^2$. As derivadas parciais de 1ª ordem de f são dadas por

$$f_x(x,y) = 2xy + 7y \quad \wedge \quad f_y(x,y) = x^2 + 7x + 2y$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Por sua vez, as derivadas parciais de 2ª ordem de f são definidas por

$$f_{xx}(x,y) = (f_x)_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 7y) = 2y;$$

$$f_{xy}(x,y) = (f_x)_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 7y) = 2x + 7;$$

$$f_{yx}(x,y) = \left(f_y\right)_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 7x + 2y) = 2x + 7;$$

$$f_{yy}(x,y) = \left(f_y\right)_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 7x + 2y) = 2;$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Tendo em conta que f é uma função polinomial de grau 3, então a função e as suas derivadas parciais, de 1ª e 2ª ordem, são contínuas em $\mathbb{R}^2$, por isso dizemos que f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

Note-se que $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Observação II.15. [Igualdade das derivadas cruzadas]

É importante salientar que a igualdade

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y), \text{ para todo } (x,y) \in A \subseteq D_f$$

nem sempre se verifica.

Todavia, no contexto das funções de classe C^2, podemos garantir que a condição anterior é satisfeita.[xv]

Assim, nestas condições, a matriz matriz Hessiana de f em $P=(x_0,y_0)$,

$$H(P)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix},$$

é simétrica (dado que coincide com a sua matriz transposta).

Como referimos anteriormente, interessa, por vezes, analisar tanto o produto adicional que pode ser alcançado com o aumento de uma unidade de capital (produto marginal do capital) como o produto adicional que pode ser alcançado contratando mais uma unidade de trabalho (produto marginal do trabalho).[xvi]

Com esse fim – e assumindo que $Q(K,L)$ define a função de produção – recorremos ao cálculo diferencial, dado que se considera que as derivadas parciais $\frac{\partial Q}{\partial K}$ e $\frac{\partial Q}{\partial L}$ representam, respetivamente, o produto marginal do capital e o produto marginal do trabalho.

Repare-se que se a empresa utiliza K^* unidades de capital e L^* unidades de trabalho então – tendo em conta a Definição II.7. – podemos escrever

$$\frac{Q(K^*+\Delta K,L^*)-Q(K^*,L^*)}{\Delta K}\approx\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*,L^*),$$

para ΔK suficientemente pequeno;

e, ainda,

$$\frac{Q(K^*,L^*+\Delta L)-Q(K^*,L^*)}{\Delta L}\approx\frac{\partial Q}{\partial L}(K^*,L^*),$$

para ΔL suficientemente pequeno.

[xv] Em consequência da aplicação do teorema de Schwarz-Young: Seja $f: D_f\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função cujas derivadas parciais f_x, f_y e f_{xy} existem numa bola aberta centrada num ponto $(x_0,y_0)\in D_f$ e são contínuas em (x_0,y_0). Então existe $f_{yx}(x_0,y_0)$ e tem-se $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$ [Cálculo com funções de várias variáveis, A. Breda e J. Nunes da Costa, McGraw-Hill, 1996].

[xvi] Recordemos o que estudámos no capítulo das funções reais de variável real. Consideremos a função $f: D_f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $y=f(x)$ e $x_0\in D_f$. Verificámos que, para um acréscimo Δx suficientemente pequeno, tem sentido escrever $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$. Em particular, quando $\Delta x=1$ temos $\Delta y=f(x_0+1)-f(x_0)\approx f'(x_0)$.

Em particular, quando $\Delta K = 1$[xvii], temos

$$Q(K^* + 1, L^*) - Q(K^*, L^*) \approx \frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*),$$

e dizemos que $\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)$ estima a variação no produto devida ao aumento de uma unidade de capital.

Por outro lado, quando $\Delta L = 1$[xviii], obtemos

$$Q(K^*, L^* + 1) - Q(K^*, L^*) \approx \frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*),$$

e afirmamos que $\frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*)$ estima a variação no produto devida ao aumento de uma unidade de trabalho.

Consideremos de seguida o caso em que a produção é definida por uma função de Cobb-Douglas.

Exemplo II.16. [Função de Cobb-Douglas[xix] e produto marginal]

Seja $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ onde $A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ são parâmetros estimados de acordo com os dados do processo produtivo.

Suponhamos que tem sentido, numa determinada empresa, considerar $A = 4$, $\alpha = \frac{3}{4}$ e $\beta = \frac{1}{4}$, isto é, assumir que a função Q está definida por $Q(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$.

Deste modo, podemos afirmar que as derivadas parciais

$$\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) = 4\left(\frac{3}{4}\right)K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}} = 3\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}},$$

[xvii] Assumimos que, neste contexto, $\Delta K = 1$ é suficientemente pequeno.

[xviii] Assumimos que, neste contexto, $\Delta L = 1$ é suficientemente pequeno.

[xix] Em 1928 Cobb (matemático) e Douglas (economista) utilizaram esta função para modelar o crescimento da economia americana no período 1899-1922.

$$\frac{\partial Q}{\partial L}(K,L) = 4\left(\frac{1}{4}\right)K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}}$$

têm um determinado significado económico.

Admitamos que a empresa utiliza 10000 unidades de capital e 625 unidades de trabalho.

Queremos fazer uma estimativa, sem recorrer à máquina de calcular:

(i) da variação do produto devida ao aumento de uma unidade de capital, i.e.

$$Q(10001{,}625) - Q(10000{,}625);$$

(ii) da variação do produto devida ao aumento de uma unidade de trabalho, i.e.

$$Q(10000{,}626) - Q(10000{,}625).$$

Repare-se que se $(K^*, L^*) = (10000, 625)$ – i.e. se a empresa utiliza 10000 unidades de capital e 625 unidades de trabalho – então

$$Q(K^*, L^*) = Q(10^4, 5^4) = 4(10^4)^{\frac{3}{4}}(5^4)^{\frac{1}{4}} = 20000.$$

Consequentemente:

(i) $$Q(K^* + \Delta K, L^*) - Q(K^*, L^*) \approx \frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)\Delta K \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Delta K = 1}$$

$$\Leftrightarrow Q(10001, 5^4) - Q(10^4, 5^4) \approx \frac{\partial Q}{\partial K}(10^4, 5^4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q(10001, 5^4) \approx 20000 + 3\left(\frac{5^4}{10^4}\right)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q(10001{,}625) \approx 20001{,}5.$$

Neste caso dizemos que $\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)$ estima a variação no produto devida ao aumento de uma unidade de capital.

(ii) $$Q(K^*, L^* + \Delta L) - Q(K^*, L^*) \approx \frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*)\Delta L \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Delta L = 1}$$

$$\Leftrightarrow Q(10^4, 626) - Q(10^4, 5^4) \approx \frac{\partial Q}{\partial L}(10^4, 5^4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q(10^4, 626) \approx 20000 + \left(\frac{10^4}{5^4}\right)^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q(10^4, 626) \approx 20008.$$

Assim verificamos que $\frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*)$ estima a variação no produto devida ao aumento de uma unidade de trabalho.

Exemplo II.17. [Função de Cobb-Douglas e variação do produto marginal]

Suponhamos que a função de produção Q está definida por $Q(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$.

Vamos verificar que a função produto marginal do trabalho é positiva e que como função de L, considerando K fixo, é decrescente.-Assim, uma vez que

$$\frac{\partial Q}{\partial L}(K, L) = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}} > 0, \text{ para } K > 0 \text{ e } L > 0,$$

constatamos que

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}(K, L) = \frac{\partial}{\partial L}\left(K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}\right) = -\frac{3}{4}K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{7}{4}} < 0, \text{ para } K > 0 \text{ e } L > 0.$$

Deste modo, podemos concluir que:

«Uma empresa com uma função de produção definida por $Q(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$ tem um produto marginal de trabalho decrescente – i.e. quando o trabalho aumenta a produção também aumenta, embora com uma taxa de variação menor.»

Em relação ao produto marginal do capital, tendo em conta que

$\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) = 3\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}} > 0$, também verificamos que

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}(K, L) = \frac{\partial}{\partial K}\left(3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}\right) = -\frac{3}{4}K^{-\frac{5}{4}}L^{\frac{1}{4}} < 0.$$

Exercícios II.18.

1. Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \sqrt{xy}$. Recorrendo à definição, calcule as seguintes derivadas parciais de f:

   a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Resposta: 0;

   b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,4)$. Resposta: $+\infty$;

   c) $\frac{\partial f}{\partial y}(4,0)$. Resposta: $+\infty$;

   d) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,b)$, para $b > 0$. Resposta: $\frac{1}{2\sqrt{b}}$;

   e) $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, para $ab > 0$. Resposta: $\frac{a}{2\sqrt{ab}}$;

   f) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, para $ab > 0$. Resposta: $\frac{b}{2\sqrt{ab}}$.

2. Determine as derivadas parciais de primeira ordem das funções $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por:

   a) $f(x,y) = (x+2y)^3$. Resposta: $f_x(x,y) = 3(x+2y)^2$, $f_y(x,y) = 6(x+2y)^2$.

   b) $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}} + e^{\frac{x}{y}}$. Resposta: $f_x(x,y) = -\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}} + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$; $f_y(x,y) = \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}} - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$.

   c) $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$. Resposta: $f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $f_y(x,y) = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$.

   d) $f(x,y) = x^y$. Resposta: $f_x(x,y) = yx^{y-1}$; $f_y(x,y) = x^y\ln(x)$.

3. Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Mostre que:

   a) Se $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ então $f_x(x,y) - f_y(x,y) = \frac{2}{x+y}$, para $(x,y) \in D_f$;

   b) Se $f(x,y) = \ln(x+y)$ então $f_x(x,y) = f_y(x,y)$, para $(x,y) \in D_f$;

   c) Se $f(x,y) = \sin^2(2x+3y)$ então $f_x(x,y) + f_y(x,y) = 5\sin(4x+6y)$, para $(x,y) \in D_f$;

d) Se $f(x,y)=\sqrt{xy}$ então $f_x(x,y)+f_y(x,y)=\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$, para $(x,y)\in int(D_f)$;

e) Se $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ então $yf_x(x,y)-xf_y(x,y)=-1$, para $(x,y)\in D_f$.

4. Suponha que a função de utilidade de um indivíduo $U:]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ é definida por $U(x,y)=x^3(y+2)^2$, onde x e y representam as quantidades dos bens X e Y, respetivamente.

a) Determine a utilidade marginal de cada um dos bens, $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$.

Resposta: $U_x(x,y)=3x^2(y+2)^2$, $U_y(x,y)=2x^3(y+2)$.

b) Qual a utilidade marginal do bem X quando o indivíduo está a consumir uma unidade de cada bem? Resposta: $\frac{\partial U}{\partial x}(1,1)=27$.

5. Considere a função de Cobb-Douglas $Q:]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por

$$Q(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

onde $A\in\mathbb{R}^+$ e $0<\alpha<1$, em que $K>0$ e $L>0$ representam, respetivamente, a quantidade de capital e trabalho utilizadas na produção.

a) Mostre que $K\frac{\partial Q}{\partial K}(K,L)+L\frac{\partial Q}{\partial L}(K,L)=Q(K,L)$ para $K>0$ e $L>0$;

b) Determine o sinal das derivadas parciais de 2ª ordem, $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}(K,L)$ e $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}(K,L)$.;

c) Seja $P\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Verifique que a matriz Hessiana, $H(P)$ é simétrica.

d) Determine para que valores $K,L>0$ o determinante de $H(P)$ é positivo.

6. Determine as derivadas de 2ª ordem de cada uma das funções $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

a) $f(x,y) = \ln(x+y)$.

Resposta: $f_{xx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}$.

b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$. Resposta: $f_{xx}(x,y) = -\frac{y^2}{4\sqrt{(xy)^3}}$; $f_{xy}(x,y) = \frac{1}{4\sqrt{xy}}$;

$f_{yy}(x,y) = -\frac{x^2}{4\sqrt{(xy)^3}}$.

c) $f(x,y) = e^x \sin y$.

Resposta: $f_{xx}(x,y) = e^x \sin y$, $f_{xy}(x,y) = e^x \cos y$,

$f_{yy}(x,y) = -e^x \sin y$.

d) $f(x,y) = x^y$. Resposta: $f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}$,

$f_{xy}(x,y) = [1 + y\ln(x)]x^{y-1}$, $f_{yy}(x,y) = \ln^2(x)\, x^y$.

e) $f(x,y) = xye^{x-y}$.Resposta: $f_{xx}(x,y) = y(2+x)e^{x-y}$,

$f_{xy}(x,y) = (1+x)(1-y)e^{x-y}$, $f_{yy}(x,y) = x(y-2)e^{x-y}$.

7. Uma função $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se harmónica se

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 0 \text{ para todo } (x,y) \in int(D_g).$$

Verifique se as funções seguintes, definidas por $g(x,y)$, são harmónicas.

a) $g(x,y) = x^3 - 3y^2$;

b) $g(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

c) $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

8. Seja $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em $A \subseteq D_F$. Calcule $F(x,y)$, sabendo que:

a) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy$.

Resposta: $F(x,y) = x^3 + 2x^2y + C(y)$, onde $C(y)$ depende de y;

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 2y \end{cases}.$

Resposta: $F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + C$, onde C é arbitrária;

c) $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 2y \\ F(1,1) = 4 \end{cases}.$

Resposta: $F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2$;

9. Seja $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em $A \subseteq D_F$. Calcule $F(x,y)$, sabendo que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x + y\ln y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x + x\ln y - y \end{cases}.$$

Resposta: $F(x,y) = x^2 + 2xy\ln y - y^2 + C$, onde C é uma constante arbitrária.

II.3 – Diferenciais de funções de duas variáveis. Aproximação linear de uma função de duas variáveis. Cálculo de valores aproximados. Função composta e função implícita. Uso da regra da cadeia na derivada de funções compostas e na derivada de funções implícitas.

Nesta secção vamos recorrer ao cálculo diferencial para obter valores aproximados por intermédio de aproximações lineares de funções. Retomemos o Exemplo II.16

Exemplo II.19. [Função de Cobb-Douglas e estimativas da variação do produto]

Admitamos que uma empresa tem uma função de produção definida por

$$Q(K,L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$

e utiliza 10000 unidades de capital e 625 unidades de trabalho. Queremos obter uma estimativa, sem recorrer à máquina de calcular:

a) da variação do produto devida ao aumento de 10 unidades de capital, i.e.

$$Q(10010,625) - Q(10000,625);$$

b) da variação do produto devida à redução de 2 unidades de trabalho, i.e.

$$Q(10000,623) - Q(10000,625);$$

c) da variação do produto devida ao aumento de 10 unidades de capital e à redução de 2 unidades de trabalho, i.e.

$$Q(10010,623) - Q(10000,625).$$

Note-se que:

a) Quando aumentamos o capital de 10000 unidades para 10010 unidades verificamos que o produto sofre um aumento de 15 unidades, dado que

$$Q\left(10^4+\underbrace{10}_{\Delta K},5^4\right)-Q(10^4,5^4)\approx\frac{\partial Q}{\partial K}(10^4,5^4)\times\underbrace{10}_{\Delta K}=\frac{3}{2}\times 10=15;$$

b) Quando reduzimos o trabalho de 625 unidades para 623 unidades constatamos que o produto diminui 16 unidades, visto que

$$Q\left(10^4,5^4+\underbrace{(-2)}_{\Delta L}\right)-Q(10^4,5^4)\approx\frac{\partial Q}{\partial L}(10^4,5^4)\times(-2)=8\times(-2)=-16;$$

c) Quando aumentamos o capital de 10000 unidades para 10010 unidades e reduzimos o trabalho de 625 unidades para 623 unidades, notamos que o produto diminui 1 unidade, visto que[xx]:

$$Q\left(10^4+\underbrace{10}_{\Delta K},5^4+\underbrace{(-2)}_{\Delta L}\right)-Q(10^4,5^4)$$
$$\approx\frac{\partial Q}{\partial K}(10^4,5^4)\times\underbrace{10}_{\Delta K}+\frac{\partial Q}{\partial L}(10^4,5^4)\times\underbrace{(-2)}_{\Delta L}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Q(10010{,}623)-Q(10^4,5^4)\approx\frac{3}{2}\times 10+8\times(-2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Q(10010{,}623)\approx -1.$$

Os exemplos anteriores motivam a seguinte definição.

[xx] A explicação decorre da definição seguinte.

Definição II.20. [Aproximação linear de uma função]

Suponhamos que $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 em A, sendo $A \subseteq D_f$ um aberto, e seja $(x_0, y_0) \in A$.

A expressão

$$g(x,y) = z_0 + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0),$$

é designada por aproximação linear de f em (x_0, y_0), onde $z_0 = g(x_0, y_0)$.

Geometricamente, como se trata de um polinómio de grau 1 em duas variáveis, podemos afirmar que a representação gráfica de $z = g(x,y)$ é um plano. Verificamos que esta aproximação depende do valor de

$$x - x_0 = \Delta x \text{ e } y - y_0 = \Delta y.$$

Assim, «se Δx e Δy forem suficientemente próximos de zero, dizemos que g define uma boa aproximação de f numa vizinhança de (x_0, y_0)».

Vamos, de seguida, definir o diferencial de $f(x,y)$ no ponto $(x_0, y_0) \in \mathrm{A}$, relativamente aos acréscimos Δx e Δy, através da expressão

$$dz_{[(x_0,y_0),(\Delta x,\Delta y)]} = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Utilizando a aproximação linear de f em (x_0, y_0) definida anteriormente, podemos calcular um valor aproximado para a variação

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

devida a um acréscimo Δx da variável x a partir de x_0 e a um acréscimo Δy da variável y a partir de y_0, considerando

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

isto é,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z_0 + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

ou seja,

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}_{\Delta z} \approx \underbrace{f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y}_{dz}.$$

dado que $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Definição II.21. [Diferencial de uma função num ponto e função diferencial]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em A, sendo $A \subseteq D_f$ um aberto, e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que

$$dz_{[(x_0,y_0),(\Delta x,\Delta y)]} = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

é o diferencial de $z = f(x,y)$ no ponto $(x_0, y_0) \in \mathrm{A}$, relativamente aos acréscimos Δx e Δy.[xxi]

Chamamos função diferencial de f à função $df: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$(x,y) \to dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.$$

Em particular, se $f(x,y) = x$ obtemos $dx = \Delta x$, enquanto se tivermos

$f(x,y) = y$ se conclui que $dy = \Delta y$. Assim escrevemos

$$df: (x,y) \to dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

Exemplos II.22. [Cálculo de valores aproximados]

a) Vamos utilizar diferenciais para calcular um valor aproximado de $\sqrt{4[3{,}99^2 - 7{,}04]}$.

Consideramos

$$f(x,y) = \sqrt{4(x^2-y)},\ x_0 = 4,\ y_0 = 7,\ \Delta x = -0.01 \text{ e } \Delta y = 0.04.$$

As derivadas parciais de 1ª ordem de f satisfazem

[xxi] Simplificamos a notação, escrevendo dz em vez de $dz_{[(x_0,y_0),(\Delta x,\Delta y)]}$, desde que não tenhamos dúvidas sobre o ponto e os acréscimos.

$f_x(x,y) = \frac{8x}{2\sqrt{4(x^2-y)}} = \frac{4x}{\sqrt{4(x^2-y)}}$,

$$f_y(x,y) = \frac{-4}{2\sqrt{4(x^2-y)}} = \frac{-2}{\sqrt{4(x^2-y)}},$$

para todo $(x,y) \in A$, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y > 0\}$.

Em particular, temos

$$f_x(4{,}7) = \frac{8}{3} = 2,(6) \quad \wedge \quad f_y(4{,}7) = -\frac{1}{3} = -0,(3).$$

Logo, o diferencial de $f(x,y)$ no ponto $(4{,}7) \in \mathrm{A}$, relativamente aos acréscimos Δx e Δy é dado por

$$dz = f_x(4{,}7)\Delta x + f_y(4{,}7)\Delta y = \frac{8}{3}(-0.01) - \frac{1}{3}(0.04) = -\frac{12}{300}.$$

De seguida, atendendo a que

$$\Delta z = f(3{,}99;\ 7{,}04) - f(4{,}7) \ \approx dz$$

obtemos

$$\sqrt{4[3{,}99^2 - 7{,}04]} \approx f(4{,}7) + \ dz = 6 - \frac{12}{300} = 5{,}96.$$

b) Calculamos um valor aproximado de $4\left(30^{\frac{1}{2}}\,6^{-\frac{1}{3}}\right)$.

Consideramos

$$f(x,y) = 4\left(x^{\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{1}{3}}\right),\ x_0 = 25,\ y_0 = 8,\ \Delta x = 5 \text{ e } \Delta y = -2.$$

Determinamos as derivadas parciais de $f(x,y)$,

$$f_x(x,y) = 2\left(x^{-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{1}{3}}\right) \quad \wedge \quad f_y(x,y) = -\frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{4}{3}}\right)$$

para todo $(x,y) \in A$, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0 \ \wedge\ y \neq 0\}$. Daí temos

$$f_x(25{,}8) = \frac{1}{5} \quad \wedge \quad f_y(25{,}8) = -\frac{5}{12}.$$

Logo, o diferencial de $f(x,y)$ no ponto $(25{,}8) \in \mathrm{A}$, relativamente aos acréscimos Δx e Δy é dado por

$$dz = f_x(25{,}8)\Delta x + f_y(25{,}8)\Delta y = \left(\frac{1}{5}\right)(5) + \left(-\frac{5}{12}\right)(-2) = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}.$$

De

$$\Delta z = f(30{,}6) - f\ (25{,}8) \approx dz$$

vem

$$4\left(30^{\frac{1}{2}}\,6^{-\frac{1}{3}}\right) \approx f\ (25{,}8) +\ dz = 10 + \frac{11}{6} = \frac{71}{6} = 11{,}8(3).$$

Exemplo II.23. [Diferencial de uma função de produção]

Considere a função de produção Q definida por $z = Q(K, L)$, onde K representa o capital e L o trabalho. O diferencial de $z = Q(K, L)$ é dado por

$$\underbrace{dz}_{\substack{variação \\ da\ produção}} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L)}_{\substack{produto \\ marginal \\ do\ capital}} \underbrace{dK}_{\substack{variação \\ do\ capital}} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial L}(K, L)}_{\substack{produto \\ marginal \\ do\ trabalho}} \underbrace{dL}_{\substack{variação \\ do\ trabalho}},$$

relaciona a variação da produção com a variação do capital e com a variação do trabalho.

Recordemos que para funções de uma variável real se tivermos

$$f: x \to f(x) \quad \wedge \quad g: t \to x = g(t)$$

podemos definir a função composta por

$$y = f\big(g(t)\big).$$

Aplicando a regra da cadeia calculamos a derivada da função composta através de

$$(fog)'(t) = f'\big(g(t)\big)g'(t).$$

Usando a notação de Leibniz, podemos escrever

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Existe uma regra similar para as funções de duas variáveis. Analisamos dois casos particulares.

Regra II.24. [Regra da cadeia para a função composta]

1. CASO I:

a) Suponhamos que a função $f: (x, y) \to z = f(x, y)$ é de classe C^1 num aberto A do seu domínio. Se as duas variáveis x e y dependem de uma outra variável t, isto é,

$$x = \phi(t) \quad \wedge \quad y = \psi(t)$$

então podemos definir a função composta através de

$$z = f[\phi(t), \psi(t)],$$

tal como se mostra na figura seguinte

$$\xrightarrow{input\ t}\rightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} \nearrow & \boxed{x} & \longrightarrow & \boxed{\phi(t)} & \searrow \\ \searrow & \boxed{y} & \longrightarrow & \boxed{\psi(t)} & \nearrow \end{array}} \xrightarrow{output}\xrightarrow{z=f(\phi(t),\psi(t))}$$

Pretendemos calcular a variação de $z = f[\phi(t), \psi\ (t)]$ relativamente à variável t, i.e. $\frac{dz}{dt}$. Como devemos proceder?

Se ϕ e ψ são funções diferenciáveis em $I \subseteq \mathbb{R}$ então a função composta, definida por

$$t \to z = f[\varphi(t), \psi(t)],$$

é diferenciável e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi(t), \psi(t)\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi(t), \psi(t)\right)\frac{dy}{dt}.$$

Podemos abreviar essa expressão escrevendo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{dy}{dt}.$$

b) Seja $z = F(x, y)$. O diferencial de $z = F(x, y)$ é definida por

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dy.$$

Assumindo agora também, $y = f(x)$ temos $z = F\big(x, f(x)\big)$, logo

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,\frac{dy}{dx}$$

ou seja, o diferencial de $z=F(x,y)$ permite apurar os efeitos diretos e indiretos provocados por uma variação de x sobre z.

Observe o esquema

$$\xrightarrow{input\ x}\rightarrow\boxed{\begin{array}{ccccc} \nearrow & \boxed{x} & \longrightarrow & \boxed{x} & \searrow \\ \searrow & \boxed{y} & \longrightarrow & \boxed{f(x)} & \nearrow \end{array}}\xrightarrow{output}\xrightarrow{z=F(x,f(x))}$$

e verifique que se trata de um caso particular da alínea a).

2. CASO II:

Consideremos que a função $f:(x,y)\to z=f(x,y)$ é de classe C^1 num aberto A do seu domínio. Suponhamos, agora, que ambas as variáveis x e y dependem de duas variáveis u e v, isto é,

$$x=\varphi(u,v)\qquad\wedge\qquad y=\psi(u,v)$$

onde ϕ e ψ são funções de classe C^1em A. Neste caso, a função composta é definida por

$$z=f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big).$$

Construímos o seguinte esquema

$$\begin{array}{ccccc} & & & \nearrow & u \\ & \nearrow & x & & \\ & & & \searrow & v \\ f & & & & \\ & & & \nearrow & u \\ & \searrow & y & & \\ & & & \searrow & v \end{array}$$

Então a função composta é de classe C^1em $A\subseteq D_f$ e as suas derivadas parciais de 1ª ordem são dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\,\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\,\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v).$$

De forma abreviada, podemos escrever

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}\qquad\wedge\qquad\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}\ .$$

Exemplo II.25. [Função de produção cujos fatores produtivos dependem de outra variável (tempo)]

Seja $Q: (K, L) \to Q(K, L) = 25KL - K^2 - 2L^2$ uma função de produção onde os dois fatores, K e L, são funções do tempo,

$$K = 0{,}3t \qquad \wedge \quad L = 0{,}2t$$

Essas expressões informam-nos que as quantidades de trabalho e capital disponíveis crescem com o tempo.

Para determinar a taxa de variação do produto Q relativamente ao tempo consideramos as relações de dependência das variáveis intervenientes no problema proposto

$$\xrightarrow{input\ t}\rightarrow \begin{array}{|ccccc|} \hline \nearrow & \boxed{K} & \longrightarrow & \boxed{K(t)} & \searrow \\ \searrow & \boxed{L} & \longrightarrow & \boxed{L(t)} & \nearrow \\ \hline \end{array} \xrightarrow{output}\xrightarrow{z=Q(K(t),L(t))}$$

Derivamos

$$\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) = 25L - 2K \quad \wedge \quad \frac{\partial Q}{\partial L}(K, L) = \ 25K - 4L$$

e substituímos

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 25(0{,}2t) - 2(0{,}3t) = \ 4{,}4\ t \quad \wedge \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \ 25(0{,}3t) - 4(0{,}2t) = 6{,}7\ t\,.$$

Pela regra da cadeia vem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial K}\ \frac{dK}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial L}\ \frac{dL}{dt} = (4{,}4\ t)\ (0{,}3) + \ (6{,}7\ t)\ (0{,}2) = 1{,}32\ t + 1{,}34\ t = 2{,}66\ t$$

Exemplo II.26. [Função de produção cujos fatores produtivos dependem do tempo e da taxa de juro]

Retomamos a função de Cobb-Douglas do Exemplo II.16. definida por

$$Q(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}.$$

Suponhamos, ainda, que os inputs K e L variam com o tempo t e a taxa de juro r, segundo as expressões

$$K = \frac{10t^2}{r} \quad \wedge \quad L = 6t^2 + 250r.$$

(a) Pretendemos calcular a taxa de variação do produto Q em relação a variações de t, quando $t = 10$ e $r = 0{,}1$;

Atendendo a que $(t, r) \rightarrow z = Q\big(K(t,r); L(t,r)\big)$

$$\begin{array}{ccccc} & & & \nearrow & t \\ & \nearrow & K & & \\ & & & \searrow & r \\ Q & & & & \\ & & & \nearrow & t \\ & \searrow & L & & \\ & & & \searrow & r \end{array}$$

podemos escrever

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Determinamos

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{20t}{r} \quad \wedge \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 12t.$$

Em particular, para $t = 10$ e $r = 0{,}1$ obtemos

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 2000 \quad \wedge \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 120.$$

Já vimos que

$$\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) = 3\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \wedge \quad \frac{\partial Q}{\partial L}(K, L) = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Após a substituição obtemos

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 3\left(\frac{6t^2r + 250r^2}{10t^2}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \wedge \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \left(\frac{10t^2}{6t^2r + 250r^2}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Em particular, para $t = 10$ e $r = 0{,}1$ obtemos

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 3\left(\frac{62{,}5}{1000}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \wedge \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \left(\frac{1000}{62{,}5}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Consequentemente, pela regra da cadeia vem

$$\frac{dQ}{dt} = 6000\left(\frac{62{,}5}{1000}\right)^{\frac{1}{4}} + 120\left(\frac{1000}{62{,}5}\right)^{\frac{3}{4}} = 3960.$$

(b) Pretendemos calcular a taxa de variação do produto Q em relação a variações de r, quando $t = 10$ e $r = 0{,}1$.

Sabemos que

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial r} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial r}.$$

As derivadas parciais de K e L em ordem a r são dadas por

$$\frac{\partial K}{\partial r} = -\frac{10t^2}{r^2} = -10\left(\frac{t}{r}\right)^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial L}{\partial r} = 250.$$

Em particular, para $t = 10$ e $r = 0{,}1$ obtemos

$$\frac{\partial K}{\partial r} = -10^5 \quad \wedge \quad \frac{\partial L}{\partial r} = 250.$$

Para $t = 10$ e $r = 0{,}1$, já vimos que

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 3\left(\frac{62{,}5}{1000}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \wedge \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \left(\frac{1000}{62{,}5}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Aplicando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{dQ}{dt} = 3\left(\frac{62{,}5}{1000}\right)^{\frac{1}{4}}(-10^5) + \left(\frac{1000}{62{,}5}\right)^{\frac{3}{4}}250 = -15(10^4) + 2000 = -148000$$

Exemplos II.27. [Derivada da função composta pela regra da cadeia]

a) Queremos determinar $\frac{dz}{dt}$, sabendo que $z = x^2 + y^3$, $x = t^2$ e $y = 2t$.

Em primeiro lugar, as derivadas em ordem à variável t são dadas por

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \wedge \quad \frac{dy}{dt} = 2.$$

Agora determinamos as derivadas parciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \wedge \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2,$$

de seguida, substituindo $x = t^2$ e $y = 2t$ obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,t^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12t^2.$$

Por fim, pela regra da cadeia vem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2\,t^2 2t + 12t^2 2 = 4t^3 + 24t^2.$$

b) Vamos determinar $\frac{dY}{dt}$, sabendo que $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, $A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $K = f(t)$ e $L = g(t)$.

As derivadas em ordem à variável t são representadas por

$$\frac{dK}{dt} = \frac{df}{dt} \quad \wedge \quad \frac{dL}{dt} = \frac{dg}{dt}.$$

As derivadas parciais de Y são dadas por

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} \quad \wedge \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}.$$

De seguida, substituindo $K = f(t)$e $L = g(t)$ obtemos

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha Af^{\alpha-1}(t)g^{\beta}(t) \quad \wedge \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta Af^{\alpha}(t)g^{\beta-1}(t).$$

Usando a regra da cadeia vem

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{dL}{dt} = \alpha Af^{\alpha-1}(t)g^{\beta}(t)\frac{df}{dt} + \beta Af^{\alpha}(t)g^{\beta-1}(t)\frac{dg}{dt}.$$

Por vezes, a relação existente entre duas variáveis x e y é representada por uma equação do tipo $F(x, y) = 0$, como, por exemplo,

$x^2 + y^2 - 4 = 0$,

$x^2 - 3xy + y^3 - 7 = 0$,

$x^a y^b - 3 = 0$, $a, b \in \mathbb{R}^+$,

$x\sqrt{y} - 2 = 0$, $x > 0$ e $y > 0$, etc.

Dizemos, nestes casos, que a equação $F(x, y) = 0$ define uma relação implícita entre as variáveis x e y, em contraste com a forma mais familiar

$$y = f(x),$$

que define explicitamente y em função de x.

Por exemplo, se $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ então $y = f(x)$ satisfaz $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Porquê?[xxii] Nestas condições, dizemos que a expressão

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \text{ para } x \in]-2, 2[,$$

está definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Analogamente, dizemos que a expressão

$$g(x) = -\sqrt{4 - x^2}, \text{ para } x \in]-2, 2[,$$

está definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Consequentemente, definimos função implícita.

Definição II.28. [Função implícita]

Dizemos que uma equação $F(x, y) = 0$ define implicitamente y em função de x através de $y = f(x)$ se e só se

$$F[x, f(x)] = 0, \text{ para todo } x \in I \subseteq D_f,$$

ou, de outro modo, se e só se o gráfico da função f,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \wedge y = f(x)\},$$

é um subconjunto de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in D_F \wedge F(x, y) = 0\}$.

[xxii] Note que $x^2 + y^2 - 4 = x^2 + \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 - 4 = x^2 + 4 - x^2 - 4 = 0$.

Mais concretamente:

Seja $f: x \to y = f(x)$ uma função real de variável real traduzida pela equação $F(x, y) = 0$, não resolvida em ordem à variável dependente y, mas permitindo, contudo, associar a cada $x \in I \subseteq D_f$ um único valor para y, raiz da equação $F(x, y) = 0$ para o valor de x previamente indicado.

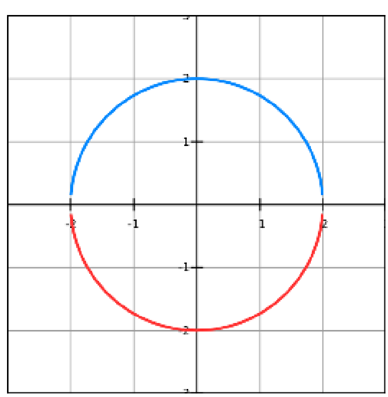
Deste modo, dizemos que a função $f: x \to y = f(x)$ está definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$ e designamo-la por função implícita.

A teoria das funções implícitas tem por objetivo estudar as suas propriedades mais importantes (nomeadamente o cálculo de derivadas) sem necessidade de explicitar a função.

Exemplos II.29. [Equações que definem (ou não) funções implícitas]

1. Verificamos que a equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$:
   a) define y como função de x numa vizinhança do ponto $(0, -2)$;
   b) não define y como função de x numa vizinhança do ponto $(2,0)$.

   Repare-se que $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma equação da circunferência de centro na origem e raio 2.



a) Comecemos por analisar a intersecção dessa circunferência com uma vizinhança do ponto $(0,-2)$, por exemplo,

$$\mathcal{V}_\varepsilon(0,-2) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + (y+2)^2} < \varepsilon\right\}$$

para $\varepsilon > 0$. Constatamos que se trata do gráfico da função $f: x \to f(x) = -\sqrt{4-x^2}$, num intervalo $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$.

b) Neste caso verificamos que a intersecção da mesma circunferência com uma vizinhança do ponto $(2,0)$, por exemplo,

$$\mathcal{V}_\varepsilon(2,0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-2)^2 + y^2} < \varepsilon\right\}$$

para $\varepsilon > 0$, não pode ser considerada como o gráfico de uma função dado que, para qualquer valor suficientemente pequeno de ε, o conjunto

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 = 0 \ \wedge \ \sqrt{(x-2)^2 + y^2} < \varepsilon\right\}$$

não representa o gráfico de uma função pois a cada x corresponde dois valores de y, determinados por

$$g: x \to y = -\sqrt{4-x^2} \ \text{ e } \ h: x \to y = \sqrt{4-x^2}.$$

2. Justificamos que não existe nenhuma função $f: x \to y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 + 4 = 0$.

   Com efeito, note-se que não existe nenhum par de números reais, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $x^2 + y^2 + 4 = 0$.

Pretendemos, de seguida, resolver o seguinte problema.

Problema II.30. [Existência da função implícita e cálculo da sua derivada num ponto]

Seja $F(x,y) = 0$ e $(x_0, y_0) \in D_F$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$.

a) Averigue se a equação $F(x,y) = 0$ define y como função implícita de x, $y = f(x)$, numa vizinhança de (x_0, y_0), isto é, existe uma função $f: x \to f(x)$ de modo que

$$F[x, f(x)] = 0, \text{ para todo } (x,y) \in \mathcal{V}_\varepsilon(x_0, y_0) \ \text{ e } f(x_0) = y_0.$$

b) Suponhamos que $F(x,y)=0$ define implicitamente uma função $f: x \to f(x)$ numa vizinhança de (x_0, y_0) e f é diferenciável em $x = x_0$.
Como devemos calcular a derivada de f no ponto de abcissa x_0, isto é, $f'(x_0)$?

Comecemos por analisar dois casos particulares.

Exemplo II.31. [Existência de uma função implícita e cálculo da sua derivada num ponto]

Pretendemos verificar que $x\sqrt{y}-2=0$ define y como função implícita de x, $y=f(x)$, numa vizinhança de $P=(1,4)$ para, depois, calcularmos a derivada de f em $x=1$, $f'(1)$.
Seja $F(x,y)=x\sqrt{y}-2$. Então $P=(1,4)\in D_F$ e $F(1,4)=0$.
Uma vez que a abcissa do ponto P é positiva então para $x>0$ temos

$$x\sqrt{y}-2=0 \Leftrightarrow y=\frac{4}{x^2}.$$

Consideramos $f(x)=\frac{4}{x^2}$ num intervalo $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ sendo $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno.[xxiii]
Façamos, por exemplo, $\varepsilon=1$. Deste modo, verificamos que $f(1)=4$ e

$$F\big(x,f(x)\big)=x\sqrt{\frac{4}{x^2}}-2=\frac{2x}{|x|}-2=\frac{2x}{x}-2=0,$$

para $x\in\,]0,2[$, o que nos permite concluir que $x\sqrt{y}-2=0$ define y como função implícita de x, $y=f(x)$, numa vizinhança de $P=(1,4)$.
De seguida, e no sentido de calcular $f'(1)$, derivamos em ordem a x ambos os membros de

$$x\sqrt{f(x)}-2=0.$$

[xxiii] Qual o significado de “suficientemente pequeno” neste contexto? Podemos assumir que $\varepsilon=\frac{1}{2}$? E $\varepsilon=2$?

Assim, vem

$$\sqrt{f(x)} + x\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x) = 0,$$

ou seja, dado que $y = f(x)$, temos

$$\sqrt{y} + x\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0$$

para $x \in]0,2[$. Logo

$$2y + x\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}.$$

Substituindo x por 1 e y por 4 obtemos

$$f'(1) = -8.$$ [xxiv]

Exemplo II.32. [Declive da reta tangente à circunferência num ponto]

Pretendemos determinar o declive da reta tangente à circunferência de centro $C = (0,0)$ e raio $r = 2$ no ponto $P = \left(1, -\sqrt{3}\right)$.

Consideramos $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.

Notamos que o ponto $P = \left(1, -\sqrt{3}\right)$ satisfaz a equação $F(x, y) = 0$, isto é, $F\left(1, -\sqrt{3}\right) = 0$.

Uma vez que a ordenada do ponto P é negativa então para $y < 0$ temos

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\sqrt{4 - x^2}.$$

Assim, podemos afirmar que a função $f\colon]-2,2[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ está definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ numa vizinhança de $\left(1, -\sqrt{3}\right)$. Assim, sabemos que

$$x^2 + (f(x))^2 - 4 = 0,$$

para $x \in]-2,2[$. Derivando em ordem a x vem

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

[xxiv] Repare que, neste contexto, $f'(1) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

ou seja,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Substituindo x por 1 e y por $-\sqrt{3}$ obtemos

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então concluímos que o declive da reta tangente é dado por

$$m = f'(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Retomando o Problema II.30, vamos mostrar como calcular a derivada da função implícita f no ponto de abcissa x_0, isto é, $f'(x_0)$.

Consideremos a equação $F(x,y) = 0$, onde $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 num aberto A, $A \subseteq D_F$, e fixemos o ponto $P = (x_0, y_0) \in A$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$.
Suponhamos, ainda que $F[x, f(x)] = 0$ para $(x,y) \in \mathcal{V}_\varepsilon(x_0, y_0)$, onde $\mathcal{V}_\varepsilon(x_0, y_0) \subseteq A$.
Assim, vamos derivar, em ordem a x, ambos os membros da equação
$F(x,y) = 0$.

Note-se que

$$\xrightarrow{input\ x}\to \begin{array}{|cccc|} \hline \nearrow\ \boxed{x} & \longrightarrow & \boxed{x} & \searrow \\ \searrow\ \boxed{y} & \longrightarrow & \boxed{f(x)} & \nearrow \\ \hline \end{array} \xrightarrow{output}\xrightarrow{z=F(x,f(x))}$$

Utilizando a regra da cadeia vem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

para $(x,y) \in \mathcal{V}_\varepsilon(x_0, y_0)$.

Daí obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)},$$

para $(x,y) \in \mathcal{V}_\varepsilon(x_0,y_0)$, desde que $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$.

Substituindo x por x_0 e y por y_0, concluímos que a derivada da função implícita f em $x = x_0$ é determinada por

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}.$$

Vamos agora apresentar a solução do Problema II.30.

Teorema II.33. [Teorema da função implícita]

Seja $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 num aberto $A \subseteq D_F$ e $(x_0,y_0) \in \mathrm{A}$ tal que $F(x_0,y_0) = 0$.

Se $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ então a equação $F(x,y) = 0$ define implicitamente y como função de x, $y = f(x)$, numa vizinhança de (x_0,y_0).

Além disso $f: x \to f(x)$ é diferenciável em x_0 e

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}.$$

Exemplos II.34. [Existência de uma função implícita e cálculo da sua derivada num ponto]

Vejamos que $\ln(xy) + x^2(y-1) = 0$ define y como função implícita de x numa vizinhança do ponto $P = (1,1)$.

Consideramos $F(x,y) = \ln(xy) + x^2(y-1)$ e calculamos as suas derivadas parciais de 1ª ordem

$$F_x(x,y) = \frac{1}{x} + 2x(y-1) \qquad \wedge \qquad F_y(x,y) = \frac{1}{y} + x^2.$$

Atendendo a que F, F_x e F_y são contínuas em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, podemos afirmar que F é de classe C^1 em A.

O ponto $P = (1,1)$ satisfaz $F(x, y) = 0$ pois $F(1,1) = \ln 1 + 0 = 0$.

Além disso, temos $F_y(1,1) = 2 \neq 0$. Assim, usando o Teorema da função implícita concluímos que y define uma função implícita de x, $y = f(x)$, numa vizinhança de $P = (1,1)$. Sabemos ainda que f é diferenciável em $x = 1$, sendo a sua derivada em $x = 1$ dada por

$$f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -\frac{1}{2}.$$

Exemplos II.35. [Derivada da função implícita e declive de retas tangentes]

a) Determinamos uma equação da reta tangente à curva $x^2 + y^2 - 4 = 0$ no ponto $\left(1, -\sqrt{3}\right)$.

Recorrendo ao Exemplo II.32 escrevemos

$$y + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

b) Seja $F(x, y) = x^2 - 3xy + y^3 - 7$. Assumindo que $F(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x, $y = f(x)$, numa vizinhança do ponto $(4, 3)$, calculamos $f'(4)$.

Note-se que $F(4,3) = 4^2 - 3(4)(3) + 3^3 - 7 = 0$ e, ainda que

$$F_x(x, y) = 2x - 3y \quad \wedge \quad F_y(x, y) = -3x + 3y^2.$$

Assim, temos

$$f'(4) = -\frac{F_x(4,3)}{F_y(4,3)} = \frac{1}{15}.$$

c) Supondo que a equação $e^{xy^2} - 2x - 4y + 3 = 0$ define implicitamente y como função de x, $y = f(x)$, numa vizinhança do ponto $(0,1)$ calculamos $f'(0)$.

Seja $F(x, y) = e^{xy^2} - 2x - 4y + 3$. Atendendo a que

$$F_x(x, y) = y^2 e^{xy^2} - 2 \quad \wedge \quad F_y(x, y) = 2xye^{xy^2} - 4$$

verificamos que

$$f'(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = -\frac{1}{4}.$$

Exercícios II.36.

1. Calcule o diferencial da função $f:(x,y) \rightarrow z = f(x,y)$ no ponto P relativamente aos acréscimos indicados:
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$, $P = (3,1)$, $\Delta x = 0{,}1$ e $\Delta y = -0{,}2$. Resposta: $-0{,}8$.
   b) $f(x,y) = x^2 \ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $P = (2,1)$, $\Delta x = 0{,}3$ e $\Delta y = -0{,}2$. Resposta: $1{,}2 \ln 2 + 1{,}4$.

2. Utilize diferenciais para calcular um valor aproximado de:
   a) $\sqrt{3{,}98}\ln(1{,}07)$. Resposta: $0{,}14$.
   b) $\sin(0{,}01)\cos(0{,}99\pi)$. Resposta: $-0{,}01$.
   c) $(1{,}02)^{3{,}01}$.Resposta: $1{,}06$.

3. No fabrico de uma caixa de fundo quadrado e sem tampa utilizam-se dois tipos de material. O material do tipo A é usado apenas no fundo da caixa, sendo adquirido a 8 unidades monetárias (u.m.) por cada cm^2, enquanto o outro tipo de material tem um custo de 2 unidades monetárias (u.m.) por cada cm^2.
   a) Determine o custo do material para uma caixa de fundo quadrado de lado $x\ cm$ e de altura $y\ cm$. Resposta: $C(x,y) = 8x^2 + 8xy$.
   b) Recorrendo ao cálculo diferencial, indique um valor aproximado para o acréscimo de custo do material, correspondente a aumentos de $0{,}5\ cm$ de altura e de $1\ cm$ de lado.
   Resposta: $dC(x,y) = (16x + 8y)dx + 8xdy$. Fazendo $\Delta x = 1\ cm$ e $\Delta y = 0{,}5\ cm$, obtemos $dC(x,y) = 20x + 8y$.
   c) Determine o valor aproximado para o acréscimo de custo do material e compare com o resultado obtido na alínea anterior. Resposta: $\Delta C(x,y) = dC(x,y) + 12$.

4. Determine o diferencial de $z = f(x, y)$ sendo:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$.

Resposta: $dz = 2(x - 1)dx + 2(y + 2)dy$.

b) $f(x, y) = x^y$. Resposta: $dz = y\, x^{y-1}dx + x^y \ln(x) dy$.

c) $f(x, y) = x^2 \ln\left(\frac{x}{y}\right)$. Resposta: $dz = x\,\left[2 \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right] dx - \frac{x^2}{y} dy$.

5. Considere a curva de equação $x^2 + 2y^2 = 4$.

a) Indique os pontos da curva onde y é localmente função implícita de x. Resposta: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 = 4\} \setminus \{(-2,0), (2,0)\}$.

b) Utilizando a derivação implícita, determine o declive da reta tangente à curva no ponto $(\sqrt{2}, 1)$. Resposta: $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Determine a expressão da derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ das funções $f \colon x \to y = f(x)$ definidas implicitamente pelas equações:

a) $x^2 - 3xy + y^2 = 0$. Resposta: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-3y}{3x-2y}$.

b) $x - 2y = e^y$. Resposta: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2+e^y}$.

c) $\ln(xy) - xy = 1$. Resposta: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

d) $x + \sqrt{xy} = y + 1$. Resposta: $\frac{dy}{dx} = \frac{y+2\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}-x}$.

e) $e^y - e^x + xy = 0$. Resposta: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x-y}{e^y+x}$.

f) $\ln(y + \sqrt{1 + y^2}) - x^2 = 1$. Resposta: $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1 + y^2}$.

II.4 – Funções homogéneas de duas variáveis. Definição, operações e propriedades. Teorema de Euler. Homogeneidade da função de Cobb-Douglas. Definição de função homotética de duas variáveis.

Suponhamos, agora, que temos uma função de duas variáveis definida por

$$f(x,y) = 3x^2y + 7xy^2,$$

e que pretendemos observar o que acontece ao output $f(x,y)$ quando multiplicamos ambos os inputs x e y pela mesma constante $t \in \mathbb{R}^+$.

Verificamos que

$$f(tx,ty) = 3(tx)^2(ty) + 7(tx)(ty)^2 = 3t^3x^2y + 7t^3xy^2 = t^3f(x,y).$$

Dizemos, neste caso, que f é uma função homogénea de grau 3 de acordo com a seguinte definição.

Definição II.37. [Função homogénea]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $z = f(x,y)$ e t um número real positivo tal que $(tx,ty) \in D_f$.

Dizemos que f é uma função homogénea de grau $p \in \mathbb{Q}$ se

$$f(tx,ty) = t^pf(x,y).$$

Exemplos II.38. [Funções homogéneas]

a) A função constante definida por $m(x,y) = 8$ é uma função homogénea de grau $p = 0$.
Dado que o domínio de m é $D_m = \mathbb{R}^2$, temos
$$m(tx,ty) = 8 \Leftrightarrow m(tx,ty) = t^0m(x,y)$$
para todo $t > 0$ tal que $(tx,ty) \in \mathbb{R}^2$.

b) Vejamos que a função h definida por $h(x,y) = 8x^3y^2$ é uma função homogénea de grau $p = 5$. O domínio de h é $D_h = \mathbb{R}^2$.

Temos

$$h(tx,ty) = 8(tx)^3(ty)^2 = 8t^3x^3t^2y^2 = t^5h(x,y)$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $(tx,ty) \in \mathbb{R}^2$.

c) Mostramos que a função f definida por $f(x,y) = \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{8x+11y}$ é uma função homogénea de grau $p = -\frac{1}{2}$. O domínio de f é $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \ \wedge \ 8x + 11y \neq 0\}$.

Temos

$$f(tx,ty) = \frac{2\sqrt{tx} + 3\sqrt{ty}}{8tx + 11ty} = \frac{\sqrt{t}}{t}\frac{\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)}{8x + 11y} = t^{-\frac{1}{2}}f(x,y)$$

para todo $t > 0$ tal que $(tx,ty) \in D_f$.

d) Verificamos que a função g definida por $g(x,y) = \frac{5x}{y}$ é uma função homogénea de grau $p = 0$.

Notemos que (0,0) não pertence ao domínio de g pois $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Então

$$g(tx,ty) = \frac{5tx}{ty} = t^0g(x,y)$$

para todo $t > 0$ tal que $(tx,ty) \in D_g$.

Como consequência da definição apresentamos algumas propriedades envolvendo operações com funções.

Proposição II.39. [Operações com funções homogéneas]

(i) A soma de duas funções homogéneas de grau p é uma função homogénea de grau p;

(ii) O produto de duas funções homogéneas é uma função homogénea cujo grau é a soma dos graus de homogeneidade das funções dadas;

(iii) O quociente de uma função homogénea de grau p por uma função homogénea de grau q é uma função homogénea de grau $p - q$;

(iv) A potência de expoente s de função homogénea de grau p é uma função homogénea de grau sp.

Exemplo II.40. [Homogeneidade da função de Cobb-Douglas]

Consideremos a função de produção Q definida por $Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, com $A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$.

Sabemos que o domínio de Q é dado por $D_Q = [0,+\infty[\times [0,+\infty[$ e para $t > 0$ obtemos

$$Q(tK,tL) = A(tK)^{\alpha}(tL)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}\left(AK^{\alpha}L^{\beta}\right) = t^{\alpha+\beta}Q(K,L).$$

Assim, verificamos que a função de produção Q é homogénea de grau

$$p = \alpha + \beta.$$

Quando $\beta = 1 - \alpha$, temos que $\alpha + \beta = 1$ e concluímos que função de produção Q é homogénea de grau $p = 1$. Neste caso, quando $\alpha + \beta = 1$, dizemos que a função de produção exibe rendimentos constantes à escala[xxv], dado que observamos que o aumento do output é proporcional ao aumento dos fatores, isto é, o volume de produção duplica quando duplicamos a capacidade das máquinas e o número de trabalhadores, triplica quando os referidos fatores triplicam, e assim sucessivamente.

De um modo geral, dizemos que:

(i) Se $\alpha + \beta > 1$ então a função Q tem rendimentos crescentes à escala;

(ii) Se $\alpha + \beta = 1$ então a função Q tem rendimentos constantes à escala;

(iii) Se $\alpha + \beta < 1$ então a função Q tem rendimentos decrescentes à escala.

Exemplo II.41. [O produto médio do trabalho como função da razão entre os fatores produtivos]

Consideremos a função de produção Q de Cobb-Douglas definida por

$$Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \text{ com } A, \alpha \in \mathbb{R}^{+}.$$

Já vimos que esta função de produção é homogénea de grau $p = 1$.

[xxv] Os rendimentos à escala medem o efeito sobre o volume de produção provocado por uma variação (na mesma proporção) de todos os fatores produtivos.

Assumindo que $L > 0$ podemos escrever $(K, L) = L\left(\frac{K}{L}, 1\right)$. Atendendo à homogeneidade de Q vem

$$Q(K, L) = Q\left(L\left(\frac{K}{L}, 1\right)\right) = LQ\left(\frac{K}{L}, 1\right),$$

ou seja,

$$\frac{Q(K, L)}{L} = Q\left(\frac{K}{L}, 1\right).$$

Daí podemos afirmar que o produto médio do trabalho, $\frac{Q(K,L)}{L}$, é função da razão entre os fatores produtivos, capital e trabalho.

A proposição seguinte generaliza esta afirmação.

Proposição II.42.

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função homogénea de grau p.

i) Se $x \neq 0$ então $f(x, y) = x^p h\left(\frac{y}{x}\right)$,

sendo h uma função real de variável real tal que

$$h: u = \frac{y}{x} \in D_h \to w = h(u) \in \mathbb{R};$$

ii) Se $y \neq 0$ então $f(x, y) = y^p g\left(\frac{x}{y}\right)$,

sendo g uma função real de variável real tal que

$$g: v = \frac{x}{y} \in D_g \to w = g(v) \in \mathbb{R};$$

Demonstração:

Supondo que $x \neq 0$ então temos $\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}(x, y)$. Pela Definição II.37. vem

$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}(x, y)\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^p f(x, y) = \frac{1}{x^p} f(x, y)$, ou seja,

$$f(x, y) = x^p f\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^p h\left(\frac{y}{x}\right).$$

Note-se que a função real de variável real $h: D_h \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está bem definida.

A demonstração de (ii) é semelhante.

As funções homogéneas têm diversas propriedades interessantes, razão pela qual os economistas optam muitas vezes por exigir que algumas funções, nomeadamente as de produção e as de procura, sejam homogéneas. Entre as propriedades referidas destacamos, no que se segue, o Teorema de Euler e a homogeneidade das derivadas parciais.

Teorema II.43. [Teorema de Euler]
Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $A \subseteq D_f$.
Se f é homogénea de grau p então

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = pf(x,y) \text{ para } (x,y) \in A.$$

Demonstração:

Começamos por derivar, em ordem a t, ambos os membros da condição

$$f(tx,ty) = t^p f(x,y),$$

onde t é um número real positivo tal que $(tx,ty) \in A$. Repare-se que

$$\frac{\partial}{\partial t} f\left(\underbrace{tx}_{u}, \underbrace{ty}_{v}\right) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = x\frac{\partial f}{\partial u}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial v}(tx,ty).$$

Além disso, $\frac{d}{dt}[t^p f(x,y)] = pt^{p-1}f(x,y)$.

Dado que, por hipótese, f é homogénea de grau p, constatamos que

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx,ty) = \frac{d}{dt}[t^p f(x,y)] \Leftrightarrow x\frac{\partial f}{\partial u}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial v}(tx,ty) = pt^{p-1}f(x,y),$$

onde $u = tx$, $v = ty$ e $(tx,ty) \in A$. Em particular, para $t = 1$, obtemos

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = pf(x,y).$$

Teorema II.44. [Homogeneidade das derivadas parciais]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $A \subseteq D_f$.

Se f é homogénea de grau p então as suas derivadas parciais de primeira ordem são homogéneas de grau $p-1$.

Demonstração:

Por hipótese, sabemos que

$$f(tx,ty) = t^p f(x,y), \text{ com } t \in \mathbb{R}^+, \text{ tal que } (tx,ty) \in A.$$

Efetuando a derivação parcial de f em ordem a x temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f\left(\underbrace{tx}_{u}, \underbrace{ty}_{v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}[t^p f(x,y)].$$

Utilizando a regra da cadeia vem

$$\frac{\partial}{\partial x} f\left(\underbrace{tx}_{u}, \underbrace{ty}_{v}\right) = \frac{\partial f}{\partial u}(tx,ty)\frac{du}{dx} = t\frac{\partial f}{\partial u}(tx,ty).$$

Usando a regra de derivação do produto obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x}[t^p f(x,y)] = t^p \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Assim, temos

$$t\frac{\partial f}{\partial u}(tx,ty) = t^p \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(tx,ty) = t^{p-1}\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty).$$

De modo análogo, prova-se que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(tx,ty) = t^{p-1}\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty), \text{ para } t \in \mathbb{R}^+, \text{ tal que } (tx,ty) \in A.$$

Definimos de seguida outro tipo de funções que incluem como caso particular as funções homogéneas.

Definição II.45. [Função homotética]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $z = f(x, y)$. Dizemos que f é uma função homotética se $f = g \circ h$, isto é, se f é a função composta "g após h" em que $h: D_h \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função homogénea e $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente monótona.

Exemplo II.46. [Função homotética]

Vejamos que a função f definida por $f(x, y) = e^{3x+y}$ é uma função homotética.

Reparemos que f é a função composta "g após h", sendo h e g definidas por

$$h(x, y) = 3x + y \text{ e } g(u) = e^u.$$

Além disso, h é uma função homogénea de grau $p = 1$ e g é uma função estritamente crescente.

Observação II.47. [A função homogénea como caso particular das funções homotéticas]

Note-se que toda a função homogénea é homotética. Basta recordar que, se escolhermos a função identidade $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $i(x) = x$ (ou uma sua restrição) então f pode ser escrita como função composta "i após f" dado que

$$(i \circ f)(x) = i\big(f(x)\big) = f(x), \text{ para } x \in D_f.$$

Todavia uma função homotética pode não ser homogénea.

Exemplo II.48. [Uma função homotética não é necessariamente homogénea]

Vamos verificar que função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{1}{4}\ln x + \frac{3}{4}\ln y$ é homotética mas não é homogénea.

Consideremos as expressões $h(x, y) = \sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y^3}$ e $g(u) = \ln u$.

Então a expressão analítica da função composta "g após h" é dada por

$$(g \circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g\left(\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y^3}\right) = \ln\left(\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y^3}\right) = \ln(\sqrt[4]{x}) + \ln\left(\sqrt[4]{y^3}\right).$$

Tendo em conta que o domínio de f é $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \land \ y > 0\}$ podemos escrever

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\ln x + \frac{3}{4}\ln y = \ln(\sqrt[4]{x}) + \ln\left(\sqrt[4]{y^3}\right) = (g \circ h)(x,y)$$

Assim, temos que f é a função composta "g após h". Além disso, h satisfaz

$$h(tx,ty) = \sqrt[4]{tx}\sqrt[4]{(ty)^3} = \sqrt[4]{t}\,\sqrt[4]{x}\,\sqrt[4]{t^3}\,\sqrt[4]{y^3} = t\,h(x,y)$$

para todo $t > 0$, ou seja, h é uma função homogénea de grau $p = 1$, e g é uma função estritamente crescente. Logo f é homotética. Todavia f não é homogénea (Porquê?).

Exercícios II.49.

1. Mostre que a forma quadrática associada à matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma função homogénea de grau $p = 2$.
2. Verifique se $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função homogénea.
   Em caso afirmativo, indique o seu grau.
   a) $f(x,y) = 17x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} - 3x^3y^{-1}$. Resposta: f é homogénea de grau $p = 2$;
   b) $f(x,y) = \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + \frac{3}{5}x^2y^{-\frac{5}{4}}$. Resposta: f é homogénea de grau $p = \frac{3}{4}$;
   c) $f(x,y) = \frac{x^7 - 5x^3y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$. Resposta: f é homogénea de grau $p = 3$;
   d) $f(x,y) = 2y + \sqrt{x}$. Resposta: f não é homogénea;
   e) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Resposta: f é homogénea de grau $p = 0$;
   f) $f(x,y) = xe^{\frac{y}{x}} + y$. Resposta: f é homogénea de grau $p = 1$;
   g) $f(x,y) = \frac{1}{y^2} + \frac{\ln x - \ln y}{x^2}$. Resposta: f é homogénea de grau $p = -2$;

h) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. Resposta: f é homogénea de grau $p = -1$;

3. Mostre que se uma função de produção, $Q: D_Q \subseteq [0,+\infty[\times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, de classe C^2 num subconjunto aberto do seu domínio, satisfaz as condições

   (i) $Q(tK,tL) = tQ(K,L)$, isto é, tem rendimentos constantes à escala;

   (ii) $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}(K,L) < 0$, isto é, o produto marginal de K é decrescente

   então $\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L}(K,L) > 0$, para $(K,L) \in D_Q$.

4. Considere a função de produção $Q: [0,+\infty[\times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(K,L) = AK^{0,25}L^{\beta}, \text{ com } A,\beta \in \mathbb{R}^+.$$

   a) Determine β de modo que Q seja homogénea de grau $p = 1$. Resposta: $\beta = 0{,}75$.

   b) Escreva a identidade de Euler para Q e verifique o resultado;

   c) Mostre que o produto marginal do capital, definido por $\frac{\partial Q}{\partial K}(K,L)$, é uma função homogénea;

   d) Verifique que

$$K\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}(K,L) + L\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L}(K,L) = 0, \text{ para } (K,L) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[;$$

   e) Mostre que o produto marginal do capital, definido por $\frac{\partial Q}{\partial K}(K,L)$, sendo L constante, é uma função decrescente.

5. Sendo $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função homogénea de grau $p = 1$, considere a função g definida por

$$g(x,y) = \frac{(y^2-x^2)f(x,y)}{y}.$$

   a) g é homogénea? Em caso afirmativo indique o seu grau de homogeneidade.

      Resposta: A função g é homogénea de grau $p = 2$.

   b) Mostre que g satisfaz a identidade de Euler.

6. Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 num conjunto aberto $A \subseteq D_f$.

   Mostre que se f é uma função homogénea de grau p então

   $$x^2 f_{xx}(x,y) + 2xy f_{xy}(x,y) + y^2 f_{yy}(x,y) = p(p-1)f(x,y),$$

   para $(x,y) \in A$.

7. Construa uma função composta $f = g \circ h$ em que $h: D_h \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

   $h(x,y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$ e $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

   a) $g(z) = z^3$. Resposta: $f(x,y) = x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{9}{4}}$, $D_f = D_h$;

   b) $g(z) = 5z + 100$. Resposta: $f(x,y) = 5x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}} + 100$, $D_f = D_h$;

   c) $g(z) = e^z$. Resposta: $f(x,y) = e^{\sqrt[4]{xy^3}}$, $D_f = D_h$.

8. Indique um subconjunto do domínio em que as funções $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a seguir definidas, são homotéticas:

   a) $f(x,y) = e^{x^2 y} e^{xy^2}$. Resposta: $g(z) = e^z$, $h(x,y) = x^2 y + xy^2$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   b) $f(x,y) = \frac{1}{4}\ln x + \frac{3}{4}\ln y$.

      Resposta: $g(z) = \ln z$, $h(x,y) = x^{1/4} y^{3/4}$, para $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$;

   c) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{3+xy}$. Resposta: $g(z) = \frac{z^2}{3+z}$, $h(x,y) = xy$, para $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$;

   d) $f(x,y) = x^3y^6 + 3x^2y^4 + 6xy^2 + 9$.

      Resposta: $g(z) = z^3 + 3z^2 + 6z + 9$, $h(x,y) = xy^2$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

II.5 – Otimização livre de funções de duas variáveis. Definição de extremos: máximo e mínimo absoluto (global) e máximo e mínimo relativo (local). Condição necessária para existência de extremos relativos (condições de primeira ordem ou de estacionariedade). Extremos absolutos de formas quadráticas e de funções polinomiais de segundo grau (funções quadráticas). Condição suficiente para existência de extremos relativos de uma função arbitrária (condições de segunda ordem). Maximização do lucro de uma empresa.

Comecemos por recordar a otimização de uma função real de variável real com o seguinte problema.

Problema II.50. [Maximização do lucro de uma empresa que produz um único bem]

Suponhamos que uma empresa tem uma função de custo C, tal que $C(q)$ representa o custo total da produção de q unidades do seu produto. Admitamos, ainda, que o produto se vende a um preço $P(q)$ por unidade – dependendo, assim, da quantidade produzida.

Consequentemente, o rendimento obtido pela empresa relativo à produção de q unidades é dado por

$$R(q) = qP(q),$$

enquanto o lucro é determinado por

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = qP(q) - C(q).$$

É evidente que – do ponto de vista da empresa – o "melhor valor de q" é aquele que maximiza o seu lucro $\Pi(q)$.

No sentido de calcular a função lucro, definimos, de seguida, a função custo e a função inversa da função procura[xxvi].

Seja, por exemplo,

$$\mathrm{C}(q) = \underbrace{9}_{custo\ fixo} + \underbrace{5q}_{custo\ variável} \quad \text{para } q \geq 0 \ \text{ e } \ \mathrm{P}(q) = 6 - 0.01q \ \text{para}$$

$0 \leq q \leq 600.$

Logo,

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = q(6 - 0.01q) - (9 + 5q) = -0.01q^2 + q - 9.$$

Assumindo que $\Pi(q) \geq 0$, consideremos apenas $q \in [10, 90]$.

Pretendemos determinar q^* de modo que $\Pi(q^*)$ seja o valor máximo da função lucro Π.

Nesse sentido vamos calcular os "zeros" da primeira derivada de $\Pi\colon \mathrm{q} \to \Pi(q)$,

$$\Pi'(q) = 0 \Leftrightarrow -0.02\mathrm{q} + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{q} = \frac{1}{0.02} \Leftrightarrow \mathrm{q} = 50.$$

Assim $q^* = 50$ é o único zero da primeira derivada pelo que dizemos que

$q^* = 50$ é um ponto estacionário (ou ponto crítico) do domínio da função lucro Π.

Como garantir que $\Pi(q^*) = \Pi(50) = 16$ é o lucro máximo?

Não basta verificar que $\Pi'(50) = 0$. *Porquê?*

Precisamos de outro requisito, neste caso da condição $\Pi''(50) = -0.02 < 0$. *Porquê?*

Esclareceremos estas questões com a seguinte proposição.

[xxvi] A função inversa da procura exprime o preço em função da quantidade.

Proposição II.51. [Condição suficiente para existência de extremos relativos de funções de uma variável num intervalo aberto]

Seja $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $x \rightarrow y = g(x)$ diferenciável até à ordem 2 em $A \subseteq D_g$ e $x_0 \in A$.

(a) Se $g'(x_0) = 0$ e $g''(x_0) < 0$ então g tem um máximo relativo no ponto de abcissa x_0;

(b) Se $g'(x_0) = 0$ e $g''(x_0) > 0$ então g tem um mínimo relativo no ponto de abcissa x_0.

Demonstração:

(a) Por hipótese, temos $g'(x_0) = 0$ e $g''(x_0) < 0$. Deste modo podemos escrever

$$g''(x_0) < 0 \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{g'(x) - g'(x_0)}{x - x_0} < 0 \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{g'(x)}{x - x_0} < 0,$$

o que nos permite garantir a existência de $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \frac{g'(x)}{x - x_0} < 0.$$

Assim, se considerarmos $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, verificamos que $x - x_0 > 0$ e, consequentemente, $g'(x) < 0$, para $x \in]x_0, x_0 + \delta[$.

Por outro lado, e de modo análogo, observamos que

$$g'(x) > 0, \text{ para } x \in]x_0 - \delta, x_0[.$$

Concluímos, assim, que g tem um máximo relativo em x_0.

(b) Prova-se de modo análogo ao utilizado em (a).

Logo, pela Proposição II.51, verificamos que $\Pi(50) = 16$ é máximo relativo da função Π. Além disso, também confirmamos que o gráfico da função lucro Π tem um máximo absoluto no ponto $(50,16)$ dado que Π é côncava (isto é, o seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo). Note-se que

$$\Pi''(q) = -0.02 < 0, \text{ para todo valor de } q.$$

Deste modo, concluímos que, no problema anterior, $\Pi(50) = 16$ é o lucro máximo, i.e., a produção de $q^* = 50$ unidades do produto em causa maximiza o lucro da empresa.

Finalmente, também nos parece importante realçar o seguinte.

Como referimos a empresa tem como objetivo maximizar o seu lucro, isto é, pretende determinar q – quantidade produzida – de modo que $\Pi'(q) = 0$.

Ora se $\Pi(q) = R(q) - C(q)$ então

$$\Pi'(q) = 0 \Leftrightarrow R'(q) - C'(q) = 0 \Leftrightarrow R'(q) = C'(q).$$

Deste modo, podemos afirmar que «a quantidade que maximiza o lucro ocorre quando o rendimento marginal[xxvii] iguala o custo marginal[xxviii]».

Passemos, agora, a analisar o problema da otimização para funções de duas variáveis.

Problema II.52. [Maximização do lucro de uma empresa que produz dois bens]

Suponhamos que uma determinada empresa fabrica produtos de marca X e de marca Y. Designamos por x a quantidade produzida de marca X e y a quantidade produzida de marca Y.

Comecemos por averiguar de que forma o rendimento e o lucro obtidos pela empresa dependem do valor da produção de x e y.

Seja p_x o preço de venda de cada unidade do produto X e fixemos p_x =4. Seja, ainda, p_y o preço unitário do produto Y e consideremos $p_y = 1$.

O rendimento da empresa obtido pela venda de x unidades de X e y unidades de Y é dado por

$$R(x,y) = p_x x + p_y y \Leftrightarrow R(x,y) = 4x + y.$$

[xxvii] Rendimento obtido pela produção de uma unidade adicional.

[xxviii] Custo da produção de uma unidade adicional.

Por outro lado, a produção de x unidades de X e y unidades de Y tem um determinado custo. Assumamos que, neste caso, a função custo é dada por

$$C(x,y) = 5 + x^2 - xy + y^2.$$

Deste modo a função lucro é definida por

$$\Pi(x,y) = R(x,y) - C(x,y) = 4x + y - 5 - x^2 + xy - y^2.$$

Pretendemos, agora, determinar o valor da produção que maximiza o lucro da empresa.

Como devemos proceder?

Em primeiro lugar necessitamos das seguintes definições.

Definição II.53. [Máximo e mínimo relativo (local) de um função]

Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$, uma função real de duas variáveis reais e $(x_0,y_0) \in int(D_f)$.

Dizemos que f tem um máximo relativo (máximo local) no ponto (x_0,y_0) se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \text{ para todo } (x,y) \in \mathcal{V}_\delta(x_0,y_0).$$

Analogamente, dizemos que f tem um mínimo relativo (mínimo local) no ponto (x_0,y_0) se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \text{ para todo } (x,y) \in \mathcal{V}_\delta(x_0,y_0).$$

Além disso, se f assume no ponto (x_0,y_0) um máximo ou um mínimo local dizemos que $f(x_0,y_0)$ é um extremo local (ou extremo relativo) e que (x_0,y_0) é um extremante.[xxix]

[xxix] Recorde-se que $\mathcal{V}_\delta(x_0,y_0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}$ e que $(x_0,y_0) \in int(D_f)$ se existir $\mathcal{V}_\delta(x_0,y_0)$ tal que $\mathcal{V}_\delta(x_0,y_0) \subset int(D_f)$.

Definição II.54. [Máximo e mínimo absoluto (global) de um função]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$, uma função real de duas variáveis reais e $(x_0, y_0) \in D_f$.

Dizemos que f tem um máximo absoluto (máximo global) no ponto (x_0, y_0) se

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \text{ para todo } (x,y) \in D_f.$$

Analogamente, dizemos que f tem um mínimo absoluto (mínimo global) no ponto (x_0, y_0) se

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \text{ para todo } (x,y) \in D_f.$$

Assinale-se que todo o extremo absoluto também é extremo relativo, mas o recíproco não é necessariamente verdadeiro.

Podemos interpretar a Definição II.53. do seguinte modo.

Definição II.54a. [Máximo e mínimo relativo (local) de um função]

Dizemos que:

i) f tem um máximo relativo (máximo local) no ponto (x_0, y_0) se a variação de $z = f(x,y)$ devida a acréscimos $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$, suficientemente pequenos, a partir de $f(x_0, y_0)$ é não positiva, i.e.,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \leq 0;$$

(ii) f tem um mínimo relativo (mínimo local) no ponto (x_0, y_0) se a variação de $z = f(x,y)$ devida a acréscimos $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$, suficientemente pequenos, a partir de $f(x_0, y_0)$ é não negativa, i.e.,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \geq 0.$$

Por outro lado, o resultado que se segue também é importante na análise do Problema II.52.

Proposição II.55. [Condição necessária para existência de extremos relativos]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 num aberto A do seu domínio.

Se a função f tem um extremo relativo no ponto $(x_0, y_0) \in A$ então

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ e } f_y(x_0, y_0) = 0.$$ [xxx]

Demonstração:

Fixamos $y = y_0$ e consideremos a função real de variável real $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Note-se que, por hipótese, $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ e g tem um extremo relativo no ponto de abcissa x_0.

Assim, pelo Teorema de Fermat[xxxi], podemos concluir que $g'(x_0) = 0$, ou seja, $f_x(x_0, y_0) = 0$.

Fixamos, agora $x = x_0$ e consideremos a função real de variável real

$h: D_h \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(y) = f(x_0, y)$.

Recorrendo ao Teorema de Fermat e, uma vez que $h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$ e h tem um extremo relativo para $y = y_0$, podemos concluir que $h'(y_0) = 0$, ou seja, $f_y(x_0, y_0) = 0$.

[xxx] Estas condições são usualmente designadas por condições de 1ª ordem ou de estacionariedade e podem ser expressas em termos do vetor gradiente de f da seguinte forma $\nabla f(x_0, y_0) = \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\right) = (0,0)$.

[xxxi] Seja φ uma função real de variável real definida em $[c, d]$. Se φ tem um extremo em $x_0 \in]c, d[$ e se, além disso, φ é diferenciável em x_0, então $\varphi'(x_0) = 0$.

Observação II.56. [Pontos estacionários do domínio de uma função]

De acordo com o resultado anterior para que uma função $f: (x, y) \to z = f(x, y)$ tenha um máximo (ou mínimo) relativo no ponto (x_0, y_0) devem ser satisfeitas as seguintes condições

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ e } f_y(x_0, y_0) = 0,$$

desde que f tenha derivadas parciais de primeira ordem em (x_0, y_0).

Assim, dizemos que (x_0, y_0) é um ponto estacionário do domínio de f e, também, que $f(x_0, y_0)$ é candidato a extremo local de f, desde que

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Se, por outro lado, as derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existem e não são ambas nulas podemos garantir que (x_0, y_0) não é extremante local de f.

Exemplos II.57. [Cálculo de pontos estacionários do domínio de uma função]

Calculamos os pontos estacionários dos domínios das seguintes funções:

(a) $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 6y + 10$.

O domínio de f é $D_f = \mathbb{R}^2$. Resolvemos o sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -6y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Logo $P = (0,1)$ é o único ponto estacionário de D_f.

(b) $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 24x + 75y + 7$.

O domínio de f é $D_f = \mathbb{R}^2$. Resolvemos o sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 24 = 0 \\ -3y^2 + 75 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ y^2 - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \vee x = 2 \\ y = -5 \vee y = 5 \end{cases}.$$

Assim, temos quatro pontos estacionários de D_f,

$$P_1 = (-2, -5),\ P_2 = (-2,5),\ P_3 = (2, -5) \text{ e } P_4 = (2,5).$$

(c) $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 4x^3 + 6y^2 - 48xy + 9$.

O domínio de f é $D_f = \mathbb{R}^2$. Resolvemos o sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 - 48y = 0 \\ 12y - 48x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4y = 0 \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-16) = 0 \\ y = 4x \end{cases}.$$

Assim $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (16,64)$ são pontos estacionários de D_f.

Retomamos o Problema II.52., onde pretendemos maximizar a função lucro

$$\Pi(x,y) = 4x + y - 5 - x^2 + xy - y^2.$$

Constatamos que

$$\begin{cases} \Pi_x(x,y) = 0 \\ \Pi_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2x + y = 0 \\ 1 + x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ 1 + x - 2(2x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

o que nos permite assegurar que $(3,2)$ é o único ponto estacionário.

Como garantir que $\Pi(3,2) = 2$ é máximo?

Vamos recorrer à Definição II.54 e determinar o sinal da expressão

$$\Pi(3 + \Delta x, 2 + \Delta y) - \Pi(3,2), \text{ para } \Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}.$$

Começamos por calcular $\Pi(3 + \Delta x, 2 + \Delta y)$, que é igual a

$$4(3 + \Delta x) + 2 + \Delta y - 5 - (3 + \Delta x)^2 + (3 + \Delta x)(2 + \Delta y) - (2 + \Delta y)^2.$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi(3 + \Delta x, 2 + \Delta y) &= \\ &= 9 + 4(\Delta x) + \Delta y - 9 - 6(\Delta x) - (\Delta x)^2 + 6 + 3(\Delta y) + 2(\Delta x) + \\ &\quad + (\Delta x)(\Delta y) - 4 - 4(\Delta y) - (\Delta y)^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Pi(3 + \Delta x, 2 + \Delta y) = -(\Delta x)^2 + (\Delta x)(\Delta y) - (\Delta y)^2 + 2.$$

Sabemos que $\Pi(3,2) = 2$, logo

$$\Pi(3 + \Delta x, 2 + \Delta y) - \Pi(3,2) = -\left[(\Delta x)^2 - (\Delta x)(\Delta y) + \frac{(\Delta y)^2}{4} - \frac{(\Delta y)^2}{4}\right] - (\Delta y)^2$$

isto é,

$$\Pi(3+\Delta x, 2+\Delta y) - \Pi(3,2) = -\left[(\Delta x)^2 - \Delta x\Delta y + \frac{(\Delta y)^2}{4}\right] + \frac{(\Delta y)^2}{4} - (\Delta y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi(3+\Delta x, 2+\Delta y) - \Pi(3,2) = -\left(\Delta x - \frac{\Delta y}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}(\Delta y)^2 < 0,$$

para quaisquer acréscimos $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$. Assim, utilizando a Definição II.54. podemos concluir que $\Pi(3,2) = 2$ é o máximo absoluto da função lucro definida por

$$\Pi(x,y) = 4x + y - 5 - x^2 + xy - y^2.$$

Comecemos por determinar o único extremo absoluto de algumas formas quadráticas reduzidas.

Exemplos II.58. [Extremo absoluto de algumas formas quadráticas reduzidas]

(a) Seja $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = 2x^2 + 3y^2$;

Pretendemos calcular os pontos estacionários de $D_Q = \mathbb{R}^2$.

Resolvemos o sistema

$$\begin{cases} Q_x(x,y) = 0 \\ Q_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Logo $(0,0)$ é o único ponto estacionário do domínio da função Q.

Questionamos, $Q(0,0) = 0$ é extremo absoluto da função Q?

Uma vez que

$Q(x,y) > 0 \Leftrightarrow Q(x,y) > Q(0,0)$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$[xxxii]

então tendo em conta a Definição II.54. podemos concluir que $Q(0,0) = 0$ é o mínimo absoluto de Q.

(b) Seja, agora, $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = -4x^2 - y^2$.

Uma vez que

[xxxii] Neste caso dizemos que a forma quadrática Q é definida positiva.

$$\begin{cases} Q_x(x,y) = 0 \\ Q_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

constatamos que $(0,0)$ é o único ponto estacionário de $D_Q = \mathbb{R}^2$.

Além disso,

$Q(x,y) < 0 \Leftrightarrow Q(x,y) < Q(0,0)$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$[xxxiii].

Assim, tendo em conta a Definição II.54., podemos afirmar que $Q(0,0) = 0$ é o máximo absoluto da função Q.

(c) A forma quadrática $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = -7x^2 + 5y^2$ tem $(0,0)$ como único ponto estacionário do seu domínio dado que

$$\begin{cases} Q_x(x,y) = 0 \\ Q_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x = 0 \\ 10y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Todavia $Q(x,y)$ não tem sinal definido (isto é, não tem sinal constante)[xxxiv], visto que se, por um lado, verificamos que

$$Q(x,0) = -7x^2 < 0 \Leftrightarrow Q(x,0) < Q(0,0),$$

para todos os pares do tipo $(x,0)$, com $x \neq 0$; por outro, constatamos que $Q(0,y) = 5y^2 > 0 \Leftrightarrow Q(0,y) > Q(0,0)$, para todos os pares do tipo $(0,y)$, com $y \neq 0$. Nestas condições dizemos que $(0,0)$ é ponto sela do domínio da função Q.

Sistematizamos, agora, os resultados anteriores na próxima proposição.

Proposição II.59. [Extremo absoluto de formas quadráticas reduzidas]

Seja $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma forma quadrática de duas variáveis, não nula, definida por

$$Q(x,y) = ax^2 + cy^2, \text{ onde } a, c \in \mathbb{R}.$$

Se $ac \neq 0$[xxxv] então $(0,0)$ é o único ponto estacionário de D_Q.

[xxxiii] Neste caso dizemos que a forma quadrática Q é definida negativa.

[xxxiv] Neste caso dizemos que a forma quadrática Q é indefinida.

[xxxv] Se $a = 0$ e $c \neq 0$ então $Q(x,y) = cy^2$ e a reta de equação $y = 0$ é o conjunto de pontos estacionários de D_Q.

Além disso, verificamos que:

(i) Se $a > 0$ e $c > 0$ então $Q(0,0) = 0$ é o mínimo absoluto de Q;

(ii) Se $a < 0$ e $c < 0$ então $Q(0,0) = 0$ é o máximo absoluto de Q;

(iii) Se a e c têm sinais contrários então $(0,0)$ é ponto sela de Q.

Consideramos, agora, o caso das formas quadráticas completas.

Exemplos II.60. [Extremo absoluto de algumas formas quadráticas completas]

(a) Seja $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = 4x^2 + 4xy + 3y^2$.

Pretendemos calcular os pontos estacionários de D_Q.

Resolvemos o sistema

$$\begin{cases} Q_x(x,y) = 0 \\ Q_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Logo $(0,0)$ é o único ponto estacionário de $D_Q = \mathbb{R}^2$.

Surge novamente a seguinte questão: $Q(0,0) = 0$ é extremo da forma quadrática Q?

Será possível afirmar que:

$$Q(x,y) > 0 \Leftrightarrow Q(x,y) > Q(0,0), \text{ para todo } (x,y) \neq (0,0)?$$

Vamos verificar que a resposta é afirmativa dado que

$$Q(x,y) = 4x^2 + 4xy + 3y^2 = 4(x^2 + xy) + 3y^2 =$$

$$= 4\left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right) + 3y^2,$$

ou seja,

$$Q(x,y) = 4\left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) - y^2 + 3y^2 = 4\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 2y^2.$$

Daí obtemos $Q(x,y) > 0$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$.[xxxvi]

Se $a \neq 0$ e $c = 0$ então $Q(x,y) = ax^2$ e a reta $x = 0$ é o conjunto de pontos estacionários de D_Q.

[xxxvi] Neste caso dizemos que a forma quadrática Q é definida positiva

Assim, tendo em conta a Definição II.54., podemos concluir que $Q(0,0) = 0$ é o mínimo absoluto da função Q.

(b) Seja, agora, $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = -2x^2 + 4xy - 4y^2$. Uma vez que

$$\begin{cases} Q_x(x,y) = 0 \\ Q_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 4x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

constatamos que (0,0) é o único ponto estacionário de $D_Q = \mathbb{R}^2$.

Além disso,

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= -2x^2 + 4xy - 4y^2 = -2(x^2 + 2xy) - 4y^2 \\ &= -2(x^2 + 2xy + y^2 - y^2) - 4y^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$Q(x,y) = -2(x+y)^2 + 2y^2 - 4y^2 = -2(x+y)^2 - 2y^2$$

e daí obtemos

$Q(x,y) < 0$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$[xxxvii].

Assim, tendo em conta a Definição II.54, podemos afirmar que $Q(0,0) = 0$ é o máximo absoluto da função Q.

(c) A forma quadrática $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = 5x^2 + 6xy$ tem (0,0) como único ponto estacionário do seu domínio $\mathbb{R}^2$ dado que

$$\begin{cases} Q_x(x,y) = 0 \\ Q_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 0 \\ 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Todavia $Q(x,y)$ não tem sinal definido visto que

$$Q(x,y) = 5x^2 + 6xy = 5\left(x^2 + \frac{6}{5}xy\right) = 5\left(x^2 + \frac{6}{5}xy + \frac{9}{25}y^2\right) - \frac{9}{5}y^2$$

ou seja,

$$Q(x,y) = 5\left(x + \tfrac{3}{5}y\right)^2 - \tfrac{9}{5}y^2.$$ [xxxviii]

Nestas condições dizemos que $(0,0)$ é ponto sela do domínio de Q.

[xxxvii] Neste caso dizemos que a forma quadrática Q é definida negativa.
[xxxviii] Neste caso dizemos que a forma quadrática Q é indefinida.

(d) Consideremos, finalmente, a forma quadrática $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, não nula, definida por

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \text{ onde } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Se $ac - b^2 \neq 0$[xxxix] verificamos que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} Q_x(x,y) = 0 \\ Q_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by = 0 \\ 2bx + 2cy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

tem solução única, o que implica que $(0,0)$ é o único ponto estacionário do domínio da forma quadrática Q.

Neste caso:

(d.i) se $ac \neq 0$ então o sinal de $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ vai depender do sinal de $a \in \mathbb{R}$ e de $ac - b^2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, visto que,

$$Q(x,y) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2\right) - a\frac{b^2}{a^2}y^2 + cy^2 =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2.$$

(d.ii) Se $a = 0$ e $c \neq 0$ então $Q(x,y)$ não tem sinal definido dado que

$$Q(x,y) = 2bxy + cy^2 = c\left(y^2 + 2\tfrac{b}{c}xy + \tfrac{b^2}{c^2}x^2\right) - c\tfrac{b^2}{c^2}x^2 = c\left(y + \tfrac{b}{c}x\right)^2 - \tfrac{b^2}{c}x^2,$$

e podemos concluir que $(0,0)$ é ponto sela do domínio da função Q.

(d.iii) Se $a \neq 0$ e $c = 0$ então $Q(x,y)$ também não tem sinal definido uma vez que

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy = a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2\right) - a\frac{b^2}{a^2}y^2 =$$

$$= a\left(x + \tfrac{b}{a}y\right)^2 - \tfrac{b^2}{a}y^2,$$

o que nos permite garantir que $(0,0)$ é ponto sela do domínio de Q.

Desta forma podemos resumir as nossas conclusões na seguinte proposição.

[xxxix] Se $ac - b^2 = 0$ e $a \neq 0$ então $Q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2$.

Se $ac - b^2 = 0$ e $c \neq 0$ então $Q(x,y) = c\left(y + \frac{b}{c}x\right)^2$.

Proposição II.61. [Extremo absoluto de formas quadráticas completas]

Seja $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma forma quadrática não nula, definida por

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \text{ onde } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Se $ac - b^2 \neq 0$[xl] então $(0,0)$ é o único ponto estacionário do domínio da função Q e, além disso:

(i) se $ac - b^2 > 0$ então $Q(0,0) = 0$ é extremo absoluto da função Q:

(i-a) se $ac - b^2 > 0$ e $a > 0$ então $Q(0,0) = 0$ é o mínimo absoluto de Q;

(i-b) se $ac - b^2 > 0$ e $a < 0$ então $Q(0,0) = 0$ é o máximo absoluto de Q;

(ii) se $ac - b^2 < 0$ então $(0,0)$ é ponto sela do domínio da função Q.

Repare-se que as condições da Proposição II.61. podem ser descritas em termos das derivadas de 2ª ordem da forma quadrática Q.

As derivadas parciais de primeira ordem são determinadas por

$$Q_x(x,y) = 2ax + 2by \qquad \wedge \qquad Q_y(x,y) = 2bx + 2cy.$$

Todavia as derivadas parciais de segunda ordem são constantes e satisfazem

$$Q_{xx}(x,y) = 2a \qquad \wedge \quad Q_{xy}(x,y) = 2b \qquad \wedge \qquad Q_{yy}(x,y) = 2c.$$

Consequentemente

$$H(P) = \begin{bmatrix} Q_{xx}(x_0,y_0) & Q_{xy}(x_0,y_0) \\ Q_{yx}(x_0,y_0) & Q_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{bmatrix}$$

e verificamos que a matriz Hessiana de Q não depende do ponto $P = (x_0, y_0)$.[xli]

[xl] Consideramos o caso $ac - b^2 = 0$ no Exercício 6 de II.66.

[xli] Neste contexto, e uma vez que a matriz Hessiana de Q não depende do ponto P, representamo-la apenas por H.

Neste caso o valor do determinante é dado por

$$\det H = 4(ac - b^2) = \Delta.^{\text{xlii}}$$

Deste modo constatamos que se $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, onde

$a, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$, então

$$\Delta > 0\ (< 0) \Leftrightarrow ac - b^2 > 0\ (< 0)\ \ \wedge\ \ Q_{xx} > 0\ (< 0) \Leftrightarrow a > 0(< 0).$$

Uma vez que $\Delta = 4(ac - b^2)$, podemos reescrever a Proposição II.61. do seguinte modo.

Proposição II.61.a [Extremo absoluto de formas quadráticas completas]

Seja $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma forma quadrática não nula, definida por

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Se $\Delta = \det H \neq 0$ então $(0,0)$ é o único ponto estacionário do domínio de Q e, além disso:

(i) se $\Delta > 0$ então $Q(0,0) = 0$ é extremo absoluto de Q;

(i-a) se $\Delta > 0$ e $Q_{xx}(0,0) > 0$ então $Q(0,0) = 0$ é o mínimo absoluto de Q;

(i-b) se $\Delta > 0$ e $Q_{xx}(0,0) < 0$ então $Q(0,0) = 0$ é o máximo absoluto de Q;

(ii) se $\Delta < 0$ então $(0,0)$ é ponto sela do domínio de Q.

De seguida analisamos os extremos absolutos de funções polinomiais de segundo grau (sendo estas usualmente designadas por funções quadráticas).

[xlii] Designaremos, no que se segue, o determinante de H por Δ.

Exemplos II.62. [Extremo absoluto de algumas funções quadráticas]

(a) Pretendemos classificar os pontos estacionários do domínio de $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^2 - 3y^2 + 6y + 10.$$

De acordo com o Exemplo II.57., o domínio da função f tem um único ponto estacionário, $P = (0,1)$.

Uma vez que não é uma função do tipo $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$., temos que recorrer à Definição II.54. Nesse sentido, consideramos dois números reais arbitrários, $h, k \in \mathbb{R}$, e calculamos

$\Delta z = f(0+h, 1+k) - f(0,1) = h^2 - 3(k+1)^2 + 6(k+1) + 10 - 13 =$
$= h^2 - 3k^2$.

Verificamos que, mesmo considerando $h, k \in \mathbb{R}$ suficientemente pequenos, a variação

$\Delta z = f(0+h, 1+k) - f(0,1)$ não tem sinal definido. Logo $P = (0,1)$ é ponto sela do domínio de f.

(b) Com o objetivo de classificar os pontos estacionários do domínio da função f definida por

$$f(x,y) = 9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11,$$

constatamos que

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x - 18 = 0 \\ 8y + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Logo podemos afirmar que $(1,-2)$ é o único ponto estacionário de $D_f = \mathbb{R}^2$. Para testarmos se $f(1,-2) = -36$ é extremo calculamos

$$f(1+h, -2+k) = 9(1+h)^2 - 18(1+h) + 4(-2+k)^2 + 16(-2+k) - 11$$

onde $h, k \in \mathbb{R}$. Temos

$$f(1+h, -2+k) = 9 + 18h + 9h^2 - 18 - 18h + 16 - 16k + 4k^2 - 32 + 16k - 11$$

ou seja

$$f(1+h,-2+k) = 9h^2 + 4k^2 - 36 = 9h^2 + 4k^2 + f(1,-2).$$

Verificamos que a variação $\Delta z = f(1+h,-2+k) - f(1,-2)$ é positiva para todos os números $h, k \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulos.

Logo $f(1,-2) = -36$ é o mínimo absoluto da função f.

(c) Consideremos, finalmente, a função quadrática $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, não nula, definida por

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + mx + ny + p, \text{ com } a,b,c,m,n,p \in \mathbb{R}.$$

Se $ac - b^2 \neq 0$ verificamos que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} Q_x(x,y) = 0 \\ Q_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by + m = 0 \\ 2bx + 2cy + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{bn-cm}{2(ac-b^2)} \\ y = \frac{bm-an}{2(ac-b^2)} \end{cases}$$

tem solução única, o que implica que $(x_0, y_0) = \left(\frac{bn-cm}{2(ac-b^2)}, \frac{bm-an}{2(ac-b^2)}\right)$ é o único ponto estacionário do domínio da função Q.

Neste caso é possível reescrever o polinómio, usando o desenvolvimento em torno de (x_0, y_0), da seguinte forma

$$z = Q(x,y) = a(x-x_0)^2 + 2b(x-x_0)(y-y_0) + c(y-y_0)^2 + \\ +Q(x_0,y_0).$$[xliii]

Assim, obtemos

$$\Delta z = Q(x_0+h, y_0+k) - Q(x_0,y_0) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

o que nos permite tirar as seguintes conclusões.

[xliii] Para obter esta expressão podemos recorrer a uma mudança de variável do tipo $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$ que tem por objetivo anular os termos de grau 1 do polinómio $Q(x,y)$.

Daí resulta a expressão $a(x')^2 + 2bx'y' + c(y')^2 + Q(x_0,y_0)$. Regressando às variáveis iniciais encontramos

$$a(x-x_0)^2 + 2b(x-x_0)(y-y_0) + c(y-y_0)^2 + Q(x_0,y_0).$$

Se $ac - b^2 \neq 0$ então (x_0, y_0) é o único ponto estacionário de D_Q e, além disso:

(i) se $ac - b^2 > 0$ então $Q(x_0, y_0)$ é extremo absoluto da função Q;

(i-a) se $ac - b^2 > 0$ e $a > 0$ então $Q(x_0, y_0)$ é o mínimo absoluto da função Q;

(i-b) se $ac - b^2 > 0$ e $a < 0$ então $Q(x_0, y_0)$ é o máximo absoluto da função Q;

(ii) se $ac - b^2 < 0$ então (x_0, y_0) é ponto sela do domínio da função Q.

Torna-se assim possível obter uma generalização da Proposição II.61.

Proposição II.63. [Extremo absoluto de funções quadráticas]

Seja $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função quadrática não nula definida por

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + mx + ny + p, \text{ com } a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}.$$

Se $ac - b^2 \neq 0$ então $(x_0, y_0) = \left(\frac{bn-cm}{2(ac-b^2)}, \frac{bm-an}{2(ac-b^2)}\right)$ é o único ponto estacionário do domínio da função Q e, além disso:

(i) se $ac - b^2 > 0$ então $Q(x_0, y_0)$ é extremo absoluto da função Q:

(i-a) se $ac - b^2 > 0$ e $a > 0$ então $Q(x_0, y_0)$ é o mínimo absoluto de Q;

(i-b) se $ac - b^2 > 0$ e $a < 0$ então $Q(x_0, y_0)$ é o máximo absoluto de Q;

(ii) se $ac - b^2 < 0$ então (x_0, y_0) é ponto sela do domínio da função Q.

Também, neste caso, podemos reescrever o resultado anterior em termos das derivadas de 2ª ordem da função Q.

Proposição II.63.a [Extremo absoluto de funções quadráticas]

Seja $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma função não nula, definida por

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + mx + ny + p, \text{ com } a,b,c,m,n,p \in \mathbb{R}.$$

Definimos $\Delta = \det H(x,y)$.

Se $\Delta \neq 0$[xliv] então $(x_0, y_0) = \left(\frac{bn-cm}{2(ac-b^2)}, \frac{bm-an}{2(ac-b^2)}\right)$ é o único ponto estacionário do domínio da função Q e, além disso:

(i) se $\Delta > 0$ então $Q(x_0,y_0)$ é extremo absoluto da função Q:

(i-a) se $\Delta > 0$ e $Q_{xx}(x_0,y_0) > 0$ então $Q(x_0,y_0)$ é o mínimo absoluto da função Q;

(i-b) se $\Delta > 0$ e $Q_{xx}(x_0,y_0) < 0$ então $Q(x_0,y_0)$ é o máximo absoluto da função Q;

(ii) se $\Delta < 0$ então (x_0,y_0) é ponto sela do domínio da função Q.

Retomamos o Problema II.52., onde pretendemos maximizar a função lucro definida por

$$\Pi(x,y) = 4x + y - 5 - x^2 + xy - y^2,$$

para o qual vamos propor uma resolução alternativa.

Constatamos que $(3,2)$ é ponto estacionário do domínio de Π.

Como garantir que $\Pi(3,2) = 2$ é máximo absoluto tendo em conta que $\Pi(x,y)$ define uma função quadrática?

[xliv] Se $\Delta = 0$ podem ocorrer duas situações: ou a função quadrática não tem pontos estacionários ou tem uma reta de pontos estacionários. Por exemplo, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x - 2\}$ é o conjunto de pontos estacionários da função definida por $Q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 4$ enquanto a função definida por $Q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 6y + 4$ não tem pontos estacionários.

Note-se que é possível reescrever o polinómio, usando o desenvolvimento em torno de $(3,2)$, da seguinte forma

$$\mathrm{z} = \Pi(x,y) = -(x-3)^2 + (x-3)(y-2) - (y-2)^2 + \Pi(3,2).$$ [xlv]

Assim, obtemos

$$\Delta\mathrm{z} = \Pi(3+h, 2+k) - \Pi(3,2) = -h^2 + hk - k^2 = -(h^2 - hk + k^2)$$

ou seja,

$$\Delta\mathrm{z} = -\left(h^2 - hk + \frac{k^2}{4}\right) - \frac{3k^2}{4} = -\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{3k^2}{4} < 0,$$

para quaisquer h e k, não simultaneamente nulos.

Utilizando a Definição II.54. e tendo em conta a desigualdade anterior, concluímos que $\Pi(3,2) = 2$ é o máximo absoluto da função lucro Π.

Todavia, a Proposição II.63a. fornece-nos um modo mais expedito para obter a mesma conclusão.

Note-se $\Pi_{xx}(3,2) = -2 < 0$ e $\Delta = 3 > 0$, pelo que estamos nas condições da alínea (i-b) da proposição referida o que nos permite concluir que $\Pi(3,2) = 2$ é o máximo absoluto da função Π.

Queremos, de seguida, encontrar respostas para a seguinte questão:

«Será possível classificar os pontos estacionários do domínio de uma função de duas variáveis $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por intermédio de condições de 2ª ordem (i.e., condições que envolvem derivadas de 2ª ordem)? De que forma?»

[xlv] Para obter esta expressão podemos recorrer a uma mudança de variável do tipo $x' = x - 3$ e $y' = y - 2$. Deste modo, após a substituição, obtemos

$$4(x'+3) + (y'+2) - 5 - (x'+3)^2 + (x'+3)(y'+2) - (y'+2)^2 =$$
$$= -(x')^2 + x'y' - (y')^2 + 2 = -(x-3)^2 + (x-3)(y-2) - (y-2)^2 + \Pi(3,2).$$

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $z = f(x,y)$ uma função de classe C^2 num aberto A do seu domínio e $(x_0, y_0) \in A$ um ponto estacionário de D_f.

Queremos dar resposta à seguinte questão: «$f(x_0, y_0)$ é um extremo relativo da função f?».

Com esse objetivo vamos construir uma função – já nossa conhecida do ponto de vista da classificação dos pontos estacionários – que seja "muito parecida" com f, numa vizinhança do ponto (x_0, y_0).

Assim procuramos $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, não nula, definida por

$$Q(x,y) = a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 + m(x - x_0) + \\ +n(y - y_0) + p,$$

com $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$, tal que

$Q(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$,

$Q_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ e $Q_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$,

$Q_{xx}(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)$, $Q_{yy}(x_0, y_0) = f_{yy}(x_0, y_0)$ e $Q_{xy}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$[xlvi].

Obtemos

$a = \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)$, $b = \frac{1}{2} f_{xy}(x_0, y_0)$, $c = \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)$,

$m = f_x(x_0, y_0)$, $n = f_y(x_0, y_0)$ e $p = f(x_0, y_0)$.

Deste modo, se considerarmos que estamos a analisar localmente – mais concretamente, numa vizinhança de (x_0, y_0) – a função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $z = f(x,y)$ podemos substituí-la, na análise em questão, pela função $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que, por construção, também admite (x_0, y_0) como ponto estacionário.

[xlvi] Assumimos que as derivadas cruzadas em (x_0, y_0) são iguais.

Consequentemente, classificamos o ponto estacionário (x_0, y_0) recorrendo ao sinal da segunda derivada $Q_{xx}(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)$ e do discriminante

$\Delta(x_0, y_0) = Q_{xx}(x_0, y_0)Q_{yy}(x_0, y_0) - \left[Q_{xy}(x_0, y_0)\right]^2$, isto é,

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2.$$

Note-se que o discriminante é precisamente o determinante da matriz Hessiana de f em (x_0, y_0),

$$\Delta(x_0, y_0) = \det H\,(x_0, y_0).$$

Assim, se (x_0, y_0) é um ponto estacionário de D_f, calculamos

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2.$$

Deste modo concluímos que:

Proposição II.64. [Condição suficiente para a existência de extremos relativos de uma função]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 num aberto A do seu domínio e $(x_0, y_0) \in A$ um ponto estacionário de D_f.

Definimos $\Delta(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$.

(i) Se $\Delta(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é um ponto sela do domínio da função.

(ii) Se $\Delta(x_0, y_0) = 0$, nada se pode concluir. Isto é, (x_0, y_0) pode ser um extremante local ou um ponto sela.

(iii) Se $\Delta(x_0, y_0) > 0$ então $f(x_0, y_0)$ é um extremo local função.
Além disso, podemos afirmar que se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ então $f(x_0, y_0)$ é um máximo local de f.
Todavia se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ podemos garantir que $f(x_0, y_0)$ é um mínimo local de f.

Exemplo II.65.

Vamos analisar se os pontos estacionários do domínio da função

$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 24x + 75y + 7$$

são extremantes de f.

De acordo com o Exemplo II.57, $P_1 = (-2, -5)$, $P_2 = (-2,5)$, $P_3 = (2, -5)$ e $P_4 = (2,5)$ são os pontos estacionários de $D_f = \mathbb{R}^2$.

Além disso,

$$f_{xx}(x, y) = 12x \quad \wedge \quad f_{yy}(x, y) = -6y \quad \wedge \quad f_{xy}(x, y) = 0.$$

Em relação ao ponto $P_1 = (-2, -5)$ verificamos que

$$\Delta(-2, -5) = f_{xx}(-2, -5) f_{yy}(-2, -5) - \left[f_{xy}(-2, -5)\right]^2 = (-24)(30) < 0.$$

Logo $P_1 = (-2, -5)$ é um ponto sela do domínio de f.

No que respeita o ponto $P_2 = (-2,5)$ temos

$$\Delta(-2,5) = f_{xx}(-2,5) f_{yy}(-2,5) - \left[f_{xy}(-2,5)\right]^2 = (-24)(-30) > 0$$

e $f_{xx}(-2,5) = -24 < 0$, o que nos permite concluir que $f(-2,5) = 289$ é um máximo local de f.

Por outro lado, para o ponto $P_3 = (2, -5)$ constatamos que

$$\Delta(2, -5) = f_{xx}(2, -5) f_{yy}(2, -5) - \left[f_{xy}(2, -5)\right]^2 = (24)(30) > 0$$

e $f_{xx}(2, -5) = 24 > 0$, pelo que podemos afirmar que $f(2, -5) = -375$ é um mínimo local de f.

Finalmente $P_4 = (2,5)$ é um ponto sela do domínio de f visto que

$$\Delta(2,5) = f_{xx}(2,5) f_{yy}(2,5) - \left[f_{xy}(2,5)\right]^2 = (24)(-30) < 0.$$

Recapitulando:

Para que a função definida por $z = f(x, y)$ tenha um extremo local num ponto $(x_0, y_0) \in int(D_f)$ é necessário que

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ e } f_y(x_0, y_0) = 0,$$

desde que f tenha derivadas parciais de primeira ordem em (x_0, y_0).[xlvii]

As condições anteriores são usualmente designadas por condições de 1ª ordem ou de estacionariedade.

Uma vez que as condições $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ não são suficientes para garantir a existência de um extremo para f em (x_0, y_0), devemos analisar as derivadas parciais de 2ª ordem de f nos pontos estacionários que pretendemos classificar.

Assim se (x_0, y_0) é um ponto estacionário de D_f calculamos

$$\Delta(x_0, y_0) = \det H\,(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2,$$

supondo que as derivadas cruzadas em (x_0, y_0) são iguais.

Se $\Delta(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é um ponto sela do domínio da função f.

Se $\Delta(x_0, y_0) = 0$, nada se pode concluir. Isto é, (x_0, y_0) pode ser um extremante local ou um ponto sela.

Se $\Delta(x_0, y_0) > 0$ então $f(x_0, y_0)$ é um extremo local função.

Além disso, podemos afirmar que se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ então $f(x_0, y_0)$ é um máximo local de f.

Todavia se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ podemos garantir que $f(x_0, y_0)$ é um mínimo local da função f.

[xlvii] A função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tem como mínimo absoluto $f(0,0) = 0$, apesar das suas derivadas parciais no ponto (0,0) não existirem.

Exercícios II.66.

1. Classifique os pontos estacionários do domínio das seguintes formas quadráticas:
   a) $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = x^2 - 6xy + y^2$.
   Resposta: $(0,0)$ é ponto sela;
   b) $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = 4x^2 + 5xy + 4y^2$.
   Resposta: $Q(0,0) = 0$ é mínimo absoluto;
   c) $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = 8x^2 + 4xy + 8y^2$.
   Resposta: $Q(0,0) = 0$ é mínimo absoluto;
   d) $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = 2\sqrt{5}xy + 4y^2$.
   Resposta: $(0,0)$ é ponto sela;
   e) $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = -6x^2 + 4xy - 6y^2$.
   Resposta: $Q(0,0) = 0$ é máximo absoluto;
   f) $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y) = -x^2 + 6xy + y^2$.
   Resposta: $(0,0)$ é ponto sela.

2. Determine, caso exista(m), o(s) extremo(s) absoluto(s) das funções polinomiais de grau 2 (ou funções quadráticas) definidas por:

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$. Resposta: $f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ é mínimo absoluto.

b) $f(x,y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$. Resposta: $f(8,16) = 74$ é máximo absoluto

c) $f(x,y) = x^2 - 8xy - 5y^2 + 2$. Resposta: f não tem extremos absolutos.

d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. Resposta: $f(1,0) = -1$ é mínimo absoluto.

3. Classifique o(s) ponto(s) estacionário(s) do domínio das funções definidas por:

a) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2$. Resposta: $f(0,0) = 0$ é mínimo absoluto.

b) $f(x,y) = 3x^2 - 5xy + y^2$. Resposta: $(0,0)$ é ponto sela.

c) $f(x,y) = x^2 + y^2$. Resposta: $f(0,0) = 0$ é mínimo absoluto.

d) $f(x,y) = xy$. Resposta: $(0,0)$ é ponto sela.

e) $f(x,y) = 3x^2 + 8xy + 3y^2 + 28$. Resposta: $(0,0)$ é ponto sela.

f) $f(x,y) = -3x^2 + 6xy + 5y^2 - 24$. Resposta: $(0,0)$ é ponto sela.

g) $f(x,y) = -3x^2 - y^2 + 5xy - 7y$. Resposta: $\left(\frac{35}{13}, \frac{42}{13}\right)$ é ponto sela.

h) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y + 2y^2 + y$. Resposta: $(0, -\frac{1}{4})$ é ponto sela e $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ e $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ são mínimos relativos.

i) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 1$.

Resposta: (0,0) é ponto sela e $f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{35}{27}$ é máximo relativo

j) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 160x - 120y + 18$.

Resposta: $f(20,20) = -2782$ é mínimo absoluto.

k) $\Pi(x,y) = -5 + \frac{17}{3}x + \frac{28}{3}y - \frac{5}{3}y^2 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{3}xy$.

Resposta: $\Pi(2,3) = \frac{44}{3}$ é máximo absoluto

l) $h(x,y) = y^3 + 3xy - x^3$. Resposta: $(0,0)$ é ponto sela e $h(-1,1) = -1$ é mínimo relativo.

m) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^4$. Resposta: $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$ e $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$ são mínimos relativos e $(0,0)$ é ponto sela.

4. Determine, caso exista(m), o(s) extremo(s) relativo(s) das funções definidas por:

a) $f(x,y) = (x-1)(x^2 - y^2)$. Resposta: $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{4}{27}$ é mínimo relativo e $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$ são pontos sela;

b) $f(x,y) = xye^{x-y}$. Resposta: $(0,0)$ é ponto sela e $f(-1,1) = -e^{-2}$ é mínimo relativo.

5. Verifique se $(-5,-5)$, $(-1,1)$ e $(1,-1)$ são pontos estacionários do domínio da função definida por $f(x,y) = 2x^3 + 6y^3 - 6xy^2 + 15y^2$ e, em caso afirmativo, classifique-os.

   Resposta: $(-1,1)$ não é ponto estacionário, $(1,-1)$ é ponto sela e $f(-5,-5) = 125$ é máximo relativo.

6. Seja $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma forma quadrática não nula, definida por

   $$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + \frac{b^2}{a}y^2, \text{ onde } a,b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

   a) Verifique que $\Delta = \det H(x,y) = 0$.

   b) Mostre que $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{b}{a}y\right\}$ é o conjunto dos pontos estacionários do domínio da forma quadrática Q.

   c) Sabendo que $\Delta = 0$, prove que:

   (i) se $a > 0$ então a forma quadrática Q atinge o seu valor mínimo (absoluto) no conjunto de pontos estacionários dado por

   $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{b}{a}y\right\};$$ [xlviii]

   (ii) se $a < 0$ então a forma quadrática Q atinge o seu valor máximo (absoluto) no conjunto de pontos estacionários dado por

   $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{b}{a}y\right\}.$$ [xlix]

[xlviii] Neste caso dizemos que a forma quadrática Q é semidefinida positiva.

[xlix] Neste caso dizemos que a forma quadrática Q é semidefinida negativa.

II.6 – Otimização condicionada de funções de duas variáveis. Método de substituição e método dos multiplicadores de Lagrange. Minimização do custo total de uma empresa sujeita a uma produção previamente fixada e maximização da utilidade do consumidor sujeito a uma restrição orçamental.

Nesta secção estudamos problemas de otimização com uma restrição de igualdade. Trata-se do caso mais simples no âmbito da otimização condicionada (também conhecida por otimização com restrições). Vamos resolver exercícios aplicando o método da substituição ou o método dos multiplicadores de Lagrange.

Exemplos II.67. [Otimização condicionada de uma forma quadrática]

Consideremos a função (forma quadrática) $Q: D_Q \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, não nula, definida por

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}$$

sujeita à restrição:

(a) $x = 0$;
(b) $y = kx$, com $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
(c) $\alpha x + \beta y = 0$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Determinamos e classificamos o(s) extremo(s) do problema de otimização.

(a) Se $x = 0$ então

$$Q(0, y) = cy^2, \text{ com } c \in \mathbb{R}.$$

Deste modo verificamos que o problema inicial se resume ao estudo de extremos de uma função de uma variável definida por

$$h(y) = cy^2, \text{ sendo } c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}^{\text{I}}.$$

I Se $c = 0$ então h é a função nula.

Uma vez que

$$h'(y) = 0 \Leftrightarrow 2cy = 0 \Leftrightarrow y = 0,$$

concluímos que $h(0) = 0$ é candidato a extremo de h.

No entanto, atendendo a que $h''(y) = 2c$, podemos afirmar que:

(i) se $c > 0$ então $h(0) = 0$ é mínimo absoluto da função h;

(ii) se $c < 0$ então $h(0) = 0$ é máximo absoluto da função h.

Logo podemos assegurar que:

(i) se $c > 0$ então $Q(0,0) = 0$ é mínimo absoluto da função Q sujeita à restrição $x = 0$;

(ii) se $c < 0$ então $Q(0,0) = 0$ é máximo absoluto da função Q sujeita à restrição $x = 0$.

(a) Se $y = kx$, com $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ então

$$Q(x, y) = Q(x, kx) = ax^2 + 2bx(kx) + c(kx)^2 = (a + 2bk + ck^2)x^2,$$

com $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Estamos perante um problema de análise de extremos de um função de uma variável definida por

$$j(x) = \underbrace{(a + 2bk + ck^2)}_{m} x^2 = mx^2, \text{ com } m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Assim,

(i) se $m > 0$ então $j(0) = 0$ é mínimo absoluto da função j;

(ii) se $m < 0$ então $j(0) = 0$ é máximo absoluto da função j;

visto que $j'(x) = 0 \Leftrightarrow 2mx = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $j''(x) = 2m$.

Consequentemente:

(i) se $a + 2bk + ck^2 > 0$ então $Q(0,0) = 0$ é mínimo absoluto da função Q sujeita à restrição $y = kx$, com $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;

(ii) se $a + 2bk + ck^2 < 0$ então $Q(0,0) = 0$ é máximo da absoluto função Q sujeita à restrição $y = kx$, com $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(b) Se $\alpha x + \beta y = 0$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ então $y = kx$, com $k = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e, tendo em conta a alínea (b), podemos concluir que:

(i) se $a - 2b\frac{\alpha}{\beta} + c\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 > 0$ então $Q(0,0) = 0$ é mínimo absoluto da função Q sujeita à restrição $\alpha x + \beta y = 0$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;

(ii) se $a - 2b\frac{\alpha}{\beta} + c\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < 0$ então $Q(0,0) = 0$ é máximo absoluto da função Q sujeita à restrição $\alpha x + \beta y = 0$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Exemplos II.68. [Otimização condicionada de uma função sujeita a uma restrição linear]

1. Mostramos que a função definida por $f(x,y) = -2x^2 + y^2$ sujeita à restrição $y = 2x - 1$ tem um mínimo.
   Se $y = 2x - 1$ então
   $f(x,y) = f(x, 2x-1) = -2x^2 + (2x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 1$.
   Definimos $h(x) = 2x^2 - 4x + 1$ e verificamos que $h(1) = -1$ é o mínimo absoluto da função h porque $h'(1) = 0$ e $h''(1) = 4 > 0$.
   Deste modo $f(1,1) = -1$ é o mínimo absoluto de f sujeita à restrição $y = 2x - 1$.

2. Determinamos os extremos da função definida por
   $f(x,y) = (x+y)^2 - \ln x - y$ sujeita à restrição $2x + 2y = 3$.

Se $2x + 2y = 3$ então $y = \frac{3}{2} - x$ e, assim,

$$f(x, y) = f\left(x, \frac{3}{2} - x\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + x - \ln x = \frac{3}{4} + x - \ln x.$$

Considerando $h(x) = \frac{3}{4} + x - \ln x$ para $x > 0$, constatamos que $h(1) = \frac{7}{4}$ é o mínimo absoluto da função h uma vez que $h'(1) = 0$ e $h''(1) = 1 > 0$.

Consequentemente $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$ é o mínimo absoluto de f sujeita à restrição $2x + 2y = 3$.

3. Calculamos o máximo da função definida por $\pi(x, y) = 90x - 4x^2 + 45y - y^2 - 2xy$ sujeita a $10x + 5y = 100$.
   Se $10x + 5y = 100$ então $y = 20 - 2x$ e, também,

$$\pi(x, y) = \pi(x, 20 - 2x) = 500 + 40x - 4x^2.$$

   Definimos $p(x) = 500 + 40x - 4x^2$ e verificamos que $p'(5) = 0$ e $p''(5) = -8 < 0$. Logo $p(5) = 600$ é o máximo absoluto de p e, consequentemente $\pi(5,10) = 600$ é o máximo absoluto de π sujeita à restrição $10x + 5y = 100$.

Nestes exemplos – onde analisámos o problema de otimização de uma função f de duas variáveis, definida por $z = f(x, y)$ sujeita a uma restrição do tipo $g(x, y) = k$ [li] – utilizámos o método de substituição que passamos a descrever.

[li] Tal como referimos no início desta secção, trata-se de um problema de otimização condicionada, com uma restrição de igualdade.

Método II.69. [Método de substituição]

Consideremos o problema

$$\begin{array}{l} max/\min f(x,y) \\ \text{s.a. } g(x,y)=k \end{array} .^{\text{lii}}$$

1. Usamos a restrição $g(x,y)=k$ para exprimir y em função de x, por exemplo, seja $y=\psi(x)$.[liii]
2. Substituímos $y=\psi(x)$ em $f(x,y)$ e obtemos uma função que depende apenas de x.
   Isto é, transformamos o problema inicial (problema de otimização condicionada) num problema de otimização de uma função de uma variável.
   Definimos $h(x)=f(x,\psi(x))$.
3. Calculamos os "zeros" da primeira derivada da função h resolvendo a equação $h'(x)=0$ e determinamos os pontos estacionários do domínio da função h.
4. Classificamos os pontos estacionários por intermédio do sinal da segunda derivada da função h em cada um deles.[liv]
5. Seja x_0 um ponto estacionário do domínio de h.
   Se $h(x_0)$ é extremo da função h então $f(x_0,\underbrace{\psi(x_0)}_{y_0})$ é extremo de f sujeita à restrição
   $$g(x,y)=k.$$

No exemplo que se segue vamos analisar um problema usual em Economia: «Minimizar os custos totais do trabalho e do capital de uma empresa, assumindo a obrigação de produzir um output previamente determinado».

[lii] Usamos a abreviatura s.a. para indicar "sujeito a"
[liii] Em alguns casos pode ser útil explicitar x como função de y, $x=\varphi(y)$. E procede-se de forma análoga.
[liv] Em alternativa, podemos construir o quadro de variação de h.

Exemplo II.70. [Custo mínimo de uma empresa sujeita a uma produção previamente fixada]

Consideremos uma empresa em que a função de produção Q é definida por

$$Q(K,L) = 5KL, \text{ com } K,L \in \mathbb{R}^+,$$

onde K e L são fatores de produção, e, a função custo C é definida por

$$C(K,L) = 10K + 8L.$$

Pretendemos minimizar os custos da referida empresa sabendo que está obrigada, por contrato, a um volume de produção igual a 1600 unidades. Vamos resolver o seguinte problema

$$\begin{gathered} \min C(K,L) \\ \text{s.a. } 5KL = 1600 \end{gathered}$$

Uma vez que

$$5KL = 1600 \Leftrightarrow L = \frac{1600}{5K} \Leftrightarrow L = \frac{320}{K}, \text{ para } K > 0,$$

verificamos que

$$C(K,L) = C\left(K, \frac{320}{K}\right) = 10K + 8\left(\frac{320}{K}\right) = 10K + \frac{2560}{K}.$$

Definimos

$$c(K) = 10K + \frac{2560}{K}$$

para $K > 0$, e provamos que $c(16) = 320$ é o mínimo absoluto da função definida por $c(K) = 10K + \frac{2560}{K}$, uma vez que $c'(16) = 0$ e $c''(16) = \frac{5}{4} > 0$.

Consequentemente, podemos concluir que o custo mínimo da empresa mencionada – sujeita à restrição $5KL = 1600$ – é atingido quando $K = 16$ e

$L = 20$.

Formulamos agora o problema do consumidor em Economia que consiste em «Maximizar a função de utilidade assumindo que o consumidor dispõe de uma restrição orçamental.».

Exemplo II.71 [Utilidade máxima do consumidor sujeita a uma restrição orçamental]

Suponhamos que a função de utilidade U do consumidor é definida por

$$U(x,y) = xy, \text{ com } x, y \in \mathbb{R}^+,$$

onde x e y representam as quantidades de dois bens A e B, respetivamente, adquiridos ao preço de 1 e 2 unidades monetárias (u.m.). Sabendo que o consumidor dispõe de M unidades monetárias (u.m.), quais as quantidades de bens que maximizam a sua função de utilidade?

Vamos resolver o seguinte problema

$$\begin{gathered} \max U(x,y) \\ \text{s.a. } x + 2y = M \end{gathered}$$

A restrição é dada por $x + 2y = M \Leftrightarrow y = \frac{M}{2} - \frac{x}{2}$

então

$$U(x,y) = U\left(x, \frac{M}{2} - \frac{x}{2}\right) = x\left(\frac{M}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{Mx}{2} - \frac{x^2}{2}$$

Definimos

$$u(x) = \frac{Mx}{2} - \frac{x^2}{2}, \text{ para } x \geq 0,$$

e provamos que $u\left(\frac{M}{2}\right) = \frac{M^2}{8}$ é o máximo absoluto da função u, uma vez que

$$u'\left(\frac{M}{2}\right) = 0 \ \text{ e } \ u''\left(\frac{M}{2}\right) = -1 < 0.$$

Assim sendo, podemos concluir que a utilidade máxima do consumidor – sujeita à restrição orçamental $x + 2y = M$ – é atingida quando $x = \frac{M}{2}$ e $y = \frac{M}{4}$.

O método de substituição tem o inconveniente de exigir que, a partir da restrição $g(x,y)=k$ – que define uma relação implícita entre as variáveis x e y – explicitemos y em função de x.

Todavia existem outros métodos adequados ao estudo do problema de otimização de uma função f definida por $z=f(x,y)$, sujeita a uma restrição do tipo $g(x,y)=k$, nomeadamente o método dos multiplicadores de Lagrange.

Vamos verificar que este método transforma o problema de otimização condicionada descrito por

$$\begin{gathered} max/\min f(x,y) \\ \text{s.a. } g(x,y)=k \end{gathered}$$

num problema de otimização livre (otimização sem restrições) que consiste no estudo dos extremos de uma função auxiliar (função de Lagrange) definida por

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda[k-g(x,y)], \text{ sendo } \lambda \in \mathbb{R}.$$ [lv]

Método II.72. [Método dos multiplicadores de Lagrange]

Consideremos o problema

$$\begin{gathered} max/\min f(x,y) \\ \text{s.a. } g(x,y)=k \end{gathered}.$$

1. Começamos por construir uma função auxiliar (função de Lagrange) definida por

   $$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda[k-g(x,y)],$$

   onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é o multiplicador de Lagrange.[lvi]

[lv] Note-se que se admitirmos que a relação $g(x,y)-k=0$ define y implicitamente como função de x, $y=\psi(x)$, e, ainda, considerarmos $F(x)=f\big(x,\psi(x)\big)$ então

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx}(x,y)=0 \\ g(x,y)-k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x,y)-f_y(x,y)\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}=0 \\ g(x,y)=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=0. \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$$

[lvi] No que se segue tratamos λ como uma variável adicional.

2. De seguida, determinamos todos os ternos (x, y, λ) que satisfazem o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = k \end{cases}.$$

As soluções deste sistema são pontos estacionários do domínio da função auxiliar e, nessa qualidade, são candidatos a extremos do problema inicial.

3. Para cada um dos pontos estacionários encontrados atrás, $P_i = (x_i, y_i, \lambda_i)$, calculamos as seguintes derivadas $g_x(x_i, y_i, \lambda_i),\ g_y(x_i, y_i, \lambda_i),\ \mathcal{L}_{xx}(x_i, y_i, \lambda_i),\ \mathcal{L}_{yy}(x_i, y_i, \lambda_i),\ \mathcal{L}_{xy}(x_i, y_i, \lambda_i)$ e formamos a matriz[lvii]

$$\mathcal{H}(P_i) = \begin{bmatrix} 0 & -g_x(P_i) & -g_y(P_i) \\ -g_x(P_i) & \mathcal{L}_{xx}(P_i) & \mathcal{L}_{xy}(P_i) \\ -g_y(P_i) & \mathcal{L}_{xy}(P_i) & \mathcal{L}_{yy}(P_i) \end{bmatrix}.$$

4. Calculamos o determinante da matriz anterior, $\det \mathcal{H}(P_i)$, que é dado por

$$2\mathcal{L}_{xy}(P_i) g_x(P_i) g_y(P_i) - \mathcal{L}_{xx}(P_i)\left[g_y(P_i)\right]^2 - \mathcal{L}_{yy}(P_i)[g_x(P_i)]^2.$$

5. Finalmente, classificamos os pontos estacionários $P_i = (x_i, y_i, \lambda_i)$, de acordo com o sinal de $\det \mathcal{H}(P_i)$.

   Deste modo,

   (5.1) Se $\det \mathcal{H}(P_i) < 0$ então $f(P_i)$ é um mínimo relativo do problema inicial;

   (5.2) Se $\det \mathcal{H}(P_i) > 0$ então $f(P_i)$ é um máximo relativo do problema inicial.[lviii]

[lvii] Usualmente designada por matriz Hessiana orlada.

[lviii] Repare-se que $\frac{d^2F}{dx^2}(P_i) = -\frac{1}{\left[g_y(P_i)\right]^2}\ det[\mathcal{H}(P_i)]$ (ver Exercício II.74, alínea 7).

Exemplos II.73. [Otimização condicionada e método dos multiplicadores de Lagrange]

(a) Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$.

Calculamos os extremos da função f sujeita à restrição $x + y = 16$.

Construímos a função auxiliar

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda(16 - x - y)$ e verificamos que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - \lambda = 0 \\ 4y - x - \lambda = 0 \\ x + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 6 \\ \lambda = 14 \end{cases}.$$

Logo $P = (10,6,14)$ é um ponto estacionário do domínio de $\mathcal{L}$.

Por outro lado

$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ e, consequentemente,

$\det \mathcal{H}(P) = -8 < 0$, o que nos permite concluir que $f(10,6)$ é o mínimo relativo da função f sujeita à restrição $x + y = 16$.

Este mínimo relativo também será absoluto?

(b) Determinamos os extremos da função $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy$ sujeita à restrição $x + y = 42$.

Note-se que $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(42 - x - y)$ e, ainda, que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ x + y = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 21. \\ \lambda = 21 \end{cases}$$

Deste modo $P = (21,21,21)$ é um ponto estacionário do domínio de $\mathcal{L}$.

Além disso

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\det \mathcal{H}(P) = 2 > 0$ podemos concluir que $f(21,21)$ é um máximo relativo da função f sujeita a
$x + y = 42$.
Este máximo relativo também será absoluto?

(c) Verificamos que $\left(\frac{2}{17}, \frac{8}{17}\right)$ é um minimizante da função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita à restrição $x + 4y = 2$.
Neste caso, temos $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(2 - x - 4y)$ e também

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 2y - 4\lambda = 0 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{17} \\ y = \frac{8}{17} \\ \lambda = \frac{4}{17} \end{cases},$$

o que garante que $P = (\frac{2}{17}, \frac{8}{17}, \frac{4}{17})$ é um ponto estacionário do domínio de $\mathcal{L}$.

Dado que $\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e, consequentemente, $\det \mathcal{H}(P) = -34 < 0$, podemos afirmar que $f\left(\frac{2}{17}, \frac{8}{17}\right) = \frac{4}{17}$ é um mínimo relativo da função f sujeita à restrição $x + 4y = 2$.
Este mínimo relativo também será absoluto?

(d) Classifique os extremos da função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + 2y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 5$.
Escrevemos $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(5 - x^2 - y^2)$ e obtemos

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x\lambda = 0 \\ 2 - 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Logo $P_1 = \left(1{,}2,\frac{1}{2}\right)$ e $P_2 = \left(-1,-2,-\frac{1}{2}\right)$ são pontos estacionários do domínio de $\mathcal{L}$.

Observamos que

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$\det \mathcal{H}(P_1) = 20 > 0$ e $\det \mathcal{H}(P_2) = -20 < 0$, o que nos permite concluir que $f(1{,}2) = 5$ é o máximo relativo e $f(-1,-2) = -5$ é o mínimo relativo da função f sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 5$.

Exercícios II.74

1. Determine o custo mínimo de uma empresa que está obrigada, por contrato, a um volume de produção igual a q^* unidades, sabendo que:

   a) $\underbrace{Q(K,L) = 4KL + L^2}_{função\ de\ produção}$, $\underbrace{C(K,L) = K + 2L}_{função\ custo}$, com $K, L \in \mathbb{R}^+$, e, $q^* = 252$.

   Resposta: $C(6{,}9) = 21$;

   b) $\underbrace{Q(K,L) = 50KL}_{função\ de\ produção}$, $\underbrace{C(K,L) = 2K + 3L}_{função\ custo}$, com $K, L \in \mathbb{R}^+$, e, $q^* = 1200$.

   Resposta: $C(6{,}4) = 24$;

   c) $\underbrace{Q(K,L) = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}_{função\ de\ produção}$, $\underbrace{C(K,L) = 9K + 4L}_{função\ custo}$, com $K, L \in \mathbb{R}^+$, e, $q^* = 120$.

   Resposta: $C(40{,}90) = 720$;

   d) $\underbrace{Q(K,L) = 8K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}}_{função\ de\ produção}$, $\underbrace{C(K,L) = 4K + 5L}_{função\ custo}$, com $K, L \in \mathbb{R}^+$, e, $q^* = 400$.

   Resposta: $C(250{,}100) = 1500$.

2. Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = 50x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

Verifique que:

a) $f(tx,ty) = tf(x,y)$, para $t \in \mathbb{R}^+$;

b) $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$;

c) Considere $h\colon D_h \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$h(x) = f\left(x, \frac{8100-27x}{4}\right) = 50x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{8100-27x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 150x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{300-x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

(c.1) Defina uma função $m\colon D_m \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $m(x) = \ln[h(x)]$.

Resposta: $m(x) = \frac{2}{3}\ln x + \frac{1}{3}\ln(300-x) + \ln\left(\frac{150}{\sqrt[3]{4}}\right)$, $D_m =]0,300[$;

(c.2) Utilizando a regra da cadeia, calcule $m'(x)$.

Resposta: $m'(x) = \frac{200-x}{x(300-x)}$.

3. Suponha que uma empresa tem uma função de produção Q definida por $Q(K,L) = 50K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$, em que $K, L \in \mathbb{R}^+$ são fatores de produção.

(a) Atendendo a que o volume de produção correspondente à utilização de 200 unidades de capital e 675 unidades de trabalho é $Q(200,675) = Q(2^3 \times 5^2, 3^3 \times 5^2) = 15000$ indique uma estimativa da variação da produção devida ao aumento de 10 unidades de capital e à redução de 3 unidades de trabalho. Resposta: 478.

(b) Sabendo que a função custo é definida por $C(K,L) = 27K + 4L$ determine o custo mínimo da empresa assumindo que esta está obrigada, por contrato, a produzir 15000 unidades. Justifique. Resposta: $C(200,675) = 8100$.

4. Suponha que uma empresa tem uma função de produção Q definida por $Q(K,L) = 4K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$, em que $K, L \in \mathbb{R}^+$ são fatores de produção.

   a) Atendendo a que o volume de produção correspondente à utilização de 100 unidades de capital e 100 unidades de trabalho é $Q(100,100) = 400$ indique uma estimativa da variação da produção devida ao aumento de 10 unidades de capital e à redução de 3 unidades de trabalho. Resposta: 14.

   b) Sabendo que a função custo é definida por $C(K,L) = 16(K + 9L)$, determine $\Theta \in \mathbb{R}$ de modo que o custo mínimo da empresa – sujeita à restrição $4K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = \Theta$ – seja atingido para $K = 135$ e $L = 15$. Resposta: $\Theta = 180$.

5. Seja $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = -2x - 2y + x^2 + y^2$.
   Verifique que:

   a) $F(tx,ty) \neq tF(x,y)$, para $t > 0$;

   b) $x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = F(x,y) + x^2 + y^2$.

6. Determine e classifique o ponto estacionário da função:

   a) definida por $F(x,y) = -2x - 2y + x^2 + y^2$. Resposta: a função F atinge um mínimo absoluto em $P = (1,1)$ de valor $f(P) = -2$;

   b) definida por $F(x,y) = -2x - 2y + x^2 + y^2$ sujeita à restrição $x + y = 4$. Resposta: a função F atinge um máximo absoluto em $P = (2,2)$ de valor $f(P) = 0$.

7. Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2 definidas num conjunto aberto $A \subseteq D_f \cap D_g$. Admitamos que $g(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x em A.

Mostre que se $F(x) = f[x, y(x)]$ e $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ então

$$\frac{d^2F}{dx^2}(P_0) = -\frac{1}{[g_y(P_0)]^2}\Big[2\big[f_{xy}(P_0) - \lambda g_{xy}(P_0)\big]g_x(P_0)g_y(P_0) +$$

$$+[f_{xx}(P_0) - \lambda g_{xx}(P_0)]\big[g_y(P_0)\big]^2 + \big[f_{yy}(P_0) - \lambda g_{yy}(P_0)\big][g_x(P_0)]^2\Big].$$

8. Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções definidas por

$$f(x, y) = 4x + 9y \text{ e } g(x, y) = xy.$$

Otimize a função objetivo f sujeita à restrição $g(x, y) = 100$ usando:

a) o método de substituição;

b) o método dos multiplicadores de Lagrange.

Resposta: f atinge um mínimo relativo em $P_1 = \left(15, \frac{20}{3}\right)$ de valor $f(P_1) = 120$ e atinge um maximo relativo em $P_2 = \left(-15, -\frac{20}{3}\right)$ de valor $f(P_2) = -120$.

9. Determine os estremos da função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sujeita à restrição indicada:

a) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - xy$ sujeita a $2x + y = 21$.

Resposta: f atinge um extremo relativo em $P = \left(\frac{17}{2}, 4\right)$ de valor $f(P) = \frac{747}{4}$;

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita a $xy = 9$.

Resposta: a função f atinge um mínimo relativo em $P_1 = (-3, -3)$ e $P_2 = (3,3)$ de valor $f(P_1) = f(P_2) = 18$;

c) $f(x, y) = 2xy$ sujeita a $x^2 + y^2 = 4$.

Resposta: f atinge um mínimo relativo em $P_1 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e

$P_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ de valor $f(P_1) = f(P_2) = -4$ e atinge um máximo relativo em $P_3 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $P_4 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ de valor $f(P_3) = f(P_4) = 4$;

d) $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeita a $x^2 + y^2 = 1$.

Resposta: a função f atinge um mínimo relativo em $P_1 = (0, -1)$ e $P_2 = (0,1)$ de valor $f(P_1) = f(P_2) = -1$ e atinge um máximo relativo em $P_3 = (-1,0)$ e $P_4 = (1,0)$ de valor $f(P_3) = f(P_4) = 1$;

e) $f(x, y) = e^{xy}$ sujeita a $x^2 + y^2 = 8$.

Resposta: a função f atinge um máximo relativo em $P_1 = (-2, -2)$ e $P_2 = (2,2)$ de valor $f(P_1) = f(P_2) = e^4$ e atinge um mínimo relativo em $P_3 = (2, -2)$ e $P_4 = (-2,2)$ de valor $f(P_3) = f(P_4) = e^{-4}$;

f) $f(x, y) = \ln(xy)$ sujeita a $2x + 3y = 5$.

Resposta: f atinge um máximo relativo em $P = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$ de valor $f(P) = \ln\left(\frac{25}{24}\right)$.

CAPÍTULO III

COMPLEMENTOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

As equações diferenciais constituem uma das áreas de investigação mais relevante, quer do ponto de vista da Matemática pura, quer do ponto de vista das suas aplicações no âmbito da modelação matemática. Embora inicialmente se tenham utilizado na compreensão de fenómenos da Física, Mecânica e Astronomia, atualmente são um instrumento poderoso para modelar algumas realidades, nomeadamente na Biologia, na Economia e nas Finanças.

O nosso principal objetivo é a resolução de certos tipos de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem.

Na primeira secção resolvemos alguns tipos de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem: equação de variáveis separadas, equação de variáveis separáveis, equação homogénea, equação exata e equação linear. Esta tarefa requer a identificação da equação pois para cada tipo existe um método de resolução apropriado. Quando a equação não é de nenhum destes tipos referidos podemos recorrer a um fator integrante para a resolver.

Na segunda secção preocupamo-nos com a determinação do conjunto das soluções de equações lineares de segunda ordem sendo conveniente distinguir dois tipos: EDOs com coeficientes variáveis e EDOs com coeficientes constantes. No primeiro caso não dispomos de um método geral, razão pela qual resolveremos apenas EDOs mais simples utilizando a dupla primitivação, ou combinando esta técnica com a redução da ordem da equação inicial por intermédio de uma mudança de variável. Em contrapartida as EDOs com coeficientes constantes – para as quais dispomos de um método geral – vão merecer um tratamento especial visto que representam modelos matemáticos para alguns fenómenos que ocorrem nas Ciências Exatas. Finalmente, podemos ainda aplicar o método de abaixamento de ordem para resolver ambos os tipos de equações (homogéneas e não homogéneas) desde que se conheça uma solução da equação homogénea correspondente.

III.1 – Equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.

O estudo das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, no que diz respeito à determinação de soluções, pode ser feito usando as seguintes abordagens:

- Analítica, que consiste em recorrer ao cálculo diferencial e ao cálculo integral;
- Geométrica, que utiliza a interpretação geométrica do conceito de derivada para descrever o comportamento qualitativo;
- Numérica, que é baseada na implementação de algoritmos em meios computacionais na busca de uma solução aproximada.

De um modo geral, no contexto da abordagem analítica surgem três tipos de questões: análise da existência de soluções, estudo da natureza (local ou global) das soluções e cálculo de soluções.

III.1.1. – Equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem: definições, exemplos e soluções.

Há modelos matemáticos que descrevem a taxa de variação de uma função num intervalo, sendo por isso representados por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Por exemplo, mencionamos os modelos de crescimento populacional, o modelo de capitalização contínua de juros compostos, o modelo de desintegração de uma substância radioativa e os modelos de crescimento económico, entre outros.

Começamos com um modelo que pode ser usado para estudar o crescimento de uma comunidade.

Exemplo III.1. [Modelo de crescimento populacional]

No crescimento das populações intervêm fatores que tendem a diminuir a sua taxa de crescimento. Assumimos que esses fatores estão relacionados com a escassez de recursos e com a competição (por esses mesmos recursos). O efeito dessa competição, que se intensifica com o aumento da população, traduz-se num aumento das taxas de mortalidade e/ou na diminuição das taxas de natalidade.

O modelo descrito pela equação

$$\frac{dx}{dt} = r\,(N - x),$$

onde

$x = x(t)$ representa a dimensão da população no período t,

$r > 0$ é um parâmetro (de crescimento) que depende da população,

N a dimensão máxima da população,

baseia-se no seguinte argumento: «A taxa de crescimento, $\frac{dx}{dt}$, de uma população diminui à medida que o efetivo populacional x aumenta».

Suponhamos, agora, o caso de uma reserva africana que pode acolher uma manada de 600 elefantes e tem atualmente um grupo de 250 animais que cresce a uma taxa anual de 12%. Pretendemos calcular a dimensão da manada daqui a 8 anos.

Para isso, consideramos $N = 600$, $x(0) = 250$ e $r = 0{,}12$, e escrevemos

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}12\,(600 - x), \text{ com } x \in [0, 600].$$

Logo

$$\frac{dx}{600-x} = 0{,}12\,dt, \text{ com } x \in [0, 600].$$

donde

$$\int \frac{1}{600-x} dx = \int 0{,}12\, dt,$$

isto é,

$$-\ln(600-x) = 0{,}12t + C \Leftrightarrow \ln(600-x) = -0{,}12t - C \Leftrightarrow$$

$$600 - x = e^{-0{,}12t-C}.$$

Deste modo, obtemos

$$x(t) = 600 - Ae^{-0{,}12t}, \text{ sendo } A = e^{-C}.$$

Além disso, sabemos que para $t = 0$, temos $x(0) = 250$, logo

$$250 = 600 - Ae^{0} \Leftrightarrow A = 350.$$

Finalmente, fazendo $A = 350$ e $t = 8$ (anos), verificamos que

$$x(8) = 600 - 350e^{-(0{,}12)(8)} = 600 - 350e^{-0{,}96} \approx 600 - (350)(0{,}383) \approx 466.$$

Apresentamos, de seguida, alguns conceitos.

Uma equação diferencial (designação proposta por Leibniz em 1676) é uma equação que envolve derivadas de uma variável dependente relativamente a uma ou mais variáveis independentes. Uma equação diferencial diz-se ordinária (EDO) se envolve apenas derivadas de uma variável dependente relativamente a uma única variável independente; se as variáveis independentes são mais do que uma então a equação diferencial diz-se de derivadas parciais (EDP).

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais elevada que aparece na equação diferencial.

Exemplos III.2. [EDOs de 1ª ordem]

As equações a seguir indicadas são EDOs de 1ª ordem:

i) $y' + 2x = 0$

ii) $\frac{dy}{dx} + 2y = 1$

iii) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-xy}$

iv) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

v) $y\,dx + x\,dy = 0$

vi) $x\,dx + y\,dy = 0$

Fixando x como variável independente e assumindo y como função de x, uma equação diferencial ordinária (EDO) de 1ª ordem é uma equação constituída por termos que envolvem a incógnita y, a derivada de y em ordem à variável x, expressões de x e constantes reais.

A equação diferencial é designada de ordinária porque a incógnita y é função de uma única variável independente x, a qual pertence a um intervalo de números reais.

A designação de 1ª ordem é devida ao facto da equação incluir apenas a primeira derivada (ou derivada de primeira ordem) de y relativamente a x.

Escrevemos a notação de linha, y', ou a notação de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ para representar a derivada de y. Contudo, mais adiante assumiremos que qualquer uma das variáveis pode ser considerada como dependente sendo que a outra será independente.

A equação mais fácil de resolver é intrínseca ao problema matemático da primitivação.

Recordemos que para uma dada função $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em D, esse problema consiste em determinar as funções diferenciáveis, definidas por y, tais que

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \text{ para todo } x \in D.$$

Estamos perante uma EDO de 1ª ordem, cuja derivada da função incógnita é conhecida. Esta equação tem uma infinidade de soluções, que se obtêm usando o seguinte resultado:

«Se F é uma primitiva de f então o conjunto de todas as soluções da EDO

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ é representado por

$$y = \int f(x)\, dx = F(x) + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.».

O integral indefinido de f representa uma família de funções e os seus gráficos constituem uma coleção de curvas que diferem entre si por uma translação vertical de C unidades.

Definição III.3. [EDO de 1ª ordem]

Dada a função $g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, contínua em D, consideremos agora que a EDO de 1ª ordem é escrita na seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) \qquad \text{(A)}$$

para todo $(x, y) \in D$.

Note-se que D pode não ser necessariamente o domínio de g, mas um seu subconjunto não vazio.

É importante salientar que enquanto as soluções das equações algébricas são números (reais ou complexos), de um modo geral as soluções das equações diferenciais são expressões de x representadas por y que definem funções.

Definição III.4. [Solução da EDO de 1ª ordem]

Uma dada função $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial (A) em I se f é diferenciável em I e, além disso, f satisfaz a condição

$$f'(x) = g\big(x, f(x)\big)$$

para todo $x \in I$ e para todo $\big(x, f(x)\big) \in D$, isto é, a equação é transformada numa identidade quando substituímos y por $f(x)$ e $\frac{dy}{dx}$ por $f'(x)$.

Por vezes f não é solução da equação diferencial em todo o seu domínio D_f, mas apenas num certo intervalo I tal que $I \subseteq D_f$. Assim, quando dizemos que f é solução da EDO em I, isso significa que f é definida pelo menos em I e que a restrição de f a I é solução da equação.

A equação (A) fornece o valor da derivada da função incógnita em x para cada $P = (x, y) \in D$, $m = g(x, y)$.

Geometricamente, m é o declive da reta tangente ao gráfico da função desconhecida em P. Isso permite-nos traçar segmentos de reta para todos os pontos do plano pertencentes a D.

Ao conjunto de todos os segmentos de reta chamamos campo de direções da equação (A). Usando esta preciosa informação, tentamos determinar as funções diferenciáveis por primitivação.

Assim sendo, de um modo geral – e à semelhança do que acontece no processo de primitivação de uma função –, temos um conjunto infinito de soluções para uma equação diferencial de 1ª ordem.

Ao conjunto de soluções representadas por $y = \phi(x; C)$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, designamos por solução geral (ou integral geral) da equação (A).

Se atribuirmos um valor concreto à constante temos apenas uma solução, chamada de solução particular da equação.

Exemplo III.5. [Solução geral e soluções particulares de uma EDO de 1ª ordem]

Consideremos a EDO de 1ª ordem $\frac{dy}{dx} = -2xy$.

Em primeiro lugar verificamos que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x^2}$, é solução da equação diferencial.

De facto, f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $\left(x, e^{-x^2}\right) \in \mathbb{R}^2$.

É evidente que a função constante $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, também é solução da equação diferencial.

Para obter mais soluções desta equação basta multiplicar $f(x)$ por uma constante $C \in \mathbb{R}$, não nula.

Com efeito $\phi(x; C) = Ce^{-x^2}$é uma família de soluções da equação diferencial pois ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $\left(x, Ce^{-x^2}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Por outro lado, se y é uma qualquer solução da equação diferencial, então

$$(ye^{x^2})' = e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}\left(\frac{dy}{dx} + 2xy\right) = 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por isso, existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$ye^{x^2} = C \Leftrightarrow y = Ce^{-x^2}.$$

Assim podemos dizer que a solução geral da equação é representada por $\phi(x; C) = Ce^{-x^2}$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Além disso, f e h são duas soluções particulares pois

$$f(x) = \phi(x; 1) \qquad \wedge \qquad h(x) = \phi(x; 0).$$

No estudo das aplicações das EDOs é frequente estabelecer uma condição adicional sobre a incógnita.

Definição III.6. [Problema de valor inicial]

Seja $g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua em D.

Para cada ponto $(a, b) \in D$, consideremos o sistema $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = g(x, y) \\ y(a) = b \end{cases}$.

O problema de valor inicial (ou problema de Cauchy) consiste em determinar uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ que verifique $y(a) = b$.

A condição $y(a) = b$ é chamada de dado inicial (ou condição inicial).

No estudo do problema de valor inicial é importante analisar as seguintes questões:

(i) a existência de solução;

(ii) a unicidade de solução;

(iii) a sensibilidade da solução a pequenas alterações no dado inicial.

Para um problema de valor inicial existem vários teoremas que garantem a existência e a unicidade de solução, sendo o teorema de Cauchy o mais conhecido.

Porém, apresentamos um resultado mais fácil de verificar na prática.

Teorema III.7. [Existência e unicidade de solução do problema de valor inicial]

Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a-h, a+h] \ \wedge \ y \in [b-k, b+k]\}$ um subconjunto de D. Se g e a sua derivada parcial em ordem a y, $\frac{\partial g}{\partial y}$, são contínuas em S então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = g(x, y) \\ y(a) = b \end{cases}$$

tem solução única $y = \phi(x)$ em $I = [a-\delta, a+\delta]$, para algum $\delta > 0$, isto é, existe uma função ϕ definida em I tal que $y = \phi(x)$ é uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ que verifica $\phi(a) = b$.

Supondo que $y = \phi(x)$ é solução do problema de valor inicial, então

$y = \phi(x)$ satisfaz a equação (A) e o seu gráfico passa pelo ponto $P = (a, b)$.

Geometricamente, usando o campo de direções da equação (A) podemos esboçar o gráfico de ϕ tendo em conta que a reta tangente ao gráfico em cada ponto constitui uma boa aproximação ao gráfico na vizinhança desse ponto.

Exemplos III.8. [Resolução de problemas de valor inicial]

1. Consideremos o problema de valor inicial $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

   Já vimos que $\phi(x;C) = Ce^{-x^2}$ é a família de todas as soluções da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -2xy$.

Vejamos agora que se verificam as condições do teorema no retângulo[i] $S \subseteq \mathbb{R}^2$ que contenha o ponto $P = (0,1)$.

As funções definidas por

$$g(x,y) = -2xy \quad \wedge \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2x$$

são contínuas em S uma vez que são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Pelo Teorema III.7 existe uma única função ϕ definida em $I = [-\delta, \delta]$, para algum $\delta > 0$, tal que $y = \phi(x)$ é uma solução da equação diferencial que verifica $y(0) = 1$.

Usando o dado inicial obtemos

$$\phi(0;C) = 1 \Leftrightarrow Ce^0 = 1 \Leftrightarrow C = 1$$

logo a solução do problema de valor inicial é dada por $\phi(x;1) = e^{-x^2}$, para todo $x \in I$.

2. Consideremos o problema de valor inicial $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y^2 \\ y(0) = b \end{cases}$.

   Exemplificamos, de seguida, o modo como a solução de um problema de valor inicial reage a pequenas alterações no dado inicial.

[i] Referido no Teorema III.7.

Vejamos que $\phi(x;C)=\frac{1}{x+C}$ é uma família de funções que verificam a equação diferencial dado que

$$\frac{d\phi}{dx}=\left(\frac{1}{x+C}\right)'=-\frac{1}{(x+C)^2}=-\phi^2(x;C),$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Se $b\neq 0$, obtemos

$$y(0)=b\Leftrightarrow\frac{1}{C}=b\Leftrightarrow C=\frac{1}{b}$$

e, por conseguinte, para cada b, a função ψ, definida por

$$\psi(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{b}}=\frac{b}{bx+1}$$

satisfaz o problema de valor inicial.

Tendo em conta que os limites laterais,

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{b}\right)^-}\psi(x)\quad \text{e}\quad \lim_{x\to\left(-\frac{1}{b}\right)^+}\psi(x),$$

são infinitos, então a solução não está definida em todo o domínio de ψ, mas apenas num seu subconjunto I que depende do dado inicial.

Assim temos que:

(i) Se $b<0$ então ψ é solução do problema de valor inicial em $I=]-\infty,-\frac{1}{b}[$;

(ii) Se $b>0$ então ψ é solução do problema de valor inicial em $I=]-\frac{1}{b},+\infty[$.

Além disso, se $b=0$ é fácil de verificar que a função nula é solução do problema de valor inicial.

Exercícios III.9.

1. Consideremos a EDO de 1ª ordem $x\,\frac{dy}{dx} = y$.

   a) Verifique que as funções f_1 e f_2, definidas por $f_1(x) = -x$ e $f_2(x) = x$, são soluções da equação diferencial;

   b) Justifique que a função j, definida por $j(x) = |x|$, não é solução da equação diferencial em $\mathbb{R}$;

   c) Justifique que a função h, definida por $h(x) = x^2$, não é solução da equação diferencial;

   d) Determine uma função constante que seja solução da equação diferencial;

   e) Mostre que $y = Cx$, onde $C \in \mathbb{R}$, é um conjunto de soluções da equação diferencial.

2. Faça a correspondência entre a função da coluna da esquerda e a EDO da coluna da direita, de modo que a função seja solução da EDO:

a) $y = \ln\left(\sqrt{2x+1}\right)$	i) $e^x\frac{dy}{dx} = -\,2\sqrt{y}$
b) $y = (e^{-x}+1)^2$	ii) $y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$
c) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	iii) $\frac{dy}{dx} = e^{-2y}$

III.1.2. – Equações de variáveis separadas e equações de variáveis separáveis.

Dada uma família de curvas no plano é possível determinar uma EDO de 1ª ordem de modo que as soluções tenham como representação geométrica essas curvas.

Por exemplo, consideremos a família de elipses definidas por

$$x^2 + 4y^2 = C, \text{ onde } C > 0 \text{ é uma constante.}$$

Por um lado, recorrendo à diferenciação obtemos

$$d(x^2 + 4y^2) = dC \Leftrightarrow 2x\,dx\ + 8y\,dy = 0 \Leftrightarrow \boxed{x\,dx\ + 4y\,dy = 0}.$$

Desta forma, temos uma EDO de 1ª ordem escrita na forma diferencial, onde dx e dy representam os diferenciais das variáveis x e y respetivamente.

Por outro lado, e reciprocamente, mostramos agora que o conjunto de todas as soluções é constituído pela família de elipses acima referida.

Note-se que a equação $x\,dx\ + 4y\,dy = 0$ pode ser reescrita como

$$4y\frac{dy}{dx} = -x.$$

Recordando que $\frac{dy}{dx} = y'$ e primitivando ambos os membros da igualdade anterior obtemos

$$2y^2 = -\frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = C$$

onde $C = 2C_1 \in \mathbb{R}^+$ é uma constante arbitrária.

Finalmente, observemos que

$$x\,dx\ + 4y\,dy = 0 \Leftrightarrow d(x^2 + 4y^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 4y^2 = C}_{\text{solução geral}}.$$

Assim, de um modo geral, se for possível escrever a equação (A) – definida por $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ – na forma

$$b(y)\frac{dy}{dx} = -a(x) \Leftrightarrow \underbrace{a(x)dx + b(y)dy = 0}_{\text{forma diferencial}}$$ [ii]

dizemos que estamos perante uma equação de variáveis separadas.

Repare-se que $a(x)$ é uma expressão que depende apenas da variável x (podendo, contudo, ser constante) e $b(y)$ é uma expressão que depende apenas da variável y (podendo ser constante), não nula.

Na forma diferencial desta equação verificamos que o primeiro membro é uma soma de duas componentes em que cada parcela depende apenas de uma única variável.

Definição III.10. [Equação de variáveis separadas]

Sejam $a(x)$ e $b(y)$ expressões de uma única variável, não nulas, definindo funções contínuas em D. Dizemos que uma equação é de variáveis separadas se pode ser expressa na forma

$$a(x)dx + b(y)dy = 0 \qquad \text{(B)}$$

para todo $(x, y) \in D$.

Método III.11. [Resolução de uma EDO de variáveis separadas]

A primitivação de (B) é imediata obtendo-se como solução geral

$$\int a(x)dx + \int b(y)dy = C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

[ii] Quando escrevemos uma EDO na forma diferencial estamos a assumir que qualquer uma das variáveis pode ser considerada como dependente sendo que a outra será independente.

Notemos que a equação (B) não tem nenhuma solução que seja constante, ou seja, nenhuma solução do tipo $x = h$ ou $y = k$, sendo $h, k \in \mathbb{R}$.

Exemplos III.12. [Resolução de EDOs de variáveis separadas]

a) Consideramos a EDO de 1ª ordem $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0$.

Trata-se de uma equação de variáveis separadas em que $a(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $b(y) = \frac{y}{1+y^2}$. Então

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Logo a família de curvas

$$\arcsin x + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C$$

representa a solução geral da equação.

b) Seja $y\frac{dy}{dx} = -x$ uma EDO de 1ª ordem.

Esta equação pode ser escrita na forma diferencial como

$$xdx + ydy = 0.$$

Trata-se de uma equação de variáveis separadas onde $a(x) = x$ e $b(y) = y$. Por primitivação vem

$$\int xdx + \int ydy = C_1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Deste modo concluímos que a família de circunferências definida por

$$x^2 + y^2 = C$$

onde $C = 2C_1$, representa a solução geral da equação.

Suponhamos, agora, que a equação (A) – definida por $\frac{dy}{dx} = g(x,y)$ – pode ser escrita na forma

$$a_2(x)b_2(y)\frac{dy}{dx} = -a_1(x)b_1(y),$$

e, consequentemente, na forma diferencial seguinte

$$a_1(x)b_1(y)dx + a_2(x)b_2(y)dy = 0.$$ [iii]

Uma vez que $a_1(x)$ e $a_2(x)$ são expressões que dependem apenas da variável x e $b_1(y)$ e $b_2(y)$ são expressões que dependem apenas da variável y, dizemos que estamos perante uma equação de variáveis separáveis.

Definição III.13. [Equação de variáveis separáveis]

Sejam $a_1(x),\ a_2(x), b_1(y)$ e $b_2(y)$ quatro expressões de uma única variável, não nulas, definindo funções contínuas em D.

Dizemos que uma equação é de variáveis separáveis se se pode expressar na forma

$$a_1(x)b_1(y)dx + a_2(x)b_2(y)dy = 0. \qquad \text{(C)}$$

para todo $(x,y) \in D$.

Método III.14. [Resolução de uma EDO de variáveis separáveis]

Na resolução de uma equação de variáveis separáveis, definida por

$$a_1(x)b_1(y)dx + a_2(x)b_2(y)dy = 0,$$

começamos por "separar as variáveis" com o objetivo de transformar a equação inicial numa equação de variáveis separadas.

[iii] Quando escrevemos uma EDO na forma diferencial estamos a assumir que qualquer uma das variáveis pode ser considerada como dependente sendo que a outra será independente.

Assim, assumindo que $a_2(x)b_1(y) \neq 0$, multiplicamos a equação (C) por $\frac{1}{a_2(x)b_1(y)}$ e obtemos

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx + \frac{b_2(y)}{b_1(y)}dy = 0.$$

De seguida, primitivando ambos os membros da equação anterior, encontramos a solução geral

$$\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, dx + \int \frac{b_2(y)}{b_1(y)}\, dy = C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Note-se que, em alguns casos, podemos ter funções constantes como soluções. Nomeadamente:

(i) $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, define uma solução da equação (C) se e só se k é raiz da equação $b_1(y) = 0$;

(ii) $x = h$, $h \in \mathbb{R}$, define uma solução da equação se e só se h é raiz da equação $a_2(x) = 0$.

Exemplos III.15. [Resolução de EDOs de variáveis separáveis]

a) Consideremos a EDO de 1ª ordem $(2 - x)ydx - xy^2dy = 0$.
Trata-se de uma EDO de variáveis separáveis em que

$a_1(x) = (2 - x)$, $b_1(y) = y$, $a_2(x) = -x$ e $b_2(y) = y^2$.

Note-se que as funções constantes definidas por $x = 0$ e $y = 0$ são soluções da equação dada (Porquê?).
Assumimos, agora, que $xy \neq 0$ por forma a permitir a separação das variáveis.
Assim, multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{1}{xy}$, transformamos a equação inicial na seguinte equação de variáveis separadas

$$\frac{(2-x)}{x}dx - ydy = 0.$$

Por primitivação vem

$$\int \frac{(2-x)}{x}dx - \int y\,dy = C \Leftrightarrow 2\ln|x| - x - \frac{y^2}{2} = C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Deste modo, obtivemos uma família de curvas que representa a solução geral da equação inicial.

b) Seja $y^{\frac{2}{3}} - y' = 0$ uma EDO de 1ª ordem.

Escrevemos esta equação na forma diferencial

$$y^{\frac{2}{3}}dx - dy = 0,$$

e observamos que a função constante definida por $y = 0$ é solução da equação (Porquê?). Assumindo que $y \neq 0$ e multiplicando a equação anterior por $y^{-\frac{2}{3}}$, obtemos a equação de variáveis separadas

$$dx - y^{-\frac{2}{3}}dy = 0.$$

Por primitivação encontramos

$$\int dx - \int y^{-\frac{2}{3}}dy = C \Leftrightarrow x - 3\sqrt[3]{y} = C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Finalmente, concluímos que a solução geral da equação inicial é representada por

$$y = \left(\frac{x-C}{3}\right)^3.$$

c) Consideremos o problema de valor inicial $\begin{cases}(1+e^x)yy' = e^x \\ y(0) = 1\end{cases}$.

Começamos por escrever a equação dada na forma diferencial

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} - e^x = 0 \Leftrightarrow (1+e^x)y\,dy - e^x dx = 0.$$

De seguida transformamo-la numa equação de variáveis separadas

$$ydy - \frac{e^x}{1+e^x}dx = 0.^{\text{iv}}$$

Da primitivação resulta a solução geral

$$\int ydy - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = C \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} - \ln(1+e^x) = C$$

sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária. Finalmente, e com o objetivo de calcular a constante $C \in \mathbb{R}$, substituímos y por 1 e x por 0 na solução geral e obtemos

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \ln(1+e^0) = C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Deste modo, concluímos que a solução particular da EDO de 1ª ordem $(1+e^x)yy' = e^x$, definida por

$$\frac{y^2}{2} - \ln(1+e^x) = \frac{1}{2} - \ln 2,$$

é solução do problema de valor inicial.

Exercícios III.16.

1. Resolva as seguintes EDOs de 1ª ordem:

   a) $y\frac{dy}{dx} = 3x^2$. Resposta: $y^2 - 2x^3 = C$, $C \in \mathbb{R}$;

   b) $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -1$. Resposta: $-x + \frac{1}{y} = C$, $C \in \mathbb{R}$;

   c) $e^x\frac{dy}{dx} = 3x$. Resposta: $y = -3e^{-x}(1+x) + C, C \in \mathbb{R}$;

   d) $x\sqrt{1-y^2}dx = dy$. Resposta: $\frac{x^2}{2} - \arcsin y = C, C \in \mathbb{R}$, $y = 1$ e $y = -1$ também são soluções;

   e) $(e^x + e^{-x})\frac{dy}{dx} = y^2$. Resposta: $\frac{1}{y} + \operatorname{arctg} e^x = C, C \in \mathbb{R}$; e $y = 0$ também é solução;

---

iv Assumindo que $y \neq 0$.

f) $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$. Resposta: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| - x = C, C \in \mathbb{R}$, $y = 2$ e $y = -2$ também são soluções.

2. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um parâmetro tal que $0 < \alpha < 1$. Consideremos a EDO de 1ª ordem:

$$(1-\alpha)\, x\, \frac{dy}{dx} = -\alpha\, y.$$

a) Identifique de que tipo é a equação. Resposta: Equação de variáveis separáveis;

b) Determine a solução geral da equação. Resposta: $x^{\alpha}y^{1-\alpha} = C$, $C \in \mathbb{R}$;

c) Fazendo $\alpha = \frac{1}{3}$, determine a solução particular da equação que verifica $y(1) = \frac{1}{2}$. Resposta: $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

d) Averigue se existem funções constantes que sejam soluções da equação. Resposta:
$x = 0$ e $y = 0$ são soluções.

3. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}$ parâmetros tais que $0 < \alpha < 1$ e $0 \neq \delta < 1$.
Consideremos a EDO de 1ª ordem $\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\delta}$.

a) Identifique de que tipo é a equação. Resposta: Equação de variáveis separáveis;

b) Determine a solução geral da equação.
Resposta: $\alpha x^{\delta} + (1-\alpha)y^{\delta} = C$, $C \in \mathbb{R}$;

c) Fazendo $\alpha = \frac{1}{3}$ e $\delta = \frac{1}{2}$, determine a solução particular da equação que verifica a condição $y(4) = 1$. Resposta: $y = \frac{x}{4} - 2\sqrt{x} + 4$;

d) Averigue se existe alguma função constante que seja solução da equação. Resposta: $y = 0$

III.1.3. – Equações homogéneas.

Recordamos que $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função homogénea de grau $p \in \mathbb{Q}$ se

$$g(tx, ty) = t^p g(x, y)$$

para $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $(tx, ty) \in D_g$.

Identificamos a equação (A) – definida por $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ – como sendo homogénea se o seu segundo membro verificar a propriedade de homogeneidade de grau zero.

Definição III.17 [EDO homogénea de 1ª ordem]

Seja $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua no seu domínio. Dizemos que

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) \qquad \text{(D)}$$

para todo $(x, y) \in D_g$, é uma equação homogénea se g é uma função homogénea de grau $p = 0$.

Método III.18. [Resolução de uma EDO homogénea]

É importante salientar que, em alguns casos, as equações do tipo (D) podem ter como soluções funções lineares de variável x.

Recorrendo à homogeneidade da função g, podemos escrever

$$g(x, y) \underbrace{=}_{y=kx} g(x, kx) = x^0\, g(1, k) = g(1, k).$$

Assim, verificamos que $y = kx$ com $k \in \mathbb{R}$ constante é solução da equação diferencial (D) se e só se $k = g(1, k)$, desde que $x \neq 0$.

Todavia, para obter as outras soluções é preciso recorrer a uma mudança de variável dependente.

Deste modo, introduzimos uma nova variável u , considerando

$$y = ux.$$

Por derivação escrevemos

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.$$

Sabemos que $g(x, ux) = g(1, u)$, atendendo a que, por hipótese, g é homogénea de grau $p = 0$, o que nos sugere a utilização de uma função f de variável u, definida por $f(u) = g(1, u)$.

Substituindo, agora, $\frac{dy}{dx}$ e y na equação (D) obtemos uma equação de variáveis separáveis

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} + u - f(u) = 0 \Leftrightarrow \big(u - f(u)\big)dx + \ xdu = 0.$$

De seguida, assumindo que $f(u) \neq u$, transformamos a equação homogénea inicial numa equação de variáveis separadas

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{u-f(u)}du = 0,$$

cuja solução geral é dada por

$$\int \frac{1}{u-f(u)}du + \ln|x| = C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Finalmente, obtemos a solução geral da equação homogénea inicial substituindo u por $\frac{y}{x}$ e, sempre que possível, apresentamos a solução geral escrita na forma explícita.

Em resumo, apresentamos o método de resolução para a equação (D):

1. Transformação da equação dada numa equação de variáveis separáveis através da mudança de variável $y = ux$;
2. Resolução da equação de variáveis separáveis nas variáveis u e x;
3. Obtenção da solução geral da equação homogénea, regressando à variável dependente inicial y;

4. Caso seja possível, representação da solução geral na forma explícita;
5. Determinação de eventuais soluções da EDO inicial na forma

   $y = kx$ com $k \in \mathbb{R}$ constante.

Observação III.19. [Forma diferencial da EDO homogénea]

Se for possível escrever a equação (A) – definida por $\frac{dy}{dx} = g(x,y)$ – na forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

onde as funções definidas por $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são homogéneas do mesmo grau, $p \in \mathbb{Q}$ [v], e, além disso, a função N é não nula, então

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{M(x,y)}{N(x,y)}dx + dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}}_{g(x,y)},$$

onde a função g, de domínio $D = D_M \cap D_N \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : N(x,y) \neq 0\}$, é definida por

$$g(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Note-se que g é uma função homogénea de grau zero, uma vez que

$$g(tx,ty) = -\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = -\frac{t^p M(x,y)}{t^p N(x,y)} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = g(x,y).$$

Deste modo, podemos afirmar que a equação (A) é homogénea se se pode escrever na forma diferencial como

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \text{(E)}$$

em que as funções definidas por $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são homogéneas do mesmo grau.

[v] Isto é, se $M(tx,ty) = t^p M(x,y)$ e $N(tx,ty) = t^p N(x,y)$, para $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $(tx,ty) \in D$.

É importante salientar que, caso existam funções diferenciáveis que verifiquem $M(x, y) = 0$ e $N(x, y) = 0$, a equação (E) pode ter mais soluções do que a equação (D).[vi]

Quando escrevemos a equação (A) na forma $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ estamos a assumir que y é função de x. No entanto, podemos trocar o papel das variáveis usando a regra da derivada da função inversa. Assim sendo, a equação (E) escrever-se-á na forma

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)} = \frac{1}{g(x,y)} = f(x, y).$$ [vii]

Se quisermos resolver a equação $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$, devemos considerar os seguintes passos:

1. Transformação da equação dada numa equação de variáveis separáveis através de $x = vy$;
2. Resolução da equação de variáveis separáveis nas variáveis v e y;
3. Obtenção da solução geral da equação homogénea, regressando à variável dependente inicial x;
4. Caso seja possível, representação da solução geral na forma explícita;
5. Determinação de eventuais soluções da EDO inicial na forma $x = my$ com $m \in \mathbb{R}$ constante.[viii]

Destacamos, novamente, que caso existam funções diferenciáveis tais que

$$M(x, y) = 0 \text{ e } N(x, y) = 0,$$

a equação (E) pode ter mais soluções do que a equação $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$.[ix]

[vi] Note-se que nos casos em que $M(x, y) = 0$ e y constante ou $N(x, y) = 0$ e x constante também pode acontecer que a equação (E) tenha mais soluções do que a equação (D).

[vii] Repare que $\frac{1}{g(x,y)}$ representa a função recíproca da função g que, de um modo geral, não coincide com a função inversa de g.

[viii] É fácil de verificar que $x = my$ é solução da equação $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$ se e só se $m = f(m, 1)$ para $y \neq 0$.

[ix] Note-se que nos casos em que $M(x, y) = 0$ e y constante ou $N(x, y) = 0$ e x constante também pode acontecer que a equação (E) tenha mais soluções do que a equação (D).

Exemplos III.20. [Resolução de EDOs homogéneas de 1ª ordem]

a) Consideremos a EDO de 1ª ordem $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy}$.

Seja g a função de domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{y^2-x^2}{2xy}.$$

Esta função é homogénea de grau $p = 0$ pois

$$g(tx,ty) = \frac{(ty)^2-(tx)^2}{2(tx)(ty)} = \frac{t^2(y^2-x^2)}{2\,t^2xy} = g(x,y),$$

para todo $(x,y) \in D$, $(tx,ty) \in D$ com $t > 0$. Assim, por definição, dizemos que a equação é homogénea. Uma vez que

$$k = g(1,k) \Leftrightarrow k = \frac{k^2-1}{2k} \Leftrightarrow k^2 = -1,$$

podemos concluir que a equação dada não tem soluções da forma $y = kx$, com $k \in \mathbb{R}$ constante.

Recorremos, agora, à mudança de variável dependente $y = ux$ que nos permite transformar a equação inicial numa equação de variáveis separáveis

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{u^2-1}{2u} \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} + \frac{u^2+1}{2u} = 0 \Leftrightarrow xdu + \frac{u^2+1}{2u}dx = 0.$$

De seguida, e supondo que $u \neq 0$, transformamos a equação anterior numa outra de variáveis separadas

$$\frac{2u}{u^2+1}du + \frac{1}{x}\,dx = 0.$$

Primitivando ambos os membros, encontramos a sua solução geral

$$\ln(u^2+1) + \ln|x| = C_1 \Leftrightarrow \ln\big((u^2+1)|x|\big) = C_1 \Leftrightarrow (u^2+1)x = C,$$

onde $C = \pm e^{C_1} \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Finalmente, regressando á variável y, obtemos

$$\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right)x = C \Leftrightarrow \frac{y^2+x^2}{x} = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = Cx.$$

Geometricamente, $x^2 + y^2 = Cx$ corresponde a uma família de circunferências de centro $\left(\frac{C}{2}, 0\right)$ e raio $r = \sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2} = \frac{|C|}{2}$ visto que

$$x^2 + y^2 = Cx \Leftrightarrow x^2 - Cx + \frac{C^2}{4} + y^2 = \frac{C^2}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2.$$

b) Consideremos a EDO de 1ª ordem $(x^2 + xy)dx + x^2dy = 0$.

Começamos por verificar que a função constante definida por $x = 0$ é solução da equação *(Porquê?).*

Definimos, seguidamente, $M(x, y) = x^2 + xy$ e $N(x, y) = x^2$ e constatamos que M e N são funções homogéneas de grau 2, o que nos garante estarmos na presença de uma equação homogénea.

Supondo que $x \neq 0$, escrevemos a equação na forma

$$x^2 \frac{dy}{dx} = -(x^2 + xy) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x + y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

onde g, definida por $g(x, y) = -\left(1 + \frac{y}{x}\right)$, é uma função homogénea de grau $p = 0$. Uma vez que

$$k = g(1, k) \Leftrightarrow k = -(1 + k) \Leftrightarrow 2k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2},$$

podemos afirmar que a função linear definida por $y = -\frac{1}{2}x$ é solução da equação. No sentido de obter outras soluções, fazemos a mudança de variável $y = ux$ e calculamos

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Substituindo y e $\frac{dy}{dx}$ na equação inicial obtemos a equação de variáveis separáveis

$$u + x\frac{du}{dx} = -1 - u \Leftrightarrow 2u + 1 + x\frac{du}{dx} = 0 \Leftrightarrow (2u + 1)\, dx + x\, du = 0.$$

Supondo que $u \neq -\frac{1}{2}$, podemos transformar $(2u + 1)\, dx + x\, du = 0$ na equação de variáveis separadas dada por

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{1 + 2u}du = 0.$$

Por primitivação vem

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1+2u}du = C \;\Leftrightarrow \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1 + 2u| = C_1,$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Finalmente, regressamos à variável y e simplificamos

$$2\ln|x| + \ln\left|1 + 2\frac{y}{x}\right| = 2\,C_1 \Leftrightarrow \ln|x(x+2y)| = 2C_1$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy = \pm e^{2C_1}.$$

Assim concluímos que a solução geral da equação inicial é dada por

$$y = \frac{\pm e^{2C_1} - x^2}{2x} \Leftrightarrow y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2},$$

onde $C = \frac{\pm e^{2C_1}}{2} \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

c) Seja $\begin{cases} x\frac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ um problema de valor inicial.

Visto que a equação diferencial $x\frac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$ está definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, podemos escrevê-la na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

Note-se que a função g definida por $g(x,y) = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ é homogénea de grau $p = 0$ dado que

$$g(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + e^{\frac{ty}{tx}} = g(x, y),$$

para todo $(x, y) \in D$, $(tx, ty) \in D$ com $t \in \mathbb{R}^+$.

Assim, por definição, constatamos que a equação é homogénea.

Verificamos que a equação não tem soluções da forma $y = kx$ com $k \in \mathbb{R}$ constante, pois

$$k = g(1, k) \Leftrightarrow k = k + e^k \Leftrightarrow e^k = 0.$$

De seguida, recorremos à mudança de variável $y = ux$ para transformar a equação numa equação de variáveis separáveis. Assim temos

$$u + x\frac{du}{dx} = u + e^u \Leftrightarrow -e^u dx + x\,du = 0$$

ou seja,

$$\frac{1}{x}\,dx - \,e^{-u}\,du = 0.$$

Por primitivação vem

$$\int \frac{1}{x}dx - \int e^{-u}du = C \Leftrightarrow \ln|x| + e^{-u} = C \Leftrightarrow u = -\ln(C - \ln x)$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Regressamos á variável y e escrevemos a solução geral da equação na forma explícita

$$y = -x\ln(C - \ln|x|).$$

Usando a condição inicial $y(1) = 1$ obtemos

$$1 = -\ln C \Leftrightarrow \ln C = -1 \Leftrightarrow C = e^{-1}.$$

Deste modo, concluímos que a solução do problema de valor inicial é a função definida por

$$y = -x\ln(e^{-1} - \ln|x|).$$

Exercícios III.21.

1. Verifique que as equações seguintes são homogéneas e resolva-as:
   a) $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$. Resposta: A solução geral é definida por $y^2 + 2yx - x^2 = C, C \in \mathbb{R}$;
   b) $xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$. Resposta: A solução geral é definida por $y^2(2\ln|y| + C) = x^2, C \in \mathbb{R}$ e $y = 0$ também é solução;
   c) $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{x+y}$. Resposta: A solução geral é definida por $x(x + 2y) = C, C \in \mathbb{R}$.
2. Consideremos a EDO de 1ª ordem $(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$.
   a) Supondo x como função de y, escreva a equação diferencial na forma $\frac{dx}{dy} = f(x,y)$. Resposta: $\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$;
   b) Resolva a equação na forma $\frac{dx}{dy} = f(x,y)$.
   Resposta: $x^2 + y^2 = Cx$, $C \in \mathbb{R}$.
   c) Tendo em conta que no Exemplo III.18 resolvemos a equação escrita na forma $\frac{dy}{dx} = g(x,y)$ averigue se obteve a mesma solução geral; Resposta: Sim;
   d) A equação terá mais alguma solução? Justifique. Resposta: $x = 0$ é solução.

III.1.4. – Equações diferenciais exatas. Equações transformáveis em equações diferenciais exatas e fatores integrantes.

Recordemos, agora, que se $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $z = F(x,y)$, é uma função de classe C^1 em A, sendo $A \subseteq D_F$ um aberto, então a função diferencial de F, $dF: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, é definida por

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy.$$

Definição III.22. [Expressão que define uma diferencial exata]

Sejam M e N funções reais de duas variáveis x e y contínuas num aberto

$A \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que a expressão $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ define uma diferencial exata em A se existe uma função $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em A tal que

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

para todo $(x,y) \in A$. Nesse caso, as derivadas parciais de F de 1ª ordem devem satisfazer as condições

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y).$$

De seguida, e com base no conceito anterior, definimos equação diferencial exata.

Definição III.23. [Equação diferencial exata]

Sejam M e N funções reais de duas variáveis x e y contínuas num aberto

$A \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma EDO exata em A se $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ define uma diferencial exata em A.

Note-se que, de acordo com a Definição III.23, se $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata em A então existe uma função $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em A tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0.$$

Deste modo, podemos concluir que $F(x,y) = C$, sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária, é a solução geral da EDO exata dada.

Exemplo III.24.

A equação $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$ é uma EDO exata em $\mathbb{R}^2$ visto que

$$d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3dx + x^3y^2dy$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária, $\frac{1}{3}x^3y^3 = C$ é a solução geral da equação.

Assumindo uma restrição mais forte sobre a regularidade de M e N estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema III.25. [Condição necessária e suficiente para identificar e resolver uma EDO exata]

Consideremos a EDO $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, onde as funções definidas por $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são de classe C^1 num aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Nestas condições, podemos afirmar que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata em A se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \text{ para todo } (x,y) \in A.$$ [x] [xi]

Ressalve-se que assumimos uma restrição mais forte sobre a regularidade de Me N, isso implica que o conjunto A indicado neste teorema pode ser um subconjunto do aberto A apresentado na definição da EDO exata.

Apresentamos o método de resolução para as EDOs exatas:

---

[x] Demonstração:
Suponhamos que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata no conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Então existe uma função $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \text{ e } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y), \text{ para todo } (x,y) \in A \subseteq D_F.$$

Ora, por hipótese, as funções definidas por $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são de classe C^1 no conjunto aberto A, o que nos permite garantir que F é uma função de classe C^2 em $A \subseteq D_F$ e concluir que

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}, \text{ ou seja, que } \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \text{ para todo } (x,y) \in A.$$

Assumamos, agora, que $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$, para todo $(x,y) \in A$. Pretendemos provar que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é uma equação diferencial exata, isto é, queremos provar que existe uma função $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \text{ e } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y), \text{ para todo } (x,y) \in A \subseteq D_F.$$

Ora, se $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ então obtemos

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \text{ onde } C(y) \text{ define uma função de } y \text{ desconhecida.}$$

No sentido de conhecer $C(y)$ calculamos

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx + C(y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{dC(y)}{dy}.$$

E, atendendo a que $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$, escrevemos

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{dC(y)}{dy} \Leftrightarrow \frac{dC(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$$

Deste modo verificamos que $C(y) = \underbrace{\int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial y}[M(x,y)]dx\right] dy}_{\text{Esta expressão depende apenas da variável } y}$ e obtemos a função F definida por

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial y}[M(x,y)]dx\right] dy,$$

tal que $dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

[xi] Recorde-se que, pelo Teorema de Schwarz-Young, se F é uma função de classe C^2 então $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}$.

Método III.26. [Resolução de uma EDO exata]

Seguimos os seguintes passos para resolver a EDO exata definida por

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

1. Primitivação parcial de uma das derivadas parciais de $F(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$;
2. Derivação parcial de $F(x,y)$ em ordem à outra variável;
3. Determinação de $C(y)$ou $C(x)$;
4. Determinação de $F(x,y)$ e obtenção da solução geral da EDO, que é representada por $F(x,y) = C$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Exemplo III.27. [Integração de uma EDO exata e escolha da primeira variável de integração]

Consideremos a EDO de 1ª ordem $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$.

Recorrendo ao Teorema III.25, consideramos duas funções Me N definidas por

$$M(x,y) = 3x^2 + 4xy \text{ e } N(x,y) = 2x^2 + 2y.$$

Note-se que Me N são funções de classe C^1em $\mathbb{R}^2$[xii] que satisfazem as condições

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 4x, \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Deste modo, podemos afirmar que estamos perante uma equação EDO exata em $\mathbb{R}^2$, o que nos permite garantir que existe uma função $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 2y \end{cases}.$$

[xii] Dado que são funções polinomiais.

1. Com o objetivo de calcular $F(x,y)$, primitivamos – parcialmente e em ordem a x – a primeira equação do sistema anterior, isto é, escrevemos

$$\int \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right] dx = \int (3x^2 + 4xy)dx \Leftrightarrow F(x,y) = x^3 + 2x^2y + C(y),$$

onde a constante de primitivação, $C(y)$, depende da variável y. (Porquê?)

Consequentemente, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y) = x^3 + 2x^2y + C(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 2y \end{cases}.$$

Torna-se, agora, necessário calcular $C(y)$.

Nesse sentido, derivamos – parcialmente e em ordem a y – a primeira equação do sistema como se segue

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial[x^3+2x^2y+C(y)]}{\partial y} = 2x^2 + \frac{dC}{dy},$$

e substituímos a expressão encontrada na segunda equação do sistema.

Assim

$$\begin{cases} F(x,y) = x^3 + 2x^2y + C(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y) = x^3 + 2x^2y + C(y) \\ 2x^2 + \frac{dC}{dy} = 2x^2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} F(x,y) = x^3 + 2x^2y + C(y) \\ C(y) = y^2 + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Finalmente, concluímos que a solução geral da equação

$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$ pode ser representada por

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

2. Consideremos novamente a EDO de 1ª ordem
$(3x^2+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0$ que, como verificámos, é uma equação exata em $\mathbb{R}^2$.

Desta vez, optamos por primitivar – parcialmente e em ordem a y – a segunda equação do sistema anterior, isto é,

$$\int\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right]dy=\int(2x^2+2y)dy=2x^2y+y^2+C(x).$$

Repare-se que, agora, a constante de primitivação, $C(x)$, depende da variável x. (Porquê?)

De seguida derivamos – parcialmente e em ordem a x – e obtemos, sucessivamente,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=3x^2+4xy\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2x^2+2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=3x^2+4xy\\ F(x,y)=2x^2y+y^2+C(x)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4xy+\frac{dC}{dx}=3x^2+4xy\\ F(x,y)=2x^2y+y^2+C(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C(x)=x^3+C_1, C_1\in\mathbb{R}\\ F(x,y)=2x^2y+y^2+C(x)\end{cases}.$$

Tal como esperávamos obtivemos a mesma solução geral,

$x^3+2x^2y+y^2=C$, onde $C\in\mathbb{R}$.

Devemos, contudo, salientar que a opção pela resolução duma EDO exata começando pela primitivação parcial de F relativamente a x em detrimento da primitivação parcial de F relativamente a y, pode não ser indiferente, como é revelado no exemplo seguinte.

Exemplos III.28. [Integração de uma EDO exata e escolha da primeira variável de integração]

Consideremos a EDO de 1ª ordem $(x + y\ln y)dx + (x + x\ln y - y)dy = 0$.

Trata-se de uma EDO exata uma vez que, se considerarmos duas funções Me N definidas por

$M(x,y) = x + y\ln y$ e $N(x,y) = x + x\ln y - y$, em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$,

observamos que:

(i) as funções Me N, bem com as suas derivadas parciais de 1ª ordem são contínuas em A, o que nos permitir afirmar que Me N são de classe C^1em A;

(ii) $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 1 + \ln y.$

Assim, sabemos que existe uma função $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x + y\ln y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x + x\ln y - y \end{cases}.$$

Começando pela primitivação parcial de F relativamente a x, obtemos

$$\begin{cases} F(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy\ln y + C(y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x + x\ln y - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy\ln y + C(y) \\ x(\ln y + 1) + \dfrac{dC}{dy} = x + x\ln y - y \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} F(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy\ln y + C(y) \\ \dfrac{dC}{dy} = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy\ln y + C(y) \\ C(y) = -\dfrac{y^2}{2} \end{cases}.$$

Por isso, a solução geral da equação pode ser representada por

$$\frac{x^2}{2} + xy\ln y - \frac{y^2}{2} = C_1 \Leftrightarrow x^2 + 2xy\ln y - y^2 = C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Se, em alternativa, começássemos a primitivar – parcialmente e em ordem a y – a segunda equação, teríamos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x + y\ln y \\ F(x,y) = \int (x + x\ln y - y)dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x + y\ln y \\ F(x,y) = xy + x\int \ln y\, dy - \frac{y^2}{2} + C(x) \end{cases},$$

e, para prosseguir, teríamos que recorrer ao método de primitivação por partes.

E se pretendêssemos resolver a equação $(x+y)dx + (x\ln x)dy = 0$?

Não se trata de uma EDO exata, pois verificamos que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \text{ em } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge x \neq 1\}.$$

Além disso a equação não é uma EDO de variáveis separáveis nem é homogénea de 1ª ordem.

O que fazer?

Vamos recorrer ao chamado método do fator integrante e transformar a equação anterior numa equação diferencial exata.

Observação III.29. [Equações transformáveis em EDOs exatas]

Sejam Me N funções, definidas por $M(x,y)$ e $N(x,y)$, de classe C^1 num aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Se as derivadas parciais de 1ª ordem de M e N satisfazem

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

para $(x,y) \in D \subseteq A$, então a EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

não é exata em D.

Como transformá-la numa EDO exata?

Neste caso pretendemos encontrar uma expressão $\mu(x,y)$, não nula, de modo que

$$\mu(x,y)\,M(x,y)dx+\mu(x,y)\,N(x,y)dy=0$$

seja uma EDO exata em D. Isto é, vai-nos permitir integrar/primitivar (isto é, resolver) a equação transformada.

Definição III.30. [Fator integrante]

A expressão $\mu(x,y)$ é um fator integrante para a equação

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ se transforma essa equação numa EDO exata em D, isto é, se satisfaz a condição

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)\,M(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)\,N(x,y)]$$

para $(x,y)\in D$.

Em geral, é muito difícil determinar um fator integrante visto que determinar $\mu(x,y)$ é equivalente a resolver a seguinte equação diferencial de derivadas parciais

$$M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y).$$

Método III.31. [Método de fator integrante]

Como acabámos de referir, o cálculo do fator integrante não é, muitas vezes, mais simples que a integração da equação dada.

Esta dificuldade leva-nos a procurar fatores integrantes particulares. No que se segue consideramos dois casos.

1) Suponhamos que μ depende, apenas, de x, isto é, $\mu(x,y)=\mu(x)$ tal que $u(x)>0$.

Usando a Definição III.30, sabemos que $u(x)$ tem de satisfazer a condição

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)\, M(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)\, N(x,y)].$$

Aplicando a regra do produto obtemos

$$\mu(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=N(x,y)\frac{d\mu(x)}{dx}+\mu(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

ou seja,

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right).$$

Por hipótese, o primeiro membro dessa equação depende apenas da variável x, por isso consideramos

$$\phi(x)=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right).$$

Assim temos uma equação de variáveis separadas

$$\frac{1}{\mu(x)}d\mu(x)-\phi(x)\, dx=0.$$

Por primitivação resulta

$$\ln\big(\mu(x)\big)-\int\phi(x)\, dx=C_1\Leftrightarrow\mu(x)=e^{C_1}e^{\int\phi(x)\, dx}\Leftrightarrow\mu(x)=Ce^{\int\phi(x)\, dx}$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Logo, escolhendo $C=1$, podemos afirmar que um fator integrante para a equação $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ é determinado através de

$$\mu(x)=e^{\int\phi(x)\, dx}.$$

2) Suponhamos que μ depende, apenas, de y, isto é, $\mu(x,y)=\mu(y)$, tal que $u(y)>0$.

O fator integrante tem de satisfazer

$$\mu(y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=-M(x,y)\frac{d\mu(y)}{dy}+\mu(y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

ou seja,

$$\frac{1}{\mu(y)}\frac{d\mu(y)}{dy}=-\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right).$$

Considerando

$$\psi(y)=-\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right)$$

temos uma equação de variáveis separadas

$$\frac{1}{\mu(y)}\ d\mu(y)-\psi(y)\ \ dy=0.$$

Por primitivação obtemos

$$\ln(\mu(y))-\int\psi(y)\ dy=C_1\Leftrightarrow\mu(y)=Ce^{\int\psi(y)\ dy}$$

onde $C=e^{C_1}\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Logo, escolhendo $C=1$, podemos afirmar que um fator integrante para a equação $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ é determinado através de

$$\mu(y)=e^{\int\psi(y)\ dy}.$$

Exemplo III.32.

Consideremos a EDO de 1ª ordem $(x+y)dx+(x\ln x)dy=0$.

Sejam $M(x,y)=x+y$ e $N(x,y)=x\ln x$ definidas em $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0\}$.

As funções M e N e as suas derivadas parciais de 1ª ordem são contínuas em A, logo podemos dizer que Me N são de classe C^1em A.

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 1 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 1 + \ln x$$

então a equação não é exata em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0 \wedge x \neq 1\}$.

Uma vez que

$$\phi(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{x\ln x}(1 - 1 - \ln x) = -\frac{1}{x},$$

então um fator integrante é determinado por

$$\mu(x) = e^{\int \phi(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Multiplicando a equação dada pelo fator integrante obtemos

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)dx + \ln x\, dy = 0.$$

Esta equação já é exata em D, por isso existe uma função $F\colon D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 1 + \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \ln x \end{cases}.$$

Resolvendo vem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 1 + \dfrac{y}{x} \\ F(x,y) = y\ln x + C(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x} + \dfrac{dC}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x} \\ F(x,y) = y\ln x + C(x) \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dC}{dx} = 1 \\ F(x,y) = y\ln x + C(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(x) = x + C_1 \\ F(x,y) = y\ln x + C(x) \end{cases}.$$

Então a solução geral pode ser representada por

$$y\ln x + x = C \Leftrightarrow y = \frac{C-x}{\ln x},$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Por fim, assinalemos que $x = 1$ também é solução da equação inicial *(Porquê?)*.

Exemplo III.33.

Consideremos a EDO de 1ª ordem $(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$.

É evidente que $M(x, y) = xy^2 - y^3$ e $N(x, y) = 1 - xy^2$ definem funções de classe C^1em $\mathbb{R}^2$. Determinamos as seguintes derivadas parciais de M e N

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 2xy - 3\,y^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = -y^2.$$

Tendo em conta que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \Leftrightarrow 2xy - 3\,y^2 = -y^2 \Leftrightarrow 2y(x - y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = x,$$

podemos afirmar que a equação não é exata em

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge y \neq x\}$.

Uma vez que

$$\psi(y) = -\frac{1}{M(x, y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)\right) = -\frac{1}{y^2(x - y)}(2xy - 2\,y^2) = -\frac{2}{y}$$

então um fator integrante é determinado por

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)dy} = e^{\int(-2/y)dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2}.$$

Multiplicando a equação dada pelo fator integrante obtemos

$$(x - y)dx + (y^{-2} - x)dy = 0.$$

Como se trata de uma EDO exata em D, então existe uma função

$F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x - y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = y^{-2} - x \end{cases}.$$

Resolvendo vem

$$\begin{cases} F(x,y) = \frac{x^2}{2} - \ yx + C(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = y^{-2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y) = \frac{x^2}{2} - \ yx + C(y) \\ -x + \frac{dC}{dy} = y^{-2} - x \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} F(x,y) = \frac{x^2}{2} - \ yx + C(y) \\ \frac{dC}{dy} = y^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y) = \frac{x^2}{2} - \ yx + C(y) \\ C(y) = -y^{-1} + C_1 \end{cases}.$$

Assim, a solução geral é representada por

$$\frac{x^2}{2} - \ yx - \frac{1}{y} = C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Por fim, assinalemos que $y = 0$ é outra solução da equação inicial, mas

$y = x$ não é solução (Porquê?).

Exercícios III.34.

1. Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções definida por

$$f(x,y) = 2xy + 3y^2 + 3x^2 \ \text{ e } \ g(x,y) = x^2 + y^2.$$

Calcule:

a) $\int f(x,y)dx$; b) $\int f(x,y)dy$ c) $\int g(x,y)dx$ d) $\int g(x,y)dy$

Resposta: a) $x^2y + 3y^2x + x^3 + C(y)$; b) $xy^2 + y^3 + 3\ yx^2 + C(x)$;

$c)$ $\frac{x^3}{3} + xy^2 + C(y)$; d) $\frac{y^3}{3} + yx^2 + C(x)$.

2. Verifique se as seguintes equações diferenciais são exatas e, em caso afirmativo, indique a sua solução geral:

a) $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$. Resposta: É uma EDO exata com solução geral definida por $x^3 + 2x^2y + y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$;

b) $(x + y)dx + x \ln x\, dy = 0$. Resposta: Não é uma EDO exata;

c) $\frac{x+y}{x}dx + \ln x\, dy = 0$. Resposta: É uma EDO exata com solução geral definida por $y \ln x + x = C,\ C \in \mathbb{R}$;

d) $(x + y - 1)dx + (x + e^y)dy = 0$. Resposta: É uma EDO exata com solução geral definida por $\frac{x^2}{2} + xy - x + e^y = C,\ C \in \mathbb{R}$;

e) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$. Resposta: É uma EDO exata com solução geral definida por $xy - x^3 - 2y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$;

f) $(x + y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$. Resposta: É uma EDO exata com solução geral definida por $xy^2 + x^2y - y + \frac{x^3}{3} = C,\ C \in \mathbb{R}$.

3. Determine um fator integrante μ, definido por $\mu(x)$ ou $\mu(y)$ para cada uma das equações seguintes e determine as respetivas soluções gerais:

a) $(4x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$. Resposta: $\mu(x) = x^2$;
$x^3y^2 + x^4 = C, C \in \mathbb{R}$.

b) $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$. Resposta: $\mu(y) = y^2$;
$3x^2y^3 + y^4 = C, C \in \mathbb{R}$.

c) $y(x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0$. Resposta: $\mu(x) = e^x$;
$e^x(y^2 + xy) = C, C \in \mathbb{R}$.

d) $(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$. Resposta: $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$;
$\frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = C, C \in \mathbb{R}$.

4. Verifique que $\mu(x) = x$ não é um fator integrante para a EDO de 1ª ordem

$$(x + y)dx + x \ln x\, dy = 0.$$

5. Determine $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ de modo que $\mu(x) = ax + b$ seja um fator integrante para

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0.$$

Resposta: $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$.

6. $\mu(x, y) = -\frac{1}{x^2 y}$ é um fator integrante para a EDO de 1ª ordem $(x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = y^2$? Justifique. Resposta: É fator integrante.

7. Mostre que $\mu(x, y) = x^2 y$ é um fator integrante para a EDO

$$(3y + 4xy^2)dx + (2x + 3x^2 y)dy = 0.$$

III.1.5. – Equações lineares de 1ª ordem.

Identificamos a equação (A) – definida por $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ – como sendo linear se o seu segundo membro for linear relativamente à variável y, isto é, se

$$g(x, y) = -p(x)y + q(x).$$

Definição III.35. [Equação diferencial linear de 1ª ordem]

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ expressões que definem funções contínuas. Chamamos EDO linear de 1ª ordem a toda a equação escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Dizemos que 1 e $p(x)$ são os coeficientes da equação e $q(x)$ é o termo independente.

No caso particular, $p(x) = a$, onde $a \in \mathbb{R}$ é constante, dizemos que a equação linear tem coeficientes constantes.

No caso contrário, a equação linear tem coeficientes variáveis.

Método III.36. [Resolução de uma EDO linear de 1ª ordem com coeficientes e termo independente constantes]

Consideremos a equação linear com coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dx} + ay = b.$$

Se $a = 0$ temos a equação $\frac{dy}{dx} = b$ e por primitivação obtemos a sua solução geral $y = bx + C$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Se $a \neq 0$ escrevemos a equação na forma diferencial

$$(ay - b)\, dx + dy = 0.$$

Trata-se de uma equação de variáveis separáveis. Assinalemos que a função constante, definida por $y = \frac{b}{a}$, é uma solução da equação (Porquê?). Transformamos a equação numa equação de variáveis separadas

$$dx + \frac{1}{ay - b} dy = 0.$$

Por primitivação resulta

$$\int 1 \ dx + \int \frac{1}{ay - b} dy = C_1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{a} \ln|ay - b| = C_1$$

Simplificamos

$$ax + \ln|ay - b| = C_1 \Leftrightarrow |ay - b| = e^{C_1} e^{-ax} \Leftrightarrow ay - b = \pm e^{C_1} e^{-ax}$$

logo a solução geral é definida por

$$y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Método III.37. [Resolução de uma EDO linear de 1ª ordem com $p(x) \neq 0$ e $q(x) = 0$]

Consideramos, de seguida, o caso particular em que $p(x) \neq 0$[xiii] e $q(x) = 0$, ou seja, a equação linear

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Leftrightarrow p(x)\, y\, dx + dy = 0.$$

Assinalemos que a função constante, definida por $y = 0$, é uma solução da equação *(Porquê?).*

[xiii] Se $p(x) = 0$ a EDO reduz-se a $\frac{dy}{dx} = q(x)$.

Supondo $y \neq 0$ transformamos a equação numa equação de variáveis separadas

$$p(x)\, dx + \frac{1}{y} dy = 0.$$

Por primitivação obtemos

$$\int p(x)\ dx + \int \frac{1}{y} dy = C_1 \Leftrightarrow \int p(x)\ dx + \ln|y| = C_1$$

ou seja,

$$\ln|y| = C_1 - \int p(x)\ dx \Leftrightarrow y = \pm e^{C_1} e^{-\int p(x)dx}.$$

Logo a solução geral é definida por

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Observação III.38. [Resolução de uma EDO linear de 1ª ordem – caso geral]

A EDO linear $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ pode ser escrita na forma diferencial como

$$\big(p(x)y - q(x)\big)dx + dy = 0.$$

Sejam $M(x, y) = p(x)y - q(x)$ e $N(x, y) = 1$ definidas em

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (D_p \cap D_q)\}$. Atendendo a que

$$\phi(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)\right) = p(x),$$

verificamos que $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ determina um fator integrante.

Concluímos, assim, que as equações diferenciais lineares de 1ª ordem podem ser transformadas numa EDO exata, multiplicando, ambos os seus membros, por um fator integrante adequado.

Método III.39. [Resolução de uma EDO linear de 1ª ordem pelo método do fator integrante]

Seja $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ e consideremos $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Note-se que

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Leftrightarrow \underbrace{e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)y}_{\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right)} = e^{\int p(x)dx}q(x).$$

Uma vez que

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)y = \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right)$$

podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right) = e^{\int p(x)dx}q(x).$$

Logo

$$e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C.$$

Assim

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right),$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, define a solução geral da equação inicial.

Exemplo III.40.

Consideremos a EDO de 1ª ordem

$$(y\tan x-\sin x)dx+dy=0.$$

Trata-se de uma equação linear, com $p(x)=\tan x$ e $q(x)=\sin x$, uma vez que a equação também se pode escrever na forma

$$(y\tan x-\sin x)+\frac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sin x.$$

Um fator integrante é determinado através de

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\tan x\,dx}=e^{-\ln|\cos x|+C}=e^{C}e^{\ln|\sec x|}=e^{C}\sec x.$$

Escolhendo $C=0$, consideramos $\mu(x)=\sec x$.

Multiplicamos a equação pelo fator integrante

$$\sec x\frac{dy}{dx}+y\tan x\sec x=\sin x\sec x\Leftrightarrow\sec x\frac{dy}{dx}+y\tan x\sec x=\tan x.$$

Tendo em conta que

$$\frac{d}{dx}(y\sec x)=\sec x\frac{dy}{dx}+y\tan x\sec x$$

temos

$$\frac{d}{dx}(y\sec x)=\tan x$$

logo a solução geral da equação é dada por

$$y\sec x=\int\tan x\ dx\Leftrightarrow y\sec x=\ln|\sec x|+C\Leftrightarrow y=\cos x\ \ln|\sec x|+C\cos x$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Exercícios III.41.

1. Consideremos a EDO de 1ª ordem $(2y - x)dx + dy = 0$.

a) Justifique que a equação não é exata em $\mathbb{R}^2$.

b) Determine um fator integrante para a equação.

Resposta: $\mu(x) = e^{2x}$;

c) Determine a solução geral da equação.

Resposta: $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

d) Determine a solução particular da equação que verifica $y(0) = -1$. Resposta: $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2x}$.

2. Resolva as seguintes equações lineares de 1ª ordem:

a) $\frac{dy}{dt} + 3ty = t$. Resposta: $y = \frac{1}{3} + Ce^{\frac{-3t^2}{2}}, C \in \mathbb{R}$.

b) $t^2\frac{dy}{dt} + yt = 1$. Resposta: $y = \frac{1}{t}(\ln t + C), C \in \mathbb{R}$.

c) $\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x}y = e^{-2x}$. Resposta: $y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{C}{x}\right)e^{-2x}, C \in \mathbb{R}$.

d) $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 4xy = x$. Resposta: $y = \frac{4x^4+2x^2+4C}{4(x^2+1)^2}, C \in \mathbb{R}$.

e) $\begin{cases} (x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 4xy = x \\ y(2) = 1 \end{cases}$. Resposta: $y = \frac{4x^4+2x^2+76}{4(x^2+1)^2}$.

f) $y^2dx + (3xy - 1)dy = 0$. Resposta: $y^3x = \frac{y^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$.

III.2 – Equações diferenciais ordinárias lineares de 2ª ordem.

Nesta secção vamos estudar equações diferenciais ordinárias (EDO's) lineares de 2ª ordem, cuja classificação em homogéneas ou não homogéneas depende do termo independente. Assim, neste contexto, a designação de homogénea tem um significado diferente do usado para equações de 1ª ordem.

Ao longo desta secção verificaremos que:

- O cálculo das soluções de uma EDO linear de 2ª ordem homogénea com coeficientes constantes se baseia na resolução de uma equação algébrica do segundo grau;
- A solução geral de uma EDO não homogénea com coeficientes constantes é dada pela soma da solução geral da EDO homogénea correspondente com uma solução particular da equação inicial. Para determinar uma solução da equação não homogénea dispomos de dois métodos - o método dos coeficientes indeterminados e o método da variação das constantes arbitrárias.

III.2.1. EDO's lineares de 2ª ordem: definições, exemplos e soluções.

No que se segue, fixamos x como variável independente e assumimos y como função (desconhecida) de x.

Usamos ainda a notação de Leibniz para indicar as derivadas de y de primeira e segunda ordem, ou seja, consideramos

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ e } y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Começamos com algumas definições.

Definição III.42. [EDO linear de 2ª ordem]

Sejam $a(x),\ b(x),\ c(x)$ e $g(x)$ expressões que definem funções contínuas num intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ e $a(x) \neq 0$.

Chamamos EDO linear de 2ª ordem a toda equação que se escreve na forma

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = g(x) \tag{1}$$

para todo $x \in J$.

Às expressões $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ chamamos os coeficientes da equação.

Tendo em conta o termo independente, $g(x)$, dizemos que a equação (1) é homogénea se $g(x) = 0$ para todo $x \in J$, isto é, se

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = 0.$$

Caso contrário, isto é, se $g(x) \neq 0$ para algum $x \in J$, dizemos que (1) é não homogénea (ou completa).

As soluções da equação (1) são funções definidas por expressões de x (ou eventualmente funções constantes).

Por vezes, uma função f não é solução da equação em todo o seu domínio D_f, mas apenas num certo intervalo I tal que $I \subseteq D_f \cap J$.

Definição III.43. [Solução da EDO linear de 2ª ordem]

Uma dada função $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução da equação (1) em I se é f de classe C^2[xiv] em I e

$$a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x) = g(x)$$

para todo $x \in I$, isto é, a equação é transformada numa identidade quando substituímos y por $f(x)$, $\frac{dy}{dx}$ por $f'(x)$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ por $f''(x)$.

Exemplo III.44. [Solução de uma EDO linear de 2ª ordem]

Consideramos a EDO homogénea de 2ª ordem

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 7x\frac{dy}{dx} + 15\,y = 0,\; x \in \mathbb{R}^+.$$

Dada a função cúbica f definida por $f(x) = x^3$, verificamos que esta é uma solução da equação em $\mathbb{R}^+$. É evidente que f e as suas derivadas, definidas por $f'(x) = 3\,x^2$ e $f''(x) = 6\,x$, são contínuas em $\mathbb{R}$. Isso significa que f é de classe C^2em $\mathbb{R}$, logo, em particular, f é de classe C^2em $\mathbb{R}^+$.

Além disso, f satisfaz a equação dado que

$$x^2(6\,x) - 7x(3\,x^2) + 15x^3 \; = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercícios III.45.

1. Diga, justificando, quais das seguintes EDO's de 2ª ordem são lineares e, em caso afirmativo, classifique-as quanto ao termo independente:

   a) $x\,y'' + \; e^x y = \sqrt{x}$ b) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 1$

[xiv] Dizemos que a função f é de classe C^2 num intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ se f e as suas derivadas de primeira e segunda ordem são contínuas em todos os pontos pertencentes a I.

c) $y\,y'' + e^x y = 0$

d) $x\,y'' + e^y x = 0$

e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = y^2$

f) $y'' + y = 0$

Resposta: a) EDO linear não homogénea; b) EDO linear não homogénea; c) EDO não linear; d) EDO não linear; e) EDO não linear; f) EDO linear homogénea.

2. Consideremos a EDO homogénea de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\,y = 0$.

   a) Verifique que as funções f e g definidas por $f(x) = \sin(2x)$ e $g(x) = \cos(2x)$ são soluções da equação em $\mathbb{R}$;

   b) Determine uma função constante que seja solução da equação em $\mathbb{R}$. Resposta: $y = 0$;

   c) Verifique que a função h, definida por $h(x) = (\cos x)^2$, não é solução da EDO em $\mathbb{R}$.

   Resposta: $\frac{d^2h(x)}{dx^2} + 4\,h(x) = 2$.

III.2.2. Resolução de algumas EDO’s lineares

Tal como já referimos, pretendemos determinar o conjunto de soluções de EDO's lineares de 2ª ordem.

Em geral, a equação (1) tem uma infinidade de soluções, que são representadas por

$$y = \varphi(x; C_1, C_2),$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

A esse conjunto chamamos solução geral (ou integral geral) da equação.

Nesse sentido começamos por abordar dois casos particulares:

(A) Se $b(x) = 0$ e $c(x) = 0$ então a equação (1) assume a forma
$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} = g(x)$;

(B) Se $b(x) \neq 0$ e $c(x) = 0$ então a equação (1) é escrita como
$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} = g(x)$.

Nestes casos é possível resolver as EDO's lineares de 2ª ordem reduzidas utilizando como técnica a dupla primitivação em ordem à variável x.

Analisamos estas situações particulares em dois exemplos.

Exemplo III.46. [Resolução por dupla primitivação]

Consideremos a EDO homogénea de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Verificamos que

$$\frac{dy}{dx} = \int 0\, dx = C_1 \wedge \ y = \int C_1\, dx = C_1x + C_2$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Deste modo, a solução geral da equação inicial é dada por

$$y = \varphi(x; C_1, C_2) = C_1x + C_2.$$

Exemplo III.47. [Resolução por dupla primitivação após redução de ordem]

Consideremos a EDO não homogénea de 2ª ordem $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=1,\, x\in\mathbb{R}^+$.

Utilizando a mudança de variável dependente $u=\frac{dy}{dx}$ transformamos a equação dada numa EDO linear de 1ª ordem

$$x^2\frac{du}{dx}+xu=1 \Leftrightarrow \frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=x^{-2}.$$

Multiplicando ambos os membros pelo fator integrante x vem

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{d(ux)}{dx}=\frac{1}{x}$$

dado que $\frac{d(ux)}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$. Por primitivação obtemos

$$ux=\ln x+C_1 \Leftrightarrow u=\frac{\ln x+C_1}{x}.$$

Regressamos, agora, à variável inicial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\ln x}{x}+\frac{C_1}{x}.$$

Integrando uma vez mais obtemos

$$y=\int\frac{\ln x}{x}dx+C_1\int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow y=\frac{(\ln x)^2}{2}+C_1\ln x+C_2$$

onde $C_1\in\mathbb{R}$ e $C_2\in\mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Assim, concluímos que

$$y=\varphi(x;C_1,C_2)=\frac{(\ln x)^2}{2}+C_1\ln x+C_2$$

representa a solução geral da equação.

Apresentamos agora um método para resolver EDO's lineares de 2ª ordem completas. Porém, a sua aplicação requer o conhecimento de uma solução particular da equação homogénea correspondente.

Proposição III.48. [Resolução de uma EDO linear de 2ª ordem por abaixamento de ordem]

Seja y_1 uma solução, não nula, da equação homogénea

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = 0 \text{ em } I.$$

Se $y = y_1 u$ então a equação não homogénea (1) assume a forma

$$a(x)y_1\,\frac{d^2u}{dx^2} + \left(2a(x)\frac{dy_1}{dx} + b(x)y_1\right)\frac{du}{dx} = g(x).$$

Demonstração:

Sendo y_1 uma solução, não nula, da equação homogénea

$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = 0$ em I,

consideremos a mudança de variável dependente, $y = y_1 u$.

As derivadas de y são determinadas por

$$\frac{dy}{dx} = y_1\frac{du}{dx} + u\frac{dy_1}{dx} \qquad \wedge \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y_1\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{dy_1}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{d^2y_1}{dx^2}u$$

para todo $x \in I$.

Substituindo y, $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ em (1) obtemos

$$a(x)y_1\,\frac{d^2u}{dx^2} + 2a(x)\frac{dy_1}{dx}\,\frac{du}{dx} + a(x)\,\frac{d^2y_1}{dx^2}u + b(x)y_1\,\frac{du}{dx} + b(x)\,u\frac{dy_1}{dx}$$
$$+ c(x)y_1u = g(x).$$

Esta equação assume uma forma mais reduzida

$$a(x)y_1\,\frac{d^2u}{dx^2} + \left(2a(x)\frac{dy_1}{dx} + b(x)y_1\right)\frac{du}{dx} = g(x)$$

dado que

$$a(x)\frac{d^2y_1}{dx^2} + b(x)\frac{dy_1}{dx} + c(x)y_1 = 0.$$

Método III.49. [Resolução da EDO linear de 2ª ordem completa por abaixamento de ordem]

Recorrendo à mudança de variável $v=\frac{du}{dx}$ baixamos a ordem da equação, isto é, a EDO de 2ª ordem

$$a(x)y_1\,\frac{d^2u}{dx^2}+\left(2a(x)\frac{dy_1}{dx}+b(x)y_1\right)\frac{du}{dx}=g(x)$$

é transformada numa EDO linear de 1ª ordem

$$a(x)y_1\,\frac{dv}{dx}+\left(2a(x)\frac{dy_1}{dx}+b(x)y_1\right)v=g(x).$$

Por este motivo, o método de resolução é chamado de abaixamento de ordem.[xv]

Para aplicar este método procedemos do seguinte modo:

1. Mudança de variável dependente por meio de $y=y_1u$;
2. Redução de ordem da equação fazendo $v=\frac{du}{dx}$;
3. Resolução da equação linear de 1ª ordem para determinar v;
4. Cálculo de u por primitivação;
5. Regresso à variável inicial y através de $u=\frac{y}{y_1}$.

Exemplo III.50. [Resolução de uma EDO linear de 2ª ordem por abaixamento de ordem]

Consideremos a EDO homogénea de 2ª ordem $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0\,,x\,\in\mathbb{R}^+$.

Dada a função f definida por $f(x)=x$, vejamos que é uma solução da equação em $\mathbb{R}^+$. De facto, esta função é de classe C^2em $\mathbb{R}^+$e verifica a equação, isto é,

$$(x^2)(0)+(x)\,(1)-x=0$$

para todo $x\,\in\mathbb{R}^+$.

[xv] Também designado por Método d'Alembert.

Em primeiro lugar, podemos efetuar a mudança de variável dependente por meio de $y = xu$ e de seguida, determinamos as derivadas de y de 1ª e 2ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \qquad \wedge \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}.$$

Substituindo na equação inicial vem

$$x^2\left(x\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\right) + x\left(x\frac{du}{dx} + u\right) - xu = 0 \Leftrightarrow x^3\frac{d^2u}{dx^2} + 3x^2\frac{du}{dx} = 0.$$

Com nova mudança de variável dependente $v = \frac{du}{dx}$ reduzimos a ordem da equação. Assim, temos

$$x^3\frac{dv}{dx} + 3x^2v = 0 \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} + 3v = 0 \Leftrightarrow x\,dv + 3v\,dx = 0.$$

Resolvendo esta equação de variáveis separáveis obtemos $v = Cx^{-3}$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Como $v = \frac{du}{dx}$ temos $\frac{du}{dx} = Cx^{-3}$. Por primitivação vem

$u = C_1x^{-2} + C_2$, onde $C_1 = -2C \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Por fim, sabendo que $u = \frac{y}{x}$ então a solução geral da equação inicial é representada por

$y = \frac{C_1}{x} + C_2\,x$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Além da equação linear podemos ter duas condições adicionais sobre a incógnita.

Definição III.51. [Problema de Valores Iniciais]

Dados os números $x_0 \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, dizemos que

$$\begin{cases} a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = g(x), x \in I \\ y(x_0) = \alpha \\ \frac{dy}{dx}(x_0) = \beta \end{cases}$$, é um problema de valores iniciais.

Tal como para as equações lineares de 1ª ordem, conhecemos um teorema que garante a existência e unicidade de solução para o problema de valores iniciais para as equações lineares de 2ª ordem.

Nesse caso a solução deste problema é chamada de solução particular da equação diferencial uma vez que resulta da solução geral por concretização dos valores de C_1 e C_2.

Teorema III.52. [Existência e unicidade de solução do problema de valores iniciais]

Sejam $a(x), b(x), c(x)$ e $g(x)$ expressões que definem funções contínuas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se $x_0 \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ então o problema de valores iniciais definido por

$$\begin{cases} a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = g(x), \ x \in I \\ y(x_0) = \alpha \\ \frac{dy}{dx}(x_0) = \beta \end{cases}$$

tem uma única solução em I.

Exemplo III.53. [Resolução de um problema de valores iniciais]

Retomemos a equação do Exemplo III.47 e consideremos o problema de valores iniciais definido por

$$\begin{cases} x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 1 \\ y(1) = 0 \\ \frac{dy}{dx}(1) = -1 \end{cases} , x \in \mathbb{R}^+.$$

Verificámos que

$$y = \frac{(\ln x)^2}{2} + C_1 \ln x + C_2, \text{ onde } C_1 \in \mathbb{R} \text{ e } C_2 \in \mathbb{R} \text{ são constantes arbitrárias,}$$

é a solução geral da equação diferencial dada.

Procuramos, agora, uma solução particular que satisfaça as condições acima indicadas, isto é, tal que

$$\begin{cases} y = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + C_1 \ln x + C_2 \\ y(1) = 0 \\ \dfrac{dy}{dx}(1) = -1 \end{cases}.$$

Atendendo a que $y = \frac{(\ln x)^2}{2} + C_1 \ln x + C_2$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x} + \frac{C_1}{x}$, obtemos

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ \dfrac{dy}{dx}(1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -1 \end{cases}$$

pelo que $y = \frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x$ é a solução particular em $\mathbb{R}^+$.

Exercícios III. 54.

1. Recorrendo à dupla primitivação resolva as seguintes EDO's de 2ª ordem:

   a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$ b) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 1$ c) $(x+1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} = x$

   Resposta: a) $y = x^2 + C_1 \mathrm{x} + C_2$; b) $y = -\ln|x| + C_1 \mathrm{x} + C_2$;

   c) $y = (2+x)\ln|x+1| + C_1 \mathrm{x} + C_2$.

2. Utilizando uma substituição reduza a ordem das seguintes EDO's de 2ª ordem e determine as respetivas soluções gerais:

   a) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 0 \,, x \in \mathbb{R}^+$ b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0$

   c) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 2$ d) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = x, x \in \mathbb{R}^+$

   e) $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x, x \in \mathbb{R}^-$ f) $2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x$

Resposta: a) $y = C_1 \ln x + C_2$; b) $y = C_1 e^{-3x} + C_2$;

c) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 + \frac{2x}{3}$; d) $y = C_1 e^{3x} + C_2 - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$;

e) $y = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^2 \ln(-x)}{2}$; f) $y = e^x \left(\frac{x}{2} + C_1\right) + C_2$.

3. Resolva a EDO não-homogénea de 2ª ordem $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x}$.

   Sugestão: Considere uma solução particular da EDO homogénea correspondente (ver Exemplo III.50).

   Resposta: $y = -\frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{C_1}{x} + C_2 x$.

III.2.3. EDOs lineares homogéneas de 2ª ordem

Consideremos a equação homogénea linear de 2ª ordem escrita na forma

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = 0 \tag{2}$$

para todo $x \in I$.

Definição III.55. [Classificação da EDO linear de 2ª ordem relativamente aos seus coeficientes]

Dizemos que a equação (2) tem coeficientes constantes se $a(x) = a$, $b(x) = b$ e $c(x) = c$ para todo $x \in I$. Caso contrário, dizemos que (2) tem coeficientes variáveis.

Enunciamos o princípio da sobreposição que descreve as propriedades das soluções para equações lineares de 2ª ordem homogéneas.

Proposição III.56. [Princípio da sobreposição]

Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação (2) em I então qualquer função ψ definida como $\psi(x; C_1, C_2) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias, também é solução de (2) em I.

Demonstração:

Suponhamos que y_1 e y_2 são duas soluções da equação (2) em I.

Para quaisquer constantes $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$, seja

$$f(x) = \psi(x; C_1, C_2) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Derivando vem

$$\frac{df}{dx} = C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx} \ \wedge \ \frac{d^2f}{dx^2} = C_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}.$$

Substituindo y, $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ por $f(x)$, $\frac{df}{dx}$ e $\frac{d^2f}{dx^2}$, respetivamente, no primeiro membro da equação (2) obtemos

$$a(x)\left(C_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}\right) + b(x)\left(C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx}\right) + c(x)\big(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\big)$$

ou seja,

$$C_1\left(a(x)\frac{d^2y_1}{dx^2} + b(x)\frac{dy_1}{dx} + c(x)y_1\right) + C_2\left(a(x)\frac{d^2y_2}{dx^2} + b(x)\frac{dy_2}{dx} + c(x)y_2\right).$$

Usando

$$a(x)\frac{d^2y_1}{dx^2} + b(x)\frac{dy_1}{dx} + c(x)y_1 = 0$$

e

$$a(x)\frac{d^2y_2}{dx^2} + b(x)\frac{dy_2}{dx} + c(x)y_2 = 0$$

para todo $x \in I$ obtemos $C_1 . 0 + C_2 . 0 = 0$, logo $y = f(x) = \psi(x; C_1, C_2)$ é solução de (2) em I.

Fixando as constantes $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ verificamos que a solução definida por

$$\psi(x; C_1, C_2) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

é combinação linear das soluções y_1 e y_2.

Corolário III.57. [Princípio da sobreposição]

a) Se y_1 é uma solução de (2) em I então qualquer função $y = C_1 y_1$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, também é solução de (2) em I.
b) A função nula em I é sempre uma solução de (2) em I, sendo designada por solução trivial.

Exemplo III.58. [Princípio da sobreposição]

Consideremos a EDO homogénea de 2ª ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

As funções definidas por $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \sin x$ são soluções da equação em $\mathbb{R}$ pois são de classe C^2em $\mathbb{R}$ e satisfazem a equação dado que

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + y_1 = -\cos x + \cos x = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2y_2}{dx^2} + y_2 = -\sin x + \sin x = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora pelo princípio da sobreposição podemos construir mais soluções.

Por exemplo,

$$y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$ [xvi]

também é solução da equação em $\mathbb{R}$.

Verificamos, de seguida, que o conhecimento de duas soluções duma EDO homogénea nem sempre nos permite obter a solução geral da EDO por aplicação do princípio da sobreposição.

[xvi] Recorde que $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$.

Exemplo III.59. [Combinação linear de soluções de uma EDO linear de 2ª ordem homogénea]

Queremos resolver a EDO homogénea de 2ª ordem $x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0, x\ \in \mathbb{R}^+$.

Assumimos que temos uma solução da equação em $\mathbb{R}^+$. Por exemplo, a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x)=x^2$ é solução pois é de classe C^2em $\mathbb{R}^+$ e

$$x\frac{d^2f}{dx^2}-\frac{df}{dx}=2x-2x=0.$$

Pelo corolário do princípio da sobreposição podemos construir mais uma solução, por exemplo a função definida em $\mathbb{R}^+$por $g(x)=-2x^2$ também é solução. Invocando agora esse princípio podemos afirmar que a família de funções quadráticas do tipo

$$\psi(x;C_1,C_2)=C_1x^2+C_2(-2x^2),$$

onde $C_1\in\mathbb{R}$ e $C_2\in\mathbb{R}$ são constantes arbitrárias, também é solução.

Será que $\psi(x;C_1,C_2)$ representa a solução geral da equação?

A resposta é negativa.

Vejamos que qualquer função constante, definida em $\mathbb{R}^+$por $h(x)=k,\ k\ \in\mathbb{R}$, também é solução visto que é de classe C^2em $\mathbb{R}^+$ e

$$x\frac{d^2h}{dx^2}-\frac{dh}{dx}=0-0=0.$$

Reparemos que já sabemos resolver a equação dada.

Fazendo a mudança de variável dependente $u=\frac{dy}{dx}$ transformamos essa equação numa equação de 1ª ordem

$$x\frac{du}{dx}-u=0.$$

Esta equação é de variáveis separáveis e admite a função nula como solução.

Para $u \neq 0$, temos uma equação de variáveis separadas

$$x\frac{du}{dx} - u = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{u}du - \frac{1}{x}dx = 0$$

Por primitivação vem

$$\ln|u| = \ln x + C \Leftrightarrow |u| = e^C x.$$

Regressando à variável inicial temos

$$\frac{dy}{dx} = \pm e^C x.$$

Recorrendo novamente à primitivação obtemos a solução geral da equação

$$y = C_1 x^2 + C_2,$$

onde $C_1 = \pm\frac{e^C}{2} \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Observação III.60. [Independência linear de soluções]

É pertinente colocar a seguinte questão: Como encontrar um conjunto de duas soluções $\{y_1, y_2\}$ de modo que qualquer solução y da equação se possa exprimir como combinação linear dessas soluções, isto é, tal que

$$y = \varphi(x; C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)?$$

Observemos que a solução geral da equação do Exemplo III.59 é uma soma de duas parcelas e cada parcela é o produto de uma constante arbitrária por uma solução, pois $\{x^2, 1\}$ é um conjunto de duas soluções.

De acordo com a próxima definição, podemos dizer que este conjunto é linearmente independente em $\mathbb{R}^+$ dado que

$$det\begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ (x^2)' & 1' \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} = -2x \neq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Todavia, o conjunto de funções $\{x^2, -2x^2\}$ não é linearmente independente em $\mathbb{R}^+$ visto que

$$det\begin{bmatrix} x^2 & -2x^2 \\ (x^2)' & (-2x^2)' \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} x^2 & -2x^2 \\ 2x & -4x \end{bmatrix} = -4x^3 + 4x^3 = 0.$$

Definição III.61. [Wronskiano de duas funções]

Sejam y_1 e y_2 duas funções diferenciáveis num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Chamamos wronskiano de y_1 e y_2 ao determinante

$W(y_1, y_2) = det\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$.[xvii]

Definição III.62. [Independência linear de duas funções]

Sejam y_1 e y_2 duas funções diferenciáveis num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Dizemos que $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto linearmente independente em I se o wronskiano de y_1 e y_2 é diferente de zero em I, isto é, se

$$W(y_1, y_2) = det\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0 \text{ para todo } x \in I.$$[xviii]

[xvii] Notamos que se trocarmos y_1 por y_2 o determinante muda de sinal, isto é,

$$W(y_2, y_1) = det\begin{bmatrix} y_2(x) & y_1(x) \\ y_2'(x) & y_1'(x) \end{bmatrix} = -W(y_1, y_2).$$

[xviii] Notamos que se $y_2 = Cy_1$, para algum $C \in \mathbb{R}$, então o wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W(y_1, y_2) = det\begin{bmatrix} y_1(x) & C\,y_1(x) \\ y_1'(x) & C\,y_1'(x) \end{bmatrix} = 0,$$

isso significa que $\{y_1, Cy_1\}$ não é um conjunto linearmente independente.

Proposição III.63. [Condição necessária da independência linear de duas soluções]

Se $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto linearmente independente em I então

$$Ay_1(x) + By_2(x) = 0 \Longrightarrow A = B = 0.$$

Demonstração:

Suponhamos que $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Sendo $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ constantes, consideremos a equação

$$Ay_1(x) + By_2(x) = 0.$$

Por derivação obtemos

$$Ay_1'(x) + By_2'(x) = 0.$$

Temos assim um sistema linear de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo o determinante da matriz do sistema o wronskiano, o qual é não nulo, então o sistema é possível e determinado.

Como se trata de um sistema homogéneo a solução nula $(A, B) = (0,0)$ é única.

Definição III.64. [Conjunto fundamental de soluções da EDO linear de 2ª ordem homogénea]

Dizemos que $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação (2) em I se y_1 e y_2 são soluções em I e $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto linearmente independente em I.

É importante referir que o conjunto fundamental de soluções da equação (2) não é único.

Por exemplo, se considerarmos $y_3 = Cy_1$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária não nula, então $\{y_3, y_2\}$ também é um conjunto fundamental de soluções *(Porquê?).*

Deste modo, podemos garantir que existe uma infinidade de conjuntos fundamentais de soluções para a mesma equação homogénea.

Exemplo III.65. [Conjuntos fundamentais de soluções de uma EDO linear de 2ª ordem homogénea]

Consideremos a EDO homogénea de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$.

Queremos encontrar dois conjuntos fundamentais de soluções para a equação.

Em primeiro lugar, as funções exponenciais definidas por $y_1(x) = e^x$ e

$y_2(x) = e^{-x}$ são de classe C^2em $\mathbb{R}$ e satisfazem

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - y_1 = e^x - e^x = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2y_2}{dx^2} - y_2 = e^{-x} - e^{-x} = 0\,,$$

logo são soluções da equação em $\mathbb{R}$.

Agora, calculamos o wronskiano dessas soluções

$$W(y_1, y_2) = det\begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -\,e^{-x} \end{bmatrix} = \ -2.$$

Como o wronskiano é não nulo em $\mathbb{R}$, então $\{e^x, e^{-x}\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}$, por conseguinte também é um conjunto fundamental de soluções da equação em $\mathbb{R}$.

Consideremos agora as funções hiperbólicas definidas por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \wedge \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Pelo princípio da sobreposição, essas duas funções são soluções da equação em $\mathbb{R}$.

Além disso, $\{\sinh x, \cosh x\}$ é um conjunto fundamental de soluções em $\mathbb{R}$ uma vez que

$$W(y_1, y_2) = det \begin{bmatrix} \sinh x & \cosh x \\ \cosh x & \sinh x \end{bmatrix} = (\sinh x)^2 - (\cosh x)^2 = -1 \neq 0.$$

O próximo resultado permite-nos construir a solução geral de uma EDO linear homogénea de 2ª ordem a partir do conhecimento de quaisquer duas soluções linearmente independentes.

Proposição III.66. [Solução geral da EDO linear de 2ª ordem homogénea]

Se $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções em I então a solução geral de (2) é escrita de modo único na forma $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ para todo

$x \in I$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são duas constantes arbitrárias.

Prova-se que a solução geral (ou integral geral) da equação (2) é igual ao conjunto de todas as soluções.

De um modo geral não é simples resolver a equação (2) com coeficientes variáveis.

A partir de agora, preocupar-nos-emos com a resolução das equações (1) e (2) com coeficientes constantes.

Exercício III.67.

Indique uma EDO homogénea linear de 2ª ordem com coeficientes constantes que admita o seguinte conjunto fundamental de soluções:

i) $\{e^{-3x}, e^{3x}\}$;

ii) $\{e^{-x}, e^{3x}\}$;

iii) $\{1,\ e^{2x}\}$;

iv) $\{\sin x, \cos x\}$;

v) $\{e^{x} \sin x,\ e^{x} \cos x\}$;

vi) $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$.

Resposta: i) $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$; ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$;

iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0$; iv) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$; v) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$;

vi) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$.

III.2.4. EDOs homogéneas com coeficientes constantes

Assumimos, agora, que a equação diferencial linear de 2ª ordem é homogénea e tem coeficientes constantes, isto é, que estamos perante uma EDO escrita na forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{3}$$

onde $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ são constantes.[xix]

Assim, verificamos que procuramos funções de classe C^2 definidas num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que a soma de múltiplos da primeira e segunda derivadas e ela própria seja igual a zero.

Neste contexto, tem sentido considerar $y(x) = e^{mx}$, sendo m uma constante, como possível solução de (3). *(Porquê?)*

Consequentemente, escolhemos a função exponencial definida por $y = e^{mx}$, m constante, que é de classe C^2 em $\mathbb{R}$ e satisfaz as condições

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} = my,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(me^{mx}) = m\frac{dy}{dx} = m^2e^{mx} = m^2y.$$

Verificamos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = m^2y + bmy + cy = (m^2 + bm + c)y,$$

Ou seja, fazendo a substituição $y = e^{mx}$, obtemos

$$(m^2 + bm + c)e^{mx} = 0 \Leftrightarrow m^2 + bm + c = 0,$$

[xix] Uma vez que, por definição, o coeficiente a do termo de ordem 2 é não nulo, podemos considerar, sem perda de generalidade, $a = 1$.

o que nos permite concluir que, $y = e^{mx}$ define uma solução da equação (3) se e só se a constante m satisfaz

$$m^2 + bm + c = 0.$$

Deste modo, no final da resolução desta equação determinamos, no máximo, duas soluções de (3).

Definição III.68. [Equação Característica]

Chamamos equação característica (ou equação auxiliar) da EDO (3) à equação

$$m^2 + bm + c = 0. \tag{4}$$

Trata-se de uma equação algébrica de grau 2, cujas raízes dependem do binómio discriminante

$\Delta = b^2 - 4c.$

Distinguimos três casos:

- Caso I: duas raízes reais distintas, ou seja, $\Delta > 0$;
- Caso II: uma raiz real dupla, ou seja, $\Delta = 0$;
- Caso III: duas raízes complexas conjugadas, ou seja, $\Delta < 0$.

Proposição III.69. [Caso I: Duas Raízes Reais Distintas]

Se $\Delta > 0$ então a solução geral da equação (3) é definida por

$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias e

$m_1 \in \mathbb{R}$ e $m_2 \in \mathbb{R}$ são as raízes da equação caraterística (4).

Demonstração:

Se $\Delta > 0$ então a equação característica tem duas raízes reais distintas,

$m_1 \neq m_2$, pelo que

$$y_1(x) = e^{m_1 x} \text{ e } y_2(x) = e^{m_2 x}$$

definem duas soluções da equação em $\mathbb{R}$.

Além disso, o conjunto $\{e^{m_1 x},\ e^{m_2 x}\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}$, visto que o wronskiano é não nulo em $\mathbb{R}$. Note-se que

$$W(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}) = det \begin{bmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{bmatrix} = (m_2 - m_1) e^{(m_1 + m_2) x}.$$

Assim garantimos que $\{e^{m_1 x},\ e^{m_2 x}\}$ é um conjunto fundamental de soluções em $\mathbb{R}$, e, consequentemente, pela Proposição III.66, a solução geral é definida por

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}, \text{ onde } C_1 \in \mathbb{R} \text{ e } C_2 \in \mathbb{R} \text{ são constantes arbitrárias.}$$

Exemplo III.70. [Caso I]

Consideremos a EDO homogénea de 2ª ordem $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$.

A sua equação característica

$$m^2 + m - 2 = 0$$

tem duas raízes reais distintas, $m_1 = -2$ e $m_2 = 1$, pelo que as funções definidas por $y_1(x) = e^{-2x}$ e $y_2(x) = e^x$ são soluções da equação em $\mathbb{R}$.

Além disso, $\{e^{-2x},\ e^x\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}$ pois o wronskiano é não nulo em $\mathbb{R}$ uma vez que

$$W(e^{-2x}, e^x) = det \begin{bmatrix} e^{-2x} & e^x \\ -2e^{-2x} & e^x \end{bmatrix} = 3e^{-x} \neq 0.$$

Assim, $\{e^{-2x},\ e^x\}$ é um conjunto fundamental de soluções em $\mathbb{R}$ e a solução geral é definida por $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Proposição III.71. [Caso II: Uma Raiz Real Dupla]

Se $\Delta = 0$ então a solução geral da equação (3) é definida por

$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias e

$m_1 \in \mathbb{R}$ é a raiz dupla da equação caraterística (4).

Demonstração:

Se $\Delta = 0$ então a equação característica tem uma única raiz real

$m_1 = m_2 = -\frac{b}{2}$, pelo que a função definida por $y_1 = e^{m_1 x}$ é solução da equação diferencial.

Vamos obter outra solução recorrendo o método de abaixamento de ordem.

Mais concretamente, se fizermos a mudança de variável $y = uy_1$ concluímos que a função definida por $y_2 = xe^{m_1 x}$ também é solução da equação diferencial.

Além disso, podemos afirmar que $\{e^{m_1 x}, xe^{m_1 x}\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}$ pois

$$W(e^{m_1 x}, xe^{m_1 x}) = det\begin{bmatrix} e^{m_1 x} & xe^{m_1 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & (1 + m_1 x)e^{m_1 x} \end{bmatrix} = e^{2m_1 x} \neq 0$$

Deste modo determinámos um conjunto fundamental de soluções em $\mathbb{R}$.

Consequentemente, a Proposição III.66 permite-nos afirmar que a solução geral da EDO inicial é dada por

$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Exemplo III.72. [Caso II]

Consideremos a EDO homogénea de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

A sua equação característica $m^2 - 4m + 4 = 0$ tem uma única raiz real, $m = 2$, pelo que função definida por $y_1(x) = e^{2x}$ é solução da equação em $\mathbb{R}$.

Precisamos de mais uma solução y_2 de modo que $\{y_1, y_2\}$ seja um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}$.

Se escolhermos $y_2 = xe^{2x}$ então o wronskiano é não nulo em $\mathbb{R}$ visto que

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = det \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} \end{bmatrix} = e^{4x}.$$

Assim, $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções em $\mathbb{R}$, por isso a solução geral é definida por $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Proposição III.73. [Caso III: Duas Raízes Complexas Conjugadas]

Se $\Delta < 0$ então a solução geral da equação (3) é definida por

$y = e^{px}(C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx))$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias e $p + iq$ e $p - iq$ são as raízes complexas conjugadas da equação caraterística (4).

Demonstração

Se $\Delta < 0$ então a equação característica tem duas raízes complexas conjugadas, escritas na forma $m_1 = p + iq$ e $m_2 = p - iq$.

Algumas das propriedades conhecidas para a função exponencial de variável complexa[xx] combinadas com o princípio da sobreposição[xxi], permitem-nos encontrar as funções definidas por

$$y_1(x) = e^{px}\cos(qx) \text{ e } y_2(x) = e^{px}\sin(qx)$$

que são soluções da equação em $\mathbb{R}$.

Além disso, $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}$.

Note-se que o wronskiano é dado por

[xx] Ver Apêndice IV.
[xxi] Neste caso consideramos uma combinação linear de duas soluções no conjunto $\mathbb{C}$.

$$W(y_1, y_2) = det\begin{bmatrix} e^{px}\cos(qx) & e^{px}\sin(qx) \\ e^{px}(p\cos(qx) - q\sin(qx)) & e^{px}(p\sin(qx) + q\cos(qx)) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$W(y_1, y_2) = qe^{2px}(\cos(qx))^2 + qe^{2px}(\sin(qx))^2 = qe^{2px}$$

Logo, tendo em conta que $q \neq 0$, concluímos que o wronskiano é não nulo em $\mathbb{R}$. Assim podemos afirmamos que $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções em $\mathbb{R}$ e que a solução geral é definida por

$$y = e^{px}(C_1\cos(qx) + C_2\sin(qx)),$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Exemplo III.74. [Caso III]

Consideremos a EDO homogénea de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

A sua equação característica $m^2 + 2m + 2 = 0$ admite duas raízes complexas conjugadas,

$$m_1 = -1 + i \text{ e } m_2 = -1 - i.$$

Daí podemos afirmar que a equação diferencial possui duas soluções em $\mathbb{R}$ definidas por

$$y_1(x) = e^{-x}\cos(x) \text{ e } y_2(x) = e^{-x}\sin(x).$$

Além disso, o wronskiano é não nulo em $\mathbb{R}$ pois

$$W(y_1, y_2) = det\begin{bmatrix} e^{-x}\cos(x) & e^{-x}\sin(x) \\ e^{-x}(-\cos(x) - \sin(x)) & e^{-x}(-\sin(x) + \cos(x)) \end{bmatrix} = e^{-2x}.$$

Assim $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções em $\mathbb{R}$, por isso a solução geral é definida por

$$y = e^{-x}(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)), \text{ onde } C_1 \in \mathbb{R} \text{ e } C_2 \in \mathbb{R} \text{ são arbitrárias.}$$

Exercícios III.75.

1. Seja $\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + \frac{b^2}{4}y = 0$ uma EDO linear de 2ª ordem homogénea.

a) Mostre que $m_1 = -\frac{b}{2}$ é a raiz dupla da equação caraterística da EDO dada;

b) Verifique que $y = xe^{(-b/2)x}$ define uma solução particular da equação acima referida;

c) Determine um conjunto fundamental de soluções em $\mathbb{R}$ para a EDO em causa. Resposta: $\left\{e^{-\frac{b}{2}},\ xe^{-\frac{b}{2}}\right\}$.

2. Considere a EDO $\frac{d^2y}{dx^2} - 2p\frac{dy}{dx} + (p^2 + q^2)y = 0$.

   a) Determine as raízes da equação característica da EDO dada.
   Resposta: $m_1 = p + qi$ e $m_2 = p - qi$;

   b) Verifique que as funções definidas por
   $y_1(x) = e^{px}\cos(qx)$ e $y_2(x) = e^{px}\sin(qx)$, sendo $q \neq 0$,
   são soluções em $\mathbb{R}$ da equação referida;

   c) Indique a solução geral da EDO considerada.
   Resposta: $y = C_1\, e^{px}\cos(qx) + C_2\, e^{px}\sin(qx)$

3. Calcule a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de 2ª ordem homogéneas com coeficientes constantes:

i) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$

iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 25\frac{dy}{dx} = 0$

iv) $\frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$

Resposta: i) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$; ii) $y = (C_1 + C_2x)e^{5x}$;

iii) $y = C_1 + C_2e^{-25x}$, iv) $y = C_1\cos(5x) + C_2\sin(5x)$.

4. Calcule a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de 2ª ordem homogéneas com coeficientes constantes:

i) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

ii) $3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$

iii) $2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

iv) $4\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

v) $9\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

vi) $2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 10y = 0$

Resposta: i) $y = e^{2x}(C_1\cos(x) + C_2\sin(x))$; ii) $y = C_1 + C_2e^{-2x/3}$;

iii) $y = C_1e^{-x/2} + C_2e^{3x}$; iv) $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x/2}$;

v) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x/3}$; vi) $y = e^{-x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))$.

5. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

i) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \ \wedge \ y(0) = 5 \ \wedge \ \frac{dy}{dx}(0) = 10;$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 5y = 0 \ \wedge \ y(0) = 0 \ \wedge \ \frac{dy}{dx}(0) = 2;$

iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \ \wedge y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 \ \wedge \ \frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4.$

Resposta: i) $y = 5(1 + x)e^x$; ii) $y = \frac{1}{3}(e^{5x} - e^{-x})$;

iii) $y = \left(5 - 2\sqrt{3}\right)\cos(x) + \left(2 + 5\sqrt{3}\right)\sin(x)$.

III.2.5. EDOs não homogéneas com coeficientes constantes

Consideremos agora a equação linear de 2ª ordem não homogénea com coeficientes constantes, escrita na forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{5}$$

onde $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ e $g(x)$ é uma expressão de x (ou uma constante) não nula em I.

Como devemos proceder neste caso?

Verificaremos – no resultado seguinte – que na resolução deste tipo de equações, a equação homogénea correspondente, definida por

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0, \tag{6}$$

desempenha um papel fundamental, desde que conheçamos uma solução particular da equação não homogénea.

Proposição III.76. [Solução geral da EDO linear de 2ª ordem não homogénea]

Seja $\{y_1, y_2\}$ um conjunto fundamental de soluções da equação homogénea (6) em I.

Se y_p é uma solução particular da equação não homogénea (5) em I então a solução geral da equação (5) é definida por

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x)$$

para todo $x \in I$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Demonstração:

Suponhamos que y_p é uma solução particular de (5) em I e consideremos a mudança de variável dependente $y = u + y_p$.

Consequentemente, as derivadas de primeira e segunda ordens de y são dadas por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dy_p}{dx} \quad \wedge \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y_p}{dx^2}.$$

Substituindo, agora, y, $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ na equação (5) obtemos

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y_p}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + b\frac{dy_p}{dx} + cu + cy_p = g(x).$$

Atendendo a que y_p é uma solução particular de (5), temos que

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} + b\frac{dy_p}{dx} + cy_p = g(x).$$

Logo a equação anterior pode ser transformada na equação homogénea

$$\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = 0.$$

Por hipótese, sabemos que $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação homogénea (6) em I, logo a solução geral de $\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = 0$ é definida por $u = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. *(Porquê?)*

Regressando à variável inicial concluímos que

$$y = \underbrace{C_1y_1(x) + C_2y_2(x)}_{=u} + y_p(x).$$

Observação III.77. [Solução geral da EDO linear de 2ª ordem não homogénea]

Designando por y_h a solução geral da equação homogénea correspondente (6), isto é,

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

então escrevemos a solução geral da equação não homogénea (5) na forma

$$y = y_h + y_p.$$

A determinação da solução particular da equação (5), y_p, vai depender da expressão do termo independente $g(x)$.

No que se segue, vamos aplicar o método dos coeficientes indeterminados para obter uma solução particular da equação (5), y_p. Todavia este método só se utiliza quando o termo independente, $g(x)$, é um polinómio, uma exponencial, uma função trigonométrica do tipo seno ou cosseno, ou ainda uma soma ou produto dessas funções.

Proposição III.78. [O termo independente é uma constante não nula]

Se $g(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ então uma solução particular de (5) é determinada por

$$y_p = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{c} & se \quad c \neq 0 \\ \dfrac{\alpha x}{b} & se \quad c = 0 \wedge b \neq 0 \\ \dfrac{\alpha x^2}{2} & se \quad c = 0 \wedge b = 0 \end{cases}$$

Estes três casos estão relacionados com a existência da raiz nula para a equação caraterística da equação homogénea (6), definida por

$$m^2 + bm + c = 0 \tag{7}$$

Note que:

i) Se $c \neq 0$ então $m = 0$ não é raiz da equação característica (7);

ii) Se $c = 0 \wedge b \neq 0$ então $m = 0$ é raiz simples da equação característica (7);

iii) Se $c = 0 \wedge b = 0$ então $m = 0$ é raiz dupla da equação característica (7).

Proposição III.79. [O termo independente é um polinómio**]**

Se $g(x)$ é um polinómio de grau

1) $n = 0$ definido por $g(x) = \alpha$;
2) $n = 1$ definido por $g(x) = \alpha x + \beta$;
3) $n \geq 2$ definido por $g(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, x^j$;

então a solução particular y_p é do tipo indicado pela tabela:

	$m = 0$ não é raiz de (7)	$m = 0$ é raiz simples de (7)	$m = 0$ é raiz dupla de (7)
1)	$y_p = A$	$y_p = Ax$	$y_p = Ax^2$
2)	$y_p = Ax + B$	$y_p = Ax^2 + Bx$	$y_p = Ax^3 + Bx^2$
3)	$y_p = \sum_{j=0}^{n} A_j\, x^j$	$y_p = \sum_{j=0}^{n} A_j\, x^{j+1}$	$y_p = \sum_{j=0}^{n} A_j\, x^{j+2}$

Exemplo III.80. [EDO em que o termo independente é um polinómio de grau 1]

Consideremos a EDO linear de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = x$.

Trata-se de uma equação não homogénea, $g(x) = x$, com coeficientes constantes

$$a = 1,\ b = -4 \text{ e } c = 5.$$

Começamos por resolver a correspondente equação homogénea.

A sua equação característica

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$

tem duas raízes complexas conjugadas, $m_1 = 2 + i$ e $m_2 = 2 - i$.

Como $\Delta < 0$ então a sua solução geral é dada por

$$y_h = e^{2x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Tendo em conta que $m = 0$ não é raiz da equação característica procuramos uma solução particular na forma

$$y_p = Ax + B.$$

Assim, para que seja solução da equação inicial tem de verificar a equação, isto é,

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} - 4\frac{dy_p}{dx} + 5y_p = x$$

Substituindo obtemos

$$0 - 4A + 5(Ax + B) = x \Leftrightarrow 5Ax + 5B - 4A = x.$$

Da igualdade de polinómios temos um sistema linear de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} 5A = 1 \\ 5B - 4A = 0 \end{cases}.$$

Daí resulta $A = 1/5$ e $B = 4/25$, logo obtemos $y_p = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ e por conseguinte a solução geral da equação não homogénea é dada por

$$y = y_h + y_p = e^{2x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + \frac{x}{5} + \frac{4}{25}.$$

Proposição III.81. [EDO em que o termo independente é o produto de um polinómio por uma exponencial**]**

Se $g(x)$ é uma exponencial, e^{rx}, $r \in \mathbb{R}$, ou produto de um polinómio por uma exponencial tal que

1) $g(x) = \alpha e^{rx}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
2) $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{rx}$;
3) $g(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, x^j\right)e^{rx}$, $n\ \geq 2$;

então a solução particular y_p é do tipo indicado pela tabela:

	$m = r$ não é raiz de (7)	$m = r$ é raiz simples de (7)	$m = r$ é raiz dupla de (7)
1)	$y_p = Ae^{rx}$	$y_p = Axe^{rx}$	$y_p = Ax^2e^{rx}$
2)	$y_p = (Ax + B)e^{rx}$	$y_p = (Ax^2 + Bx)e^{rx}$	$y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^{rx}$
3)	$y_p = \left(\sum_{j=0}^{n} A_j\, x^j\right)e^{rx}$	$y_p = \left(\sum_{j=0}^{n} A_j\, x^{j+1}\right)e^{rx}$	$y_p = \left(\sum_{j=0}^{n} A_j\, x^{j+2}\right)e^{rx}$

Exemplo III.82. [EDO em que o termo independente é o produto de um polinómio por uma exponencial]

Consideremos a EDO linear de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = xe^{-x}$.

Trata-se de uma equação não-homogénea, $g(x) = xe^{-x}$, com coeficientes constantes

$$a = 1,\ b = 0 \text{ e } c = 4.$$

Começamos por resolver a correspondente equação homogénea.

A sua equação característica

$$m^2 + 4 = 0$$

tem duas raízes complexas conjugadas, $m_1 = 2i$ e $m_2 = -2i$.

Como $\Delta < 0$ então a sua solução geral é dada por

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Tendo em conta que $r = -1$ não é raiz da equação característica procuramos uma solução particular na forma

$$y_p = (Ax + B)e^{-x}.$$

Determinamos as derivadas de 1ª e 2ª ordem

$$\frac{dy_p}{dx} = (-Ax - B + A)e^{-x} \quad \wedge \quad \frac{d^2y_p}{dx^2} = (Ax + B - 2A)e^{-x}$$

Como

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} + 4y_p = xe^{-x}$$

então

$$(Ax + B - 2A)e^{-x} + 4(Ax + B)e^{-x} = xe^{-x} \Leftrightarrow 5Ax + 5B - 2A = x$$

Assim temos um sistema linear de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} 5A = 1 \\ 5B - 2A = 0 \end{cases}.$$

Daí resulta $A = 1/5$ e $B = 2/25$, logo obtemos $y_p = \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{25}\right)e^{-x}$ e por conseguinte a solução

geral da equação não homogénea é dada por

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{25}\right)e^{-x}.$$

Proposição III.83. [EDO em que o termo independente é uma função trigonométrica (seno ou cosseno)]

Se $g(x) = \alpha \sin(\theta x)$ ou $g(x) = \alpha \cos(\theta x)$ então uma solução particular y_p é determinada por

$$y_p = \begin{cases} A\sin(\theta x) + B\cos(\theta x) & se \quad m = \theta i \text{ não é raiz de } (7) \\ A\,\mathrm{x}\sin(\theta x) + B\,\mathrm{x}\cos(\theta x) & se \quad m = \theta i \text{ é raiz de } (7) \end{cases}$$

Exemplo III.84. [EDO em que o termo independente é uma função trigonométrica (seno ou cosseno)]

Consideremos a EDO linear de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$.

Trata-se de uma equação não-homogénea, $g(x) = \sin x$, com coeficientes constantes

$$a = 1,\ b = 0 \text{ e } c = 1.$$

Começamos por resolver a correspondente equação homogénea.

A sua equação característica

$$m^2 + 1 = 0$$

tem duas raízes complexas conjugadas,

$$m_1 = i \text{ e } m_2 = -i.$$

Como $\Delta < 0$ então a sua solução geral é dada por

$$y_h = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Atendendo a que $m = i$ é raiz da equação característica procuramos uma solução particular na forma

$$y_p = A\ x\sin(x) + B\ x\cos(x).$$

Determinamos as derivadas de 1ª e 2ª ordem

$$\frac{dy_p}{dx} = A(\sin(x) + x\ \cos(x)) + B(\cos(x) - x\ \sin(x))$$
$$= (Ax + B)\cos(x) + (A - Bx)\ \sin(x)$$

e

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = A\cos(x) - (Ax + B)\sin(x) - B\sin(x) + (A - Bx)\ \cos(x)$$

isto é,

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = (-Bx + 2A)\ \cos(x) + (-Ax - 2B)\sin(x).$$

Como

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} + y_p = \sin x$$

então

$$(-Bx + 2A)\cos(x) + (-Ax - 2B)\sin x + \ A\ \ x\sin(x) + B\ \ x\cos(x)\ = \sin x$$

ou seja,

$$2A\cos(x) + (-2B)\sin x = \sin x$$

Sabendo que $\{\cos(x), \sin x\}$ é um conjunto fundamental de soluções, temos então um sistema linear de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} 2A = 0 \\ -2B = 1 \end{cases}.$$

Daí resulta $A = 0$ e $B = -1/2$, logo obtemos

$$y_p = -\frac{x\cos x}{2}$$

e por conseguinte a solução geral da equação não homogénea é dada por

$$y = y_h + y_p = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - \frac{x\cos x}{2}.$$

Proposição III.85. [EDO em que o termo independente é o produto de uma função trigonométrica (seno ou cosseno) por uma exponencial]

Se $g(x) = \alpha \sin(\theta x)\, e^{\beta x}$ ou $(x) = \alpha \cos(\theta x) e^{\beta x}$ então uma solução particular y_p é determinada por

$$y_p = \begin{cases} A \sin(\theta x) e^{\beta x} + B \cos(\theta x)\, e^{\beta x} & se \quad m = \beta + \theta i \text{ não é raiz de } (7) \\ A\, \mathrm{x} \sin(\theta x) e^{\beta x} + B\, \mathrm{x} \cos(\theta x)\, e^{\beta x} & se \quad m = \beta + \theta i \text{ é raiz de } (7) \end{cases}$$

Quando o termo independente não está incluído na classe restrita das funções atrás referidas podemos recorrer a um método mais geral – embora de aplicação mais difícil – conhecido por método de variação das constantes arbitrárias.

Proposição III.86. [Método de variação das constantes arbitrárias]

Se $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação homogénea (6) em I, então uma solução particular da equação não homogénea (5) em I é determinada por $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, onde $\frac{du_1}{dx}$ e $\frac{du_2}{dx}$ satisfazem

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} \quad \wedge \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

Demonstração:

Seja $\{y_1, y_2\}$ um conjunto fundamental de soluções da equação homogénea (6) em I. Então a sua solução geral é definida por $y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Assumimos que essas constantes são substituídas por expressões de x, $u_1(x)$ e $u_2(x)$. Assim, pretendemos determinar uma solução particular de (5) de modo que

$$y_p = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2.$$

Determinamos agora

$$\frac{dy_p}{dx} = \frac{du_1}{dx}\ y_1 + \frac{dy_1}{dx}\ u_1(x) + \frac{du_2}{dx}\ y_2 + \frac{dy_2}{dx}\ u_2(x).$$

Se fizermos

$$\frac{du_1}{dx}\ y_1 + \frac{du_2}{dx}\ y_2 = 0$$

então a primeira derivada de y_p satisfaz

$$\frac{dy_p}{dx} = \frac{dy_1}{dx}\ u_1(x) + \frac{dy_2}{dx}\ u_2(x).$$

Derivando mais uma vez vem

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2}\ u_1(x) + \frac{dy_1}{dx}\frac{du_1}{dx} + \frac{d^2y_2}{dx^2}\ u_2(x) + \frac{dy_2}{dx}\frac{du_2}{dx}.$$

Sabemos que

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + b\frac{dy_1}{dx} + cy_1 = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{d^2y_2}{dx^2} + b\frac{dy_2}{dx} + cy_2 = 0.$$

Além disso,

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} + b\frac{dy_p}{dx} + cy_p = g(x).$$

Então substituindo y_p, $\frac{dy_p}{dx}$ e $\frac{d^2y_p}{dx^2}$ na equação (5) obtemos

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{du_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{du_2}{dx} = g(x).$$

Deste modo, temos um sistema linear de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} \\ \frac{du_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

Como o wronskiano $W(y_1, y_2)$ é não nulo em I então o sistema é possível e determinado. Usando a regra de Cramer obtemos

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{det\begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -\frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

e

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{det\begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ \frac{dy_1}{dx} & g(x) \end{bmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

Exemplo III.87. [Resolução de uma EDO pelo método de variação das constantes arbitrárias]

Consideremos a EDO linear de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x\ , x\ \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Trata-se de uma equação não-homogénea, $g(x) = \sec x$, com coeficientes constantes

$$a = 1,\ b = 0 \text{ e } c = 1.$$

Começamos por resolver a correspondente equação homogénea.

A sua equação característica

$$m^2 + 1 = 0$$

tem duas raízes complexas conjugadas, $m_1 = i$ e $m_2 = -i$.

Como $\Delta < 0$ então a sua solução geral é dada por

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e $C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Sendo $\{\cos(x), \sin(x)\}$ um conjunto fundamental de soluções em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, procuramos uma solução particular na forma

$$y_p = u_1 \cos(x) + u_2 \sin(x).$$

Pela proposição anterior sabemos que u_1 e u_2 satisfazem

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)} = -\sin(x)\sec x = -\tan x,$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)} = -\cos(x)\sec x = 1$$

uma vez que $W(y_1, y_2) = 1$.

Por primitivação vem

$$u_1 = \int -\tan x \; dx = \ln(\cos x) + \; C_1 \quad \wedge \quad u_2 = \int 1 \, dx = x + \; C_2$$

Escolhendo por exemplo $C_1 = C_2 = 0$, obtemos

$$y_p = \ln(\cos x)\cos(x) + x\sin(x).$$

Por fim, a solução geral da equação não homogénea é dada por

$$y = y_h + y_p = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \ln(\cos x)\cos(x) + x\sin(x).$$

De seguida exemplificamos a utilização de séries de potências na obtenção da solução de problemas de valores iniciais

Exemplo III.88. [Uso das séries de potências na resolução de um problema de valores iniciais]

Pretendemos resolver o problema de valores iniciais definido por

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dx}(0) = -1 \end{cases}.$$

O Teorema III.52 permite-nos garantir a existência de uma solução única para este problema.

Assumimos que a solução é da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n.$$

Note-se que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n\, x^{n-1} \text{ e } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n\, x^{n-2}.$$

Por definição de solução escrevemos

$$f''(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = f(x).$$

Ou seja,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n\, x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n.$$

Deste modo, temos

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = c_n \Leftrightarrow c_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} c_n, \text{ para } n \geq 0.$$

Usamos, agora, as condições iniciais para obter c_0 e c_1,

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c_0 = 1 \;\text{ e }\; f'(0) = -1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

Assim, estamos em condições de encontrar uma expressão para c_n. Obtemos, sucessivamente,

$c_2 = \frac{1}{2} c_0 = \frac{1}{2!}$, $c_3 = \frac{1}{6} c_1 = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}$, $c_4 = \frac{1}{12} c_2 = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}$, , …

$c_5 = \frac{1}{20} c_3 = -\frac{1}{120} = -\frac{1}{5!}$, etc. Logo,

$$c_n = (-1)^n \frac{1}{n!}, \text{ para } n \geq 0.$$

Então o desenvolvimento em série de Mac-Laurin de f (função que define a única solução do problema de valores iniciais) é dado por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^n.$$

Note-se que, recordando o desenvolvimento em série da exponencial,

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$,e constatando que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n$, podemos concluir que a solução do problema dado é $y = e^{-x}$.

Exemplo III.89. [Uso das séries de potências na resolução de um problema de valores iniciais]

Queremos resolver o problema de valores iniciais definido por

$$\begin{cases} x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dx}(0) = 0 \end{cases}.$$

Uma vez que o Teorema III.52 garante a existência de uma solução única vamos, tal como fizemos no exemplo anterior, assumir que a solução é da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n.$$

Sabemos que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n\, x^{n-1} \text{ e } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n\, x^{n-2},$$

logo, por definição de solução escrevemos

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f''(x) + x f'(x) = -x^2 f(x).$$

Por um lado, escrevemos o 1º membro como se segue

$$x^2 f''(x) + x f'(x) = x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n\, x^{n-2}}_{f''(x)} + x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n\, x^{n-1}}_{f'(x)} =$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n\, x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n\, x^n =$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} [n(n-1) + n] c_n\, x^n + c_1 x = c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 c_n\, x^n.$$

Por outro, o 2º membro pode escrever-se como

$$-x^2 f(x) = -x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-c_n)\, x^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-c_{n-2})\, x^n.$$

Deste modo, temos

$$x^2 f''(x) + x f'(x) = -x^2 f(x) \Leftrightarrow c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 c_n\, x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (-c_{n-2})\, x^n .$$

Ou seja,

$$c_1 = 0 \text{ e } n^2 c_n = -c_{n-2} \Leftrightarrow c_n = -\frac{1}{n^2} c_{n-2}, \text{ para } n \geq 2.$$

Usamos, agora, as condições iniciais para obter o valor de c_0 e confirmar o valor de c_1,

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c_0 = 1 \text{ e } f'(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

Assim, estamos em condições de encontrar uma expressão para c_n. Obtemos, sucessivamente,

$c_2 = -\frac{1}{4}c_0 = -\frac{1}{4}$, $c_3 = -\frac{1}{9}c_1 = 0$, $c_4 = -\frac{1}{16}c_2 = \frac{1}{(16)(2)^2}$, $c_5 = 0$,

$c_6 = -\frac{1}{36}c_4 = \frac{1}{(256)(24)^2}\ldots$

Verificamos que os coeficientes de ordem impar são nulos enquanto os de ordem par são dados por

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}, \text{ para } k \geq 0.$$ [xxii]

Consequentemente, obtemos a série de potências (convergente em $\mathbb{R}$)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}.$$

que define uma função real de variável real f.

Então podemos concluir que a solução do problema de valores iniciais é representada por

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}.$$ [xxiii]

[xxii] Recorde que $0! = 1$.

[xxiii] A função definida por $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$ é designada por função de Bessel de ordem zero.

Exercícios III.90.

1. Verifique se y_p é uma solução particular da equação diferencial linear não-homogénea com coeficientes constantes e, em caso afirmativo, calcule a sua solução geral:

i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12,$ $y_p = 3$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 6x - 4x^3,$ $y_p = x^3$

iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \cos x,$ $y_p = -\frac{1}{5}\cos x$

iv) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^{4x},$ $y_p = \frac{1}{15}e^{4x}$

v) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 10e^x,$ $y_p = 2xe^x$

vi) $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 2e^{3x},$ $y_p = x^2e^{3x}$

Resposta: i) $y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + 3$; ii) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + x^3$;

iii) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{5}\cos x$; iv) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + \frac{1}{15}e^{4x}$;

iv) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^x + 2xe^x$; vi) $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^{3x}$.

2. Resolva as seguintes equações diferenciais de 2ª ordem com coeficientes constantes:

i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 2x + 1$

iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = e^{-5x}$

iv) $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = x^2e^{6x}$

v) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = \sin x$

vi) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{-x}\cos x$

Resposta: i) $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}$; ii) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$;

iii) $y = (C_1 + C_2x)e^{5x} + \frac{e^{-5x}}{100}$; iv) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{5x} + \frac{e^{6x}}{4}(2x^2 - 6x + 7)$

v) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3\sin x)$;

vi) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{e^{-x}}{10}(-2\cos x + 4\sin x)$.

3. Resolva as seguintes equações diferenciais de 2ª ordem com coeficientes constantes:

i) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = -3$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 + x$

iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 9\,e^x$

iv) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 3\,x\,e^x$

v) $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = e^{5x}$

vi) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin(2x)$

Resposta: i) $y = C_1 + C_2e^x + 3x$; ii) $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$;

iii) $y = C_1e^x + C_2e^{4x} - 3xe^x$; iv) $y = C_1e^x + C_2e^{4x} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)e^x$;

$v)$ $y = (C_1 + C_2x)e^{5x} + \frac{x^2e^{5x}}{2}$;

vi) $y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{\sin(2x) - 4x\cos(2x)}{16}$.

APÊNDICE I

O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS – ALGUMAS PROPRIEDADES ELEMENTARES

Distinguimos vários tipos de números, nomeadamente:

- os números naturais, cujo conjunto designamos por

  $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots, k-1, k, k+1, \dots\}$;

- os números inteiros, cujo conjunto designamos por

  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, k-1, k, k+1, \dots\}$;[i]

- os números racionais ou frações (que são razões entre números inteiros, isto é, que se podem escrever na forma $\frac{h}{k}$, onde h e k são inteiros e $k \neq 0$), cujo conjunto designamos por

  $\mathbb{Q} = \left\{x : x = \frac{h}{k},\ h, k \in \mathbb{Z} \wedge\ k \neq 0\right\}$;[ii]

- os números **reais** (racionais e irracionais, sendo que estes últimos não se podem expressar como quociente de dois números inteiros) que se podem representar por uma dízima finita ou infinita, cujo conjunto designamos por $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ [iii];

- os números complexos, cujo conjunto designamos por

  $\mathbb{C} = \{z : z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R} \wedge\ i^2 = -1\}$.

---

[i] $\mathbb{Z}$ do termo alemão Zahlen que significa números.

[ii] $\mathbb{Q}$ da palavra quociente.

[iii] O símbolo $+\infty$ (lê-se mais infinito) é um conceito abstrato que representa algo superior a qualquer número real;
o símbolo $-\infty$ (lê-se menos infinito) é um conceito abstrato que representa algo inferior a qualquer número real. Assim, é importante salientar que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais.

Observamos que $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Além disso, sabemos que todo o número racional pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica, sendo conveniente recordar que os números inteiros são números racionais.

Exemplo A.1.1. [Dízimas finitas ou infinitas periódicas]

Damos, de seguida, alguns exemplos de números racionais [iv]

$$0{,}0205 = \frac{205}{10000} = \frac{41}{2000}; \qquad 0{,}363636\ldots = 0,(36) = \frac{36}{99} = \frac{4}{11};$$

$$5{,}38 = \frac{538}{100} = \frac{269}{50}; \qquad 21{,}5414141\ldots = 21{,}5(41) = \frac{10663}{495}.$$

Todavia, existem números cuja representação decimal não é nem finita nem infinita periódica. Esses números chamam-se irracionais.

Exemplo A.1.2. [Números irracionais]

São números irracionais todas as raízes quadradas de números naturais que não sejam quadrados perfeitos[v]. Assim, dizemos que

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \cdots, \sqrt{n},$$

[iv] Dizemos que $0{,}363636\ldots$ e $21{,}5414141\ldots$ são dízimas infinitas periódicas de período, respetivamente, 36 e 41; usamos a notação (36) e (41) para indicar os algarismos (do período) que se repetem indefinidamente.

[v] Dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é um quadrado perfeito se existe um número natural m tal que $n = m^2$.

são números irracionais desde que $n \in \mathbb{N}$ e n não seja um quadrado perfeito. Note-se que os números anteriores são representáveis por dízimas infinitas não periódicas.

Além disso, também são irracionais os números resultantes da adição, subtração, multiplicação e divisão de um número irracional com um número racional.

Por exemplo, $1+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{\sqrt{8}-1}{3}$ são números irracionais.

São igualmente irracionais os números $\sqrt[3]{4}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[4]{2}$ e $\sqrt[4]{12}$.

Contudo, <u>não</u> são irracionais os números $\sqrt{4}, \sqrt{\frac{1}{25}}, \sqrt[4]{16}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{-8}, \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$. Porquê?

São, também, irracionais alguns números interessantes como:

(i) o número pi, $\pi = 3{,}14159265358979323846 \ldots$,

(ii) o número de Neper[vi], $e = 2{,}71828182845904523536 \cdots$;

(iii) e o número de ouro[vii], $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887 \cdots$, que se obtém do seguinte modo

$$\phi = \frac{a}{b} > 0, \text{ sendo } \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{b}}{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \phi = \frac{\phi+1}{\phi} \Leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

[vi] e é o valor aproximado de $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$, para N suficientemente grande, ou seja, $e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

[vii] Também conhecido por proporção divina ou razão de ouro.

Assim, dizemos que existem dois tipos de números irracionais:

- números algébricos – os que se podem definir como raízes duma equação algébrica de coeficientes inteiros;
- números transcendentes – os que não se podem definir como raízes duma equação algébrica de coeficientes inteiros, ou seja, os que transcendem os limites da álgebra.

Os números e e π são números transcendentes e ϕ é algébrico. Habitualmente consideram-se os seguintes valores aproximados para estes números: $e \approx 2{,}7$, $\pi \approx 3{,}14$ e $\phi \approx 1{,}6$.

Consideremos em $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais) uma relação de ordem total (em sentido lato) designada por $\preccurlyeq$, isto é:

(i) $\preccurlyeq$ é reflexiva, ou seja,

$$a \preccurlyeq a, \text{ para todo } a \in \mathbb{R};$$

(ii) $\preccurlyeq$ é antissimétrica em sentido lato, ou seja,

$$\text{se } a \preccurlyeq b \text{ e } b \preccurlyeq a \text{ então } a = b, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R};$$

(iii) $\preccurlyeq$ é transitiva, ou seja,

$$\text{se } a \preccurlyeq b \text{ e } b \preccurlyeq c \text{ então } a \preccurlyeq c, \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{R};$$

(iv) $\preccurlyeq$ é dicotómica, ou seja,

$$a \preccurlyeq b \text{ ou } b \preccurlyeq a, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dizemos, neste caso, que $\mathbb{R}$ é um conjunto totalmente ordenado, ou, apenas, conjunto ordenado.

Exemplo A.1.3. [Relação de ordem em $\mathbb{R}$]

É fácil verificar que a relação "menor ou igual" é uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, sabemos que no conjunto dos números reais se definem duas operações internas:

$(x, y) \mapsto x + y$ (adição) e $(x, y) \mapsto x \times y$ (multiplicação).

Neste contexto dizemos que $(\mathbb{R}, +, \times)$ é um corpo, visto que, além dos axiomas anteriores, podemos afirmar que, no conjunto dos números reais:

(i) A adição e a multiplicação são operações comutativas, ou seja,

$$a + b = b + a \text{ e } a \times b = b \times a, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R};$$

(ii) A adição e a multiplicação são operações associativas, ou seja,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ e } (a \times b) \times c = a \times (b \times c), \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{R};$$

(iii) Existe elemento neutro para a adição, ou seja,

$$a + 0 = 0 + a = a, \text{ para todo } a \in \mathbb{R};$$

(iv) Existe elemento neutro para a multiplicação, ou seja,

$$a \times 1 = 1 \times a = a, \text{ para todo } a \in \mathbb{R};$$

(v) Todo o número real tem oposto aditivo (ou simétrico), ou seja,

$$a + (-a) = (-a) + a = 0, \text{ para todo } a \in \mathbb{R};$$

(vi) Todo o número real não nulo tem oposto multiplicativo (ou inverso), ou seja,

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1, \text{ para todo } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

(vii) A multiplicação é distributiva relativamente à adição, ou seja,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, atendendo a que

(viii) se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$;

(ix) se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ então $0 \leq ab$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

dizemos que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ é um corpo (totalmente) ordenado.

Definição A.1.4. [Majorantes e minorantes de um conjunto]

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$[viii]. Dizemos que:

(i) A é limitado superiormente à direita ou majorado se existe um número real L tal que $x \leq L$ para todo $x \in A$. Chamamos a $L \in \mathbb{R}$ majorante ou limite superior de A;

(ii) A é limitado inferiormente à esquerda ou minorado se existe um número real ℓ tal que $x \geq \ell$ para todo $x \in A$. Chamamos a $\ell \in \mathbb{R}$ minorante ou limite inferior de A;

(iii) A é limitado se for simultaneamente limitado superiormente e limitado inferiormente.

No que se segue representamos o conjunto de majorantes de A por $C_M(A)$ e o conjunto de minorantes de A por $C_m(A)$.

Definição A.1.5. [Elementos notáveis de um conjunto ordenado]

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$. Dizemos que:

(i) $s \in \mathbb{R}$ é o supremo de A – e escrevemos $s = \sup(A)$ – se $s \leq L$ para todo $L \in C_M(A)$, ou seja, se s é o menor dos majorantes;

(ii) $i \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A – e escrevemos $i = \inf(A)$ – se $i \geq \ell$ para todo $\ell \in C_m(A)$, ou seja, se i é o maior dos minorantes;

(iii) $M \in \mathbb{R}$ é máximo de A – e escrevemos $M = \max(A)$ – se $M = \sup(A)$ e $M \in A$;

(iv) $m \in \mathbb{R}$ é mínimo de A – e escrevemos $m = \min(A)$ – se $m = \inf(A)$ e $m \in A$.

[viii] O conjunto vazio é um conjunto que não possui elementos e é denotado por $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Finalmente, recordamos outra propriedade fundamental do conjunto dos números reais[ix]:

«Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo».

Consequentemente, também podemos afirmar que:

«Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente tem ínfimo».

Neste contexto dizemos que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ é um corpo ordenado completo.

Alguns tipos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ podem ser representados por intervalos.

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, um intervalo de extremidades a e b é um subconjunto que se pode definir do seguinte modo:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}:\ x\ \geq a \wedge x\ \leq b\}$ ou $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}:\ x > a \wedge x < b\}$ ou

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}:\ x\ \geq a \wedge x < b\}$ ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}:\ x > a \wedge x \leq b\}$.

Além disso, um intervalo ilimitado pode ser representado por

$]-\infty, c[= \{x \in \mathbb{R}:\ x < c\}$ ou $]-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R}:\ x\ \leq c\}$ ou

$[c, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}:\ x > c\}$ ou $]c, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}:\ x\ \geq c\}$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Relembramos que o conjunto $\mathbb{R}$ também é um intervalo pois $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Exemplos A.I.6. [Elementos notáveis de um intervalo de números reais]

a) Seja $A = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x < 7\}$. Verificamos que:

(i) A é limitado superiormente, sendo $C_M(A) = [7, +\infty[$ e $\sup(A) = 7$;

(ii) A é limitado inferiormente, sendo $C_m(A) =]-\infty, -3]$ e $\inf(A) = -3$;

[ix] Usualmente conhecida por axioma do supremo ou axioma da continuidade ou ainda axioma da completude.

(iii) A não tem máximo visto que $\sup(A) = 7 \notin A$, todavia A tem mínimo $m = -3$ já que $\inf(A) = -3 \in A$.

b) Seja $A =]-8, +\infty[$. Então A é limitado inferiormente, sendo $C_m(A) =]-\infty, -8]$ e $\inf(A) = -8 \notin A$, logo A não tem mínimo. Além disso, A não é limitado superiormente.

Exemplos A.I.7. [Elementos notáveis de um conjunto de números reais]

Indicamos, caso existam, os elementos notáveis[x], de cada um dos subconjuntos de $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$, a seguir indicados:

(i) $B = \left\{x \in \mathbb{R}: x = 1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

$B = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$ é limitado inferiormente, sendo

$C_m(B) =]-\infty, 0]$ e $\inf(B) = 0 \in B$, logo B tem mínimo $m = 0$.

Embora não tenha máximo, o conjunto B também é limitado superiormente, uma vez que $C_M(B) = [1, +\infty[$ e $\sup(B) = 1 \notin B$.

(ii) $C = \left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{1+(-1)^n n}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

C é limitado superiormente e inferiormente, pois verificamos que

$$-1 < \frac{1+(-1)^n n}{n} \leq \frac{3}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso temos

$$C_M(C) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[, \ C_m(C) =]-\infty, -1],$$

$$\sup(C) = \frac{3}{2} \in C \text{ e } \inf(C) = -1 \notin C.$$

Logo, C não tem mínimo mas tem máximo $M = \frac{3}{2}$.

(iii) $\mathbb{N}$;

[x] Recorde a Definição A.1.5.

$\mathbb{N}$ é limitado inferiormente, sendo $C_m(\mathbb{N}) =]-\infty, 1]$ e

$\inf(\mathbb{N}) = 1 \in \mathbb{N}$, logo $\mathbb{N}$ tem mínimo $m = 1$. Todavia, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.

(iv) $\mathbb{Q}$;

$\mathbb{Q}$ não é limitado inferiormente nem é limitado superiormente.

Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais e os pontos de uma reta Isto é, podemos associar a qualquer número real um (e um só) ponto de uma reta onde definimos, previamente, uma origem e sentido. Designamos essa reta por reta real.

De seguida, vamos definir em $\mathbb{R}$ uma distância (ou norma), que designaremos por d.

Definição A.1.8. [Distância em $\mathbb{R}$]

Seja $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = |x - y|$.[xi]

Chamamos distância entre dois números $x, y \in \mathbb{R}$ ao número real

$d(x, y) = |x - y|$.

Comecemos por recordar o conceito de módulo ou valor absoluto de um número real.

[xi] $\mathbb{R}^2$ representa o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Definição A.1.9. [Módulo ou valor absoluto de um número real]

Chamamos valor absoluto ou módulo de $a \in \mathbb{R}$ ao número $|a|$ assim definido:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{se } a > 0 \\ 0, \text{se } a = 0 \\ -a, \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Deste modo $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-3| = 3$, $\left|\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2} - 1$, $|3 - \pi| = \pi - 3$.

Repare-se que usámos o conceito de valor absoluto para definir a distância entre dois números reais quaisquer.

Sejam a e b são as abcissas de dois pontos A e B da reta real. A distância entre A e B, denotada por $d(A, B)$, é o comprimento do segmento $[AB]$, ou seja,

$d(A, B)$= $d(B, A)$ dado que $|b - a| = |a - b|$.

Assim, a distância do ponto A à origem O da reta real é dada por $d(A, O)$=$|a - 0| = |a|$, o que está de acordo com as afirmações anteriores.

Propriedades A.1.10. [Igualdades e desigualdades com módulos]

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Verificamos que

(i) $-|x| \leq x \leq |x|$;

(ii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;

(iii) $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$;

(iv) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$;

(v) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(vi) $|-x| = |x|$;

(vii) $|xy| = |x||y| \ \wedge \ |x|^2 = x^2$;

(viii) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(ix) $|x + y| \geq \left||x| - |y|\right|$;

(x) $|x - y| \leq |x| + |y|$;

(xi) $|x-y| \geq ||x|-|y||$;

(xii) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$;

(xiii) $|x| = a \Leftrightarrow x^2 = a^2$;

(xiv) $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2$;

(xv) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Exercícios A.1.11. [Resolução de equações e inequações com módulos]

1. Utilizando as propriedades anteriores, resolva as equações:

(i) $|x-2| = 6$. Resposta: $S = \{-4, 8\}$;

(ii) $|2x+1| = x+2$. Resposta: $S = \{-1, 1\}$;

(iii) $\left|\frac{x-3}{2x-1}\right| = 1$. Resposta: $S = \left\{-2, \frac{4}{3}\right\}$;

(iv) $|x-1| + |x+6| = 13$. Resposta: $S = \{-9, 4\}$;

(v) $|3-|4x-1|| = 6$. Resposta: $S = \left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$.

2. Determine, na forma de intervalos de números reais, o conjunto de todos os números que satisfazem cada desigualdade:

(i) $|x-7| < 2$. Resposta: $S =]5, 9[$;

(ii) $|5x-8| < -1$. Resposta: $S = \{\ \}$;

(iii) $1 < |x-1| \leq 3$. Resposta: $S = [-2, 0[\cup]2, 4]$;

(iv) $2x-7+|x-1| \geq 0$. Resposta: $S = \left]\frac{8}{3}, +\infty\right[$.

Tendo em conta o que dissemos anteriormente, podemos afirmar que a distância, d, definida em $\mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades.

Propriedades A.1.12. [Propriedades da distância em $\mathbb{R}$]

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Verificamos que

(i) $d(x, y) \geq 0$;

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;[xii]

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.[xiii]

No que se segue, consideraremos que, em $\mathbb{R}$, está definida a distância

$$d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ tal que } d(x, y) = |x - y|.$$

Definição A.1.13. [Vizinhança de um ponto em $\mathbb{R}$]

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$.

Chamamos intervalo aberto de centro em a e raio δ, ao conjunto de números reais $I_\delta(a)$ definido por

$$I_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \delta\} =]a - \delta, a + \delta[;$$

e intervalo fechado de centro em a e raio δ, ao conjunto de números reais $J_\delta(a)$ definido por

$$J_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| \leq \delta\} = [a - \delta, a + \delta].$$

Finalmente, dizemos que um conjunto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ é uma vizinhança de a se existe $\delta > 0$ tal que $I_\delta(a) \subseteq \mathcal{V}$.

Por vezes, também chamamos vizinhança de a, ao intervalo aberto de centro em a. Nestes casos, quando escrevemos $\mathcal{V}_\delta(a)$ estamos a referir um intervalo.

[xii] Simetria.

[xiii] Desigualdade triangular.

Definição A.1.14. [Pontos interiores, pontos exteriores e pontos fronteiros de um conjunto]

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Dizemos, por um lado, que a é um ponto interior de A se existe pelo menos uma vizinhança de a contida em A; por outro lado, se existe pelo menos uma vizinhança de a contida no conjunto complementar de A[xiv] dizemos a é um ponto exterior de A. Finalmente, se a não é ponto interior nem ponto exterior (de A) dizemos que a é um ponto fronteiro de A.

O conjunto de todos os pontos interiores de A constitui o interior do conjunto A, e é designado por $int(A)$, o conjunto de todos os pontos exteriores o seu exterior, designado por $ext(A)$, e o conjunto de todos os pontos fronteiros a sua fronteira, designada por $fr(A)$.

Note-se que $\mathbb{R} = int(A) \cup fr(A) \cup ext(A)$.

O conjunto A diz-se aberto se coincide com o seu interior e A diz-se fechado se contem a sua fronteira.

Note-se que existem conjuntos que não são abertos nem fechados.

Contudo, $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são simultaneamente abertos e fechados, sendo os únicos conjuntos nestas condições.

Exemplos A.1.15. [Conjunto aberto e conjunto fechado]

1. O intervalo aberto $]3,7[$ é um conjunto aberto, visto que $]3,7[= int(]3,7[)$; o intervalo fechado $[3,7]$ é um conjunto fechado, uma vez que

$fr([3,7]) = \{3,7\} \subset [3,7]$; o intervalo $]3,7]$ não é um conjunto aberto nem um conjunto fechado.

Note-se que $fr(]3,7[) = fr([3,7]) = fr(]3,7]) = \{3,7\}$.

[xiv] Recorde que $A^c = \{x \in \mathbb{R}: x \notin A\}$ é o conjunto complementar de A.

2. $A = \{-1, \sqrt{11}, 10^3\}$ é um conjunto fechado. Além disso $A = fr(A)$.

3. $\mathbb{N}$ é um conjunto fechado e $\mathbb{N} = fr(\mathbb{N})$.

4. $A = [-5, 0[\cup]-1, 7]$ é um conjunto fechado, sendo $fr(A) = \{-5,7\} \subset A$.

5. $\left\{x \in \mathbb{R}: x \geq \frac{1}{6}\right\}$ é um conjunto fechado;

6. O conjunto $\left[-\sqrt{2},\ 3\right[\cup\{\pi\}$ não é aberto nem fechado.

Definição A.1.16. [Pontos de acumulação e pontos isolado de um conjunto]

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Dizemos que a é um ponto acumulação de A se toda a vizinhança de a contém, pelo menos, um ponto de A, distinto de a.[xv]

Se a não é um ponto de acumulação (de A) dizemos que a é um ponto isolado de A.

O conjunto de todos os pontos de acumulação de A chama-se conjunto derivado de A e designa-se por A'. A reunião de A com o seu conjunto derivado chama-se fecho ou aderência de A e designa-se por $\bar{A}$, isto é, $\bar{A} = A \cup A'$.

Exemplos A.1.17. [Conjunto derivado e fecho de um conjunto]

Se $A = \left[-\sqrt{2},\ 3\right[\cup\{\pi\}$ então $A' = \left[-\sqrt{2},\ 3\right]$ e o número π é um ponto isolado.

Repare-se que, embora $\left[-\sqrt{2},\ 3\right[\cup\{\pi\}$ não seja nem aberto nem fechado, o seu fecho, isto é, o conjunto $\bar{A} = A \cup A' = \left[-\sqrt{2},\ 3\right]\cup\{\pi\}$, é fechado.

[xv] Note-se que a pode não pertencer ao conjunto A.

APÊNDICE II

SUCESSÕES DE NÚMEROS REAIS – BREVE REVISÃO

Definição A.II.1 [Sucessão]

Dizemos que uma sucessão de números reais (ou, simplesmente, sucessão real) é uma aplicação u de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ definida por $u(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

É usual adotar a notação $u_n = u(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo esta expressão designada por termo geral da sucessão. Assim, a sequência infinita[i]

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots)$$

representa uma sucessão de números reais.

Note-se que os termos da sucessão estão ordenados, u_1 é o 1º termo, u_2 é o 2º termo, u_3 é o 3º termo, etc. Além disso, com exceção do primeiro termo u_1, qualquer outro termo u_k é precedido por $\mathrm{u}_{\mathrm{k}-1}$ e seguido por $\mathrm{u}_{\mathrm{k}+1}$.

Exemplos A.II.2 [Sucessões]

a) Seja $u\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação definida por $u_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Dizemos que $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ são os cinco primeiros termos da sucessão de termo geral $u_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Verificamos que $\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}$ são os seis primeiros termos de uma sucessão de números reais, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $a_n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

[i] Por vezes escrevemos apenas (u_n) em vez de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots\right)$ define uma sucessão de números reais de termo geral $b_n = \frac{3+(-1)^{n-1}}{4}$.

Exemplos A.II.3 [Progressões aritmética e geométrica]

a) Dados os números reais a e r, consideramos a sequência

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a+r, a+2\,r, \dots, a\ +(k-1)r, a+kr, a+(k+1)r, \dots).$$

Verificamos que a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos, $\mathrm{u_{k+1}} - \mathrm{u_k}$, é constante e igual a r.

Deste modo, dizemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de primeiro termo a e razão r, sendo o seu termo geral dado por

$$\mathrm{u_n} = a + (n-1)r.$$

b) Dados os números reais a e r, não nulos, consideramos a sequência

$$(\mathrm{u_n}) = (a, ar, ar^2, \dots, ar^{k-2}, ar^{k-1}, ar^k, \dots).$$

Dizemos então que $(\mathrm{u_n})$ é uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão r, uma vez que a divisão entre quaisquer dois termos consecutivos, $\frac{\mathrm{u_{k+1}}}{u_k}$, é constante e igual a r.

Neste caso o seu termo geral é dado por

$$\mathrm{u_n} = ar^{n-1}.$$

Exemplo A.II.4 [Sucessão dos números fatoriais]

Consideremos a sequência

$$(1, 1, 2, \dots, (k-1)!, k!, (k+1)!, \dots)$$

onde $k!$ representa o fatorial de k, ou seja, o produto de todos os números naturais de 1 a k, isto é,

$$\mathrm{k}! = (\mathrm{k})(\mathrm{k}-1)(\mathrm{k}-2)\dots(3)(2)(1).$$

Esta sucessão é definida pelo termo geral

$$a_n = n!$$[ii]

e pode, ainda, ser representada por recorrência

$$a_1 = 1 \ \wedge \ a_n = (n-1)\, a_{n-1}, n \ \geq 2.$$

Definição A.II.5 [Sucessões monótona e estritamente monótona]

Uma sucessão de números reais diz-se monótona quando é crescente ou decrescente.

Além disso, se uma sucessão de números reais é estritamente crescente ou estritamente decrescente dizemos que é estritamente monótona.[iii]

Deste modo,

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente se só se $u_n < u_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente se só se $u_n \leq u_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente se só se $u_n > u_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iv) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente se só se $u_n \geq u_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

[ii] Recorde que, por convenção, $0! = 1$.

[iii] Note-se que toda a sucessão estritamente monótona é monótona.

Exemplos A.II.6 [Sucessões monótona, estritamente monótona e não monótona]

(i) A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $\mathrm{u_n} = n^2 + 1$ é estritamente crescente, dado que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow u_n - u_{n+1} < 0 \Leftrightarrow n^2 + 1 - [(n+1)^2 + 1] < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2n - 1 < 0;$$

(ii) A sucessão de termo geral $\mathrm{v_n} = \frac{1}{n}$ é estritamente decrescente, visto que

$$v_n > v_{n+1} \Leftrightarrow v_n - v_{n+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iii) A sucessão de termo geral $\mathrm{w_n} = (-1)^n + 1$ não é monótona. *(Porquê?)*.

Definição A.II.7 [Subsucessão]

Chamamos subsucessão de $(\mathrm{u_n})$ a toda a restrição de $(\mathrm{u_n})$ a um subconjunto infinito $S \subset \mathbb{N}$.

Logo se $(\mathrm{s_n}) = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_{k-1}, s_k, s_{k+1}, \dots)$ é uma sequência crescente de números naturais então uma subsucessão de $(\mathrm{u_n})$ é representada por

$$(\mathrm{v_n}) = (u_{s_1}, u_{s_2}, u_{s_3}, \dots, u_{s_{k-1}}, u_{s_k}, u_{s_{k+1}} \ \dots).$$

Exemplo A.II.8 [Subsucessão dos termos de ordem ímpar]

Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1-(-1)^n}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada a sequência

$$(u_n) = (2, 0, \tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{2}{5}, 0, \dots)$$

construímos uma nova sequência

$$(\mathrm{v_n}) = (2,\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{2}{5}, \dots)$$

que representa uma subsucessão de u_n. Esta é definida pelo termo geral

$$\mathrm{v_n} = u_{2n-1} = \frac{2}{2n-1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo $s_n = 2n - 1$ a sequência crescente de números ímpares.

Definição A.II. 9 [Sucessão limitada]

Dizemos que

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente se existe um real M tal que

$\mathrm{u_n} \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente se existe um real m tal que

$\mathrm{u_n} \geq m$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada se é limitada superiormente e limitada inferiormente.

Exemplos A.II.10 [Sucessões limitada e não limitada]

a) A sucessão de termo geral $u_n = \frac{40n-5}{5n+2}$ é limitada.

Repare que podemos escrever

$$u_n = 8 - \frac{21}{5n+2}.$$

Esta sucessão é monótona crescente dado que

$$u_{n+1} - u_n = 8 - \frac{21}{5n+7} - \left(8 - \frac{21}{5n+2}\right) = 21\left(\frac{1}{5n+2} - \frac{1}{5n+7}\right) =$$

$$= \frac{105}{(5n+2)(5n+7)} > 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim sendo, a sucessão satisfaz

$$5 \leq u_n < 8, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Deste modo, a sucessão é limitada.

b) A sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $a_n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ é limitada.

Trata-se de uma progressão geométrica de primeiro termo $a = \sqrt{2}$ e razão $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Atendendo a que

$$u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos garantir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente.

Logo

$$0 < u_n \leq \sqrt{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e, consequentemente, a sucessão é limitada.

c) A sucessão definida por $v_n = \frac{n^2}{n+1}$ não é limitada superiormente (*Porquê?*). Repare que podemos escrever o termo geral na forma

$$v_n = \mathrm{n} - 1 + \frac{1}{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição A.II.11 [Limite de uma sucessão]

Dizemos que o número real L é o limite da sucessão $(\mathrm{u_n})$ se qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ a partir da qual se verifica

$$n \geq p \Longrightarrow |\mathrm{u_n} - L| < \varepsilon$$

Caso exista, escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{u_n} = L$.[iv]

[iv] Informalmente, isso significa que existe uma ordem a partir da qual os termos da sucessão se podem aproximar de L tanto quanto se queira.

Exemplos A.II.12 [Limite de sucessões]

a) Constatamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ uma vez que

para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma ordem $p = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ a partir da qual se verifica

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Por exemplo se escolhermos $\varepsilon = 10^{-3}$, obtemos $p = 1001$.[v]

b) Verificamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{40n-5}{5n+2} = 8$ uma vez que

para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma ordem[vi] $p = \left\lfloor \frac{21-2\varepsilon}{5\varepsilon} \right\rfloor$ a partir da qual se verifica

$$n \geq p \Rightarrow |\, \mathrm{u_n} - L| < \varepsilon.$$

Por exemplo se escolhermos $\varepsilon = 10^{-3}$, obtemos $p = 4201$.

Definição A.II.13 [Infinitésimo e infinitamente grande]

No caso particular em que, na Definição A.II.11, $L = 0$, ou seja, quando

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{u_n} = 0,$$

chamamos infinitésimo à sucessão $(\mathrm{u_n})$.

Quando a sucessão $(\mathrm{u_n})$ tende para $+\infty\,(-\infty)$, dizemos que $(\mathrm{u_n})$ é um infinitamente grande positivo (negativo).

Afirmamos, ainda, que

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{u_n} = +\infty$ se qualquer que seja $M > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ a partir da qual se verifica $n \geq p \Rightarrow \mathrm{u_n} > M$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{u_n} = -\infty$ se qualquer que seja $M > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ a partir da qual se verifica $n \geq p \Rightarrow \mathrm{u_n} < -M$.

---

[v] Note-se que $\lfloor x \rfloor = max\{n \epsilon \mathbb{N}: n \leq x\}$.

[vi] A ordem p é determinada a partir da condição $|u_n - 8| < \varepsilon$, uma vez que

$|u_n - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{21}{5n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{21-2\varepsilon}{5\varepsilon}$.

Definição A.II.14 [Sucessão convergente e sucessão divergente]

Dizemos que:

(i) $(\mathrm{u_n})$ é convergente com limite $L \in \mathbb{R}$ ou, de modo equivalente, que $(\mathrm{u_n})$ converge para $L \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{u_n} = L;$$

(ii) $(\mathrm{u_n})$ é divergente se não é convergente.

Observação A.II.15 [Sucessão divergente]

Podemos distinguir dois tipos de divergência: infinitamente grande (positivo ou negativo) e sucessão sem limite. Neste segundo caso, dizemos que a sucessão diverge por oscilação.

Proposição A.II.16 [Alguns resultados sobre convergência de sucessões]

1. Toda a sucessão convergente é limitada.
2. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.
3. Se a sucessão (u_n) é crescente mas não é limitada superiormente então (u_n) é um infinitamente grande positivo.
4. Suponhamos que, a partir de determinada ordem p, os termos das sucessões (a_n) e (b_n) satisfazem a condição $a_n \leq b_n$. Se (a_n) é um infinitamente grande positivo então (b_n) também é um infinitamente grande positivo.
5. <u>Princípio das sucessões enquadradas</u>: «Se, a partir de determinada ordem, os termos da sucessão (u_n) se encontram constantemente enquadrados pelos termos homólogos de duas sucessões – (v_n) e (w_n) – convergentes para o mesmo limite $L \in \mathbb{R}$, então (u_n) converge igualmente para L».
6. Se a sucessão (u_n) converge para o número real L então qualquer subsucessão de (u_n) também converge para o mesmo limite.

7. Se a sucessão (u_n) tem duas subsucessões com limites diferentes então (u_n) é divergente.

Proposição A.II.17 [Algumas regras para o cálculo de limites de sucessões]

1. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 \text{ se } |r| < 1 \\ +\infty \text{ se } r > 1 \\ 1 \text{ se } r = 1 \end{cases}.$

   Se $r \leq -1$ então a sucessão (r^n) não tem limite.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \cdots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \cdots + b_{q-1} n + b_q} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} \text{ se } p = q \\ 0 \text{ se } p < q \\ \pm\infty \text{ se } p > q \end{cases}.$

3. Se $k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ então

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k;$

   ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e;$

   iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k;$

   iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + k v_n)^{\frac{1}{v_n}} = e^k.$

4. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{sen\alpha}{\alpha} = 1$ e $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{tg\alpha}{\alpha} = 1.$

5. Se $k \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ então

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{(\ln u_n)^k} = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln u_n)^k}{u_n} = 0;$

   ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{u_n}}{(u_n)^k} = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(u_n)^k}{a^{u_n}} = 0.$

6. Para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$, quando $u_n > 0$, podemos utilizar o seguinte facto:

   «Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = A$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = A$».[vii]

   Como consequência, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n.$

[vii] Ver demonstração deste resultado na pág. 57 do “Curso de Análise Matemática” de J. Sousa Pinto, Universidade de Aveiro, 2010.

7. Para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n}$, podemos utilizar o seguinte facto:

   «Se $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = A$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = A$».[viii]

   Como consequência, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

8. Para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} {u_n}^{v_n}$ quando $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$, isto é, quando somos conduzidos a uma indeterminação do tipo 1^∞, podemos utilizar o seguinte facto:

   «Se $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(u_n - 1) = k$ então $\lim\limits_{n\to\infty} {u_n}^{v_n} = e^k$».

9. Quando, no cálculo do limite $\lim\limits_{n\to\infty} {u_n}^{v_n}$, somos conduzidos a uma indeterminação do tipo ∞^0, 0^0 ou 1^∞ podemos resolver o problema considerando ${u_n}^{v_n} = e^{v_n ln(u_n)}$.

Método A.II.18 [Princípio da indução matemática]

O princípio da indução matemática permite demonstrar a veracidade de uma condição no conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$:

$$p(n), n \in \mathbb{N}.$$

Este método consiste em:

1. Verificar que a condição se transforma numa proposição verdadeira para $n = 1$;
2. Supondo que $n = k$ verifica a condição, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, mostrar que a condição é verificada para $n = k + 1$, isto é,

$$p(k) \Longrightarrow p(k+1).$$

Nesta implicação $p(k)$ é designada por hipótese de indução e $p(k+1)$ por tese de indução. Notemos que o princípio da indução matemática também se aplica num subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

[viii] Ver demonstração deste resultado na pág. 56 do "Curso de Análise Matemática" de J. Sousa Pinto, Universidade de Aveiro, 2010.

Exemplos A.II.19 [Utilização do princípio da indução matemática]

Vamos mostrar, por indução matemática, que:

(i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Em primeiro lugar, substituindo $n=1$ na igualdade, verificamos que $1=2-\frac{1}{2^0}$ é uma proposição verdadeira.

Por hipótese de indução, suponhamos agora que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=2-\frac{1}{2^{k-1}},$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Queremos provar que:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^{k-1}}=2-\frac{1}{2^{k}}.$$

Com efeito,

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}\underbrace{=}_{\substack{por\ hipótese\\ de\ indução}}2-\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}=2-\frac{1}{2^k}.$$

(ii) $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \neq 1$.

Considerando $n=1$ obtemos uma proposição verdadeira dado que

$$1=\frac{1-x}{1-x},\ x \neq 1.$$

Suponhamos, agora, que

$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}=\frac{1-x^k}{1-x}$,

para $k \in \mathbb{N}$ e $x \neq 1$. Queremos provar a tese de indução:

$$\sum_{k=1}^{n+1}x^{k-1}=\frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

De fato, obtemos

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{k-1} + x^k \underbrace{=}_{\substack{por\ hipótese \\ de\ indução}} \frac{1-x^k}{1-x} + x^k = \frac{1-x^k+(1-x)x^k}{1-x} = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

(iii) $2^{k-1} \leq k!$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Verificamos que $2^0 \leq 1!$.

Sabendo que $2^{p-1} \leq p!$, para $p \in \mathbb{N}$, pretendemos provar que $2^p \leq (p+1)!$.

Ora

$$2^{p-1} \leq p! \Leftrightarrow 2^p \leq 2(p!) \Leftrightarrow 2^p \leq (p+1)!,$$

dado que $2 \leq p+1$ e $(\mathrm{p}+1)! = (\mathrm{p}+1)\mathrm{p}!$.

Exercícios A.II.20

1. Descubra
   (a) o sétimo termo da sucessão $(1,2,6,24,120,720,\ldots)$.
   Resposta: 5040;
   (b) o oitavo termo da sucessão $(2,10,12,16,17,18,19,\ldots)$.
   Resposta: 200;
   (c) o nono termo da sucessão
   $(1,11,21,1211,111221,312211,13112221,1113213211,\ldots)$.
   Resposta: 31131211131321;
   (d) o décimo termo da sucessão $(1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots)$.
   Resposta: 55;
   (e) o décimo primeiro termo da sucessão $(U,D,T,Q,C,S,S,O,N,D,\ldots)$.
   Resposta: O;
   (f) o décimo segundo termo da sucessão
   $(2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,\ldots)$. Resposta: 37.

2. Seja S_n a soma dos n primeiros termos duma progressão aritmética de primeiro termo a e razão r. Prove que $S_n = \frac{(u_1+u_n)n}{2}$.

3. Seja S_n a soma dos n primeiros termos duma progressão geométrica de primeiro termo a e razão r. Prove que $S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$, para $r \neq 1$.

4. Suponha que o senhor X foi contratado para desempenhar uma determinada tarefa, por um período de dois anos, com as seguintes condições: salário mensal de $500€$ sujeito a um aumento mensal de $50€$.
   (a) Quanto ganhou o senhor X ao fim dos dois anos?
   Resposta: 25800 €;
   (b) A partir de que mês o senhor X começou a ganhar mais de $1000€$?
   Resposta: 12º.

5. Na sala de um restaurante as mesas individuais são quadradas e permitem 4 lugares sentados. Se juntarmos duas mesas passamos a ter 6 lugares sentados, se juntarmos três mesas teremos 8 lugares, e assim sucessivamente.
   (a) Quantos lugares sentados obtemos quando juntamos vinte mesas?
   Resposta: 42;
   (b) Quantas mesas, assim juntas, são necessárias para sentar um grupo de 103 pessoas? Resposta: 51.

6. Considere duas sucessões de números reais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por

$$u_n = 12000 + 600(n-1) \ ; \ v_n = \begin{cases} 12000 & \text{se } n = 1 \\ 1{,}05v_{n-1} & \text{se } n > 1 \end{cases} .$$

   (a) Calcule v_3, v_6 e v_{11}. Resposta: $v_3 = 13230$, $v_6 = 15315{,}4$ e $v_{11} = 19546{,}7$;

(b) Verifique se 16320 é termo da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Resposta: Não;

(c) Uma empresa apresentou a um candidato dois tipos de contrato, a iniciar em 1 de Janeiro de 2015:

Contrato A: salário mensal de $1000€$ e um aumento anual de $600€$.

Contrato B: salário mensal de $1000€$ e um aumento anual de 5%.

(c.1) Determine o valor total dos salários acumulados (relativamente aos contratos A e B) no final dos anos a seguir indicados: 2017 e 2020. Resposta: 13200 € e 15000 € com o contrato A e 13200 € e 15315,4 € com o contrato B;

(c.2) Se estivesse na posição do candidato referido que proposta escolheria? Comente e justifique a sua decisão.

7. Apresente um exemplo de uma sucessão limitada superiormente e não limitada inferiormente, e indique outro exemplo de uma sucessão limitada inferiormente e não limitada superiormente.

Resposta: $a_n = -(1{,}001)^n$ e $b_n = -a_n$.

8. Classifique, quanto à monotonia, a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

(a) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$. Resposta: Estritamente crescente;

(b) $a_n = \frac{n^3}{3^n}$. Resposta: Não é monótona;

(c) $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$. Resposta: Estritamente crescente;

(d) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$. Resposta: Estritamente decrescente.

(e) $a_n = \frac{3+(-1)^{n-1}}{4}$. Resposta: Não é monótona.

9. Calcule

(a) $\lim_n \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$. Resposta: 2;

(b) $\lim_n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right)$. Resposta: $\frac{1}{2}$;

(c) $\lim_n \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right)$. Resposta: 1;

(d) $\lim_n [\ln n^2 - \ln(n^2 + 1)]$. Resposta: 0;

(e) $\lim_n \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$. Resposta: $\frac{1}{2}$;

(f) $\lim_n \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$. Resposta: 1;

(g) $\lim_n (n + 1)^{\frac{1}{\ln(n)}}$. Resposta: e;

(h) $\lim_n [\ln(n + 1)^p - \ln(n)^p]$, para $p > 0$. Resposta: 0;

(i) $\lim_n \left(1 - \frac{7}{n^2}\right)^{n^2}$. Resposta: e^{-7};

(j) $\lim_n \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$. Resposta: 1;

(k) $\lim_n \left(\frac{n^4-9}{n^4}\right)^{n^2}$. Resposta: 1;

(l) $\lim_n \left(\frac{2n-2}{2n+2}\right)^n$. Resposta: e^{-2};

(m) $\lim_n \left[n^{-(n+1)} . (n + 1)^n\right]$. Resposta: 0;

(n) $\lim_n \frac{n+\sqrt{n}}{n+1-\ln(n)}$. Resposta: 1;

(o) $\lim_n \sqrt[2n]{n - \ln(n)}$. Resposta: 1.

10. Considere a sucessão (a_n) definida por recorrência do seguinte modo

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n + 1, \text{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

(a) Calcule os seis primeiros termos de (a_n); Resposta: $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $a_4 = \frac{5}{2}$, $a_5 = \frac{9}{4}$ e $a_6 = \frac{17}{8}$;

(b) Prove, por indução matemática, que $a_{n+1} = 2 + 2^{3-n}$;

(c) Mostre que (a_n) é estritamente decrescente e convergente;

(d) A sucessão (a_n) é limitada? Justifique. Resposta: $2 < u_n \leq 6$.

11. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Prove, por indução matemática, que $n! \leq n^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) Justifique a afirmação: «A sucessão (u_n) é limitada».

Resposta: $0 < u_n \leq 1$;

(c) Estude a monotonia de (u_n). Resposta: Estritamente decrescente;

(d) Calcule $\lim_{n} u_n$. Resposta: 0.

APÊNDICE III

BREVES NOÇÕES DE TOPOLOGIA EM $\mathbb{R}^2$

No estudo de funções definidas num subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^2$, em particular nos conceitos de limite, continuidade e diferenciabilidade, a importância de algumas noções topológicas é evidente.

Comecemos por recordar que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$ representa o conjunto de todos os pontos do plano onde, previamente, definimos um sistema de eixos coordenados ortogonais e monométricos de origem O.

Deste modo, chamamos ponto P do plano $\mathbb{R}^2$ a qualquer par ordenado (x, y), em que os números reais x e y são chamados coordenadas de P e escrevemos $P = (x, y)$.

Além disso, – dado que a cada vetor livre (representante de uma classe de equivalência de segmentos orientados de igual comprimento, direção e sentido) podemos associar um segmento de reta orientado com origem em $O = (0,0)$ e a cada segmento de reta orientado com origem em $O = (0,0)$ podemos associar um vetor livre – estabelecemos a seguinte correspondência biunívoca

$$\overrightarrow{OP} \leftrightarrow \ P = (x, y).$$

Isto é, confundimos propositadamente pares ordenados, segmentos orientados com origem em $O = (0,0)$, vectores e pontos do plano.

Assim, neste manual, assumiremos que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$ e tomaremos como ponto de partida as seguintes definições.

Definição A.III.1 [Igualdade de vetores em $\mathbb{R}^2$]

Dizemos que dois vetores de $\mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, são iguais se e só se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Definição A.III.2. [Adição em $\mathbb{R}^2$]

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ dois vectores de $\mathbb{R}^2$.

Dizemos que o vetor $u + v$, resultado da operação

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longrightarrow u + v, \end{aligned}$$

é a soma do vetor u com o vetor v, e definimos $u + v \underbrace{=}_{\substack{\text{por}\\ \text{definição}}} (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Definição A.III.3. [Multiplicação escalar em $\mathbb{R}^2$]

Seja $u = (x, y)$ um vetor de $\mathbb{R}^2$ e α um número real[i]. Definimos multiplicação escalar em $\mathbb{R}^2$ como se segue

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, u) &\longrightarrow \alpha \cdot u \end{aligned}.$$

Neste caso, o resultado da operação é, também, um vetor de $\mathbb{R}^2$. Mais concretamente, o produto do vetor u pelo número real α é o vector

$$\alpha \cdot u \underbrace{=}_{\text{notação}} \alpha u \underbrace{=}_{\substack{\text{por}\\ \text{definição}}} (\alpha x, \alpha y).$$

[i] Recorde-se que, usualmente, designamos os números (reais e complexos) por escalares.

Definição A.III.4. [Produto interno em $\mathbb{R}^2$]

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que o resultado da operação

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow \langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{aligned}$$

é o produto interno[ii] do vetor u pelo vetor v.

Exercício A.III.5. [Propriedades do produto interno em $\mathbb{R}^2$]

Prove que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

1. Não-negatividade:
   1.a) $< u, u > \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$;
   1.b) $< u, u > = 0$ se e só se $u = (0,0)$;
2. Comutatividade: $< u, v > = < v, u >$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$;
3. Distributividade: $< u, v + w > = < u, v > + < u, w >$ para quaisquer vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^2$;
4. Multiplicação escalar: $< ku, v > = k \ < u, v >$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$ e todo o real k.

Definição A.III.6. [Vetores ortogonais]

Dois vetores, $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, dizem-se ortogonais em $\mathbb{R}^2$ se e só se o seu produto interno é nulo, isto é, se e só se $\langle u, v \rangle = 0$.

[ii] Alguns autores também utilizam a designação "produto escalar".

Definição A.III.7. [Comprimento euclidiano (ou norma euclidiana) em $\mathbb{R}^2$]

Dado $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, dizemos que o número real

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

é o comprimento euclidiano (ou norma euclidiana) do vetor u.

Exercício A.III.8. [Propriedades da norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$]

Prove que a norma euclidiana satisfaz as seguintes propriedades:

1. Não-negatividade:
   1.a) $\| u \| \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$;
   1. b) $\| u \| = 0$ se e só se $u = 0$;
2. Desigualdade triangular: $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$;
3. $\| ku \| = |k| \ \| u \|$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$ e todo o real k.

Definição A.III.9. [Distância em $\mathbb{R}^2$]

A distância entre dois vetores de $\mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, é o número real

$$d(u, v) = \| u - v \| = \sqrt{< u - v, u - v >} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Neste contexto, dizemos que

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot\ )$ é um espaço vetorial real;

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \|.\|\ )$ é um espaço euclidiano;

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot, d\ )$ é um espaço métrico.

Topologia[iii] é o ramo da Matemática que estuda a noção de proximidade através dos conceitos de vizinhança e distância. Tal como referimos no início, estes conceitos são muito importantes na análise de questões relativas à continuidade e diferenciabilidade das funções definidas num subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^2$.

Generalizamos, de seguida, os conceitos de intervalo e de vizinhança definidos no Apêndice I.

Definição A.III.10. [Bola aberta, bola fechada e vizinhança em $\mathbb{R}^2$]

Dado o ponto $P = (a, b)$ e o real $\delta > 0$, dizemos que:

a) o conjunto $B_\delta(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2\}$ é uma bola aberta de centro P e raio δ;
b) o conjunto $\bar{B}_\delta(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq \delta^2\}$ é uma bola fechada de centro P e raio δ;
c) A qualquer subconjunto que contenha uma bola aberta de centro P chamamos uma vizinhança de P.[iv]

Prosseguimos com outros conceitos topológicos básicos.

Definição A.III.11. [Conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$]

Um conjunto diz-se limitado se existir uma bola aberta que o contenha.

[iii] Etimologicamente, a palavra “topologia” deriva do grego (topos, “lugar”, e logos, “estudo”)

[iv] Em particular uma bola aberta de centro P é uma vizinhança do seu centro.

Definição A.III.12. [Ponto interior, ponto exterior e ponto fronteiro de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$]

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que:

1. $P = (a, b)$ é um ponto interior do conjunto S se existe uma bola aberta $B_\delta(P)$ tal que $B_\delta(P) \subset S$;
2. $P = (a, b)$ é um ponto exterior do conjunto S se existe uma bola aberta $B_\delta(P)$ tal que $B_\delta(P) \cap S = \emptyset$;
3. $P = (a, b)$ é um ponto fronteiro do conjunto S se
$$B_\delta(P) \cap S \neq \emptyset \text{ e } B_\delta(P) \cap \mathbb{R}^2 \setminus S = \emptyset$$
para qualquer bola aberta de centro P.

Definição A.III.13. [Interior, fronteira e exterior de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$]

O conjunto de todos os pontos interiores de S constitui o interior do conjunto S, e é denotado por $int(S)$; o conjunto de todos os pontos fronteiros, designado por $fr(S)$, é a sua fronteira. Finalmente, o exterior de S, que denotamos por $ext(S)$, é o complementar da reunião $int(S) \cup fr(S)$ em $\mathbb{R}^2$ uma vez que

$$\mathbb{R}^2 = int(S) \cup fr(S) \cup ext(S).$$

Definição A.III.14. [Conjunto aberto e conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$]

Dizemos que conjunto S é aberto se coincide com o seu interior, isto é, se

$S = int(S)$; e afirmamos que S é fechado se contém a sua fronteira, isto é, se $S = S \cup fr(S)$.[v]

[v] O conjunto $\bar{S} = S \cup fr(S)$ é, usualmente designado por fecho ou aderência de S.

Exemplo A.III.15. [Semiplano aberto e semiplano fechado]

O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 3\}$ é um conjunto aberto, todavia o conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3\}$$

é um conjunto fechado.

Definição A.III.16. [Ponto de acumulação em $\mathbb{R}^2$]

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $P = (a, b)$ é um ponto de acumulação de S se qualquer bola aberta de centro P contém pelo menos um ponto de S distinto de P, isto é,

$$(B_\delta(P) \setminus \{P\}) \cap S \neq \emptyset$$

Caso P não seja ponto de acumulação de S, dizemos que P é ponto isolado de S.

Exemplo A.III.17.

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 3\} \cup \{(\pi, 1)\}$.

$(3,1)$ é um ponto de acumulação de A, embora $(3,1) \notin A$.

Por sua vez, $(\pi, 1) \in A$ mas $(\pi, 1)$ não é um ponto de acumulação de A.

De acordo com as definições anteriores podemos concluir que:

a) Se P é um ponto interior de S então P pertence a S;
b) Se P é um ponto exterior de S então P não pertence a S;
c) Se P é um ponto fronteiro de S então P pode pertencer ou não a S;
d) Se P é um ponto isolado de S então P pertence a S;
e) Se P é um ponto de acumulação de S então P pode pertencer ou não a S.

Teorema A.III.18. [Teorema de Bolzano-Weirstrass]

Todo o subconjunto de $\mathbb{R}^2$, infinito e limitado, tem pelo menos um ponto de acumulação.

Estamos finalmente em condições de introduzir a noção de limite de uma função de duas variáveis reais, $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Assim, sendo $L \in \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto de acumulação de D_f, dizemos que a função f tem por limite L quando (x, y) tende para (a, b) – e escrevemos $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(a,b)} f(x, y) = L$ – se e só se a toda a trajetória que conduz (x, y) a (a, b) corresponde uma trajetória $f(x, y)$ a L.

Definição A.III.19. [Limite de uma função definida num subconjunto de $\mathbb{R}^2$]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$ e suponhamos que

$P = (a, b)$ é um ponto de acumulação do domínio D_f da função f.

Dizemos que f tem por limite o número real L quando (x, y) tende para (a, b), e escrevemos $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(a,b)} f(x, y) = L$, se qualquer que seja $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ de modo que

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \delta$$

Prova-se que o limite, quando existe, é único.

Terminamos este apêndice com as definições de função contínua e função diferenciável em $\mathbb{R}^2$, e ainda uma condição suficiente para a diferenciabilidade.

Definição A.III.20. [Continuidade de uma função definida num subconjunto de $\mathbb{R}^2$]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \to z = f(x, y)$.

Dizemos que f é contínua em $P = (a, b)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

O domínio de continuidade de f, D_c, é constituído por todos os pontos para os quais f é contínua. Assim sendo, o domínio de continuidade de f pode coincidir com o domínio de f, D_f, ou ser um subconjunto de D_f.

Exemplo A.III.21. [Continuidade em $\mathbb{R}^2$]

A função $f: D_f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Queremos provar que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$, para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, isto é, pretendemos mostrar que qualquer que seja $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \Longrightarrow |x + y - (a + b)| < \delta.$$

Note-se que

$$|x - a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon,$$

e, ainda, que

$$|y - b| = \sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon.$$

Além disso,

$$|x + y - (a + b)| = |x - a + y - b| \leq |x - a| + |y - b| \leq$$

$$\leq 2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < 2\varepsilon = \delta.$$

Consequentemente, dado $\delta > 0$, escolhemos $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, de modo que

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \Longrightarrow |x + y - (a+b)| < \delta.$$

Definição A.III.22. [Diferenciabilidade de uma função definida num subconjunto de $\mathbb{R}^2$]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $z = f(x,y)$ e $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D_f)$.[vi]

Dizemos que f é diferenciável no ponto $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D_f)$ se existirem dois números reais, α e β, tais que

$$\Delta z = \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}_{\Delta f} =$$

$$= \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \Delta x\, p_1(\Delta x, \Delta y) + \Delta y\, p_2(\Delta x, \Delta y)$$

em que $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} p_i(\Delta x, \Delta y) = 0$, para $i = 1,2$.

Provamos que, quando a função é diferenciável, temos $f_x(x_0, y_0) = \alpha$ e $f_y(x_0, y_0) = \beta$.

Note-se que quando $\Delta y = 0$, obtemos

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = \alpha \Delta x + \Delta x\, p_1(\Delta x, 0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \alpha + p_1(\Delta x, 0),$$

desde que $\Delta x \neq 0$. Logo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [\alpha + p_1(\Delta x, 0)].$$

Donde, $f_x(x_0, y_0) = \alpha$.

[vi] Recorde-se que $V_\delta(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2\}$ e que dizemos que $(a,b) \in int(D_f)$ se existir $V_\delta(a,b)$ tal que $V_\delta(a,b) \subset D_f$.

De modo análogo, se considerarmos $\Delta x = 0$, podemos escrever

$$\frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \beta + p_2(0, \Delta y), \text{ desde que } \Delta y \neq 0.$$

Consequentemente, $f_y(x_0, y_0) = \beta$. Assim, podemos concluir que f é diferenciável no ponto $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D_f)$ se e só se

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \Delta x\, p_1(\Delta x, \Delta y) + \Delta y\, p_2(\Delta x, \Delta y),$$

em que $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} p_i(\Delta x, \Delta y) = 0$, para $i = 1{,}2$.

Exemplo A.III.23. [Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$]

Vejamos que a função $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $z = x^2 - y^2$ é diferenciável no seu domínio.

Reparamos que $D_f = \mathbb{R}^2$. Qualquer que seja $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, calculamos

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (x_0 + \Delta x)^2 - (y_0 + \Delta y)^2$$

isto é,

$$(x_0)^2 + 2x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2 - (y_0)^2 - 2y_0(\Delta y) - (\Delta y)^2 =$$

$$= f(x_0, y_0) + 2x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 2y_0(\Delta y) - (\Delta y)^2.$$

Daí vem

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f\big(x_0, y_0\big) =$$

$$= 2x_0(\Delta x) + (\Delta x)(\Delta x) - 2y_0(\Delta y) - (\Delta y)(\Delta y),$$

ou seja, obtemos $\alpha = 2x_0$, $\beta = -2y_0$ e

$$p_1(\Delta x, \Delta y) = \Delta x \quad ; \quad p_2(\Delta x, \Delta y) = -\Delta y.$$

Uma vez que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} p_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Delta x = 0,$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} p_2(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (-\Delta y) = 0,$$

concluímos que a função f é diferenciável, sendo as derivadas parciais de f de 1ª ordem em $P = (x_0, y_0)$ dadas por

$$f_x(x_0, y_0) = 2x_0 \quad \wedge \quad f_y(x_0, y_0) = -2\, y_0 \,.$$

Observação A.III.24. [Diferenciabilidade de funções reias]

É importante salientar que o conceito de função diferenciável num subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é diferente do conceito análogo definido para funções de uma variável.

Sabemos que uma função real de variável é diferenciável num subconjunto A de $\mathbb{R}$ se e só se tem derivada finita em A.

Todavia, para funções definidas num subconjunto de $\mathbb{R}^2$, não basta garantir a existência das duas derivadas parciais. É também necessário exigir a sua continuidade para que a função seja diferenciável.

Neste sentido definimos função de classe C^k definida num subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Definição A.III.25. [Função de classe C^kdefinida num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \to z = f(x, y)$ e $k \in \mathbb{N}$ (ou $k = \infty$). Dizemos que a função f é de classe C^k num subconjunto aberto A de $\mathbb{R}^2$ se f é contínua e, além disso, admite derivadas parciais contínuas até à ordem k em todos os pontos pertencentes a A.

Proposição A.III.26. [Condição suficiente para a diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$]

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \to z = f(x, y)$.

Se a função f é de classe C^1 num subconjunto aberto A do seu domínio então f é diferenciável em A.

APÊNDICE IV

EXPONENCIAL COMPLEXA

Ao longo deste curso temos considerado apenas funções reais de uma ou mais variáveis reais.

Definimos, de modo análogo, funções complexas de variável complexa.

Assim, adotamos a notação

$$f: D_f \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ definida por } z \in D_f \to w = f(z),$$

sendo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, onde $x = \underbrace{\operatorname{Re} z}_{\substack{\text{parte real} \\ \text{de } z}}$ e $y = \underbrace{\operatorname{Im} z}_{\substack{\text{parte imaginária} \\ \text{de } z}}$.

Note-se que a cada função complexa estão associadas duas funções reais de duas variáveis

$$f(z) = \underbrace{u(x,y)}_{\substack{\text{parte real} \\ \text{de } f(z)}} + i \underbrace{v(x,y)}_{\substack{\text{parte imaginária} \\ \text{de } f(z)}} \in \mathbb{C}.$$

Exemplo A.IV.1.

Consideremos a função $f: D_f \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$z \in D_f \to f(z) = z^2 + 3.$$

Verificamos que

$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 + 3 = \underbrace{(x^2 - y^2 + 3)}_{\substack{\text{parte real} \\ \text{de } f(z)}} + i \underbrace{(2xy)}_{\substack{\text{parte imaginária} \\ \text{de } f(z)}}.$$

Entre as funções de variável complexa destaca-se a exponencial complexa.

Definição A.IV.2.

A função exponencial (de variável $z \in \mathbb{C}$), $f: D_f = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de domínio $\mathbb{C}$, é definida por

$$z = x + iy \in D_f \to e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$[i]

No exercício seguinte elencamos algumas das propriedades da função exponencial complexa.[ii]

Exercício A.IV.3. [Propriedades da exponencial complexa]

Mostre que a função exponencial complexa satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $e^0 = 1$;

(ii) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

(iii) $e^{-z} = 1/e^z$;

(iv) $(e^z)^n = e^{nz}$;

(v) $e^z \neq 0$;

(vi) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$;

(vii) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$[iii]

para todo $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

---

[i] Trata-se de uma generalização da função exponencial definida em $\mathbb{R}$, dado que se $y = 0$ então $z = x \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $e^z = e^x$.

[ii] Outro aspeto interessante desta exponencial prende-se com o facto de se tratar de uma função periódica de período 2πi.

[iii] Recorde que se $z = x + iy$ então $\bar{z} = x - iy$ é o complexo conjugado de z.

No estudo das equações diferencias lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes interessa-nos obter uma relação entre as funções trigonométricas de variável real (a função seno e a função cosseno) e a função exponencial complexa.

Proposição A.IV.4.

As funções reais de variável $x \in \mathbb{R}$ definidas por $\cos(qx)$ e $\sin(qx)$, onde $q \in \mathbb{R}$, podem ser representadas do seguinte modo

$$\cos(qx) = \frac{1}{2}\left(e^{i(qx)} + e^{-i(qx)}\right) \text{ e } \sin(qx) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(qx)} - e^{-i(qx)}\right).$$

De fato, temos

$$w_1 = e^{i(qx)} = \cos(qx) + i\sin(qx)$$

e

$$w_2 = e^{-i(qx)} = \cos(qx) - i\sin(qx).$$

Logo

$$w_1 + w_2 = 2\cos(qx) \text{ e } w_1 - w_2 = 2i\sin(qx).$$

Daí resulta

$$\cos(qx) = \frac{1}{2}\left(e^{i(qx)} + e^{-i(qx)}\right) \text{ e } \sin(qx) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(qx)} - e^{-i(qx)}\right).$$

(Página deixada propositadamente em branco.)

BIBLIOGRAFIA

- Allen, R. G. D. (1938). *Mathematical Analysis for Economists*. London: Macmillan and Company Limited.
- Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S and Solow, R. M. (1961). Capital-labor substitution and economic efficiency. *Review of Economics and Statistics*, *43 (3)*, 225–250.
- Breda, A: M. d' Azevedo & Nunes da Costa, Joana M. (1996). *Cálculo com funções de várias variáveis*. Lisboa: Editora McGraw-Hill.
- Cobb, C.W. and Douglas, P. H. (1928). A theory of production. *American Economic Review*, *18(1)*, 139–165.
- Jesus, Fernando (1992). *Introdução à teoria microeconómica*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.
- Lima, Teresa Pedroso (2014). *Lições de álgebra linear*, 2ª ed.. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Marques, Jorge (2014). An application of ordinary differential equations in Economics: modelling consumer's preferences using marginal rates of substitution. In N. Mastorakis, F. Mainardi, and M. Milanova (Eds.). *Mathematical Methods in Science and Mechanics: Mathematics and Computers in Science and Engineering Series 33.* Paper presented at the Proceedings of the16th International Conference on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems (MAMECTIS'14), Lisbon (46–53). Greece: Wseas Press.
- Pires, Cesaltina (2011). *Cálculo para Economia e Gestão*. Lisboa: Escolar Editora.
- Santana, João José Esteves (2012). *Introdução à teoria da microeconomia*. Lisboa: IST Press.
- Silva, Jaime C. e (1994). *Princípios de análise matemática aplicada*. Lisboa: Editora McGraw-Hill de Portugal.
- Silva, Jaime C. e & Leal, C. (1996). *Análise matemática aplicada: exercícios, actividades, complementos e provas de avaliação*. Lisboa: Editora McGraw-Hill de Portugal.
- Sousa Pinto, J. (2010). *Curso de análise matemática*. Aveiro: Universidade de Aveiro Editora.

(Página deixada propositadamente em branco.)

Teresa Pedroso de Lima

É licenciada em Matemática (ramo científico) pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra (FCTUC), cidade onde também fez o estágio pedagógico do ensino liceal, no Liceu Nacional de José Falcão. Prosseguiu os estudos com o mestrado em Álgebra Linear e Aplicações (FCTUC), doutorou-se e fez agregação em Economia, na especialidade de Economia Matemática/Modelos Econométricos, na Faculdade de Economia da mesma Universidade (FEUC). Em 1979, foi contratada como assistente pela FEUC, onde é atualmente professora catedrática.

Tem desempenhado vários cargos de gestão académica e é, desde outubro de 2015, diretora da FEUC.

Durante quase 20 anos assumiu a responsabilidade pela disciplina de Matemática I das Licenciaturas em Economia e Gestão. No seguimento da Reforma de Bolonha, coordena a equipa docente das unidades curriculares de Álgebra Linear (desde 2007), Introdução aos Métodos Quantitativos (de 2007 a 2012) e Matemática II (desde 2013).

Desenvolve o seu trabalho científico na área da álgebra linear aplicada e teoria matemática dos sistemas, interessando-se particularmente pelas aplicações em economia.

Jorge Marques

Licenciado em Matemática (ramo científico) pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra (FCTUC) e Mestre em Física Matemática pela FCTUC. Doutorado em Economia, na especialidade de Economia Matemática/Modelos Econométricos, pela Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra (FEUC).

Iniciou a sua atividade docente na Universidade Católica Portuguesa - Pólo da Figueira da Foz (atual Centro Regional das Beiras) em 1991. Desde 1994 que é docente na FEUC, onde tem lecionado as unidades curriculares de Álgebra Linear, Cálculo I, Cálculo II, Estatística I, Matemática I e Matemática II. No seguimento da Reforma de Bolonha, coordenou a equipa docente das unidades curriculares de Matemática I (de 2007 a 2013) e Matemática II (de 2008 a 2013).

Atualmente é Professor Auxiliar da FEUC e investigador do CeBER. Foi Professor Visitante do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP) em 2014, onde desenvolveu investigação científica (publicação em coautoria na revista *Archiv der Mathematik*) em equações diferenciais parciais lineares.

É membro da equipa responsável pelo projeto ReM@t – Recuperar a Matemática a Distância, desenvolvido na plataforma de Ensino a Distância da Universidade de Coimbra (UC_D) e financiado pela Fundação Calouste Gulbenkian.

9 789892 613178

SÉRIE ENSINO
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS
2017

• U C •

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS