

# BIOFÍSICA MÉDICA

3ª EDIÇÃO

**J. J. PEDROSO DE LIMA**

IMPRESA DA  
UNIVERSIDADE  
DE COIMBRA  
COIMBRA  
UNIVERSITY  
PRESS

(Página deixada propositadamente em branco)



E N S I N O



EDIÇÃO

Imprensa da Universidade de Coimbra  
Email: [imprensa@uc.pt](mailto:imprensa@uc.pt)  
URL: [http://www.uc.pt/imprensa\\_uc](http://www.uc.pt/imprensa_uc)  
Vendas online: <http://livrariadaimprensa.uc.pt>

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Imprensa da Universidade de Coimbra

CONCEÇÃO GRÁFICA

António Barros

INFOGRAFIA

J. J. Pedroso de Lima

INFOGRAFIA DA CAPA

Mickael Silva

EXECUÇÃO GRÁFICA

Gráfica de Coimbra

ISBN

978-989-26-0653-8

ISBN DIGITAL

978-989-26-0654-5

DOI

<http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-0654-5>

DEPÓSITO LEGAL

373056/14

# BIOFÍSICA MÉDICA

3ª EDIÇÃO

# DIAGNÓSTICA

J. J. PEDROSO DE LIMA

IMPRESA DA  
UNIVERSIDADE  
DE COIMBRA

COIMBRA  
UNIVERSITY  
PRESS

(Página deixada propositadamente em branco)

---

*Dedico este livro à Faculdade de Medicina de  
Coimbra que, há duas décadas atrás, mostrou  
que já entendia a mensagem que ele contém.*

---

(Página deixada propositadamente em branco)



---

## Introdução

Perto de quarenta anos de docência de física, sobretudo a alunos de cursos na área da biomedicina e, outros tantos anos de investigação no mesmo sector, dão-me, pelo menos, os elementos para uma análise crítica sobre o meu trabalho, neste campo.

A ligação que estabeleci entre a física e a medicina ultrapassou, aliás, a vertente docente e investigativa da medicina, pois, tive também a oportunidade de aprofundar áreas associados às componentes tecnológica e técnica, em diversos sectores das ciências da saúde. Estas experiências permitiram-me, sobretudo, assistir em condições privilegiadas à evolução do pensamento científico e do avanço tecnológico na medicina, durante um período considerável.

Em cada dia que passou, nestes anos, eu assisti à aproximação entre as duas ciências, num processo que se autocatalisa, se potencia com o uso do computador e das novas tecnologias e se reafirma, gerando ciências subsidiárias.

O ensino no curso de medicina e, em particular da física, deve situar o aluno, tanto quanto possível, na época em que vive. Não há uma medicina, como ciência, separada das suas bases científicas e das propriedades que justificam as modernas aplicações tecnológicas de apoio.

Em regra, os alunos de medicina têm expectativas de aprendizagem distantes da física. Há assim que descobrir formas de lhes transmitir a informação básica de modo aliciante e útil. Isto obriga, por parte dos docentes, à acumulação de conhecimentos interdisciplinares específicos e à sua elaboração, num processo que é demorado e difícil, sobretudo porque não existe uma cultura estabelecida para a sua implementação. A cultura existente foi mesmo, e muitas vezes ainda é, a da rejeição, num processo onde não é alheia a inexistência de formação científica em alguns dos intervenientes.

---

---

Ao longo dos anos fui elaborando uma base de dados relacionados com o ensino da física nas ciências médicas, contendo, além de conhecimento científico, as experiências noutros países, conceitos e juízos de valor provenientes das mais diversas origens, desde alunos a professores, a médicos e outros profissionais, sobre o interesse do ensino que defendemos, a oportunidade da sua existência no princípio do curso, a matéria que deve ser ministrada, as dificuldades maiores, etc. Esta informação armazenada foi permitindo uma melhoria de actuação e a sua comparação com o exterior. No presente, acreditamos que o ensino que fazemos é de bom nível, em termos absolutos e que a sua aceitação pelos alunos é boa. São certamente os alunos, futuros utilizadores daquilo que formos capazes de lhes ensinar, a razão de ser dos esforços que temos feito, ao longo dos anos, no sentido de os aproximar, o mais possível, das bases da ciência médica.

No início, este livro destinava-se a ser um elemento de estudo dirigido especialmente aos alunos da licenciatura em medicina da Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra. Com o evoluir da obra surgiu-me no espírito alargar o seu âmbito e produzir um texto cobrindo mais assuntos, de modo a poder ser um elemento de apoio ao aluno, não só durante o curso, como após a sua conclusão. Aumentaria também, assim, a possibilidade de que os médicos, de um modo geral, se interessassem por esta obra.

Apesar deste alargamento, foram mantidos, tanto quanto possível, o espírito e as características de um livro dirigido aos alunos.

O título deste trabalho, “Biofísica médica”, pode suscitar confusão. O termo biofísica é intrinsecamente geral e utilizado com diversos significados que vão desde a física para médicos à física molecular das estruturas biológicas. Aqui, significa um conjunto de princípios e conceitos de física colocados, em grande parte, ao nível de um curso de medicina e com a intenção de apoiar a compreensão dos fenómenos biomédicos. A própria palavra biomédico tem uma serena ambiguidade, mas, no nosso contexto, significa o âmbito das ciências da vida numa perspectiva de interesse médico.

Em diversos locais vimos a utilização da designação “biofísica médica” para colocar estes conceitos no seu contexto mais específico. Adoptámos a ideia mas sempre acreditámos que não é o título que faz um livro.

Em termos gerais, a biofísica assenta no dogma de que a matéria viva e os seus mecanismos, obedecem a leis físicas idênticas às que foram

---

---

verificadas no estudo da matéria inanimada e dos fenómenos com ela relacionados. A física explica as questões básicas da natureza, sendo ponto de partida, instrumento de interpretação e mecanismo de análise, no processo e no evoluir da ciência médica

A presença da física confunde-se, no passado, com a da própria medicina, prevê-se, no futuro altamente reforçada e é, no presente, uma constante inevitável. Muitos dos mecanismos da vida, altamente complexos, foram explicados pelas leis da física que permitiram a interpretação de múltiplos fenómenos associados à estrutura e às funções do organismo, quer a nível macroscópico, quer microscópico. De forma pouco evidente, a física está presente também em muitas situações do diagnóstico clínico, como reforço da capacidade de associação e raciocínio, na descoberta de relações causa efeito. Em certas especialidades terapêuticas a física tem um papel decisivo. Apesar de tudo isto, a penetração dos conhecimentos físicos e a compreensão do seu interesse na medicina prática é, globalmente, um processo lento e, muitas vezes, ainda mal compreendido. A forma tradicional do ensino da medicina, com predomínio do factual, sem preocupação com a sua base científica irá persistir, até que o confronto das novas gerações de médicos com as exigências do conhecimento actual, este cada vez mais distante do que lhe foi transmitido, o denuncie.

Onde é talvez mais aparente o papel da física em medicina é nas aplicações e desenvolvimento de metodologias físicas de apoio em diagnóstico e terapêutica. São múltiplas as participações dos métodos físicos em áreas como a imagiologia, a oftalmologia, a ortopedia, a medicina dentária, a medicina nuclear, etc. A generalização do uso dos computadores em tempo real tornou possível a aplicação sistemática dos métodos da física à medicina e está associada à maioria dos seus mais recentes progressos. Por exemplo, no campo das técnicas de imagiologia médica, assistiu-se nos últimos 20 anos a um enorme desenvolvimento. A tomografia axial computadorizada (TAC), a ecografia e a ressonância magnética nuclear (RMN) tornaram possíveis os estudos anatómicos no vivo, com resolução de contraste nunca antes conseguida, particularmente em neurologia, cardiologia e oncologia. Por seu lado, a tomografia de emissão com positrões (PET) e a tomografia de emissão simples (SPECT) possibilitaram, pela primeira vez, a observação de processos bioquímicos e funcionais no vivo, permitindo determinar as relação entre os processos metabólicos e as estruturas anatómicas. O PET em particular, permite o estudo quantitativo do metabolismo local de numerosas substâncias e é considerado uma das

---

---

técnicas de imagem para diagnóstico clínico mais poderosas da actualidade. Em numerosos sectores da medicina são evidentes os esforços levados a cabo com a intenção de ser introduzida aproximação científica, com rigor físico e matemático, em novas interpretações dos mecanismos fisiológicos e nos seus métodos de avaliação em diagnóstico.

Há um pressuposto de utilidade futura deste tipo de conhecimentos, ao serem ministrados num curso de medicina. Parece aceitável admitir que o conhecimento médico com base científica causal é mais sólido do que o conhecimento suspenso, factual. Supõe-se que o futuro médico tem maiores facilidades de raciocinar sobre os efeitos se souber as causas. Mais do que aplicar conhecimentos e métodos da física para compreender fenómenos do corpo humano, pretende mudar-se a posição do aluno, de simples observador, a participante no acto de pensar a natureza com as suas próprias leis. Não temos, porém, a prova científica, estatística, do reflexo prático, em termos de melhoria do acto médico, que a adição destes conhecimentos irá produzir. Temos, contudo, a evidência vivida de grande qualidade nos médicos que aceitam e cultivam esta atitude. Acreditamos também que uma cadeira com estas características pode ser muito ou pouco útil, conforme o modo como é entrosada nos interesses futuros dos alunos, conforme os temas escolhidos, conforme a própria atitude global de aproximação à medicina.

Parece não ser irrealista acreditar-se que os conhecimentos da física poderão ser úteis em medicina nas seguintes vertentes:

1) na explicação de múltiplos fenómenos associados à estrutura e às funções do organismo, quer a nível macroscópico quer microscópico,

2) na aplicação e desenvolvimento de metodologias físicas de apoio ao diagnóstico e terapêutica e

c) no reforço da capacidade de associação e raciocínio, como instrumento para a criação de ligações causa-efeito durante a prática da medicina.

Poderá ser polémica a questão do primeiro ano do curso ser a altura ideal para explicar a física de fenómenos que, com grande probabilidade, não foram ainda abordados, em pormenor, pelos alunos. Na perspectiva dos fenómenos talvez não seja, mas na perspectiva da aplicação da física, acreditamos que sim. À medida que se afastam dos conhecimentos básicos do curso secundário mais difícil é para os alunos do curso de medicina estudar ciências das designadas exactas. Quem já ensinou biofísica

---

---

no curso de medicina, e também em mestrados das especialidades médicas, facilmente entende este ponto.

O presente trabalho é constituído por sete capítulos. O primeiro refere-se a conceitos gerais sobre biofísica de membranas. Este capítulo tem uma intenção: levar o aluno num trajecto que começa nas propriedades físicas das membranas passa pelas funções renal e pulmonar e acaba nos fenómenos bioeléctricos. Pode ser uma experiência interessante o aluno chegar à equação de Nernst-Plank e depois à de Goldman e verificar a sua proximidade com a realidade experimental. Sempre nos pareceu que as membranas biológicas constituíam um tema muito apropriado para iniciar as aulas de um curso de biofísica para médicos. De grande interesse, fácil de entender (pelo menos, no início), levantando pontes para outros capítulos, conduzindo com grande sucesso à explicação do mecanismo físico do impulso nervoso, filtração renal, etc. Não estou, mesmo assim, absolutamente seguro que seja o melhor assunto para começar, não as aulas, mas um livro de Biofísica Médica, onde não é possível recriar a dinâmica que uma aula pode oferecer. Contudo, ainda restam algumas vantagens e mantivemos a tradição.

O segundo capítulo trata das propriedades dos gases, das misturas de gases e dos contactos dos gases com os líquidos e tecidos. Algumas aplicações à respiração, onde se destaca a biofísica da função pulmonar e do alvéolo pulmonar, fazem parte deste capítulo.

O terceiro capítulo é uma introdução à biomecânica. São transmitidos os conceitos necessários para a compreensão do equilíbrio mecânico. Utilizando o modelo do corpo livre são colocados alguns exemplos de aplicação no homem. Alguns aspectos da dinâmica dos sólidos são abordados de modo elementar. Tenta-se mostrar o interesse da biomecânica com exemplos de aplicação em diversas situações simples.

O capítulo quarto aproxima os alunos da mecânica dos fluidos e dos problemas da caudal dos líquidos não newtonianos em tubos cilíndricos com comportamento elástico complexo. Apresenta-se um conjunto de aplicações à circulação sanguínea do homem. Os fenómenos de superfície e algumas aplicações com interesse médico são também considerados.

O capítulo quinto introduz conceitos elementares de física atómica e física nuclear, da acção biológica e da protecção contra radiações ionizantes, das aplicações de radionuclídeos em Medicina e da física da luz solar

---

---

O capítulo sexto incide sobre bioenergética. Alguns modelos de cinética de enzimas são também considerados.

Finalmente o capítulo sétimo trata de conceitos elementares de electricidade adaptados às aplicações médicas.

Neste trabalho os assuntos começam por ser abordados de forma elementar podendo, eventualmente, ser tratados de forma mais aprofundada mas, nesta situação, com redobradas preocupações pedagógicas.

Acreditamos que esta obra não irá deslustrar a Faculdade de Medicina de Coimbra, aquela instituição que, há vinte anos atrás, numa decisão histórica, foi capaz de integrar nos seus quadros um professor catedrático em física e entender que a abertura da escola a elementos de outras áreas era uma aposta no futuro.

Agradeço o inestimável apoio da Prof. Doutora Filomena R. Botelho na conclusão desta obra. Estou grato também à revisão parcial e observações que me foram feitas pelo Prof. Doutor Miguel Castelo Branco, Eng. António Luis P. de Lima, Prof. Doutor Adriano P. de Lima, Prof. Doutor João Luis M. P. de Lima, Profa. Doutora M. Isabel P. de Lima, Prof. Doutor Nuno David Ferreira e Eng. Francisco Cerqueira Alves.

Aos meus familiares mais directos agradeço o aceitarem conviver com a minha constante ausência.

---

**C A P Í T U L O • I**



**CONCEITOS GERAIS SOBRE BIOFÍSICA  
DE MEMBRANAS**

---

(Página deixada propositadamente em branco)



---

## I.1 - Fenómenos de transporte

### I.1.1 – Introdução

As membranas biológicas são como que as fronteiras da matéria viva. Condicionando as interações do interior das células com o exterior, as biomembranas estão associadas a numerosas actividades biológicas. O estudo das propriedades das membranas biológicas estabelece ligações com múltiplos processos, levando, por exemplo, à explicação do mecanismo físico do impulso nervoso, à compreensão do funcionamento do nefrónio e à interpretação dos processos de troca, na respiração pulmonar.

Nas últimas décadas, os estudos com isótopos radioactivos tiveram um papel muito importante nos avanços feitos sobre os processos de transporte através das membranas biológicas, permitindo identificar as espécies iónicas e moleculares intervenientes.

Facilmente se justifica o interesse do estudo das propriedades das membranas no homem. No corpo humano existem cerca de  $10^{14}$  células com diâmetro médio de  $10^{-5}$  m, aproximadamente. A área média da superfície externa de uma célula é de cerca de  $3 \times 10^{-10}$  m<sup>2</sup>. Assim, a área total, soma da superfície externa de todas as células do corpo, é de cerca de 30 000 m<sup>2</sup>!

A área disponível de troca, nos  $4 \times 10^{10}$  capilares sistémicos, com raio médio da ordem de  $4 \times 10^{-6}$  m e comprimento médio, para troca, de  $10^{-3}$  m é  $S = 4 \times 10^{10} \times 2 \times \pi \times (4 \times 10^{-6}) \times 10^{-3} \approx 1000$  m<sup>2</sup>, cerca de 450 vezes a superfície corporal de um adulto!

Outro cálculo leva-nos a concluir que, nos alvéolos pulmonares, os capilares pulmonares apresentam uma área, para a troca gasosa, superior a 100 m<sup>2</sup>. Estas áreas enormes que resultam do grau de divisão que é atingido na matéria viva, com fronteiras estabelecidas por membranas, tornam realizável a execução de funções, por processos passivos, numa escala que seria impensável noutras condições.

Processos biológicos vitais dependem, assim, de trocas de matéria ocorrendo através de enormes áreas de membrana, muitas vezes dispondo de recursos energéticos próprios e com propriedades que podem ser alteradas episodicamente, por estímulos apropriados.

O motivo pelo qual iniciámos esta obra pelo estudo das biomembranas reside não só no seu directo interesse em diversos capítulos da medicina, como também no facto de, na maioria das aplicações da física à biomedicina, serem necessários, com frequência, conhecimentos nesta área. Para reforçar

esta ideia, na Fig. I.1 estão representadas, em esquema e de modo muito geral, as principais funções e movimentos de fluidos que ocorrem no organismo humano. Os processos indicados por setas pretas têm, na sua sequência, participação passiva e/ou activa de fenómenos de membrana.

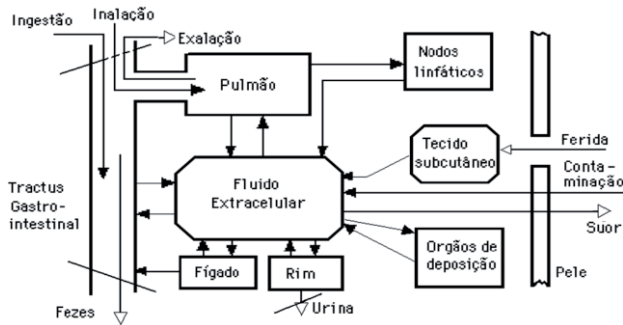


Fig. I.1 – Os processos indicados por setas pretas têm, na sua sequência, participação passiva e/ou activa de fenómenos de membrana.

Trocas de fluidos e moléculas ocorrem constantemente através das membranas celulares, das paredes vasculares e das fronteiras dos órgãos. Na complexidade dos sistemas biológicos estes processos tomam lugar de acordo com leis físicas, em geral simples, que passaremos a analisar.

### I.1.2 - Transporte de moléculas e iões

Sob o título genérico de transporte ou transferência de massa estudam-se os processos através dos quais ocorre transferência de matéria dentro de um dado sistema, ou entre sistemas.

Exemplos destes processos são os deslocamentos de moléculas ou iões em solução resultantes de diferenças de concentração, ou de potencial eléctrico, o transporte de matéria através de membranas, originado por gradientes de diversas formas de energia potencial e as alterações de fase, devidas a mudanças de estado.

Quando se trata de um sistema constituído por uma única fase, por exemplo uma solução onde ocorre transporte de um soluto constituído por moléculas neutras, os mecanismos mais importantes associados a este transporte são, em geral, a difusão e a convecção.

A convecção envolve o transporte de moléculas por correntes de arrastamento estabelecidas na fase em estudo, originadas por diferenças de pressão ou temperatura. É o caso do transporte de nutrientes pela corrente sanguínea ou do arrastamento de moléculas de um soluto aquoso, pela corrente de água, no interior de uma membrana.

A difusão resulta do movimento estatístico de agitação térmica e ocorre nas moléculas em solução, ou dispersas noutro meio, quando há diferenças de concentração. Como resultado da difusão tendem a desaparecer os gradientes de concentração nos gases e nos líquidos.

A difusão está presente em grande parte dos fenómenos de membrana com interesse biológico e é responsável por muitas das transferências de massa que ocorrem entre as células e o meio exterior.

Por outro lado, estabelecem-se constantemente campos eléctricos que condicionam os movimentos de iões nos meios biológicos. É de grande interesse conhecer os fenómenos que determinam o transporte de iões através da membrana, a nível da própria célula e no global. Uma parte importante dos fenómenos bioeléctricos resulta de transporte iónico e de acontecimentos que ocorrem a nível de simples células.

Vamos inicialmente definir uma quantidade que se destina a caracterizar, numericamente, uma corrente de deslocamento de moléculas. Na Fig. I.2 observam-se moléculas que se deslocam da esquerda para a direita. Se convençionarmos para sentido positivo este sentido da corrente, numa situação em que haja um maior número de moléculas a deslocarem-se da direita para a esquerda, a corrente será negativa.

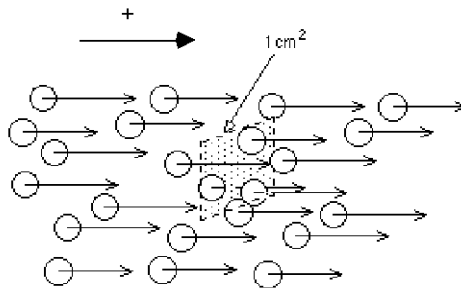


Fig. I.2 - Deslocamento de moléculas no sentido arbitrado como positivo.

A quantidade de moléculas que, por segundo, atravessa uma unidade de área imaginária, perpendicular à velocidade de deslocamento das moléculas, é a densidade de corrente das moléculas. Uma maneira usual de exprimir

a densidade de corrente é em moles  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . A densidade de corrente costuma designar-se por  $\mathbf{J}$ .

Podemos estar interessados na densidade de corrente das moléculas de um soluto,  $\mathbf{J}_s$ , ou, na densidade de corrente de água (em geral, o solvente biológico),  $\mathbf{J}_w$ .

Suponhamos que sobre um eixo orientado ( $xx$ ) se pode definir, em cada ponto, uma dada concentração de um soluto  $C_s(x)$ , em moles do soluto por  $\text{cm}^3$  de solução. Vamos supor ainda que as condições geométricas são tais que o sistema fica definido com uma única dimensão. É o caso de um tubo de pequena secção situado ao longo do eixo dos  $xx$  e contendo solução (Fig. I.3). Vamos supor que, efectivamente, só ocorre deslocamento de moléculas do soluto devido à difusão, que tende a anular as diferenças de concentração. Não há, portanto, deslocamento do solvente.

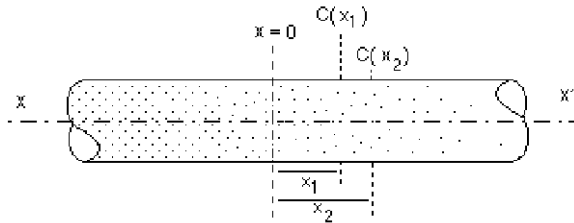


Fig. I.3 - Difusão monodireccional de um soluto num solvente suposto imóvel.

Supondo  $C_s(x_1) > C_s(x_2)$ , ou seja, se a corrente de difusão for positiva poderá verificar-se que

$$J_s = -D \frac{dC_s(x)}{dx} \quad \text{I.1}$$

onde a constante  $\mathbf{D}$  é designada de constante de difusão. A Eq. I.1 traduz a 1ª Lei de Fick da difusão que nos diz que: Para uma dada temperatura, a densidade da corrente do soluto é proporcional ao gradiente de concentração de soluto<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Na situação monodireccional caracterizada por uma direcção orientada ( $xx$ ) o gradiente de uma função é a derivada dessa função em ordem à variável  $x$  ou, podemos dizer, segundo a direcção dos  $xx$ .

Para um gradiente de concentração unitário, a densidade de corrente de um soluto é igual, em módulo, a **D** (Eq. I.1), indicando a maior ou menor facilidade de um soluto difundir num particular solvente, nas condições referidas, para uma dada temperatura. Como **D** é positiva, **J** é de sinal contrário ao gradiente de concentração. A constante **D** toma em consideração a acção motora resultante da agitação térmica, as forças resistentes de fricção do meio e outras possíveis causas de limitação dos movimentos moleculares. Esta constante, que é aceite como a grandeza que caracteriza o processo de difusão ou, indirectamente, a interacção soluto-solvente, tem dimensões de área sobre tempo, e costuma exprimir-se em  $\text{cm}^2\text{s}^{-1}$ . Pode mostrar-se que a constante de difusão está relacionada com o percurso livre médio das moléculas de soluto<sup>2</sup> através da equação

$$D = (1/3) \bar{\ell} \bar{v} \quad \text{I.2}$$

onde  $\bar{v}$  é a velocidade média das moléculas de soluto e  $\bar{\ell}$  o respectivo percurso livre médio.

Alguns valores da constante de difusão **D** em  $\text{cm}^2\text{s}^{-1}$ , onde se consideram moléculas de dimensões diversas, no ar e água, encontram-se no Quadro I.1.

Quadro I.1 – Constante de difusão de algumas moléculas no ar e água.

Molécula	D ( $\text{cm}^2\text{s}^{-1}$ )	Solvente (20 °C)
H <sub>2</sub>	0,64	Ar
H <sub>2</sub>	$5,8 \times 10^{-5}$	água
O <sub>2</sub>	0,18	Ar
O <sub>2</sub>	$1,0 \times 10^{-5}$	água
Hemoglobina	$6,9 \times 10^{-7}$	água
Glucose	$6,7 \times 10^{-6}$	água

Como resultado da difusão estabelece-se um deslocamento de moléculas do soluto entre regiões com diferentes concentrações do referido soluto. Consideremos, antes de mais, a própria natureza do processo da difusão. Para uma temperatura constante, o movimento de agitação térmica atinge todas as moléculas do soluto e origina que, nas regiões de maior concentração,

<sup>2</sup> Distância média entre duas colisões sucessivas.

a energia por mole de soluto seja maior.

Deste modo, quando existem gradientes de concentração, estabelecem-se correntes de difusão no sentido da maior para a menor concentração, para diminuir a energia livre do sistema<sup>3</sup>. O movimento estatístico das moléculas em solução vai assim permitir a transferência de energia durante o processo de difusão.

A corrente de difusão ocorre espontaneamente e é necessária despende energia para a evitar, mantendo o gradiente de concentração. No processo da difusão ocorre perda de energia devido ao trabalho das forças de fricção nos movimentos moleculares. Por outro lado, as direcções das trajectórias das moléculas de um soluto são aleatórias, de tal modo que só é possível prever-se estatisticamente o comportamento do soluto, em termos de tendência no movimento, quando são estabelecidas regiões de diferentes concentrações. Suponhamos, Fig. I.4, que no instante  $t = 0$  existe no tubo que contém a solução, uma descontinuidade brusca na concentração de um dado soluto, de tal maneira que

$$\begin{array}{lll} C = C_0 & \text{para} & x < 0 \\ C = 0 & \text{para} & x > 0 \end{array}$$

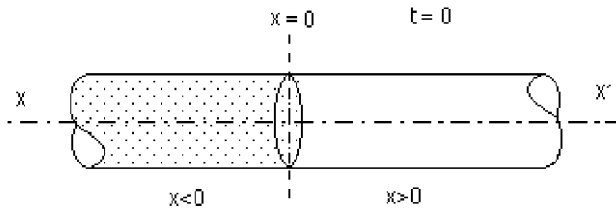


Fig. I.4 - Situação das fases solução e solvente puro para  $t=0$ .

ou, por outras palavras, para a esquerda da secção do tubo em  $x = 0$ , existe uma solução de concentração  $C_0$  e para a direita existe solvente puro. A distribuição das moléculas de soluto, em qualquer instante após o inicial, pode estudar-se

<sup>3</sup> - Outra maneira de dizer é que aumenta a entropia do sistema. Ambas as formas são consequências directas do 2º Princípio da Termodinâmica.

entrando em conta com a estatística do processo, ou seja, considerando a probabilidade de posição de qualquer das moléculas, num instante determinado.

De um modo geral, podemos dizer que, num instante  $t > 0$ , a concentração no tubo  $C(x)$  varia com o valor de  $x$  considerado mas, se supusermos as dimensões do tubo infinitas, verificamos que

$$C(x) \text{ tende para } C_0 \text{ quando } x \text{ tende para } -\infty$$

$$C(x) \text{ tende para } 0 \text{ quando } x \text{ tende para } +\infty$$

ou seja, num ponto distanciado suficientemente de  $x = 0$ , a concentração é  $C_0$  ou  $0$ , conforme nos tenhamos dirigido para a esquerda ou direita (Fig. I.5).

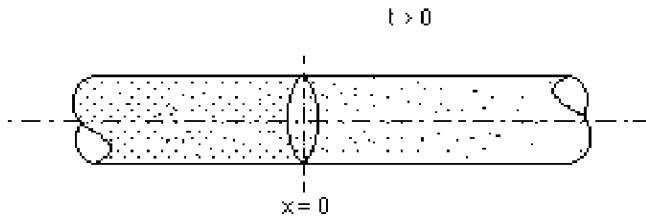


Fig. I.5 - Concentração no tubo que contém a solução para  $t > 0$ .

Suponhamos que a constante de difusão para as condições estabelecidas é  $D$ , em  $\text{cm}^2/\text{s}$ . Sem entrarmos em detalhes sobre a teoria da probabilidade, podemos descrever a concentração do soluto ao longo do eixo do  $xx$  através de curvas com forma semelhante às indicadas na Fig. I.6, para qualquer instante  $t$  que se considere.

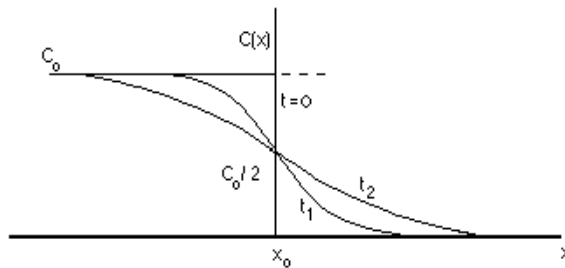


Fig. I.6 - Curvas de  $C(x)$  para diversos instantes.

A primeira derivada desta curva, ou seja, a curva que tem em cada ponto o valor do coeficiente angular da tangente à curva anterior é, como se pode demonstrar, uma curva de distribuição gaussiana (Fig. I.7). O significado desta curva é bem evidente; o processo de distribuição das moléculas efectua-se ao acaso e de acordo com a teoria das probabilidades.

No estudo da difusão pode ser considerada a variação da concentração do soluto, para qualquer valor de  $x$ , em função da variável tempo,  $t$ .

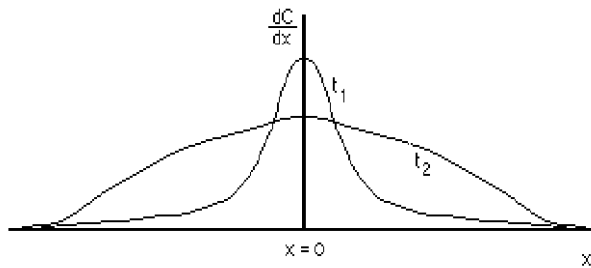


Fig. I.7 - Curva da derivada da concentração em função da distância.

Esta função cuja dedução se encontra no Apêndice I.4.1, deste capítulo, constitui a segunda lei de Fick, cuja expressão é

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad 1.3$$

ou seja, a primeira derivada da função  $C(x,t)$  em ordem ao tempo iguala a segunda derivada da mesma função em ordem ao espaço  $x$ , multiplicada pela constante de difusão  $D$ . As consequências desta lei analisam-se no Apêndice I.4.2.

É flagrante a semelhança entre esta equação e aquela que reflecte a condução térmica ao longo de uma barra numa situação análoga à anterior:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho s} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 1.4$$

onde  $T$ ,  $k$ ,  $\rho$  e  $s$  são a temperatura absoluta, condutibilidade térmica, a densidade da barra e o seu calor específico, respectivamente. As variáveis  $t$  e  $x$



têm significado igual ao anteriormente estabelecido. A primeira derivada da função  $T(x,t)$  em ordem ao tempo, iguala a segunda derivada da mesma função, em ordem a  $x$ , multiplicada por uma constante.

Esta semelhança mostra a identidade formal dos processos envolvidos.

### I.1.3 - Corrente molecular através de membranas homogêneas

Consideremos o dispositivo da Fig. I.8-a) onde uma membrana homogênea<sup>4</sup>  $M$  é aplicada de modo a separar os dois compartimentos **I** e **II**, contendo soluções com concentrações  $C_s^I$  e  $C_s^{II}$  de dado soluto.

A pressão hidrostática pode fazer-se variar em qualquer dos recipientes. Estes são de dimensões suficientemente grandes e dispõem de agitação de tal modo que podemos considerar, para cada recipiente, a concentração constante ao longo da experiência e igual em todos os pontos, mesmo junto da membrana.

Em qualquer ponto do interior da membrana, suposta de espessura  $\Delta x$ , pode definir-se a concentração de soluto  $C_s(x)$ , Fig. I.8-b). Designando por  $D_m$  a constante de difusão na fase que é o meio interior da membrana, a densidade de corrente de difusão do soluto  $J_s(x)$  segundo os  $xx$ , nesta fase, é pela 1ª lei de Fick

$$J_s(x) = - D_m \frac{dC_s(x)}{dx} \quad 1.5$$

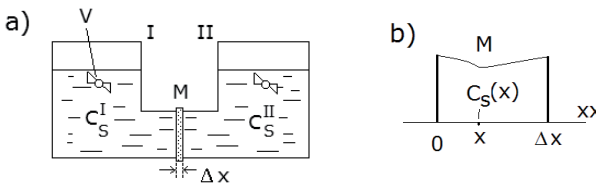


Fig. I.8 – a) Sistema de dois recipientes com soluções de um mesmo soluto com concentrações  $C_s^I$  e  $C_s^{II}$  separadas por uma membrana homogênea.  $V$  é um agitador. b) Fragmento da membrana

<sup>4</sup> - Uma membrana homogênea é um meio sem descontinuidades, permeável ao soluto e onde este é solúvel com solubilidade em geral diferente, da que apresenta nas soluções que contactam a membrana.

Após se ter atingido uma situação estacionária no processo e, supondo que  $C_S^I$  e  $C_S^{II}$  não variam, é de admitir que a concentração em qualquer ponto da membrana seja, também, constante no tempo.

Por outro lado, pela conservação da massa, numa situação estacionária, o número de moles de soluto que por  $\text{cm}^2$  e por segundo entra na membrana, deve igualar o que sai, então:

$$J_S(0) = J_S(\Delta x) \quad 1.6$$

ou seja, as densidades de corrente à entrada e saída têm de ser iguais.

O mesmo, aliás, se pode dizer para qualquer ponto do interior da membrana, donde

$$J_S(x) = J_S \quad 1.7$$

ou seja, a densidade de corrente de soluto é igual a  $J_S$  para qualquer valor de  $x$ . Não variando  $J_S$  no interior da membrana, também, pela Eq. 1.8, terá o gradiente  $\frac{dC_S(x)}{dx}$  de ser constante. A função  $C_S(x)$  é pois linear no interior da membrana (Fig. I.9).

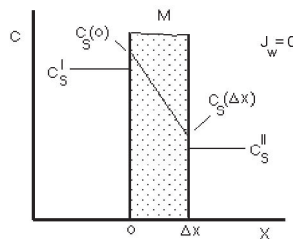


Fig. I.9 - Variação da concentração do soluto no interior da membrana.

Sendo  $\frac{dC_S(x)}{dx}$  constante, podemos escrever:

$$\frac{dC_S(x)}{dx} = \frac{C_S(\Delta x) - C_S(0)}{\Delta x}$$

então

$$J_S = -D_m \frac{C_S(\Delta x) - C_S(0)}{\Delta x}$$

$$= D_m \frac{C_S(0) - C_S(\Delta x)}{\Delta x} \quad 1.8$$

onde  $C_S(\Delta x)$  e  $C_S(0)$  são concentrações na fase da membrana, junto das inter-

faces em contacto com o soluto, nos recipientes **II** e **I**.

As concentrações  $C_s(0)$  e  $C_s(\Delta x)$  são, em geral, desconhecidas mas podem saber-se as concentrações  $C_s^I$  e  $C_s^{II}$  nos dois recipientes. Costuma definir-se o coeficiente de partição **K** que relaciona as concentrações  $C_s(0)$  e  $C_s(\Delta x)$ , respectivamente, com  $C_s^I$  e  $C_s^{II}$ , ou seja

$$\begin{aligned} C_s(0) &= K C_s^I \\ C_s(\Delta x) &= K C_s^{II} \end{aligned} \quad 1.9$$

Da Eq. 1.8 que escrevemos para  $J_s$  vem então:

$$J_s = D_m K \frac{\Delta C_s}{\Delta x} \quad 1.10$$

Com

$$\Delta C_s = C_s^I - C_s^{II} \quad 1.11$$

Notar que este  $\Delta C_s$  é de sinal contrário ao que matematicamente se obteria se fizéssemos a correspondência entre os  $\Delta x$  e os  $C_s$ . É, porém, prática corrente usar estes  $\Delta$ 's em estudos de difusão. É de notar ainda que, no que respeita à difusão,  $J_s$  é positiva se  $C_s^I > C_s^{II}$ .

Na prática, a Eq. 1.10 só nos interessa na forma:

$$J_s = P_s \Delta C_s \quad 1.12$$

Onde

$$P_s = \frac{D_m K}{\Delta x} \quad 1.13$$

é a permeabilidade da membrana (cujas dimensões são comprimento/tempo, por exemplo,  $\text{cm s}^{-1}$ ), uma definição conveniente, pois é quase sempre difícil avaliarem-se individualmente os parâmetros englobados em  $P_s$ .

A Eq. 1.12 diz-nos que a densidade de corrente de um soluto através de uma membrana homogénea e em situação estacionária, é directamente

proporcional à diferença de concentração do soluto através da membrana.

### I.1.4 - Corrente molecular através de membranas porosas

Corrente de soluto através de uma membrana poderá ocorrer não por dissolução do soluto na fase que constitui a membrana mas, devido à existência de canais (ou poros) na membrana (Fig.I.10).

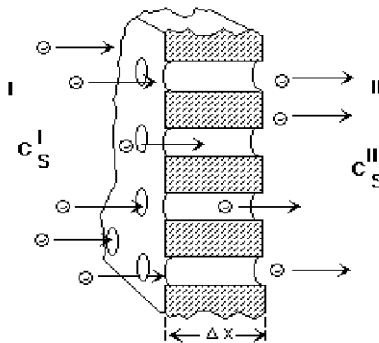
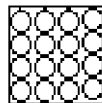


Fig. I.10 - Difusão molecular através de uma membrana porosa de espessura  $\Delta x$ .

Considerem-se soluções de concentrações  $C_s^I$  e  $C_s^{II}$  em contacto com a membrana e seja  $D$  a constante de difusão livre do soluto na solução em estudo. O material que constitui a membrana é impermeável à solução.

Supondo que os canais têm eixos normais à parede da membrana, a densidade de corrente por  $\text{cm}^2$  de espaço permeável, ou seja, a corrente através de um conjunto de poros de secções totalizando  $1 \text{ cm}^2$ , como se representa na Fig. I.11, é dada pela lei Fick:

$$J_{s(\text{poros})} = \frac{D}{\Delta x} \Delta C_s \tag{I.14}$$



$1 \text{ cm}^2$  de superfície permeável

Fig. I.11 - Seção livre imaginária de  $1 \text{ cm}^2$  constituída por poros justapostos.

Os poros encontram-se cheios de solução, sendo as concentrações de soluto, no interior dos poros junto às interfaces solução-membrana, iguais às das soluções em **I** e **II**.

O que nos interessa, de facto, é a densidade de corrente, em termos de unidade de área de membrana e não de secção permeável. Se a área total permeável média por  $\text{cm}^2$  é  $\phi_w$ , então a densidade de corrente referida à unidade de área de membrana é:

$$J_s = \phi_w J_s (\text{poros})$$

ou

$$J_s = \frac{\phi_w D}{\Delta x} \Delta C_s \quad \text{I.15}$$

$\phi_w$  é também a fracção do volume da membrana permeável à solução. Realmente, o volume total de membrana limitado por  $1 \text{ cm}^2$  de membrana é  $\Delta x \text{ cm}^3$  e o volume dos poros aí existentes é  $\phi_w \Delta x \text{ cm}^3$ . Deste modo  $\phi_w$  é também a fracção do volume total da membrana ocupado por canais.

A permeabilidade de uma membrana porosa com uma fracção de volume  $\phi_w$  é:

$$\omega' = \frac{\phi_w D}{\Delta x} \quad (\text{cm s}^{-1})$$

transformando-se a Eq. I.15 em

$$J_s = \omega' \Delta C_s \quad \text{I.16}$$

A equação de  $\omega'$  pode ser interpretada de dois modos, dependendo das dimensões relativas dos poros e das moléculas de soluto. Se os poros são muito maiores do que as moléculas, então predominam as interacções soluto-água durante o percurso do soluto nos poros. Neste caso, **D** é a constante de difusão para a difusão livre em água. Se as dimensões das moléculas do soluto são

próximas das dos poros, ocorrerá uma interação significativa do soluto com as paredes dos poros. A constante de difusão terá de tomar em consideração esta interação e terá um valor  $D'$  menor que o correspondente à difusão livre  $D$ .

### I.1.5 - Outra perspectiva sobre o comportamento das membranas

Consideremos agora uma situação análoga da esquematizada na Fig. I.8 mas com o compartimento **II** de dimensões muito pequenas. Pode ser um modelo onde este compartimento é uma pequena célula esférica, teórica, de volume  $V$  e mergulhada num grande recipiente, o compartimento **I**, com uma solução de um soluto capaz de atravessar a membrana celular. Supõe-se que só ocorrem trocas entre os dois meios por difusão do soluto e que, no instante inicial a concentração intracelular do soluto é zero. Se a difusão do soluto através da membrana for muito mais lenta do que nos meios intra e extra-celulares, podemos supor que a concentração se mantém constante nestes meios, incluindo as proximidades da membrana. Vamos chamar  $C_i$  e  $C_e$  as concentrações de soluto, respectivamente no interior e exterior da célula. Devido ao grande volume da solução exterior e pequena massa transferida,  $C_e$  vai manter-se constante enquanto que  $C_i$  é variável.

A densidade de corrente de difusão do soluto através da membrana pode escrever-se (Eq. 1.9)

$$J_s = P_s \Delta C = P_s (C_e - C_i)$$

mas

$$J_s = \frac{d(C_i V)}{dt} \frac{1}{A}$$

onde  $A$  é a área da membrana. Ou seja,  $J_s$  é, em cada instante, a variação da quantidade total de soluto, dentro da célula, por unidade de tempo, a dividir pela área da membrana. Então

$$\frac{dC_i}{dt} = -\frac{A P_s}{V} (C_i - C_e) \quad 1.17$$

ou, supondo que  $V$  e  $A$  se mantêm praticamente constantes durante a experiência,

$$\frac{dC_i}{dt} + k C_i = a \quad \text{I.18}$$

com

$$k = \frac{A P_s}{V} \quad \text{e} \quad a = k C_e$$

A solução da Eq. I.18 com  $C_i = 0$  para  $t = 0$  é

$$C_i = C_e (1 - e^{-kt}) = C_e - C_e e^{-kt} \quad \text{I.19}$$

A concentração intracelular  $C_i$  tende para o valor da concentração externa  $C_e$  segundo a função traduzida pela Eq. I.19. Esta equação é, afinal, a constante  $C_e$  menos uma função exponencial decrescente. Quando  $t$  aumenta, a exponencial  $C_e e^{-kt}$  tende para zero.

A representação gráfica da Eq. I.19 é uma curva que tende para um valor máximo, de saturação.

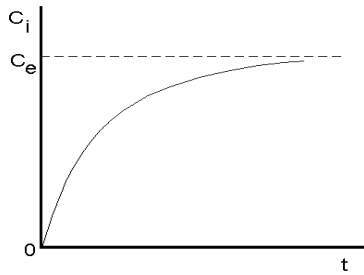


Fig. I.12 - Concentração intracelular  $C_i$  em função do tempo.

No caso de uma célula esférica de raio  $R$ ,  $A = 4\pi R^2$  e  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , o valor da constante  $k$  é então

$$k = \frac{3}{R} P_s \quad \text{I.20}$$

Esta constante determina a velocidade com que a concentração tende para a saturação. Para  $R = 0,1$  cm e  $P_s$  em  $\text{cm s}^{-1}$ ,  $k = 30 \times P_s \text{ s}^{-1}$ ; para  $R = 30 \mu\text{m}$ ,  $k$

$= 1000 \times P_s \text{ s}^{-1}$ .

As curvas **1** e **2** da Fig. I.13 são as representações gráficas da Eq. I.19, respectivamente, para  $k = 1000 \times P_s \text{ s}^{-1}$  e  $k = 30 \times P_s \text{ s}^{-1}$ . A saturação é atingida muito mais rapidamente para o menor raio.

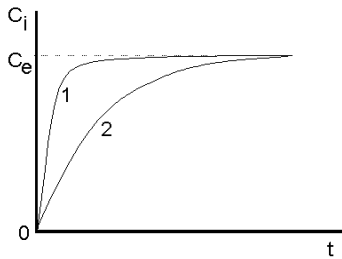


Fig. I.13 - Representação gráfica da Eq. I.19 respectivamente para  $k = 1000 \times P_s \text{ s}^{-1}$  (Curva 1) e  $k = 30 \times P_s \text{ s}^{-1}$  (Curva 2).

Outra forma de escrever a Eq. I.19 é

$$\ln \frac{C_e - C_i}{C_e} = -kt \tag{I.21}$$

ou seja, o logaritmo da diferença relativa das concentrações entre os dois compartimentos é uma função linear do tempo (Fig. I.14).

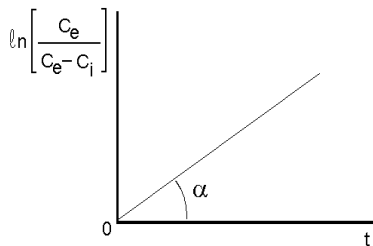


Fig. I.14 - Representação gráfica da Eq. I.21.

Para moléculas esféricas do soluto, de raio conhecido, sabendo os



valores de  $C_e$  e  $C_i$ , para diversos tempos, de modo a traçar-se a recta, pode calcular-se a permeabilidade da membrana utilizando a relação

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{R} P_s \quad 1.22$$

Se considerarmos a situação contrária à anterior, ou seja, a de uma célula com uma concentração  $C_o$  de soluto, a ser colocada num grande recipiente com uma solução do mesmo soluto e concentração  $C_e$ , concluímos que a concentração interior varia, em função do tempo, de acordo com a equação

$$C_i - C_e = (C_o - C_e) e^{-kt} \quad 1.23$$

A concentração interior  $C_i$  tende exponencialmente para o valor  $C_e$ .

### 1.1.6 - Corrente de soluto com corrente de água

Em seguida, vamos obter as equações da densidade de corrente de soluto quando há movimento de solvente (água) através da membrana, com arrastamento de moléculas de soluto. Numa situação estacionária, consideremos a densidade de corrente de água  $\mathbf{J}_w$  em moles  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ , como temos feito até aqui, para os solutos. Sendo  $\bar{V}_w$  o volume parcial molar da água (ou seja o volume em  $\text{cm}^3$  por mole de água), a densidade de corrente de água expressa em volume, correspondente a  $\mathbf{J}_w$  é:

$$\mathbf{J}_v = \bar{V}_w \mathbf{J}_w \quad 1.24$$

vindo  $\mathbf{J}_v$  em  $\text{cm} \text{ s}^{-1}$ . A densidade de corrente de soluto arrastada por  $\mathbf{J}_v$  é:

$$\mathbf{J}_s = \bar{C}_s \mathbf{J}_v \quad 1.25$$

A concentração  $C_s$  é a concentração média no interior da membrana, ou seja:

$$\bar{C}_s = \frac{C_s^I + C_s^{II}}{2} \quad (\text{membrana porosa}) \quad 1.26$$

e

$$\bar{C}_s = K \frac{C_s^I + C_s^{II}}{2} \quad (\text{membrana homogénea}) \quad 1.27$$

Na maior parte dos casos devemos entrar em consideração com as moléculas do soluto que, embora arrastadas pela corrente do solvente, embatem na parede da membrana e não penetram através desta. Estas moléculas de soluto "reflectidas" representam uma fracção  $\sigma$  do total, constituindo esta fracção o coeficiente de reflexão de Staverman. Entrando com este coeficiente, vem para a corrente de soluto arrastado por  $\mathbf{J}_v$  :

$$J_s (\text{arrast.}) = \bar{C}_s (1 - \sigma) J_v \quad 1.28$$

As equações gerais para as densidades de corrente de solutos não iónicos através de membranas homogéneas e porosas são respectivamente:

$$J_s = P_s \Delta C_s + \bar{C}_s (1 - \sigma) J_v \quad 1.29$$

e

$$J_s = \omega' \Delta C_s + \bar{C}_s (1 - \sigma) J_v \quad 1.30$$

A primeira parcela dos segundos membros é o termo de difusão; a segunda parcela é o termo de arrastamento.

Veremos que há conveniência, por vezes, em usar diferenças de pressão osmótica,  $\Delta\pi_s$ , entre os dois compartimentos, para um dado soluto, em substituição de diferenças de concentração,  $\Delta C_s$ . Por exemplo, a Eq. I.12,  $J_s = P_s \Delta C_s$ , pode ser escrita na forma seguinte:

$$J_s = \omega \Delta\pi_s \quad 1.31$$

onde

$$\Delta\pi_s = RT \Delta C_s \quad 1.32$$

vem da aplicação da equação de Van't Hoff a temperatura constante e

$$\omega = \frac{KD_m}{RT\Delta x} = \frac{P_s}{RT} \quad (\text{mole dyn}^{-1}\text{s}^{-1}) \quad \text{I.33}$$

A quantidade  $\omega$  é uma nova expressão da permeabilidade da membrana homogénea embora difira de  $P_s$  pelo factor  $\frac{1}{RT}$ , (Eq. I.33).

A permeabilidade de uma membrana porosa pode também ser escrita numa nova forma:

$$\omega = \frac{\phi_w D}{RT \Delta x} = \frac{\omega'}{RT} \quad (\text{mole dyn}^{-1}\text{s}^{-1}) \quad \text{I.34}$$

A corrente total de um soluto não electrolítico, através de uma membrana qualquer, pode então tomar a forma geral:

$$J_s = \omega \Delta\pi_s + \bar{C}_s (1 - \sigma) J_v \quad \text{I.35}$$

em que a primeira parcela é devida à difusão originada pela diferença das concentrações do soluto, através da membrana e a segunda parcela é a corrente de soluto resultante do deslocamento de convecção do solvente.

### I.1.7 - As forças de difusão

As forças no nosso mundo macroscópico são geradas por gradientes de formas de energia potencial. Por exemplo, gradientes de energia potencial eléctrica, de energia potencial de pressão e de energia potencial gravitacional geram, respectivamente, forças eléctricas, forças de pressão e forças gravitacionais.

A força motora no processo de difusão de um componente  $i$  é fisicamente interpretada como resultando do gradiente<sup>5</sup> de uma forma de

---

<sup>5</sup> Em termos gerais, gradiente de uma função, segundo uma dada direcção, é a variação do valor da função, por unidade de comprimento, segundo essa direcção. No mundo macroscópico as forças são geradas por gradientes de formas de energia potencial. Gradientes de potencial eléctrico - campo eléctrico (força/carga); o gradiente de energia potencial de pressão - forças de pressão; o gradiente de energia potencial gravitacional - a força gravítica; o gradiente de potencial químico pode ser visto como mais um caso.

energia potencial, o potencial químico  $\mu_i$ , que corresponde a energia livre por mole do referido componente (Cap. VI.6) a pressão e temperatura constantes. O potencial químico aumenta com o aumento da concentração molar do componente.

Quando se têm variações na concentração de um soluto, ocorre difusão, e a força por mole de soluto que vai actuar no processo é:

$$F_D = - \frac{d\mu}{dx} \quad 1.36$$

ou seja, a força de difusão por mole  $F_D$  é igual ao gradiente do potencial químico  $\mu$ , segundo a direcção  $x$  multiplicado por  $-1$ .

Pode ainda demonstrar-se que o potencial químico de um soluto em solução diluída de concentração,<sup>6</sup>  $C_s$  é:

$$\mu = \mu_0 + RT \ln C_s \quad 1.37$$

$\mu_0$  é uma constante que depende da temperatura e pressão escolhidas para as condições padrão.

A dependência do potencial químico na pressão é insignificante para os solutos, mas pode ser de importância em solventes, como a água.

### 1.1.8 - Corrente de água e pressão osmótica

Um diagrama de um arranjo experimental, destinado ao estudo da corrente de água através de uma membrana, está esquematizado na Fig. I.15. A pressão hidrostática do reservatório II é criada pelo êmbolo E.

<sup>6</sup> Em rigor não é a concentração mas a actividade da solução que deve ser considerada. A aproximação só é aceitável para soluções muito diluídas.

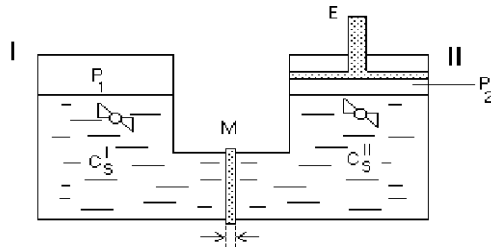


Fig. I.15 - Sistema para o estudo da densidade de corrente de solvente.

Começemos por uma situação simples, supondo que as moléculas do soluto nas soluções **I** e **II**, separadas pela membrana, são demasiado grandes para a atravessarem. Suponhamos ainda que:

$$C_s^{\text{II}} > C_s^{\text{I}} \quad \text{I.38}$$

e que não existe diferença de pressão hidrostática entre os compartimentos.

Nestas condições, o potencial químico do soluto no compartimento **II** é superior ao do compartimento **I**. Haverá uma tendência para se estabelecer o equilíbrio entre estes potenciais, mas esta tendência não pode ser satisfeita com transferência de moléculas do soluto, para as quais a membrana é impermeável. Só moléculas de água poderão atravessar a membrana.

A diferença de potencial químico da água entre **II** e **I** origina uma densidade de corrente dita osmótica, que se verifica proporcional à diferença de concentrações ( $C_s^{\text{II}} - C_s^{\text{I}}$ ), ou seja:

$$J_{W1} = K (C_s^{\text{II}} - C_s^{\text{I}}) = -K \Delta C_s \quad \text{I.39}$$

Com

$$\Delta C_s = C_s^{\text{I}} - C_s^{\text{II}} \quad \text{I.40}$$

A densidade de corrente é positiva quando  $C_s^{\text{II}} > C_s^{\text{I}}$  corresponde ao deslocamento de água do compartimento **I** para o **II**.

Uma segunda causa de deslocamento de moléculas de água através da membrana, resulta de gradientes de pressão. Quando se tem solvente sujeito unicamente a um gradiente de pressão, segundo uma dada direcção  $xx$ , a

densidade de corrente do solvente, pode escrever-se:

$$J_w = -B \frac{dP}{dx} \quad \text{I.41}$$

com **B** constante, que é uma equação formalmente análoga à da 1ª lei de Fick. A densidade de corrente é proporcional ao gradiente de pressão.

Quando o gradiente de pressão  $\Delta P$  se estabelece através de uma membrana de espessura  $\Delta x$  e ocorre regime estacionário, pode escrever-se:

$$J_{w2} = B \frac{\Delta P}{\Delta x}$$

ou

$$\begin{aligned} J_{w2} &= \frac{B}{\Delta x} \Delta P \\ &= L_p \Delta P \end{aligned} \quad \text{I.42}$$

Para uma dada membrana, o coeficiente de filtração,  $L_p$ , é uma constante e exprime-se em mole  $\text{dyn}^{-1}\text{s}^{-1}$ .

Se na Fig. I.15  $P_{II} > P_I$  é produzida uma corrente dita hidráulica, de módulo:

$$J_{w2} = L_p (P_{II} - P_I) \quad \text{I.43}$$

com a água a deslocar-se do compartimento **II** para **I**, ou seja, segundo a nossa convenção,  $J_{w2}$  terá de ser negativa.

Definindo  $\Delta P = P_I - P_{II}$ , mantendo a convenção dos índices para os  $\Delta$ 's, vem

$$J_{w2} = L_p \Delta P \quad \text{I.44}$$

que tem valor negativo, para as condições consideradas.

Então a densidade de corrente total de água é:

$$\begin{aligned} J_w &= J_{w2} + J_{w1} \\ &= L_P \Delta P - K \Delta C_s \end{aligned}$$

Recordando que  $\Delta C_s = \frac{\Delta \pi_s}{RT}$  e substituindo, vem:

$$J_w = L_P \Delta P - \frac{K}{RT} \Delta \pi_s \quad 1.45$$

Como  $\Delta P$  e  $\Delta \pi_s$  são ambas diferenças de pressão, terá de ser:

$$\frac{K}{RT} = L_P$$

então

$$J_w = L_P (\Delta P - \Delta \pi_s) \quad 1.46$$

A equação da corrente de água  $J_w$  terá de ser alterada, de modo a ficar aplicável a sistemas com membranas permeáveis ao soluto.

Neste caso, visto uma fracção das moléculas do soluto atravessarem a membrana, a diferença dos potenciais químicos do solvente, nos dois recipientes, irá decrescer, pelo que vai diminuir a corrente de água através da membrana. Este facto é contemplado através do coeficiente de reflexão  $\sigma$  na expressão de  $J_w$ :

$$J_w = L_P (\Delta P - \sigma \Delta \pi_s) \quad 1.47$$

Esta é a equação de Kedem-Katchasky para a densidade de corrente de água. Esta expressão descreveu satisfatoriamente os resultados obtidos em numerosas situações experimentais, tais como no transporte da água no intestino delgado e tubos proximais do rim.

Nesta equação não é considerada a corrente de água, em geral despre-

---

zível, provocada pelas forças eléctricas.

Se os dois reservatórios se encontram separados por uma membrana semipermeável ideal ( $\sigma=1$ ) e ocorre equilíbrio para as diferenças de pressão e de concentração existentes, ou seja, se  $J_w = 0$ , nestas condições, é:

$$\Delta P = \Delta \pi_s \quad 1.48$$

ou seja, a diferença de pressão hidrostática necessária para equilibrar a corrente osmótica entre os dois compartimentos, é a diferença entre as pressões osmóticas nos dois compartimentos.

### 1.1.9 - Obtenção da 1ª Lei de Fick a partir de $F_D$

Com os conhecimentos já adquiridos podemos deduzir a expressão, que impusemos, da 1ª Lei de Fick e apresentar alguns novos conceitos. Consideremos um tubo com  $1 \text{ cm}^2$  de secção recta e suponhamos que ocorre difusão de um soluto numa solução contida no tubo.

Suponhamos que não há deslocamento de solvente e que consideramos o eixo do tubo um eixo orientado (xx) com origem na entrada e sentido positivo, o indicado pela seta (Fig. I.16).

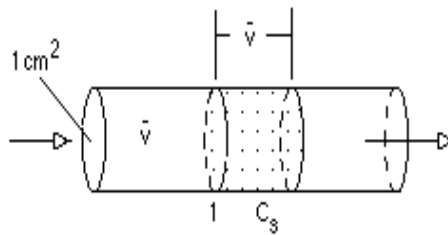


Fig. I.16 - Partículas de soluto deslocando-se com velocidade  $\bar{v}$ , devido a difusão, num tubo com secção recta unitária.

A força de difusão a actuar sobre uma partícula individual de soluto é a força de difusão por mole,  $F_D$ , a dividir pelo número de Avogadro  $A$ , ou seja,

$$F = \frac{F_D}{A} \quad 1.49$$

Se a velocidade média de deslocamento das moléculas de soluto for  $\bar{v}$



e a concentração molar de soluto  $C_s$ , o número de moles de soluto que num segundo, passa através da secção 1 (Fig. I.16), é o número de moles contido num cilindro de volume  $1 \times \bar{v}$  cm<sup>3</sup> sendo 1 cm<sup>2</sup> a área da base e  $\bar{v}$  a distância média percorrida pelas partículas durante um segundo. Então a densidade de corrente de soluto é:

$$J_s = C_s \bar{v} \quad 1.50$$

As forças que actuam sobre as moléculas de soluto são a força motora da difusão  $f$  e a força de fricção  $f_t$ , resultante do atrito com as moléculas do solvente. A resultante destas forças é, pela equação fundamental da dinâmica:

$$f + f_t = m a \quad 1.51$$

onde  $a$  é a aceleração da molécula de soluto.

A força de atrito  $f_t$  opõe-se ao movimento e o seu valor é tanto maior quanto maior for a velocidade das moléculas de soluto

$$f_t = -k \bar{v} \quad 1.52$$

Contudo, quando se tem a situação estacionária onde é constante a velocidade das moléculas de soluto, como vimos no transporte através de membranas, a aceleração das moléculas terá de ser nula ( $a = 0$ ), então:

$$f = -f_t \quad 1.53$$

e

$$f = k \bar{v} \quad 1.54$$

Esta equação costuma ser apresentada na forma:

$$\bar{v} = u' f \quad 1.55$$

onde  $u' = \frac{1}{k}$  é a mobilidade molecular do soluto, constante que depende do soluto, do solvente e da temperatura. A mobilidade molecular representa também a velocidade média das moléculas do soluto por unidade de força motora.

A força de difusão que actua sobre uma mole de soluto, supondo a mesma direcção de deslocamento para todas as moléculas de soluto, é:

---


$$F_D = f \times A \quad 1.56$$

onde **A** é o número de Avogadro.

Voltando à relação, já referida, entre a força de difusão por mole e o gradiente do potencial químico,

$$F_D = - \frac{d\mu}{dx} \quad 1.57$$

Donde

$$f = - \frac{1}{A} \frac{d\mu}{dx} \quad 1.58$$

Então, vem para a densidade de corrente de difusão do soluto,

$$\begin{aligned} J_s &= C_s u' f \\ &= - \frac{C_s u'}{A} \frac{d\mu}{dx} \end{aligned} \quad 1.59$$

e derivando  $\mu$  em ordem a  $x$

$$= - \frac{C_s u'}{A} \left( RT \frac{dC_s}{dx} \frac{1}{C_s} \right) \quad 1.60$$

Fazendo

$$D = \frac{u' RT}{A} \quad 1.61$$

vem a 1ª equação de Fick da difusão

$$J_s = - D \frac{dC_s}{dx}$$

### 1.1.10 - Corrente e potencial eléctricos devidos à difusão de iões

Há interesse em estendermos a teoria que temos vindo a tratar aos solutos iónicos pois, de um modo geral, as soluções biológicas são soluções iónicas.

A equação do potencial químico, que vimos para soluções de não elec-

---

trólitos, pode ser generalizada às soluções iónicas.

Para o caso dos iões, além do potencial químico e potencial de pressão, interessa o potencial eléctrico.

Consideremos algumas noções referentes às propriedades eléctricas dos iões em solução, que usaremos a seguir.

Vamos designar a valência da espécie iónica  $i$ , por  $Z_i$ , indicando sinal e carga. Por exemplo, para  $Cl^-$ ,  $K^+$  e  $Ca^{++}$  é:  $Z_{Cl^-} = -1$ ,  $Z_{K^+} = +1$  e  $Z_{Ca^{++}} = +2$ .

Pode interessar o número de coulomb transportado por uma mole de iões. Obviamente depende da valência e do sinal dos iões.

Com a notação proposta, a carga em coulomb de uma mole de iões é  $AeZ_i$  ou  $FZ_i$  (onde  $A$  é o número de Avogadro, e a carga do electrão e o valor  $F = Ae = 6,023 \times 10^{23} \times 1,6 \times 10^{-12}$  coulomb = 96500 coulomb). A quantidade  $F$  é chamada de Faraday.

Designemos por  $V$  a energia potencial eléctrica por unidade de carga de iões positivos (joules/coulomb).

A energia potencial eléctrica de 1 mole de iões quaisquer é, então:

$$F Z_i V \quad \text{joules/mole} \quad 1.62$$

Define-se densidade de corrente eléctrica, a carga eléctrica que, por unidade de tempo, atravessa a unidade de área colocada normalmente à direcção de propagação. Ao determinar esta carga, devemos considerar que o efeito produzido por cargas positivas a deslocarem-se num sentido é igual ao produzido por cargas negativas a deslocarem-se em sentido oposto.

O sentido que se convencionou para a densidade de corrente é o sentido do deslocamento das cargas positivas (ou o contrário ao deslocamento das cargas negativas).

Facilmente concluímos que uma densidade de corrente eléctrica  $J_i$  pode obter-se a partir da relação

$$J_i = \rho \bar{v} \quad 1.63$$

onde  $\rho$  é a densidade espacial de carga (carga por unidade de volume) e  $\bar{v}$  a velocidade média dos iões. Esta densidade de corrente é expressa em coulomb  $cm^{-2}s^{-1}$ .

Se  $C$  é a concentração molar dos iões, então:

$$\rho = CFZ \quad (\text{carga por unidade de volume}) \quad 1.64$$

onde  $F$  é o Faraday e  $Z$  indica a carga e sinal dos iões. Então, a densidade de corrente eléctrica correspondente à densidade de corrente molecular de difusão do soluto iónico  $i$ ,  $J_s = C_s \bar{v}$ , é:

$$\begin{aligned} J_i &= C_s F Z_i \bar{v} \\ &= J_s F Z_i \end{aligned} \quad 1.65$$

A densidade de corrente de difusão para solutos não iónicos em moles  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  é expressa pela Eq. I.59. Substituindo nesta expressão a derivada do potencial químico pelo seu valor, a equação para o soluto  $i$ , vem:

$$J_i = - \frac{RT}{A} \frac{u' dC_s}{dx} Z_i F \quad 1.66$$

É evidente que o sentido da densidade de corrente eléctrica depende do sinal da valência  $Z_i$ .

Deslocamentos de iões criam campos eléctricos cujos efeitos se assemelham aos dos campos eléctricos exteriores. Quando se tem a difusão de iões de sinais contrários, através de membranas, com diferentes mobilidades a travessia mais rápida dos iões mais móveis vai criar uma diferença de potencial através da membrana. Esta diferença de potencial chama-se potencial de difusão iónica e vai ter como efeito imediato tender a acelerar a difusão dos iões mais lentos e a tornar mais lenta a difusão dos iões mais móveis. Todo este processo ocorre sem haver transgressão da electroneutralidade.

### 1.1.11 - Relação entre mobilidade molecular e eléctrica

Já definimos mobilidade molecular  $u'$  como sendo a relação entre a velocidade média das moléculas e a força que actua individualmente sobre estas, com unidades  $\text{cms}^{-1}\text{dyn}^{-1}\text{mole}$ . Quando se trata de iões, esta definição

subsiste, mas é mais comum usar-se a chamada mobilidade eléctrica dos iões. A mobilidade eléctrica  $u$  é a velocidade média dos iões por unidade de campo eléctrico aplicado, ou seja  $u = \frac{\bar{v}}{E}$ , e é expressa com frequência, em

em  $s^{-1}V^{-1}cm$ . As duas mobilidades são, obviamente, diferentes já que campo eléctrico é a força que actua na unidade de carga positiva, valor que não iguala, em geral, a força a actuar por partícula.

Para um ião de carga  $Z_i e$ , com  $e$  carga do electrão, a força que actua sobre o ião, quando sujeito à acção do campo eléctrico  $E$ , é, em módulo:

$$f = |Z_i| e E \quad 1.67$$

então,

$$u' = \frac{\bar{v}}{f} = \frac{\bar{v}}{|Z_i| e E} = \frac{u}{|Z_i| e}$$

$$u' = \frac{u}{|Z_i| e} \quad 1.68$$

Utilizando esta relação na expressão da densidade de corrente eléctrica correspondente à difusão de iões de carga  $Z_i e$ , vem

$$J_i = - \frac{RTu}{|Z_i|} \frac{dC_s}{dx} Z_i \quad 1.69$$

A mobilidade eléctrica para a maioria dos iões com interesse biológico, para soluções muito diluídas e a 25 °C, varia de  $5 \times 10^{-4}$  a  $30 \times 10^{-4}$  (cm/s)/(V/m).

### I.1.12 - Densidade de corrente eléctrica iónica em campos eléctricos

Já vimos que a densidade de corrente eléctrica para iões com densidade espacial de carga  $\rho$  e movendo-se com velocidade média  $\bar{v}$  é:

$$J_i = \rho \bar{v} \quad 1.70$$

Se a velocidade dos iões resulta da acção do campo eléctrico e  $u_i$  é a mobilidade electrónica, vem:

$$\bar{v} = u_i E \quad 1.71$$

Se a concentração dos iões é  $C_i$  e a sua valência  $Z_i$ , temos:

$$J_i = C_i |Z_i| F \bar{v} = C_i |Z_i| F u_i E \quad 1.72$$

Utiliza-se o módulo de  $Z_i$  porque o campo eléctrico actua produzindo corrente sempre no sentido do campo, ou seja, cargas positivas a deslocarem-se no sentido do campo e cargas negativas em sentido contrário.

O campo eléctrico está relacionado com o potencial eléctrico pela equação:

$$E = - \frac{dV}{dx} \quad 1.73$$

ou seja, a intensidade do campo segundo a direcção  $x$  é o gradiente do potencial segundo essa direcção vezes  $-1$ .

A densidade de corrente iónica produzida pelo referido gradiente de potencial eléctrico é, usando raciocínio idêntico ao caso da difusão,

$$J_i = - u_i C_i F |Z_i| \frac{dV}{dx} \quad (\text{coulomb cm}^{-2}\text{s}^{-1}) \quad 1.74$$

A Eq. 1.74 permite-nos chegar de imediato a uma expressão com interesse. Suponhamos que se aplica o gradiente de potencial  $\frac{dV}{dx}$  a uma solução de um electrólito forte biiónico, monovalente e de concentração  $C$ . A densidade de corrente transportada pelos iões negativos é

$$J_- = - u_- C F \frac{dV}{dx}$$

E pelos positivos

$$J_+ = -u_+ C F \frac{dV}{dx} \quad 1.75$$

A densidade de corrente total é

$$J = J_- + J_+ = -C F \frac{dV}{dx} (u_+ + u_-) \quad 1.76$$

E as fracções da densidade de corrente transportadas pelos dois iões (ou números de transporte  $f$ ) são

$$\begin{aligned} f^- &= \frac{J_-}{J} = \frac{J_-}{J_- + J_+} = \frac{u_-}{u_- + u_+} & e \\ f^+ &= \frac{J_+}{J} = \frac{J_+}{J_- + J_+} = \frac{u_+}{u_- + u_+} & 1.77 \end{aligned}$$

ou seja, se  $u_+ > u_-$  também é  $f_+ > f_-$ , donde a corrente dos iões de maior mobilidade é maior do que a dos de menor mobilidade.

Numa solução de um ácido forte AcH com  $u_{Ac^-} = 60$  nm/s e  $u_{H^+} = 300$  nm/s a participação dos iões negativos na corrente total é  $60/360 = 0,17$  (17 %).

### I.1.13 - Equação de Nernst-Planck

Quando sobre iões de uma dada espécie  $i$  actuam, simultaneamente, forças de difusão e forças eléctricas, a densidade de corrente eléctrica total é dada pela soma das Eq. I.69 e I.74.

$$\begin{aligned} J_i &= -\frac{RT u_i}{|Z_i| e A} Z_i F \frac{dC_i}{dx} - u_i C_i F |Z_i| \frac{dV}{dx} \\ &= -\left( \frac{u_i Z_i}{|Z_i|} R T \frac{dC_i}{dx} + u_i C_i F |Z_i| \frac{dV}{dx} \right) & 1.78 \end{aligned}$$

que é uma equação fundamental da Biofísica das membranas, conhecida por equação de Nernst-Planck.

### I.1.14 - Potencial electroquímico

Já vimos que, nas soluções iónicas, além das forças originadas pelos gradientes de potencial químico, há a actuar forças resultantes dos gradientes de potencial eléctrico, ou seja, acções de campos eléctricos que podem ser os campos das próprias cargas iónicas.

Alguns autores utilizam a soma do potencial químico e da energia eléctrica por mole, designando-a por potencial total ou electroquímico de uma espécie iónica  $i$ , ou seja,

$$\tilde{\mu}_i = \mu_{oi} + RT \ln C_i + FZ_i V \quad 1.79$$

onde  $C_i$  é a concentração da espécie iónica  $i$ .

Se para uma dada espécie iónica existe equilíbrio através duma membrana, ou seja,  $J_i = 0$ , significando que a densidade de corrente eléctrica dessa espécie iónica através da membrana é zero, podemos dizer que o potencial electroquímico dessa mesma espécie iónica é igual nos dois lados da membrana.

Chamando  $\tilde{\mu}_i^I$  e  $\tilde{\mu}_i^{II}$ ,  $C_i^I$  e  $C_i^{II}$  respectivamente aos potenciais electroquímicos e concentrações do ião  $i$  nos lados **I** e **II** da membrana e  $V^I$  e  $V^{II}$  aos potenciais nos lados **I** e **II** vem, no equilíbrio,  $\tilde{\mu}_i^I = \tilde{\mu}_i^{II}$ , ou seja:

$$\mu_{oi}^I + RT \ln C_i^I + F Z_i V^I = \mu_{oi}^{II} + RT \ln C_i^{II} + F Z_i V^{II}$$

ou

$$F Z_i (V^I - V^{II}) = -RT \ln \frac{C_i^I}{C_i^{II}} \quad 1.80$$

Consideraram-se as condições de pressão e temperatura iguais de ambos os lados da membrana, de modo a que  $\tilde{\mu}_{oi}^I = \tilde{\mu}_{oi}^{II}$ .

Então,



$$\Delta V = V_i^I - V_i^{II} = -\frac{R T}{F Z_i} \ln \frac{C_i^I}{C_i^{II}} \quad 1.81$$

$Z_i$  contempla a carga e sinal do respectivo ião. Esta expressão é a equação de Nernst do equilíbrio electroquímico.

$\Delta V$  traduz a diferença de potencial eléctrico que terá de existir através da membrana, para que, à temperatura  $T$ , a espécie iónica  $i$  esteja em equilíbrio, tendo as concentrações  $C_i^I$  e  $C_i^{II}$  nos dois lados da membrana. Estas concentrações mantêm-se constantes se as condições prevalecerem.

Para uma dada relação entre concentrações de equilíbrio, de uma certa espécie iónica, corresponde uma certa diferença de potencial de equilíbrio através da membrana. O potencial eléctrico compensará a diferença de potencial químico produzido pela diferença de concentrações.

### 1.1.15 - Propriedades coligativas

Em Biologia ocorrem soluções de sólidos, líquidos e gases em água. As propriedades das soluções são importantes para a compreensão de numerosos fenómenos de interesse biomédico.

As propriedades gerais das soluções foram classificadas em três grupos: aditivas, constitutivas e coligativas. As primeiras estão relacionadas com a massa e as segundas dependem da natureza do soluto. As propriedades coligativas dependem unicamente do número de partículas existentes por unidade de volume de solução, portanto, independentes de natureza do soluto.

As propriedades coligativas das soluções são:

- 1) O abaixamento relativo da tensão de vapor;
- 2) O abaixamento da temperatura de congelação (ponto crioscópico);
- 3) A elevação da temperatura de ebulição (ponto ebulioscópico);
- 4) A osmose;
- 5) Abaixamento da tensão superficial <sup>7</sup>.

A primeira destas propriedades indica que, para qualquer temperatura,

<sup>7</sup> - Para muito baixas concentrações o abaixamento da tensão superficial é também uma propriedade coligativa. Estudaremos mais tarde a tensão superficial.

a pressão de vapor do solvente em solução é menor do que a pressão de vapor do solvente puro, à mesma temperatura,

Numa solução diluída, verifica-se que o abaixamento relativo da pressão de vapor do solvente, em relação à pressão de vapor do solvente puro, é proporcional à concentração molar da solução. É a 1ª lei de Raoult:

$$\frac{P_0 - P}{P_0} = K C_s \quad 1.82$$

onde, para dada temperatura,  $P_0$  é a pressão de vapor do solvente puro,  $P$  a pressão de vapor do solvente na solução,  $C_s$  a concentração molar e  $K$  uma constante.

Para o caso do solvente água, o gráfico  $P = P(t)$ , para os diferentes estados, pode esclarecer-nos quanto às propriedades coligativas das soluções aquosas.

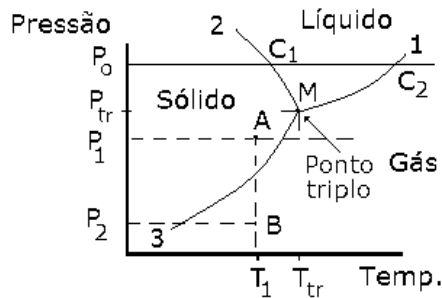


Fig. I.17 - Gráfico  $P(t)$  para os diferentes estados da água.

Consideremos as curvas **1**, **2** e **3** convergentes no ponto **M** (ponto triplo).

A curva **1** traduz a variação da pressão de vapor da água líquida com a temperatura, e separa os pares de valores  $(P, t)$  para os quais a água é líquida ou gasosa.

A curva **2** é a função  $P(t)$  correspondente à fusão do gelo e separa os pares de valores  $(P, t)$  para os quais a água será sólida ou líquida.

A curva **3** indica os valores dos pontos  $(P, t)$  para os quais ocorre sublimação do gelo e separa os pares de valores  $(P, t)$  para os quais a água se

encontra no estado sólido dos pontos onde se encontrará na forma de vapor.

O ponto **M**, conhecido por ponto triplo, corresponde àquele par de valores ( $P$ ,  $t$ ) único, para o qual gelo, água líquida e vapor de água ocorrem simultaneamente e em equilíbrio.

Consideremos o que sucede quando se aumenta a temperatura a pressão constante, por exemplo, para  $P = P_0$  (linha a cheio fino  $\overline{P_0C_2}$ ). Para baixas temperaturas a água apresenta-se no estado sólido; no ponto  $C_1$  ocorre fusão e entre  $C_1$  e  $C_2$  a água encontra-se no estado líquido; em  $C_2$  ocorre ebulição, passando a água ao estado gasoso (vapor) a partir desta temperatura.

Considerando uma pressão abaixo do ponto triplo para início da recta paralela às abcissas, (linha a tracejado  $\overline{P_1A}$ ), verificamos que o aumento de temperatura leva directamente à passagem do estado sólido ao gasoso, sem ocorrer estado líquido.

A técnica de "freeze-drying", ou secagem por sublimação, de grande uso em histologia e na industria farmacêutica, é uma aplicação da última propriedade, onde esta técnica é utilizada para o armazenamento e posterior estudo de amostras muito frágeis, como cortes histológicos. O produto a desidratar, que pode ser um corte histológico, um medicamento ou até um produto alimentar, é colocado numa câmara **C**, dispondo de um sistema de refrigeração e onde se podem produzir vazios consideravelmente baixos, Fig. I.18.

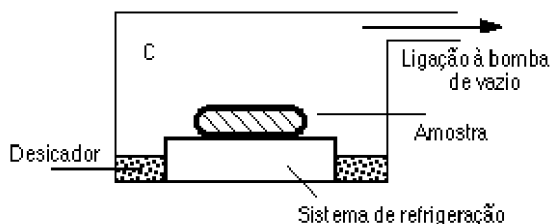


Fig. I.18 - Esquema de uma máquina liofilizadora.

A amostra é levada à pressão  $P_1$  e arrefecida até uma temperatura  $T_1$  inferior à do ponto triplo da água (ponto **A**), valores a que, como se vê na Fig. I.17, corresponde o estado sólido.

Uma vez à temperatura  $T_1$ , a pressão é baixada até  $P_2$  (ponto **B**), o que obriga a água a passar ao estado de vapor, originando a secagem da amostra por sublimação. O vapor de água é retirado da câmara através da bomba de vácuo e de uma substância desicante como o gel de sílica.

Esta técnica tem a vantagem de manter íntegra a textura do material base, após a secagem. As amostras secas têm de ser isoladas do contacto com a atmosfera pois, após a sublimação da água, apresentam uma enorme superfície externa, pelo que seriam facilmente oxidadas.

De novo nas soluções, recordemos que, dissolvendo um soluto na água, se obtém um abaixamento na pressão de vapor da água em relação à pressão de vapor da água pura. A curva  $1'$  (Fig. I.19), a tracejado, poderia ser a curva da pressão de vapor de água em função da temperatura quando a água é solvente numa solução diluída.

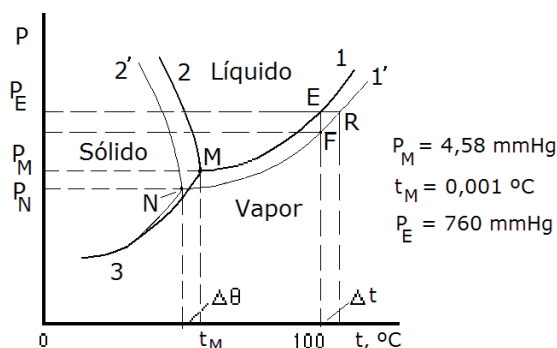


Fig. I.19 - Estados da água como função de  $P$  e  $t$ .

O ponto **N** desta curva correspondente a um par  $(P, t)$  onde a água da solução, o gelo e o vapor de água estão em equilíbrio, ocorre para uma temperatura inferior  $\Delta\theta$  graus aos  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ . O valor  $\Delta\theta$  é o abaixamento da temperatura de congelação (abaixamento crioscópico) da solução em relação ao solvente puro.

Se a solução for muito diluída o ponto **N**, cruzamento de  $1'$  com  $3$  é suficientemente próximo de **M** para se poder considerar o segmento  $\overline{MN}$

como recto. Enquanto tal aproximação for possível podemos escrever:

$$\frac{\Delta P}{\Delta \theta} = \text{constante} \quad 1.83$$

A primeira lei de Raoult como vimos, estabelecia uma relação entre a variação relativa da pressão de vapor e a concentração molar para uma dada temperatura.

Para uma variação em relação a  $P_M$  vem:

$$\frac{\Delta P}{P_M} = K C_s \quad 1.84$$

Combinando as duas relações anteriores conclui-se facilmente que

$$\Delta \theta = K' C_s \quad 1.85$$

ou seja, o abaixamento do ponto de congelação de uma solução (em relação ao ponto de congelação do solvente) é proporcional à concentração molar da solução. Este enunciado constitui a 2ª lei de Raoult (crioscopia).

O abaixamento  $\Delta \theta$  do ponto de congelação não depende da natureza do soluto mas da sua concentração molar. Depende, no entanto, da natureza do solvente.

O ponto da curva **1** para a pressão atmosférica (760 mm Hg), ou seja, o ponto para o qual a pressão de vapor de água iguala a pressão atmosférica, corresponde ao ponto de ebulição da água pura e ocorre a 100 °C.

Quando se trata de uma solução aquosa, a temperatura para a qual a pressão de vapor de água é 760 mmHg aumenta. Para a curva **1'** que corresponde a uma solução aquosa diluída, a ebulição à pressão de 760 mm Hg ocorrerá no ponto **R**, ou seja, à temperatura de  $(100 + \Delta t)$  °C.

A terceira propriedade, ou seja, o ponto de ebulição da solução ser superior ao do solvente puro é, pois, evidente.

Supondo que o segmento  $\overline{FR}$  da curva **1'** é rectilíneo, vem:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \text{const.} \quad 1.86$$

Se usarmos uma vez mais a 1ª lei de Raoult, temos  $\frac{\Delta P}{P_E} = K C_s$ , concluindo-se facilmente que

$$\Delta t = K'' C_s \quad 1.87$$

ou seja, o aumento da temperatura de ebulição de uma solução é proporcional à concentração molar da solução. É a 3ª lei de Raoult (ebulioscopia).

A variação  $\Delta t$  da temperatura de ebulição não depende da natureza do soluto mas da sua concentração molar, dependendo, contudo, da natureza do solvente.

Consideremos a última das propriedades coligativas: a osmose.

### 1.1.16 - Osmose

Osmose é a difusão de solvente através de membranas originada por gradientes de concentração do solvente resultantes da presença, numa das soluções em contacto, de moléculas incapazes de atravessar a membrana. Este fenómeno assemelha-se à difusão de gases através de membranas porosas. Assim, se tivermos uma mistura de dois gases num recipiente separado de outro recipiente por uma membrana permeável unicamente a um dos gases, e se supusermos que no segundo recipiente existe só o gás permeável, a uma pressão igual à pressão total no primeiro recipiente, ocorre difusão. O gás permeável passa do segundo para o primeiro recipiente, ou seja, do recipiente onde a pressão parcial deste gás é maior para aquele onde é menor, até as pressões se igualarem.

50

No caso de soluções, se tivermos um sistema como se indica na Fig. I.20, onde se supõe que em **I** existe uma solução de um soluto para o qual a membrana **M** é impermeável e em **II** solvente puro que transpõe a membrana, decorrido algum tempo, verifica-se que a água desceu em **II** e subiu em **I**, sendo tanto maior a diferença de alturas entre os níveis nos dois recipientes, quanto maior for a concentração da solução. A pressão osmótica tem assim, como efeito, obrigar solvente a entrar na solução.

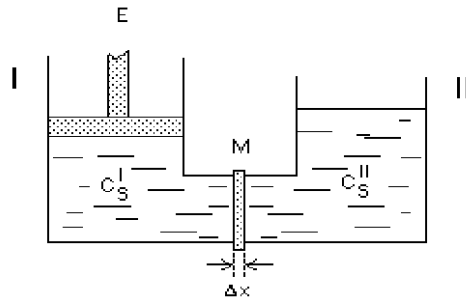


Fig. I.20 - Pressão osmótica: pressão que terá de se exercer sobre a solução para impedir a osmose.

Por definição, pressão osmótica é a pressão que se tem de exercer sobre uma solução em contacto com o solvente puro através de uma membrana semipermeável, para impedir a osmose, ou seja, a força de pressão que é necessária para equilibrar a resultante das forças de difusão do solvente, através da membrana.

Assim, na experiência anterior, a pressão que se teria de exercer sobre a superfície da solução em I para que os níveis iniciais dos líquidos em I e II não sofressem alterações, é a pressão osmótica da solução em I.

Sendo  $h$  o desnível entre as superfícies livres nos dois recipientes vem,

$$\pi = h \rho g \quad \text{I.88}$$

onde  $\rho$  é a massa específica da solução e  $g$  a aceleração da gravidade.

Pode demonstrar-se experimentalmente que, para soluções diluídas, se verifica que:

- a) mantendo a temperatura constante ( $T = C^{te}$ ), a pressão osmótica é directamente proporcional à concentração molar do soluto;
- b) mantendo a concentração do soluto constante, a pressão osmótica é directamente proporcional à temperatura absoluta, ou seja:

$$\pi = K C_s T \quad \text{I.89}$$

Uma forma mais conveniente desta expressão é a equação de Van't

Hoff da osmose que podemos escrever:

$$\pi = C_s R T \quad 1.90$$

com  $C_s$  concentração molar do soluto.

A equação de Van't Hoff, válida para soluções muito diluídas pode escrever-se nas três formas seguintes:

$$\pi = C_s R T = \frac{n}{V} R T = \frac{C}{M} R T \quad 1.91$$

com  $n$  o número de moles do soluto,  $V$  o volume da solução,  $C$  a concentração ponderal e  $M$  a massa molecular do soluto.

As duas primeiras formas são, talvez, mais gerais, pois permitem interpretar a equação como aplicável ao número total de moles de soluto por unidade de volume de solução, independentemente da natureza do soluto, mesmo que haja várias espécies de soluto, em solução. Esta equação é formalmente idêntica à equação dos gases perfeitos. Há contudo, uma importante diferença entre pressão num gás e pressão osmótica. Esta é limitada a sistemas separados por membranas semipermeáveis.

A equação de Van't Hoff tem a desvantagem de tornar o soluto como que o principal e exclusivo interveniente na osmose quando, de facto, a osmose é, essencialmente, a difusão do solvente através da membrana, no sentido da região de maior concentração do solvente para a região de menor concentração. O verdadeiro significado da definição clássica de pressão osmótica é de uma força por unidade de área necessária para anular a densidade de corrente do solvente (corrente osmótica), resultante do gradiente de potencial químico do solvente, através da membrana.

Notar que, como resultado desta definição, o solvente se desloca contra o gradiente de pressão osmótica, ou seja, da região de menor para a de maior pressão osmótica.

### 1.1.17 - Equação de Van't Hoff para electrólitos

Quando ocorre ionização ou dissociação de moléculas, o valor de  $n$



não representa o número total de partículas em solução. A relação entre o número total de partículas em solução e o número de moléculas dissolvidas é, por definição, o coeficiente de ionização de Van't Hoff,  $i$ .

Consideremos o caso de uma solução com a concentração de  $n$  moléculas por unidade de volume, moléculas com grau de ionização  $\alpha$  e suponhamos que o número de iões produzidos por molécula dissociada é  $\delta$  (por exemplo, para o sulfato de sódio,  $\delta = 3$ ).

O número de moléculas não dissociadas na solução é  $n - \alpha n = n(1 - \alpha)$ . O número total de iões resultantes das moléculas que se dissociaram é  $n\alpha\delta$ .

O número total de partículas em solução é a soma dos números de moléculas não dissociadas e dos iões, ou seja,  $N = n(1 - \alpha) + n\alpha\delta$ .

Então:

$$i = \frac{N}{n} = (1 - \alpha) + \delta \alpha$$

$$= 1 + \alpha(\delta - 1) \quad 1.92$$

Na expressão acima  $n$  pode ser, igualmente, o número total de moles do soluto e  $N$  o número total de partículas em solução, dividido pelo número de Avogadro.

A equação de Van't Hoff para os electrólitos é, então:

ou  $\pi V = n RT$

$$\pi_s = C_s i RT \quad 1.93$$

A expressão acima, aplicável a soluções diluídas, fica mais rigorosa se, em vez da concentração molar, se considerar a concentração molar em moles/Kg. Outra possibilidade de tornar mais precisa a Eq. 1.93 é entrar com o coeficiente osmótico  $\phi$ , obtido experimentalmente, com o qual se compensam os desvios à equação de Van't Hoff para os diversos iões. Entrando com  $\phi$ , a Eq. 1.93 transforma-se em:

$$\pi = C_s i \phi RT \quad 1.94$$

O produto  $C_s i \phi$  é chamado de concentração osmoticamente efectiva.

Alguns valores de  $\phi$  encontram-se representados no Quadro I.2.

Quadro I.2 – Coeficiente osmótico para alguns compostos

	$i$	$\phi$
Na Cl	2	0,93
K Cl	2	0,92
Glucose	1	1,01
Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	3	0,74

### I.1.18 - Medição da pressão osmótica

A avaliação da pressão osmótica pelos diferentes métodos, entrando com a correcção dos erros associados, devido aos afastamentos do comportamento ideal e outras causas, pode revestir-se de alguma complexidade, pelo que nos referiremos somente aos princípios gerais utilizados.

**Osmometria** - consiste na utilização directa de uma membrana semi-permeável e na medida da altura de ascensão da solução num tubo capilar, usando um dispositivo chamado osmómetro. Este método só determina a pressão osmótica resultante das partículas para as quais a membrana é impermeável.

Com a utilização deste método, a noção de pressão osmótica deixa de ter valor absoluto, passando a depender essencialmente das propriedades da membrana e soluto utilizados.

Em geral, não se conseguem membranas artificiais impermeáveis a pequenos iões e moléculas de pequenas dimensões. Não é assim possível medir com este método a pressão osmótica de soluções micromoleculares. É, contudo, um método importante para obter a pressão osmótica de macromoléculas para as quais é fácil arranjar membranas impermeáveis.

**Crioscopia** - usa a determinação do abaixamento do ponto de congelação de uma solução em relação ao ponto de congelação do solvente puro, pela 2ª lei de Raoult

$$\Delta \theta = K' C_s \quad 1.95$$

como  $\pi = RTC_s$  vem, por eliminação de  $C_s$  nas duas expressões:

$$\pi = \frac{RT}{K'} \Delta \theta \quad 1.96$$

que permite facilmente determinar a pressão osmótica, a partir do abaixamento crioscópico e da constante  $K'$ .

O valor de  $K'$  é:

$$\begin{aligned} K' &= 1,87 \times 10^3 \text{ } ^\circ\text{K mole}^{-1} \text{cm}^3 \\ &= 1,87 \text{ } ^\circ\text{K mole}^{-1} \text{L} \end{aligned}$$

Entrando com  $R = 8,314 \times 10^7 \text{ erg mole}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$  vem:

$$\begin{aligned} \pi &= 4,44 \times 10^4 \times T \times \Delta \theta \text{ dyn cm}^{-2} \\ &= 0,044 T \times \Delta \theta \text{ atm} \end{aligned}$$

$$(1 \text{ atm} = 1,012 \times 10^6 \text{ dyn cm}^{-2})$$

O método crioscópico não faz uso de membranas de permeabilidade selectiva. Os valores da pressão osmótica que se obtêm pela crioscopia referem-se à totalidade das partículas em solução.

Porém, quando se trata de macromoléculas, o método crioscópico apresenta algumas dificuldades. De facto, a partir da relação  $\Delta \theta = K' \frac{C}{M}$ , onde  $C$  é a concentração ponderal, facilmente se verifica que, dado o elevado valor

de **M** das macromoléculas, para  $\Delta\theta$  ser mensurável é necessário que **C** seja elevado, originando soluções pouco diluídas, para as quais as razões utilizadas não são, em rigor, aplicáveis. Por exemplo, para se ter um abaixamento de  $0,1^\circ\text{K}$  no ponto de congelação, é necessária uma concentração molar

$$C_s = \frac{0,1}{1,87 \times 10^3} = 5,3 \times 10^{-5} \text{ mole cm}^{-3}.$$

Para uma proteína com mole de 100 000 g,  $C_s = 5,3 \text{ g cm}^{-3}$ , que está longe de corresponder a uma solução diluída.

No que diz respeito às micromoléculas a crioscopia é, em geral, aplicável sem dificuldades. Crioscopia e osmometria são, na prática, métodos com utilização complementar.

**Tonometria** - usa a determinação do abaixamento da tensão de vapor de um solvente em solução, relativamente à tensão de vapor do solvente puro. É um método que apresenta dificuldades, mas que permite a medição da pressão osmótica a qualquer temperatura, o que não sucede por exemplo com a crioscopia.

### I.1.19 - Aplicações

O abaixamento crioscópico do soro humano é  $\Delta\theta = 0,56^\circ\text{K}$ , logo a pressão osmótica correspondente para  $37^\circ\text{C}$  é:

$$\pi_{\text{soro}} = 0,044 (37+273) 0,56 = 7,6 \text{ atm}$$

Chama-se pressão oncótica à pressão osmótica devida às proteínas plasmáticas. Há que considerar, contudo, que para o pH plasmático, parte das moléculas proteicas encontram-se na forma de iões proteinato, alguns com múltiplas cargas negativas. Isto obriga a existirem, para compensação da carga total negativa, pequenos iões positivos com igual carga, iões que também contribuem para a pressão oncótica. O número destes iões é elevado pelo que não é rigoroso associar a pressão oncótica exclusivamente às proteínas. A concentração em proteínas do plasma normal é da ordem de  $70 \text{ g L}^{-1}$ . A massa molecular média das proteínas do plasma é de aproximadamente 70 000.

A pressão oncótica do plasma, supondo as proteínas não ionizadas, seria:

$$\begin{aligned}\pi_{\text{onc}} &= \frac{n}{V}RT = \frac{C}{M}RT \\ &= \frac{70 \times 10^{-3}}{70\,000} \times 8,314 \times 10^7 \times 310 \text{ dyn cm}^{-2} \\ &= 2,6 \times 10^4 \text{ dyn cm}^{-2} = 0,026 \text{ atm}\end{aligned}$$

A pressão osmótica total do soro é 7,6 atm, enquanto que a pressão oncótica é 0,026 atm, com a aproximação que referimos, ou seja:

$$\frac{P_{\text{onc}}}{P_{\text{soro}}} = \frac{0,026}{7,6} = 0,0033$$

ou

$$= 0,33 \%$$

A pressão oncótica é, numa primeira aproximação, 0,33 % da pressão osmótica total do soro.

**Osmolaridade** - consideremos uma solução onde existem  $n$  moles de soluto, os quais, em solução originaram  $NA$  partículas, com  $N \geq n$  e  $A$  o número de Avogadro. Se definirmos 1 osmole como correspondente ao número de Avogadro ( $6,023 \times 10^{23}$ ) de partículas em solução, independentemente da sua natureza, podemos dizer que a osmolaridade da solução anterior é  $N$ . Esta definição é útil pois, como sabemos, a pressão osmótica não depende da natureza das moléculas do soluto, só depende do seu número total. O valor de  $N$ , atrás referido, já foi calculado para o caso dos iões:

$$N = n [ (1 - \alpha) + \delta \alpha ] \quad 1.97$$

onde  $\alpha$  é o grau de ionização e  $\delta$  o número de iões por moléculas dissociada.

A osmolaridade do soro obtém-se a partir da equação do abaixamento crioscópico  $\Delta\theta = K' C_s$ , conhecendo  $K'$  e  $\Delta\theta$ . Este só depende do número de partículas do soluto por unidade de volume, representando, portanto,  $C_s$  a osmolaridade. Por exemplo, a osmolaridade do soro vem directamente:

$$C_s = \frac{\Delta\theta}{K'} = \frac{0,56}{1,87} = 0,298 \text{ osmole/L}$$

Pode querer saber-se qual a concentração de uma solução de NaCl com a osmolaridade do soro humano. Sendo a massa molecular do NaCl 58,5 e  $N = 2$  quando  $n = 1$  (pois  $\alpha = 1$  e  $\delta = 2$ ), temos que 58,5 g de NaCl correspondem a 2 osmoles. A concentração ponderal de uma solução de NaCl com 0,298 de osmolaridade é:

$$\frac{58,5}{2} \times 0,298 = 9,75 \text{ g/L}$$

Em teoria, duas soluções com a mesma osmolaridade produzem a mesma pressão osmótica. Na prática, porém, quando as soluções estão separadas por uma membrana, elas só apresentam a mesma pressão osmótica aparente, se a membrana for igualmente semipermeável para as duas soluções.

Dois soluções com igual osmolaridade podem apresentar pressões osmóticas aparentes diferentes, se a membrana tiver permeabilidades diferentes para os iões das duas soluções. Contrariamente à osmometria, vimos que a crioscopia permitia medir a pressão osmótica total de uma solução, para baixas concentrações ponderais de soluto.

Usando membranas que não sejam absolutamente impermeáveis às moléculas de quaisquer solutos em solução, as pressões osmóticas aparentes obtidas pela osmometria são inferiores às obtidas por medidas crioscópicas. Isto pode levar a considerar o solvente como sendo constituído pela água e pelas outras partículas, para as quais a membrana é permeável. Utilizar uma membrana que deixe passar um certo número de moléculas é equivalente a baixar a osmolaridade da solução de um vapor equivalente àquele número. É frequente chamar de membranas dialisantes aquelas que são permeáveis ao solvente (água) e a pequenas moléculas (com  $M < 1000$  Da) e de membranas semipermeáveis aquelas que só deixam passar a água. As membranas biológicas são demasiado complexas para poderem ser classificadas, mesmo aproximadamente, através desta divisão. As membranas biológicas poderão ser selectivamente permeáveis a certas pequenas moléculas e a grandes moléculas específicas. No entanto, em certos contextos, o comportamento das

---

---

membranas capilares pode ser encarado como de membrana dialisante e das membranas celulares como de membranas semipermeáveis.

Chama-se pressão osmótica efectiva à pressão osmótica obtida pela osmometria, ou seja, a pressão obtida quando se utilizam membranas permeáveis a algumas partículas do soluto. A pressão oncótica dos líquidos biológicos equivale, quase sempre, à pressão osmótica efectiva.

Quando uma solução, separada de outra por uma membrana, perde solvente através da membrana, devido a ter menor pressão osmótica efectiva, diz-se hipotónica em relação à segunda. Por sua vez, a segunda solução é hipertónica em relação à primeira. Não havendo transporte de solvente as duas soluções dizem-se isotónicas.

A maior parte das membranas biológicas são permeáveis aos pequenos iões. É o caso, por exemplo, das membranas dos capilares sanguíneos. Uma excepção importante ocorre com a membrana dos glóbulos vermelhos que não é permeável aos iões do NaCl. Glóbulos vermelhos em soro fisiológico, que é uma solução de NaCl 0,15 M (9,75 g/L) isotónica com o plasma e com o interior globular, mantêm-se sem variação de volume.

Em certos estágios da malária ocorrem alterações patológicas na permeabilidade das membranas dos glóbulos. Como consequência, ocorre entrada de água para os glóbulos vermelhos, de que resulta a rotura das paredes globulares e hemólise.

Glóbulos vermelhos colocados em soluções hipertónicas diminuem de volume e encarquilham (plasmólise). Em soluções hipotónicas, os glóbulos vermelhos aumentam de volume (turgência), podendo rebentar (hemólise).

A resistência da membrana globular pode ser estudada determinando a molaridade de uma solução hipotónica de NaCl capaz de produzir hemólise. Os glóbulos vermelhos normais começam a sofrer hemólise parcial com soluções 0,07 a 0,08 M (0,41 a 0,47 g%), ocorrendo hemólise total para concentrações 0,05 M (0,3 g%). Em situações anormais de fragilidade globular, a hemólise poderá ocorrer com soluções 0,1 a 0,12 M (0,6 a 0,7 g%).

O fenómeno da osmose a actuar em condições extremas sobre tecidos, como epitélios e outros, pode ter consequências graves. Um exemplo é o caso da ingestão de quantidades apreciáveis de água destilada que pode originar correntes osmóticas resultantes dos gradientes de concentração de solvente através das membranas das células da parede gástrica, que levem à sua rotura e consequente hemorragia gástrica.

---

### I.1.20 - Fenómeno de Starling

Considerando as forças que actuam sobre o solvente na porção arterial dos capilares sistêmicos, observa-se que haverá tendência para o extravasamento de solvente. Fazendo igual avaliação do lado venoso, verifica-se que deverá haver reentrada de solvente no espaço extravascular. De facto, a soma da pressão hidrostática nos capilares arteriais com a pressão osmótica efectiva no espaço extravascular é superior à soma da pressão oncótica do sangue com a pressão hidrostática no espaço extravascular. Predominando, do lado arterial, as forças/cm<sup>2</sup> que fazem sair solvente dos capilares ocorre transferência deste, através do endotélio, para o espaço intersticial. O inverso seria verificado do lado venoso. Este raciocínio poderá ser confirmado por simples aplicação da expressão da densidade de corrente de solvente que deduzimos atrás.

Os valores reais das pressões indicadas na Fig. I.21 são:

$P = 48 \text{ cm H}_2\text{O}$  (35,2 mmHg) - Pressão hidrostática nos capilares arteriais

$P_V = 21 \text{ cm H}_2\text{O}$  (13,4 mmHg) - Pressão hidrostática nos capilares venosos

$P = 4 \text{ cm H}_2\text{O}$  - Pressão hidrostática no espaço extravascular

$\pi_A = \pi_V = 42 \text{ cm H}_2\text{O}$  - Pressão oncótica do plasma

$\pi = 6 \text{ cm H}_2\text{O}$  - Pressão osmótica efectiva do espaço extravascular

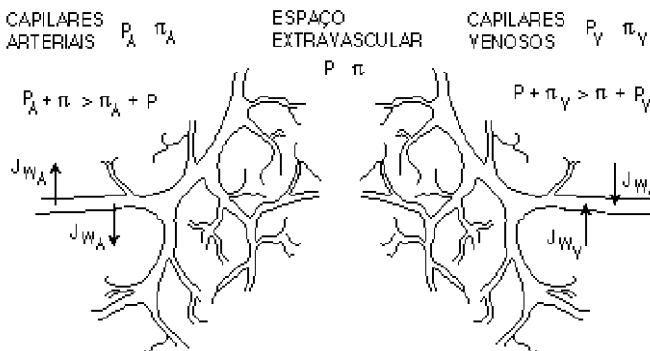


Fig. I.21 - Transferências de solvente no fenómeno de Starling.



Considerando a expressão da densidade de corrente de solvente e supondo os  $\Delta$ 's diferenças do interior dos vasos para o exterior, vem para a parte arterial:

$$\begin{aligned} J_{WA} &= L_P (\Delta P - \Delta \pi) = L_P [(P_A - P) - (\pi_A - \pi)] \\ &= L_P [(P_A + \pi) - (P + \pi_A)] && \text{I.98} \\ &= L_P (6 + 48 - 4 - 42) > 0 \end{aligned}$$

O valor positivo para  $J_{WA}$  corresponde à saída de solvente para o espaço intersticial.

Nos capilares venosos a situação inverte-se, ou seja, a pressão hidrostática mais a pressão osmótica extravascular é inferior à pressão oncótica mais a pressão hidrostática externa, originando-se uma corrente de solvente do espaço intersticial para o capilar, ou seja:

$$\begin{aligned} J_{WA} &= L_P [(P_V - P) - (\pi_V - \pi)] \\ &= L_P [(P_V + \pi) - (\pi_V + P)] < 0 && \text{I.99} \\ &= L_P (6 + 21 - 4 - 42) < 0 \end{aligned}$$

Ocorre reentrada de solvente no espaço intravascular. O movimento da água pode ser observado na Fig. I.22.

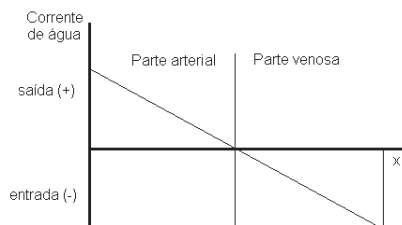


Fig. I.22 - Variação da corrente de água na circulação capilar.

Estritamente é a entrada de solvente para os capilares venosos que constitui o fenómeno de Starling, a que corresponde um valor de  $J_p$  negativo.

Por ser de grande importância, é de referir que deste processo resulta um transporte efectivo de catabólitos existentes no tecido extravascular para a corrente sanguínea. A parede dos capilares é permeável, não só à água, como aos catabólitos existentes em solução no líquido intersticial, comportando-se, numa primeira aproximação, como uma membrana dialisante. O número de moles de catabólitos que entram na corrente sanguínea na parte arterial dos capilares ultrapassa aquele que sai na porção venosa. Deste modo, ocorre uma corrente efectiva de arrastamento destes solutos para a corrente sanguínea, na rede capilar. Estes produtos são posteriormente eliminados, por diversas vias, a partir da circulação sanguínea.

Alterações nas pressões que originam o fenómeno de Starling podem levar a complicações, entre as quais, o edema. Se a concentração plasmática de proteínas se encontrar baixa, como em certas formas de nefrose, a soma  $\pi_A + P$  diminui, assim como a soma  $P + \pi_V$ , ou seja,  $J_{WV}$  aumenta e  $J_{WA}$  diminui.

Esta situação provoca acumulação de líquido no espaço extravascular, à custa de um aumento do extravasamento de solvente e diminuição na sua reentrada nos capilares. Esta reentrada pode estar, igualmente, diminuída por aumento de  $P_V$ , como sucede em casos de insuficiência cardíaca.

Como se observa, a pequena pressão oncótica desempenha um papel muito importante nas trocas de fluidos através da parede dos capilares porque as proteínas plasmáticas estão essencialmente confinadas ao espaço intravascular, enquanto que os electrólitos, que são responsáveis pela maior fracção da pressão osmótica total, estão praticamente em igual concentração de ambos os lados do endotélio capilar.

Os movimentos moleculares através do endotélio capilar são algo mais complexo do que poderá transparecer da análise aqui apresentada. De um modo geral, esta transferência é influenciada por fenómenos resultantes da interacção entre moléculas de soluto e solvente (hidratação, solvatação, etc.), da interacção entre as moléculas dos solutos (efeito de Gibbs-Donnan), da configuração dos poros e da própria carga eléctrica nas células endoteliais. Numa análise mais profunda, o fenómeno de Starling deveria considerar estes aspectos e, em particular, o efeito de Gibbs-Donnan. Só numa primeira aproximação podemos reduzir este fenómeno ao movimento de solvente sujeito a simples forças de difusão.

### 1.1.21 - Ultrafiltração

O alargamento da noção de solvente ajuda a compreender melhor certos fenómenos. Na ultrafiltração, os movimentos de solvente ocorrem em sentido contrário ao da corrente osmótica, devido à pressão hidrostática exercida do lado da solução.

Se a pressão hidrostática  $P$  é superior à pressão osmótica efectiva  $\pi$ , então há uma corrente de solvente da direita para a esquerda (Fig. I.23). Neste caso, a pressão  $P$  não só anula as forças de difusão que, actuando sobre as moléculas do solvente provocam a osmose, como fornece uma força de pressão adicional que faz deslocar solvente através da membrana para o lado do solvente puro. Este processo chama-se ultrafiltração e está presente na filtração glomerular, no rim.

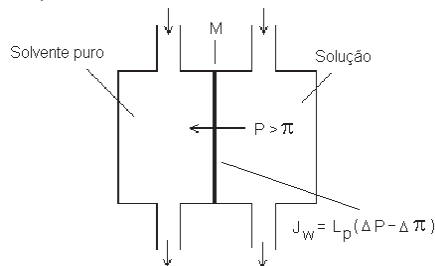


Fig. I.23 - Esquema do processo de ultrafiltração.

A pressão hidrostática nos capilares arteriais do glomérulo, resultante da acção mecânica do coração é superior à pressão oncótica do sangue. Daqui resulta que, a nível do glomérulo, ocorre uma corrente de solvente (ou seja, água juntamente com pequenas moléculas e iões para os quais a membrana é permeável) através da parede dos capilares. Esta corrente de solvente corresponde ao caudal da urina glomerular.

O trabalho dispendido na ultrafiltração glomerular é, pois, fornecido pelo coração através das forças de pressão correspondentes a  $P$ .

Se, devido a insuficiência cardíaca não é atingida no glomérulo uma pressão  $P > \pi$  não pode efectuar-se ultrafiltração glomerular, pelo que ocorre anúria.

### I.1.22 – Equação de Gibbs-Donnan. Equilíbrio e potencial de Donnan

Quando uma membrana separa soluções em equilíbrio contendo componentes iónicos difusíveis de ambos os sinais e existe ainda, em solução, um macroião não difusível, observa-se uma diferença de potencial (potencial de Donnan) através da membrana. Este potencial é observado sempre que movimentos de iões através de membrana são restringidos, na presença de iões difusíveis.

Suponhamos que, nos compartimentos **I** e **II** do sistema apresentado na Fig. I.24, a concentração inicial em  $\text{NaCl}$  é  $n$  mole  $\text{cm}^{-3}$  e que, em dado instante, se dissolve no compartimento **I** um sal sódico de uma proteína de modo a obter-se uma concentração deste de  $p$  moles  $\text{cm}^{-3}$ . Se a valência do proteínato é  $Z_p$ , cada macroião terá  $Z_p$  cargas negativas e serão libertados  $pZ_p$  iões de  $\text{Na}^+$  por  $\text{cm}^3$  de solução.

Suponhamos ainda que a corrente de solvente através da membrana, ou seja, a corrente osmótica, é impedida por acção do êmbolo **E**.

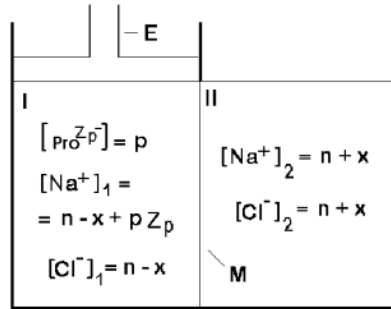


Fig. I.24 - Concentrações de equilíbrio no caso de um modelo de membrana de Donnan.

Verifica-se experimentalmente que as concentrações iniciais do sistema se alteram, sendo atingido um estado de equilíbrio.

Vamos chamar  $[Na^+]_1$ ,  $[Cl^-]_1$ ,  $[Na^+]_2$  e  $[Cl^-]_2$  as concentrações de equilíbrio dos pequenos iões nos dois lados da membrana.

Podemos também exprimir estas concentrações em termos dos seus valores iniciais. Vamos, para isso, supor que as concentrações de equilíbrio se estabeleceram por transferência de  $x$  moles de  $Na^+$  e  $x$  moles de  $Cl^-$  do recipiente I para o recipiente II. Então,

$$\begin{aligned}
 [Cl^-]_1 &= n - x & [Na^+]_1 &= n - x + pZ_p \\
 [Cl^-]_2 &= n + x & [Na^+]_2 &= n + x
 \end{aligned}
 \tag{I.100}$$

Quando o equilíbrio é atingido, a diferença de potencial através da membrana é, por aplicação da equação de Nernst:

$$\Delta\psi_{Don} = \frac{RT}{F} \ln \frac{[Na^+]_2}{[Na^+]_1} = \frac{RT}{F} \ln \frac{n + x}{n - x + pZ_p}
 \tag{I.101}$$

$$= \frac{RT}{F} \ln \frac{[Cl^-]_1}{[Cl^-]_2} = \frac{RT}{F} \ln \frac{n - x}{n + x}
 \tag{I.101}$$

Da expressão anterior conclui-se que:

---


$$\frac{[\text{Na}^+]_2}{[\text{Na}^+]_1} = \frac{[\text{Cl}^-]_1}{[\text{Cl}^-]_2} \quad \text{I.102}$$

ou

$$\frac{n+x}{n-x+pZ_p} = \frac{n-x}{n+x} \quad \text{I.103}$$

donde

$$[\text{Na}^+]_1 [\text{Cl}^-]_1 = [\text{Na}^+]_2 [\text{Cl}^-]_2 \quad \text{I.104}$$

ou, ainda,

$$(n+x)^2 = (n-x)(n-x+pZ_p) \quad \text{I.105}$$

A penúltima destas relações é conhecida por equação de Gibbs-Donnan e mostra que, no equilíbrio, os produtos das concentrações de  $\text{Cl}^-$  e  $\text{Na}^+$  para cada um dos recipientes são iguais.

Devido à electroneutralidade que obriga a uma carga total nula em cada um dos recipientes, vem, no recipiente I,

$$[\text{Na}^+]_1 = [\text{Cl}^-]_1 + [pZ_p^-] \quad \text{I.106}$$

e no recipiente II

$$[\text{Na}^+]_2 = [\text{Cl}^-]_2 \quad \text{I.107}$$

Estas equações e a equação de Gibbs-Donnan mostram que

$$[\text{Cl}^-]_1 < [\text{Na}^+]_1 \quad \text{e} \quad [\text{Cl}^-]_1 < [\text{Cl}^-]_2 \quad \text{I.108}$$

---

66

Aliás, estas relações surgem, facilmente, se usarmos a equação de Gibbs-Donnan referida às concentrações iniciais. De facto, se

$$(n+x)^2 = (n-x+pZ_p)(n-x)$$

vem

---

$$n + x = \sqrt{(n - x)(n - x + pZ_p)} \quad \text{I.109}$$

o que indica que  $(n + x)$  é a média geométrica de  $(n - x)$  e  $(n - x + pZ_p)$ .

Nestas condições,  $(n - x) < (n + x) < (n - x + pZ_p)$ , ou seja,

$$[C^{\ell-}]_2 > [C^{\ell-}]_1 \quad \text{I.110}$$

e

$$[Na^+]_1 > [Na^+]_2 \quad \text{I.111}$$

A concentração do cloretião é maior no recipiente sem macroiões.

A concentração do sódio é maior no recipiente com macroiões.

Tudo se passa como se os macroiões, cuja concentração é  $[Pro^{Z_p-}]$ , repelisses os pequenos iões do mesmo sinal para o outro lado da membrana e atraíssem os iões de sinal oposto.

Substituindo na equação de Gibbs-Donnan os valores das concentrações de  $C^{\ell-}$  nos dois recipientes, dadas pelas relações de electroneutralidade, vem

$$[Na^+]_2^2 = [Na^+]_1 \times \{[Na^+]_1 - Z_p [Pro^{Z_p-}]\} \quad \text{I.112}$$

ou

$$[Na^+]_1^2 - Z_p [Pro^{Z_p-}] [Na^+]_1 - [Na^+]_2^2 = 0$$

que é uma equação do 2º grau em  $[Na^+]_1$ , com raízes

$$[Na^+]_1 = \frac{Z_p [Pro^{Z_p-}] \pm \sqrt{Z_p^2 [Pro^{Z_p-}]^2 + 4 [Na^+]_2^2}}{2} \quad \text{I.113}$$

Na fracção acima, a segunda parcela do numerador é superior à primeira e a raiz da equação resultante da subtracção destas parcelas é negativa. Só nos interessa a raiz positiva de  $[Na^+]_1$ , visto não existirem concentrações negativas.

Já vimos que a diferença de potencial através da membrana, no equilíbrio, era dada por:

$$\Delta V_{\text{Don}} = -\frac{RT}{F} \ln \frac{[\text{Na}^+]_1}{[\text{Na}^+]_2} \quad \text{I.114}$$

Substituindo  $[\text{Na}^+]_1$  pela raiz da equação do 2º grau vem

$$\Delta V_{\text{Don}} = -\frac{RT}{F} \ln \frac{Z_p [\text{Pro}^{Z_p^-}] + \sqrt{Z_p^2 [\text{Pro}^{Z_p^-}]^2 + 4 [\text{Na}^+]_2^2}}{2[\text{Na}^+]_2} \quad \text{I.15}$$

A diferença de potencial  $\Delta V_{\text{Don}}$  é conhecida por potencial de Donnan. A partir da equação do potencial de Donnan, facilmente se vê que, se

$$[\text{Pro}^{Z_p^-}] = 0 \quad \text{é} \quad \Delta V_{\text{Don}} = 0 \quad \text{I.116}$$

o que significa que só ocorrerá potencial de Donnan se houver na solução iões, para os quais a membrana seja impermeável. Desde que  $[\text{Pro}^{Z_p^-}]$  seja positivo, estabelece-se uma diferença de potencial através da membrana  $\Delta V_{\text{Don}}$  que se mantém constante sem qualquer dispêndio de energia.

Usando a equação de Gibbs-Donnan, expressa em função da concentração inicial dos pequenos iões, atrás escrita, podemos obter o valor de  $x$ . Assim,

$$(n + x)^2 = (n - x) (n - x + pZ_p)$$

vem

$$x = \frac{n p Z_p}{4n + p Z_p} \quad \text{I.117}$$

Podem obter-se as concentrações dos pequenos iões, nos dois recipientes, e exprimir em seguida a sua diferença em função dos dados  $n$ ,  $p$  e  $Z_p$ .

No lado I



$$\begin{aligned}
 C_1 &= [\text{Cl}^-]_1 + [\text{Na}^+]_1 \\
 &= (n - x) + (n - x + pZ_p) \\
 &= 2n - 2x + pZ_p
 \end{aligned}
 \tag{I.118}$$

No lado II:

$$\begin{aligned}
 C_2 &= [\text{Cl}^-]_2 + [\text{Na}^+]_2 \\
 &= (n + x) + (n + x) \\
 &= 2n + 2x
 \end{aligned}
 \tag{I.119}$$

A diferença entre estas concentrações é

$$\begin{aligned}
 d &= C_1 - C_2 \\
 &= -4x + pZ_p
 \end{aligned}
 \tag{I.120}$$

Substituindo na expressão anterior o valor de  $x$ , atrás encontrado, vem

$$d = \frac{Z_p^2 p^2}{4n + pZ_p}$$

O valor de  $d$  é positivo, pelo que  $C_1$  terá de ser superior a  $C_2$ . Deste modo, a concentração dos pequenos iões no meio dispersante dos microiões é superior à concentração iónica do outro lado da membrana. Há, portanto, uma certa quantidade de pequenos iões, do lado do proteinato, correspondente à diferença de concentrações  $d = C_1 - C_2$ , que se comportam como macroiões, incapazes de atravessar a membrana. A concentração  $d = C_1 - C_2$  corresponde, afinal, a partículas não difusíveis.

A concentração total de partículas não difusíveis do lado I é, então, a

concentração do ião proteico  $p$ , somada com  $d$ , ou seja,

$$p + d = p + \frac{Z_p^2 p^2}{4n + pZ_p} \quad \text{I.121}$$

A diferença de pressões osmóticas entre as soluções I e II é, então,

$$\pi = (p + d) RT = \left( p + \frac{Z_p^2 p^2}{4n + pZ_p} \right) RT \quad \text{I.122}$$

A pressão osmótica em I é, portanto, superior àquela que se teria se, em vez de macroiões, tivéssemos igual concentração molar de macromoléculas neutras. A partir da equação anterior, podemos considerar algumas situações especiais:

- 1) Se a concentração dos pequenos iões é nula, no início, ou seja, se  $n=0$ , vem:

$$\begin{aligned} \pi &= (p + p Z_p) R T \\ &= p (1 + Z_p) R T \end{aligned} \quad \text{I.123}$$

- 2) Se o colóide em solução não apresentar carga eléctrica, ou seja, se  $Z_p=0$ , vem:

$$C_1 - C_2 = 0 \quad \text{e} \quad \pi = p RT \quad \text{I.124}$$

O equilíbrio de Donnan explica a diferença de potencial através das paredes dos capilares, impermeáveis aos proteinatos e permeáveis aos pequenos iões.

## I.2 – Fenómenos bioeléctricos

### I.2.1 - Potenciais de repouso nas membranas

Sob o ponto de vista eléctrico, uma célula nervosa pode apresentar dois estados: um estado de repouso, com o interior celular negativo em relação ao exterior com corrente nula através da membrana, e um estado activo, onde ocorre um potencial de acção acompanhado por correntes detectáveis de solutos iónicos para fora e para dentro da célula. A transição de um estado para o outro só ocorre após aplicação de estímulos apropriados.

Desde cedo se criou evidência que os iões  $\text{Na}$ ,  $\text{K}^+$  e  $\text{Cl}^-$  desempenham um papel importante nos fenómenos bioeléctricos celulares.

A concentração intracelular de potássio, para o neurónio da lula no estado de repouso é  $C_K^i = 400 \text{ mM/L}$  enquanto no meio extracelular é  $C_K^e = 10 \text{ mM/L}$ .

Estudos com traçadores mostram que a membrana das células nervosas no estado de repouso é bastante permeável aos iões de potássio.

A concentração de ião sódio no meio intracelular das células nervosas da lula é  $40 \text{ mM/L}$  e no meio extracelular é  $460 \text{ mM/L}$ , respectivamente. No estado de repouso, a permeabilidade da membrana do axónio ao sódio é muito pequena.

As concentrações de cloretião nos meios extra e intracelulares são  $540 \text{ mM/L}$  e  $40 \text{ mM/L}$ , respectivamente. Para o  $\text{Cl}^-$  a permeabilidade da membrana, no repouso, é elevada.

Representemos estes valores no Quadro I.3.

**Quadro I.3** – Concentrações externa e interna e permeabilidade dos  $\text{Na}^+$ ,  $\text{Cl}^-$  e  $\text{K}^+$

ião	$C^i \text{ mM/L}$	$C^e \text{ mM/L}$	Permeabilidade
$\text{K}^+$	400	10	Elevada
$\text{Cl}^-$	40	540	Elevada
$\text{Na}^+$	41	460	Muito baixa

Medidas efectuadas com microeléctrodos mostram que, no estado de repouso, o interior celular do axónio é negativo em relação ao exterior. Para o caso do axónio da lula, o valor do potencial do interior celular em relação ao exterior é  $-61 \text{ mV}$ , no estado de repouso celular.

As correntes eléctricas de iões, através de membranas, dependem dos gradientes de energia potencial que forçam os iões através destas e também

da permeabilidade das membranas para os mesmos iões. Como sabemos, tanto gradientes de potencial químico, como gradientes de potencial eléctrico podem forçar iões através de membranas. Vejamos como devem actuar as forças de difusão e eléctricas para os diferentes iões, no caso do axónio da lula no estado de repouso, para o qual a corrente eléctrica iónica através da membrana é nula.

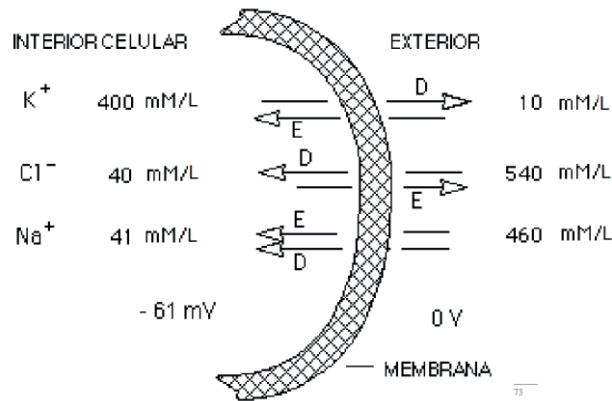


Fig. I.25 - Esquema com as concentrações intra e extracelulares de  $\text{Na}^+$ ,  $\text{Cl}^-$  e  $\text{K}^+$ , dos gradientes de energia potencial (E-eléctrica e D-química) a actuar sobre estes iões.

Para os casos do  $\text{K}^+$  e  $\text{Cl}^-$  podemos aceitar a possibilidade de não haver corrente, pois as forças eléctricas e de difusão actuam em sentidos opostos, podendo equilibrar-se.

O ião sódio, contudo, parece encontrar-se numa situação especial pois, quer as forças eléctricas, quer as de difusão empurram  $\text{Na}^+$  para o interior celular. A muito baixa permeabilidade da membrana ao  $\text{Na}^+$  poderá contribuir para justificar esta situação.

Referindo-nos às espécies iónicas acima consideradas, podemos definir, para o ião genérico  $i$ , concentrações e potenciais electroquímicos fora e dentro da célula, ou seja,  $C_1^e$ ,  $C_1^i$ ,  $\tilde{\mu}_1^e$ ,  $\tilde{\mu}_1^i$ , onde o índice superior significa exterior (e), ou interior (i), e o índice inferior o ião. Os potenciais eléctricos do interior e exterior são designados por  $V_1^i$  e  $V_1^e$  respectivamente.

Não havendo corrente eléctrica através da membrana, no repouso, podemos ser levados a pensar que existe equilíbrio, ou seja, que ocorre igualdade entre os potenciais electroquímicos das diferentes espécies iónicas no interior e exterior celulares, sendo pois, para qualquer espécie iónica  $i$ ,

$$\tilde{\mu}_{oi}^i = \tilde{\mu}_{oi}^e \quad \text{I.125}$$

Se houver equilíbrio, a equação de Nernst (Eq. I.81) deve verificar-se, vindo para todas as espécies iónicas

$$-\Delta V = V_i^i - V_i^e = -\frac{RT}{fZ_i} \ln \frac{C_i^i}{C_i^e} \quad \text{I.126}$$

Como sabemos,  $\Delta V$  é a diferença do potencial eléctrico, do interior da membrana em relação ao exterior, necessária para que a relação  $\frac{C_i^i}{C_i^e}$ , para a espécie iónica  $i$ , se mantenha constante ou, por outras palavras, para que esta seja a relação entre as concentrações de equilíbrio para a espécie considerada.

Se, para o caso do axónio da lula, aplicarmos a equação de Nernst aos iões  $\text{Na}^+$ ,  $\text{Cl}^-$  e  $\text{K}^+$ , ou seja, se substituirmos os valores de  $C_i^i$  e  $C_i^e$  para os  $\text{K}^+$ ,  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$  e dermos os valores às constantes, devemos obter valores para a diferença de potencial  $\Delta V$  que, se houver equilíbrio no repouso celular, devem ser iguais entre si e iguais a  $-61$  mV. Contudo, a aplicação da equação de Nernst a estes iões, conduz aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{K}^+} &= -93 \text{ mV} \\ \Delta V_{\text{Cl}^-} &= -66 \text{ mV} \\ \Delta V_{\text{Na}^+} &= +61 \text{ mV} \end{aligned} \quad \text{I.127}$$

Verifica-se que os valores de  $\Delta V$ , obtidos para as três espécies iónicas, que, havendo equilíbrio, deveriam igualar o potencial de repouso do neurónio da lula ( $-61$  mV) se afastam consideravelmente deste valor, à excepção do caso do  $\text{Cl}^-$  ( $-66$  mV).

A diferença mais pronunciada é para o caso do  $\text{Na}^+$  ( $+61$  mV), para o

qual o valor obtido está em completo desacordo. Longe de pôr em causa a validade da equação de Nernst, estas anomalias levam-nos a considerar a possibilidade de termos partido de premissas não válidas, ou ocorrerem outros fenómenos na membrana do axónio que não considerámos.

O modelo de membrana de Donnan também não permite reproduzir os valores dos potenciais de repouso das células nervosas e musculares a partir das concentrações iónicas.

A razão pela qual os modelos de membrana que até aqui apresentámos, não explicarem o potencial de repouso das células excitáveis, é que se partiu de uma hipótese de equilíbrio que não corresponde à realidade. A experiência veio mostrar que o potencial de repouso é um potencial de difusão, ou seja, uma diferença de potencial entre duas fases, resultante de uma difusão bidireccional de iões, com diferentes mobilidades, mas que não corresponde a um estado de equilíbrio.

Foi possível provar-se que a membrana celular é permeável ao  $K^+$ ,  $Cl^-$  e  $Na^+$  embora, para os dois primeiros, a permeabilidade seja consideravelmente superior, nem o  $Na^+$  nem o  $K^+$  se encontram em equilíbrio através da membrana. Ficou, aliás, isso bem patente quando da aplicação da equação de Nernst a estes iões. Em especial no primeiro caso, os valores fornecidos pela equação de Nernst são muito diferentes dos obtidos experimentalmente. Quando ao  $Cl^-$  a equação de Nernst dá valores mais próximos dos reais mas, mesmo assim, também para estes iões, o equilíbrio não é atingido.

A explicação do potencial de repouso está no facto da membrana apresentar uma maior permeabilidade aos iões potássio do que aos outros iões. Os iões potássio são de grande mobilidade e como difundem mais rapidamente, vão originar no interior da célula, nas proximidades da membrana, uma separação entre carga negativa e positiva e portanto uma diferença de potencial eléctrico.

### 1.2.2 - Modelo do campo eléctrico constante

Foi a partir da conhecida equação de Nernst-Planck que se chegou a uma relação capaz de reproduzir fielmente os potenciais das células excitáveis, em função das concentrações iónicas e dos coeficientes de permeabilidade.

A equação de Nernst-Planck é uma equação diferencial, que só pode ser resolvida se forem estabelecidas certas condições em relação a alguns

dos parâmetros utilizados (Fig. I.26). A equação de Nernst-Planck é integrável se forem conhecidos:

- 1) A variação das concentrações iónicas no interior da membrana;
- 2) A variação do potencial eléctrico na fase da membrana;
- 3) Os coeficientes de partição nos dois lados da membrana.

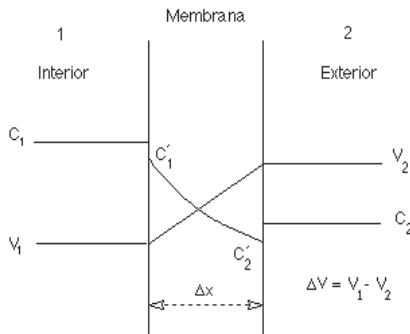


Fig. I.26 - Potencial eléctrico para as condições do modelo do campo eléctrico constante.

Goldman considerou o campo eléctrico constante no interior da membrana, ou o que é o mesmo, o gradiente do potencial eléctrico constante na fase da membrana e também os coeficientes de participação constantes e iguais nas duas interfaces da membrana, ou seja,

$$E = - \frac{dV}{dx}, \text{ onde } V \text{ é o potencial eléctrico}$$

e

$$\beta_1 = \beta_2$$

com

$$\beta_1 = \frac{C'_1}{C_1}$$

$$\beta_2 = \frac{C'_2}{C_2}$$

I.128

$C'_1$  e  $C'_2$  são as concentrações nas interfaces membrana/solução do lado da membrana.

Com estas condições, a integração da equação de Nernst-Planck para um ião  $i$ , de carga  $Z_i$  e mobilidade  $u_i$  leva a (Apêndice I.4.5)

$$J_i = \frac{\beta u_i F |Z_i|}{\Delta x} \Delta V \frac{C_1 - C_2 e^{-(F Z_i / RT) \Delta V}}{1 - e^{-(F Z_i / RT) \Delta V}} \quad \text{I.129}$$

que é a equação da densidade de corrente da espécie iónica  $i$  para condições de campo eléctrico constante, com  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  iguais em toda a membrana.

Na ausência de campo eléctrico, e quando se trata de moléculas ionizadas, a Eq. I.129 deve transformar-se na equação que deduzimos para a densidade de corrente de um soluto através da membrana originada, exclusivamente, por difusão. Tal corresponde a obter o valor de  $J_i$ , no limite, quando  $\Delta V$  tende para zero. Se fizermos  $\Delta V$  tender para zero, directamente na expressão de  $J_i$  obtemos uma indeterminação. Considerando  $Z_i = +1$  na Eq. I.129 e multiplicando por  $\frac{RT}{RT}$ , a expressão de  $J_i$  toma a forma:

$$J_i = \frac{\beta u_i F}{\Delta x} \frac{RT}{RT} \Delta V \frac{C_1 - C_2 e^{-(F/RT) \Delta V}}{1 - e^{-(F/RT) \Delta V}}$$

Fazendo  $y = \frac{F}{RT} \Delta V$  vem:

$$J_i = K y \frac{C_1 - C_2 e^{-y}}{1 - e^{-y}} = K (C_1 - C_2 e^{-y}) \frac{y}{1 - e^{-y}} \quad \text{I.130}$$

com

$$K = \frac{\beta u_i R T}{\Delta x} .$$

Quando  $\Delta V$  tende para zero,  $y$  tende igualmente para zero. Facilmente observamos que a indeterminação que ocorre quando  $y$  tende para zero se deve ao cociente  $\frac{y}{1 - e^{-y}}$ .



Podemos levantar a indeterminação desenvolvendo  $e^{-y}$  em série. Demonstra-se que

$$e^{-y} = 1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \quad \text{I.131}$$

então

$$\frac{y}{1 - e^{-y}} = \frac{y}{-1 + y - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} - \frac{y^4}{4!} + \dots}$$

Quando se considera o limite do segundo membro da igualdade acima com  $y \rightarrow 0$  vem

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{3!} - \frac{y^3}{4!} + \dots} = 1$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} J_i &= \lim_{y \rightarrow 0} K (C_1 - C_2 e^{-y}) \frac{y}{1 - e^{-y}} \\ &= \frac{\beta u_i R T}{\Delta x} (C_1 - C_2) \end{aligned} \quad \text{I.132}$$

Fazendo  $\frac{\beta u_i R T}{\Delta x} = P$  (permeabilidade da membrana para a espécie iônica  $i$ ) e  $\Delta C = C_1 - C_2$  vem, quando  $\Delta V = 0$ ,  $J_i = P \Delta C$ .

A corrente iônica  $J_i$  é igual à correspondente corrente molecular  $J_s$  multiplicada por  $F Z_i$ .

Outra situação que a equação de Nernst-Planck, integrada nas condições que vimos, deve contemplar, é o caso de haver equilíbrio através de uma membrana permeável à espécie iônica  $i$ , ou seja, o caso de  $J_i = 0$ .

Neste caso, para  $Z_i = +1$  vem

$$J_i = 0 = \frac{\beta u_i F}{\Delta x} \Delta V \frac{C_1 - C_2 e^{-(F/R T)\Delta V}}{1 - e^{-(F/R T)\Delta V}}$$

ou

$$\frac{C_1}{C_2} = e^{-(F/RT)\Delta V} \quad \text{I.133}$$

ou ainda, aplicando logaritmos naturais, e tirando o valor de  $\Delta V$

$$V = \frac{RT}{F} \ln \frac{C_1}{C_2} \quad \text{I.134}$$

que é a equação de Nernst. Traduz a diferença de potencial existente através da membrana quando há equilíbrio, para as concentrações  $C_1$  e  $C_2$  daquela espécie iónica. Para iões de valência  $Z_i$  a equação de Nernst tem a forma

$$V = \frac{RT}{Z_i F} \ln \frac{C_1}{C_2} \quad \text{I.135}$$

Voltemos agora à expressão inicial de  $J_i$ , Eq. I.129

$$J_i = \frac{\beta u_i F |Z_i|}{\Delta x} \Delta V \frac{C_1 - C_2 e^{-(F Z_i / RT)\Delta V}}{1 - e^{-(F Z_i / RT)\Delta V}} \quad \text{I.136}$$

e introduzamos nesta equação o coeficiente de permeabilidade (definição de Hodgkin e Katz)

$$P_i = \frac{\beta u_i R T}{\Delta x F}$$

Podemos então escrever

$$J_i = \frac{P_i F^2 |Z_i|}{RT} \Delta V \frac{C_1 - C_2 e^{-(F Z_i / RT)\Delta V}}{1 - e^{-(F Z_i / RT)\Delta V}} \quad \text{I.137}$$

Consideremos as correntes iónicas de  $K^+$ ,  $Na^+$  e  $Cl^-$ , através da membrana do axónio. Para cada um destes iões entramos na Eq. I.137 com a permeabilidade e as concentrações intra e extra-celulares. Os índices **1** e **2** nas concentrações referem-se, respectivamente, ao interior e ao exterior do axónio e,

$$K^+ \quad J_{(K^+)} = P_{K^+} \frac{F^2 \Delta V [K^+]_1 - [K^+]_2 e^{-(F/RT)\Delta V}}{RT (1 - e^{-(F/RT)\Delta V})} \quad I.138$$

$$Na^+ \quad J_{(Na^+)} = P_{Na^+} \frac{F^2 \Delta V [Na^+]_1 - [Na^+]_2 e^{-(F/RT)\Delta V}}{RT (1 - e^{-(F/RT)\Delta V})} \quad I.139$$

$$Cl^- \quad J_{(Cl^-)} = P_{Cl^-} \frac{F^2 \Delta V [Cl^-]_1 - [Cl^-]_2 e^{(F/RT)\Delta V}}{RT (1 - e^{(F/RT)\Delta V})} \quad I.140$$

Na expressão de  $J_{(Cl^-)}$  o expoente da exponencial é positivo, pelo facto da valência deste ião ser  $-1$ . Temos interesse em tornar o denominador da Eq. I.140 igual ao das Eqs. I.138 e I.139.

Multiplicando e dividindo a expressão de  $J_{(Cl^-)}$  por  $e^{(F/RT)\Delta V}$  e multiplicando e dividindo em seguida por  $-1$ , obtém-se para a expressão de  $J_{(Cl^-)}$

$$J_{(Cl^-)} = P_{Cl^-} \frac{F^2 \Delta V [Cl^-]_2 - [Cl^-]_1 e^{-(F/RT)\Delta V}}{RT (1 - e^{-(F/RT)\Delta V})} \quad I.141$$

Atendendo a que a densidade de corrente eléctrica total através da membrana do axónio no repouso é nula e que, para cada uma das espécies iónicas importantes para esta corrente, é satisfeita a equação de Nernst-Planck, deve verificar-se

$$J_{(K^+)} + J_{(Na^+)} + J_{(Cl^-)} = 0 \quad I.142$$

Desta equação vem:

$$P_{Na^+} \{ [Na^+]_1 - [Na^+]_2 e^{-(F/RT)\Delta V} \} +$$

$$P_{K^+} \{ [K^+]_1 - [K^+]_2 e^{-(F/RT)\Delta V} \} +$$

$$P_{Cl^-} \{ [Cl^-]_2 - [Cl^-]_1 e^{-(F/RT)\Delta V} \} = 0$$

Pondo  $e^{-(F/RT)\Delta V}$  em evidência e obtendo o valor desta exponencial vem

$$e^{-(F/RT)\Delta V} = \frac{P_{Na^+} [Na^+]_1 + P_{K^+} [K^+]_1 + P_{Cl^-} [Cl^-]_2}{P_{Na^+} [Na^+]_2 + P_{K^+} [K^+]_2 + P_{Cl^-} [Cl^-]_1} \quad I.143$$

Aplicando logaritmos neperianos e resolvendo em ordem a  $\Delta V$ , obtém-se a equação de Goldman (ou equação de Goldman-Hodgkin-Katz):

$$\Delta V = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_{Na^+} [Na^+]_2 + P_{K^+} [K^+]_2 + P_{Cl^-} [Cl^-]_1}{P_{Na^+} [Na^+]_1 + P_{K^+} [K^+]_1 + P_{Cl^-} [Cl^-]_2} \quad I.144$$

Esta equação foi aplicada a diversas situações, tais como o axônio da lula, células da mucosa gástrica, células musculares e células epiteliais, coincidindo, praticamente, o valor de  $V$  obtido, com as medidas experimentais. Estes resultados conferem à equação de Goldman uma importância transcendente no que se refere à demonstração do interesse da Física na explicação quantitativa dos fenômenos, mesmo complexos, da Medicina.

É de interesse referir que a equação de Goldman pode ser expressa apresentando, não os valores absolutos de permeabilidade, mas valores relativos. Fazendo:

$$\alpha_{K^+} = \frac{P_{K^+}}{P_{Na^+}} \quad I.145$$

$$\alpha_{Cl^-} = \frac{P_{Cl^-}}{P_{Na^+}} \quad I.146$$

ou seja, exprimindo as permeabilidades do  $K^+$  e  $Cl^-$  em relação à do  $Na^+$ , vem:

$$\Delta V = \frac{RT}{F} \ln \frac{[\text{Na}^+]_2 + \alpha_{\text{K}^+} [\text{K}^+]_2 + \alpha_{\text{Cl}^-} [\text{Cl}^-]_1}{[\text{Na}^+]_1 + \alpha_{\text{K}^+} [\text{K}^+]_1 + \alpha_{\text{Cl}^-} [\text{Cl}^-]_2} \quad \text{I.147}$$

É também corrente designar-se na equação de Goldman o lado **1** por **i** (interior) e o lado **2** por **e** (exterior).

Se entrássemos com os valores das concentrações de  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$  e  $\text{Cl}^-$  intra e extracelulares e com a diferença de potencial  $\Delta V$  para o caso do axónio da lula, valores atrás indicados, verificaríamos que a equação de Goldman era verificada para  $\alpha_{\text{K}^+} = 25$  e  $\alpha_{\text{Cl}^-} = 11,25$ . Estes valores, aplicam-se à situação da célula nervosa em repouso e mostram que, nestas condições, a membrana do axónio é muito permeável ao potássio, um pouco menos permeável ao cloro e muito pouco permeável ao sódio. Considerando, numa escala arbitrária, a permeabilidade do potássio com o valor **1**, obtemos os valores seguintes de permeabilidade relativa, para os outros iões

$$P_{\text{K}^+} : P_{\text{Na}^+} : P_{\text{Cl}^-} \quad \diamond \quad 1 : 0,04 : 0,45 \quad \text{I.148}$$

Interessa ainda mencionar que nada impede que a Eq. I.147 seja aplicada à célula nervosa em situação eléctrica diferente da do repouso.

Estando a tratar de membranas celulares, interessa fazer algumas referências gerais sobre a constituição molecular das membranas biológicas.

### I.2.3 - Breves notas sobre a estrutura e função das membranas celulares

A individualização das células em termos morfológicos é efectuada pela membrana plasmática ou membrana celular, uma estrutura que separa dois meios de composição substancialmente diferente: o citoplasma e o meio extracelular.

A hipótese de que a membrana plasmática tem carácter lipídico foi inicialmente suportada pelas experiências que mostraram que os compostos solúveis em solventes não polares (azeite, éter, benzeno, etc.) passavam mais facilmente através da membrana das células do que as moléculas hidrosolúveis de igual peso molecular. O isolamento das membranas celulares, utilizando métodos mecânicos, ultrassons, etc., seguidos de ultracentrifugação e de métodos analíticos, como a electroforese, cromatografia e ainda a microscopia electrónica permitiram desvendar, com bastante profundidade, a

estrutura e funções destas membranas.

Na composição das membranas plasmáticas encontram-se lípidos, proteínas e água. Os lípidos são fundamentalmente fosfolípidos, mas também ocorrem glicolípidos e lípidos neutros, sobretudo colesterol. Os glicolípidos encontram-se ligados por ligações covalentes às proteínas e representam 2 a 5% da massa da membrana.

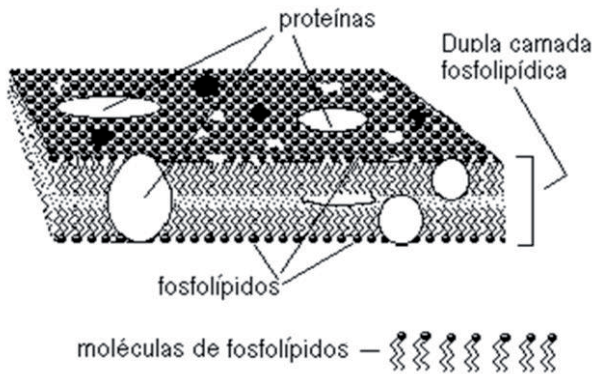


Fig. I.27 - Visão esquemática da membrana celular.

Resultados experimentais acumulados nos últimos 10 a 15 anos confirmaram, conclusivamente, que a maior parte dos lípidos das membranas biológicas existe na forma de uma dupla camada, tal como foi postulado por Gorter e Grendel em 1925. Os primeiros modelos de dupla camada diferem dos modelos actuais, sobretudo na colocação e propriedades das proteínas da membrana. Até aos princípios da década de 70 pensou-se que a componente proteica da membrana se dispunha sobre a superfície da dupla camada lipídica, formando como que uma camada proteica. A interacção da proteína com a dupla camada ocorria nos grupos lipídicos hidrofílicos. Este modelo mostrou-se inconsistente e, em 1971, foi proposto um outro arranjo para as moléculas proteicas em que estas penetravam profundamente através da dupla camada lipídica, de modo a formarem um "mosaico". Este modelo foi posteriormente alterado dando origem ao modelo do "mosaico fluido", onde a fase líquida da membrana é considerada essencialmente como uma camada líquida bidimensional, na qual, as moléculas lipídicas e proteicas podem difundir com relativa liberdade.

As moléculas dos fosfolípidos constituintes da membrana têm um

grupo polar extremo (hidrofilico) e duas cadeias fortemente apolares (hidrofóbicas). Em meio aquoso é energeticamente mais estável para os fosfolípidos formarem estruturas que permitam as cadeias apolares “acilos gordos” ficarem fora do contacto com moléculas de água.

As proteínas interagem com os fosfolípidos, nas membranas biológicas, por intermédio de dois tipos de ligação:

a) Interações entre os extremos polares das moléculas dos fosfolípidos com resíduos aminoácidos, ácidos ou bases das proteínas.

b) Interações hidrofóbicas entre as cadeias acilo e os resíduos hidrofóbicos dos aminoácidos das proteínas.

Apesar das membranas serem consideradas, essencialmente, barreiras de permeabilidade, existe um número considerável de outras funções igualmente desempenhadas por estas. É geralmente reconhecido que a dupla camada lipídica constitui a barreira de permeabilidade mais importante para as moléculas e iões hidrosolúveis. Esta permeabilidade é perturbada pela inserção de proteínas que permitem às membranas exercer outras funções, tais como formas facilitadas e específicas de transporte, transferência de energia, transferência de carga eléctrica, etc.

Moléculas liposolúveis e algumas pequenas moléculas podem penetrar através da membrana, porém, a dupla camada lipídica repele moléculas de grandes dimensões, moléculas solúveis e iões, muitos dos quais a célula necessita receber ou expelir, para sobreviver. O transporte destas substâncias vitais é levado a cabo por proteínas da membrana e, em particular, por proteínas intrínsecas. Estas moléculas formam um conjunto de sistemas de transporte. Uns são canais abertos que permitem a difusão directa de iões para o interior da célula (difusão simples); outros facilitam a difusão de solutos através da barreira lipídica (difusão facilitada e difusão por troca); e ainda outros são bombas que forçam a difusão através da membrana, contra gradientes de concentração (transporte activo). Partículas demasiado grandes para ser difundidas ou bombeadas podem ser engolidas através de aberturas que se formam para o efeito fechando rapidamente, a seguir.

As proteínas que constituem os canais iónicos da membrana têm, tipicamente, massas moleculares entre 200 e 300 kD e sofrem modificações estruturais entre estados de equilíbrio conformacional, em resposta a estímulos externos. Em condições fisiológicas normais as correntes iónicas, através destes canais, são da ordem do picoAmpère ( $10^{-12}$  Å) e ocorrem durante intervalos de tempo que vão de alguns ms à centena de ms.

A descoberta de um número apreciável de unidades funcionais em membranas celulares, ocorridas nas últimas décadas, tais como bombas ióni-

---

cas, canais de transporte, receptores hormonais, etc., bem como de propriedades específicas destas unidades, criam a sensação de que um modelo geral, dinâmico, para a membrana celular, está ainda longe de ter sido proposto.

#### 1.2.4 - Potencial de acção

É sabido que se detectam variações no potencial eléctrico à superfície do corpo humano. Estas variações resultam da existência de actividade eléctrica no interior do corpo e são originadas pela acção sincronizada de milhões de células. O estudo dos potenciais eléctricos detectados à superfície terá, assim, de começar pela compreensão dos mecanismos bioeléctricos a nível celular. Estes mecanismos estão associados à irritabilidade das células. Perturbações no meio envolvente extracelular podem provocar reacções por parte das células. Estas reacções produzem efeitos que variam com a especialização das células excitadas mas, a primeira perturbação detectável após o estímulo, é sempre de natureza eléctrica.

A actividade eléctrica de certos tipos de células é particularmente intensa. Destacam-se as células nervosas e musculares, estando nós especialmente interessados nas primeiras.

O sistema nervoso é constituído por um complexo conjunto de elementos celulares interligados e supervisionados, que se destina ao transporte de informação, percepção do meio exterior, controlo funcional e defesa espontânea. Há diferentes tipos de células nervosas, com diferentes especializações, mas, certas características estruturais e funcionais são comuns, sendo estas as que iremos explorar.

O neurónio, ou célula nervosa, é o elemento "computacional" básico do cérebro e sistema nervoso, constituído por muitos milhões destas células, ligadas entre si, formando como que uma complexa rede de comunicação e controlo que se estende, praticamente, a todos os pontos do corpo.

O neurónio é constituído pelo corpo celular (ou soma), com um diâmetro médio típico de cerca de 100  $\mu\text{m}$ , donde irradia um certo número de finas estruturas de pequenas dimensões, as dendrites, e um ou mais prolongamentos tubulares de grandes dimensões, os axónios (Fig. 1.28).



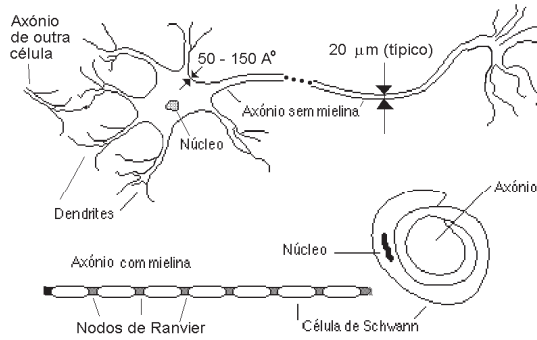


Fig. I.28 - Esquema de um neurônio sem mielina (em cima). Em baixo, a constituição do axônio com mielina.

Existem três tipos de neurónios no homem que se distinguem por razões funcionais e morfológicas: os neurónios receptores exteriores, os neurónios receptores interiores ou centrais e os neurónios motores ou efectores. Apesar de algumas diferenças estes neurónios têm de comum um corpo central de forma variável donde partem prolongamentos muito ramificados.

As dendrites das camadas mais externas do córtex cerebral têm cerca de 2 mm de comprimento. O comprimento dos axónios pode variar de cerca de 50 μm até vários metros e podem dividir-se em duas classes fundamentais: axónios sem mielina e axónios com mielina. Os primeiros, de pequeno comprimento, são constituídos por um cilindro gelatinoso, o axoplasma, separado do meio exterior por uma membrana de espessura 70 - 100 Å e constante dieléctrica relativa 5.

O diâmetro do axónio varia, em geral, de cerca de 0,1 a 20 μm mas, em certos invertebrados, como a lula, existem axónios gigantes com diâmetros que podem atingir 1 mm e comprimentos de 20 cm. Os neurónios humanos têm axónios que podem ultrapassar o metro de comprimento e as dimensões do corpo celular são também consideráveis quando comparadas com as dimensões de outras células do corpo humano por exemplo as células sanguíneas (Fig. I.29).

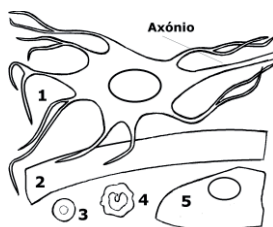


Fig. I.29 - Dimensões relativas de algumas células humanas. 1 – neurónio com o axónio cortado. 2 – fragmento de célula muscular estriada. 3 – eritrócito. 4 – linfócito. 5 – célula da epiderme.

Os axónios periféricos, de grande comprimento, são parcialmente cobertos por células especiais chamadas células de Schwann. Em termos de engenharia podemos dizer que o neurónio contém múltiplas portas de “entrada” susceptíveis de serem excitadas ou inibidas, um elemento de integração, uma linha activa de transmissão e um ou mais elementos de saída ou terminais.

As entradas ocorrem através da membrana pós-sináptica das sinapses. A integração pode ocorrer, quer nas dendrites, quer no próprio corpo celular. Se a soma algébrica dos impulsos de entrada ou excitações, excede um valor limiar  $T$ , a célula altera o seu estado, gerando um sinal que é conduzido activamente no axónio até às regiões terminais, Fig. I.30.

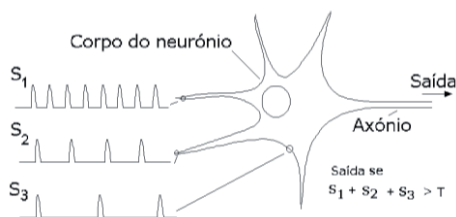


Fig. I.30 - Integração dos sinais de entrada num neurónio.

Se os sinais à entrada  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  (pós-sinápticos) estiverem em fase e a soma das amplitude atingir o limiar  $T$ , irá aparecer sinal à saída. A duração

típica destes impulsos, no caso das células nervosas, é de cerca de 1 ms e a frequência dos impulsos à entrada pode variar de 0 a 200 pulsos  $s^{-1}$ .

As células de Schwann parecem não estar directamente envolvidas no processo de condução nervosa mas na síntese de moléculas constituintes da membrana e de nutrientes para axónios danificados.

Nos axónios de maiores dimensões, as células de Schwann encontram-se enroladas em torno do axónio (mas não das dendrites) comportando-se como um dieléctrico. No contacto com o axónio, as células de Schwann criam uma bainha de um fosfolípido, a mielina, que constitui uma camada isoladora. Nestes axónios a camada de mielina é regularmente interrompida em intervalos de 1 a 2 mm originando reentrâncias, onde o meio exterior contacta com a membrana do axónio, os nodos ou nós de Ranvier. Nestes nodos a resistência eléctrica é baixa. Quando existem manifestações eléctricas nos axónios com mielina, estas ocorrem nos nós de Ranvier.

Uma grande parte dos processos que constituem a actividade biológica dos organismos é controlada por sinais eléctricos que são gerados nas células nervosas e musculares. A energia associada a estes sinais não provém do particular processo sob controlo, contrariamente, os sinais provêm de outros sistemas cuja tarefa é coordenar as funções biológicas local e globalmente.

Sendo estes sinais todos da mesma amplitude, facilmente se entende que informação sofisticada a ser transmitida, tem de estar associada ao número, ou frequência, dos mesmos impulsos. A informação sensorial transmitida pelos nervos é codificada por modulação de frequência.

Retomando as propriedades eléctricas da célula nervosa, consideremos o efeito dos estímulos. Após a estimulação da célula nervosa, a diferença de potencial entre o interior e o exterior celular altera-se, ficando transitóriamente com valor positivo. Torna-se possível, usando a equação de Goldman, determinar a relação das permeabilidades para a diferença de potencial, correspondente ao potencial de acção no seu valor máximo, ou seja, no pico do impulso de tensão positiva, que corresponde à excitação da célula. Os valores obtidos são:

$$\alpha_{K^+} = \frac{P_{K^+}}{P_{Na^+}} = 0,05$$

$$\alpha_{Cl^-} = \frac{P_{K^+}}{P_{Na^+}} = 0,0225$$

ou seja

$$P_{K^+} : P_{Na^+} : P_{Cl^-} \triangleleft 1 : 20 : 0,45$$

I.149

Estes resultados permitiram concluir que a excitação da célula nervosa é acompanhada de uma enorme subida de permeabilidade ao  $Na^+$ . Daqui, resulta uma corrente de iões sódio dirigida do exterior para o interior da célula. Esta entrada de cargas positivas através da membrana, faz subir o potencial da célula em relação ao exterior. Em seguida, a permeabilidade da membrana aos iões potássio aumenta e ocorre uma corrente de iões potássio para fora da célula. Segue-se uma descida rápida do  $P_{Na^+}$ . O  $P_{K^+}$ , após atingir o máximo, diminui até aos valores do repouso.

As variações de condutividade para os iões  $Na^+$  e  $K^+$ , após a excitação, estão representados na Fig. I.31, juntamente com o potencial de acção.

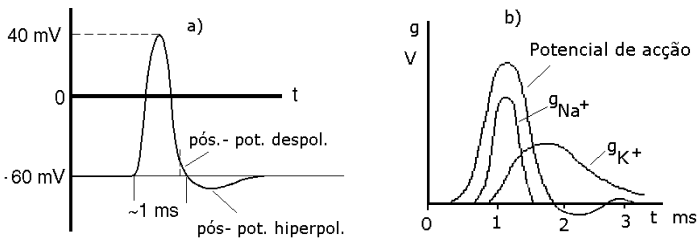


Fig. I.31 - a) Potencial de acção. b) Condutividade da membrana do axónio ao iões  $Na^+$  e  $K^+$  durante o potencial de acção.

A curva do potencial de acção é o resultado da estimulação do neurónio por um estímulo que pode ser de diversas naturezas, tais como eléctrica, mecânica ou térmica. Em geral, são os estímulos eléctricos, os mais usados em laboratório. No caso do axónio, o estímulo eléctrico pode ser aplicado entre pontos próximos do axoplasma ou através da membrana. A estimu-

lação eléctrica consiste em reduzir localmente o potencial de membrana, abaixo de um dado valor, induzindo alterações reversíveis no comportamento desta, em relação a alguns iões.

Para um estímulo eléctrico originar potencial de acção, ele necessita de ter uma amplitude  $V$  e um tempo de duração  $\Delta t$ , tais que, o produto  $V\Delta t$  seja superior a um certo limiar, abaixo do qual não ocorre excitação.

Impulsos abaixo do limiar de excitação, aplicados à membrana do axónio, embora não levem ao potencial de acção, alteram transitoriamente o potencial de membrana. Os impulsos subliminares são chamados hiperpolarizantes se descem o potencial de membrana e despolarizantes se o aumentam. Estas variações do potencial de membrana são localizadas, diminuindo exponencialmente com a distância ao ponto da estimulação.

O potencial de acção é aproximadamente constante, qualquer que seja o estímulo, desde que o produto  $V\Delta t$  seja superior ao limiar, ou seja, não há variação da amplitude e duração do impulso nervoso com o estímulo.

Demonstrou-se experimentalmente que, na estimulação de um nervo com impulsos rectangulares, a amplitude do limiar de estimulação aumenta quando se diminui a largura do impulso. É possível traçar-se uma curva amplitude vs. largura para o estímulo limiar, Fig. I.32.

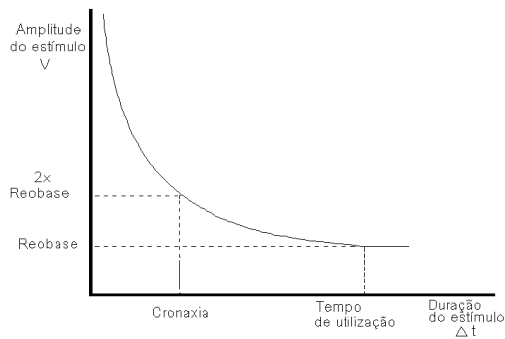


Fig. I.32 - Curva amplitude/duração para o impulso limiar de estimulação de um axónio.

Reobase é definida como a tensão limiar de excitação quando a largura do impulso é infinita (valor constante). A cronaxia é a largura do impulso para uma amplitude do impulso dupla da reobase. O tempo mínimo necessário para a reobase estimular a fibra nervosa é o tempo de utilização.

A curva do potencial de acção da Fig. I.31 a), representa a variação da

diferença de potencial entre um particular ponto do interior do axónio e o exterior celular, em função do tempo.

A estimulação e a medição do potencial de acção, que ocorrerá algum tempo após, encontram-se esquematizadas na Fig. I.33.

Vários processos, passivos e activos, determinam o potencial de repouso da membrana do neurónio e mantêm as concentrações de  $\text{Na}^+$  e  $\text{K}^+$  numa situação estacionária de não-equilíbrio. A mudança súbita do repouso para um estado de activação, que ocorre quando o neurónio gera um impulso nervoso, é devida ao rápido movimento de iões através da membrana; no início, especificamente, uma corrente de  $\text{Na}^+$  a entrar na célula.

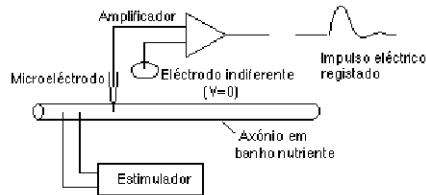


Fig. I.33 - Estimulação eléctrica e recolha do potencial de acção.

Dada a relativa impermeabilidade da membrana plasmática ao  $\text{Na}^+$ , tal corrente de entrada tem de ser devida a um aumento súbito da permeabilidade da membrana a este ião. O mecanismo que determina esta mudança perturbou os cientistas durante muitos anos. Foi, entretanto, nascendo a ideia de que deviam existir poros, ou canais, através dos quais os iões podiam difundir, passando através da barreira que representa a bicamada lipídica. No princípio, todavia, os recursos disponíveis para a medição e interpretação das correntes de deslocamento iónico eram escassos e a existência dos canais iónicos foi uma hipótese, sem comprovação, até que os avanços em biologia molecular e electrofisiologia, nos anos setenta, permitiram esclarecer a sua presença.

Nas redes de neurónios do sistema nervoso, o potencial de acção é desencadeado pela integração ou sobreposição de impulsos. A amplitude do potencial de acção resposta é independente da amplitude do estímulo que o desencadeou e, notar, os impulsos do potencial de acção gerados e transmitidos ao longo dos axónio nunca se sobrepõem, são sempre sequenciais.

O processo que ocorre no axónio, imediatamente após a estimulação, é chamado despolarização. A despolarização uma vez desencadeada propaga-

-se ao longo do axónio. Chama-se a este fenómeno onda de despolarização, dada a semelhança desta propagação a uma onda em movimento.

Esta propagação, resulta do facto da variação de potencial num ponto do axónio, devido à estimulação, ir originar correntes eléctricas locais entre este ponto e as regiões anexas ou seja, estabelecem-se correntes entre a parte activada e a parte em repouso do axónio. Estas correntes têm lugar através das soluções em contacto com a membrana.

Tais correntes vão originar quedas bruscas do potencial da membrana em pontos contíguos à região activa e actuam como estímulos com valores acima do limiar, causando assim novas excitações com aumento da permeabilidade da membrana ao  $\text{Na}^+$ , entrada destes iões, etc. O processo é auto-excitatório, com novos segmentos da membrana a serem levados ao limiar, por correntes iniciadas nas novas regiões activas.

O sinal (ou seja o potencial de acção) ao propagar-se, não é atenuado nem sofre distorção, visto acontecer uma renovação do potencial de acção em sucessivas zonas contíguas.

A propagação do potencial de acção nas fibras sem mielina ocorre com uma velocidade que varia de 0,6 a 5 m/s, dependendo de diversos factores, entre os quais, o diâmetro do axónio. Este, por sua vez, tem valores muito variáveis, como vimos. Uma expressão empírica aproximada para a velocidade em função do diâmetro do axónio é:

$$v = 2,5 D$$

$$I.150$$

onde  $v$  é a velocidade de propagação em m/s e  $D$  o diâmetro em  $\mu\text{m}$ .

Facilmente se percebe que, com o mecanismo referido de propagação, o axónio não apresente propriedades direccionais, ou seja, que a partir de um ponto de excitação experimental intermédio, o potencial de acção induzido, se propague nos dois sentidos do axónio. O sentido normal da condução é usualmente chamado de ortodrómico e o sentido contrário de antidrómico.

A curva do potencial de acção, após o pico positivo, diminui de inclinação, permanecendo acima do potencial de repouso, num intervalo chamado pós potencial despolarizante. A este segue-se um intervalo em que o potencial fica inferior ao potencial de repouso, o pós-potencial hiperpolarizante. A duração dos pós-potenciais positivo e negativo depende do tipo de neurónio podendo ir de fracções do ms a alguns ms. Nos pós-potenciais, o limiar de estimulação é alterado. Aumenta durante o pós-potencial despolarizante e diminui no pós-potencial hiperpolarizante.

Desde a parte inicial do potencial de acção e durante cerca de 1 ms o axónio não reage a qualquer estímulo (período refractário absoluto). Depois do pico e da parte do impulso de grande intensidade o axónio torna-se estimulável mas a carga necessária para a estimulação aumenta consideravelmente (período refractário relativo).

O que temos vindo a referir sobre a propagação do potencial de acção, refere-se ao axónio sem mielina. Nos axónios com mielina, a bainha de mielina que cobre a maior parte do axónio é isoladora, só havendo contacto entre a solução exterior e a membrana do axónio, nos nodos de Ranvier. Só nestes nodos é que poderão ocorrer as trocas iónicas que produzem o potencial de acção.

No axónio com mielina, a despolarização da membrana ocorre, unicamente, nos nós de Ranvier. Geram-se correntes eléctricas entre os nós de Ranvier contíguos, até ser atingido o limiar de excitação. Ocorre, então, aí, o potencial de acção. Tudo se passa como se a excitação saltasse de um nó de Ranvier para o seguinte, ao longo do axónio (Fig. I.34). Este tipo de condução é chamado de saltatória e também de condução no modo eléctrico. É mais rápida do que no axónio sem mielina, podendo atingir valores da ordem dos 150 m/s. A razão desta diferença de velocidades reside, fundamentalmente, na carga eléctrica movimentada na condução, muito menor no axónio com mielina.

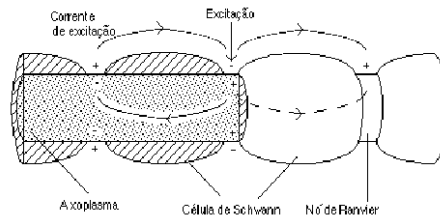


Fig. I.34 - Propagação da excitação no axónio com mielina.

Para se carregar um condensador é necessário tempo, que depende da capacidade do condensador e da resistência associada. Além da carga ser menor, a distância percorrida pela corrente eléctrica de excitação, entre duas zonas de excitação sucessivas, é aumentada, consideravelmente, em relação ao caso anterior. A distância entre dois nodos de Ranvier sucessivos é da ordem dos 2 mm.



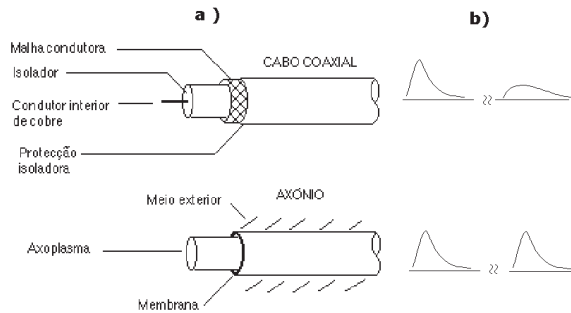


Fig. I.35 - a) Constituição de um cabo coaxial e do axónio sem mielina, b) Alteração da forma e amplitude do impulso no cabo coaxial, para distâncias grandes e sua manutenção no axónio.

O modo de condução do impulso entre os nodos de Ranvier é chamado de "modo de cabo eléctrico", isto por haver semelhanças entre a estrutura da fibra nervosa e os cabos coaxiais eléctricos, bem como entre a condução num cabo coaxial e nos espaços entre nodos de Ranvier sucessivos (Apêndice I.4.6). Contrariamente ao que sucede nos axónios, os sinais eléctricos nos cabos coaxiais, sofrem uma certa atenuação e distorção, em particular para comprimentos consideráveis (Fig. I.35-b). Chama-se comprimento característico de um cabo coaxial ao comprimento de cabo necessário para a amplitude do sinal ser reduzida pelo factor  $1/e$  ( $e$  - base dos logaritmos naturais). Um argumento dimensional simples mostra que nos axónios mielinizados, a velocidade de propagação do potencial de acção é controlado pela dimensão longitudinal da bainha de mielina.

A resistividade  $\rho$  do axoplasma é da ordem de  $100 \Omega\text{cm}$ . Com este valor, podemos calcular a resistência por cm de comprimento de axónio. No caso da rã, o diâmetro interno do axónio é de cerca de  $10^{-3}$  cm. A resistência longitudinal  $R$  de um condutor filiforme de comprimento  $\ell$  e secção recta  $S$  é dada por

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad \text{I.151}$$

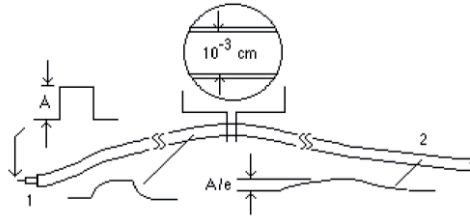


Fig. I.36 – Comprimento de cabo entre os pontos 1 e 2 é o seu comprimento característico  $l_c$ . A amplitude do impulso é reduzida de  $1/e$ .

A resistência longitudinal por cm de condutor é:

$$R_i = \frac{R}{l} = \frac{\rho}{S} \quad \text{I.152}$$

Para o axónio da rã, vem  $R_i = 127 \text{ M}\Omega/\text{cm}$ .

No caso do homem a resistividade do axoplasma é da ordem de  $0,02 \text{ }\Omega\text{cm}$  e o raio de  $5\mu\text{m}$ .

A elevada resistividade do axoplasma e o pequeno diâmetro do axónio dão origem a que o comprimento característico do axónio seja muito pequeno, em geral, da ordem de alguns milímetros. Nestas condições, os impulsos eléctricos não poderiam ser transmitidos directamente ao longo do axónio como num cabo coaxial, pois desapareceriam por completo nalguns centímetros. Contudo, para as pequenas distâncias entre os nós de Ranvier, a propagação pode ocorrer como nos cabos coaxiais. A amplitude do potencial de acção é restaurada em cada nó, não obstante a atenuação do impulso que ocorrerá quando este atravessa a pequena distância sob a bainha de mielina.

Durante o potencial de acção, a célula ganha  $\text{Na}^+$  e perde  $\text{K}^+$ . Experiências com radioisótopos do **Na** e **K** mostraram que o ganho de  $\text{Na}^+$  (ou a perda de  $\text{K}^+$ ) é de 3 a 4 pmoles/ $\text{cm}^2/\text{impulso}$ . Por outro lado, não ocorrendo equilíbrio quando a célula se encontra em repouso, ocorrem constantemente transferências iónicas através da membrana.

Para que a composição do axoplasma não seja alterada após a ocorrência do potencial de acção, as concentrações iniciais de  $\text{Na}^+$  e  $\text{K}^+$  têm de ser reconstituídas. Isto é obtido à custa de um processo activo, através do qual  $\text{Na}^+$  é bombeado para fora da célula e  $\text{K}^+$  para o seu interior (Fig. I.37).

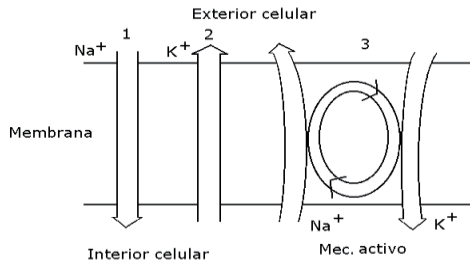


Fig. I.37 – Mecanismos passivo e activo do  $\text{Na}^+$  e  $\text{K}^+$  na membrana do axónio.

Este processo activo designado por bomba sódio-potássio ocorre à custa de energia libertada numa reacção metabólica onde participa o ATP (trifosfato de adenosina). A principal responsável pelo processo activo é a reacção,



com ADP, difosfato de adenosina e  $\Delta G$  a variação de energia livre. O transporte é efectuado pela acção de moléculas transportadoras, à qual se ligam os iões  $\text{Na}^+$  e  $\text{K}^+$  e que actua somente na fase da membrana. A capacidade de produção de energia do ATP tem a ver com o facto de possuir duas ligações pouco estáveis. A molécula de ATP é, afinal, uma molécula do nucleótido adenina, à qual está ligada uma cadeia de três fosfatos (a preto na Fig. I.38).



Fig. I.38 - Modelo espacial da molécula de ATP. A preto os radicais fosfato.

Os fosfatos têm carga negativa de modo que a sequência dos três radicais, em estreita proximidade, é altamente instável permitindo a intervenção em reacções químicas, com perda de um ou dois grupos e transferência de energia. Anteriormente frisou-se que existiam diferenças de potencial químico através da membrana, originando-se correntes de difusão de iões, com a consequente criação de diferenças de potencial eléctrico. Poderá parecer estranha esta afirmação, pois os processos de difusão tendem para o equilíbrio,

ou seja, tendem a desaparecer enquanto que, nas células vivas, estes processos prosseguem não se observando alteração na composição das células. No caso das células vivas, um trabalho igual e de sinal contrário ao produzido pelas forças de difusão é cedido pela membrana para refazer as concentrações celulares, através de processos activos (Fig. I.39). O processo activo não desempenha, directamente, qualquer papel na geração do potencial de acção.

Os axónios podem continuar a conduzir impulsos por diversas horas após "envenenamento" da bomba de sódio, enquanto as concentrações iónicas não forem substancialmente alteradas. As massas dos elementos que entram em jogo no processo passivo são mínimas em comparação com as existentes quer na célula quer no meio intersticial.

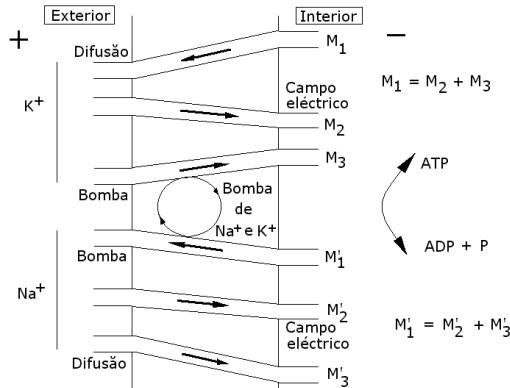


Fig. I.39 - Bomba de  $Na^+$  e  $K^+$  e balanço das trocas para estes íões.

As correntes iónicas postas em jogo são muito pequenas, da ordem dos  $10^{-5}$  A.

## 1.2.5 - Sinapses

O impulso nervoso é propagado da parte terminal do axónio de uma célula para dendrites do corpo celular de outro neurónio através de sinapses. As sinapses químicas garantem a unidireccionalidade da corrente de informação no sistema nervoso. Essencialmente a sinapse é um dispositivo onde ocorre transmissão de informação. Na forma mais corrente esta transmissão é realizada por um processo químico. No extremo dos axónios existem prolongamentos designados de fibras pré-sinápticas que têm, vesículas nas suas partes terminais. Estas vesículas ficam muito próximas de

regiões de membrana (membrana pós-sináptica) de células vizinhas que ocorrem em dendrites, axónios ou corpos celulares, Fig.I.40, constituindo, muitas vezes reentrâncias onde se encontra a superfície receptora. Nas vesículas encontram-se substâncias que se designam por neurotransmissores, como por exemplo a acetilcolina, a norepinefrina, a dopamina e a serotonina. Quando o impulso de despolarização atinge o extremo das fibras pré-sinápticas as vesículas libertam o neurotransmissor, por exemplo, a acetilcolina, que se difunde para o espaço sináptico, existente entre as fibras pré-sinápticas e a membrana pós-sináptica. A distância entre estas é da ordem de 1  $\mu\text{m}$  sendo vencida em cerca de 1 ms. Uma vez atingida a superfície receptora, estas moléculas desencadeiam um processo, no segundo neurónio, do qual resulta alteração local da permeabilidade da membrana ao  $\text{Na}^+$  originando excitação (PPSE) ou inibição (PPSI).

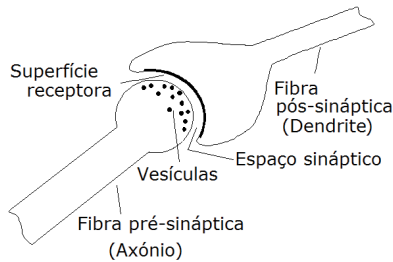


Fig. I.40 – Sinapse química.

No caso da excitação o potencial de acção vai propagar-se ao longo do axónio da segunda célula.

A acetilcolina libertada no espaço intersináptico é, entretanto, rapidamente eliminada por um enzima, a colinesterase.

## 1.2.6 - Receptores

A experiência de estimulação da membrana do axónio que referimos na Fig. I.32, embora desencadeie o potencial de acção não tem grandes semelhanças com o processo que ocorre naturalmente como resposta a estímulos térmicos, sonoros, luminosos, etc. Os estímulos naturais, de natureza física ou química, desencadeiam respostas em órgãos especializados chamados receptores, que se situam na superfície que contactam com o exterior, como a

pele, em cavidades como o ouvido interno e mesmo no interior como no globo ocular, ou em contacto com os diversos órgãos. Em termos gerais os receptores sensoriais são transformadores das diversas formas de energia que recebem, consoante as funções sensitivas, em energia eléctrica, na forma de potenciais de acção. Por vezes, os receptores têm nomes de acordo com as funções que desempenham como os mecanorreceptores, os termorreceptores e os nociceptores.

São referidos dois tipos básicos de mecanismo responsáveis pela geração de potencial de acção, a partir de receptores. No primeiro tipo, caso dos receptores da retina (estímulos luminosos) e do órgão de Corti (estímulos sonoros), os estímulos produzem, em células receptoras especializadas, uma variação no potencial de membrana cujo valor (chamado potencial receptor) é uma função do estímulo recebido. Como resultado desta variação de potencial a velocidade de produção de um transmissor químico varia no mesmo sentido que o estímulo, aumentando a probabilidade de resposta do neurónio seguinte. Aqui o potencial de acção não é gerado directamente na célula receptora.

Os estímulos, no segundo tipo de receptores sensoriais, por exemplo mecânicos, ou térmicos (corpúsculos de Pacini, terminais nervosos livres) produzem uma despolarização local (chamado potencial gerador) que é, em geral, aproximadamente proporcional ao logaritmo do estímulo aplicado. Como resultado da despolarização é originada uma corrente que, se for suficientemente intensa produz potencial de acção na secção adjacente da membrana. Deste modo a despolarização e o potencial de acção ocorrem na mesma célula.

Em resumo os estímulos são transformados pelos receptores sensoriais em potenciais que são funções da entrada e estacionários, ou seja, não se propagam pelos meios próprios do receptor.

Um situação com interesse após a acção de receptores é a possibilidade de ocorrerem circuitos reflexos via espinal medula. A actividade reflexa surge por realimentação entre trajectos sensoriais e motores (Fig. I.41).

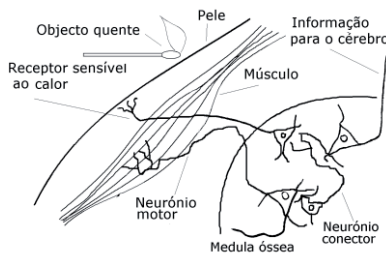


Fig. I.41 – Organização dos percursos nervosos nas acções reflexas.

Devido à grande diferença entre os trajectos, a acção reflexa indutora da reacção muscular, processa-se muito mais rapidamente do que o percurso da informação, até aos centros nervosos no cérebro e sequente resposta.

### 1.2.7 – Membranas carregadas electricamente

Detectam-se potenciais eléctricos variáveis à superfície do corpo humano. Estes potenciais resultam de actividade eléctrica no interior do corpo e são o efeito global de movimentos iónicos em milhões de células. A forma característica de alguns sinais resulta de grupos de células sofrerem activação de forma sincronizada. Antes de estudarmos as consequências das variações na distribuição da carga eléctrica das membranas, é de interesse considerarmos algumas propriedades dos dipolos eléctricos. Dipolo eléctrico é um conjunto de duas cargas eléctricas pontuais de igual valor, mas de sinal contrário e separadas por uma distância  $a$  muito pequena. O potencial  $V$  criado por um dipolo eléctrico num ponto à distância  $r$  do centro do dipolo, é

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} \quad \text{I.154}$$

onde  $p$  é o momento dipolar eléctrico,  $\theta$  o ângulo de captação e  $\epsilon_0$  a constante dieléctrica do vazio (Cap. VII.5).

### 1.2.8 - Dupla camada eléctrica

Nas membranas celulares a carga eléctrica distribui-se nos dois lados de uma fina espessura de um meio isolador, sendo as distribuições de carga eléctrica iguais e de sinal contrário. A dupla camada eléctrica caracteriza-se pela densidade superficial de carga de módulo  $\sigma = dq/ds$ , nos dois lados da membrana.

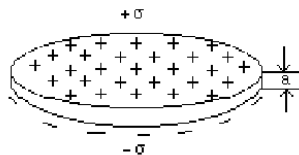


Fig. I.42 - Dupla camada eléctrica com densidade de carga eléctrica  $\sigma$ .

Consideremos dois elementos de área  $dS$ , iguais, muito pequenos e situados opostamente numa membrana de espessura  $a$  carregada electricamente.

As cargas elementares  $dq = \sigma dS$  e  $-dq = -\sigma dS$  situadas à distância  $a$  constituem um dipolo elementar, cujo momento dipolar tem por módulo

$$|\vec{p}| = a dq \tag{I.155}$$

Este dipolo elementar aponta normalmente às superfícies, e da face com carga negativa para a face com carga positiva.

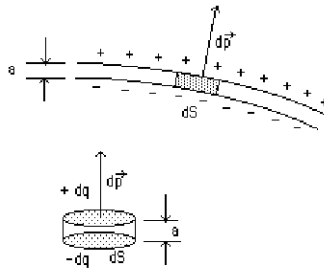


Fig. I.43 - Comportamento de um elemento da dupla camada eléctrica como dipolo eléctrico elementar.

Por definição, potência de uma dupla camada é

$$U = \frac{d|\vec{p}|}{dS} \tag{I.156}$$

Como  $|\vec{p}| = a dq = a \sigma dS$ , segue-se que

$$U = a \sigma \tag{I.157}$$

Notar que a potência de uma dupla camada nada tem a ver com energia libertada ou absorvida por unidade de tempo.



**I.2.9 - Potencial criado por uma dupla camada num ponto **P** exterior**

Numa dupla camada eléctrica homogénea de área **S** e potência constante **U**, consideremos um dipolo elementar de momento dipolar **dp**.

Usando a expressão já estudada para o potencial criado pelo dipolo elementar num ponto **P** à distância **r** vem

$$\begin{aligned}
 dV &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} U \frac{dS \cos \theta}{r^2} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} U d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{I.158}$$

onde **dΩ** é o ângulo sólido elementar de centro em **P** e que se apoia no contorno de **dS**, (Fig. I.44).

Como a espessura **a** é muito pequena, esta equação é uma boa aproximação, mesmo para pontos próximos da membrana.

Para se obter o potencial **V** criado por toda a dupla camada de área **S** no ponto **P**, basta considerar a soma de todos os valores de potencial elementar, criados por todos os elementos de área **dS** que constituem a superfície **S**. Então, na situação limite quando **dS**→0 podemos escrever

$$V = \int_S dV
 \tag{I.159}$$

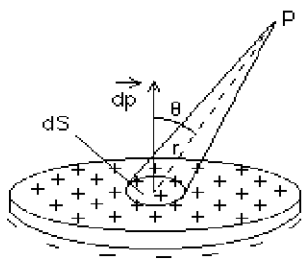


Fig. I.44 - Potencial criado num ponto à distância **r** de um elemento de uma dupla camada eléctrica.

ou seja, 
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} U \int d\Omega \quad \text{I.160}$$

ou

$$V = \frac{U}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad \text{I.161}$$

onde  $\Omega$  é o ângulo sólido do cone do vértice em **P** e que limita a superfície **S**, (Fig. I.45).

Para uma dupla camada eléctrica homogénea ( $U = C^{te}$ ), o potencial criado num ponto **P** só depende do ângulo sólido  $\Omega$ . Deste modo, duas duplas camadas eléctricas homogéneas, com a mesma potência, com a mesma orientação dos dipolos e com o mesmo contorno, originam o mesmo potencial em **P**, quaisquer que sejam as superfícies em que se apoiem, planas ou abauladas.

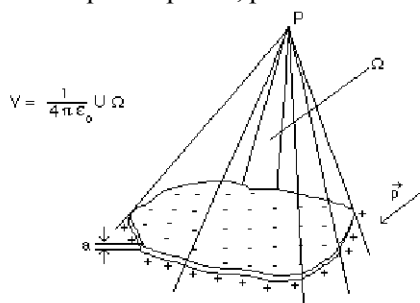


Fig. I.45 - Potencial criado por uma dupla camada eléctrica num ponto P.

Se tivermos duas duplas camadas com contornos apoiados no mesmo cone de vértice em **P**, como na Fig. I.46, com igual potência mas com as cargas dispostas de modo a que os momentos dipolares resultantes, para cada uma das camadas, sejam opostos, os potenciais criados em **P** por cada uma destas camadas são iguais e de sinal contrário, logo, a sua soma é nula.

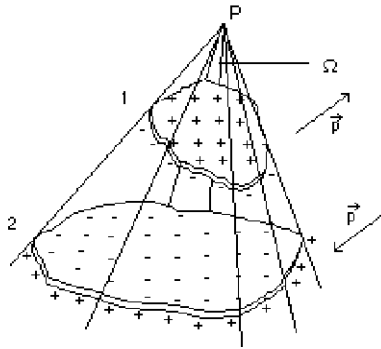


Fig. I.46 - Duas duplas camadas eléctricas com iguais potências apoiadas no mesmo ângulo sólido e com momentos dipolares opostos produzem potencial nulo no vértice do ângulo sólido.

### I.2.10 - Potencial criado por fibras durante o período de despolarização

Consideremos uma fibra excitável na situação de repouso. No ponto de vista eléctrico, trata-se de uma dupla camada eléctrica assente numa superfície fechada. A diferença de potencial do interior em relação ao exterior é negativa (da ordem de  $-60$  a  $-90$  mV).

Após estimulação ocorre a despolarização. Sucessivos segmentos da fibra vão sofrer alteração na distribuição das cargas eléctricas, ficando o interior positivo em relação ao exterior (da ordem de  $20$  a  $40$  mV).

Facilmente se vê que o potencial criado num ponto  $P$  por uma fibra no repouso é nulo. De facto, qualquer que seja  $P$  o cone com vértice neste ponto e apoiado tangencialmente na fibra limita duas duplas camada homogéneas com igual potência  $U$  mas com momentos dipolares opostos.

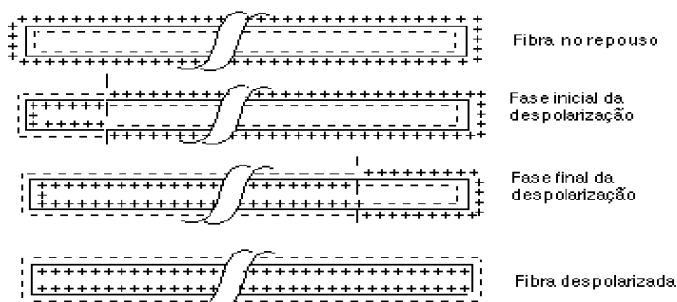


Fig. I.47 - Variação da distribuição da carga na membrana de uma fibra em despolarização.

Consideremos agora o potencial criado num ponto  $P$  por uma fibra durante a despolarização. Seja  $\Omega'$  o ângulo sólido máximo que enquadra exclusivamente a superfície de membrana no repouso,  $\Omega''$  o ângulo sólido máximo que abrange unicamente superfície despolarizada e  $\Omega$  o pequeno ângulo sólido que completa o ângulo sólido total do cone envolvente da fibra. Seja ainda  $U_0$  a potência da dupla camada no repouso e  $U_1$  a potência da dupla camada activa. O potencial criado no ponto  $P$  pela fibra da Fig. I.48 é o potencial criado no ponto  $P$  pelas duplas camadas limitadas por  $\Omega$ . O potencial criado pelas duplas camadas limitadas por  $\Omega'$  e  $\Omega''$  é nulo por se tratar da situação da Fig. I.46.

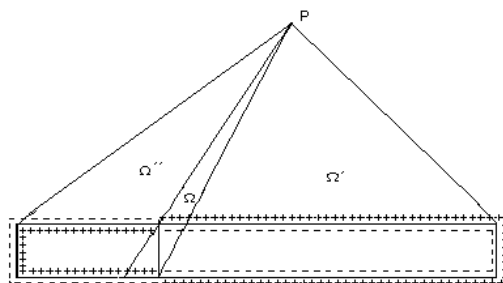


Fig. I.48 - Só as duplas camadas eléctricas dentro do ângulo sólido  $\Omega$  irão criar potencial no ponto  $P$ .

Então o potencial em **P** é

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} U_0 \Omega + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} U_1 \Omega \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (U_0 + U_1) \Omega
 \end{aligned} \tag{I.162}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} U \Omega \tag{I.163}$$

com

$$U = U_0 + U_1.$$

Como se observa na Fig. I.49, o ângulo sólido  $\Omega$  torna-se muito pequeno para fibras muito finas, podendo considerar-se um ângulo sólido elementar  $d\Omega$ .

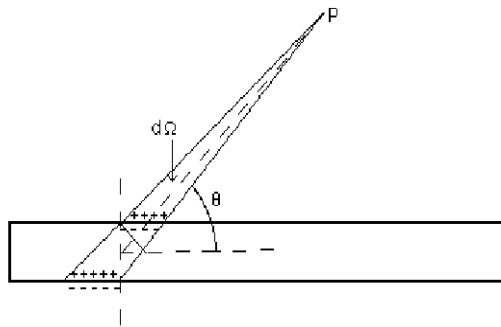


Fig. I.49 - O potencial criado em **P** resulta das cargas situadas nas duplas camadas dentro do ângulo sólido  $d\Omega$ .

O potencial criado pela carga existente no ângulo sólido elementar é o potencial elementar  $dV$  dado por:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} U d\Omega \tag{I.164}$$

Se nesta equação substituírmos  $U$  e  $d\Omega$  pelas expressões

$$U = a \sigma$$

e

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

e utilizarmos, em seguida as expressões  $\sigma = \frac{dq}{dS}$  e  $dp = a dq$ , vem

$$\begin{aligned} dV &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} U d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a\sigma \cos\theta dS}{r^2} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} dV &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a dq \cos\theta}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dp \cos\theta}{r^2} \end{aligned} \tag{I.165}$$

Esta expressão é aquela que teríamos obtido para potencial criado no ponto  $\mathbf{P}$  por um dipolo com as características indicadas na Fig. I.43

Existe, então, um dipolo fictício, correspondente à dupla camada eléctrica fictícia  $\mathbf{D}$ . Esta dupla camada eléctrica imaginária é normal ao eixo da fibra e corresponde a uma distribuição de cargas eléctricas na secção normal da fibra que separa a região em repouso de região activa.

O momento dipolar eléctrico do dipolo fictício aponta no sentido da propagação da onda de despolarização.

O potencial no ponto  $\mathbf{P}$  pode ser dado em função das variáveis de posição  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  em vez de  $\mathbf{r}$  e  $\theta$ .

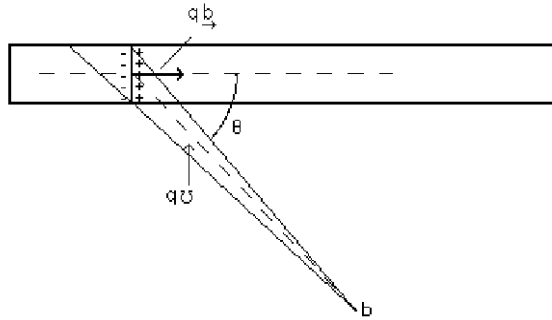


Fig. I.50 - Dipolo fictício que produz o mesmo potencial em **P** que as duplas camadas eléctricas da Fig. I.42.

Consideremos então o potencial criado no ponto **P** por uma fibra em despolarização, referido agora a um sistema de eixos rectangulares. Seja o eixo dos X's desse sistema o próprio eixo da fibra e a origem o pé da perpendicular do ponto **P** sobre este eixo

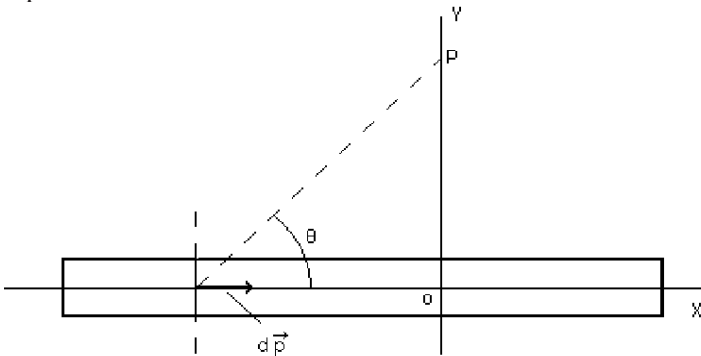


Fig. I.51 - Potencial criado por uma fibra em despolarização num sistema de eixos rectangulares.

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta \, dp}{r^2}$$

ou, após multiplicação por  $-(-\frac{r}{r})$

$$dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r \cos\theta) dp}{r^2 r} \quad \text{I.166}$$

como

$$x = -r \cos\theta \quad \text{e} \quad r^2 = x^2 + y^2, \text{ vem}$$

$$dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dp}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{I.167}$$

A equação obtida mostra que o potencial criado em **P** deve ser positivo se **x** for negativo, nulo para  $x = 0$  e negativo para **x** positivo. Por derivação desta equação em ordem a **x**, e determinação dos pontos em que esta se anula, obtemos os extremos da função (valores máximo e mínimo), cujos valores são  $x = \frac{y}{\sqrt{2}}$  para o mínimo e  $x = -\frac{y}{\sqrt{2}}$  para o máximo.

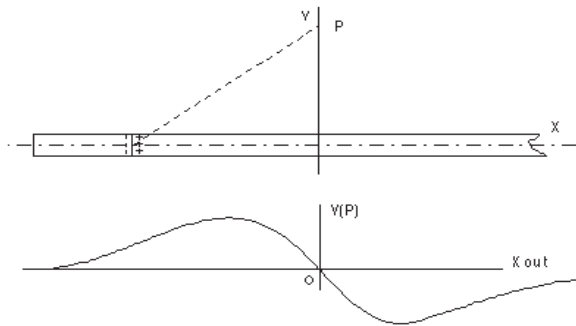


Fig. I.52 - Potencial num ponto **P**, produzido pela despolarização de uma fibra, em função do espaço percorrido, ou do tempo, supondo velocidade de propagação constante.

A curva do potencial no ponto **P**, em função de **x**, é a curva difásica com perfil do tipo da Fig. I.52. Supondo que a propagação da despolarização se efectua com velocidade constante  $c = x/t$ , a curva do potencial em função do tempo é idêntica à anterior.

Do que já dissemos compreende-se, a partir da Fig. I.52, que o potencial em **P** é positivo quando a frente de despolarização se aproxima da perpendicular tirada de **P** sobre a fibra, é nulo quando atinge o pé da perpendi-



cular e é negativo quando se afasta da perpendicular. Simplificando, podemos dizer que o potencial num ponto é positivo ou negativo consoante vê aproximar ou afastar a excitação.

Se, numa fibra já despolarizada, considerássemos agora o progresso de uma frente de repolarização posterior à despolarização e raciocinássemos de modo idêntico ao caso anterior chegávamos à conclusão que o potencial num ponto exterior seria negativo quando o ponto vê aproximar a repolarização e é positivo se a vê afastar.

Um modelo realista do comportamento eléctrico de uma fibra tem de considerar a repolarização, na maioria das vezes desfasada da despolarização, mas com ela coincidente no tempo. O potencial num ponto é a sobreposição dos potenciais produzidos pelos dois processos. Consideremos a situação de activação/desactivação de uma fibra supondo que a frente de repolarização precede a frente de despolarização com um atraso de  $\tau$ , Fig.I.53-a). Consideremos os potenciais em função do tempo, independentemente para a activação e desactivação, com os respectivos sinais, com o atraso  $\tau$  e não esquecendo que a densidade de carga da região despolarizada é menor, em módulo, do que na porção polarizada. A curva resultante da sobreposição dos dois potenciais em função do tempo, Fig.I.53-b), mostra que se obtém uma curva trifásica. O perfil desta curva depende do atraso  $\tau$ .

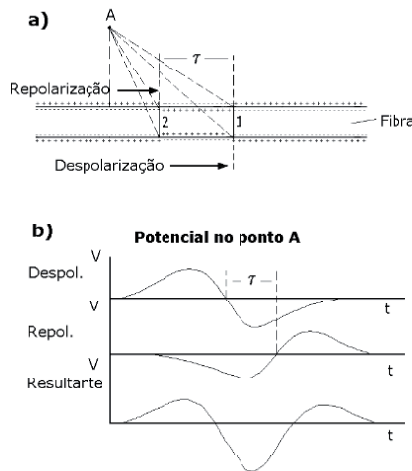


Fig. I.53 - a) Atraso entre despolarização e repolarização. b) Potenciais vs. tempo produzidos num ponto, independentemente, pelos dois processos e a sua sobreposição.

Em muitos casos, os potenciais medidos, em cada instante, em pontos à superfície do corpo podem, de modo aproximado, ser considerados a sobreposição dos potenciais criados por múltiplos processos de propagação de frentes de despolarização e repolarização ocorrendo num grande número de células.

### I.2.11 - Medidas com perfusão do axónio. Curvas de potencial de acção.

Alguns dos factos referentes à participação dos iões  $\text{Na}^+$  e  $\text{K}^+$  no potencial de acção e que aceitámos como válidos sem demonstração, foram comprovados por experiências muito simples.

É possível espremer um axónio de lula esvaziando-o do seu conteúdo, o axoplasma, sem agressão apreciável da membrana, utilizando um método que se aproxima do esquematizado na Fig. I.54. Depois desta operação o axónio pode ser preenchido com soluções escolhidas e estudado o comportamento da membrana no transporte de solutos de interesse.

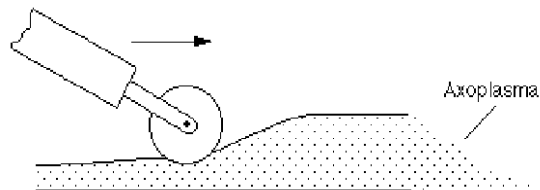


Fig. I.54 - Esquema do método de esvaziamento do axoplasma num axónio de lula.

Estes estudos podem ser realizados utilizando o esquema experimental representado na Fig. I.55, que permite fazer medições eléctricas em segmentos de axónios, durante o transporte de solutos apropriados.

Com este dispositivo foi demonstrado que o potencial de repouso das membranas é controlado pela concentração dos iões potássio. De facto, se a concentração do potássio é igual nos dois lados da membrana, ou seja, se  $C_k^i = C_k^e$ , o potencial de repouso é nulo ( $\Delta V = 0$ ).

Por outro lado, se a concentração externa do potássio é superior à concentração interna, ou seja, se  $C_k^e > C_k^i$ , então o potencial de repouso é positivo ( $\Delta V > 0$ ).

Noutras experiências, utilizando o dispositivo esquematizado na Fig. I.55, foi estudada a dependência da amplitude do potencial de acção na concentração do sódio. Para tal, efectuou-se a perfusão do axónio com soluções de sulfatos ( $\text{Na}_2\text{SO}_4$  e  $\text{K}_2\text{SO}_4$ ) de diversas concentrações tendo sempre, no exterior, uma solução isotónica de  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ .

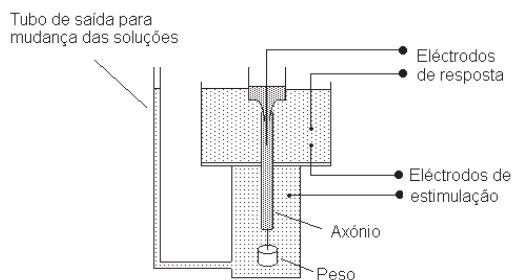


Fig. I.55 - Esquema do dispositivo experimental com o qual se podem fazer medições eléctricas nos axónios.

As curvas dos potenciais de acção para três situações diferentes encontram-se na Fig. I.56.

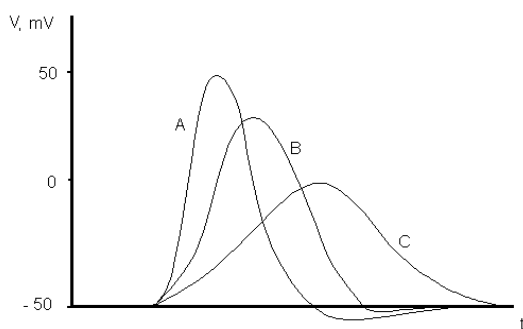


Fig. I.56 - Curvas do potencial de acção para soluções interiores: A -  $\text{K}_2\text{SO}_4$  isotónico; B - 25% de  $\text{K}_2\text{SO}_4$  substituído por  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ ; C - 50% de  $\text{K}_2\text{SO}_4$  substituído por  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ . No exterior sempre uma solução isotónica de  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ .

As soluções interiores eram: curva A -  $\text{K}_2\text{SO}_4$  isotónico; curva B - 75 % de  $\text{K}_2\text{SO}_4$  e 25% de  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ ; curva C - 50% de  $\text{K}_2\text{SO}_4$  e 50% de

$\text{Na}_2\text{SO}_4$ . A altura das curvas do potencial de acção depende da relação entre as concentrações interna e externa de  $\text{Na}^+$ . Quanto menor for a relação  $\frac{C_{\text{Na}^+}^i}{C_{\text{Na}^+}^e}$ , maior é o valor pico do potencial de acção.

Adoptando o modelo do campo eléctrico constante e considerando que as permeabilidades do  $\text{Na}^+$  e  $\text{K}^+$  são muito superiores à permeabilidade do  $\text{SO}_4^{2-}$  ( $P_{\text{K}}, P_{\text{Na}} \gg P_{\text{SO}_4}$ ), por aplicação da equação de Goldman, vem

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{RT}{F} \ln \frac{P_{\text{K}} C_{\text{K}}^e + P_{\text{Na}} C_{\text{Na}}^e}{P_{\text{K}} C_{\text{K}}^i + P_{\text{Na}} C_{\text{Na}}^i} = \\ &= \frac{RT}{F} \ln \frac{C_{\text{K}}^e + b C_{\text{Na}}^e}{C_{\text{K}}^i + b C_{\text{Na}}^i} \end{aligned} \quad \text{I.168}$$

onde

$$b = \frac{P_{\text{Na}}}{P_{\text{K}}} \quad \text{I.169}$$

Os valores experimentais obtidos, para o potencial de repouso, e para as concentrações da Eq. I.168 ajustam-se bastante bem ao valor de 0,08 para **b**, significando baixa permeabilidade ao sódio na membrana em repouso. Para a membrana activa o ajuste ocorre para  $b=7$ , significando elevada permeabilidade da membrana activa para aquele ião.

### I.2.12 – Modelos eléctricos da membrana

Para compreender o significado das correntes iónicas através da membrana, interessa considerar modelos eléctricos para a membrana. Consideremos primeiro um modelo para a situação de repouso, em que a soma de todas as correntes é nula. Neste modelo, Fig.I.57 encontram-se baterias (representadas por f.e.m.s associadas em série com as correspondentes resistências interiores, aqui expressas por inversos de condutâncias) que simulam o comportamento eléctrico dos iões  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$  e  $\text{Cl}^-$ .

Em vez da resistência eléctrica  $R_i$ , para o ião  $i$ , é usada o inverso da sua condutância  $g_i$

$$R_i = 1/g_i \quad \text{I.170}$$

Estas séries bateria-resistência correspondem a canais iónicos específicos que definem os valores das permeabilidades da membrana àqueles iões, valores que podem variar com tensões externas aplicadas e com o tempo.

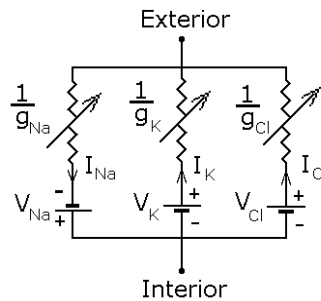


Fig. I.57 - Modelo eléctrico da membrana no repouso.

As resistências são variáveis porque se admite que o seu valor possa ser alterado em condições específicas.

As f.e.m.s das baterias são os potenciais de equilíbrio e representam a diferença de potencial eléctrico entre interior e exterior que compensa a corrente de difusão gerada pelo gradiente de concentração através da membrana, para os correspondentes iões. Ou, de outro modo, para cada canal, a f.e.m. da bateria é a diferença de potencial químico entre interior e exterior, para a espécie iónica considerada que é dada pela equação de Nernst; por exemplo, para o  $\text{Na}^+$

$$V_{\text{Na}} = \frac{RT}{F} \ln \left[ \frac{C_{\text{Na}^+}^e}{C_{\text{Na}^+}^i} \right] \quad \text{I.171}$$

onde  $C_{\text{Na}^+}^e$  e  $C_{\text{Na}^+}^i$  são respectivamente as concentrações exterior e interior do ião  $\text{Na}^+$ . Os valores das f.e.m. são 50 mV para o  $\text{Na}^+$ , 75 mV para o  $\text{K}^+$  e 40 mV para o  $\text{Cl}^-$ .

Para cada canal a soma da f.e.m. com a queda de tensão através da resistência, que resulta da corrente iônica de difusão que a atravessa, dá a diferença de potencial através da membrana. Para uma dada membrana esta soma é, obviamente, igual para todos os canais. Este modelo só tem aplicação para a situação de repouso, com correntes não nulas através dos canais iônicos referidos, mas com a corrente total através da membrana, soma das correntes de todos os canais, constantemente nula. Para a corrente iônica  $i$  de um dado canal, a diferença de potencial aplicada através da condutância  $g_i$  é:

$$V_m - V_{i,Nernst} \quad I.172$$

Então a condutância no canal  $i$  é:

$$g_i = \frac{1}{R_i} = \frac{I_i}{V_m - V_{i,Nernst}} \quad I.173$$

onde  $I_i$  é a corrente iônica através do canal respectivo.

Então para os iões que interessa considerar

$$g_{Na} = \frac{I_{Na}}{V_m - V_{Na}} \quad g_K = \frac{I_K}{V_m - V_K} \quad g_{Cl} = \frac{I_{Cl}}{V_m - V_{Cl}} \quad I.174$$

Após excitação da célula e enquanto a corrente através da membrana for variável, o modelo da Fig. I.57 já não é aplicável. É que, nestas condições, uma parte da corrente através da membrana atravessa a componente capacitiva da membrana, sem corresponder a movimento de iões através dos canais referidos. Isto dificulta a medição das correntes iônicas durante o desenvolvimento do potencial de acção. Contudo, é sabido que a corrente através de um condensador é proporcional à variação de tensão aplicada no condensador, não havendo corrente se  $V = Cte$ , ou seja,

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad I.175$$

Esta relação pode ser aproveitada favoravelmente.

### I.2.13 - Experiências com o método do "voltage clamp"

Uma estratégia para eliminar as correntes capacitivas no axónio é manter constante a queda de tensão através da membrana. Um sistema de "voltage clamp" quando aplicado num dado circuito mantém a diferença de potencial constante através deste, independentemente de variações de impedância ou de corrente que ocorram no circuito. Isto é conseguido por meio de uma fonte de corrente controlada por tensão, incluída num circuito com realimentação.

Antes da utilização do método de "voltage clamp", a medição das correntes iónicas de  $\text{Na}^+$  e  $\text{K}^+$  através da membrana tinha de efectuar-se utilizando os efeitos acumulados de transferência de iões, depois da aplicação de um número muito elevado de estímulos, a uma preparação de nervo.

Nas técnicas de "voltage clamp" usam-se eléctrodos colocados axialmente dentro de um segmento de axónio para que um dado potencial se verifique, ao mesmo tempo, em todos os pontos. Os fenómenos de propagação do potencial de acção são eliminados e a corrente através da membrana é controlada de modo a ocorrer um particular valor de potencial de membrana. O arranjo experimental utilizado está esquematizado na Fig. I.58.

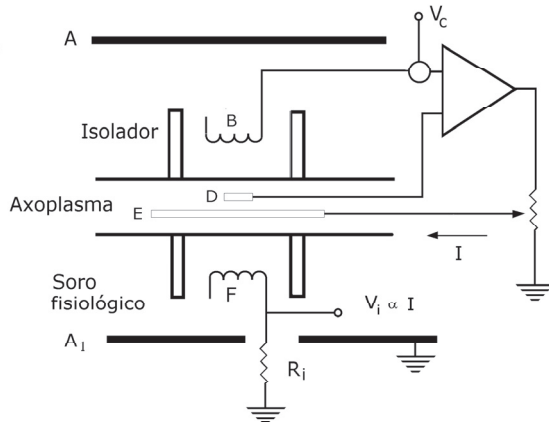


Fig. I.58 - Esquema do arranjo experimental utilizado no método do "voltage clamp".

O eléctrodo, que se vê em corte, é um cilindro de prata, envolvendo o axónio e com ele coaxial. Os eléctrodos **E**, **A** e **A<sub>1</sub>** destinam-se à alimentação de corrente, os eléctrodos **B** e **D** à medição do potencial através da membrana e o eléctrodo **F** à medição da corrente através da membrana que é proporcional à

diferença de potencial através de  $R_i$  ou seja,  $V_D - V_B = V_m$  é o potencial através da membrana ou potencial de membrana e  $V_i$  é uma tensão proporcional à corrente através da membrana. Todos os eléctrodos são de **Ag** revestidos com uma mistura de  $Ag/AgCl$  afim de evitar efeitos de polarização<sup>8</sup>. Os discos isoladores asseguram que as correntes sejam aproximadamente radiais.

O potencial de membrana  $V_m$  é comparada continuamente com a tensão “clamp” aplicada  $V_C$  e a corrente através da membrana é ajustada, de modo a que  $(V_m - V_C)$  seja sempre nula.

O aspecto geral da curva da corrente através da membrana vs. tempo, em resposta a um clamp despolarizador, ou seja, o resultado da aplicação à membrana de uma função degrau de tensão (Fig. I.59 a), é o da Fig. I.59 b)-1.

A curva da Fig. I.59-b)-1 é obtida com uma solução contendo, no meio exterior, uma alta concentração de  $Na^+$  e outros iões. Esta curva apresenta uma porção inicial negativa (o sinal menos a indicar corrente dirigida para o interior da célula) seguida por uma porção positiva, mais prolongada, que persiste enquanto o clamp é mantido.

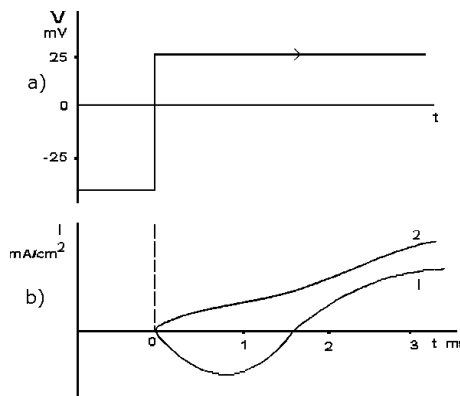


Fig. I.59 – a) Função degrau de tensão aplicada à membrana. b) 1-Forma genérica da curva corrente transmembranar-tempo. 2- Curva de resposta na ausência de  $Na^+$  no meio exterior.

<sup>8</sup> A utilização de eléctrodos que originem passagem de corrente durante uma medição de potencial é indesejável. Quando a corrente é negativa, iões  $Cl^-$  vão para a solução, quando é positiva os  $Cl^-$  formam  $AgCl$  no eléctrodo.



A tensão aplicada origina um aumento da permeabilidade da membrana ao  $\text{Na}^+$  que passa da alta concentração do exterior para o interior da membrana. Se a solução exterior contém em vez de  $\text{Na}^+$ , um soluto não iónico por exemplo, colina, não ocorre a corrente negativa como se observa na Fig. I.59 –b)-2.

Para compreender o significado das duas fases de corrente da curva da Fig. I.59 –b-1) interessa considerar o modelo eléctrico da membrana, onde se encontram, de novo, as baterias com as correspondentes f.e.m.s e resistências interiores (inversos de condutâncias) agora em paralelo com um condensador de capacidade  $C$ .

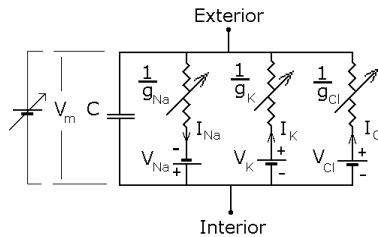


Fig. I.60 - Modelo eléctrico da membrana com corrente não nula.

O valor da capacidade é da ordem de  $1 \mu\text{F}/\text{cm}^2$ . No modelo que consideramos, a membrana é encarada como um condensador de capacidade  $C$  com corrente de fuga, ou seja, corrente eléctrica através de uma componente resistiva no meio dieléctrico entre as armaduras. A corrente de fuga é constituída pela soma das correntes de  $\text{Na}^+$ , de  $\text{K}^+$  e de  $\text{Cl}^-$  através da membrana, que ocorrem por canais activos independentes. No repouso, (ausência de estímulo aplicado) não passa corrente através do condensador e é  $dV_m/dt = 0$ , ou seja aplicam-se as Eqs. I.174

Se, como consequência de uma acção química, ou de outra natureza, a condutância de um dos canais (por exemplo do  $\text{Na}^+$ ) aumenta, temporariamente, de um valor  $\Delta g_{\text{Na}^+}$ , é originada uma corrente

$$(V_{\text{Na}} - V_m) \Delta g_{\text{Na}^+} \tag{I.176}$$

a qual altera a carga do condensador e faz aumentar  $V_m$ . Note-se que

$$\frac{dV_m}{dt} = \frac{(V_{\text{Na}^+} - V_m) \Delta g_{\text{Na}^+}}{C} \tag{I.177}$$

Para os  $\text{Na}^+$  e  $\text{K}^+$ , a condutância varia durante o potencial de acção, reflectindo a variação da permeabilidade da membrana para estes iões. As duas primeiras igualdades da Eq. I.174 permitem arriscar algumas hipóteses para explicar o significado das componentes da curva da corrente transmembranar em função do tempo, da Fig. I.59-b-1). Na Fig. I.61, são consideradas diferentes tensões de clamp, para as condições de obtenção da curva da Fig. I.59-b-1).

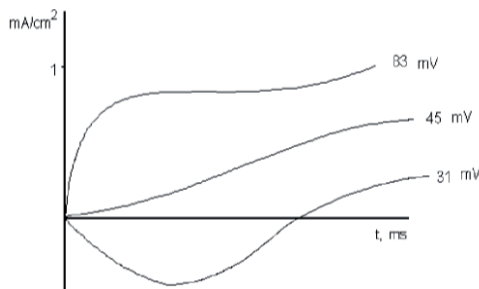


Fig. I.61 - Curvas da corrente através da membrana em função do tempo, para diversas tensões clamp (parâmetro).

Se a corrente inicial, negativa, é devida a  $\text{Na}^+$ , então, se fizermos a tensão de clamp através da membrana  $V_m = V_{\text{Na}^+}$ , criaremos condições de equilíbrio electroquímico para este ião e será  $I_{\text{Na}^+} = 0$ . Se aplicarmos  $V_m > V_{\text{Na}^+}$  então o sentido da corrente deve inverter-se, ou seja, em vez de negativa (de fora para dentro), passará a positiva (de dentro para fora). Isto é o que se observa na prática.

O potencial que inverte a corrente inicial negativa é 45 mV, próximo do potencial de Nernst para o sódio (50 mV).

Se, para o caso do clamp de 31 mV da Fig. I.60, a corrente mais tardia, positiva (de dentro para fora) for devida a iões  $\text{K}^+$  então, fazendo o clamp da membrana a  $V_m = -V_{\text{K}^+}$  (-75 mV), podemos anular esta corrente. Todavia, uma tensão de -75 mV é inferior ao potencial de excitação da membrana. Experimentalmente verifica-se ser necessária uma tensão superior a -45 mV para a excitação.

A metodologia descrita acima tem sido utilizada para a identificação de canais iónicos nas membranas celulares.

Assim é necessário excitar primeiro a membrana, durante um intervalo

de tempo  $T$ , usando um clamp (Fig. I.62).

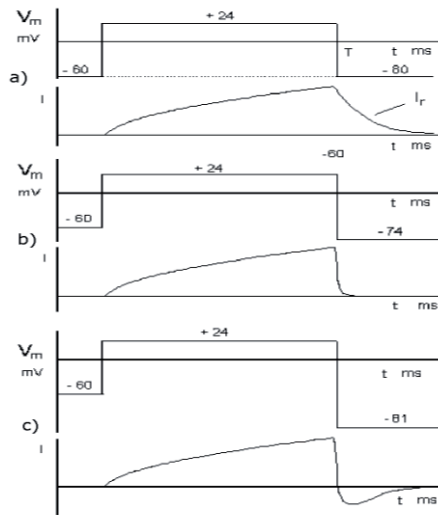


Fig. I.62 - Três séries de curvas obtidas a partir de um axónio que foi colocado numa solução muito diluída ( $C_{Na}^i > C_{Na}^e$ ), de tal modo que a corrente inicial de sódio fosse de dentro para fora.

Como há corrente remanescente  $I_r$  (Fig. I.62 a) curva de  $I$ ) durante uns milisegundos, depois da membrana começar a repolarizar, podem estudar-se os efeitos de um segundo clamp hiperpolarizante neste período.

Estes factos são fortemente a favor da hipótese de que a corrente remanescente é transportada, sobretudo pelos iões potássio. As três séries de curvas que correspondem à Fig. I.62 foram obtidas a partir de um axónio que foi colocado numa solução muito diluída ( $C_{Na}^i \gg C_{Na}^e$ ) de tal modo que a corrente inicial de sódio fosse de dentro para fora.

É também possível separarem-se as contribuições que, neste processo, correspondem às correntes de sódio e potássio. Reportemo-nos à Fig. I.63.

Após aplicação de um degrau de potencial de amplitude  $(V+V_R)$ , faz-se o registo da corrente iónica, para as concentrações externas de Na convenientes.

Numa primeira experiência com  $C_{Na}^e > C_{Na}^i$ , obtém-se a curva A, Fig.

I.63.2.

Em seguida faz-se a determinação para a situação de  $V_{Na^+} = V$ , ou seja,  $I_{Na^+} = 0$ , obtém-se a curva **B**, das Figs. I.63.2 e I.63.3. Esta curva envolve unicamente iões potássio.

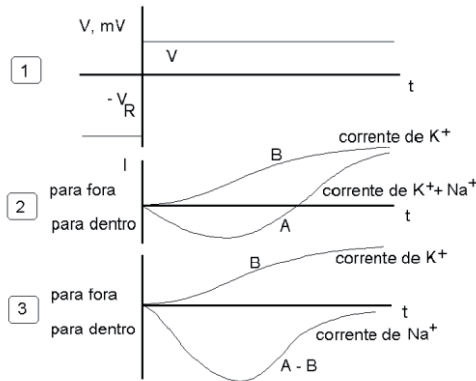


Fig. I.63 - Separação dos efeitos individuais das espécies iónicas  $K^+$  e  $Na^+$ .

O potencial a partir do qual é invertida a corrente remanescente é de cerca de  $-74$  mV, Fig. I.62 b) que é muito próximo do potencial de Nernst do potássio ( $-75$  mV). Na Fig. I.62 c) para uma tensão aplicada de  $-81$  mV, a corrente remanescente já é de fora para dentro da célula.

Subtraindo **B** de **A** obtém-se a curva devida aos iões de sódio, Fig. I.63.3. Podemos assim separar os efeitos individuais das espécies iónicas em estudo.

Usando estas curvas podem avaliar-se as condutâncias da membrana para os respectivos iões, utilizando as expressões

$$g_{Na} = \frac{I_{Na}}{V_m - V_{Na}} \qquad g_K = \frac{I_K}{V_m - V_K} \qquad I.178$$

Curvas típicas de condutância para o  $Na^+$  e  $K^+$  do axónio da lula para voltagens clamp de 0 mV, 49 mV e  $-34$  mV, respectivamente, são apresentadas na Fig. I.64.

A forma destas curvas depende do valor do potencial de membrana aplicado.

Em geral, quanto menor é o potencial de membrana, menor é o aumento de condutância. Para valores de potencial de membrana ( $V_m$ ) baixos a condutância máxima do  $\text{Na}^+$  ( $g_{\text{Na}})_{\text{max}}$  é menor do que  $(g_{\text{K}})_{\text{max}}$  mas, no axónio da lula, a situação inverte-se para  $V_m \geq -5\text{mV}$ .

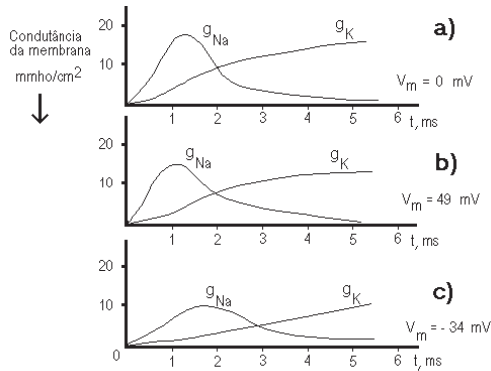


Fig. I.64 - Curvas de condutância para o axónio da lula para tensões clamp de 0 mV, 49 mV e -34 mV.

A dependência da  $(g_{\text{Na}})_{\text{max}}$  da tensão  $V_m$ , permite uma explicação para a rápida subida do impulso nervoso: a despolarização do axónio, devido a correntes locais origina a subida da  $g_{\text{Na}}$  que permite a entrada de  $\text{Na}^+$  no axónio, que continua a despolarização, etc, (Fig. I.65).

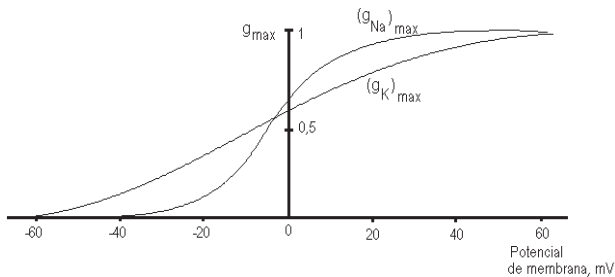


Fig. I.65 - Dependência da  $g_{\text{max}}$  no potencial de membrana, em função do potencial de membrana

Este ciclo de acontecimentos, no qual  $V_m$  e  $g_{\text{Na}}$  se entrecruzam, origi-

na que  $V_m$  se aproxime rapidamente de  $V_{Na}$  antes que os efeitos tardios da despolarização (aumento da  $S_K$ ) tenham tempo de ocorrer (Fig. I.66).

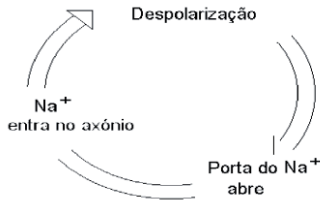


Fig I.66 – Sequência despolarização, abertura da porta do  $Na^+$  e entrada deste íon para o interior celular.

Fazendo curvas de condutância para um conjunto muito grande de valores de voltagem clamp, Hodgkin and Huxley foram capazes de chegar a expressões empíricas que descrevem a variação temporal das condutâncias da membrana do axônio ao  $K^+$  e  $Na^+$ , cujas curvas estão na Fig. I.67.

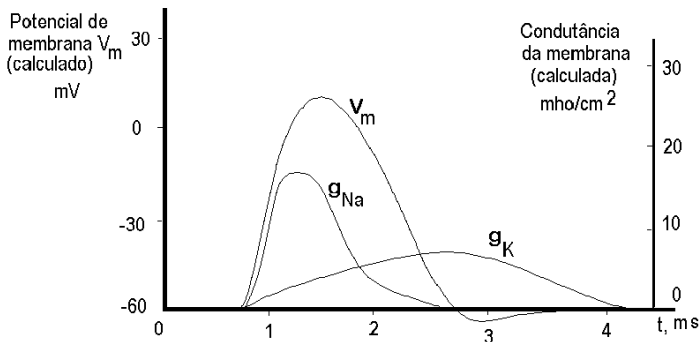


Fig. I.67 – Potencial de ação e condutância da membrana em função do tempo, para o  $Na^+$  e  $K^+$ .

### I.2.14 - Características eléctricas do axónio

É usual comparar-se a membrana celular a um condensador. De modo idêntico ao que sucede num condensador, existem na membrana duas regiões com cargas eléctricas opostas, separadas por uma fina camada de um material mau condutor. O axónio é idêntico a um condensador plano enrolado sobre si próprio, formando um condensador cilíndrico. O material dieléctrico, que é o complexo proteico da própria membrana, permite, no entanto, a

passagem de alguns iões. Deste modo, a membrana comporta-se como um condensador com corrente de fuga.

No repouso, o potencial eléctrico no interior do axónio é negativo em relação ao exterior, pelo que ocorre, no interior da membrana, um campo eléctrico dirigido de fora para dentro. Este campo actua contra a saída de  $K^+$  e entrada de  $Cl^-$  mas favorece a entrada de  $Na^+$ .

Podemos calcular a capacidade do axónio por unidade de comprimento e por unidade de área. O axónio considera-se um condensador cilíndrico constituído por dois cilindros condutores coaxiais de raios **a** e **b**, muito próximos, separados por um meio dieléctrico de constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$ . A capacidade de um condensador é dada pela equação:

$$C = \epsilon \frac{S}{d} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad I.179$$

com **S** área do condensador (no nosso caso, para a unidade de comprimento do axónio,  $S = 2\pi b \text{ cm}^2$ ), **d** espessura do dieléctrico e  $\epsilon$  permissividade do dieléctrico ( $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , produto da constante dieléctrica  $\epsilon_r$  pela permissividade do vazio  $\epsilon_0$ ). São conhecidos os valores  $\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  e  $\epsilon_r \approx 5$ .

Façamos o valor de **d** igual a  $100 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ m}$ . Então, para a unidade de área

$$C_A = 5 \times 8,8 \times 10^{-12} \frac{1}{10^{-8}} = 4,4 \times 10^{-3} \text{ F/m}^2$$

Para a unidade de comprimento, a que corresponde a área  $2\pi b$ , vem

$$C_c = \frac{5 \times 8,8 \times 10^{-12} \times 2\pi \times b}{10^{-8}} = 2,8 \times 10^{-2} \times b \text{ F/m}$$

Qual é a carga que produz uma variação no potencial de membrana de 100 mV?

$$\Delta Q = C \Delta V$$

$$\Delta Q = 1 \times 10^{-6} \times 100 \times 10^{-3} = 10^{-7} \text{ coulomb/cm}^2$$

$$1 \text{ mole iões } < > 96500 \text{ coulomb } \approx 10^5 \text{ coulomb}$$

$$\Delta Q < > \frac{10^{-7}}{10^5} = 10^{-12} \text{ moles/cm}^2 = 1 \text{ picomole/cm}^2$$

Calculemos a massa de  $\text{Na}^+$  no volume correspondente a  $1 \text{ cm}^2$  de membrana. Este volume é de cerca de  $0,0125 \text{ cm}^3$  e a concentração molar dos iões é  $C_{\text{Na}^+}^i = 50 \text{ mmoles/L} = 5 \times 10^{-5} \text{ moles/mL}$  e a massa é  $6,25 \times 10^5$  picomoles por  $\text{cm}^2$  de membrana.

O axónio gigante da lula (ou choco) é frequentemente usado em experimentação em electrofisiologia, devido às suas dimensões: O diâmetro pode atingir  $1000 \mu\text{m}$  e a membrana uma espessura de  $7,5 \mu\text{m}$ .

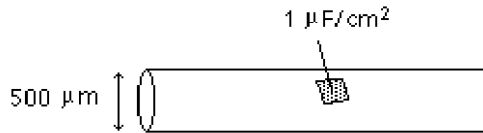


Fig. I.68 – Axónio com  $500 \mu\text{m}$  de diâmetro e capacidade específica de  $1 \mu\text{F/cm}^2$ .

A capacidade específica da membrana é  $1 \mu\text{F/cm}^2$  e o potencial de repouso  $-70 \text{ mV}$ . Supondo válido o modelo do campo eléctrico constante no interior da membrana qual é a direcção e intensidade do campo  $\vec{E}$  no interior da membrana para os valores indicados?

124

Sendo

$$\Delta V = -70 \times 10^{-3} \text{ V} \quad \text{e} \quad \Delta x = 7,5 \times 10^{-9} \text{ cm},$$

vem, para a intensidade do vector campo

$$|\vec{E}| = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{70 \times 10^{-3}}{7,5 \times 10^{-9}} = 9,33 \times 10^6 \text{ V/m}$$



que é um valor muito elevado.

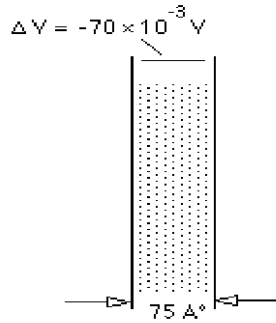


Fig. I.69 - A pequena espessura, origina um enorme campo eléctrico para a diferença de potencial do repouso de  $-70\text{mV}$ .

Usando os dados anteriores do axónio gigante da lula podemos determinar a constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$  do dieléctrico da membrana.

Usando a expressão da capacidade de um condensador plano e considerando que

$$C_m = 1 \times 10^{-6} \text{ F}$$

para

$$S = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \quad d = 7,5 \times 10^{-9} \text{ m} \quad \text{e} \quad \epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

vem

$$10^{-6} = \epsilon_r \times 8,8 \times 10^{-12} \times \frac{10^{-4}}{7,5 \times 10^{-9}}$$

Então

$$\epsilon_r = \frac{7,5}{8,8} \times 10^{-6} \times 10^{-9} \times 10^4 \times 10^{12} = 0,85 \times 10 = 8,5$$

## I.3 - APLICAÇÕES

### I.3.1 – Electrocardiografia

Uma fibra no repouso ou totalmente despolarizada não cria potencial eléctrico num ponto exterior distante. O potencial criado por uma fibra num ponto distante, quando ocorre activação, é igual ao potencial criado por um dipolo fictício que se desloca ao longo da fibra, acompanhando a onda de despolarização. O momento dipolar eléctrico do dipolo fictício aponta no sentido do deslocamento da onda e acompanha a despolarização. Estas propriedades, que analisámos, aplicam-se igualmente às fibras nervosas e musculares. Contudo, a estrutura do músculo cardíaco é característica e constitui um dos três tipos de tecido muscular existentes no homem. As fibras do músculo cardíaco (também chamadas de células musculares ou de miócitos) são estriadas e ramificadas, contêm um único núcleo e são interrompidas por discos intercalados (Fig. I.70).

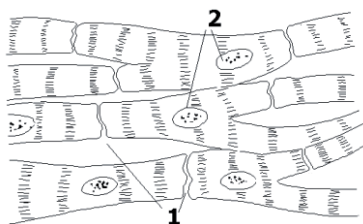


Fig. I.70 – Estrutura do músculo cardíaco: 1- Discos intercalados; 2 – Núcleos.

As numerosas fibras musculares existentes no coração são dotadas de propriedades especiais sendo as mais importantes a actividade eléctrica rítmica, associada a deslocamentos iónicos através da membrana, a capacidade de sofrer contracção e relaxamento, relacionada com propriedades moleculares (da actina e miosina), e a faculdade de permitirem a passagem dos sinais eléctricos de umas células para as outras, através dos discos intercalados e junções laterais, que fornecem percursos intercelulares de baixa impedância (sincício eléctrico) (ver IV.9.18). A primeira das propriedades obriga a um sistema de distribuição do influxo nervoso às fibras musculares, processo este efectuado com uma periodicidade adequada. Nas condições normais o coração é activado a partir do conjunto de células nervosas que constituem o nodo sinusal (nodo SA) que é o marca-passo cardíaco, dispondo de

automatismo espontâneo na excitação e impondo o ritmo desta. Os impulsos nervosos induzem contracções rítmicas involuntárias nas fibras musculares do coração, inicialmente das aurículas e depois dos ventrículos.

A excitação originada no nodo sinusal é transmitida ao conjunto das fibras musculares auriculares, progride até ao nodo aurículo-ventricular (nodo AV) e estende-se depois progressivamente a toda a parede ventricular. Este processo de propagação é efectuado por intermédio das células nervosas que constituem os feixes de His e a rede de Purkinje (Fig. I.71).

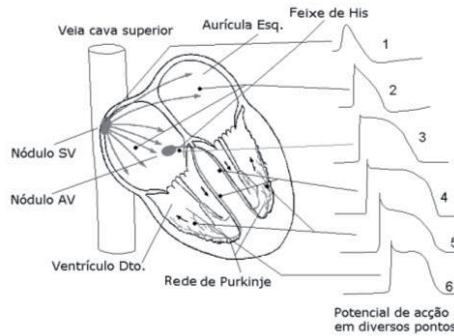


Fig. I.71 - Tecido nervoso interveniente na despolarização cardíaca. Observa-se o potencial de acção em diversos pontos do coração, obtidos por aplicação de micro eléctrodos nas fibras do miocárdio (1-Nodo sinusal; 2-Miocárdio auricular; 3-Tronco do feixe de His; 4-Ramos do feixe de His; 5-Rede de Purkinje; 6-Miocárdio ventricular).

As seqüências mecânicas da função cardíaca dependem do facto de que a despolarização das fibras do miocárdio não é simultânea mas obedece a um esquema complexo de processos de activação e desactivação das diferentes partes do miocárdio. A principal função do nodo aurículo-ventricular é atrasar a propagação, permitindo que o sangue preencha os ventrículos antes da despolarização do miocárdio ventricular ser iniciada. As curvas do potencial de acção estão desfasadas no tempo e não são iguais nos diversos pontos do coração como pode observar-se na Fig. I.71, estando estas diferenças relacionadas com os eventos mecânicos que vão condicionar. As células das fibras cardíacas no repouso (polarizadas) estão a  $-90$  mV, em relação ao exterior e quando despolarizadas atingem cerca de  $20$  mV. A duração do potencial de acção, de  $100$  a  $300$  ms, é extremamente longa quando

comparada com a dos neurónios (~1 ms). A longa duração do potencial de acção vai permitir que fibras cardíacas atinjam a total despolarização. A duração do potencial de acção é da mesma ordem de grandeza que a da contracção que vai induzir. De um modo geral, as células cardíacas normais passam por quatro fases distintas, durante um ciclo cardíaco: 1) Repouso (fase diastólica), 2) Despolarização em curso (fase do início da contracção), 3) Total despolarização (fase sistólica) e 4) Repolarização em curso. Em cada instante coexistem no miocárdio células nas diferentes fases. Por exemplo, em termos temporais, a repolarização das fibras auriculares é simultânea com a despolarização ventricular. A repolarização é um processo que ocorre de modo mais difuso que a despolarização e a uma onda electroquímica que lhe corresponde (onda T), apesar de identificável, não é tão bem definida como acontece na despolarização.

As células musculares que constituem o miocárdio, quer auricular quer ventricular, são caracterizadas pela capacidade de transmitir a excitação a células congéneres. Assim, uma vez iniciada a activação, esta propaga-se célula a célula, ocorrendo contracção e relaxamento de forma sincronizada e permitindo que uma massa considerável de tecido funcione como se fosse uma unidade única.

Numa primeira aproximação, o potencial eléctrico medido num particular ponto da superfície da pele, é a soma dos potenciais individuais criados no ponto pelos dipolos fictícios das fibras do miocárdio em actividade. O electrocardiograma (ECG) é uma representação da actividade dos geradores bioeléctricos cardíacos feita indirectamente através do registo dos potenciais na superfície do corpo. Através do ECG conseguem-se localizar os focos de electrogénese e obter uma ideia da progressão topográfica dos fenómenos eléctricos no tecido cardíaco.

Durante a despolarização de uma fibra, num dado instante, podemos considerar o seu momento dipolar eléctrico individual  $\vec{dp}$ , (que corresponde ao momento dipolar eléctrico do dipolo fictício associado). O potencial medido à superfície do corpo, resultante da actividade eléctrica do coração, num dado instante, pode ser encarado como resultado da acção conjugada da distribuição espacial de carga ou dos múltiplos dipolos eléctricos das fibras activas.

Interessa representar os efeitos, produzidos, à distância, pela distribuição de carga em todas as fibras cardíacas com actividade eléctrica, num dado instante, pela acção de uma única causa equivalente. Esta representação é de grande conveniência para a interpretação dos potenciais de superfície, ponto

de partida para o diagnóstico. Esta simplificação pode ser efectuada considerando: 1) Uma dupla camada eléctrica equivalente ou 2) Um dipolo resultante equivalente.

Na primeira considera-se que, em cada instante, a área do miocárdio com actividade eléctrica pode ser comparada a uma dupla camada eléctrica de potência constante (Fig. I.72).

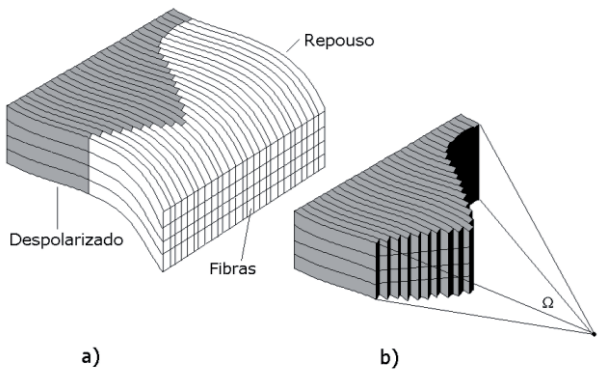


Fig. I.72 – a) Esquema da activação de uma fracção do miocárdio. Em cinzento a região activada e a branco a região no repouso. b) Região activada com as zonas de transição despolarizado/polarizado. O ângulo sólido  $\Omega$  subentende estas zonas (a preto carregado) para todas as fibras musculares activadas.

Como as dimensões transversais das fibras são muito pequenas a zona de transição da Fig. I.72 constitui uma superfície praticamente contínua.

Para um dado instante, o conjunto das distribuições de carga em todas as fibras produz, no ponto **P**, o mesmo potencial que uma dupla camada eléctrica constituída pelo conjunto das zonas de transição, despolarizado/polarizado, das mesmas fibras.

Na segunda hipótese e em termos de produção de potencial num dado ponto, podemos considerar que a distribuição de carga existente no miocárdio, num dado instante, é equivalente a um dipolo.

O momento dipolar eléctrico deste dipolo chama-se vector cardíaco ou eixo eléctrico instantâneo,  $\vec{V}$ . Este vector, é um vector resultante da soma vectorial dos momentos dipolares eléctricos dos dipolos fictícios das fibras cardíacas, num dado instante. Para medições do potencial com eléctrodos

situados a distâncias do coração muito maiores do que a dimensão transversal do conjunto das fibras em despolarização, considera-se que todas as células do miocárdio em actividade estão à mesma distância do eléctrodo e pode considerar-se o vector cardíaco como razoável aproximação. O módulo, direcção e ponto de aplicação do vector cardíaco variam em cada instante durante o ciclo cardíaco, como se vê, para seis instantes do ciclo cardíaco, durante a despolarização do miocárdio ventricular, indicados na Fig. I.73 a).

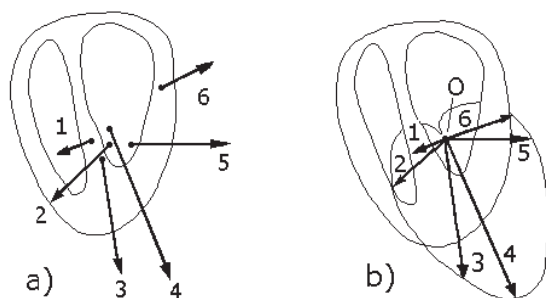


Fig. I.73 – a) Dipolos equivalentes para seis instantes do ciclo cardíaco, durante a despolarização do miocárdio ventricular. b) Vectocardiograma da despolarização do miocárdio ventricular. Os vectores da Fig. I.73 a) são os verdadeiros vectores cardíacos com os pontos de aplicação reais. Na Fig. I.73 b) estes vectores cardíacos estão aplicados no ponto **O** e as suas extremidades são pontos do vectocardiograma.

Em termos aproximados podemos considerar que os vectores cardíacos para todos os instantes do ciclo cardíaco, têm o mesmo ponto de aplicação (o centro eléctrico do coração, (ponto **O**, Fig. I.73 b) situado no interior do ventrículo esquerdo. Nestas condições, durante o ciclo cardíaco, a extremidade do vector cardíaco aplicado em **O** descreve curvas fechadas, como se observa na Fig. I.73 b), que constituem o vectocardiograma, (definido como lugar geométrico das sucessivas posições no espaço ocupadas pela extremidade do vector cardíaco  $\vec{V}$ ). Contudo, os vectores da Fig. I.73 a) são os verdadeiros vectores cardíacos com os pontos de aplicação reais.

As projecções do vector cardíaco sobre os três eixos coordenados, em cada instante do ciclo cardíaco, quando representado num sistema de eixos

convenientemente escolhido, Fig. I.74 – a) e em função do tempo, geram as componentes  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$  do vectocardiograma, Fig. I.74 – d). Esta análise caiu em desuso e só as projecções frontal (plano XOY), Fig. I.74 – c), e precordiais (Fig. I.81) são consideradas com interesse.

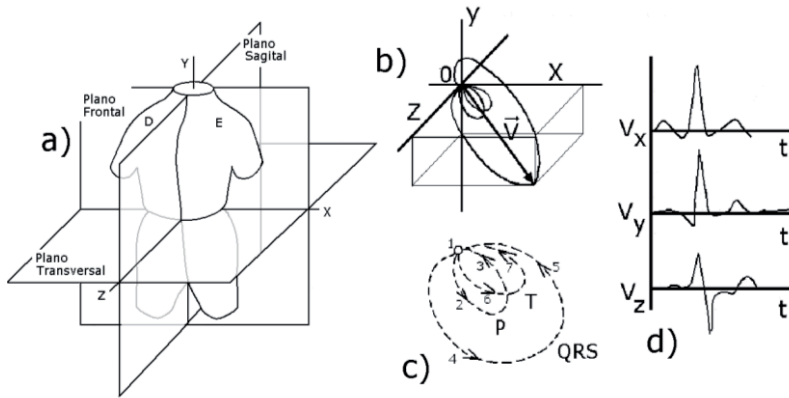


Fig. I.74 – a) Colocação dos eixos coordenados. b) Vectocardiograma a 3 dimensões. c) Projecção frontal do vectocardiograma. d) Projecções do vectorcardiograma sobre os três planos coordenados, em cada instante do ciclo cardíaco, representadas em função do tempo, gera as componentes  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$  do vectocardiograma.

O eixo eléctrico instantâneo  $\vec{V}$  é como que um indicador do sentido e direcção médios de propagação da onda de despolarização. Dá também uma indicação da intensidade global do processo de despolarização.

O potencial eléctrico que é medido à superfície vai depender, dentre outros factores, do valor e orientação do eixo instantâneo do coração e do modo de colocação dos eléctrodos de medição. A compreensão profunda das curvas do electrocardiograma só é possível se entendermos as verdadeiras relações entre os dipolos gerados no miocárdio e os potenciais produzidos à superfície.

Na Fig. I.75 pode ver-se, para diversos estágios do processo eléctrico durante o ciclo cardíaco, em a) a localização e orientação da activação/de-sactivação com a sua repercussão no desenvolvimento do traçado do ECG (DI), realçada a cheio grosso em b); em c) a projecção do vector cardíaco  $\vec{V}$  em diversos instantes com correspondência temporal com a) e em d) o traça-

do do ECG, derivação **DI**, que explicaremos a seguir.

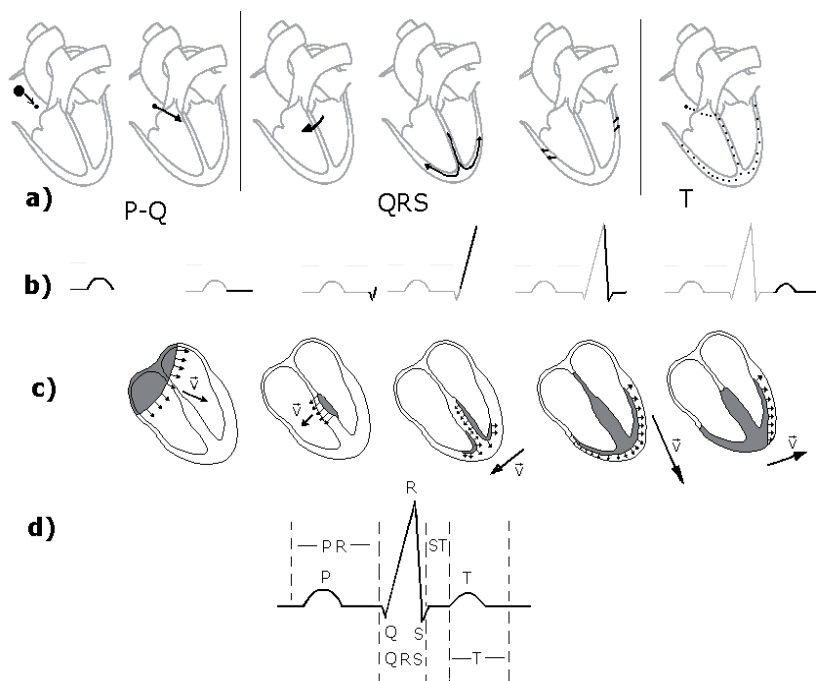


Fig. I.75 – O intervalo **PR** corresponde à despolarização e contracção das duas aurículas, o intervalo **QRS** corresponde à propagação do impulso nos ventrículos e o pico **T** está associado à repolarização do coração.

A curva do ECG normal consiste de três ondas **P**, **QRS** e **T**. O pico **P** corresponde ao impulso eléctrico inicial que desencadeia o ciclo cardíaco. O intervalo de **P** a **Q** tem duração de 0,12 a 0,2 segundos numa pessoa normal e corresponde à propagação do impulso nervoso nas aurículas, ou seja, é uma medida do tempo desde o início da activação auricular até ao início da activação ventricular. Uma fracção importante deste intervalo corresponde à passagem pelo nodo **AV**. O intervalo **QRS** dura de 0,06 a 0,10 segundos e corresponde à propagação do impulso nos ventrículos e precede a sístole. O pico **T** está associado à repolarização do coração, ou seja, ao seu regresso à



situação de repouso.

As chamadas derivações<sup>9</sup> frontais utilizadas em electrocardiografia são as disposições dos eléctrodos adoptadas para a leitura de potenciais de superfície e utilizam 3 eléctrodos (Fig. I.76).

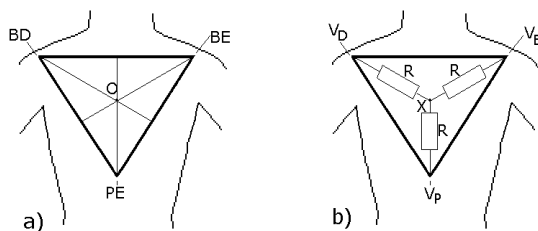


Fig. I.76 - Os eléctrodos na superfície do corpo devem ser os pontos mais afastados do coração, no volume do tronco, que são, com aproximação as espáduas esquerda (BD) e direita (BE) e pubis (PE) e correspondem aos vértices de um triângulo equilátero cujo centro geométrico coincide aproximadamente com o centro eléctrico do coração **O**.

Como condição para validar os modelos adoptados as diferenças de potencial à superfície são medidas entre duas extremidades distantes do coração (montagem bipolar) ou entre o eléctrodo de medida e um eléctrodo de referência (montagem monopolar). O sistema tronco-corção é um volume condutor com um dipolo eléctrico no seu interior. Os pontos de medida na superfície do corpo devem ser os mais afastados do coração, no volume do tronco, que são, com aproximação as espáduas esquerda e direita e o púbis e correspondem (grosseiramente) aos vértices de um triângulo equilátero (triângulo de Einthoven) cujo centro geométrico coincide aproximadamente com o centro eléctrico do coração **O**, (Fig. I.76 a)). O dipolo cria potenciais diferentes nos diferentes pontos deste volume, originando-se correntes em todo o volume inclusive à superfície onde se pode medir a tensão utilizando eléctrodos. Adoptou-se a colocação dos eléctrodos nos pulsos esquerdo e direito e artelho esquerdo que fornecem resultados sobreponíveis aos obtidos nos três pontos atrás referidos do triângulo de Einthoven. É suposto que os membros se comportam como simples condutores pois o dipolo cardíaco não

<sup>9</sup> - A designação de derivação utilizada neste contexto nada tem a ver com a operação matemática do mesmo nome. Refere-se exclusivamente a pontos de colocação de eléctrodos.

cria, diferenças de potencial no volume dos membros capazes de gerarem correntes significativas à superfície ou no interior. Assim, o potencial em todos os pontos do braço direito é  $V_D$  e de modo semelhante para os outros membros. As derivações frontais para colheita dos potenciais à superfície assentam nesta aproximação.

Interessa referenciar o potencial em cada ponto em relação ao centro eléctrico do coração  $O$ . Criou-se um eléctrodo de referência fictício  $X$  (eléctrodo central de Wilson, Fig. I.76 b) que se toma como origem dos potenciais. Os pontos  $BD$ ,  $BE$  e  $PE$  são ligados ao eléctrodo central de Wilson  $X$  por resistências  $R$  iguais e de valor elevado quando comparadas com a resistência dos tecidos profundos, entre estes pontos. O ponto  $X$  é uma aproximação, em geral aceite, do centro eléctrico do coração, ou seja  $V_X \approx V_O$ .

Um electrocardiograma padrão utiliza 9 eléctrodos e mede 12 diferenças de potencial. Além dos três eléctrodos já referidos que permitem 6 ligações frontais (Fig. I.77) são utilizadas mais 6 ligações precordiais.

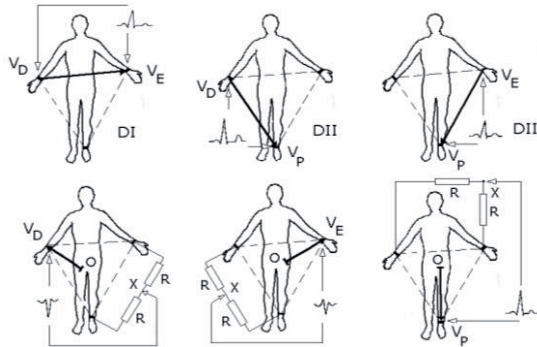


Fig. I.77 – Derivações frontais utilizadas em electrocardiografia.

134

Chamemos  $V_X$ ,  $V_D$ ,  $V_E$  e  $V_P$  aos potenciais nos pontos  $X$ ,  $BD$ ,  $BE$  e  $PE$ . Então, pela lei dos nodos de Kirchoff, a soma das correntes em  $X$ , (Fig. I.76 b), terá que ser nula, ou

$$\frac{V_D - V_X}{R} + \frac{V_E - V_X}{R} + \frac{V_P - V_X}{R} = 0 \tag{I.180}$$

ou

$$V_D + V_E + V_P = 3 V_X \tag{I.181}$$

Provaremos adiante que esta soma é nula.

As hipóteses que foram postas até aqui vão permitir mostrar que, em cada instante, o potencial registado numa derivação dada é proporcional à projecção do vector cardíaco sobre a direcção dessa derivação, ou seja, X-BD, X-BE e X-PE nas derivações monopolares e BD-BE, PE-BE e PE-BD nas derivações bipolares.

Na Fig. I.78  $\hat{u}_D$ ,  $\hat{u}_E$  e  $\hat{u}_P$  são vectores unitários segundo as direcções X-BD, X-BE e X-PE e  $\vec{M}$  um momento dipolar eléctrico

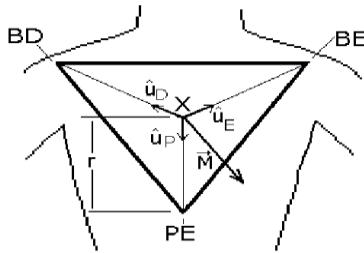


Fig. I.78 - Vectores unitários segundo as direcções X-BD, X-BE e X-PE e  $\vec{M}$  um momento dipolar eléctrico

A soma dos vectores unitários definidos é nula. De facto, para qualquer das direcções destes vectores, por exemplo  $\hat{u}_D$ , se tem uma igualdade idêntica a

$$|\hat{u}_D| - |\hat{u}_E| \cos 60 - |\hat{u}_P| \cos 60 = 0 \quad \text{I.182}$$

As diferenças entre vectores unitários permitem definir directamente as direcções dos lados do triângulo, assim

$$\hat{u}_E - \hat{u}_D = \vec{J}_{ED} = \sqrt{3} \hat{u}_{ED} \quad \text{I.183}$$

que é um vector de módulo  $\sqrt{3}$  com a direcção ED e a apontar de D para E. De modo semelhante definem-se vectores para as direcções PE e PD através das diferenças ( $\hat{u}_P - \hat{u}_E$ ) e ( $\hat{u}_P - \hat{u}_D$ ).

Um dipolo eléctrico com momento dipolar  $\vec{M}$  e aplicado em X cria

nos pontos BD, BE e PE, à distância  $r$ , os potenciais, Eq. VII.93,

$$V_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot \hat{u}_D}{r^2} \quad V_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot \hat{u}_E}{r^2} \quad V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot \hat{u}_P}{r^2} \quad \text{I.184}$$

que correspondem às medições das derivações unipolares e onde os pontos entre os vectores significam produto escalar. Na representação destas derivações, na Fig. I.77, só estão representadas duas resistências  $\mathbf{R}$  do eléctrodo de Wilson pois a terceira, ficando em paralelo com resistência entre os pontos de medida, e sendo muito superior, não afecta a medição.

A soma dos potenciais das Eqs. I.184 é

$$V_D + V_E + V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot (\hat{u}_D + \hat{u}_E + \hat{u}_P)}{r^2} = 0 \quad \text{I.185}$$

ou

$$V_D + V_E + V_P = 0$$

As montagens bipolares correspondem às diferenças de potencial

$$\text{DI} \quad V_E - V_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot (\hat{u}_E - \hat{u}_D)}{r^2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot \hat{u}_{ED}}{r^2}$$

$$\text{DII} \quad V_P - V_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot (\hat{u}_P - \hat{u}_D)}{r^2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot \hat{u}_{PD}}{r^2}$$

$$\text{DIII} \quad V_P - V_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot (\hat{u}_P - \hat{u}_E)}{r^2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M} \cdot \hat{u}_{PE}}{r^2} \quad \text{I.186}$$

É evidente que a soma das diferenças de potencial medidas em DI e DIII iguala a medição em DII.

$$(V_E - V_D) + (V_P - V_E) = V_P - V_D \quad \text{I.187}$$

Os valores instantâneos das diferenças de potencial medidas, orientados segundo as direcções das correspondentes derivações, são proporcionais às componentes do vector cardíaco e permitem obter a orientação e intensidade deste vector e esclarecer sobre o desenrolar da despolarização e repolarização do músculo cardíaco. Vamos chamar de  $V_I$ ,  $V_{II}$  e  $V_{III}$  aos módulos das projecções (componentes escalares) do vector cardíaco segundo os lados do triângulo (Fig. I.79 - b)), com a convenção de sinais indicada. Face à proporcionalidade mencionada, é verificada a relação

$$V_I + V_{III} = V_{II}$$

Na Fig. I. 79 b) observam-se as curvas da diferenças de potencial vs. tempo que seriam medidas como resultado de uma acção de curta duração dos momentos dipolares eléctricos,  $M_I$ ,  $M_{II}$  e  $M_{III}$ , com a orientação indicada na Fig. I.79 a), a actuar independentemente e cada um dos quais com projecções de módulo  $V_I$ ,  $V_{II}$  e  $V_{III}$ .

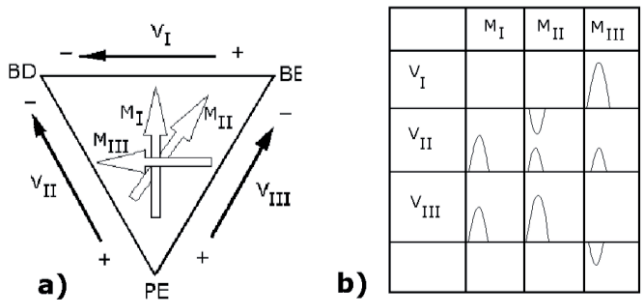


Fig. I.79 - b) Diferenças de potencial vs. tempo produzidas pelos momentos dipolares eléctricos  $M_I$ ,  $M_{II}$  e  $M_{III}$  indicados em a).

O vector  $M_I$  tem projecção nula sobre BE-BD pelo que  $V_I = 0$  enquanto  $V_{II}$  e  $V_{III}$  são iguais e positivos;  $M_{II}$  origina  $V_I < 0$ ,  $V_{II} > 0$  e  $V_{III} > 0$  e  $M_{III}$  origina  $V_I > 0$  e de valor máximo,  $V_{II} > 0$  e  $V_{III} < 0$ .

As diferentes orientações e módulos do vector cardíaco, durante o ciclo cardíaco originam sequências de impulsos de potencial P, Q R, S e T representadas, para uma situação normal, na Fig. I.80 a). Raciocinando de for-

ma inversa em relação ao caso anterior (Fig. I.80) para as ondas P, Q R, S e T podem conhecer-se, aproximadamente, as projecções  $V_I$ ,  $V_{II}$  e  $V_{III}$  e obter-se a orientação e intensidade do vector cardíaco.

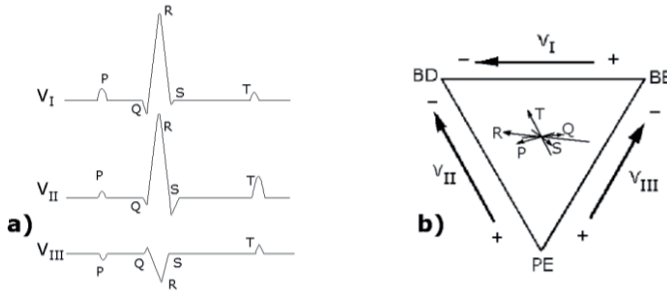


Fig. I.80 – a) Sequências de impulsos de potencial  $V_I$ ,  $V_{II}$  e  $V_{III}$  originadas durante o ciclo cardíaco normal. b) Valores e orientações plausíveis do vector cardíaco nas ondas P, Q, R, S e T.

Já referimos que as derivações unipolares e bipolares permitem obter valores que são projecções num plano frontal, permitindo uma avaliação aproximada dos fenómenos de despolarização/repolarização do sistema neuro-muscular do coração. Para um conhecimento mais rigoroso do processo, verificou-se serem necessárias mais projecções, em particular num plano normal ao frontal, que são obtidas através das derivações precordiais. Estas são unipolares e consistem em seis eléctrodos que são colocados na parede do tórax em frente do coração em pontos bem definidos como é indicada na Fig. I.81.

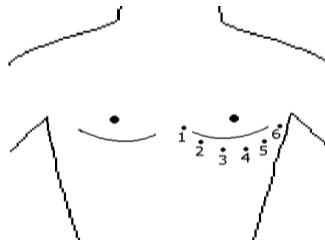


Fig. I.81 – Os seis eléctrodos precordiais

Estes pontos permitem a exploração do coração num plano horizontal. Dada a sua proximidade ao coração algumas das aproximações consideradas

para as derivações anteriores não são aqui válidas.

### I.3.2 - Troca de calor por contracorrente nos membros superiores. Trocas distribuídas.

Consideremos um sistema de dois tubos situados paralelamente, que são percorridos pelo mesmo caudal de fluido mas em sentidos opostos e que trocam calor entre si, Fig. I.82. Pretendemos determinar a distribuição da temperatura, ao longo dos tubos, que vamos supor em série, considerando ainda que o sistema se encontra em estado estacionário.

Esta situação é semelhante ao caso da circulação de sangue num membro que se encontra num ambiente mais frio do que a temperatura interior do corpo.

Durante parte dos seus trajectos no membro, artérias e veias têm trajectos paralelos, respectivamente antes dos capilares arteriais e depois dos capilares venosos. As trocas de calor a partir de um pequeno elemento de sangue **I** só poderão ocorrer com os elementos **II** ou **III** e durante o curto intervalo de tempo  $\Delta t$ , em que o sangue permanece em **I**.

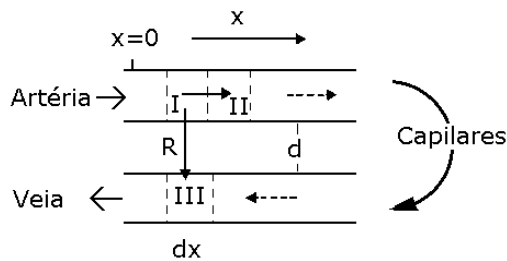


Fig. I.82 - Diagrama esquemático de um sistema de troca por contracorrente mostrando as regiões I, II e III para fins de cálculo. As setas a tracejado indicam o sentido do caudal, as setas a cheio o sentido das trocas de calor.

O sangue entra quente na origem do membro, suposto horizontal, vai arrefecendo por troca com o ramo venoso paralelo, até à extremidade, aí cede calor ao ambiente frio através dos capilares e regressa depois em estreito contacto térmico com a artéria aferente, até à origem do membro, agora recebendo calor.

Consideramos as distâncias em relação à origem do membro ( $x = 0$ ) e

designamos a temperatura da artéria, em função de  $x$ , por  $T_a(x)$  e, ao longo da veia, por  $T_v(x)$ .

Para simplificação dos cálculos vamos supor que os dois vasos têm igual área de secção recta, de valor  $A$ , que não há perda de calor para o ambiente, a não ser na rede capilar situada na extremidade do membro, e que o sangue se desloca com velocidade moderada e constante  $v$ . Também admitimos que o transporte de calor ao longo dos vasos ocorre exclusivamente por convecção (corrente de sangue) e entre os ramos paralelos unicamente por condução.

A velocidade de troca de calor,  $u$ , por condução, da artéria de sangue quente para a veia de sangue frio, na posição  $x$ , da região **I** para a região **III**, é

$$u = [T_a(x) - T_v(x)] \frac{Ka}{d} \quad \text{I.188}$$

onde  $a$  é a área de contacto e  $K$  é a conductividade térmica média das paredes dos vasos e tecidos entre estas, cuja espessura em conjunto é  $d$ .

Entre as regiões **I** e **III**, a área de contacto é  $a=wdx$  onde  $w$  é a largura e  $dx$  o comprimento ao longo do vaso.

Como não há perda de calor, a conservação da energia impõe que a velocidade de troca de calor da região **I** para a região **III** (ou seja  $u$ ) deva ser a diferença entre as correspondentes velocidades de troca à entrada de **I** (abscissa  $x$ ) e à saída de **I** para **II** (abscissa  $x+\Delta x$ ), ou seja,

$$u = \frac{dQ_a(x)}{dt} - \frac{dQ_a(x+\Delta x)}{dt} \quad \text{I.189}$$

onde  $\frac{dQ_a}{dt}$  é a velocidade de troca de calor por convecção. Por definição de derivada temos

$$u = - \frac{d}{dx} \left( \frac{dQ_a(x)}{dt} dx \right) \quad \text{I.190}$$

Mas, a quantidade de calor transportada pela massa  $m$  de sangue à temperatura  $T_a(x)$  é  $Q_a(x) = mCT_a(x)$ , donde, derivando vem

$$\begin{aligned} \frac{dQ_a(x)}{dt} &= C T_a(x) \frac{dm}{dt} \\ &= C T_a(x) \rho A v \end{aligned} \quad \text{I.191}$$



onde  $C$  é o calor específico,  $\rho$  a densidade do líquido,  $A$  a secção recta do tubo e  $v$  a velocidade.

Então

$$u = -C \rho A v \frac{dT_a(x)}{dx} dx \quad \text{I.192}$$

combinando as Eqs. I.188 e I.192 obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dT_a(x)}{dx} &= \frac{Kw}{C \rho A v d} [T_a(x) - T_v(x)] \\ &= B [T_v(x) - T_a(x)] \end{aligned} \quad \text{I.193}$$

Considerações análogas para as trocas de calor na veia conduzem a

$$\frac{dT_v(x)}{dx} = B [T_v(x) - T_a(x)] \quad \text{I.194}$$

As Eqs. I.193 e I.194 na situação estacionária são iguais

$$\frac{dT_a(x)}{dx} = \frac{dT_v(x)}{dx}$$

ou, integrando

$$T_a(x) - T_v(x) = \text{const.} = \Delta T \quad \text{I.195}$$

Substituindo a Eq. I.195 na Eq. I.193 e integrando entre  $0$  e  $x$ , vem

$$T_a(x) = T_a(0) - B x \Delta T \quad \text{I.196}$$

Procedendo de igual modo com a Eq. I.194 tem-se

$$T_v(x) = T_v(0) - B x \Delta T \quad \text{I.197}$$

sendo

$$T_a(0) = T_v(0) + \Delta T \quad \text{I.198}$$

Na Fig. I.83 mostra-se a distribuição da temperatura ao longo do membro na situação estacionária.

Verificamos que a queda de temperatura desde o início à extremidade do membro é pequena se  $\Delta T$  for pequeno (reduzida perda de calor), se o membro for curto ou a velocidade  $v$  do líquido elevada (pouco tempo para grande transferência de calor) ou  $K/d$  pequeno (artéria e veia com reduzida troca).

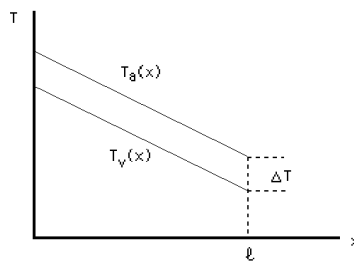


Fig. I.83 - Distribuição da temperatura ao longo do membro na situação estacionária.

É importante notar que, se o membro tem a extremidade num ambiente muito frio, a perda de calor avaliada por  $\Delta T$  pode ser substancialmente limitada por uma troca de calor eficaz por contracorrente.

O fenómeno da troca de calor por contracorrente permite que uma região no extremo do membro, irrigada por um caudal constante de líquido, seja arrefecida mas sem ocorrer uma perda substancial de calor.

Na Fig. I.84 o líquido regressa unicamente 2 °C mais frio mas esteve 8 °C mais frio no extremo do sistema. Uma parte do calor que seria perdido é trocada com o outro tubo.

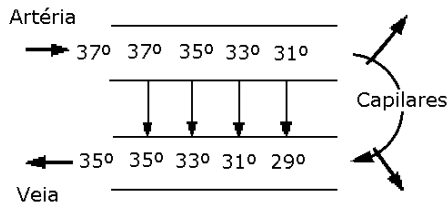


Fig. I.84 – A troca de calor por contracorrente permite que uma região no extremo da ansa seja arrefecida praticamente sem perdas.

As vascularizações do braço e antebraço estão concebidas para permitir a troca de calor por contracorrente, contudo, existem duas circulações venosas possíveis no membro.

Numa delas as veias encontram-se situadas junto das artérias e trocam calor por contra corrente como vimos já.

Na outra, as veias encontram-se mais próximas da superfície a partir da qual pode, facilmente, ocorrer troca de calor com o exterior.

O sangue venoso, em retorno, é dirigido para o sistema mais interior ou mais exterior por vasodilatação e vasoconstricção executada por músculos controlados por sensores da temperatura situados na mão. Se o antebraço se encontra num ambiente frio, colapsam vasos periféricos, o retorno do sangue venoso é feito pelo sistema mais interior e a perda de calor com o exterior é reduzida por troca por contracorrente. Se o ambiente é quente, são mobilizados vasos periféricos e o sangue é obrigado a fluir à superfície e é perdido calor para o meio resultando arrefecimento do corpo.

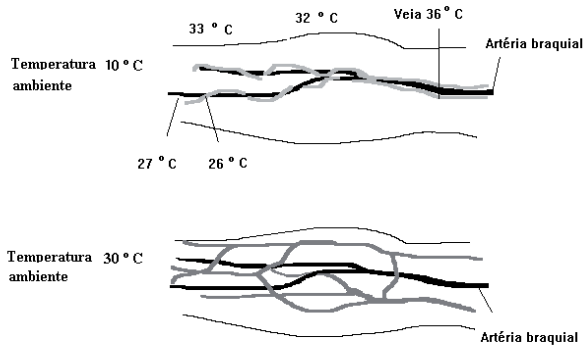


Fig. I.85 - O retorno venoso é dirigido para os vasos mais interiores ou mais exteriores por vasodilatação e vasoconstricção muscular.

O princípio das trocas por contracorrente não se limita às trocas de energia térmica. Em sistemas com transporte activo há gradientes de concentração que são conservados pelo mecanismo de contracorrente.

O mecanismo de contracorrente pode funcionar como multiplicador, em condições de transporte activo, produzindo um aumento de gradiente.

Na Fig. I.86 ocorre transporte activo através da membrana ao longo dos tubos na direcção indicada pelas setas. O transporte activo consegue manter o gradiente de concentração constante ao longo do tubo.

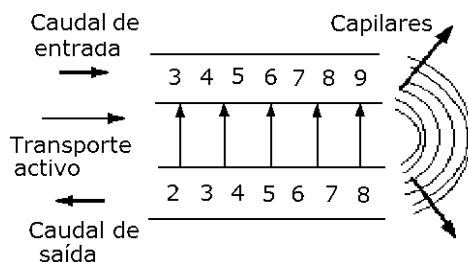


Fig. I.86 – Transporte activo com troca por contracorrente.

O máximo gradiente de concentração que o transporte activo consegue é 1, mas a diferença de concentração entre os extremos da ansa é 6.

No rim que estudaremos, a seguir, a criação e manutenção de um gradiente de concentração corticomedular necessita de energia externa através de um transporte activo. A presença de urina hipertónica no extremo do ramo ascendente possibilita o funcionamento de uma bomba de sódio com rendimento óptimo. A disposição anatómica dos capilares na medular é tal que permite as trocas de contra-corrente, graças às quais, a água plasmática curto-circuita a ansa capilar.

### I.3.3 - O nefrónio

Os rins pesam cerca de 300 g e são constituídos por aproximadamente  $1,5 \times 10^6$  unidades funcionais básicas, chamadas nefrónios. Os nefrónios podem ser de diversos tipos, mas o esquema da Fig. I.87 é representativo da sua constituição geral. Os nefrónios encontram-se funcionalmente ligados em paralelo não só no que respeita à irrigação sanguínea, como no que respeita à produção de urina. Os rins recebem cerca de 25% do débito cardíaco o que corresponde a dizer que, por dia, passa pelos rins cerca de 60 vezes o volume plasmático.

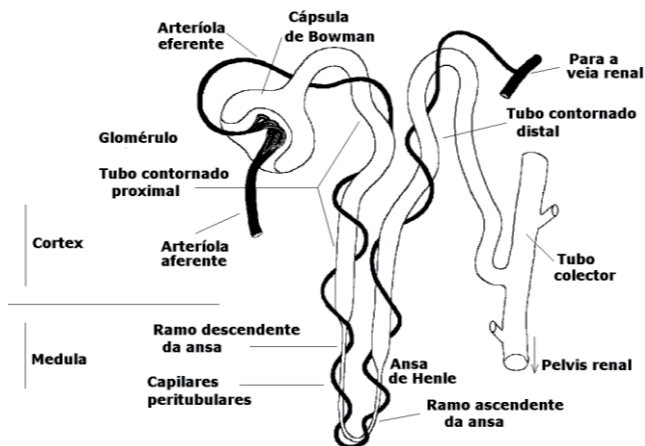


Fig. I.87 - Esquema simplificado de um nefrônio e do tecido cortical e medular envolventes.

Um nefrônio tem duas partes, o glomérulo e o tubo. Cerca de 20% do volume do plasma do sangue que entra no rim é retirado na forma de fluido e segue para os tubos onde ocorrem processos de troca. Uma parte dos constituintes deste fluido é reabsorvida pelo sangue e a outra eliminada pela urina. Os cerca de 100 Km de tubos que existem nos rins levam à eliminação de um total de 1 a 2 litros de urina por dia.

A transformação do plasma sanguíneo em urina inicia-se nos glomérulos. O sangue entra na cápsula de Bowman através de uma arteríola aferente que se expande numa rede de capilares glomerulares. As paredes destes capilares são permeáveis à água e pequenas moléculas que podem passar para fora dos capilares. As proteínas do plasma sanguíneo são demasiado grandes para atravessarem a parede capilar. Para o valor do pH plasmático, parte das moléculas proteicas encontram-se na forma de iões proteinato que, juntamente com os pequenos iões positivos do sal, originam pressão oncótica que tende a filtrar água para o interior do capilar.

Para ocorrer filtração para o exterior, ou melhor, ultrafiltração, a pressão hidrostática no sangue dos capilares somada à pressão oncótica no espaço extravascular glomerular (e nos tubos proximais) tem de ultrapassar a so-

ma da pressão hidrostática no espaço extravascular glomerular com a pressão oncótica nos capilares glomerulares, como se observa, a seguir, na expressão da densidade de corrente de água através da parede do capilar, sendo o seu sentido positivo aquele que aponta para o exterior do capilar

$$\begin{aligned} J_F &= L_P [(P_C - P) - (\pi_C - \pi)] \\ &= L_P [(P_C + \pi) - (P + \pi_C)] \end{aligned} \quad \text{I.199}$$

$P_C$  - Pressão hidrostática nos capilares glomerulares

$P$  - Pressão hidrostática no espaço no espaço extravascular glomerular

$\pi_C$  - Pressão oncótica nos capilares glomerulares

$\pi$  - Pressão osmótica efectiva no espaço extravascular glomerular

Se  $(P_C + \pi) > (P + \pi_C)$  ocorre ultrafiltração. São ultrafiltrados para os tubos contornados proximais, um total, para os dois rins, de cerca de 180 ℓ/dia de líquido.

O líquido filtrado deixa o glomérulo pelos tubos contornados proximais e tem composição próxima da do plasma sanguíneo se excluirmos as proteínas. Nos tubos proximais o  $\text{Na}^+$  (juntamente com iões cloro ou bicarbonato, conforme as exigências do equilíbrio ácido-base) é activamente reabsorvido pelo espaço intersticial a partir do fluido tubular. As paredes dos tubos são, além disso, passivamente permeáveis à água que irá sair para o espaço intersticial sendo o caudal à saída próximo de um terço do caudal de filtrado mas é isotónico com o plasma. A concentração de  $\text{Na}^+$  nos tubos proximais permanece igual à do plasma sanguíneo. Variações na concentração de  $\text{Na}^+$  ocorrem na ansa de Henle. A parte activa da ansa, na qual é usada energia metabólica, é o ramo ascendente, onde  $\text{Na}^+$  é bombeado para fora dos tubos, para o tecido intersticial, contra um gradiente de concentração. O ramo ascendente é impermeável à água de tal modo que esta fica retida no tubo e não pode seguir o  $\text{Na}^+$ . As consequências desta saída de  $\text{Na}^+$  no ramo descendente não são óbvias e podem ser mais facilmente interpretadas com um modelo matemático: o resultado da densidade de corrente de saída de  $\text{Na}^+$  é que a concentração deste ião no fluido intersticial (fora dos tubos) aumenta dramaticamente com a profundidade na porção medular de modo que a concentração na curva da ansa de Henle, junto do ramo ascendente, é máxima. Deste modo, no ramo descendente da ansa de

Henle, a concentração de  $\text{Na}^+$  aumenta progressivamente no sentido do deslocamento da corrente. As paredes do ramo descendente são permeáveis ao  $\text{Na}^+$  e à água de tal modo que  $\text{Na}^+$  entra no tubo e sai água, aumentando a concentração com o deslocamento. Na realidade a permeabilidade das paredes dos tubos descendentes ao  $\text{Na}^+$  é tão elevada que as concentrações interna e externa são muito próximas.

No balanço final a acção da ansa de Henle resulta na remoção de  $\text{Na}^+$  e água do fluido do tubo. O excesso de  $\text{Na}^+$  e água é removido pelos capilares peritubulares seguindo para a veia renal. Estes capilares estão ligados em série com os capilares glomerulares através da arteríola eferente, uma estrutura peculiar do rim. Pelo facto do processo de filtração no glomérulo reter proteínas, a concentração do sangue que entra nos capilares peritubulares tem uma concentração de proteínas plasmáticas não usual. Supostamente, a pressão oncótica resultante ajuda a dirigir o excesso de  $\text{Na}^+$  e água para os capilares peritubulares.

Como resultado da acção da ansa de Henle, o meio fora dos tubos da ansa tem maior concentração do que o plasma sanguíneo enquanto que o fluido no tubo que abandona a ansa é mais diluído. Esta é a base da dupla capacidade do rim em excretar urina que umas vezes é mais concentrada, outras mais diluída, que o plasma sanguíneo.

A escolha entre estes dois modos de operação é feita pela glândula pituitária que segrega a hormona antidiurética (HAD). Na ausência de HAD as paredes dos tubos contornados distais e do tubo colector são impermeáveis à água, de tal modo que o volume de urina é essencialmente aquele que abandona o extremo ascendente da ansa de Henle. Nesta situação que é chamada de estado de diurese, o rim excreta um grande volume de urina diluída. Em alguns indivíduos a produção de HAD está diminuída ou ausente, e o estado de diurese persiste. Este estado constitui a diabetes insipidus. Quando HAD está presente, todavia, as paredes dos tubos contornados distais e tubos colectores tornam-se permeáveis à água. Nos tubos contornados distais água é retirada osmoticamente até levar a concentração dos solutos de novo até aos níveis plasmáticos. A partir daí, à medida que o fluido tubular desce nos tubos colectores, uma quantidade apropriada de água é retirada de modo a equilibrar com a concentração local intersticial, para todos os níveis. Deste modo a urina acaba por ser uma solução com uma concentração que iguala a do líquido tubular na parte inferior da ansa de Henle, uma concentração mais alta do que no plasma. Todavia, devido ao facto de que esta alta concentração resulta da retirada de água o volume de urina

excretada por unidade de tempo, é muito menor do que o inicial. Esta situação que resulta da acção da hormona antidiurética no nefrónio distal é conhecida por antidiurésis.

Reparar que a operação da máquina de tratar a urina na ansa de Henle é a mesma quer o rim esteja a concentrar a urina quer a diluí-la.

Na descrição seguinte, são evitadas discussões sobre as trocas de  $\text{Na}^+$  no nefrónio distal. De facto,  $\text{Na}^+$  é activamente reabsorvido no nefrónio distal no processo de troca com outros solutos e esta permuta é importante no controlo do conteúdo total do  $\text{Na}^+$ . Os mecanismos hormonais (adrenocortical), que regulam esta troca, encontram-se fora do contexto deste livro. O nosso modelo de nefrónio assume paredes impermeáveis ao  $\text{Na}^+$ .

### 1.3.4 - Transporte de $\text{Na}^+$ e $\text{H}_2\text{O}$ ao longo dos tubos renais.

No sistema invariante no tempo representado na Fig. I.88,  $\dot{Q}(x)$  é o caudal líquido no tubo de raio  $r$  e  $J_{\text{H}_2\text{O}}(x)$  e  $J_{\text{Na}^+}(x)$  são respectivamente as densidade de corrente de água e sódio através das paredes do tubo. O caudal  $\dot{Q}(x)$  varia pois com  $x$ .

Entre as secções  $x$  e  $x+dx$  e por unidade de tempo, passa para o tubo, através da parede, o volume de água  $2\pi r dx J_{\text{H}_2\text{O}}(x)$ . A variação do caudal líquido por unidade de comprimento é, então

$$\frac{d\dot{Q}(x)}{dx} = 2\pi r J_{\text{H}_2\text{O}}(x) \quad \text{I.200}$$

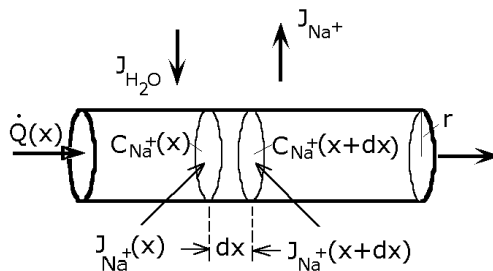


Fig. I.88 – As correntes num tubo de raio  $r$  que troca  $\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{Na}^+$



Se as paredes do tubo são impermeáveis à água é  $J_{H_2O}(x) = 0$  donde ser  $\dot{Q}(x) = \text{Const}$ . Considerando que  $J_{Na^+}(x)$  é a densidade de corrente do  $Na^+$  no tubo à distância  $x$ , o número de moles do ião que é transportado no interior do tubo por unidade de tempo e por unidade de comprimento, a esta distância é

$$\frac{d [\dot{Q}(x)C_{Na^+}(x)]}{dx} = 2\pi r J_{Na^+}(x) \quad \text{I.201}$$

Num tubo impermeável ao  $Na^+$  é  $J_{Na^+}(x) = 0$  donde  $\dot{Q}(x)C_{Na^+}(x) = \text{Const}$ .

O comportamento dos diferentes tubos do rim é regido pelas Eqs. I.200 e I.201 variando contudo os valores de  $J_{H_2O}(x)$  e  $J_{Na^+}(x)$ .

O ramo descendente da ansa é simulado pela porção 1 do tubo da Fig.I.89 e o ramo ascendente pela porção 2. As concentrações em  $Na^+$  e os caudais de água ao longo dos tubos 1 e 2 são representadas respectivamente por  $C_1(x)$  e  $C_2(x)$  e por  $\dot{Q}_1(x)$  e  $\dot{Q}_2(x)$ . A concentração externa de  $Na^+$  é  $C_e(x)$ . O sentido positivo para  $x$  e para as correntes é o sentido de cima para baixo.

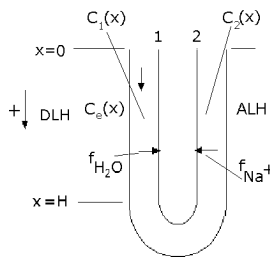


Fig. I.89 – Modelo da ansa de Henle. É suposto que as paredes do ramo ascendente são permeáveis à água mas não ao  $Na^+$  e que a permeabilidade à água é tão elevada que não existem gradientes de concentração de  $Na^+$  entre interior e exterior.

Neste modelo da ansa de Henle, vamos supor, numa primeira aproximação, que as paredes do ramo descendente são permeáveis à água mas não ao  $Na^+$ . Por outro lado, admitimos que a permeabilidade à água é tão elevada que, praticamente, não existem gradientes de concentração de  $Na^+$  entre

interior e exterior, ou seja

$$\frac{d\dot{Q}_1(x)}{dx} = 2\pi r J_{1,H_2O}(x) \quad 1.202$$

$$\frac{d[\dot{Q}_1(x)C_1(x)]}{dx} = 0 \quad 1.203$$

$$\dot{Q}_1(x) C_1(x) = \text{Const} \quad 1.204$$

$$C_1(x) = C_{ex} \quad 1.205$$

No modelo é suposto que  $\text{Na}^+$  é obrigado a passar do ramo ascendente (2) para o exterior, com uma densidade de corrente  $J_{2,\text{Na}^+}$  constante, ao longo do tubo. Além disto não há transporte de água através da parede do ramo ascendente, pelo que

$$\frac{d\dot{Q}_2(x)}{dx} = 0 \quad 1.206$$

$$\frac{d[\dot{Q}_2(x)C_2(x)]}{dx} = 2\pi r J_{2,\text{Na}^+} \quad 1.207$$

Considerando que na parte curva da ansa não há quaisquer trocas, tem-se

$$C_1(L) = C_2(L) \quad 1.208$$

e

$$Q_1(L) = Q_2(L) \quad 1.209$$

Finalmente, é necessário fazer suposições acerca dos capilares peritubulares os quais recebem o  $\text{Na}^+$  que é activamente bombeado para fora do ramo ascendente e a água que passivamente sai do ramo descendente. Primeiro, supomos que o capilar capta o  $\text{Na}^+$  e a água localmente. Ou seja, não é permitido nenhum caudal longitudinal para fora dos tubos e capilares. Visto considerarmos um modelo no estado estacionário, é obrigatório que os capilares peritubulares recebam a água e  $\text{Na}^+$  com correntes por unidade de comprimento do tubo de valores  $2\pi r J_{1,H_2O}(x)$  e  $2\pi r J_{2,\text{Na}^+}$ .

O mecanismo detalhado do transporte da água e  $\text{Na}^+$  através das paredes dos capilares leva a equações adicionais. Neste estudo, é assumido que o fluido intersticial é captado por um processo de filtração análogo ao que ocorre nos capilares glomerulares mas ocorrendo aqui no sentido oposto. A força motora para esta filtração em sentido inverso (ultrafiltração) é fornecida pela pressão oncótica das proteínas plasmáticas. Como se disse acima, estas proteínas estão presentes em concentrações mais elevadas nos capilares peritubulares do que no resto da circulação, porque foram concentradas mais atrás pelo processo de filtração no glomérulo. Na ultrafiltração nos capilares peritubulares, é suposto que o  $\text{Na}^+$  é levado passivamente pela água até à sua concentração tecidual local. Isto implica uma relação entre as correntes de  $\text{Na}^+$  e água dada pela equação:

$$J_{2,\text{Na}^+} = C_e(x) J_{1,\text{H}_2\text{O}}(x) \quad \text{I.210}$$

É uma notável característica do modelo não ser necessário especificar quaisquer outros detalhes sobre os capilares peritubulares do que as considerações que levam à Eq. I.210. Dispomos já de suficientes equações para determinar  $C(x)$  sem nos referirmos a qualquer outra propriedade dos capilares peritubulares. Isto não teria acontecido se tivéssemos feito suposições diferentes sobre os transportes de  $\text{Na}^+$  e da água através das paredes dos capilares.

### I.3.5 - Trabalho do rim na excreção de uma mole

Antes de passarmos ao caso do rim, consideremos a figura seguinte. A membrana **M** é semipermeável e funciona como um êmbolo de área **A**, separando a região **I** do tubo onde se encontra uma solução de macromoléculas com concentração  $C$  (moles/cm<sup>3</sup>), da região **II**, que contém solvente puro.

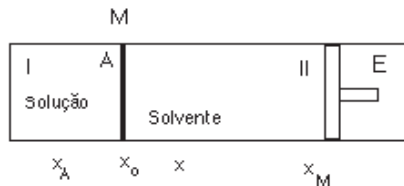


Fig. I.90 - A membrana **M** funciona como êmbolo, separando solução e solvente puro. O êmbolo **E** encontra-se fixo.

O êmbolo **E** está fixo. O trabalho das forças de difusão necessário para, à temperatura constante **T**, reversivelmente, o êmbolo se deslocar de  $\mathbf{x}_0$  para  $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$  é:

$$W = \pi A \Delta x \quad \text{I.211}$$

A pressão osmótica  $\pi$  é função de  $\mathbf{x}$  e diminui após o deslocamento  $\Delta \mathbf{x}$ .

O trabalho das forças de difusão necessário para ocorrer o deslocamento de  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}_M$ , reversivelmente, será o somatório:

$$W = \sum \Delta W = \sum \pi A \Delta x \quad \text{I.212}$$

dos trabalhos para todos os trajectos  $\Delta \mathbf{x}$  de  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$  ..

Sendo o produto  $A \Delta x = \Delta V$  o volume de um cilindro elementar, compreendido entre as secções às distâncias  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$ , o somatório anterior é também,

$$W = \sum \pi \Delta V \quad \text{I.213}$$

O número de moles de soluto existente na região **I** pode escrever-se para as diversas posições do êmbolo:

$$\begin{aligned} n &= A C_0 x_0 \\ &= A C_1 x_1 \end{aligned} \quad \text{I.214}$$

Se  $n = 1$ , vem

$$\begin{aligned} A C_0 &= \frac{1}{x_0} \\ A C_1 &= \frac{1}{x_1} \end{aligned}$$

ou, geralmente

$$A C = \frac{1}{x} \quad \text{I.215}$$

Por outro lado, o somatório anterior só terá um valor exacto no limite, quando  $d\mathbf{x}$  tende para  $\mathbf{0}$ , transformando-se então no integral definido:

$$W = \int_{x_0}^{x_M} \pi A dx \quad 1.216$$

Usando a relação  $\pi = C R T$  vem:

$$\begin{aligned} W &= R T \int_{x_0}^{x_M} C A dx \\ &= R T \int_{x_0}^{x_M} \frac{1}{x} dx \end{aligned} \quad 1.217$$

então,

$$W = RT \ln \frac{x_M}{x_0} = RT \ln \frac{C_0}{C_M} = RT \ln \frac{\pi_0}{\pi_M} \quad 1.218$$

onde  $\pi_0$  e  $\pi_M$  são as pressões osmóticas da solução **I** para as posições  $x_0$  e  $x_M$  e  $C_0$  e  $C_M$  as correspondentes concentrações.

A expressão acima representa o trabalho efectuado pelas forças de pressão osmótica para realizar a diluição da solução, desde a concentração  $C_0$  até  $C_M$ .

Podemos imaginar uma força de pressão hidrostática **P** a actuar no êmbolo **E** do lado **II**, de tal modo que a pressão osmótica seja ultrapassada e o êmbolo **A** se desloque para a esquerda de  $x_0$ . A solução em **I** tenderia assim a concentrar e teríamos a ocorrência de ultrafiltração.

Se a pressão osmótica da solução, quando o êmbolo se desloca para  $x_A$  é  $\pi_A$  e a concentração  $C_A$ , podemos dizer que o trabalho efectuado pela força de pressão hidrostática **P** em condições de reversibilidade é:

$$W = RT \ln \frac{\pi_A}{\pi_0} \quad 1.219$$

ou

$$= R T \ln \frac{C_A}{C_0} \quad 1.220$$

Como sabemos, o abaixamento crioscópico do soro é  $\Delta\theta_s = 0,56\text{ }^\circ\text{C}$  que corresponde, como determinámos, a 298 miliosmole/L e o abaixamento crioscópico da urina é  $\Delta\theta_u = 3,5\text{ }^\circ\text{C}$  que corresponde a 1,8 osmole/L. O rim executa trabalho par aumentar a osmolaridade e, já que,

$$\frac{\Delta\theta_u}{\Delta\theta_s} = \frac{C_u}{C_s} \quad 1.221$$

podemos escrever:

$$W = RT \ln \frac{\Delta\theta_u}{\Delta\theta_s} = RT \ln \frac{C_u}{C_s} = 5000 \text{ J/osmole} \quad 1.222$$

Por dia são eliminados cerca de 1,5 litros de urina, a que correspondem 2,7 osmoles e um trabalho total de 13.500 Joule/dia. Este valor deve, contudo, estar bastante abaixo do verdadeiro, pois o trabalho que calculámos foi em condições reversíveis, o que não sucede na situação real, havendo ainda no rim dispêndio de energia noutros processos.

Em situações de insuficiência, quando o rim é incapaz de executar o seu trabalho osmótico, é utilizada a hemodiálise (ou rim artificial) e a diálise peritoneal, que são aplicações, de enorme interesse, da difusão através de membranas. Pretende-se retirar do sangue circulante um conjunto de metabólitos de baixo peso molecular, como a ureia, toxinas, etc., utilizando as propriedades das membranas dialisantes. Os metabólitos difundem, através de membranas, para o líquido de diálise que circula em contra corrente (ver I.3.2) e no qual a concentração inicial dos solutos a dialisar é nula. A circulação extra corporal é efectuada através de uma ligação artério-venosa onde se intercala um sistema de membranas com grande área de troca (1 a 2,5 m<sup>2</sup>), com a qual o sangue circulante entra em contacto, durante algumas horas, diminuindo drasticamente a concentração dos solutos indesejáveis. Evita-se a diálise de solutos, que se pretendem manter, adicionando-os inicialmente ao líquido de diálise.

Na diálise peritoneal a membrana de diálise é constituída pelas paredes capilares peritoneais. O líquido de diálise é injectado e depois extraído da cavidade abdominal do paciente.

## I.4 - APÊNDICES

### I.4.1 - Segunda equação de Fick

Através da segunda equação de Fick podemos introduzir o tempo na equação da difusão. Consideremos o sistema da Fig. I.91 onde ocorre exclusivamente difusão de um particular soluto.

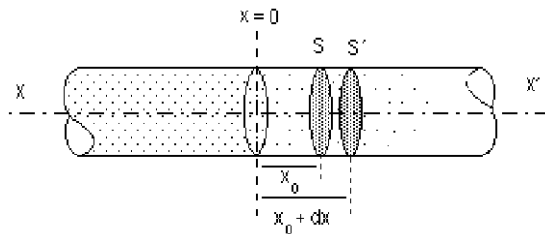


Fig. I.91 - Difusão de um soluto ao longo da direcção  $XX'$ .

A massa de soluto que atravessa a secção recta do tubo, de área  $S$ , à distância  $x$ , por unidade de tempo é uma função de  $x$ . Para o ponto de coordenada  $x_0$  temos

$$Q(x_0) = -DS \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x_0} \quad 1.223$$

A massa de soluto que atravessa a secção  $S$  à distância  $x_0 + dx$  pode calcular-se usando a expansão em série de Taylor

$$Q(x_0 + dx) = Q(x_0) + Q'(x_0) dx + \dots \quad 1.224$$

Desprezamos os termos de segunda ordem e superior, o que é uma aproximação razoável se  $dx$  for suficientemente pequeno. Então

$$Q(x_0 + dx) = -DS \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x_0} - DS \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_{x_0} dx \quad 1.225$$

Consideremos o cilindro elementar de volume  $Sdx$ , definido pelas duas secções  $S$  e  $S'$  no tubo. A variação de massa de soluto por unidade de tempo no interior do volume elementar  $Sdx$  é dado por

$$Q(x_0) - Q(x_0 + dx) = DS \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_{x_0} dx \quad 1.226$$

Nesta equação se considerarmos  $dx$  tão pequeno que permita aproximar a concentração média no elemento de volume  $Sdx$ , a  $C(x_0)$ , a massa do soluto existente naquele volume elementar, em dado instante, é  $C(x_0)Sdx$ . A variação desta massa com o tempo é pois  $S(\partial C/\partial t)_{x_0}dx$ .

Esta expressão é evidentemente igual a  $Q(x_0) - Q(x_0+dx)$ , (Eq. I.226), ou seja

$$S (\partial C/\partial t)_{x_0} dx = D S (\partial^2 C/\partial x^2)_{x_0} dx \quad \text{I.227}$$

e, de um modo geral, para qualquer valor de  $x$

$$\partial C/\partial t = D \partial^2 C/\partial x^2 \quad \text{I.228}$$

Esta é a expressão da segunda lei de Fick já referida na Eq. I.3.

As equações de Fick podem ser generalizadas para as três dimensões. Numa situação em que a concentração de soluto é função de  $x$ ,  $y$  e  $z$  a Eq. I.1 transforma-se em

$$J_s = - D \text{grad } C(x,y,z) \quad \text{I.229}$$

Esta equação significa que no ponto de coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a densidade de corrente de difusão ocorre segundo a direcção e sentido contrário à do vector  $\text{grad } C(x,y,z)$  que é dado pela Eq. I.230.

$$\text{grad } C(x,y,z) = \partial C/\partial x \hat{u}_x + \partial C/\partial y \hat{u}_y + \partial C/\partial z \hat{u}_z \quad \text{I.230}$$

A Eq. I.230 traduz a direcção, passando pelo ponto  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , segundo a qual a variação da função  $C(x,y,z)$  é mais rápida.

Podemos, também, generalizar a segunda equação de Fick para as três dimensões, obtemos

$$\partial C(x,y,z)/\partial t = - D (\partial^2 C/\partial x^2 + \partial^2 C/\partial y^2 + \partial^2 C/\partial z^2) \quad \text{I.231}$$

#### I.4.2 - Consequências da 2ª Lei de Fick

As curvas  $C(x)$  para os diversos valores de  $t$  podem ser obtidos por integração da segunda lei de Fick entrando com as condições de fronteira que já estabelecemos (ver pags. 18-20). Obtém-se a equação



$$C(x) = C_0/2 (1-P(y)) \quad 1.232$$

onde  $P(y)$  é o integral de probabilidade de Gauss e  $y = x/(\sqrt{4Dt})$ , ou

$$P(y) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^y e^{-y^2} dy \quad 1.233$$

e

$$C(x) = C_0/2 (1 - 2/\sqrt{\pi} \int_0^y e^{-y^2} dy) \quad 1.234$$

que é conhecida por equação de Svedberg. Substituindo  $y$  pelo seu valor

$$C(x) = C_0/2 (1 - 2/\sqrt{\pi} \int_0^x e^{-x^2/4Dt} (1/2 \sqrt{Dt}) dx) \quad 1.235$$

Para cada particular valor de  $t$  tem-se uma curva  $C(x)$  como se vê na Fig.I.6.  $P(y)$  varia de  $-1$  a  $+1$  quando  $x$  (ou  $y$ ) varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Quando  $x = 0$ ,  $P(y) = 0$  e  $C(x) = C_0/2$ . As curvas  $C(x)$  são sigmóides.

Se diferenciarmos a expressão de  $C(x)$  anterior temos

$$\partial C(x)/\partial x = C_0/(\sqrt{4\pi Dt}) e^{-x^2/4Dt} \quad 1.236$$

que é a função representativa de distribuição de Gauss ou sejam as curvas para os particulares valores de  $t$ . As áreas definidas por estas curvas são dadas por

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\partial C/\partial x) dx \quad 1.237$$

cujo valor é sempre  $C_0$  para todos os valores de  $t$ .

Quando  $t$  aumenta as curvas  $C(x)$  rodam no sentido contrário aos ponteiros de um relógio e as correspondentes  $\partial C(x)/\partial x$  em função de  $x$  alargam-se e ficam mais baixas. Os desvios a uma Gaussiana pura, em geral, têm um significado cuja interpretação pode fornecer ensinamentos sobre o soluto.

Em soluções polidispersas a curva  $\partial C(x)/\partial x$  aparece mais alta e estreita

do que a curva de Gauss. Obtém-se pois uma indicação de que o soluto não é puro. A assimetria na curva é produzida por interações moleculares. A extrapolação para a concentração zero é um processo complexo.

### I.4.3 - Difusão facilitada

Muitos solutos hidrosolúveis penetram com grande dificuldade através da dupla camada lipídica das células e são também demasiado grandes para passarem através de canais moleculares. Nesta categoria de moléculas encontram-se açúcares e aminoácidos, assim como alguns iões de outros tipos. Muitas destas substâncias são vitais e passam através das membranas celulares por acção de transportadores que são proteínas intrínsecas, existentes nas membranas celulares. Num dos lados interiores da membrana os transportadores ligam-se às moléculas de soluto por ligações químicas com formação de complexos. Os sítios de ligação molecular são altamente específicos e, uma vez estabelecida a ligação, o complexo desloca-se através da membrana libertando a molécula no outro lado da membrana. O processo não necessita do fornecimento de energia externa ao sistema, embora envolva a energia de ligação química do complexo. A difusão facilitada efectua-se no sentido previsto pela lei de Fick mas a permeabilidade da membrana é maior do que o que seria de prever por esta lei, para pequenos gradientes de concentração. Na Fig. I.92, são apresentados os resultados da determinação experimental da densidade de corrente de glucose, através da membrana dos glóbulos vermelhos, em função da concentração (curva a cheio). A curva prevista pela lei de Fick é apresentada a tracejado

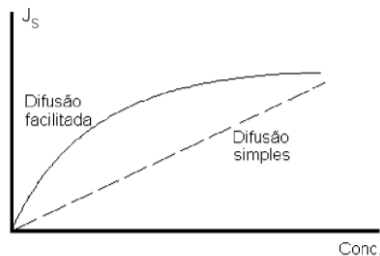


Fig I.92 - Massa de soluto transportada através da membrana por seg. e  $\text{cm}^2$  para os casos de difusão simples e facilitada.

Por outro lado, um gráfico do inverso da densidade de corrente *vs.* o inverso da concentração do açúcar dá uma recta, mostrando uma reacção do tipo de Michaelis Menten (ver Eq. VI.51 e Fig. VI.3), ou seja,

$$J_s = \frac{J_M [S]}{k_m + [S]} \quad \text{I.238}$$

onde [S] é a concentração de açúcar,  $J_M$  a densidade de corrente máxima e  $K_m$  a constante de Michaelis.

Nestas condições e contrariamente à difusão simples, a difusão facilitada envolve mediação por transportadores, estando o transporte dependente de especificidade e saturação do transportador, bem como da competição entre moléculas.

Consideremos um modelo para a difusão facilitada (Fig. I.93). Supõe-se que:

- 1 - O sistema e os seus componentes estão em equilíbrio nos dois lados da membrana;
- 2 - A concentração total do transportador (soma das concentrações do transportador e do complexo) é constante através da membrana;
- 3 - Os movimentos do transportador **C** e do complexo transportador-soluto **CS** no interior da membrana são difusionais;
- 4 - O movimento do complexo transportador-soluto é o factor limitante da velocidade de reacção.

Na Fig. I.93 estão indicados os equilíbrios entre complexos e transportadores.

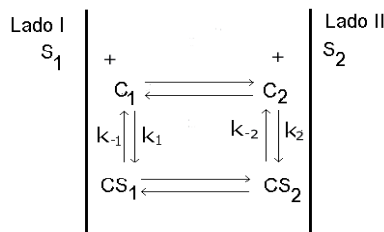


Fig. I.93 - Modelo para a difusão facilitada através de uma membrana.

Nos lados 1 e 2 da membrana as concentrações de soluto são

chamadas de  $[S_1]$  e  $[S_2]$ , do transportador de  $[C_1]$  e  $[C_2]$  e do complexo de  $[CS_1]$  e  $[CS_2]$ . As reacções que ocorrem nos lado 1 e 2 da membrana são respectivamente  $C+S_1 \xrightleftharpoons{K_1} CS_1$  e  $C+S_2 \xrightleftharpoons{K_2} CS_2$ , com  $K_1$  e  $k_2$  as constantes de reacção nos dois sentidos. A densidade de corrente de difusão do complexo no interior da membrana pode escrever-se

$$J_c = D \{ [CS_1] - [CS_2] \} \quad 1.239$$

Se  $k_m$  é a constante de equilibrio da reacção de formação do complexo, vem

$$k_m = \frac{[C_1][S_1]}{[CS_1]} = \frac{[C_2][S_2]}{[CS_2]} \quad 1.240$$

e sendo

$$[C_1] + [CS_1] = [C_2] + [CS_2] = [C_T] \quad 1.241$$

temos

$$k_m = \frac{\{ [C_T] - [CS_1] \} [S_1]}{[CS_1]} = \frac{\{ [C_T] - [CS_2] \} [S_2]}{[CS_2]} \quad 1.242$$

e

$$[C_T][S_1] = [CS_1] \{ [S_1] + k_m \} \quad 1.243$$

$$[C_T][S_2] = [CS_2] \{ [S_2] + k_m \} \quad 1.244$$

donde

$$[CS_1] = [C_T] \frac{[S_1]}{[S_1] + k_m} \quad 1.245$$

$$[CS_2] = [C_T] \frac{[S_2]}{[S_2] + k_m} \quad 1.246$$

Então a densidade de corrente do complexo (Eq. 1.247), vem

$$J_c = k \left\{ \frac{[S_1]}{[S_1] + k_m} - \frac{[S_2]}{[S_2] + k_m} \right\} \quad 1.247$$

com  $k = D [C_T]$ .

Na situação de estado estacionário não há acumulação de soluto na membrana, pelo que  $J_c = J_s$ , e

$$J_s = k \left\{ \frac{[S_1]}{[S_1] + k_m} - \frac{[S_2]}{[S_2] + k_m} \right\} \quad 1.248$$

que é a densidade de corrente de soluto através da membrana por difusão facilitada. Notar que, se

$$K_m \gg S_1, S_2$$

é

$$J_s \approx \frac{k}{k_m} \{ [S_1] - [S_2] \} \quad 1.249$$

Equação que é formalmente idêntica à da difusão simples através da membrana. Se, na Eq. 1.248 é

$$K_m \ll S_1, S_2$$

vem

$$J_s = 0 \quad 1.250$$

ou seja, neste caso não há densidade de corrente efectiva de soluto através da membrana, por difusão facilitada, mesmo quando existe gradiente de concentração, por exemplo  $S_1 \gg S_2$ .

#### 1.4.4 - Difusão por troca

Utilizando traçadores radioactivos, foi possível provar-se que, em sistemas em estado estacionário, pode ocorrer uma troca de moléculas de soluto através da membrana, na proporção de 1:1 sem se verificar qualquer corrente

efectiva. A glucose e os iões bicarbonato são sujeitas a este tipo de transporte através de membranas.

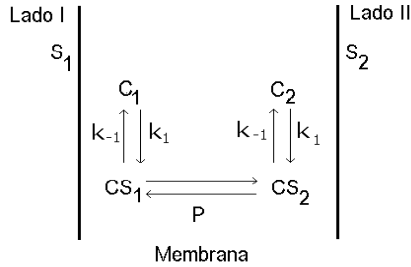


Fig. I.94 – Modelo para a difusão por troca através de uma membrana.

Na Fig. I.94 mantém-se a nomenclatura do número anterior. O transportador não combinado  $C$  tem mobilidade muito baixa na fase da membrana. No estado estacionário, no interior da membrana, verifica-se que

$$\frac{d[C_1]}{dt} = k_{-1} [CS_1] - k_1 [S_1] [C_1] = 0 \quad \text{I.251}$$

e 
$$\frac{d[CS_1]}{dt} = k_1 [S_1] [C_1] - k_{-1} [CS_1] - P\{[CS_1] - [CS_2]\} = 0 \quad \text{I.252}$$

Combinando as Eqs. I.251 e I.252, vem

$$J_s = P \{ [CS_1] - [CS_2] \} \quad \text{I.253}$$

e considerando que  $[CS_1] = [CS_2]$  é  $J_s = 0$  I.254  
 como seria de esperar.

As correntes unidireccionais mensuráveis com radioisótopos são

$$J_{12} = P [CS_1] \quad \text{I.255}$$

e 
$$J_{21} = P [CS_2] \quad \text{I.256}$$

Considerando que ocorre equilíbrio, com o complexo nos dois lados da membrana, temos

$$[CS_1] = k_1[S_1] [C_1] \quad 1.257$$

$$[CS_2] = k_1[S_2] [C_2] \quad 1.258$$

e

$$C_T = [CS_1] + [C_1] = [CS_2] + [C_2] \quad 1.259$$

entrando com as Eqs. 1.255 a 1.259 vem

$$J_{12} = J_{21} = P k_1 C_T \frac{[S_1][S_2]}{2 k_1 [S_1][S_2] + [S_1] + [S_2]} \quad 1.260$$

A activação da acção do transportador é efectuada com energia das ligações químicas das moléculas do próprio transportador. Esta acção sobre o transportador é semelhante à catálise, excepto que as moléculas (neste caso chamadas de substrato) não catalisam uma reacção química, mas o seu próprio deslocamento através da membrana celular.

#### 1.4.5 - Integração da equação de Nernst-Planck

Com a intenção de, através do modelo do campo eléctrico constante, integrarmos a equação de Nernst-Planck, entremos nesta equação com a condição do campo eléctrico constante, ou seja na Eq. 1.261

$$J_i = - \frac{u_i RT}{|Z_i|} Z_i \frac{dC_i}{dx} - u_i C_i F |Z_i| \frac{dV}{dx} \quad 1.261$$

Façamos

$$E = - \frac{dV}{dx} \quad 1.262$$

e consideremos

$$J_i = C^{te} \quad 1.263$$

Vem

$$J_i = - \frac{u_i RT}{|Z_i|} Z_i \frac{dC_i}{dx} - u_i C_i |Z_i| F \frac{dV}{dx} \quad 1.264$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade pela quantidade que multiplica  $\frac{dC_i}{dx}$ , ou seja, por  $-\frac{u_i RT}{|Z_i|} Z_i$  obtém-se a equação:

$$\frac{dC_i}{dx} + b C_i = a \quad 1.265$$

com

$$a = - \frac{J_i |Z_i|}{Z_i u_i RT} \quad 1.266$$

e, não esquecendo que  $|Z_i|^2 = Z_i^2$ ,

$$b = \frac{F dV Z_i}{RT dx} \quad 1.267$$

A solução geral da Eq. 1.265 sem segundo membro

$$\frac{dC_i}{dx} + b C_i = 0 \quad 1.268$$

é

$$C_i = g e^{-bx} \quad 1.269$$

Uma solução particular da Eq. 1.265 é

$$C_i = \frac{a}{b} = - \frac{J_i dx}{u_i F |Z_i| dV} \quad 1.270$$

A solução geral da equação com segundo membro é

$$C_i = g e^{-bx} + \frac{a}{b} \quad 1.271$$

A condição dos coeficientes de partição, para os dois lados da mem-



brana serem iguais, pode ser expressa através das seguintes equações:

$$\beta C_1 = g + \frac{a}{b} \quad 1.272$$

para  $x = 0$ , e

$$\beta C_2 = g e^{-b\Delta x} + \frac{a}{b} \quad 1.273$$

para  $x = \Delta x$ .

Donde, subtraindo membro a membro

$$\beta (C_1 - C_2) = g (1 - e^{-b\Delta x}) \quad 1.274$$

A partir das Eqs. 1.270 e 1.272 vem que:

$$g = \beta C_1 + \frac{J_i dx}{u_i F |Z_i| dV} \quad 1.275$$

donde

$$\beta (C_1 - C_2) = \left( \beta C_1 + \frac{J_i dx}{u_i F |Z_i| dV} \right) (1 - e^{-(F Z_i / RT) \Delta V}) \quad 1.276$$

Donde

$$\begin{aligned} \beta C_1 - \beta C_2 &= \beta C_1 - \beta C_1 e^{-(F Z_i / RT) \Delta V} + \\ &+ \frac{J_i dx}{u_i F |Z_i| dV} (1 - e^{-(F Z_i / RT) \Delta V}) \end{aligned} \quad 1.277$$

e,

$$J_i = \frac{\beta C_1 e^{-(FZ_i/RT)\Delta V} - \beta C_2}{\Delta x (1 - e^{-(FZ_i/RT)\Delta V})} u_i F |Z_i| \Delta V \quad \text{I.278}$$

ou

$$J_i = \frac{\beta u_i F |Z_i|}{\Delta x} \Delta V \frac{C_1 e^{-(FZ_i/RT)\Delta V} - C_2}{1 - e^{-(FZ_i/RT)\Delta V}} \quad \text{I.279}$$

Considerámos a diferença de potencial  $\Delta V = V_1 - V_2$  mas, se atendermos a que a referência dos potenciais é o meio exterior, o valor de  $\Delta V$  deve ser  $V_2 - V_1$ . Introduzindo esta alteração vem

$$J_i = \frac{\beta u_i F |Z_i|}{\Delta x} \Delta V \frac{C_1 - C_2 e^{-(FZ_i/RT)\Delta V}}{1 - e^{-(FZ_i/RT)\Delta V}} \quad \text{I.280}$$

Supondo que não actuam forças de difusão, ou seja, que só acções eléctricas estão em jogo, temos que  $C_1 = C_2 = C$ , e a Eq. I.280 vem

$$J_i = \frac{\beta u_i F |Z_i|}{\Delta x} \Delta V C \quad \text{I.281}$$

$$= - u_i C_i F |Z_i| \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad \text{I.282}$$

A Eq. I.282 é a Eq. I.74 que deduzimos quando estudámos a densidade de corrente iónica devido à acção do campo eléctrico.

#### 1.4.6 – Modelo eléctrico da propagação dos impulsos no axónio

Na Fig. I.95 encontra-se o esquema de um segmento de axónio onde se supõe que passa corrente longitudinal  $I$  e corrente através da membrana  $I_m$ . Seja  $V(x,t)$  o potencial do interior do axónio, em relação ao espaço intersticial, num ponto  $x$  do axoplasma, no instante  $t$ . Considerando um comprimento elementar  $dx$  de axónio de raio  $r$  podemos escrever

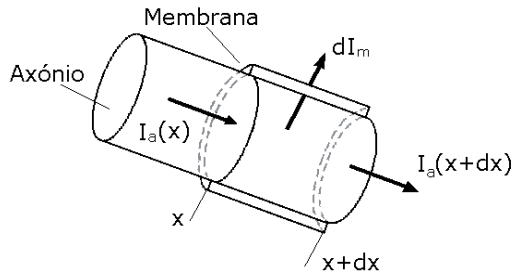


Fig. I.95 - Esquema de um segmento de axônio onde se supõe que passa corrente longitudinal  $I_a$  e corrente através da membrana  $I_m$

$$dV = V(x+dx) - V(x) = -I_a(x) R_a = -\frac{I_a(x) \rho_a dx}{\pi r^2} \quad \text{I.283}$$

ou 
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-I_a(x) \rho_a}{\pi r^2} \quad \text{I.284}$$

e 
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho_a}{\pi r^2} \frac{\partial I_a}{\partial x} \quad \text{I.285}$$

Se não houver retenção de carga na membrana é

$$dI_m = I_a(x) - I_a(x+dx) = -dI_a \quad \text{I.286}$$

$$\frac{dI_m}{dx} = -\frac{dI_a}{dx} \quad \text{I.287}$$

Considerando nulo o potencial no exterior da membrana é

$$V = (dI_m) \frac{\rho_m b}{2\pi r dx} \quad \text{I.287}$$

Onde  $b$  é a espessura da membrana e  $\rho_m$  a sua resistividade.

Da Eq. I.287 vem

$$\frac{2\pi r V}{\rho_m b} = \frac{dI_m}{dx} = -\frac{dI_a}{dx} \quad \text{I.288}$$

Utilizando as Eqs. I.285 e I.288

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{2\rho_a}{\rho_m r b} V = \frac{V}{\lambda^2} \quad \text{I.289}$$

Na aplicação do princípio da conservação da carga, além das correntes indicadas da Fig. I.95 tem de considerar-se a corrente de carga da capacidade da membrana, ou seja

$$I_a(x) - I_a(x+dx) - dI_m = \frac{\partial Q}{\partial t} = C \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{I.290}$$

esta equação referida à unidade de área da membrana toma a forma

$$\frac{C}{2\pi r dx} \frac{\partial V}{\partial t} = -J_m - \frac{1}{2\pi r} \left[ \frac{I_a(x+dx) - I_a(x)}{dx} \right] \quad \text{I.291}$$

ou

$$C_m \frac{\partial V}{\partial t} = -J_m + \frac{r}{2\rho_a} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{I.292}$$

Este modelo toma em conta exclusivamente as características eléctricas do transporte e pode ser substancialmente melhorado considerando algumas das especificidades de natureza biológica associadas ao processo.

---

## CAPÍTULO • II



GASES

---

(Página deixada propositadamente em branco)

---

## II.1 - Introdução

Os gases são muito sensíveis a variações de pressão e temperatura, são compressíveis dentro de uma grande escala de valores e são infinitamente expansíveis, preenchendo um recipiente, quaisquer que sejam as suas dimensões e forma, não apresentando superfície limite própria.

Os gases são constituintes de todos os organismos vivos e desempenham um papel de primeira importância em fenómenos essenciais à vida, tais como a respiração e a nutrição. As leis que regem o seu comportamento são fundamentais em áreas da Medicina como a pneumologia, a anestesiologia e as medicinas do desporto e do ambiente.

São trocados com o exterior, por dia, num organismo humano, um maior número de moles no estado gasoso ( $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ , etc.) do que nos outros estados, em conjunto. Esta situação cria uma grande dependência do homem do meio gasoso que o rodeia e obrigou a Medicina a novas perspectivas, perante modificações deste meio, introduzidas no mundo actual.

Existe forte evidência para se admitir que, no estado gasoso, as moléculas se encontram muito afastadas umas das outras e se deslocam livremente no espaço, com uma velocidade média que depende da temperatura. Numa primeira aproximação podemos considerar que, para baixas pressões, as moléculas de um gás não exercem quaisquer acções entre si, à excepção de colisões<sup>1</sup>. As colisões são tanto mais frequentes quanto maior é a pressão a que um gás se encontra.

Esta aproximação só tem interesse em casos especiais pois a existência de forças de coesão nos gases é evidenciada em múltiplas e importantes situações.

Um gás oferece resistência quando se comprime, compensando com forças de pressão as forças externas exercidas. Se comprimirmos um gás sem permitir que qualquer energia térmica seja trocada, para além do aumento da sua pressão, também a temperatura aumenta, já que vai aumentar o número de colisões. Por outro lado, se o gás aquece, as suas moléculas movem-se, em média, com maior velocidade.

Uma situação prática de aplicação do que referimos no parágrafo anterior e com as aproximações que se impõem, é o aumento de temperatura

---

<sup>1</sup> - Esta aproximação só tem interesse em casos especiais pois a existência de forças de coesão nos gases, apesar de pequenas quando comparadas com os líquidos, é evidenciada em múltiplas situações.

---

que se verifica no ar que se movimentam do alto de montanhas para o vale que estas formam.

Pareceu-nos de interesse recordar as leis dos gases.

## II.2 - Lei de Boyle

Uma massa de gás, a temperatura constante, ocupa um volume que varia inversamente com a pressão que suporta.

Podemos então escrever

$$V = K \frac{1}{P}$$

ou

$$PV = K \quad \text{II.1}$$

onde **V** é o volume ocupado pelo gás, **P** a pressão a que está sujeito e **K** uma constante.

Esta lei é facilmente verificada com o dispositivo da Fig. II.1, em que os dois recipientes de vidro **A** e **B** comunicam por um tubo maleável.

O recipiente **A** é fechado e está graduado, de modo a conhecer-se o volume **V** de gás aí existente acima da superfície do mercúrio, representado a cheio na figura. O recipiente **B** é aberto.

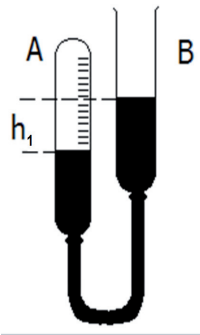


Fig. II.1 - Dispositivo para verificação da lei de Boyle.



Suponhamos que o desnível entre as superfícies livres do mercúrio em **A** e **B** é  $h_1$  e que nestas condições o volume ocupado pelo gás é  $V_1$ .

A pressão exercida sobre o gás é

$$P_1 = P_0 + h_1 \rho g \quad \text{II.2}$$

onde  $P_0$  é a pressão atmosférica,  $\rho$  a massa específica do mercúrio e  $g$  a aceleração da gravidade.

Para outros desníveis  $h_2, h_3, \dots$  entre as superfícies livres em **A** e **B** corresponderiam volumes de gás  $V_2, V_3, \dots$  e pressões  $P_2, P_3, \dots$ , respectivamente.

Se a temperatura foi mantida constante durante a experiência, a relação

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 = P_3 V_3 = \dots \quad \text{II.3}$$

verifica-se com bom grau de aproximação.

Como, por definição, a massa específica de uma dada massa de gás varia inversamente com o volume ocupado pelo gás, podemos enunciar a lei de Boyle numa outra forma: a temperatura constante, a massa específica de um gás é directamente proporcional à pressão exercida sobre o gás.

A maneira mais usual de exprimir graficamente a lei de Boyle é colocando produtos  $PV$  em ordenada e  $P$  em abcissas. Quando a lei se verifica, obtém-se uma recta paralela às abcissas, Fig. II.2.b). Dado que a temperatura se mantém constante, a curva é uma isotérmica. Num gráfico  $P(V)$  as isotérmicas de Boyle são hipérboles equiláteras referidas aos eixos, Fig. II.2.a).

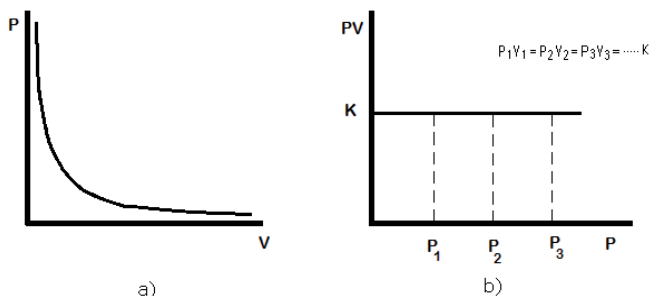


Fig. II.2 - Isotérmicas para gás ideal (lei de Boyle). a) Representação  $P(V)$  e b) Representação  $PV(P)$ .

---

### II.3 - Lei de Charles

Se a pressão se mantiver constante, uma certa massa de gás aumenta de  $1/273$  do seu volume a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  por cada grau centígrado que a temperatura aumenta, ou seja,

$$V = V_0 \left( 1 + \frac{t}{273} \right) \quad \text{II.4}$$

onde  $V$  é o volume a  $t$  graus centígrados e  $V_0$  o volume a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Fazendo um gráfico de  $V$  em função de  $t$  obtém-se uma linha recta que intercepta o eixo das temperaturas (ponto para o qual  $V = 0$ ) para  $t = -273\text{ }^{\circ}\text{C}$ . No caso ideal de se terem gases à temperatura de  $-273\text{ }^{\circ}\text{C}$ , se a lei de Charles ainda fosse aplicável, o volume por eles ocupado deveria ser nulo. A temperatura de  $-273\text{ }^{\circ}\text{C}$  corresponde ao zero absoluto, ou seja, o zero da escala de temperatura absolutas (escala Kelvin) e é a mais baixa temperatura que, teoricamente, poderá ser atingida. A variação de temperatura correspondente a um grau Kelvin é igual à correspondente a um grau centígrado e a conversão de temperaturas entre as duas escalas obtém-se pela relação simples

$$T = t + 273 \quad \text{II.5}$$

onde  $T$  significa temperatura em graus Kelvin e  $t$  temperatura em graus centígrados.

A equação II.4 pode então escrever-se na forma

$$V = K' T \quad \text{II.6}$$

onde  $K'$  é uma constante.

A lei de Charles pode pois enunciar-se de modo diferente:

O volume de uma dada massa de gás, a pressão constante, é directamente proporcional à temperatura absoluta a que o gás se encontra.

---

A lei de Charles podia verificar-se utilizando o dispositivo representado na Fig. II.3

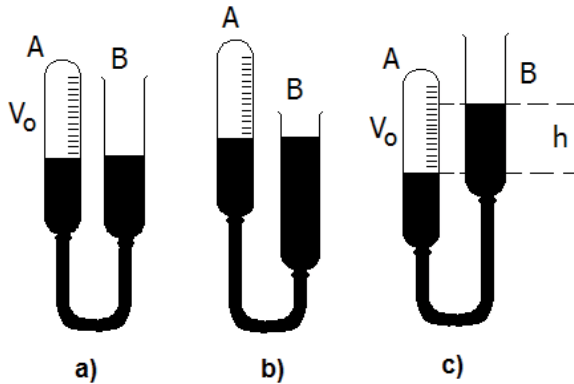


Fig. II.3 - Dispositivo para verificação da lei de Charles.

Uma massa de gás  $m$  ocupa o volume  $V_0$  no recipiente A (Fig. II.3-a), à temperatura de  $0\text{ }^\circ\text{C}$  sob a pressão  $P_0$ , que na figura é a pressão atmosférica, visto o mercúrio ter o mesmo nível nos dois recipientes A e B. Aqueçamos o gás, elevando a sua temperatura de  $t\text{ }^\circ\text{C}$ . Para manter constante a pressão, teremos de baixar B até se ter o mercúrio ao mesmo nível nos dois ramos (Fig. II.3-b). O gás, agora à temperatura  $t$ , é sujeito à mesma pressão, ocupa o volume  $V_t$  que deverá obedecer à relação II.4. Aplicando esta expressão para duas temperaturas  $t$  e  $t'$  obtemos:

$$V_t = V_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right) \quad \text{II.7}$$

$$V_{t'} = V_0 \left(1 + \frac{t'}{273}\right) \quad \text{II.8}$$

Subtraindo membro a membro obtém-se:

$$\Delta V = \frac{V_0}{273} \Delta t \quad \text{II.9}$$

Podemos dizer pois que, a pressão constante, a variação relativa de volume é uma função linear da variação de temperatura. Esta é uma outra forma de enunciar a lei de Charles.

Podemos ainda ver qual será a pressão a que o gás, à temperatura  $t$ , deve ser sujeito para que o volume por ele ocupado seja  $V_o$ , o volume antes do aquecimento.

Elevando **B** até se ter em **A** o mercúrio ao nível correspondente ao volume  $V_o$  (Fig. II.3-c) a pressão a que se sujeita o gás será:

$$P_t = P_o + h g \rho \quad \text{II.10}$$

Como a temperatura se manteve constante nas duas últimas experiências, podemos usar a lei de Boyle e escrever

$$P_t V_o = P_o V_t = P_o V_o \left(1 + \frac{t}{273}\right) \quad \text{II.11}$$

Dividindo por  $V_o$  e igualando primeiro e último membros da Eq. II.11 vem

$$P_t = P_o \left(1 + \frac{t}{273}\right) \quad \text{II.12}$$

$$P_t = \frac{P_o}{273}$$

$$= K" T \quad \text{II.13}$$

Usando a lei de Boyle, chegámos a uma outra forma da lei de Charles: a volume constante, a pressão a que uma dada massa de gás é sujeita, varia directamente com a temperatura absoluta.

Quando aplicadas a gases reais, as leis de Boyle e Charles só se verificam aproximadamente e, em geral, para valores de pressão pouco elevados e temperaturas não muito baixas. Dentro dos limites de pressão e temperatura em aquelas leis se verificam o comportamento de um gás diz-se ideal.

Suponhamos que, usando as condições da Fig. II.3 e mantendo a temperatura  $t$  constante se varia a posição da coluna **B**, de modo a obter-se um volume qualquer  $V$ , a que corresponde uma pressão **P**.

Pela lei de Boyle será

$$PV = P_t V_o = P_o V_t = P_o V_o \left(1 + \frac{t}{273}\right) \quad \text{II.14}$$

ou seja,

$$PV = \frac{P_o V_o}{273} T$$

$$PV = K_1 T \quad \text{II.15}$$

Esta expressão é uma primeira forma da equação dos gases perfeitos. A constante  $K_1$  depende da massa e da composição química do gás.

**Condições normais** - visto o volume de um gás ser tão marcadamente afectado por variações de temperatura e pressão é necessário, ao comparar diferentes volumes de gases, que eles estejam nas mesmas condições de pressão e temperatura. As condições normais de pressão e temperatura, às quais os volumes de gases são reduzidos para fins de comparação são:

Pressão - 760 mm Hg (1 atmosfera)  
 Temperatura - 0 °C (273 °K).

Estas condições costumam indicar-se abreviadamente por condições P.T.N..

#### II.4 - Lei de Avogadro

Volumes iguais de gases nas mesmas condições de pressão e temperatura contêm o mesmo número de moléculas.

Esta lei, assim como as anteriormente referidas, é verdadeira unicamente para gases ideais.

A lei de Avogadro permite obter a equação dos gases perfeitos numa forma geral.

A molécula-grama de diferentes substâncias contém o mesmo número de moléculas (Número de Avogadro =  $6,0225 \times 10^{23}$  moléculas).

Da lei de Avogadro conclui-se pois que, nas mesmas condições de pressão e temperatura, moléculas-grama de diferentes gases ocupam o

mesmo volume. Este volume é 22414 cm<sup>3</sup> nas condições P.T.N. para 1 mole de qualquer gás (1 mole de O<sub>2</sub> = 32 g, 1 mole de H<sub>2</sub> = 2,016 g, etc.).

Aplicando a Eq. II.15 para 1 mole de um gás nas condições P.T.N., já que P = 760 mm Hg = 1,0133×10<sup>6</sup> dyn/cm<sup>2</sup>, V = 22414 cm<sup>3</sup> e T = 273 °K, temos que K<sub>1</sub> = 8,314×10<sup>7</sup> erg/mole °K.

É evidente que **K<sub>1</sub>** tem o mesmo valor para 1 mole de qualquer gás nas condições P.T.N. e designa-se por **R** ou constante dos gases.

Para 1 mole de qualquer gás tem-se pois

$$PV = RT$$

Para um número n de moles, à pressão **P**, temperatura **T** e ocupando um volume **V** a equação II.9 pode escrever-se

$$PV = nRT \qquad \text{II.16}$$

que é a equação dos gases perfeitos na forma geral.

#### II.4.1 - Significado da constante **R**

Suponhamos que se eleva a temperatura de 1 mole de gás de **T** °K a (**T+1**) °K fazendo variar o volume de **V** a **V'** à pressão constante **P**.

Aplicando a equação dos gases perfeitos antes e depois da variação de temperatura, temos:

$$178 \qquad PV = RT \quad \text{e} \quad PV' = R(T + 1) \qquad \text{II.17}$$

Subtraindo a primeira expressão da segunda tem-se

$$P(V' - V) = R \qquad \text{II.18}$$

O primeiro membro da Eq. II.18 representa energia ou trabalho.

Consideremos um cilindro munido de um êmbolo e contendo um

volume  $V$  de gás à pressão  $P$  contrabalançada pela Força  $F$  exercida sobre a superfície  $S$  do êmbolo. Se o êmbolo se deslocar contra a força  $F$ , de um comprimento  $x$ , devido a um aumento de temperatura do gás, o trabalho realizado pela força  $F$  é negativo e dado por

$$W' = - Fx = - PSx \quad \text{II.19}$$

$$= - P (V' - V) \quad \text{II.20}$$

onde  $V'$  é o volume do gás após o aumento da temperatura. Como  $F$  se manteve constante, a pressão do gás após o aumento de temperatura ainda é  $P$ .

O trabalho realizado pelo gás é igual e de sinal contrário ao realizado pela força  $F$ , ou seja,

$$W = P (V' - V) \quad \text{II.21}$$

A expressão de  $R$  é idêntica à Eq. II.21. Dadas as condições usadas para deduzir a Eq. II.18 pode dizer-se que  $R$  é igual ao trabalho produzido por um mole de gás ideal, expandindo-se contra uma pressão constante como resultado de um aumento de temperatura de  $1^\circ\text{K}$ .

Fica evidente que, na expressão geral  $PV = nRT$  o produto  $PV$  representa a quantidade de trabalho produzida por  $n$  moles de um gás ideal na expansão contra uma pressão constante, quando a temperatura aumenta de  $0$  a  $t^\circ\text{K}$ .

## II.5 - A teoria cinético-molecular dos gases

Esta teoria surgiu como uma tentativa de explicação dos fenómenos observados que levaram à descoberta das leis dos gases atrás descritas. Os postulados mais importantes desta teoria são:

- 1 - Os gases são constituídos por partículas discretas, as moléculas; as moléculas de um dado gás são idênticas entre si.
- 2 - Num gás as moléculas encontram-se muito afastadas e o volume molecular total é desprezível em comparação com o volume do recipiente (se a pressão não for muito elevada).
- 3 - As moléculas estão em movimento estatístico. Deslocam-se em linha recta com velocidade que é proporcional à raiz quadrada da

---

temperatura absoluta do gás.

- 4 - As moléculas são perfeitamente elásticas, mudando de direcção sem perda de velocidade após colisões entre si ou com as paredes dos recipientes.
- 5 - As moléculas não exercem força atractiva entre si (trata-se de uma aproximação nem sempre válida).
- 6 - A pressão do gás é o resultado de impactos das moléculas nas paredes dos recipientes.

Aplicando as leis da mecânica a gases monoatômicos e supondo que a energia interna do gás é unicamente energia cinética, devida ao movimento estatístico das moléculas (movimento de translação), é possível chegar-se às expressões das leis dos gases reais.

A teoria cinética permitiu, por exemplo, provar que a energia cinética total de 1 mole de gás é

$$\text{Energia cinética/mole} = 3/2 PV \quad \text{II.22}$$

Esta expressão conduz a um conceito molecular de temperatura. Vimos que experimentalmente se prova a relação

$$PV = nRT$$

Então para 1 mole podemos escrever, usando as equações II.16 e II.22

$$\text{Energia cinética/mole} = 3/2RT \quad \text{II.23}$$

A constante dos gases **R** é uma constante de proporcionalidade entre energia cinética e temperatura absoluta. A temperatura é então uma medida da energia cinética média das moléculas.

Não esqueçamos que estes conceitos se aplicam a gases ideais onde admitimos não existir energia potencial de interacção entre as moléculas.

## II.6 - Desvios às leis dos gases

Os gases reais só aproximadamente seguem as leis dos gases. Consi-

---



deremos o caso da lei de Boyle. Vimos que a representação gráfica dos produtos  $PV$  em função de  $P$ , a temperatura constante, num gás ideal fornece uma linha recta paralela às abcissas.

A Fig. II.4 mostra algumas curvas obtidas na prática.

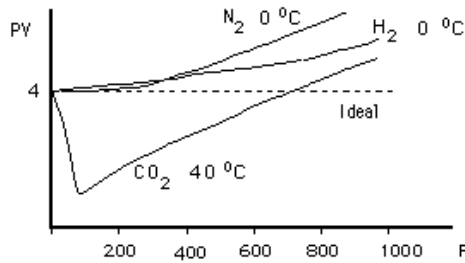


Fig. II.4 - Isotérmicas para gases reais. Desvios à lei de Boyle. Unidades no S.I.

A maioria dos gases tem um comportamento próximo ao previsto pela lei de Boyle para baixas pressões (abaixo de 10 atmosferas) mas quanto mais próximo o gás se encontra das condições que o levam à liquefacção, maior é o desvio, como se observa para o  $CO_2$ .

De acordo com a lei de Boyle, um gráfico da pressão em função do volume para uma certa massa de um gás deve dar uma hipérbole equilátera referida aos eixos, havendo uma destas curvas para cada valor de temperatura. As curvas  $P(V)$  com  $T$  como parâmetro, são chamadas isotérmicas e na Fig. II.5 mostram-se isotérmicas de um gás real.

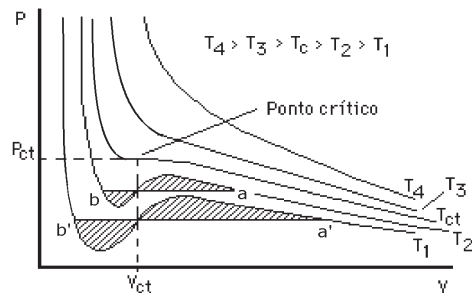


Fig II.5 - Isotérmicas de um gás real.

A curva para  $T = T_4$  corresponde a um comportamento próximo do gás perfeito, de acordo com a lei de Boyle. Na segunda isotérmica, para  $t = T_3$ , apesar de se verifica um certo afastamento da hipérbole equilátera ideal, o gás não sofre qualquer mudança de estado para os correspondentes valores de  $P$  e  $V$ .

A curva para a temperatura  $T_2$  representa uma situação diferente. Para pressões baixas e à temperatura constante da isotérmica, um aumento gradual de pressão conduz a uma diminuição de volume até o ponto **a** ser atingido. Neste ponto o volume decresce praticamente sem aumento da pressão, liquefazendo-se parte do gás até no ponto **b** a liquefacção é completa.

A isotérmica a partir de **b** sobe quase verticalmente pois os líquidos são praticamente incompressíveis. A isotérmica para  $T = T_{ct}$  é chamada a isotérmica crítica pois marca a separação entre as isotérmicas onde não ocorre liquefacção, tais como  $T_3$  e  $T_4$  e isotérmicas onde ocorre liquefacção, tais como  $T_1$  e  $T_2$ . Nas áreas riscadas coexistem as fases líquida e gasosa.

Temperatura crítica  $T_{ct}$  é aquela acima da qual não é possível a liquefacção do gás qualquer que seja a pressão.

Pressão crítica  $P_{ct}$  é a mínima pressão necessária para a liquefacção do gás à temperatura crítica. Volume crítico é o volume ocupado pelo massa de gás em estudo à temperatura e pressão críticas. A curva a tracejado limita a região onde existe equilíbrio entre o gás e a sua fase líquida.

Um gás a uma temperatura abaixo da temperatura crítica designa-se por vapor. A pressão correspondente à linha **ab** ou **a'b'** é a pressão do vapor saturado à temperatura correspondente. A pressão do vapor saturado é a pressão máxima que pode ser exercida pelo vapor a essa temperatura e depende exclusivamente da temperatura. O vapor de água no ar atmosférico a uma dada temperatura tem geralmente uma pressão parcial menor do que a pressão do vapor saturado para a mesma temperatura. A relação entre a pressão do ar e a pressão do vapor saturado para a mesma temperatura é, como sabemos, a humidade relativa do ar.

A transformação inversa da liquefacção é a vaporização. Quando a vaporização se efectua numa atmosfera gasosa chama-se evaporação. As moléculas do líquido abandonam a superfície líquida até a pressão parcial do vapor na atmosfera que contacta o líquido ser igual à tensão do vapor saturado ou tensão máxima do vapor à temperatura considerada. Portanto, se a atmosfera for ilimitada, a evaporação poderá ser total.

Chama-se calor latente de vaporização a uma dada temperatura, a quantidade de calor que é necessário fornecer a 1 g de líquido para o vapo-

rizar a essa temperatura. Esta quantidade de calor é igual, em valor absoluto, ao calor latente de condensação ou liquefacção.

Da observação da figura anterior conclui-se que os desvios do comportamento ideal apresentados pelos gases reais são tanto maiores quanto mais próximos das condições críticas o gás se encontra.

Os desvios às leis dos gases, apresentados pelos gases reais, podem explicar-se com base na teoria cinética. Nesta admite-se que não existe energia potencial de interacção entre as moléculas. Existem, no entanto, forças conhecidas como forças de Van der Waals, que actuam quando as moléculas se encontram próximas.

Para pequenas distâncias entre as moléculas e a temperaturas tais que o movimento térmico não contrabalance as forças de Van der Waals, estas opõem-se ao movimento das moléculas que vão chocar contra as paredes dos recipientes ficando a pressão do gás menor do que a prevista pela lei de Boyle. Então

$$PV < RT$$

II.24

Uma outra suposição, é a do volume total ocupado pelas moléculas, ser desprezível em função do volume do recipiente. Esta hipótese é sustentável quando as moléculas se encontram muito separadas mas à medida que a pressão do gás aumenta, aquele volume vai-se tornando mais significativo. Nestas condições, o efeito do volume próprio das moléculas faz diminuir consideravelmente o espaço disponível para o movimento térmico.

O volume que se observa na prática é, portanto, superior ao considerado nas condições ideais da lei de Boyle e se esse efeito for superior ao devido às forças de Van der Waals (Eq. II.24), vem

$$PV > RT$$

II.25

A equação de Boyle não é válida se coexistem duas ou mais fases.

Na Fig. II.5 estão representadas as curvas  $P(V)$  para gases reais a diferentes temperaturas. Para a temperatura  $T_4$  a curva é uma hipérbole, traduzindo a equação de Boyle-Mariotte. Para a temperatura  $T_{ct}$  (temperatura crítica) ocorre um intervalo de volumes para o qual não há variação de pressão. Isto só é possível se ocorrer liquefacção do gás, coexistindo as fases gás e líquido. A temperatura crítica é aquela acima da qual não pode ocorrer liquefacção, qualquer que seja a pressão. Pressão crítica  $P_{ct}$  é o mínimo

valor para o qual ocorre liquefação à temperatura crítica.

Mesmo com pressões muito elevadas não é possível liquefazer a maioria dos gases à temperatura ambiente. A exceção é o  $\text{CO}_2$ .

Para liquefazer um gás é necessário arrefecê-lo até temperaturas abaixo de  $T_{ct}$  e elevar a pressão acima de  $P_{ct}$ , a pressão crítica. Alguns valores destes parâmetros são referidos no quadro II.1.

Quadro II.1 -Valores de  $P_{ct}$  e  $T_{ct}$  para alguns gases.

<b>gás</b>	<b><math>T_{ct}</math> (°C)</b>	<b><math>P_{ct}</math> (atm)</b>
He	-267,9	2,26
H <sub>2</sub>	-239,9	12,8
N <sub>2</sub>	-147,1	34
O <sub>2</sub>	-118,8	48
CO <sub>2</sub>	31,1	73
NH <sub>3</sub>	132,4	111,5
H <sub>2</sub> O(vapor)	374,0	217,7

## II.7 - A equação de Van der Waals

Esta equação foi sugerida para compensar os efeitos verificados na relação pressão-volume nos gases, de modo a tornar a equação de Boyle aplicável a gases reais. Esta equação tem a forma para n moles

$$\left(P + \frac{a n^2}{V^2}\right) (V - nb) = nRT \quad \text{II.26}$$

onde P é a pressão do gás, V é o volume de gás à pressão P e temperatura constante e a e b são constantes para um dado gás e variam para os diferentes gases. Estas constantes têm de ser determinadas experimentalmente.

O termo  $\frac{a n^2}{V^2}$  destina-se a compensar as forças de Van der Waals que tendem a diminuir a pressão observada em relação à pressão ideal. A relação  $n/V$  é o número de moles por unidade de volume.

---

É também tomado em consideração o volume total ocupado pelas moléculas, de valor finito, que diminui o volume do espaço disponível para os movimentos das moléculas do gás. É subtraído ao volume do gás um valor **b**, por mole, que é uma função do diâmetro esférico da molécula do gás, conhecido como diâmetro de van der Waals.

No quadro nº II.2 estão alguns valores para **a** e **b** de alguns gases. O hidrogénio e hélio apresentam valores próximos de zero. O seu comportamento é próximo do ideal, ou seja, são mínimas as interações moleculares que apresentam no estado gasoso

Quadro nº II.2 - Valores de **a** e **b** (equação de Van der Waals) para alguns gases

Gás	a	b
H <sub>2</sub>	0.244	0.027
O <sub>2</sub>	1.360	0.032
N <sub>2</sub>	1.390	0.039
CO <sub>2</sub>	3.592	0.043
Cl <sub>2</sub>	6.493	0.056
He	0.034	0.024

Considerando como hipótese que as forças entre as partículas são nulas e que o volume intrínseco é zero, a lei de Van der Waals para os gases reais converte-se na equação de Boyle-Mariotte dos gases ideais ( $PV = \text{Const.}$ ).

## II.8 - Difusão dos gases

Como sabemos a difusão é o processo pelo qual tendem a desaparecer os gradientes de concentração de substâncias (cujas moléculas estão sujeitas a movimento térmico estatístico de translação) contidas num sistema, no qual não existam obstáculos completos à sua passagem.

A difusão ocorre como resultado do transporte de moléculas de

---

regiões de maior concentração para regiões de menor concentração e pode ocorrer em qualquer dos estados de agregação material.

Quando recipientes com dois gases diferentes são postos em comunicação sem agitação externa, misturam-se progressivamente até a concentração de qualquer dos gases ser constante em todos os pontos do sistema formado pelos dois recipientes.

A velocidade de difusão depende da natureza dos gases, da pressão e da temperatura. Quando a difusão de um gás se efectua através de uma membrana porosa, a velocidade de difusão é proporcional à diferença de pressão entre os dois lados da membrana e inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade do gás.

A proporcionalidade inversa entre a velocidade de difusão e a raiz quadrada da densidade constitui a lei de Graham. Este provou serem os tempos de difusão de volumes iguais de gases nas mesmas condições de pressão e temperatura, através de pequenos orifícios, directamente proporcionais às raízes quadradas das densidades.

Como as densidades dos gases são proporcionais ao seu peso molecular, segue-se que a velocidade de difusão de um gás é também inversamente proporcional à raiz quadrada do seu peso molecular.

Evaporação e condensação podem considerar-se casos particulares da difusão de um gás através de uma membrana (a superfície livre do líquido). A massa de líquido que passa do estado líquido ao gasoso, a uma dada temperatura, por unidade de tempo, devida à evaporação, é dado por

$$\frac{dm}{dt} = K S \frac{p_s - p}{p} \quad \text{II.27}$$

onde  $S$  é a área da superfície livre do líquido,  $p$  a pressão parcial do vapor do líquido na mistura gasosa em contacto com o líquido,  $p_s$  a pressão do vapor saturado do líquido à temperatura da experiência e  $K$  uma constante. Ocorrerá evaporação sempre que  $(p_s - p)$  seja maior que zero. Se  $(p_s - p)$  se anula a mistura gasosa em contacto com o líquido está saturada do vapor do líquido. A condensação consiste na passagem de moléculas da fase gasosa para a fase líquida em situações em que  $(p_s - p) < 0$ .

Uma situação biológica onde a difusão gasosa desempenha um importante papel é o processo mecânico da respiração pulmonar. Não é a corrente de arrastamento devido à diferença de pressão entre o ar exterior e o ar alveolar que arrasta o oxigénio necessário para o espaço alveolar e que

remove deste o  $\text{CO}_2$  mas difusão molecular devido às diferenças de concentração destes gases ente os alvéolos e a mistura gasosa nas proximidades dos alvéolos. Em cada ponto das vias aéreas terminais as variações das concentrações dos gases,  $C_i$  com o tempo  $\frac{\partial C_i}{\partial t}$  são função do coeficiente de difusão  $D$ , da área da secção recta  $S$  da via aérea e da distância percorrida pelas moléculas  $x$ .

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial C_i}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad \text{II.28}$$

que é uma equação mais geral do que a 2ª lei de Fick pois entra em conta com as variações de  $S$  com a distância.

## II.9 - Lei de Dalton das pressões parciais

A Lei de Dalton das pressões parciais diz que quando dois ou mais gases que não reagem quimicamente entre si são misturados, cada gás se comporta independentemente dos outros e tem a mesma pressão que teria se estivesse ele unicamente no volume ocupado pela mistura gasosa. Esta pressão é a pressão parcial do gás na mistura (por vezes a designação de tensão é utilizada como sinónimo de pressão parcial).

Por exemplo, quando uma mistura gasosa se encontra em contacto com um líquido, cada gás dissolve-se como se estivesse só e com a respectiva pressão parcial.

A lei de Dalton é também uma lei ideal que é seguida aproximadamente pelos gases reais.

Numa mistura com  $n$  gases que não reajam quimicamente entre si, se as pressões parciais dos gases da mistura forem

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

a pressão total na mistura é igual à soma das pressões parciais dos gases componentes

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n \quad \text{II.29}$$

A pressão parcial de qualquer gás em mistura pode ser calculada se conhecermos o número de moles de cada um dos gases da mistura. Suponhamos que a mistura, ocupando um volume  $V$ , contém  $n_1$  moles do gás 1,  $n_2$  moles do gás 2 ....e  $n_n$  moles do gás  $n$ .

Supondo a temperatura  $T$  constante, pela lei de Dalton, podemos aplicar a lei dos gases perfeitos a cada gás da mistura, ou seja

$$\begin{aligned} P_1 V &= n_1 RT \\ P_2 V &= n_2 RT \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ P_n V &= n_n RT \end{aligned} \quad \text{II.30}$$

Somando as equações anteriores membro a membro, vem

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n) V = (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_n) RT$$

Chamando

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_n$$

e como

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

vem

$$PV = NRT \quad \text{II.31}$$

Dividindo cada uma das Eqs. II.18 pela Eq. II.19 vem

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{n_1}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} P \\ P_2 &= \frac{n_2}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} P \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ P_n &= \frac{n_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} P \end{aligned} \quad \text{II.32}$$



A expressão  $\frac{n_i}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} = \frac{n_i}{N} = f_i$  é a fracção molar do gás  $i$  na mistura.

Então as pressões parciais dos gases da mistura são

$$P_1 = \frac{n_1}{N} P = f_1 P$$

$$P_2 = \frac{n_2}{N} P = f_2 P$$

·  
·

e 
$$P_n = \frac{n_n}{N} P = f_n P \quad \text{II.33}$$

A pressão parcial de cada um dos gases da mistura é o produto da fracção molar respectiva pela pressão total da mistura.

Como para qualquer gás  $i$  da mistura é

$$\frac{n_i}{N} = \frac{P_i}{P} = f_i \quad \text{II.34}$$

podemos dizer que a fracção molar de cada um dos elementos de mistura, ou seja, a fracção do número total de moles que corresponde a esse gás é também a fracção da pressão total que lhe corresponde.

É muitas vezes conveniente relacionar a pressão parcial de um gás com a sua concentração molar. Dividindo as Eq. II.18 por  $V$  obtém-se, exprimindo genericamente

$$P_i = C_i RT \quad \text{II.35}$$

onde a concentração molar  $C_i = \frac{n_i}{V}$ , é expressa em moles por unidade de volume. A Eq. II.35 mostra que, a uma dada temperatura, a pressão parcial de um gás numa mistura é proporcional à sua concentração molar na mistura.

É também possível exprimir a fracção molar como uma relação entre volumes. Consideremos que os  $n_1$  moles do gás 1, da situação anterior, eram

retirados da mistura e sujeitos a uma pressão **P** igual à pressão total da mistura inicial e à mesma temperatura **T**, ocupando agora o volume **V<sub>1</sub>**. Então, pela lei dos gases perfeitos podemos escrever

$$PV_1 = n_1RT$$

Fazendo de igual modo para os outros gases, os **n<sub>2</sub>** moles do gás 2 à temperatura **T** e à pressão **P** ocupam o volume **V<sub>2</sub>**, ..., os **n<sub>n</sub>** moles do gás **n** à temperatura **T** e à pressão **P** ocupam o volume **V<sub>n</sub>**, vindo então

$$\begin{aligned} PV_2 &= n_2RT && \text{II.36} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ PV_n &= n_nRT \end{aligned}$$

Somando as equações anteriores membro a membro, vem

$$\begin{aligned} P(V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n) &= (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_n) RT \\ &= NRT \end{aligned}$$

Por analogia com o caso anterior terá de ser

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = V$$

Ou seja,

$$PV = NRT \tag{II.37}$$

Dividindo cada uma das Eqs. II.23 pela Eq. II.24 vem

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V} &= \frac{n_1}{N} = f_1 \\ \frac{V_2}{V} &= \frac{n_2}{N} = f_2 && \text{II.38} \\ \cdot & \end{aligned}$$

e

$$\frac{V_n}{V} = \frac{n_n}{N} = f_n$$

A fracção molar de cada um dos gases é também a relação entre o volume ocupado por cada um dos gases à pressão total e o volume da mistura à mesma pressão.

### II.10 - Solubilidade dos gases nos líquidos

Os gases dissolvem-se em menor ou maior quantidade nos líquidos com os quais são postos em contacto. Após um certo tempo, a concentração do gás dissolvido num líquido, em presença de uma atmosfera contendo o gás, atinge um valor de equilíbrio, que não é ultrapassado se a temperatura e a pressão do gás não forem alteradas. Diz-se então que para as condições existentes o líquido se encontra saturado de gás.

A solubilidade dos gases em água ou outros líquidos varia marcadamente com a natureza dos gases em contacto.

Quando um gás não reage quimicamente com o líquido, a sua solubilidade é em geral muito pequena. Por exemplo, o oxigénio dissolve-se muito pouco em água, enquanto que o cloro ou amoníaco que reagem com a água, apresentam alta solubilidade naquele líquido.

A solubilidade dos gases em líquidos obedece à lei que a seguir mencionaremos.

### II.11 - Lei de Henry

Diz a Lei de Henry: a uma temperatura determinada, a concentração  $C$  de um gás dissolvido num líquido, após ter sido atingido o equilíbrio, é proporcional à pressão parcial  $P$  que o gás exerce à superfície do líquido.

$$C = K_s P$$

II.39

$K_s$  é o coeficiente de solubilidade do gás à temperatura considerada.

A Eq. II.39 verifica-se nas chamadas soluções simples, para as quais  $K_s$  é constante.

A concentração  $C$  pode ser expressa pelo volume de gás medido nas condições experimentais iniciais/mL de solvente, em fracção molar do gás dissolvido, em milimoles/L ou mL do gás (P.T.N.)/mL do solvente. A pressão  $P$  em mm Hg, Pascais ou atmosferas.

Quando se tem uma mistura de gases a temperatura constante e em contacto com um líquido e em equilíbrio, a concentração para cada componente é proporcional à pressão parcial correspondente.

O coeficiente de solubilidade depende das duas naturezas do gás e líquido e da temperatura.

É importante aqui recordar-se que, quando se tem um gás em contacto com um líquido, há sempre que contar com a pressão de vapor do líquido. Quando um gás se encontra em contacto com a água, a fase gasosa não só contém o gás em questão mas também vapor de água. Portanto, para se determinar a pressão parcial do gás é necessário subtrair da pressão total externa a pressão do vapor de água à temperatura da experiência.

A maioria dos gases obedecem aproximadamente à lei de Henry para as baixas pressões correspondentes aos sistemas biológicos, mas muitos dos gases não conservam a identidade química quando em solução, não sendo aplicável a Eq. II-39. Por exemplo, no caso do sangue, o oxigénio e o dióxido de carbono reagem com a hemoglobina e outras proteínas. A lei de Henry aplica-se aqui unicamente às moléculas que permanecem na forma de gás dissolvido, sem reagir quimicamente, como é o caso do oxigénio dissolvido fisicamente no sangue. Para a concentração de um gás que é retido quimicamente pode considerar-se uma outra relação, esta não linear

$$C = f(P) \qquad \text{II.40}$$

A concentração do gás é uma função (crescente) da pressão parcial e depende de factores condicionantes relativos ao problema em causa.

O coeficiente de solubilidade dos gases nos líquidos diminui com o aumento da temperatura. Este facto explica-se com o aumento da energia térmica de agitação, originando uma maior probabilidade de moléculas do gás abandonarem o líquido sem ocorrer qualquer variação de energia potencial, nas interacções gás-líquido. Observar na tabela seguinte dos coeficientes de solubilidade do hidrogénio na água.

Temp. °C	0	4	10	15	2
Coef. Sol (mL/mL)	0,0215	0,0206	0,0196	0,0188	0,0182

É, portanto, a baixa temperatura e a alta pressão, que a quantidade de gás dissolvido num líquido é mais elevada. Contrariamente, quando se deseja libertar de um líquido o gás nele dissolvido, ou se aquece até à ebulição ou se põe em contacto com um vazio tão elevado quanto possível.

Em medicina e biologia o coeficiente de solubilidade  $K_s$ , atrás definido e usado para exprimir a solubilidade de um gás, aparece mais frequentemente em duas formas:

**Coefficiente de absorção de Bunzen  $\alpha_t$**  - é a quantidade de gás em mL, reduzido às condições P.T.N. (760 mm Hg, 0°C) que, após completo equilíbrio, se dissolve em 1 ml do solvente quando a pressão do gás é 1 atmosfera.

**Coefficiente de solubilidade de Ostwald  $\lambda_t$**  - define-se de maneira idêntica ao anterior, excepto que o volume de gás dissolvido em mL não é reduzido à temperatura normal; só a pressão é reduzida.

Facilmente se relacionam os coeficientes  $\alpha$  e  $\lambda$ . Sabemos já que o volume de uma certa massa de gás é proporcional à temperatura absoluta quando a pressão é mantida constante. Então:

$$\lambda_t = \alpha_t \quad \text{II.41}$$

onde  $\lambda_t$  e  $\alpha_t$  representam os coeficientes de Ostwald e Bunsen para a temperatura  $t$ .

A designação de coeficiente de solubilidade de Ostwald é por vezes utilizada para exprimir exclusivamente o coeficiente de solubilidade entre o ar e os tecidos, de acordo com a definição acima dada para  $\lambda$ .

A Eq. II.39, permite mostrar que a concentração de gás dissolvido, medida em mL, à pressão parcial do respectivo componente na mistura exterior, por mL do solvente é independente da pressão (a temperatura constante), ou seja, sabendo esta concentração para uma dada pressão parcial sabemos para todas as outras.

De facto, a massa de gás dissolvido num volume  $V_s$  de líquido em contacto pode sempre escrever-se

$$M = V d \quad \text{II.42}$$

onde  $V$  é o volume do gás e  $d$  a densidade, medidos à mesma pressão  $P$  e temperatura  $T$ . Num gás, a densidade é proporcional à pressão, donde

$$M = V P C^{\text{te}}$$

Consideremos que  $P$  é a pressão parcial externa do gás que tem a massa  $M$  dissolvida no líquido. Então a lei de Henry (Eq. II.39) pode escrever-se

$$\frac{M}{V_s} = \frac{V P C^{\text{te}}}{V_s} = K_s \quad \text{II.43}$$

donde

$$\frac{V}{V_s} = C^{\text{te}} \quad \text{II.44}$$

A concentração do gás dissolvido, em ml, à pressão parcial do respectivo componente, por ml do solvente ( $V/V_s$ ) é uma relação constante para uma dada temperatura. Este resultado não contraria a lei de Henry, pois resulta de se usarem unidades de concentração do gás dissolvido (condições de medida do volume de gás) diferentes para cada valor de pressão.

## II.12 - Elementos de física do aparelho respiratório

Em termos gerais, a respiração consiste na utilização de oxigénio e na produção de dióxido de carbono pelas células vivas e nos mecanismos de troca destes gases, entre as células e a atmosfera.

A grande maioria dos seres vivos recolhe o  $O_2$  directamente da atmosfera, utilizando um dos diversos mecanismos pelos quais este gás pode ser fornecido aos tecidos metabolizantes. Nos seres inferiores, estes processos são: difusão directa, troca através da pele, uso de guelras e uso de tubos de ar.

O sentido de transferência das trocas gasosas, nestes processos, é inteiramente determinado pelo gradiente de pressão entre a atmosfera e as células.

Nos mamíferos a recolha do  $O_2$  atmosférico é feita segundo um esquema mais elaborado. O  $O_2$  é retido pelo sangue por transferência através dos capilares pulmonares e distribuído aos tecidos pelo sangue circulante. No homem de 70 Kg, em repouso, são trocados por minuto, entre sangue e tecidos, cerca de 300 ml de  $O_2$  P.T.N. e, no sentido oposto, cerca de 250 ml de  $CO_2$  P.T.N.. No exercício estes valores podem atingir valores mais de dez vezes superiores. Numa cidade com dez milhões de habitantes são retirados da atmosfera por minuto mais de  $3 \times 10^6$  litros de  $O_2$  P.T.N. só para a respiração dos seus habitantes.

Como sabemos, a concentração de gás fisicamente dissolvido num líquido, a temperatura constante, é directamente proporcional à pressão parcial do gás na fase gasosa (lei de Henry da solubilidade dos gases). Quando se tem uma mistura gasosa em contacto com um líquido, no equilíbrio, o número de moléculas gasosas que abandonam o líquido por unidade de tempo é igual ao número das que entram no líquido, e qualquer mudança na pressão parcial do gás produz uma mudança correspondente no equilíbrio.

Quando ocorre equilíbrio entre um gás, com uma certa pressão parcial, numa mistura gasosa, e um líquido, pode considerar-se que nas fases gasosa e líquida, a pressão deste gás é igual. Assim, em condições de equilíbrio, as pressões parciais do gás nas duas fases dizem-se iguais. Para se determinar a pressão parcial do gás no líquido, é necessário determinar a composição e pressão do gás na fase gasosa em equilíbrio.

A pressão parcial do  $O_2$  alveolar é superior à pressão parcial do  $O_2$  no sangue enviado aos alvéolos. Contudo, a pressão parcial do  $CO_2$  neste sangue é superior à do ar alveolar.

Deste modo, à medida que o sangue percorre os capilares do pulmão, a concentração sanguínea em  $O_2$  aumenta, sucedendo o contrário à concentração em  $CO_2$ . Após as trocas gasosas do pulmão, o sangue é enviado para os tecidos. A pressão parcial de  $CO_2$  nos tecidos é superior à do sangue, mas a concentração em  $O_2$  no sangue arterial é maior do que nos tecidos. As trocas processam-se agora com perda de  $O_2$  e ganho de  $CO_2$ , por parte do sangue.

A Fig. II.6 mostra um modelo esquemático do aparelho respiratório do homem. As bombas  $B_1$  e  $B_2$  simulam a acção mecânica dos músculos respiratórios, que levam à movimentação do ar. As bombas  $B_3$  e  $B_4$  simulam a acção mecânica do coração esquerdo e direito que produzem a corrente sanguínea.

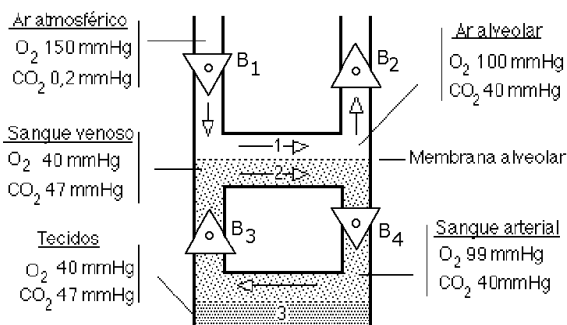


Fig.II.6 - Modelo esquemático do aparelho respiratório do homem.

A pressão parcial do vapor de água no ar alveolar é a tensão do vapor saturado, que só depende da temperatura e é 47 mmHg a 37 °C. Considerando a pressão do ar alveolar igual à pressão atmosférica (760 mmHg), vem

$$P_{O_2} + P_{CO_2} + P_{N_2} + P_{H_2O} = 760 \text{ mmHg}$$

$$P_{O_2} + P_{CO_2} + P_{N_2} = 760 - 47 = 713 \text{ mmHg}$$

A composição em volume do ar é:

$$O_2 = 14\% \quad CO_2 = 5,6\% \quad e \quad N_2 = 80,40\%$$

Logo, as frações molares<sup>2</sup> são:

$$14/100 \quad 5,6/100 \quad e \quad 80,4/100.$$

Então, as pressões parciais na mistura gasosa alveolar são:

$$P_{O_2} = 713 \times 14/100 = 99,82 \text{ mmHg}$$

$$P_{CO_2} = 713 \times 5,6/100 = 39,9 \text{ mmHg}$$

<sup>2</sup> Numa mistura gasosa ocupando  $V$  e sendo  $P_1 + P_2 + \dots + P_n = P$ , pela equação dos gases perfeitos vem  $P_1V = n_1RT$ ,  $P_2V = n_2RT$  e  $PV = (n_1 + n_2 + \dots)RT$  donde  $P_1/P = n_1/N$ , etc.. Os volumes dos gases medidos à pressão total  $P$  são obtidos por  $PV_1 = n_1RT$ ,  $PV_2 = n_2RT$  e  $P(V_1 + V_2 + \dots) = NRT$  ou  $PV = NRT$  e  $V_1/V = n_1/N = P_1/P$ , etc., então a fração molar pode escrever-se como uma relação entre número de moles, entre pressões ou entre volumes.



$$P_{N_2} = 713 \times 80,4/100 = 573,2 \text{ mmHg}$$

Estes cálculos justificam os valores de  $PO_2$  e  $PCO_2$  já referidos na Fig. II.6. A espessura da parede alveolar é de cerca de  $0,5 \mu\text{m}$  e a área total de troca  $50\text{-}120 \text{ m}^2$ , embora, no repouso só  $\sim 35 \text{ m}^2$  sejam utilizados.

Já referimos que as bombas **B<sub>1</sub>** e **B<sub>2</sub>** executam o trabalho mecânico da respiração, fazendo circular o ar no compartimento **1**. Note-se que a composição do gás alveolar é substancialmente diferente da do ar atmosférico. Não esquecer que há retenção de **CO<sub>2</sub>** no labirinto alveolar e que temos de contar com a tensão do vapor de água à temperatura do corpo humano, para uma pressão total de ar alveolar que é praticamente a pressão atmosférica.

A membrana **M** separa os compartimentos **1** e **2**. Neste último, as bombas **B<sub>3</sub>** e **B<sub>4</sub>** fazem circular o sangue, produzindo um trabalho que simula o do coração. As trocas gasosas entre o sangue e o ar alveolar processam-se através da membrana **M**. Na parede inferior de **2** processam-se as trocas de **O<sub>2</sub>** e **CO<sub>2</sub>** com os tecidos **3**.

## II.13 - As trocas e o transporte de gases no organismo

É conhecido que os processos responsáveis pelas trocas e transporte de gases no organismo são: convecção, difusão e combinação química.

A convecção designa de um modo geral a movimentação de uma massa gasosa por uma acção motriz exterior ao gás.

Os gases são introduzidos no organismo ou eliminados fundamentalmente pela ventilação pulmonar em que, alternadamente, ar é bombeado do exterior para os alvéolos pulmonares e uma mistura gasosa é bombeada dos alvéolos para o exterior. Trata-se pois de um processo de convecção, ao qual se associa um fenómeno de difusão em fase gasosa, na massa do gás mobilizado.

A partir do alvéolo, os gases difundem-se através das membranas que separam os diversos compartimentos líquidos, dissolvendo-se ou reagindo no seio desses líquidos.

Os gases que intervêm nas trocas respiratórias são fundamentalmente o oxigénio, o anidrido carbónico (gases fisiológicos) e o azoto (biologicamente inerte). O oxigénio recolhido do ar é levado aos tecidos pelo sangue para ser utilizado pelas células. O anidrido carbónico produzido pelos tecidos é eliminado após transporte pelo sangue até aos pulmões.

A solubilidade do oxigénio no sangue à temperatura normal do corpo é insuficiente para as funções fisiológicas. Na ausência de outros fenómenos, o  $O_2$  dissolvido fisicamente no sangue pode ser calculado se conhecermos o coeficiente de Bunsen para o sistema oxigénio-sangue a  $37^\circ C$  (cujo valor é 0,0235) e a pressão parcial do oxigénio no ar alveolar (e sangue arterial) que é cerca de 100 mm Hg. Então,

$$V_{O_2} = 0,0235 \times \frac{100}{760} = 0,003 \text{ ml } O_2/\text{ml sangue}$$

ou seja, 3 ml de  $O_2$  (P.T.N.) por litro de sangue. Este valor representa cerca de 1,5 % do concentração total do  $O_2$  sanguíneo.

No caso do  $CO_2$  o coeficiente de Bunsen é 0,494 e a pressão parcial no ar alveolar (e sangue arterial) que é cerca de 40 mm Hg. Então,

$$V_{CO_2} = 0,494 \times \frac{40}{760} = 0,026 \text{ ml } CO_2/\text{ml sangue}$$

ou seja, 26 ml de  $CO_2$  (P.T.N.) por litro de sangue. Este valor representa cerca de 5 % da concentração total do  $CO_2$  sanguíneo.

Contudo o  $O_2$  na forma dissolvida é essencial, pois é a partir desta fase que se processa a combinação com a hemoglobina. Na reacção que representa a formação da oxihemoglobina a partir da hemoglobina nas hemácias



o termo  $O_2$  é oxigénio dissolvido. Sendo  $K$  a constante de equilíbrio da reacção e sendo a concentração do  $O_2$  dissolvido, proporcional à pressão parcial do  $O_2$ ,  $P_{O_2}$ , podemos escrever

$$\frac{[Hb O_2]}{[Hb]} = K [O_2] = K' P_{O_2} \quad \text{II.46}$$

Se 100 representar a quantidade de hemoglobina total e  $Y$  a percentagem de hemoglobina na forma  $HbO_2$ , podemos escrever

$$\frac{Y}{100-Y} = K' P_{O_2} \quad \text{II.47}$$

donde  $Y = \frac{100 K' P_{O_2}}{1 + K' P_{O_2}} \quad \text{II.48}$

a concentração de HbO<sub>2</sub> (oxihemoglobina) depende portanto da pressão parcial do O<sub>2</sub>.

A função que relaciona [HbO<sub>2</sub>] com P<sub>O<sub>2</sub></sub> é, em geral, mais complexa do que a obtida, pois existem na circulação diversas hemoglobinas com constantes de dissociação diferentes.

Por outro lado, cada molécula de hemoglobina pode receber até um máximo de quatro moléculas de oxigénio, havendo constantes de equilíbrio diferentes para cada reacção.

A quantidade de CO<sub>2</sub> dissolvido no sangue pode calcular-se a partir da pressão parcial e do coeficiente a 37 °C. O CO<sub>2</sub> é cerca de 25 vezes mais solúvel nos meios biológicos que o O<sub>2</sub>. No sangue venoso a P<sub>CO<sub>2</sub></sub> é de cerca de 46 mm Hg e α 37 °C = 0,48, logo

$$V = 0,48 \frac{46}{760} = 0,029 \text{ ml CO}_2 \text{ (P.T.N.) /ml sangue a } 37 \text{ }^\circ\text{C}.$$

No sangue arterial P<sub>CO<sub>2</sub></sub> = 40 mm Hg, donde

$$V' = 0,48 \frac{40}{760} = 0,025 \text{ ml CO}_2 \text{ (P.T.N.) /ml sangue a } 37 \text{ }^\circ\text{C}.$$

A quantidade de CO<sub>2</sub> eliminada a partir do CO<sub>2</sub> dissolvido é mínima e seria incompatível com a vida, haver unicamente transporte de CO<sub>2</sub> nesta forma. O CO<sub>2</sub> dissolvido representa cerca de 1/20 do CO<sub>2</sub> total presente no sangue, encontrando-se a maior parte combinado com hemoglobina e sobretudo na forma de bicarbonato e ácido carbónico.

O azoto não participa nas combustões celulares. Encontra-se unicamente dissolvido no organismo com uma pressão parcial igual à do N<sub>2</sub> do ar alveolar, ou seja, P<sub>N<sub>2</sub></sub> ~ 573 mm Hg. Para 37 °C o α<sub>37</sub> = 0,0132, logo

$$V'' = 0,0132 \frac{537}{760} = 0,01 \text{ ml N}_2 \text{ (P.T.N.) /ml de sangue a } 37 \text{ }^\circ\text{C}.$$

## II.14 - Forças e pressões actuando no tórax e pulmões

Os movimentos do tórax durante o ciclo respiratório são contrariados por forças de dois tipos distintos, que têm de ser vencidos pela acção dos músculos respiratórios. Estas forças dividem-se em elásticas e não elásticas ou viscosas.

**Forças elásticas** - A Fig. II.7 é, em representação esquemática, um modelo mecânico do sistema de forças elásticas do pulmão.

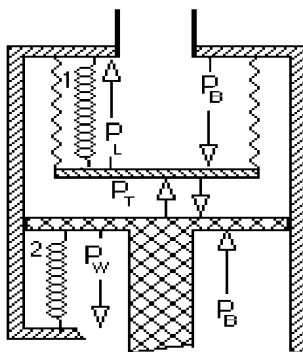


Fig. II.7 - Modelo mecânico da respiração.

$P_T$  é a pressão no espaço interpleural ou pressão intratorácica. É a pressão existente no espaço limitado pela pleura visceral e pleura parietal.

A força elástica de retracção dos pulmões expressa por unidade de superfície de pleura visceral é a pressão pulmonar  $P_L$ . Na figura anterior esta pressão é produzida pela mola 1 na base rígida do fole que representa os pulmões.

A pressão da parede do tórax  $P_W$  é devida à elasticidade da parede torácica, com ou sem forças adicionadas aplicadas pelos músculos respiratórios. A acção elástica da parede do tórax é simulada pela mola 2.

A pressão no exterior do tórax, representado pelo êmbolo, é a pressão atmosférica  $P_B$  e, quando a via da entrada de ar está aberta e não há fluxo de ar a entrar ou a sair dos pulmões, a pressão interior é também  $P_B$ .

Quando um orifício é feito na parede do tórax, pondo em contacto

com a pressão atmosférica o espaço existente entre as membranas pleurais, como ocorre em acidentes, os pulmões colapsam e o tórax expande-se, devido à entrada de ar naquele espaço. Estes movimentos são devidos à retracção elástica dos pulmões e à expansão elástica da parede do tórax e justificam o sentido de actuação das molas 1 e 2, na Fig. II.7 (para o interior no primeiro caso e para o exterior, no segundo).

Numa representação esquemática mais próxima do real, as pressões referidas encontram-se indicadas na figura a seguir

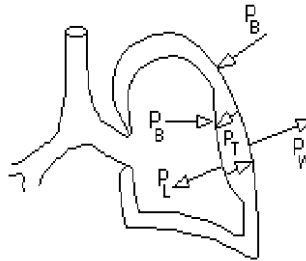


Fig. II.8 - Pressões pulmonares.

No fim de uma expiração lenta com a glote aberta, os músculos respiratórios relaxados, as forças elásticas dos pulmões e tórax compensam-se aproximadamente; os pulmões contêm então cerca de 2 litros de ar.

As forças elásticas dos pulmões, sem oposição, esvaziam os pulmões; as forças elásticas do tórax expandem-nos até corresponder a um volume pulmonar de aproximadamente 4 litros. Para volumes pulmonares maiores do que este, as forças elásticas do tórax actuam para dentro, até à posição neutra de 4 ℓ.

Opondo-se mutuamente, os pulmões e o tórax formam um sistema elástico, no qual o trabalho tem que ser produzido pelos músculos respiratórios.

Quando não há deslocamento de ar e a via de entrada de ar está aberta, as pressões equilibram-se, pelo que temos

$$P_L + P_T + P_B = P_W + P_T + P_B \quad \text{II.49}$$

ou seja,

$$P_L = P_W \quad \text{II.50}$$

Se considerarmos unicamente a pleura visceral sob as mesmas condições, também haverá equilíbrio e podemos escrever, para dois

diferentes estados de inflação

$$P_{L1} + P_{T1} = P_B \quad \text{II.51}$$

$$P_{L2} + P_{T2} = P_B \quad \text{II.52}$$

Se  $P_{L2}$  é maior do que  $P_{L1}$ , como aconteceria para uma maior inflação pulmonar,  $P_{T2}$  deverá ser menor do que  $P_{T1}$ . Por outras palavras, a pressão intratorácica decresce durante a inspiração. Além disso, como  $P_L$  nunca é nula,  $P_T$  é sempre menor do que a pressão atmosférica  $P_B$ , na condição estática com a via de entrada aberta.

Geralmente,  $P_T$  é medida em relação a  $P_B$ ;  $P_T$  varia, durante a respiração calma, de 2 cm  $H_2O$  abaixo de  $P_B$  até cerca de 7 cm  $H_2O$  abaixo de  $P_B$ , na expiração. Este modo de exprimir a pressão intratorácica  $P_T$ , leva a atribuírem-se a esta, valores negativos (-2 e -7 cm  $H_2O$ , no caso exposto).

Sob certas condições,  $P_T$  pode ser superior a  $P_B$ . Durante a expiração forçada,  $P_T$  pode ser superior a  $P_B$  quando o ar é expelido com alta velocidade. Isto consegue-se por contracção dos músculos expiratórios, de modo a que  $P_W$  actue fortemente de fora para dentro. Mesmo na condição estática  $P_T$  pode ser elevado até valores superiores a  $P_B$  com um esforço de expiração contra a glote fechada.

Um violento ataque de tosse, por exemplo, pode elevar  $P_T$  a 200 mmHg (272 cm  $H_2O$ ) acima de  $P_B$ .

### II.14.1 - Forças elásticas

Consideremos um balão feito à custa de um tecido biológico elástico; bexiga, pulmão lavado ou intestino e debrucemo-nos sobre o seu diagrama pressão-volume.

Em abcissas está representada a pressão deformadora, ou seja, a pressão no interior em relação à pressão atmosférica, e em ordenadas o aumento de volume, a partir de um volume inicial suposto nulo para uma pressão deformadora nula.

Todos aqueles materiais apresentam uma curva em S (sigmóide), mais

ou menos pronunciada, como se observa na Fig.II.9. Estas curvas para os órgãos destacados reflectem as propriedades dos materiais mas podem não traduzir o seu comportamento no vivo.

Na curva da Fig. II.9, no ponto **A**, podemos definir as complacências estática e dinâmica que se aplicam às curvas V(P) não lineares.

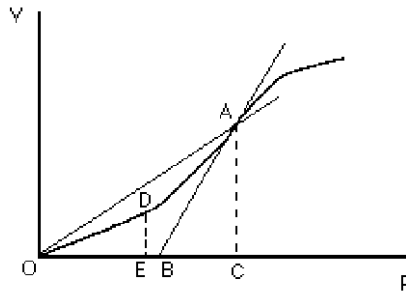


Fig. II.9 - Gráfico V(P) para um balão de membrana biológica.

A complacência estática é o coeficiente angular da recta que une a origem ao ponto **A**.

$$C_e = \frac{AC}{OC} \quad \text{II.53}$$

A complacência dinâmica é o coeficiente angular da tangente à curva V(P) no ponto **A**

$$C_d = \frac{AC}{BC} \quad \text{II.54}$$

Estas complacências variam ao longo da curva, contudo se a pressão não ultrapassar **E** podemos definir complacência linear

$$C = \frac{DE}{OE} \quad \text{II.55}$$

constante no intervalo de pressão de **O** a **E**.

Os segmentos indicados devem ser interpretados pelos seus valores na escala dos eixos coordenados, correspondentes às respectivas grandezas, ou seja, volume e pressão.

Na Fig. II.10, podemos observar a curva  $V(P)$  para os pulmões no vivo, obtida em condições tais que se aproxima de uma recta.

A pressão que tende a encher os pulmões (pressão transpulmonar), ou seja, a pressão que se opõe a  $P_L$ , devido à reacção elástica do pulmão, tem o valor  $P_B - P_T$  no equilíbrio.

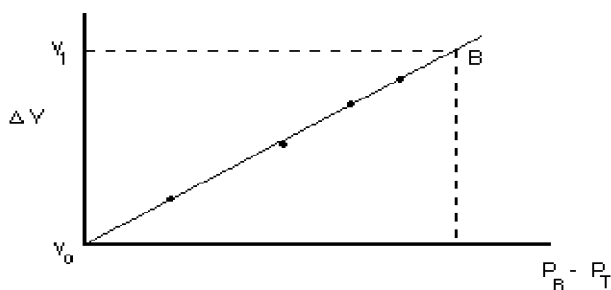


Fig. II.10 - Gráfico volume-pressão para os pulmões (forças elásticas).

A relação entre volume pulmonar e pressão transpulmonar dá informação sobre a deformação elástica do pulmão. O volume pulmonar é medido com um espirómetro e  $P_T$  pode ser determinado por métodos indirectos.

Cada ponto no gráfico, representa um par de medidas, feito sem movimento do tórax e com a entrada de ar aberta. Com certa aproximação, os pontos encontrados situam-se numa recta.

Chama-se resistência elástica de um pulmão à relação  $\Delta P/\Delta V$  entre a pressão transpulmonar e a variação do volume pulmonar. Evitaremos esta designação e usaremos antes a sua relação inversa, ou seja, a complacência linear do pulmão, cuja definição já vimos.

O trabalho realizado pelas forças elásticas do pulmão será dado pela soma dos produtos  $P\Delta V$  e é igual à área  $V_0BV_1$ .

Recordemos que a área entre a curva e as abcissas no gráfico  $P(V)$



tem as dimensões de uma energia.

De modo análogo, é possível determinar o trabalho das forças elásticas do tórax. Num modelo experimental de sistema respiratório, próximo de uma situação real, coloca-se o tronco dentro de uma caixa hermética, onde se varia a pressão, de modo a serem obtidos diferentes graus de insuflação. Os músculos respiratórios são mantidos completamente relaxados. Este sistema substitui o trabalho dos músculos torácicos.

À diferença de pressão entre o interior da caixa e a atmosfera chama-se pressão transtorácica. Esta é a pressão que está efectivamente a produzir a distensão do tórax e pulmões durante a respiração, ou seja  $(P_B - P_C)$  na Fig. II.11. Nesta figura esquematiza-se o dispositivo referido.

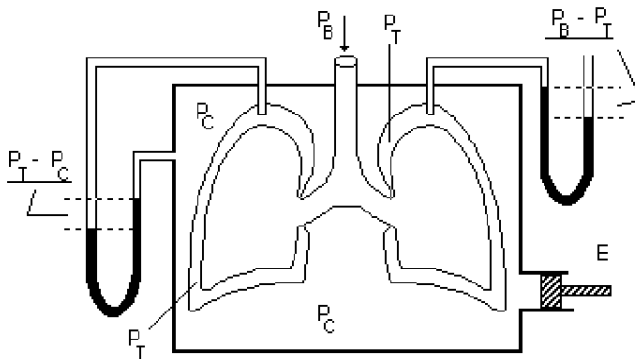


Fig. II.11 -  $P_C$  - Pressão no interior da caixa metálica obtida à custa do êmbolo.  $P_T$  - Pressão intratorácica.  $P_B$  - Pressão atmosférica.

Os volumes armazenados nos dois elementos, interior e exterior, são iguais.

A diferença de pressão através do sistema total para um dado volume de gás armazenado é a soma dos dois termos de pressão, ou seja,

$$P_B - P_T + P_T - P_C = P_B - P_C \quad \text{II.56}$$

O sistema total constituído pelos dois elementos elásticos, pulmão e parede do tórax, armazena um volume igual aos considerados para as curvas

1 e 2 logo, a curva total 3 pode ser obtida ponto por ponto, através da soma das pressões das curvas 1 e 2 para cada valor de  $V$ .

A área compreendida entre a curva 2 e as abcissas corresponde ao trabalho das forças elásticas do tórax.

Das curvas da Fig. II.12 podem calcular-se as complacências dos pulmões e caixa torácica, bem como a complacência resultante.

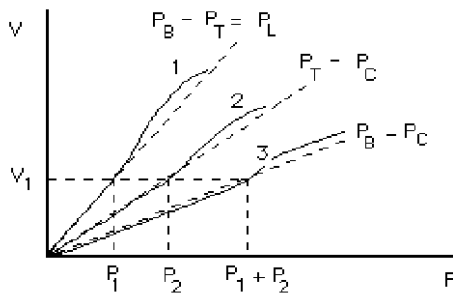


Fig. II.12 - Curva 1 - Característica P(V) do elemento elástico interior, ou seja, o pulmão. Curva 2 - Característica P(V) do elemento elástico exterior, ou seja, a parede do tórax. Curva 3 - Curva P(V) total.

Dividindo a última expressão pelo valor de  $V$  correspondente, vem

$$\frac{P_B - P_T}{V} + \frac{P_T - P_C}{V} = \frac{P_B - P_C}{V} \quad \text{II.57}$$

ou

$$\frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_C} = \frac{1}{C_r} \quad \text{II.58}$$

onde  $C_L$ ,  $C_C$  e  $C_r$  são, respectivamente, as complacências dos pulmões, caixa torácica e resultante.

Como se vê, a associação em série das complacências (ou capacidades) dos pulmões e tórax tem como resultante a complacência resultante  $C_r$ , cujo valor se determina de modo idêntico ao usado para o cálculo da

capacidade resultante de uma associação em série de condensadores.

Neste estudo considerámos o volume nulo para uma diferença de pressão nula, o que não corresponde à realidade. O estudo da situação real é porém feito em moldes idênticos.

### II.14.2 - Forças não elásticas

A respiração envolve forças não elásticas ao movimentar o ar e as pleuras. Logo, no caso dinâmico, o gráfico do volume do pulmão em função da pressão deve ser diferente do caso estático, uma vez que neste não se entra com a fricção. O diagrama dinâmico da pressão  $\times$  volume para um ciclo completo está representado na Fig. II.13, em que a abcissa é a pressão intratorácica, que é igual à pressão transpulmonar multiplicada por -1 depois de subtraída de  $P_B$ . Neste gráfico, os pontos **B** e  $V_0$  coincidem com a curva anterior, pois representam dois pontos estáticos.

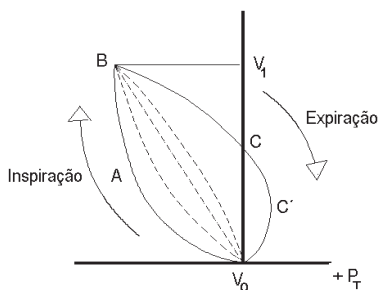


Fig. II.13 - Gráfico volume - pressão considerando as forças de fricção.

A inspiração é representada pela linha  $V_0AB$  e a expiração por  $BCC'V_0$ . Nos inícios da inspiração e expiração, há uma grande variação de pressão para uma pequena variação de volume, pois tem que se estabelecer uma diferença de pressão (da ordem dos 15 cm de água) entre os alvéolos e a boca, para que o ar se movimente (pressão de abertura).

O trabalho contra as forças de fricção e para movimentar o ar é dado pelas áreas 2+3 nas Figuras II.14 e II.15. O trabalho total na inspiração (dissipativo e elástico) é dado pela área (1+2+3,) Fig. II.14, e terá de ser fornecido pelos músculos inspiratórios.

Quando os pulmões atingem o volume  $V_1$ , as pleuras estão tensas, possuindo a energia elástica (Fig. II.14), armazenada nos tecidos. Na expi-

ração, parte desta energia é utilizada para vencer as forças de atrito ao movimentar o ar e as resistências dos tecidos. A energia necessária para retrain a parede do tórax é (4). A energia (5) tem de ser fornecida pelos músculos expiratórios.

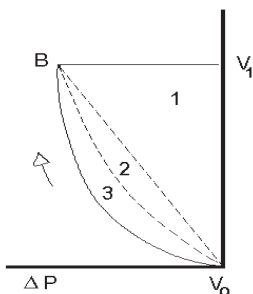


Fig. II.14 - Inspiração - Gráfico V(P) considerando as forças de fricção.

O diagrama da Fig. II.15 depende do modo como se faz a expiração entre os mesmos volumes extremos dos pulmões,  $V_0$  e  $V_1$ . Para uma expiração muito lenta, o trabalho das forças de atrito do ar é muito pequeno, tornando-se o gráfico muito mais esguio e próximo da linha a tracejado que separa as áreas 2 e 3. Neste caso, a energia total despendida na expiração é menor.

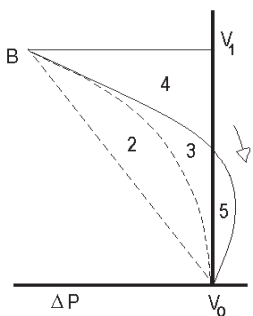


Fig. II.15 - Expiração - Gráfico V(P) considerando as forças de fricção.

Contudo a fracção da energia elástica armazenada usada de maneira útil é maior, podendo ser suficiente para realizar a expiração sem a necessi-

dade de trabalho muscular.

Inspiração

- 1 - Trabalho realizado contra as forças elásticas do tecido.
- 2 - Trabalho realizado para movimentar o ar.
- 3 - Trabalho libertado nas resistências viscosas dos tecidos.

Expiração

- 4 - Trabalho realizado para retrair a parede do tórax.
- 5 - Trabalho fornecido pelos músculos expiratórios.

Distribuição do trabalho durante a respiração numa pessoa normal:

60-70% - vencer as forças elásticas.

25% - movimentar o ar e vencer as forças de fricção nos tecidos.

**II.14.3 - Frequência respiratória e energia dispendida na respiração**

Tem interesse saber qual a frequência da respiração que necessita de menor energia para movimentar uma determinada quantidade de ar por minuto. O ar expirado por minuto, também chamado ventilação pulmonar, representa-se por  $\dot{V}_E$  e é definido para as condições P.T.N., (Fig. II.16). O ponto situado acima do  $\dot{V}$  em  $\dot{V}_E$  significa que se trata de uma quantidade por unidade de tempo.

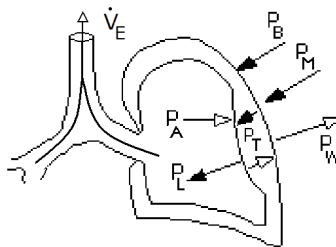


Fig. II.16 - Pressões pulmonares a actuar na expiração.  $P_M$  é a pressão da acção muscular (ou a pressão resultante da energia elástica armazenada) e  $P_A$  a pressão alveolar.

A ventilação pulmonar  $\dot{V}_E$  é igual ao volume corrente  $V_T$  a multi-

plicar pela frequência respiratória, esta, o número de ciclos respiratórios por unidade de tempo. Na Fig. II.17, o volume corrente é  $V_T = V_1 - V_0$  e aparece em função da pressão pulmonar, ou transpulmonar, que é a pressão a actuar através da parede pulmonar.

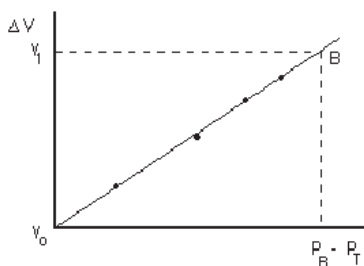


Fig. II.17 - Volume pulmonar em função da pressão.

O trabalho total da respiração pode ser decomposto em trabalho das forças elásticas e trabalho de forças de fricção.

O trabalho das forças elásticas, por ciclo, é dado pela área do triângulo  $V_0BV_1V_0$ . A área do triângulo fica 4 vezes maior se  $V_T$  duplicar, fica 9 vezes maior se  $V_T$  triplicar, etc, pois a base e a altura do triângulo aumentam na mesma proporção. Esta proporcionalidade pode ser representada por

$$W_{EL} \propto (V_T)^2 \quad \text{II.59}$$

Vimos que:

$$\dot{V}_E = f V_T \quad \text{II.60}$$

ou

$$V_T \propto \frac{1}{f} \quad \text{II.61}$$

(O sinal  $\propto$  entre duas quantidades significa proporcionalidade.)

Então, para uma ventilação pulmonar constante, o volume corrente  $V_T$  é inversamente proporcional à frequência. Para uma ventilação constante, se a frequência duplicar, o volume movimentado por ciclo diminui para metade.

O trabalho realizado por unidade de tempo é, a partir da Eq. II.59.

$$\dot{W}_{EL} = W_{EL} \times f \quad \text{II.62}$$

$$= (V_T)^2 \times f \quad \text{II.63}$$

$$\propto \left(\frac{1}{f}\right)^2 \times f \quad \text{II.64}$$

$$\propto \frac{1}{f} \quad \text{II.65}$$

Logo, o trabalho das forças elásticas por segundo diminui quando a frequência aumenta.

O trabalho das forças de fricção por segundo é calculado pela diferença de pressão, a multiplicar pelo fluxo médio, ou seja,

$$\dot{W}_{FR} = (P_B - P_T) \dot{V}_E \quad \text{II.66}$$

Para o regime laminar (ver Cap. III), que supomos prevalecer na respiração calma, a pressão motora é proporcional ao caudal

$$P_2 - P_1 \propto \dot{V} \quad \text{II.67}$$

Donde

$$\dot{W}_{FR} = (P_B - P_T) \dot{V}_E \propto (\dot{V}_E)^2 \quad \text{II.68}$$

que é independente da frequência. No entanto, o problema fisiológico é mais complicado, atendendo a que interessa uma ventilação alveolar  $\dot{V}_A$  constante e não  $\dot{V}_E = C^{te}$ .

A ventilação pulmonar  $\dot{V}_E$  é igual à soma da ventilação alveolar  $\dot{V}_A$  com a ventilação não efectiva, volume das passagens de ar  $V_D$ , multiplicado pela frequência respiratória.

Assim, o trabalho das forças de fricção por unidade de tempo vem

$$\dot{W}_{FR} \propto (\dot{V}_E)^2 \quad \text{ou} \quad \dot{W}_{FR} \propto (\dot{V}_A + V_D f)^2$$

ou ainda

$$\dot{W}_{FR} \propto (\dot{V}_A)^2 + 2\dot{V}_A V_D f + (V_D)^2 f^2 \quad \text{II.69}$$

que indica que a energia dissipada por segundo, na forma de calor, aumenta com a frequência.

O valor mínimo do trabalho total por unidade de tempo coincide com a frequência respiratória normal, quer no repouso (ventilação de 12  $\ell/\text{min}$ ), quer no exercício moderado (ventilação de 25  $\ell/\text{min}$ ). Verifica-se, portanto, que as frequências respiratórias adoptadas naturalmente para as diferentes necessidades ventilatórias correspondem ao máximo rendimento energético.

Na prática, não é fácil verificar que o trabalho das forças elásticas é exactamente proporcional a  $\frac{1}{f}$ , pois quando  $f$  cresce,  $\dot{V}_E$  cresce também. No entanto, como indica a Fig. II.18, existe uma frequência para cada ventilação pulmonar a que corresponde um trabalho mínimo.

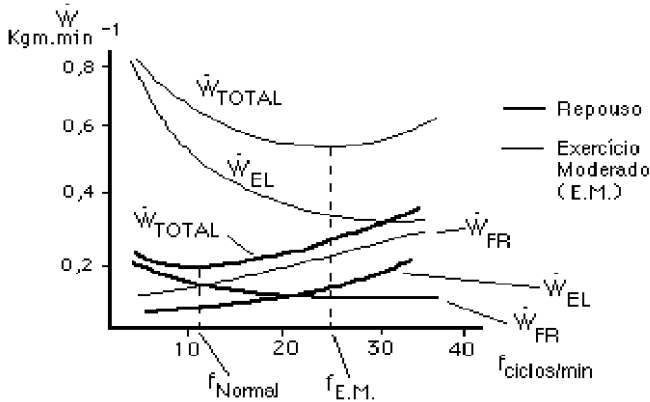


Fig. II.18 - Trabalho respiratório em função da frequência.

## II.15 - Física do alvéolo-pulmonar

Consideremos um pulmão destacado da caixa torácica e estudemos a curva  $V(P)$ , supondo que as medidas são feitas sem movimentos bruscos e sem obstáculos à entrada de ar no pulmão. Nestas condições, a característica  $V(P)$  apresenta um ciclo de histerese, ou seja, a curva de preenchimento é diferente da curva de esvaziamento. Isto não é previsível pois, não obstante a complexidade do sistema, tudo levaria a pensar que as curvas  $V(P)$  fossem



coincidentes nos dois sentidos, havendo o cuidado de fazer as medidas em condições de quase repouso, para as quais a resistência do ar e outras fricções não seriam factores de grande importância. Por outras palavras, criando sucessivas condições de quase-equilíbrio, a que correspondem valores de  $P$  e  $V$ , durante o enchimento, não parece lógico que estes pares sejam diferentes, para os mesmos valores de  $V$ , durante o esvaziamento.

A parte do sistema respiratório em estudo é constituída por um tubo grosso, a traqueia, que se ramifica dando os brônquios, estes por sua vez os bronquíolos que, numa longa sequência de divisões dão origem aos tubos alveolares e alvéolos. Os alvéolos são portanto os receptores finais do ar inalado abrindo-se e dilatando quando recebem o ar e diminuindo de volume quando o expiram. Podemos pois dizer que os alvéolos pulmonares, pequenas bolsas aproximadamente esféricas, onde o ar e o sangue estão separados por uma fina parede, são dilatados pelo ar durante a inspiração e esvaziam quase completamente durante a expiração. Num pulmão os alvéolos têm diversos volumes, havendo diferenças consideráveis nos seus raios.

As paredes do alvéolo são constituídas por uma membrana muito fina sobre a qual se encontra uma camada líquida.

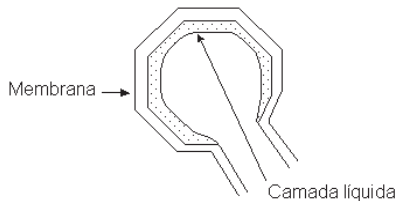


Fig. II.19 - Esquema da constituição de um alvéolo pulmonar.

O comportamento mecânico do alvéolo não depende exclusivamente da elastância da membrana pulmonar, pois é resultante das propriedades do tecido e da superfície líquida, actuando em simultâneo. Este facto foi demonstrado pela primeira vez por Neergard em 1928, que verificou que as curvas  $V(P)$  para o pulmão destacado eram muito diferentes quando preenchia o volume do pulmão com ar ou soro fisiológico, Fig. II.20.

Pelo facto do raio alveolar ser muito pequeno e a membrana ser muito fina, são as propriedades superficiais da camada líquida (ou seja, a tensão superficial do líquido) que têm maior preponderância no processo, podendo

dizer-se que a sua contribuição é da ordem dos  $3/4$ . É a tensão superficial da camada líquida que explica, não só a curva de histerese anteriormente referida, como também o facto de o ar não passar dos alvéolos de menor raio para os de maior raio, como seria de prever pela fórmula de Laplace<sup>3</sup>.

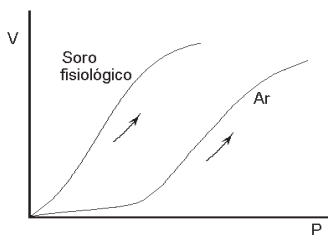


Fig. II.20 - Curvas V(P) para o pulmão destacadado com volume preenchido com ar e soro fisiológico (Neergard).

Como veremos, o papel dos fenómenos de superfície no comportamento do alvéolo é vital. De um modo geral, podemos dizer que as propriedades da camada líquida superficial do alvéolo impedem o colapsamento, permitem a coexistência de alvéolos de raios diferentes, facilitam a difusão do oxigénio, aumentam a complacência pulmonar, diminuem o trabalho respiratório e contribuem para a estabilização das trocas de fluidos no alvéolo.

Vejamos como se comportam individualmente as duas camadas do alvéolo.

Quanto à membrana, a variação do volume em função da pressão transalveolar para o epitélio de um alvéolo com raio  $r_0$  e volume  $V_0$  (para uma pressão mínima sem colapsamento), de acordo com o que vimos (II.14.1), ocorre com uma variação aproximadamente linear até ser atingida uma região onde a deformação passa a ser mais lenta (Fig. II.21).

Sobre a camada líquida, principal responsável pelas propriedades do alvéolo, há bastante para dizer. De facto, as propriedades de superfície do líquido que reveste o alvéolo são importantes para a compreensão dos resultados experimentais, pois a tensão superficial desta solução não é constante mas varia quando varia a área do alvéolo.

É sabido que, para certas soluções, existe a tendência para haver uma maior concentração de moléculas de soluto à superfície e próximo da superfície. Isto resulta do facto das interacções que as moléculas do soluto exercem sobre as do solvente serem menos intensas do que as interacções

<sup>3</sup> - Neste estudo interessa o conhecimento das propriedades das superfícies líquidas que são tratadas em detalhe no Cap. IV.

entre as próprias moléculas do solvente. Do balanço entre este fenómeno e a difusão molecular resulta uma diminuição da tensão superficial do líquido.

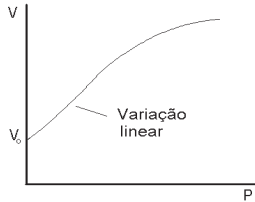


Fig. II.21 - Variação do volume em função da pressão transalveolar para o epitélio de um alvéolo com volume  $V_0$  para uma pressão mínima sem colapsamento.

Resulta também que a concentração do soluto à superfície do líquido é maior do que no interior. Neste tipo de moléculas, se a área da superfície do líquido aumentar, ocorre uma redistribuição, de modo que a concentração à superfície é reconstituída à custa de moléculas mais interiores de soluto, não variando a tensão superficial da solução.

Existe um outro tipo de moléculas, com propriedades ditas de surfatante (em inglês “surfactant”, contracção de “surface active agent”) que em solução, além de baixarem a tensão superficial, originam que esta varie com a área da superfície livre do líquido.

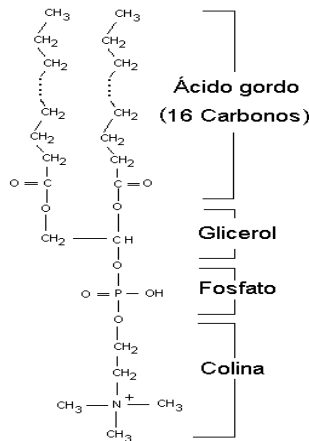


Fig. II.22 – di-palmitoil-fosfatidil-colina.

Estas substâncias são fosfolípidos que têm conformação longitudinal e apresentam, num dos seus extremos, uma região hidrofílica e no outro extremo uma região hidrofóbica apresentando uma notável tendência para se situarem à superfície da água. Na Fig. II.22 encontra-se representada uma molécula de um fosfolípido, a di-palmitoil-fosfatidil-colina.

Após a dissolução de uma pequena massa de um fosfolípido em água ocorre ligação de moléculas deste com as moléculas de água à superfície, feita à custa dos grupos hidrofílicos (ácidos gordos), ficando os grupos hidrofóbicos (colina) "fora da solução" virados para o exterior. Dado que estas ligações são de pequena energia as moléculas do surfatante ficam em grande quantidade à superfície originando uma considerável diminuição da tensão superficial. No interior do líquido estas moléculas aglomeram-se formando partículas onde as moléculas de água não penetram, pois os grupos hidrofóbicos viram-se todos para o interior, ficando os hidrofílicos virados para o exterior e ligados a moléculas de água, Fig. II.23. Formam-se também lipossomas, de dupla camada, com solvente no interior.

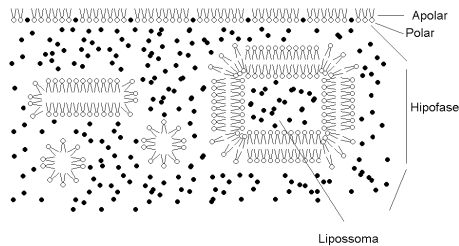


Fig. II.23 - Após a dissolução de uma pequena massa de um fosfolípido em água, ocorre ligação de moléculas deste com as moléculas de água à superfície, feita à custa dos grupos hidrofílicos. No interior do líquido estas moléculas aglomeram-se, formando partículas, limitadas por uma monocamada, onde as moléculas de água não penetram e lipossomas, de dupla camada, com solvente no interior.

As partículas formadas no interior do líquido, são insolúveis e constituem associações moleculares com propriedades semelhantes às de fibras elásticas. No caso da área da superfície aumentar, estas partículas não podem ceder moléculas para reconstituir a concentração à superfície. Assim, quando a área da superfície livre do líquido aumenta, por exemplo devido a uma acção mecânica, as moléculas do soluto são substituídas por moléculas de água, a concentração do soluto à superfície diminui e aumenta a tensão superficial da solução (Fig. II.24).

No alvéolo as "células alveolares do tipo II", que ficam no interior dos alvéolos, produzem uma mistura de fosfolipídios (~90%) e proteínas (~10%) que constituem o surfatante pulmonar.

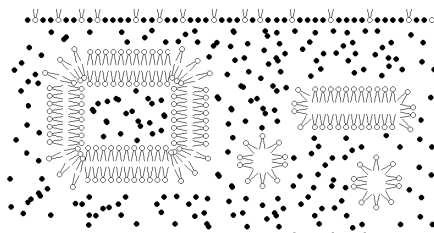


Fig. II.24 - Quando se reduz a área da superfície livre de uma solução de surfatante, a concentração do soluto à superfície diminui e aumenta a tensão superficial da solução pois, não havendo moléculas de soluto disponíveis, são moléculas de água que se dirigem para a superfície. Na figura, as moléculas de água (solvente) estão representadas por pequenos círculos negros. Nas moléculas de surfatante os braços representam a parte hidrofóbica e as pequenas circunferências a parte hidrofílica.

Notemos que a variação da tensão à superfície resultante da variação da área superficial é uma propriedade que associamos às membranas elásticas e não às superfícies líquidas.

Se representarmos a variação da tensão numa membrana elástica, com um único tipo de fibras elásticas, em função da área da membrana (Fig. II.25), temos uma recta com uma inclinação, que depende do coeficiente de elasticidade do material. Para um líquido puro a tensão superficial não depende da área.

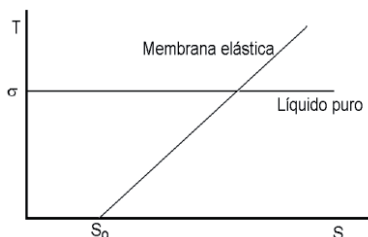


Fig. II.25 - Comparação da variação da tensão superficial de um líquido e da tensão elástica de uma membrana com a superfície.

Se fizermos a representação  $T(S)$  para uma solução de surfatante (ou para o líquido que cobre os alvéolos), a curva que se obtém apresenta um ciclo de histerese, Fig. II.26.

Quando a área aumenta, ou seja, se passa de **A** para **B** pelo trajecto **1**, a tensão superficial aumenta rapidamente até ser atingido o valor constante  $\sigma_s$  que corresponde à tensão superficial do solvente. A tensão superficial da camada líquida do alvéolo pulmonar varia de cerca de 5 dine/cm, quando a área do alvéolo é mínima, até cerca de 50 dine/cm quando esta é máxima.

Quando ocorre diminuição da área, trajecto de **B** para **A** (percurso **2**), a inclinação da curva é menor do que na parte ascendente de **1** e não existe uma região paralela às abcissas como no caso anterior.

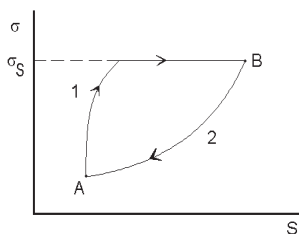


Fig. II.26 - Ciclo de histerese da tensão superficial do líquido alveolar em função da área interior do alvéolo.

A explicação da curva  $\sigma(S)$ , apresentada por soluções de surfatantes, parece estar não só no comportamento da superfície, como nas associações moleculares criadas no interior, com propriedades elásticas, cujos efeitos conjugados resultariam em propriedades intermediárias entre membranas e superfícies líquidas.

Consideremos a curva  $V(P)$  para uma película de um líquido sem surfatante (solução de sabão, por exemplo), colocada na extremidade de um tubo cilíndrico. Esta curva toma o aspecto da Fig. II.27 a), com explicação na Fig. II.27 b). Considera-se que  $V$  é o volume limitado pelo interior da película, suposta uma calote esférica de raio  $r$ , e o plano tangente à entrada do tubo. A pressão  $P$  é obtida aplicando a Eq. IV.11, entrando com o raio da calote. Para pequenos volumes (curvas 1 e 2) os raios de curvatura da calote são grandes e as pressões pequenas. A pressão só pode aumentar até um valor máxima que corresponde ao valor mínimo do raio da calote, ou seja,

quando é igualado o raio do tubo (curva 3). A partir daqui a pressão volta a diminuir com aumento do volume (curvas 4 e 5).

A curva da Fig. II.27 a) depende da tensão superficial da solução. Para bolas de sabão com tensão superficial numa sequência de valores crescentes (numeradas de 1 a 5), as curvas  $V(P)$  seriam do tipo da Fig. II. 27 c). Para os mesmos valores de  $V$ , os valores de  $P$  aumentam com o aumento da tensão superficial (valores crescente de 1 a 5 podendo 5 corresponder ao solvente).

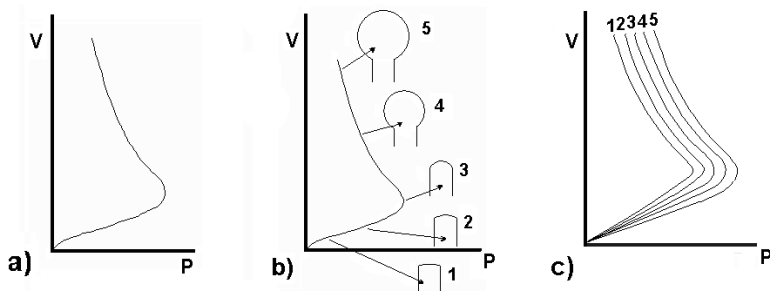


Fig. II.27 – a) Curva  $V(P)$  para uma bola de sabão. b) Detalhes: 1–Volume mínimo; Pequena pressão; Grande raio de curvatura do alvéolo. 2 – Aumento da pressão; Maior volume; Menor raio. 3 - Raio mínimo (igual ao raio do tubo); Pressão máxima. 4 e 5 - O volume e o raio de curvatura aumentam e a pressão diminui. c) Curvas  $V(P)$  para bolas de sabão com tensões superficiais com valores crescentes (curvas de 1 para 5).

Para uma solução de surfatante a curva  $V(P)$  numa experiência idêntica à da Fig. II.27 b) seria diferente. Neste caso, com o aumento de  $V$  a tensão superficial da solução iria aumentar, (Fig. II.28 a)), tendendo para o valor máximo  $\sigma_s$ , tensão superficial do solvente. Nesta curva onde o volume limitado pela película é definido como no caso anterior, para um tubo de raio  $r$ , observa-se uma marcada histerese. Na Fig. II.28 b) encontra-se um conjunto de curvas  $V(P)$ , para valores de  $\sigma$  a variar desde um valor mínimo  $\sigma_1$  até  $\sigma_s$ , tensão superficial do solvente. Os valores da pressão para qualquer valor do volume limitado pela membrana da solução de surfatante podem ser obtidos a partir das curvas da Fig. II.28 b) desde que se escolha a curva que corresponde ao correcto valor da tensão superficial. Por exemplo para o valor de volume

$V_{10}$  (Fig. II.28 a)), do esvaziamento, a que corresponde o valor de tensão superficial  $\sigma_{10}$  o valor de pressão no interior é  $P_{10}$  (Fig. II.28 b)).

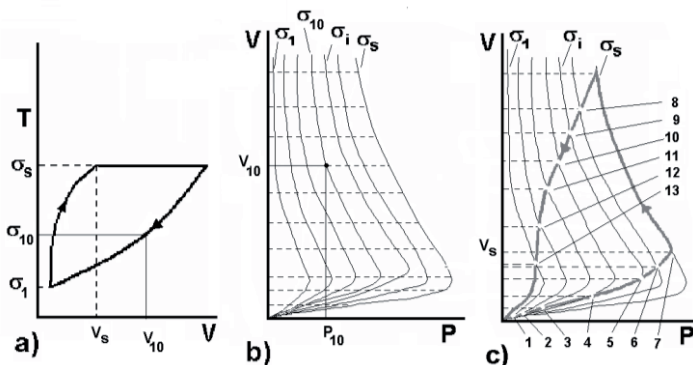


Fig. II.28 – a) Curva  $\sigma(V)$  para solução de surfatante. b) Curvas  $V(P)$  para camadas líquidas de tensão superficial constante e de valores  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_s$ . c) Curva  $V(P)$  para uma camada líquida de solução de surfatante (cheio grosso). Para o volume  $V_{10}$  no esvaziamento, a que corresponde o valor de tensão superficial  $\sigma_{10}$  (a)), o valor de pressão no interior é  $P_{10}$ , (b)). O par  $(V_{10}, P_{10})$  é o ponto 10 da curva  $V(P)$  de esvaziamento para a película de solução de surfatante (c)).

Procedendo de igual modo para um conjunto de pontos obtêm-se pares de valores  $(P_i, V_i)$  que correspondem à curva  $V(P)$  (Fig. II.28 c)) para uma película de solução de surfatante com a histerese que seria de prever.

A curva da Fig. II.28 c) simula o comportamento da camada líquida do alvéolo no ciclo respiratório. Durante a inspiração, o seu volume aumenta, aumentando a tensão superficial de acordo com a Fig. II.28 a), e o inverso na expiração.

O comportamento do alvéolo depende, como vimos, da soma das propriedades das duas camadas - a membrana alveolar e a película líquida, cujo estudo acabámos de fazer.

Consideremos a contribuição da membrana elástica.

Na Fig. II.29 apresentamos as curvas  $V(P)$  para uma membrana elástica com o nº 2 e para uma camada líquida sem surfatante com o nº 1, como se indicou na Fig. II.19.

Para cada valor do volume, a pressão do sistema membrana-camada líquida é a soma das pressões nas curvas nºs 1 e 2. A curva nº 3 é a curva soma e representa a função  $V(P)$  para o sistema constituído por uma



membrana elástica coberta com uma camada líquida de uma solução sem surfatante<sup>4</sup>. Notar que nesta curva ocorre um ligeiro efeito de histerese. Considerando o enchimento por aumento contínuo da pressão, o trajecto **a** seria o único que poderia ocorrer. No esvaziamento por decréscimo contínuo da pressão ocorreria o trajecto **b**.

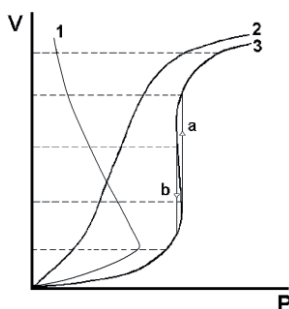


Fig. II.29 - Curvas  $V(P)$  para: 1 - Camada líquida sem surfatante; 2 - membrana alveolar sem qualquer líquido; 3 - soma 1+2.

Consideremos, finalmente, a situação de uma membrana elástica com uma camada líquida aderente de uma solução de surfatante.

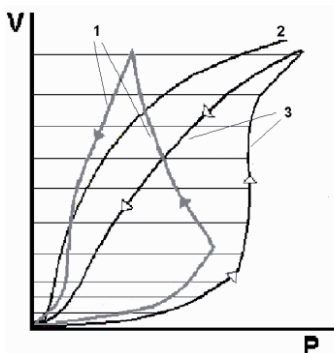


Fig. II.30 - Curvas  $V(P)$  para: 1 - Camada líquida sem surfatante; 2 membrana alveolar sem líquido; 3 - soma 1+2.

<sup>4</sup> - Supõe-se desprezível a acção da tensão de contacto líquido-membrana.

Na Fig. II.30 encontram-se as curvas  $V(P)$  para a camada líquida com o seu ciclo de histerese (Curva 1, igual à da Fig. II.29 c)), para a membrana (Curva 2) e para o sistema membrana camada líquida, ou seja, a curva soma (Curva 3). A curva soma obtém-se considerando em separado as duas componentes (ascendente e descendente) da curva 1. De realçar o marcado efeito de histerese.

A curva 3 (Fig. II.30) aproxima-se da curva de enchimento do alvéolo.

Uma observação importante quando se comparam as curvas  $V(P)$  com líquido sem surfatante (Fig. II.29 curva 3) e  $V(P)$  com solução de surfatante (Fig. II.30 curva 3) é que, na primeira, a pressão de colapsamento do alvéolo é consideravelmente superior à obtida com surfatante.

Durante a expiração são atingidas pressões nos alvéolos que levariam ao total colapsamento se não existisse surfatante.

Quando se considera a curva  $V(P)$ , agora para os pulmões no seu total, observa-se igualmente um pronunciado efeito de histerese, Fig. II.31. O volume pulmonar para dada pressão é nitidamente mais elevado durante a expiração do que durante a inspiração.

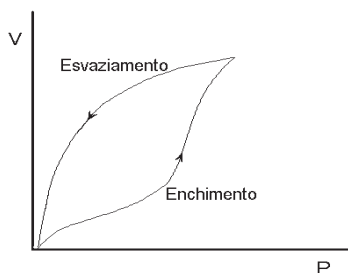


Fig.II.31 – Curvas  $V(P)$  para o enchimento e esvaziamento do pulmão.

Além do que já estudamos sobre o alvéolo, um outro facto contribui para a diferença entre as curvas  $V(P)$  no enchimento e esvaziamento do pulmão. Como os raios dos bronquíolos são diferentes, as pressões de abertura são diferentes de alvéolo para alvéolo. Ao aumentar-se a pressão há um recrutamento progressivo dos alvéolos, cujos bronquíolos tenham raios progressivamente menores. Só depois de atingida a pressão de abertura é que se processa um aumento rápido do volume para cada alvéolo.

Não existe fenómeno equivalente a este recrutamento durante o esvaziamento. Quando se inicia a expiração os alvéolos encontram-se preenchi-

dos e todos à mesma pressão, havendo sincronismo na variação de volume quando baixa a pressão.

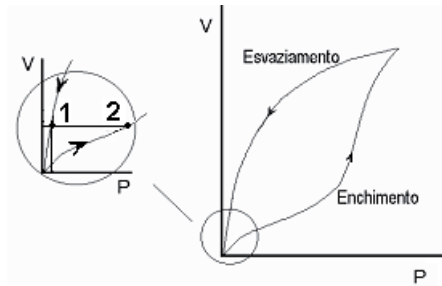


Fig. II.32 – Curvas V(P) para o pulmão com ênfase para o comportamento nas pequenas pressões.

Os volumes próximos de zero, a que corresponde o colapsamento, ocorrem para valores de pressão tão baixos, que não são nunca atingidos no fim da expiração. Se o final do esvaziamento corresponder ao ponto 1, o enchimento irá processar-se a partir do ponto 2, (Fig. II.32).

É de realçar a eficiência desta camada líquida que desempenha uma tarefa vital sem protecções especiais e tendo como participação biológica única, a produção de surfatante pelas células epiteliais do tipo II.

Na vida fetal ocorre produção de surfatante alveolar a partir do 6º mês, ou mesmo antes, viabilizando o nascimento de prematuros.

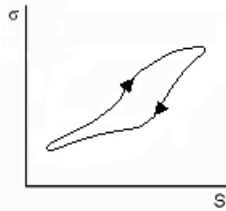


Fig. II.33 – Curvas V(P) para o líquido alveolar de um recém-nascido com doença da membrana hialina.

No nascimento os alvéolos estão praticamente colapsados e o seu pri-

meiro enchimento requer um esforço considerável. Uma baixa concentração de surfatante no recém nascido, como ocorre na chamada doença da membrana hialina pode ser fatal. Na Fig. II.33 encontra-se a curva tensão superficial em função da área,  $\sigma(S)$ , para o líquido alveolar de um recém nascido com a referida doença. Compare-se com a curva da Fig. II.26.

## II.16 - Capacidade de difusão de um gás

Numa *fase gasosa* a velocidade de difusão de uma dada espécie molecular é inversamente proporcional à raiz quadrada da respectiva massa molecular (ou da sua densidade). Por exemplo, a velocidade de difusão, em fase gasosa do  $\text{CO}_2$  é cerca de 1,7 vezes maior do que a do Xe, valor que é a relação inversa das raízes quadradas dos seus números de massa.

Numa fase líquida a velocidade de difusão (ou corrente de difusão molecular) de uma dada espécie molecular gasosa é proporcional ao inverso da raiz quadrada da sua massa molecular e ao coeficiente de solubilidade do gás no líquido. Combinando duas expressões conhecidas, a da corrente de difusão molecular livre e monodireccional (1ª lei de Fick), para uma dada temperatura  $t$ ,

$$I = - D S \frac{dC}{dx} \quad \text{II.70}$$

onde  $I$  é a corrente de difusão em moles/s através da superfície de difusão  $S$ ,  $D$  é a constante de difusão,  $x$  é a distância na direcção de difusão e  $C$  é a concentração em  $x$ , e a da lei de Henry, para a mesma temperatura

$$C = \lambda_t P \quad \text{II.71}$$

com  $\lambda_t$  coeficiente de solubilidade do gás no líquido, vem

$$I = - D \lambda_t S \frac{dP}{dx} \quad \text{II.72}$$

O coeficiente de solubilidade mais usado é o coeficiente de solubi-

lidade de Ostwald  $\lambda_t$  que é o volume de gás, em ml à pressão de 1 atmosfera e à temperatura  $t$  da experiência que, após equilíbrio, se dissolve em 1ml do solvente, quando a pressão parcial do gás é 1 atm.

A constante de difusão **D** é proporcional ao inverso da raiz quadrada da massa molecular, pelo que a velocidade de difusão relativa de dois gases, na mesma fase líquida (água, por exemplo) poderá obter-se, para iguais gradientes de pressão parcial e iguais áreas de difusão.

$$\frac{I}{I'} = \frac{\sqrt{M'}}{\sqrt{M}} \frac{\lambda_t}{\lambda'_t} \quad \text{II.73}$$

O coeficiente de solubilidade de Ostwald a 37 °C para o caso do **O<sub>2</sub>** é  $\lambda_{37}=0,0244$  ml STPD/ml H<sub>2</sub>O e para o Xe,  $\lambda_{37} = 0,084$  ml STPD/ml H<sub>2</sub>O. Então a velocidade de difusão relativa dos dois gases, na mesma fase líquida (água por exemplo) poderá obter-se, considerando o produto

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{133}} \times \frac{0,084}{0,0244} = 1,69 \quad \text{II.74}$$

ou seja, em fase aquosa, o Xe é 1,69 vezes mais difusível do que o **O<sub>2</sub>** na mesma fase.

Consideremos agora as velocidades de difusão do Xe em fase aquosa e em matéria gorda. Para esta matéria o coeficiente de solubilidade de Ostwald a 37 °C para o Xe é  $\lambda_{37} = 1,004$ . Então a relação entre as velocidades de difusão do gás nos dois meios poderá obter-se, considerando o cociente

$$\frac{1,004}{0,084} = 13,1 \quad \text{II.75}$$

ou seja, o Xe é 13,1 vezes mais difusível em fase gorda que em fase aquosa.

Em termos gerais, na patologia intersticial o valor de  $\lambda_{37}$  para o Xe deve aumentar em relação ao tecido são, devido ao aumento de colagénio na BAC, característico nestas afecções.

Em 1909 Bohr introduziu o conceito de capacidade de difusão do pulmão, ou seja, o número de ml de um gás (STPD) que difunde através da membrana pulmonar por minuto e por mmHg de diferença de pressão parcial entre a mistura gasosa alveolar e o sangue capilar.

Chamando  $D_{Xe}$  à capacidade de difusão para o **Xe**, temos, por simples aplicação da definição

$$D_{Xe} = \frac{\dot{V}_{Xe}}{P_{AXe} - P_{CXe}} \quad \text{II.76}$$

Onde  $\dot{V}_{Xe}$  é a corrente de difusão molecular pulmonar total de **Xe**,  $P_{AXe}$  é a pressão parcial do **Xe** alveolar e  $P_{CXe}$  a pressão parcial média do **Xe** nos capilares pulmonares.

Por outro lado, numa perspectiva morfométrica, pode escrever-se

$$D_{Xe} = K_0 \frac{\lambda_t}{\sqrt{M}} \frac{S}{\Delta x} \quad \text{II.77}$$

com  $K_0$  constante. A partir das Eqs. II.76 e II.77 verifica-se que, se conhecendo qualquer dos pares  $\dot{V}_{Xe}$  e  $(P_{AXe} - P_{CXe})$  ou  $S$  e  $\Delta x$ , pode calcular-se  $D_{Xe}$ .

### II.17 - Difusão através da parede de um capilar pulmonar

Em cada ciclo cardíaco a difusão do **O<sub>2</sub>** e **CO<sub>2</sub>** através da barreira alvéolo capilar ocorre em fracções de segundo nos trajectos dos capilares em contacto com os alvéolos. Estes trajectos, que são da ordem dos décimos do mm, devem permitir a troca de uma fracção substancial dos gases dissolvidos no sangue capilar para que o processo seja rentável. É possível fazer o cálculo teórico da eficiência da troca gasosa utilizando um modelo geral baseado na Fig. II.34.

A parede de um tubo capilar, de raio **R**, é atravessada por uma densidade de corrente de um soluto, de  $J_A$  moles  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . A permeabilidade da parede ao gás é  $P_{ac}$   $\text{cm s}^{-1}$  e a sua concentração extravascular é  $C_A$  moles  $\text{cm}^{-3}$ . O caudal de sangue através do capilar é  $\dot{Q}$   $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ .

Seja o eixo do tubo, um eixo orientado (xx), com origem no início do tubo e consideremos duas secções rectas de abscissas  $x$  e  $x+dx$ , onde ocorrem concentrações  $C(x)$  e  $C(x+dx)$  (Fig. II.34).

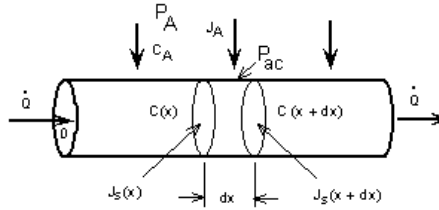


Fig. II.34 - Modelo de difusão através da parede de um tubo capilar.

As densidades de corrente através de secções rectas do tubo,  $J_S(x+dx)$  e  $J_S(x)$ , em dois pontos muito próximos, são diferentes devido à difusão de gás através da parede. Utilizando as concentrações do soluto em  $x+dx$  e  $x$  pode exprimir-se a diferença entre aquelas densidades de corrente pela equação:

$$J_S(x+dx) - J_S(x) = \frac{1}{A} \left[ \dot{Q} C(x+dx) - \dot{Q} C(x) \right] \quad \text{II.78}$$

ou

$$J_S(x+dx) - J_S(x) = \frac{\dot{Q}}{A} dC(x) \quad \text{II.79}$$

A expressão da densidade de corrente através da membrana do capilar, é

$$J_A = P_{ac} (C_A - C(x)) \quad \text{II.80}$$

Então, supondo que só ocorrem trocas por difusão em metade da área lateral dos capilares, já que estes assentam sobre os alvéolos, é também

$$[J_S(x+dx) - J_S(x)]\pi R^2 = [P_{ac}(C_A - C(x))] \pi dx$$

ou

$$J_S(x+dx) - J_S(x) = P_{ac}(C_A - C(x)) dx / R \quad \text{II.81}$$

Donde, considerando a Eq. II.79 e recordando que  $\dot{Q} = \pi R^2 \bar{v}$  com  $\bar{v}$  a velocidade média do líquido no tubo

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{P_{ac}}{\bar{v}R} (C_A - C(x)) \quad \text{II.82}$$

ou

$$\frac{dC(x)}{dx} + k C(x) = k C_A \quad \text{II.83}$$

e

$$C(x) = C_A (1 - e^{-kx}) \quad \text{e, como} \quad k = \frac{P_{ac}}{\bar{v}R} \quad \text{II.84}$$

vem

$$C(x) = C_A \left[ 1 - e^{-\left(\frac{P_{ac}}{\bar{v}R} x\right)} \right] \quad \text{II.85}$$

Numa situação hipotética, considerando na equação anterior a velocidade média  $\bar{v}$  (ou  $R$ ) como parâmetro, com valores de 1, 3, 5, 7 e 9 unidades arbitrárias e mantendo constantes e com valores razoáveis  $P_{ac}$  e  $R$  (ou  $\bar{v}$ ) obtêm-se as curvas seguintes para a variação relativa da concentração do gás ao longo do capilar (Fig. II.35).

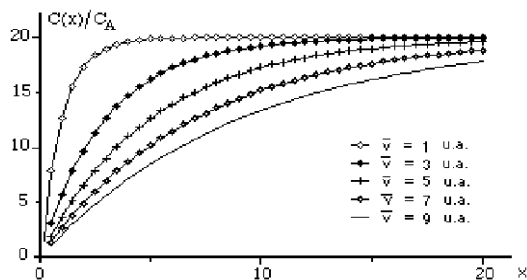


Fig. II.35 - Curvas  $C(x)/C_A$  em função do comprimento do capilar, para diversos valores de velocidade média  $\bar{v}$ .

Do mesmo modo, considerando como parâmetro a permeabilidade com valores de 1, 3, 5, 7 e 9 unidades arbitrárias, obtêm-se as curvas seguintes para a variação relativa da concentração em função do comprimento  $x$  do capilar (Fig. II.36).

As curvas  $C(x)/C_A$  vs.  $x$  tendem mais rapidamente para a saturação com a diminuição da velocidade e com o aumento da permeabilidade da membrana.



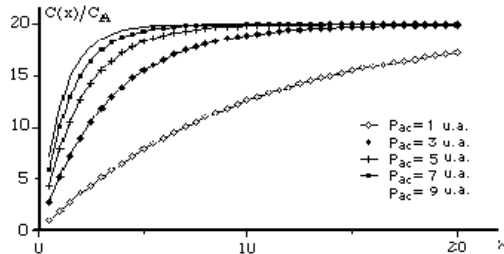


Fig. II.36 - Curvas  $C(x)/C_A$  em função do comprimento do capilar, para diversos valores de permeabilidade  $P_{ac}$ .

Consideremos agora a situação humana.

No caso do  $N_2$  da mistura gasosa alveolar,  $P_{ac} = 0,13 \text{ cm s}^{-1}$ . Os valores médios do raio do capilar alveolar e velocidade do sangue são, respectivamente  $R = 4 \times 10^{-4} \text{ cm}$  e  $\bar{v} = 0,04 \text{ cm s}^{-1}$ . Calculemos o valor da relação entre as concentrações  $C(x)/C_A$  ou entre as correspondentes pressões parciais do gás  $P(x)/P_A$ , para alguns valores de  $x$ .

Para $x = 10 \text{ }\mu\text{m}$	$P(x)/P_A = 0,999703955$
Para $x = 20 \text{ }\mu\text{m}$	$P(x)/P_A = 0,999999912$
Para $x = 50 \text{ }\mu\text{m}$	$P(x)/P_A = 0,999999999$

Para o caso do  $CO_2$ ,  $P_{ac} = 2,6 \text{ cm s}^{-1}$ . Supondo condições semelhantes ao caso anterior a relação entre as pressões parciais  $P(x)/P_A$ , para  $x = 10 \text{ }\mu\text{m}$  já é praticamente unitária.

## II.18 - Tubo colapsável ideal

Um tubo colapsável ideal é uma entidade teórica que possui as seguintes propriedades: é altamente deformável, não é elástico, mantém-se aberto, por completo, para qualquer pressão transmural positiva e colapsa para qualquer pressão transmural negativa.

Consideremos três situações típicas de funcionamento destes tubos:

1. - Quando a pressão no meio circundante  $P_S$  de um tubo colapsável é superior à pressão à entrada do tubo  $P_i$ , não ocorre caudal através do tubo, Fig. II.37, ou seja

e

$$P_S > P_i > P_o$$

$$\dot{Q} = 0$$

II.86

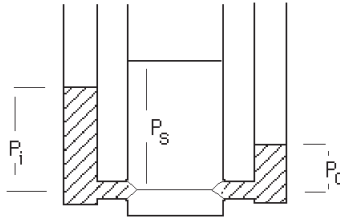


Fig. II.37 - Comportamento do tubo colapsável ideal para o caso de  $P_S > P_i > P_o$ .  $P_i$  - Pressão à entrada do tubo;  $P_o$  - Pressão à saída;  $P_S$  - Pressão circundante.

2. - Quando, como na Fig. II.38, a pressão à saída do tubo é maior do que a pressão no meio circundante, o caudal é proporcional à diferença entre a pressão de entrada e a pressão de saída e variações na pressão exterior, mantendo-se a condição inicial, não influenciam o caudal. Neste caso

$$P_i > P_S > P_o$$

II.87

e o caudal é

$$\dot{Q} = (P_i - P_o) / R$$

II.88

com  $R$  - Resistência hidrodinâmica.

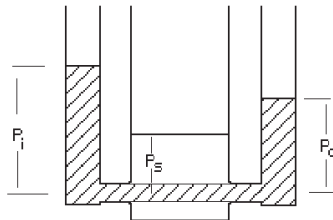


Fig. II.38 - Comportamento do tubo colapsável ideal para o caso de  $P_i > P_S > P_o$ .  $P_i$  - Pressão à entrada do tubo;  $P_o$  - Pressão à saída;  $P_S$  - Pressão circundante.

3. - Quando um tubo colapsável é rodeado por uma pressão maior do que a pressão à saída do tubo, mas menor do que a pressão à entrada, o tubo vai colapsar na extremidade distal. Uma alteração do caudal não vai influenciar a pressão no extremo colapsado do tubo e uma variação na queda de pressão através do tubo não influencia o caudal. Neste caso

$$P_i > P_S > P_o \quad \text{II.89}$$

e o caudal é dado por

$$\dot{Q} = (P_i - P_S) / R \quad \text{II.90}$$

Este comportamento é conhecido por resistência de Starling.

A circulação pulmonar é o exemplo clássico da importância fisiológica dos tubos colapsáveis.

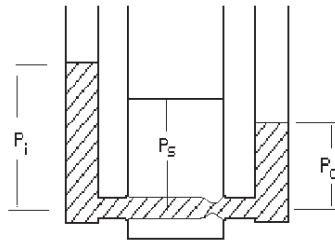


Fig. II.39 - Comportamento do tubo colapsável ideal para o caso de  $P_i > P_S > P_o$ ;  $P_i$  - Pressão à entrada do tubo;  $P_o$  - Pressão à saída;  $P_S$  - Pressão circundante. R - Resistência hidrodinâmica.

Considerando o pulmão dividido em três terços (Fig. II.40).  $P_{alv}$ ,  $P_{art}$  e  $P_{ven}$  representam respectivamente a pressões alveolar, arterial capilar e venosa capilar. Verifica-se que no terço superior (I)  $P_{alv} > P_{art} > P_{ven}$  não havendo caudal sanguíneo através do capilar. No terço médio (II)  $P_{art} > P_{alv} > P_{ven}$  ocorrendo caudal cujo valor é proporcional a  $P_{art} - P_{alv}$ . Nesta região a pressão  $P_{ven}$  não influencia o caudal. É a chamada região da resistência de

Starling. No terço inferior (III)  $P_{art} > P_{ven} > P_{alv}$ . O caudal não é influenciado pela pressão  $P_{alv}$ .

No indivíduo normal em pé a Zona I não ocorre. Pode, no entanto observar-se em situações patológicas, quando a pressão arterial pulmonar baixa ou  $P_{alv}$  é elevada.

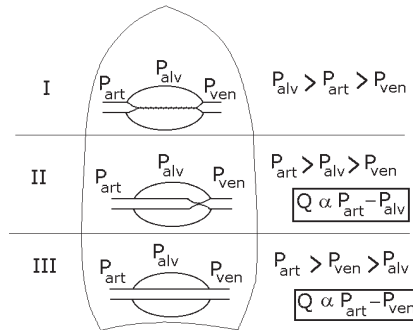


Fig. II.40 - Conseqüências do efeito hemostático nos capilares alveolares considerados tubos colapsáveis ideais.

## II.19 - Difusão dos gases nas vias respiratórias

Considere-se que na inspiração existe, à entrada, uma variação abrupta entre as concentrações do  $O_2$  e  $CO_2$  no ar que entra e no gás retido nos pulmões. Por exemplo, para o  $CO_2$ , 0% no ar inspirado e 5% no gás retido nos pulmões no fim da última expiração. Na inspiração, nas primeiras gerações das vias de ar e devido à corrente de arrastamento esta frente desloca-se rapidamente à medida que se desfaz e alarga. Devido ao aumento de área a velocidade diminui progressivamente até ficar com valor mínimo, cerca da 17ª ou 18ª geração. Cria-se aí uma competição entre o caudal de arrastamento, tendendo a mover o gás inspirado para o alvéolo e a difusão dos gases alveolares, em direcção à boca. No final da inspiração há ainda uma marcada diferença entre as concentrações dos gases nas vias mais proximais, até cerca da 15ª geração onde a composição é próxima da do ar ambiente e as das vias mais periféricas e alvéolos. Esta diferença é conhecida por

estratificação. No início da expiração a estratificação desaparece rapidamente: no caso do  $\text{CO}_2$ , difusão e arrastamento contribuem simultaneamente para desfazer o gradiente de concentração e deslocar a frente de concentração em relação ao exterior.

## II.20 - Modelo mecânico avançado do transporte gasoso na respiração

O modelo mecânico da respiração, apresentado na Fig. II.7, só pretende abarcar os aspectos mais globais da dinâmica dos gases na respiração. Modelos especializados podem ser mais esclarecedores da mecânica dos processos envolvidos.

Antes de mais, consideremos o comportamento de um tubo elástico  $T$ , Fig. II.41, situado numa câmara onde existe a pressão  $P_e$ , percorrido por um caudal gasoso  $F$ , com regime laminar e determinando a pressão  $P_i(x)$  no seu interior. A pressão do gás à entrada do tubo é  $P_i(0)$  e à saída é  $P_a$ , a pressão atmosférica. Vamos supor ainda que podemos variar o valor da pressão  $P_e$  da câmara. Na Fig. II.41 a pressão  $P_i(0) > P_e$ , pelo que o tubo inicialmente dilata, passando o raio a diminuir a partir do valor de  $x$  em que  $P_e > P_i(x)$ .

Na Fig. II.42 encontram-se, a traço cheio fino, as curvas do caudal em função da queda total de tensão ao longo do tubo [ $P_{ib}(0) = P_i(0) - P_a$ ], tendo como parâmetro o valor da pressão barométrica na câmara [ $P_{eb} = P_e - P_a$ ]. A inclinação destas curvas, em cada ponto tem as dimensões do inverso de uma resistência hidrodinâmica. Com o aumento do parâmetro  $P_{eb}$  e para o mesmo  $P_{ib}(0)$  o diâmetro do tubo diminui, (a resistência hidrodinâmica aumenta) pelo que  $F$  será menor. Evidentemente, se o tubo fosse rígido, teríamos uma só curva, uma recta, a passar pela origem.

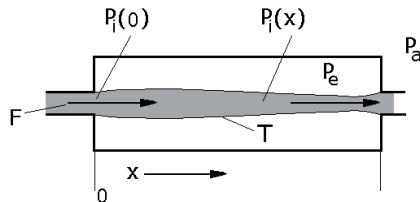


Fig. II.41 - Tubo elástico  $T$ , situado numa câmara com pressão  $P_e$ , percorrido por um caudal gasoso em regime laminar  $F$ , com a pressão  $P_i(x)$  no seu interior.  $P_a$  é a pressão atmosférica.

Se para cada uma das curvas  $F [P_{ib}(0)]$  considerarmos os pontos para os quais  $P_{eb} = P_{ib}(0)$  e traçarmos a curva que une estes pontos, obtém-se a curva a traço cheio médio, da Fig. II.42.

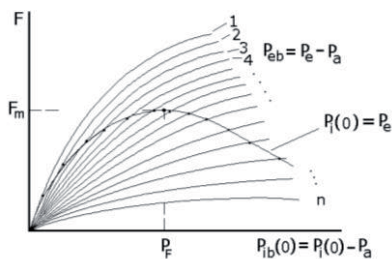


Fig. II.42 - A cheio fino, as curvas do caudal  $F$  vs. a queda total de tensão através do tubo,  $P_{ib}(0) = P_i(0) - P_a$  tendo como parâmetro o valor da pressão barométrica na câmara ( $P_{eb} = P_e - P_a$ ). A cheio médio o lugar geométrico dos pontos  $F[P_{ib}(0)]$  para os quais  $P_e = P_i(0)$ . Nas curvas 1, 2, 3,...i,...n os valores do parâmetro  $P_{eb}$  são crescentes com  $i$ .

Esta curva representa valores de caudal em função de  $P_{ib}(0)$ , mas com  $P_e = P_i(0)$ , ou seja, a curva que seria obtida para estas variáveis, com o sistema da Fig. II.43, onde o anel perfurado  $S$ , suporta a membrana e permite ter  $P_e = P_i(0)$ .

Esta curva apresenta um máximo para o caudal  $F_m$  que ocorre para o valor de abscissa  $P_f$ . Este máximo resulta da dupla acção do aumento de  $P_e = P_i(0)$ , ou seja, o aumento do caudal e da acção constritora sobre a parede elástica. Para pressões baixas predomina o primeiro efeito, para pressões elevadas, o segundo. Estamos a considerar valores positivos de  $P_{eb}$  pois os valores negativos, equivalem ao caudal gasoso em sentido inverso, não ocorrendo extremos na curva, nesta região.

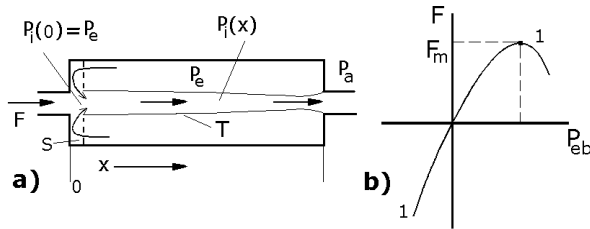


Fig. II.43 - a) Sistema onde o anel perfurado **S** suporta a membrana e permite ter  $P_e = P_i(0)$ ; b) Curva  $F(P_{eb})$ .

Para aproximar mais o modelo da situação real do movimento do gás nas vias aéreas, interessa adicionar uma resistência hidrodinâmica  $R_H$ , em série, que vai representar, sobretudo, o comportamento dos tubos rígidos das vias aéreas (traqueia e tubos das últimas gerações), Fig. II.44. A curva 2 é a curva total da série e a curva 3 é da componente resistiva, uma recta como seria de esperar. A curva 2 é a soma das curvas 1 e 3.

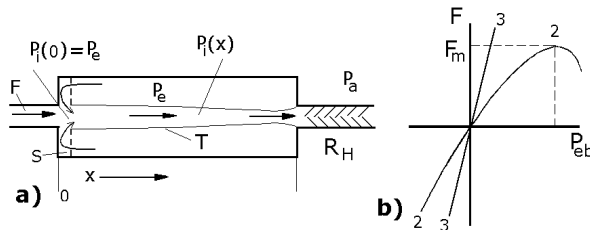


Fig. II.44 - a) Sistema da Fig. II adicionada de um componente resistivo,  $R_H$ ; b) Curva  $F(P_{eb})$  para o sistema (2) e para  $R_H$  (3).

Finalmente considere-se o modelo da Fig. II.45. O tubo **T** que utilizámos na Fig. II.44, encontra-se agora colocado numa câmara estanque elástica **E**, de volume **V**. O tubo e a câmara estão ligados de forma elástica, sendo esta ligação representada por molas fixadas nestes elementos.

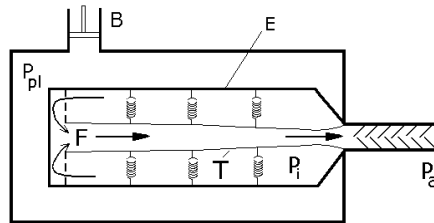


Fig. II.45 - O tubo **T** da Fig. II.44 encontra-se colocado numa câmara estanque elástica **E** de volume **V**. O tubo e a câmara estão ligados de forma elástica sendo esta ligação representada por molas fixadas nestes elementos.

Quando o êmbolo **B** é deslocado, varia a pressão **P<sub>pl</sub>** e também a pressão **P<sub>i</sub>**, por deformação de **E**. Se **P<sub>pl</sub>** > **P<sub>i</sub>** a câmara **E** colapsa, ocorrendo dilatação na situação oposta. A pressão **P<sub>i</sub>** é transmitida ao início do tubo **T** originando caudal gasoso que depende de **P<sub>pl</sub>**, e pode ser nos dois sentidos. A pressão a actuar efectivamente na parede **E** é **P<sub>pl</sub>** - **P<sub>i</sub>**, que pode ser positiva ou negativa. Esta diferença de pressão está relacionada com o volume **V** da câmara **E** de forma linear, pela equação

$$P_{pl} - P_i = a(V - V_0) \quad \text{II.91}$$

onde **a** é uma constante que depende das características de **E** e **V<sub>0</sub>** o volume da câmara quando **P<sub>pl</sub>** = **P<sub>i</sub>**. Quando **V** aumenta, cresce também o raio do tubo **T**, diminuindo a resistência hidrostática.

Para valores constantes do volume **V** (ou da diferença de pressão **P<sub>pl</sub>** - **P<sub>i</sub>**), pode obter-se uma família de curvas do caudal **F** em função de **P<sub>i</sub>** (Fig. II.46).



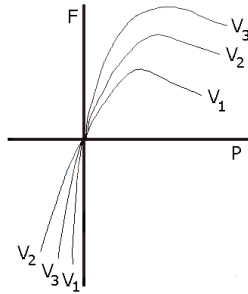


Fig. II.46 - Família de curvas do caudal  $F$  em função de  $P_i$  valores constantes do volume  $V$  (ou da diferença de pressão  $P_{pl} - P_i$ ).

O valor máximo (caudal máximo) destas curvas aumenta com o valor do parâmetro  $V$ , ocorrendo também aumento dos valores de  $P_i$ , para os quais ocorrem os máximos. O primeiro destes factos resulta da diminuição de resistência, com o aumento de  $V$ .

Sendo conhecida a Eq. II.91 que nos permite saber o valor de  $P_{pl} - P_i$ , para cada  $V$ , e usando a Fig. II.46, podemos traçar curvas de  $F$  em função de  $P_{pl}$ , cujos perfis se encontram na Fig. II.47.

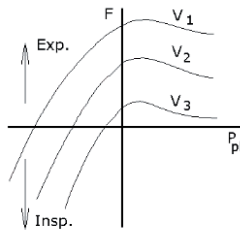


Fig. II.47 - Curvas de  $F$  em função de  $P_{pl}$  para valores constantes do volume  $V$  obtidas a partir das curvas da Fig. II.46.

As curvas do caudal aéreo em função da pressão intratorácica (ou interpleural), para valores constantes do volume pulmonar, no aparelho respiratório humano normal, são idênticas às da Fig. II.47. O modelo da Fig. II.45 simula, com boa aproximação, o comportamento mecânico do pulmão.

(Página deixada propositadamente em branco)

---

**CAPÍTULO • III**



**CONCEITOS ELEMENTARES DE MECÂNICA  
E BIOMECÂNICA**

---

(Página deixada propositadamente em branco)

### III.1 - Conceitos elementares de mecânica

O estudo da Mecânica usa os conceitos básicos de espaço, massa e tempo e assenta em seis princípios, obtidos através da evidência experimental, que aceitaremos como válidos. Estes princípios, que vamos considerar em seguida, são as três leis fundamentais de Newton, a regra do paralelogramo para a adição de forças, o princípio da transmissibilidade e a lei de Newton da gravitação.

#### III.1.1 - 1ª Lei de Newton

*Um ponto material mantém-se em repouso ou em movimento rectilíneo e uniforme até que uma força modifique estas condições (Princípio da Inércia).*

Na realidade o Princípio da Inércia concretiza o nosso conceito de força. A primeira sensação de força é dada pelo esforço muscular. Sabe-se que para pôr um corpo em movimento, é necessário exercer um esforço sobre ele e que o movimento resultante terá uma orientação e amplitude que depende do esforço. A noção de força como grandeza vectorial é, assim, também intuitiva.

Resulta do Princípio da Inércia que um ponto material, sobre o qual não está aplicada qualquer força ou conjunto de forças com resultante não nula, terá, necessariamente, aceleração nula. Mas, se ao ponto material se aplicar uma força, ele adquire aceleração pois a velocidade do seu movimento de translação variará em módulo e/ou em direcção.

#### III.1.2 - 2ª Lei de Newton

*Uma força isolada ou fazendo parte de um sistema de forças aplicado a um ponto material comunica-lhe uma aceleração na direcção e sentido da força e de módulo proporcional ao módulo da força.*

Se num ponto material está aplicada a força  $\vec{F}$  e for  $\vec{j}$  a aceleração adquirida pelo ponto, devido à acção da força, verifica-se que

$$\vec{F} = m \vec{j}$$

A grandeza  $m$  que depende somente do ponto material considerado é um escalar, um número real positivo a que se chama massa (de inércia) do ponto material. O produto de um escalar por um vector é um vector com módulo igual ao módulo do escalar vezes a intensidade do vector. A direcção do vector produto é a do vector factor e o sentido é também o mesmo, se o escalar for positivo, contrário na outra alternativa.

Deste princípio resulta que se várias forças actuam simultaneamente sobre um ponto material de massa  $m$  cada uma delas actua como se estivesse isolada<sup>1</sup>. A força  $\vec{F}_1$ , corresponderá a aceleração  $\vec{j}_1$ , à força  $\vec{F}_2$  corresponderá a aceleração  $\vec{j}_2$ , etc., tal que

$$\vec{F}_1 = m \vec{j}_1, \quad \vec{F}_2 = m \vec{j}_2, \quad \vec{F}_3 = m \vec{j}_3, \dots$$

O ponto material adquire a aceleração

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3 + \dots = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \frac{\vec{F}_3}{m} + \dots = \\ &= \frac{1}{m} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = m \vec{j}$$

ou

$$\vec{F} = m \vec{j}$$

onde  $\vec{F}$  é a resultante das forças aplicadas sobre o ponto material.

Isto quer dizer que o movimento do ponto material é o mesmo que teria se sobre ele só estivesse aplicada a resultante das forças.

---

<sup>1</sup> Ponto material é um corpo cujas dimensões são desprezáveis à escala do fenómeno em estudo e para o qual se podem considerar todas as forças a actuar no mesmo ponto de aplicação.

### III.1.3 - 3ª Lei de Newton

*As acções mútuas de dois pontos materiais quaisquer são iguais e directamente opostas (Princípio da Igualdade de Acção e Reacção).*

### III.1.4 - Regra do paralelogramo para a adição de forças

*Duas forças actuando simultaneamente num ponto material podem ser substituídas por uma única força (força resultante) que é o vector com ponto de aplicação no ponto e de módulo igual à diagonal do paralelogramo obtido com as forças consideradas (ver Fig. III.1).*

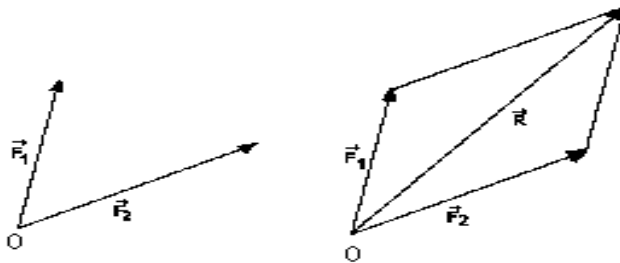


Fig. III.1 - As forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  aplicadas simultaneamente no ponto O podem ser substituídas pela resultante  $\vec{R}$  obtida pela regra do paralelogramo.

Uma alternativa à regra do paralelogramo é a regra do triângulo de forças. Como os lados de um paralelogramo são iguais dois a dois a soma dos vectores da Fig. III.1 pode obter-se aplicando no extremo de  $\vec{F}_1$  e considerando como soma o vector  $\vec{R}$  que une o ponto de aplicação de  $\vec{F}_1$  com o extremo de  $\vec{F}_2$  (Fig. III.2). O mesmo resultado é obtido considerando os lados inferiores do paralelogramo da Fig. III.1, ou seja, aplicando  $\vec{F}_1$  no extremo de  $\vec{F}_2$  e considerando como soma o vector  $\vec{R}$ . A propriedade comutativa da adição de vectores é assim verificada já que  $\vec{F}_2 + \vec{F}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  (Fig. III.2).

Esta regra pode ser generalizada à soma de um número qualquer  $n$  de vectores. Procede-se de modo idêntico ao do caso dos dois vectores, ou seja, aplica-se  $\vec{F}_i$  no extremo de  $\vec{F}_{i-1}$  e considera-se, como soma, o vector  $\vec{R}$  que une o ponto de aplicação de  $\vec{F}_1$  com o extremo de  $\vec{F}_n$ , obtendo-se assim um polígono de forças ( $i$  é uma variável corrente, que pode ter qualquer valor inteiro de 1 a  $n$ ).

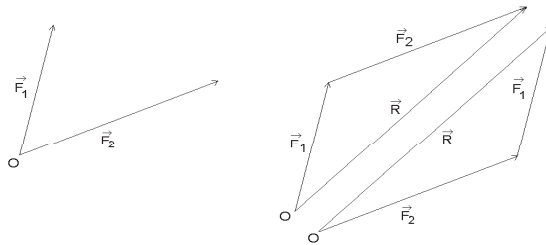


Fig. III.2 - A resultante  $\vec{R}$  das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  aplicadas simultaneamente no ponto O pode ser obtida pela regra do triângulo de forças. Considera-se como soma o vector que une o ponto de aplicação de uma das forças com o extremo da outra, depois de aplicada esta no extremo da primeira.

A Fig.III.3 considera a aplicação da regra do polígono de forças a um caso com  $n=4$ .

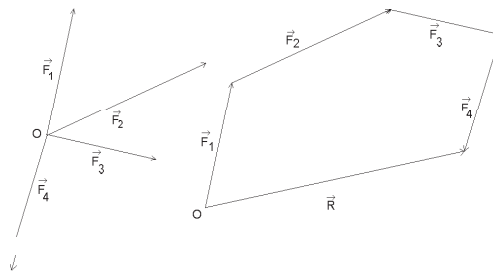


Fig. III.3 - A resultante  $\vec{R}$  das forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  aplicadas simultaneamente no ponto O pode ser obtida pela regra do polígono de forças. Considera-se como soma o vector com origem em O e que fecha o polígono depois de aplicadas as forças sucessivamente no extremo das anteriores.



A generalização da regra do polígono de forças para as três dimensões, ou seja, para uma distribuição não plana de forças, é imediata.

Da regra do paralelogramo resulta que qualquer força, actuando sobre um ponto material, pode ser decomposta em componentes segundo duas direcções. Nas Figs. III.1 e III.2 o vector  $\vec{R}$  pode ser decomposto nas componentes  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  ou projecções de  $\vec{R}$ , segundo as direcções das respectivas linhas de acção.

O problema da decomposição de uma força em componentes pode ser posto conhecendo as direcções das linhas de acção, como vimos, ou supondo conhecida uma das componentes. A regra do triângulo torna a solução deste caso óbvia.

De grande importância é a decomposição de um vector em componentes rectangulares, ou seja, segundo direcções perpendiculares entre si, que se supõe constituírem um sistema de eixos rectangulares orientados. Na Fig. III.4-a) podem observar-se as componentes vectoriais rectangulares,  $\vec{F}_x$  e  $\vec{F}_y$ , da força  $\vec{F}$  do primeiro quadrante, no plano, obedecendo à relação  $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ .

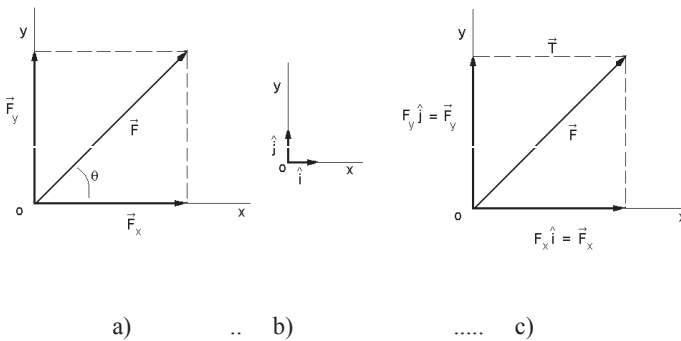


Fig. III.4 - A força  $\vec{F}$  é decomposta em componentes vectoriais rectangulares  $\vec{F}_x$  e  $\vec{F}_y$  aplicadas no ponto 0, utilizando a regra do paralelogramo. Considerando os vectores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  segundo os eixos podem ser usadas as componentes escalares  $F_x$  e  $F_y$  de  $\vec{F}$ .

Os eixos coordenados podem ser traduzidos por vectores unitários ou versores, vectores de módulo unitário, com a direcção dos eixos e o sentido positivo crescente, respectivamente  $\hat{\mathbf{i}}$  e  $\hat{\mathbf{j}}$  para abcissas e ordenadas (Fig. III.4-b). Designando as coordenadas do extremo do vector  $\vec{\mathbf{F}}$ , por  $F_x$  e  $F_y$  podemos escrever para as suas componentes vectoriais (Fig. III.4-c):

$$\vec{F}_x = F_x \hat{\mathbf{i}} \quad \text{e} \quad \vec{F}_y = F_y \hat{\mathbf{j}} \quad \text{III.2}$$

donde

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} \quad \text{III.3}$$

Os escalares  $F_x$  e  $F_y$  são as componentes escalares do vector  $\vec{\mathbf{F}}$  que podem ser positivas, negativas ou nulas.

As relações seguintes são facilmente retiradas da Fig. III.4.

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad F_y = F_x \operatorname{tg} \theta \quad \text{III.4}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{III.5}$$

e Consideremos um sistema de  $n$  forças,  $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \dots, \vec{\mathbf{F}}_i, \dots, \vec{\mathbf{F}}_n$  aplicadas num ponto material situado em  $\mathbf{0}$ , origem de um sistema de eixos rectangulares. As componentes vectoriais dos mesmos vectores segundo os eixos referidos são:

$$\vec{F}_{1x} = F_{1x} \hat{\mathbf{i}} \quad \vec{F}_{1y} = F_{1y} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{F}_{2x} = F_{2x} \hat{\mathbf{i}} \quad \vec{F}_{2y} = F_{2y} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{F}_{ix} = F_{ix} \hat{\mathbf{i}} \quad \vec{F}_{iy} = F_{iy} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{F}_{nx} = F_{nx} \hat{i} \quad \vec{F}_{ny} = F_{ny} \hat{j}$$

A resultante das forças aplicadas em  $\mathbf{0}$  é:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n$$

Substituindo as forças pelas suas componentes vectoriais, vem:

$$\vec{F} = \vec{F}_{1x} + F_{1y} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{ix} + \vec{F}_{iy} + \dots + \vec{F}_{nx} + \vec{F}_{ny}$$

Entrando com as componentes escalares, temos:

$$\vec{F} = F_{1x} \hat{i} + F_{1y} \hat{j} + F_{2x} \hat{i} + F_{2y} \hat{j} + \dots$$

$$+ F_{ix} \hat{i} + F_{iy} \hat{j} + \dots + F_{nx} \hat{i} + F_{ny} \hat{j}$$

Pondo em evidência os vectores unitários segundo os eixos

$$\vec{F} = (F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{ix} + \dots + F_{nx}) \hat{i} + (F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{iy} + \dots + F_{ny}) \hat{j}$$

$$= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad \text{III.6}$$

Conclui-se que as componentes escalares  $F_x$  e  $F_y$  da resultante  $\vec{F}$  de um sistema de forças actuando num ponto são as somas algébricas das correspondentes componentes escalares das forças do sistema.

Em termos práticos, conhecendo as componentes escalares das forças do sistema calcula-se  $F_x$  e  $F_y$  através da Eq. III.6. O módulo da resultante,  $|\vec{F}|$  e a sua inclinação em relação ao eixo dos  $xx$  obtém-se directamente através das Eqs. III.4 e III.5.

### III.1.5 - Princípio da transmissibilidade

*A situação de movimento ou de equilíbrio de um corpo indeformável não é alterada se uma força actuar num dos seus pontos for deslocada, ao longo da sua linha de acção, para outro ponto do corpo.*

Consideremos um sólido indeformável ou rígido<sup>2</sup>, representado na Fig. III.5, e actuado pela força  $\vec{F}$ , aplicada no ponto A.

Se aplicarmos no ponto B do sistema duas forças iguais e directamente opostas nada alteramos no sistema. Consideremos o caso das forças  $\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}_1$  aplicadas em B, serem colineares com  $\vec{F}$  e possuírem módulos iguais ao módulo de  $\vec{F}$ .

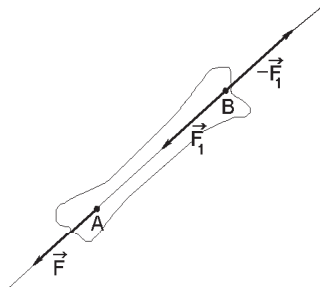


Fig. III.5 - Sólido indeformável actuado por um sistema de forças colineares de resultante F.

Sendo o sólido indeformável, a força  $\vec{F}$  é anulada pela força  $-\vec{F}_1$  pelo que a força  $\vec{F}_1$  substitui em tudo a força  $\vec{F}$ . Esta conclusão prevalece para qualquer ponto B do sólido, desde que este se encontre na linha de acção de  $\vec{F}$ . Ou seja, o efeito de uma força sobre o sólido indeformável é independente do ponto da linha de acção onde esta actua. Esta associação da força à linha de acção, no caso da força actuando sobre um sólido indeformável, é

<sup>2</sup> Sólido indeformável ou rígido é aquele em que as distâncias entre quaisquer dois pontos se mantêm constantes.

muito importante. Quando, por exemplo, actuam duas forças de igual módulo mas de sentidos contrários sobre um sólido indeformável, este só estará em equilíbrio se as duas forças tiverem uma linha de acção comum.

Consideremos duas forças paralelas iguais mas de sentidos contrários, aplicadas a um sólido indeformável. Embora a resultante das forças seja nula, o sólido não estará em equilíbrio pois ficará sujeito a um movimento de rotação. Um par de forças nestas condições constitui um binário.

### III.1.6 - Lei de Newton da gravitação

*Dois pontos materiais de massas  $m_1$  e  $m_2$  atraem-se mutuamente com forças, iguais e opostas, com intensidade proporcional ao valor das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. As forças têm a direcção da linha que une os dois pontos.*

A expressão da intensidade das forças pode escrever-se

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{III.7}$$

onde  $r$  é a distância entre os pontos e  $G$  uma constante conhecida por constante de gravitação.

Nos problemas que iremos considerar, as condições de equilíbrio irão estar presentes com frequência. Um ponto material diz-se em equilíbrio quando as forças aplicadas sobre ele não lhe comunicam qualquer aceleração. Conclui-se, portanto, que para um ponto material estar em equilíbrio é condição (necessária e suficiente) que a resultante das forças sobre ele aplicadas seja nula.

Para o caso de um sistema material, constituído por um conjunto de pontos, podemos dizer que tal sistema estará em equilíbrio quando todos os seus pontos materiais estiverem em equilíbrio, ou seja, a soma das forças aplicadas em cada ponto seja nula. Um sólido é um conjunto de pontos tão próximos que podemos considerá-lo como um meio contínuo.

Há que distinguir dois tipos distintos de forças a actuar num sólido:

- a) As forças externas que representam acções sobre o sólido provenientes do exterior.
- b) As forças internas que são responsáveis pela estrutura do sólido e resultam da interacção entre as suas partículas constituintes ou entre as partes que, ligadas entre si, formam o sólido.

Quando se consideram as acções de forças *externas* sobre sólidos há que distinguir efeitos externos e internos:

- Os efeitos externos sobre o sólido traduzem-se pela alteração da velocidade;
- Os efeitos internos traduzem-se pelo aparecimento de *esforços*, que podem originar deformação.

Num sólido indeformável os efeitos internos são desprezáveis.

Quando se estudam os efeitos externos das forças sobre sólidos indeformáveis é por vezes possível substituir as forças distribuídas a actuar sobre uma superfície ou volume por uma força única a actuar num só ponto. É o caso das forças distribuídas a actuar na cabeça do fémur de um indivíduo em pé, que podem ser substituídas por uma só força  $\vec{F}$ .

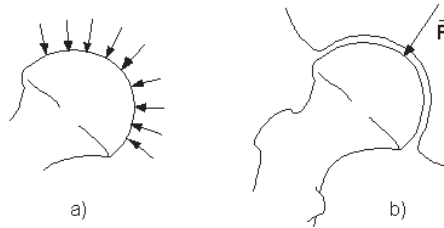


Fig. III.6 - a) Forças distribuídas a actuar na cabeça do fémur de um indivíduo em pé e b) a força  $\vec{F}$  equivalente.

Isto deve-se à simetria do sistema de forças com as linhas de acção praticamente convergentes num ponto. Outro exemplo de um sistema de forças nestas condições ocorre no côndilo da mandíbula, na articulação temporomandibular.

### III.2 - Momento de uma força em relação a um ponto

Antes de prosseguirmos com as condições de equilíbrio para os sólidos, recordemos a noção de momento de uma força em relação a um ponto, que está associada aos movimentos de rotação produzidos por forças sobre sólidos. Esta noção tem interesse em Biologia pois numerosas são as situações onde a força muscular é usada para fazer rodar ossos em torno de pontos fixos.

Na mandíbula de um animal (réptil primitivo) representado na Fig. III.7, um músculo exercia a força  $\vec{F}$  que fazia rodar o osso em torno da articulação A, com o sentido indicado pela seta curva, apertando os dentes contra o alimento com uma força  $-\vec{P}$ .

O momento de uma força em relação ao ponto é uma grandeza vectorial que mede o efeito rotativo da força em torno do ponto. O momento da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto A é o vector  $\vec{M}$ , cuja grandeza é igual ao produto do módulo da força por  $b$ , distância na perpendicular do ponto à linha de acção da força,  $LL'$ .

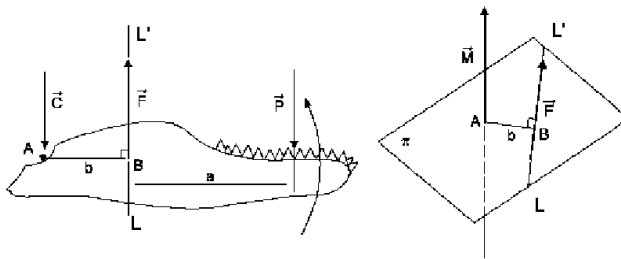


Fig. III.7 - Definição de momento  $\vec{M}$  da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto A.

A direcção do vector momento  $\vec{M}$  é perpendicular ao plano  $\pi$ , que contém a força  $\vec{F}_1$  e o ponto A.

O sentido do vector momento é o que aponta para o lado do plano  $\pi$ , em que um observador vê a força  $\vec{F}$  produzir rotação, em torno de A, em sentido directo.

O vector momento,  $\vec{M}$ , considera-se aplicado no ponto A.

Torna-se claro que quanto maior for o valor de  $\vec{F}$ , maior será a acção trituradora da mandíbula. O vector  $\vec{C}$  é a força que os ossos da face exercem sobre a mandíbula na charneira A e  $\vec{P}$  é a força que o alimento exerce sobre a mandíbula.

O equilíbrio de forças é dado pela equação

$$\vec{C} + \vec{P} + \vec{F} = 0$$

O equilíbrio de momentos, considerados em relação à charneira **A** é dado pela equação

$$P (a + b) = F b$$

donde

$$F = P (a/b + 1)$$

pelo que o músculo terá de ser muito forte. Considerando os momentos em relação ao ponto **B**, ponto de aplicação de  $\vec{F}$ , vem

$$C b = P a$$

ou

$$C = P a/b$$

indicando uma reacção considerável na charneira durante a mastigação.

Na Fig. III.8 podemos ver outra mandíbula de réptil fósil, posterior na escala de evolução ao da Fig. III.7, este já com a contribuição de dois músculos, originando as forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , responsáveis pelo movimento de rotação da mandíbula em torno do ponto **A**. Considerando isoladamente a acção destas forças, o vector momento resultante da sua acção,  $\vec{M}_R$ , é a soma dos momentos de cada uma das forças, em relação a **A**.

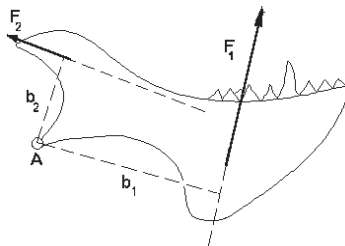


Fig. III.8 - O momento resultante, em relação ao ponto **A**, das duas forças, é perpendicular ao plano da figura, aponta para este lado do papel e tem módulo  $F_1 b_1 + F_2 b_2$ .



Os momentos das forças  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  em relação a **A** são vectores perpendiculares ao plano da figura, apontam para este lado do papel e são aplicados em **A**. As duas forças produzem efeitos de rotação com o mesmo sentido em torno de **A**. O vector  $\vec{M}_R$  tem como módulo:

$$|\vec{M}_R| = F_1 b_1 + F_2 b_2$$

### III.3 - Produto vectorial

Voltando agora à Fig. III.7 consideremos o vector posição da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto **A**, ou seja, um vector  $\vec{r}$  com origem em **A** e a terminar em **B**.

O produto vectorial de dois vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  concorrentes (cujas linhas de acção se cruzam) num ponto **A** é um vector  $\vec{V}$  que:

- 1º- É perpendicular ao plano  $\pi$  definido por  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ ;
- 2º- Tem por módulo o produto  $rF \sin\theta$ , (com **r** e **F** os módulos dos vectores factores e  $\theta$  o ângulo ( $< 180^\circ$ ) entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ ) e
- 3º- O sentido do vector produto é o que aponta para o lado do plano  $\pi$  em que um observador vê o vector  $\vec{r}$  descrever o ângulo  $\theta$  sobre  $\vec{F}$  em sentido directo. Este produto exprime-se pela equação

$$\vec{V} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{III.8}$$

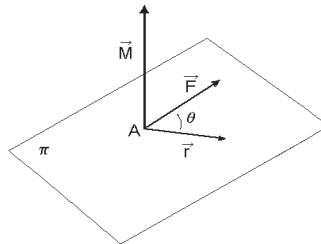


Fig. III.9 - Definição de produto vectorial  $\vec{V}$  de dois vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ .

Algumas propriedades do produto vectorial são imediatas:

- Se dois vectores têm a mesma direcção ( $\theta = 0$  ou  $\pi$ ) o seu produto vectorial é nulo.
- O produto vectorial tem por módulo a área do paralelogramo de lados  $r$  e  $F$  (igual à do rectângulo de lados  $r \sin \theta$  e  $F$ ).
- A propriedade comutativa não se verifica no produto vectorial. De facto

$$\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r} \quad \text{III.9}$$

- Pode provar-se, quanto às outras propriedades do produto, que a propriedade distributiva é verificada, mas não a associativa, ou seja

$$\vec{F} \times (\vec{V} + \vec{S}) = \vec{F} \times \vec{V} + \vec{F} \times \vec{S} \quad \text{III.10}$$

e

$$(\vec{F} \times \vec{V}) \times \vec{S} \neq \vec{F} \times (\vec{V} \times \vec{S}) \quad \text{III.11}$$

### III.3.1 - Representação do momento por produto vectorial

O momento de uma força em relação a um ponto pode ser expresso utilizando o produto vectorial. Tem-se que o momento  $\vec{M}$  do vector  $\vec{F}$  em relação ao ponto  $A$  é dado

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

A linha de acção de  $\vec{M}$  representa o eixo em torno do qual o sólido, se tivesse o ponto A fixo, rodaria sob a acção de  $\vec{F}$ .

Consideremos a força  $\vec{F}$ , da Fig. III.10 suposta a actuar no ponto C de um sólido rígido.

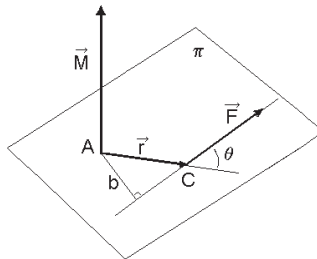


Fig. III.10 - O momento de  $\vec{F}$  em relação ao ponto A pode obter-se utilizando o produto vectorial do vector posição  $\vec{r}$  com  $\vec{F}$ .

O momento de  $\vec{F}$  em relação ao ponto A, ponto fixo do sólido, pode obter-se utilizando o produto vectorial do vector posição  $\vec{r}$  com  $\vec{F}$ . O vector  $\vec{r}$  define a posição de C em relação a A.

Então

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

e

$$|\vec{M}| = rF \sin\theta = b F$$

O produto vectorial permite assim definir o momento de uma força de um modo mais prático e imediato do que a utilizada anteriormente.

A propriedade distributiva do produto vectorial pode ser utilizada para determinar o momento da resultante de várias forças  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \dots$  concorrentes num ponto C.

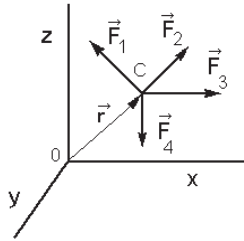


Fig. III.11 - Forças concorrentes aplicadas no ponto C.

De facto

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \dots) = r \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \vec{r} \times \vec{F}_4 \dots \quad \text{III.12}$$

que significa que o momento em relação a um ponto da resultante de um sistema de forças concorrentes é igual à soma dos momentos das forças do sistema em relação ao mesmo ponto. Esta propriedade é conhecida por teorema de Varignon.

Na Fig. III.11 considerámos uma situação tridimensional, ou seja, não condicionámos as forças a situarem-se num único plano. A decomposição de um vector em componentes vectoriais pode ser estendida ao caso dos três eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Consideremos a força  $\vec{F}$  aplicada em  $\mathbf{0}$  (Fig. III.12). A força  $\vec{F}$  define planos com cada um dos eixos coordenados e, nesses planos, surgem ângulos entre o vector e os mesmos eixos, respectivamente  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ .

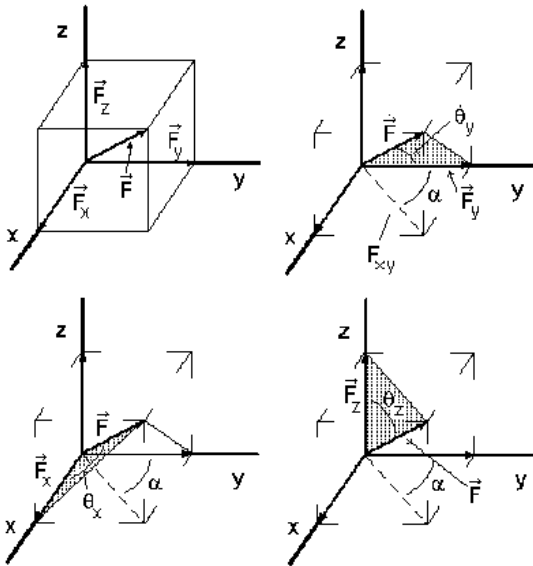


Fig. III.12 - Projecção da força  $\vec{F}$  sobre os três eixos coordenados.

As relações que fornecem as componentes escalares de  $\vec{F}$ , em relação aos três eixos, são, assim, óbvias (Fig. III.11)

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad \text{III.13}$$

Os cosenos dos ângulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$  são os cosenos directores da direcção orientada, definida pelo vector  $\vec{F}$ . Por outro lado, considerando o triângulo com catetos  $F_z$  e  $F_{xy}$  (Figs. III.12 e III.13), podemos escrever

$$F^2 = F_{xy}^2 + F_z^2$$

E, para qualquer dos triângulos no plano xoy, temos

$$F_{xy}^2 = F_x^2 + F_y^2$$

pelo que, eliminando  $F_{xy}^2$  entre as duas equações

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \quad \text{III.14}$$

Na Fig. III.13 observamos que é possível aplicar a regra do polígono de forças às componentes vectoriais de  $\vec{F}$  obtendo

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_x + F_y + \vec{F}_z \\ &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \end{aligned} \quad \text{III.15}$$

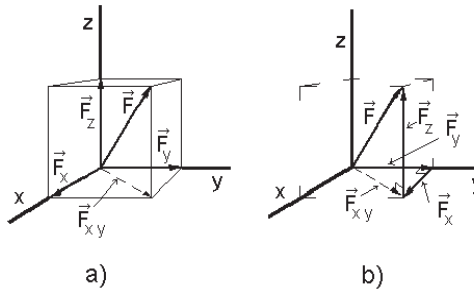


Fig. III.13 - a) Projecção de  $\vec{F}$  no plano XOY. b) Regra do polígono de forças aplicada às componentes vectoriais de  $\vec{F}$ .

### III.4 - Produto vectorial e momento em termos de componentes rectangulares

258

Considerem-se dois vectores  $\vec{V}$  e  $\vec{F}$ , e calculemos o seu produto vectorial em termos das suas componentes vectoriais num sistema de eixos coordenados xyz.

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{V} \times \vec{F} = [V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}] \times [F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}] \\ &= P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k} \end{aligned}$$

No referencial cartesiano aqui usado, os eixos coordenados são orien-

tados, de modo aos vectores unitários  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  formarem uma tríade positiva ou directa, como temos vindo a adoptar.

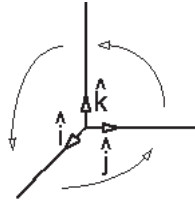


Fig. III.14 - Os produtos vectoriais dos vectores unitários, segundo os eixos de uma tríade positiva.

Numa tríade positiva (Fig. III.14), cada um dos três vectores unitários  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  transforma-se no seguinte por rotação de  $90^\circ$  em sentido directo em torno do terceiro, ou seja, por exemplo, rodando de  $90^\circ$ , em sentido directo,  $\hat{i}$  em torno de  $\hat{k}$ , obtém-se  $\hat{j}$ .

Verificamos que:

$$\begin{array}{lll} \hat{i} \times \hat{i} = 0 & \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} & \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{j} = 0 & \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} & \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{k} = 0 & \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} & \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \end{array}$$

então, desenvolvendo a equação anterior obtém-se:

$$\vec{P} = \vec{V} \times \vec{F} = [V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}] \times [F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}] = [P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}]$$

com

$$\begin{array}{l} P_x = V_y F_z - V_z F_y \\ P_y = V_z F_x - V_x F_z \\ P_z = V_x F_y - V_y F_x \end{array} \quad \text{III.16}$$

Retomemos a expressão do momento de uma força em relação a um

ponto, tomado como origem das coordenadas e consideremos as componentes rectangulares dos vectores envolvidos.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = [x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}] \times [F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}] = [M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}]$$

$$M_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

Provaremos que estas componentes medem a tendência que a força  $\vec{F}$  tem de imprimir rotação, segundo as direcções dos eixos dos xx, yy e zz.

### III.5 - Produto escalar

Produto escalar entre dois vectores, fazendo entre si um ângulo  $\theta$  ( $\leq 180^\circ$ ), é um escalar dado pela equação:

$$\vec{V} \cdot \vec{F} = p = V F \cos \theta \quad \text{III.17}$$

Considerando as componentes dos vectores  $\vec{V}$  e  $\vec{F}$  segundo os eixos, vem

$$p = [V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}] \cdot [F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}]$$

$$= V_x F_x + V_y F_y + V_z F_z \quad \text{III.18}$$

já que

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

O produto escalar de um vector por um vector unitário, segundo uma dada direcção, representa a componente escalar do vector, segundo essa direcção; de facto, para os eixos coordenados vêm:



$$\vec{V} \cdot \hat{i} = V \cos \theta_x = V_x$$

$$\vec{V} \cdot \hat{j} = V \cos \theta_y = V_y$$

$$\vec{V} \cdot \hat{k} = V \cos \theta_z = V_z$$

De um modo geral, para um eixo orientado qualquer, definido pelo vector unitário  $\hat{i}$ , temos  $\vec{V} \cdot \hat{i} = V \cos \theta_1$ , sendo  $\theta_1$  o ângulo que  $\vec{V}$  faz com  $\hat{i}$ .

O produto escalar goza da propriedade comutativa, como deriva da própria definição

$$\vec{V} \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad \text{III.19}$$

A propriedade distributiva do produto escalar

$$\vec{V} \cdot (\vec{F} + \vec{P}) = \vec{V} \cdot \vec{F} + \vec{V} \cdot \vec{P} \quad \text{III.20}$$

demonstra-se facilmente. Suponhamos que  $\vec{V}$  coincide com o eixo dos yy e que  $\vec{Q} = \vec{F} + \vec{P}$ . Então a Eq. III.20 é:

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot (\vec{F} + \vec{P}) &= V F_y + V P_y \\ &= V (F_y + P_y) = V Q_y \end{aligned} \quad \text{III.21}$$

o que prova a Eq. III.20.

A propriedade associativa não existe, pois não faz sentido escrever  $\vec{V} \cdot (\vec{F} \cdot \vec{P})$  já que o primeiro produto não é produto escalar, mas o produto de um vector por um escalar.

### III.6 - Produto triplo composto

O produto triplo composto de três vectores  $\vec{V}$ ,  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$  é a expressão escalar definida por

$$\vec{V} \cdot (\vec{F} \times \vec{P}) \quad \text{III.22}$$

que não é mais do que o produto escalar entre o vector  $\vec{V}$  e o vector produto vectorial entre  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$  (Fig. III.15).

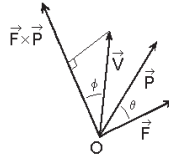


Fig. III.15 - O produto triplo composto de três vectores  $\vec{V}$ ,  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$  é o produto escalar entre os vectores  $\vec{V}$  e  $\vec{F} \times \vec{P}$ .

O produto triplo composto é, em módulo, igual ao volume de um paralelepípedo que tem por lados os 3 vectores do produto. Como se vê na Fig. III.16, o paralelepípedo tem o volume

$$V \cos \phi (F P \sin \theta) \quad \text{III.23}$$

que iguala o módulo do produto triplo composto.

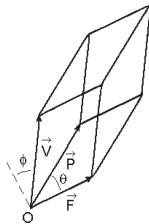


Fig. III.16 - O produto triplo composto é, em módulo, igual ao volume de um paralelepípedo que tem por lados os 3 vectores do produto.

O produto triplo composto é positivo se  $\vec{V}$  e  $(\vec{F} \times \vec{P})$  apontam para o mesmo lado do plano definido pelos vectores  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$ , ou seja, se  $\vec{V}$ ,  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$  formarem uma tríade positiva (tríade da mão direita) e negativo na situação contrária, que corresponde à rotação que leva  $\vec{F}$  a coincidir com  $\vec{P}$  ser vista em sentido contrário ao directo quando vista do lado do plano para que aponta  $\vec{V}$ .

Uma importante propriedade do produto triplo composto é ser nulo sempre que os três vectores intervenientes são coplanares. O produto triplo composto pode ser expresso através das componentes dos vectores intervenientes (Eqs. III.16 e III.18).

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot (\vec{F} \times \vec{P}) &= V_x (F_y P_z - F_z P_y) + \\ &+ V_y (F_z P_x - F_x P_z) + \\ &+ V_z (F_x P_y - F_y P_x) \end{aligned}$$

### III.7 - Momento de uma força em relação a um eixo

Por definição, momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo  $\mathbf{E}$ , orientado pelo vector unitário  $\hat{\lambda}$ , é um vector na direcção do eixo, cuja componente sobre o eixo é o escalar  $M_e$ , projecção sobre o eixo do momento da força em relação a qualquer ponto do eixo (Fig. III.17). Assim, o escalar  $M_e$  vem dado por

$$M_e = \hat{\lambda} \cdot \vec{M}_o = \hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \quad \text{III.24}$$

e o vector momento será

$$\vec{M}_e = M_e \hat{\lambda} = (\hat{\lambda} \cdot \vec{M}_o) \hat{\lambda} = [\hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})] \hat{\lambda}$$

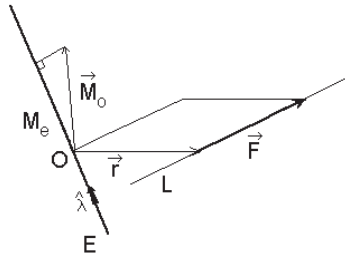


Fig. III.17 -Momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo  $E$  orientado pelo vector unitário  $\hat{\lambda}$ ; o escalar  $M_e$ , é a projecção sobre o eixo do momento da força em relação a um ponto do eixo.

O momento de uma força em relação a um eixo é traduzido por um produto triplo composto (Eq. III.25) de  $\hat{\lambda}$  e  $\vec{r} \times \vec{F}$ . O momento  $\vec{M}_O$  da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto  $O$  do eixo  $E$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \end{aligned}$$

O significado físico do momento de uma força em relação a um eixo torna-se mais evidente se decomposermos o vector  $\vec{F}$  em duas componentes  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , a primeira num eixo  $L$  paralelo a  $E$  e a segunda num plano,  $\pi$ , normal ao eixo  $E$  e contendo a origem da força (Fig. III.18). Este plano corta o eixo  $E$  no ponto  $A$ .

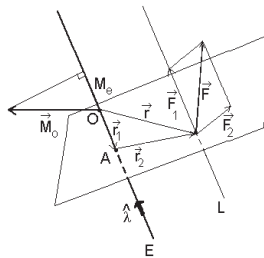


Fig. III.18 - Decomposição do vector  $\vec{F}$  em duas componentes  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , a primeira no eixo  $L$  paralelo a  $E$  e a segunda no plano  $\pi$  normal ao eixo  $E$ .

O momento de  $\vec{F}$  em relação ao eixo, vem

$$\begin{aligned}
 M_e &= \hat{\lambda} \cdot [(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)] \\
 &= \hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + \hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_2) + \hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_1) + \hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) \quad \text{III.25}
 \end{aligned}$$

As três primeiras parcelas da soma são produtos triplos compostos em que os três vectores intervenientes, aplicados num ponto, são coplanares, sendo portanto, nulas. O produto vectorial  $\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$  mede a tendência de rotação do corpo rígido sob a acção da força  $\vec{F}$ , em torno do ponto **A**.

O escalar  $M_e$  mede a tendência do corpo rígido sob a acção da força  $\vec{F}_2$  rodar em torno do eixo **E**.

O produto triplo composto

$$\hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_{eq2})$$

é um escalar positivo se os vectores  $\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$  e  $\hat{\lambda}$ , que são vectores normais a  $\pi$ , tiverem o mesmo sentido.

A força  $\vec{F}_1$  não contribui para o movimento de rotação em torno de **E**, visto ser paralela a este eixo. Então o momento da força  $\vec{F}$ , em relação a um eixo, mede a tendência da força produzir rotação em torno do eixo.

Os momentos de  $\vec{F}$  em relação aos eixos de um sistema de coordenadas são as componentes, segundo os eixos, do momento da força em relação à origem de coordenadas. Já vimos que estas componentes são

$$M_x = yF_z - zF_y \quad \text{III.26}$$

$$M_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

A classificação das articulações no homem, na perspectiva mecânica, baseia-se no número de eixos de rotação que permitem descrever os movimentos possíveis da articulação.

O valor dos momentos máximos em relação a esses eixos, a actuar nas articulações e considerados suportáveis, é também de interesse.

Nas articulações monoaxiais só existe um movimento de rotação. A articulação entre o úmero e o cúbito pertence a esta categoria. De modo semelhante à ligação de duas peças por uma dobradiça, qualquer ponto da parte móvel descreve arcos de circunferência em planos normais ao eixo. Há porém articulações monoaxiais em que o eixo de rotação, contrariamente ao caso anterior, é paralelo à maior dimensão dos ossos móveis. No antebraço o rádio pode rodar em torno do cúbito segundo um eixo longitudinal.

Nas articulações biaxiais todos os movimentos possíveis podem ser obtidos por rotação em torno de dois eixos. A articulação do pulso é deste tipo. Existem ainda articulações triaxiais com movimentos representáveis por rotação em torno de três eixo, como é o caso da articulação da anca.

A estabilidade que os ossos conferem ao corpo é complementada pela mobilidade das articulações. As articulações permitem movimentos de partes do corpo em relação a outras. Numa articulação ocorre ligação entre dois ossos ou entre uma cartilagem e um osso. A união pode ser rígida ou, como vimos, permitir uma liberdade de movimentos muito variável.

### III.8 - Binários

Consideremos um sólido indeformável, sobre o qual actuam simultaneamente duas forças de igual intensidade, que actuam em linhas de acção paralelas e têm sentidos contrários, ou seja, constituindo um binário (Fig. III.19-a e III.19-b).

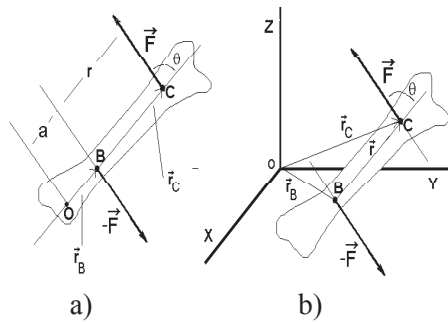


Fig. III.19 - Momento de um binário aplicado a um sólido indeformável. em relação ao ponto O. No caso a) o ponto O situa-se na linha que une os pontos de aplicação das forças. O caso b) é geral.

O momento do binário em relação ao ponto **O**, ou seja, o momento resultante das forças que o constituem em relação a esse ponto é, para os dois casos a) e b):

$$\vec{M}_R = \vec{r}_B \times (-\vec{F}) + \vec{r}_C \times \vec{F} = (\vec{r}_C - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{III.27}$$

Na Fig. III.19 a) os vectores posição  $\vec{r}_B$  e  $\vec{r}_C$  têm por módulo  $a$  e  $(a + r)$  respectivamente.

Qualquer que seja o ponto **O** em relação ao qual se determine o momento, a soma dos momentos das forças consideradas é um vector perpendicular, ao plano que contém os dois vectores  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  (que podemos supor o plano do papel) e de módulo

$$|\vec{M}_R| = F r \sin \theta \quad \text{III.28}$$

O vector momento resultante aponta para o nosso lado do papel, sentido que considerámos positivo. Por não depender da posição do ponto **O**, em relação ao qual é calculado, o vector momento de um binário é um vector livre, enquanto que, por exemplo, o momento de uma força em relação a um ponto é um vector aplicado.

Dois binários com momentos iguais e opostos não exercem qualquer efeito sobre um sólido rígido. Este par de binários equivale a um par de

forças iguais e opostas. De facto, consideremos os dois binários  $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$  com as forças a actuarem respectivamente segundo as linhas de acção  $L_1$  e  $L_2$  e  $L'_1$  e  $L'_2$  (Fig. III.20). Calculemos as resultantes das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  e de  $-\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}_2$  nos pontos de concorrência **A** e **B** das suas linhas de acção.

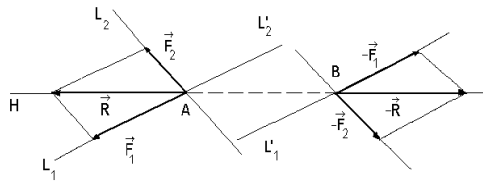


Fig. III.20 - Dois binários com momentos iguais e opostos são equivalentes a um par de forças iguais e opostas.

As resultantes  $\vec{R}$  e  $-\vec{R}$  terão de ser vectores do mesmo módulo, mesma direcção e sentidos opostos. O momento da resultante  $-\vec{R}$  em relação ao ponto **A** tem que ser nulo, pois o momento total é nulo, pelo que  $-\vec{R}$  assenta em **H**.

Conclusão idêntica podemos obter para o momento de  $\vec{R}$  em relação a **B**. Portanto,  $\vec{R}$  e  $-\vec{R}$  terão de estar na mesma linha de acção, o que demonstra o que se pretendia.

### III.8.1 - Sistemas de forças equivalentes

Dois sistemas de forças são equivalentes se têm o mesmo efeito sobre um sólido indeformável, sendo possível transformar um no outro utilizando as operações elementares que conhecemos.

Vamos provar que dois binários com o mesmo momento são equivalentes. Consideremos dois binários  $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$  com o mesmo momento e nos quais as forças actuam respectivamente segundo as linhas de acção  $L_1$



e  $L_1'$  e  $L_2$  e  $L_2'$  (Fig. III.21).

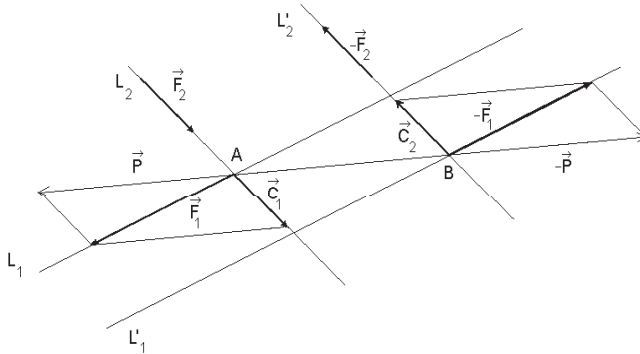


Fig. III.21 - Dois binários com momentos iguais são equivalentes.

Determinemos as componentes vectoriais das forças  $\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}_1$ , nos pontos de concorrência **A** e **B**, respectivamente, segundo as direcções das linhas  $L_2$  e  $\overline{AB}$  e  $L_2'$  e  $\overline{AB}$ . As forças  $\vec{P}$  e  $-\vec{P}$  segundo  $\overline{AB}$  são iguais e opostas, visto serem projecções, segundo a mesma direcção, de forças iguais e opostas, o mesmo sucedendo com as forças  $\vec{C}_1$  e  $\vec{C}_2$ . As primeiras forças situam-se na mesma linha de acção anulando-se. As segundas constituem um binário, cujo momento terá de igualar o momento do binário  $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$ . Obviamente o binário constituído pelas forças  $\vec{C}_1$  e  $\vec{C}_2$  é igual ao constituído pelas forças  $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$  o que prova o pretendido.

### III.8.2 - Soma de binários

Consideremos dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  que se interceptam segundo a linha  $\overline{AB}$  (Fig. III.22).

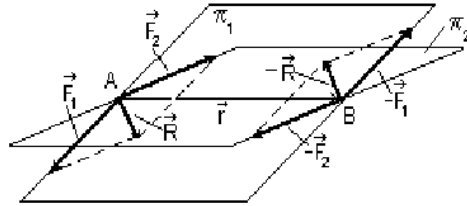


Fig. III.22 - Soma de dois binários.

Suponhamos que qualquer binário  $\vec{M}_1$  actuando em  $\pi_1$  é equivalente ao binário  $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$  com as forças aplicadas em **A** e **B**, e normais a  $\overline{AB}$ . Do mesmo modo, qualquer binário com momento  $\vec{M}_2$  actuando em  $\pi_2$  é redutível ao binário  $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$  igualmente com as forças aplicadas em **A** e **B** normais a  $\overline{AB}$ .

As resultantes de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  e  $-\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}_2$  respectivamente,  $\vec{R}$  e  $-\vec{R}$  formam, por sua vez, um binário. O momento deste binário é o momento de  $\vec{R}$  em relação a **B**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

Pelo teorema de Varignon vem

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{aligned}$$

III.29

A soma de dois binários de momentos  $\vec{M}_1$  e  $\vec{M}_2$  é um binário com momento  $\vec{M}$  soma vectorial de  $\vec{M}_1$  e  $\vec{M}_2$ .

### III.8.3 - Representação de binários por vectores

Binários com o mesmo momento, e situados no mesmo plano, ou em planos paralelos são equivalentes. Nestas condições, o efeito do binário sobre um sólido indeformável fica caracterizado pela direcção e intensidade do correspondente vector momento. Por outro lado, a soma de dois binários é um binário, cujo momento é a soma dos momentos respectivos. Sendo assim, os binários obedecem às leis de adição de vectores e podem ser traduzidos pelos seus vectores momento, pelo que os representaremos como vectores mas com uma seta circular para não serem confundidos com os vectores força.

Um binário pode ser representado de formas diversas. Pelas forças, Fig. III.23 (1), pelo momento normal ao plano do binário, Fig. III.23 (2), pelo momento aplicado na origem dos sistemas de eixos, Fig. III.23 (3) e pelos momentos em relação aos eixos, Fig. III.23 (4).

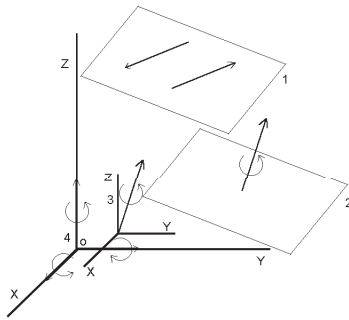


Fig. III.23 - Formas de representar um binário. Pelas forças (1), pelo momento normal ao plano do binário (2), pelo momento aplicado na origem dos sistemas de eixos (3) e pelos momentos em relação aos eixos (4).

Como vimos, os binários obedecem às leis de adição de vectores e podem ser traduzidos pelos seus momentos, pelo que os representaremos por vectores (vectores binários) mas, para não serem confundidos com os vectores força, com uma pequena seta circular, como se vê na Fig. III.23 2) e 4).

### III.9 - Substituição de uma força aplicada num ponto de um sólido rígido por uma força igual, aplicada noutra ponto, mais um binário

Suponhamos que a força  $\vec{F}$  aplicada no ponto **A** de um sólido indeformável se pretende aplicada noutra ponto **O** sem modificar, contudo, a sua acção sobre o sólido. Podemos considerar um par de forças iguais e opostas, aplicadas no ponto **O**, com intensidade igual a  $|\vec{F}|$  e assentes numa linha de acção paralela à força  $\vec{F}$ . Este par de forças não exerce qualquer acção sobre o sólido. A força  $\vec{F}$  aplicada em **A** e  $-\vec{F}$  aplicada em **O** constituem um binário de momento  $\vec{M} = \vec{r} \times F$ , normal ao plano do binário e a apontar para o lado do plano em que se vê  $\vec{r}$  a rodar sobre  $\vec{F}$  segundo um ângulo menor do que  $180^\circ$ .

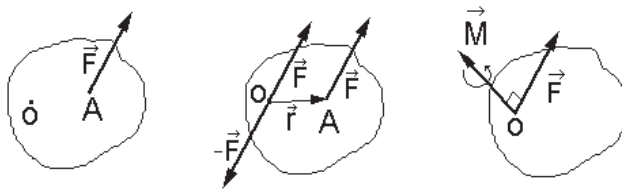


Fig. III.24 - Substituição de uma força aplicada num ponto de um sólido rígido por uma força igual, aplicada noutra ponto, mais um binário.

Podemos considerar o momento **M** aplicado em **O** juntamente com a força  $\vec{F}$ . Este par força-binário aplicado em **O** é equivalente à força  $\vec{F}$  aplicada em **A**.

### III.10 - Redução de qualquer sistema de forças aplicadas num sólido indeformável a uma força e a um binário

Consideremos um sistema de forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  não necessariamente concorrentes, aplicadas num sólido rígido e suponhamos que

interessa reduzir este sistema a acções aplicadas no ponto C (Fig. III.25).

Substituamos, uma a uma, as forças, pelas força e binário equivalentes, aplicados no ponto C. Considerando as resultantes das forças e dos momentos aplicados em C, ficamos com um par força-vector binário equivalente ao sistema de forças inicial, ou seja, que traduz inteiramente a sua acção sobre o sólido.

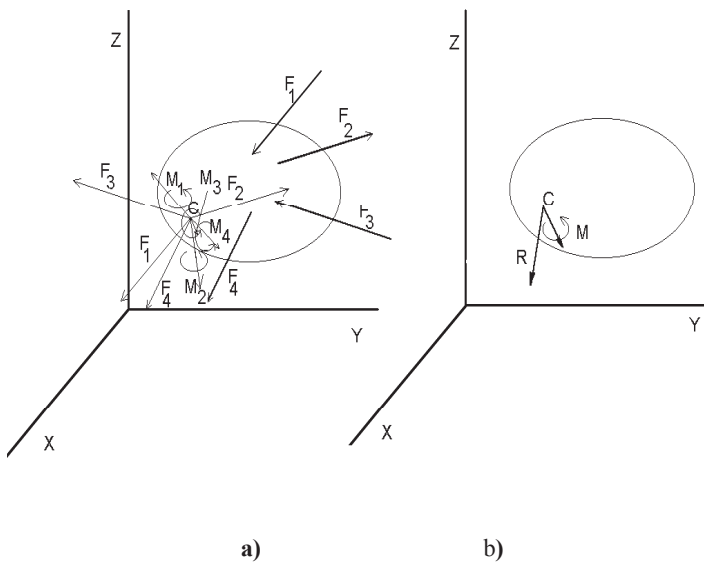


Fig. III.25 - Substituição de um sistema de forças aplicadas num sólido rígido por uma força e um binário aplicados num ponto C do sólido. a) Substituição das forças  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$ , por forças iguais e pelos vectores binários com momentos iguais aos momentos destas forças em relação a C, aplicados neste ponto. b) Resultante das forças e dos vectores binários em C.

### III.11 - Equilíbrio

Já sabemos que quando um corpo se encontra em repouso ou se desloca em movimento uniforme e rectilíneo se diz estar em equilíbrio. A força

total actuante em tal corpo é nula. Na prática, há sempre um certo número de forças a actuar nos corpos. Há o peso do corpo, que é uma força vertical actuando de cima para baixo e produzida pela atracção gravitacional existente entre o corpo e a terra e, no caso simples do corpo, assente num plano horizontal, há também a força de reacção,  $\vec{R}$ , do plano sobre o corpo, actuando verticalmente de baixo para cima. Esta reacção tem de estar presente, pois de contrário nada se opunha a que o corpo passasse através do plano que poderia ser, por exemplo, o tampo de uma mesa.

Pode facilmente provar-se que, no equilíbrio, a intensidade da força de reacção é igual ao peso do corpo e são coincidentes as linhas de acção das duas forças. Com o peso e a reacção iguais mas com linhas de acção não coincidentes não ocorreria equilíbrio, pois tem-se um binário a actuar sobre o corpo. Com a linha de acção comum, mas forças com intensidades diferentes, ocorreria movimento com o sentido da resultante.

Já nos referimos a uma condição geral que terá de ser satisfeita para um corpo se encontrar em equilíbrio, ou seja, a obrigatoriedade de ter todos os seus pontos em equilíbrio. Em sentido geral, se um sistema está em equilíbrio é porque a resultante das forças externas e internas aplicadas em cada um dos seus pontos é nula. Nestas condições, a resultante das forças aplicadas e o momento resultante são nulos em relação a qualquer um dos seus pontos. Contudo, interessa-nos principalmente saber quais as condições que, na prática, devem ser satisfeitas pelas forças que estão externamente a actuar sobre o corpo para este se encontrar em equilíbrio. A primeira destas condições é que a resultante das forças aplicadas sobre o corpo seja nula. Se as forças se encontram todas num plano, esta condição pode também ser enunciada em relação às componentes das forças, segundo duas direcções perpendiculares situadas no referido plano. Para haver equilíbrio, a soma dessas componentes terá de ser nula segundo cada um dos eixos.

A segunda condição que terá de ser satisfeita, e limitando-nos ainda ao caso das forças se encontrarem todas num plano, é que a soma dos momentos de todas as forças em relação a um ponto qualquer do plano seja zero.

No caso mais geral, para que um sólido esteja em equilíbrio em relação a um sistema de eixos, é condição necessária e suficiente que sejam nulas as somas das projecções, sobre os três eixos, das forças exteriores que actuam no sistema e que seja nula a soma dos momentos das mesmas forças em relação aos eixos. (Nestas condições gerais, considera-se um sistema de três eixos  $X, Y, Z$  e momentos em relação aos eixos, cuja definição relembremos: momento de uma força em relação a um eixo é o momento da

projecção da força sobre um plano normal ao eixo em relação ao ponto intersecção do plano com o eixo).

Vejamos agora algumas situações práticas de equilíbrio com interesse em Biologia. É, por exemplo comum encontrar corpos em equilíbrio sob a acção de três forças. Em tal caso, do que se disse atrás, depreende-se que as linhas de acção têm de passar por um ponto comum, além da resultante das três forças ser nula. Esta simples conclusão pode ser útil quando se pretende saber quais os músculos usados pelos animais em determinadas operações. Na Fig. III.26 podemos ver a mandíbula de um carnívoro.

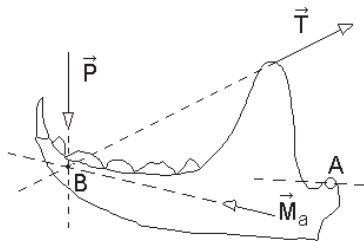


Fig. III.26 - Forças a actuar na mandíbula de um carnívoro quando o animal come carne: a acção do músculo temporal  $\vec{T}$ , a do masseter  $\vec{M}_a$  e  $\vec{P}$  a força de reacção da carne sobre a mandíbula, perpendicular a este.

A força  $-\vec{P}$  é exercida pelos dentes sobre a carne quando o animal corta esta. A força  $\vec{P}$  é uma força de reacção a actuar sobre a mandíbula, segundo a normal, e que resulta da carne ser apertada contra o último. Dois músculos, o temporal e o masseter, opõem-se a  $\vec{P}$ , de modo a criar-se o equilíbrio. A acção do músculo temporal está representada pela força  $\vec{T}$  e a do masseter por  $\vec{M}_a$ . Na situação de equilíbrio  $\vec{T} + \vec{M}_a = -\vec{P}$ . Esta igualdade traduz o equilíbrio translacional (ou das forças). O equilíbrio rotacional (ou dos momentos) é garantido pelo cruzamento das linhas de acção num ponto.

Está a supor-se que ocorre equilíbrio sem força de reacção na charneira A. Despreza-se a pequena força de reacção que, na prática, poderá ocorrer segundo a direcção  $\overline{AB}$  e a apontar para B. A existência desta

reação, que tende a deslocar a mandíbula, impõe uma limitação à força exercida sobre o alimento. No caso do réptil primitivo da Fig. III.7, a articulação teria de ser extremamente sólida para suportar a enorme reação exercida.

Nos carnívoros, em geral, o valor máximo da intensidade de  $\vec{T}$  é cerca de duas vezes a da intensidade da força  $\vec{M}_a$  e as linhas de ação destas forças cruzam-se em  $B$ , na parte anterior da mandíbula, onde irá ocorrer a máxima força, necessária para os animais cortarem a carne ou segurarem as presas.

Se o músculo masseter for cortado e só o músculo temporal actuar, como se mostra na Fig. III.27, terá de considerar-se a força  $\vec{R}$ , reação da articulação sobre a mandíbula, a actuar na charneira  $A$ , para ocorrer o equilíbrio.

Contrariamente à resultante das ações do masseter e do músculo temporal, a resultante  $\vec{F}$  das forças  $\vec{R}$  e  $\vec{T}$  não é normal à mandíbula. A força  $\vec{F}$  tem uma componente normal  $-\vec{P}$  e uma componente tangencial  $\vec{V}$  que actua sobre a mandíbula, puxando-o para fora e que poderá deslocá-lo. Na situação normal, pequena ou nenhuma reação ocorre na articulação, o que resulta da existência dos dois feixes musculares a actuar.

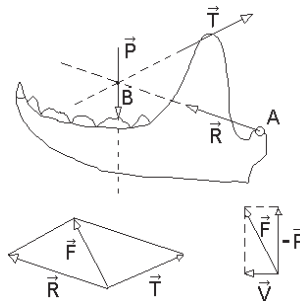


Fig. III.27 - Forças a actuar na mandíbula de um carnívoro com o masseter seccionado quando o animal come carne: a ação do músculo temporal  $\vec{T}$ , a reação sobre o fulcro  $\vec{R}$  e  $\vec{P}$  a força de reação da carne sobre a mandíbula.

Num herbívoro típico, a intensidade máxima da força  $\vec{T}$  é cerca de



12% da intensidade da força  $\vec{M}_a$  que aqui representa a soma das acções dos músculos masseter e pterigoide lateral. Nestes animais, a contribuição do músculo pterigoide lateral na trituração dos alimentos é muito importante, pois origina os deslocamentos laterais. No cavalo, a massa deste músculo é cerca de três vezes superior à do músculo temporal e cerca de metade da do masseter. Supondo não ocorrer qualquer força na charneira, poderá perguntar-se onde é maior a força exercida sobre os vegetais - na parte posterior ou na parte anterior do maxilar. Como  $\vec{T}$  é pequeno, a orientação de  $\vec{M}_a$  deve ser próxima do vertical, ficando o sistema de forças como se vê na Fig. III.28. Neste caso, a máxima força ocorre nos dentes molares, que estão adaptados à trituração dos vegetais.

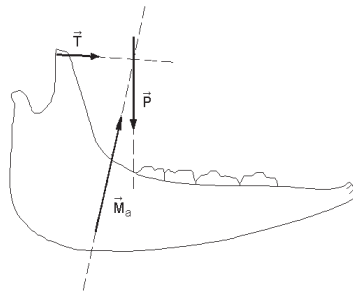


Fig. III.28 - Forças a actuar na mandíbula de um herbívoro quando este tritura vegetais.

No caso do homem, as forças mais importantes a actuar na mandíbula durante a mastigação, estão indicadas na Fig. III.29.

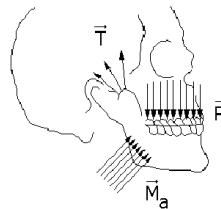


Fig. III.29 - Forças a actuar na mandíbula durante a mastigação do homem.

As forças  $\vec{T}$  correspondem à acção do temporal, as forças  $\vec{M}_a$  à acção conjugada do masseter e pterigoides lateral e medial e  $\vec{M}_a$  à reacção do alimento sobre os dentes da mandíbula. O músculo pterigoide medial, e também o pterigoide lateral, actuam como elevadores puxando a mandíbula para trás, posicionando a cabeça do côndilo. O primeiro é também responsável pelos movimentos bordejantes, de deslizamento e de deslocamento lateral. A acção dos diferentes músculos é controlada pelo sistema nervoso que determina a acção conjunta. Se cada um dos sistemas de forças da Fig. III.29 for substituído por uma força equivalente  $\vec{T}_E$ ,  $\vec{M}_E$  e  $\vec{P}_E$  as condições de equilíbrio referidas para o caso anterior devem prevalecer para estas forças.

Consideremos outro caso de aplicação das condições de equilíbrio que estudámos. Suponhamos que se pretende saber qual a força e o momento que actuam na secção A do antebraço indicada na Fig. III.30, numa situação de equilíbrio, quando a mão suporta um peso de 10 kg; a secção A pode corresponder ao local de uma fractura ou de um reimplante, interessando conhecer o esforço a que irá ser sujeito em dadas condições típicas.

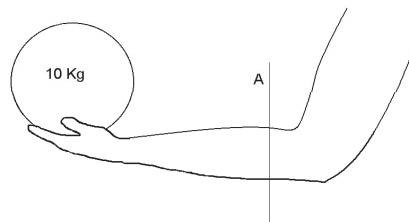


Fig. III.30 - Pretende saber-se qual a força e o momento que actuam na secção A do antebraço indicada na figura.

Para se estudarem os problemas de estática, consideram-se os objectos ou conjuntos de objectos em análise independentes do sistema a que pertencem, ou seja, consideram-se como corpos livres onde estão a actuar somente as forças responsáveis pelo equilíbrio. Para se efectuar este tipo de estudo é necessário entrar com todas as forças externas a actuar sobre o corpo. Estas são, o peso, as acções que são directamente aplicadas sobre o corpo, para se obterem determinados efeitos e as reacções dos suportes a que o corpo se encontra ligado. O peso é a resultante das acções da gravidade

sobre todas as partículas constituintes do sólido, aplicada no centro de gravidade. As reacções podem ser de diversos tipos. Tratando-se de um problema redutível a duas dimensões as reacções podem ser equivalentes a uma força com direcção conhecida (por exemplo, um corpo assente sobre uma superfície lisa), a uma força com direcção desconhecida (por exemplo, um corpo assente sobre uma superfície rugosa), ou a uma força e um binário ambos desconhecidos (suporte fixo). Estas últimas reacções envolvem três quantidades desconhecidas, também chamadas de graus de liberdade: as duas componentes da força e o binário. Numa primeira aproximação, um dente no seu alvéolo encontra-se nesta situação. No modelo do corpo livre ou das forças aplicadas, para o caso proposto, só interessam as forças a actuar no segmento do antebraço indicado na Fig.III.31. Consideram-se todas as forças assentes no plano do papel. O equilíbrio só poderá ocorrer devido às acções sobre a secção **A**. Estas acções podem sempre ser traduzidas por uma força  $\vec{R}$ , situada no plano do papel, e um vector binário  $\vec{M}$  normal a este, aplicado no ponto **O**. A força  $\vec{R}$  é a ligação ao resto do antebraço, cuja orientação desconhecemos e representamos com uma direcção arbitrária. O vector binário  $\vec{M}$  traduz a acção de rotação que as forças em jogo produzem na secção do antebraço.

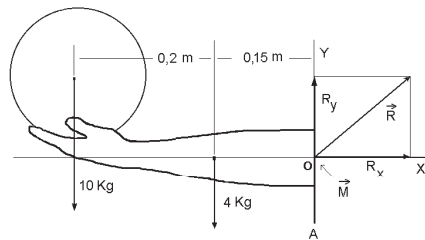


Fig. III.31 - Modelo do corpo livre para a porção do antebraço limitado pelo plano A.

A força de 4 Kg é o peso do segmento de antebraço limitado pelo plano **A**, aplicada no correspondente centro de gravidade. As distâncias indicadas são dados do problema. A força  $\vec{R}$  é desconhecida, assim como o momento  $M$ .

Considerando as componentes das forças segundo o sistema de eixos **XOY**, as condições que estudámos para o equilíbrio dão-nos

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{III.30}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{III.31}$$

ou seja, a resultante das componentes das forças aplicadas segundo cada um dos eixos é nula no equilíbrio e, para o caso dos momentos

$$\Sigma \vec{M} = 0 \quad \text{III.32}$$

ou seja, o momento resultante das forças aplicadas, em relação a um ponto, é nulo no equilíbrio. Então, no equilíbrio temos

$$R_x = 0 \quad \text{III.33}$$

$$R_y = 10 + 4 = 14 \text{ Kg} = 137,2 \text{ N} \quad \text{III.34}$$

Para os momentos em relação ao ponto **0** temos

$$10 \times 0,35 + 4 \times 0,15 + R \times 0 + M = 0$$

donde

$$M = -4,1 \text{ Kgm} = -40,18 \text{ N m} \quad \text{III.35}$$

Como o sentido positivo que considerámos para os momentos é o da perpendicular ao plano do papel, apontando para nós, o vector  $\vec{M}$  aponta para dentro do papel.

Uma aplicação do conceito de equilíbrio à medicina dentária é o cálculo do momento de manutenção da oclusão passiva. Pretende saber-se qual é o momento que tem de ser compensado pelas forças musculares para manter oclusão passiva, isto é, oclusão sem resistência interposta entre os dentes.

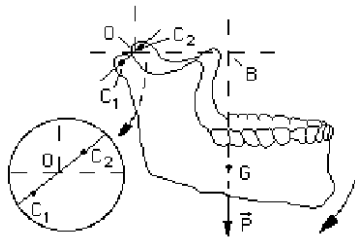


Fig. III.32 - Acção isolada do peso  $\vec{P}$  da mandíbula. À esquerda detalhe do eixo  $\overline{C_1C_2}$ .

Sem a contribuição de qualquer acção muscular, a mandíbula tende a rodar para baixo, em torno do eixo de rotação que une as duas articulações temporo-mandibulares (ATM) ( $C_1$  e  $C_2$ ), sob a acção do peso  $\vec{P}$  da mandíbula e tecidos. O peso considera-se a actuar no centro de gravidade  $G$  da mandíbula, situado num ponto médio entre os molares. Considerando o momento do peso  $\vec{P}$  em relação ao ponto médio  $O$  do eixo  $C_1C_2$ , temos um vector com a direcção de  $C_1C_2$  a apontar de  $C_1$  para  $C_2$  e de intensidade

$$|M_o| = P \cdot \overline{OB} \quad \text{III.36}$$

O momento do peso  $\vec{P}$  em relação ao eixo  $C_1C_2$  é o próprio vector  $\vec{M}_o$ , visto  $\vec{M}_a$  ter a direcção do eixo. Este momento terá de ser compensado por acção muscular para que a boca seja conservada fechada com os dentes ligeiramente afastados ou unidos em oclusão passiva.

Na oclusão passiva, sem qualquer resistência a exercer-se entre os dentes, o feixe ventral do temporal é o mais efectivo na rotação e o feixe dorsal na translação, O masseter e o pterigoide medial também participam na rotação. O feixe dorsal do temporal contribui sobretudo com força de translação.

Uma análise detalhada das forças e momentos aplicados na mandíbula humano, durante a mastigação, pode ser obtida utilizando o modelo do corpo livre. A acção muscular, ou seja, a contracção dos músculos pode traduzir-se por um vector força ao qual associamos uma grandeza, uma direcção, um sentido e um ponto de aplicação.

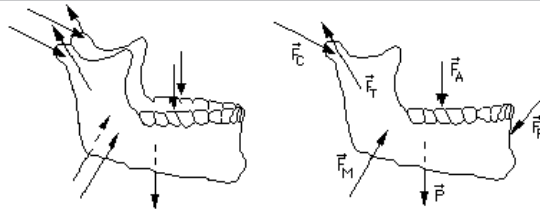


Fig. III.33 - Forças aplicadas na mandíbula humano, durante a mastigação.  
Modelo do corpo livre aplicado à mandíbula e a metade desta.

Vamos considerar o modelo do corpo livre aplicado a metade direita da mandíbula com a intenção de calcular a intensidade e orientação da força a actuar no cõndilo da mandíbula, para uma dada força de mastigação. É evidente que se parte do princípio que estando a mandíbula em equilíbrio qualquer parte do mesmo também estará. Consideremos a Fig. III.33 onde, de um modo simplificado, o problema é traduzido por um diagrama mecânico das forças aplicadas. As forças  $\vec{F}_T$  correspondem à acção resultante das fibras do músculo temporal direito, as forças  $\vec{F}_M$  à acção conjugada das fibras dos músculos masseter e pterigoide direitos,  $\vec{F}_A$  à reacção do alimento sobre os dentes da metade direita da mandíbula,  $\vec{F}_C$  à acção sobre o cõndilo direito da mandíbula e  $\vec{P}$  ao peso de metade da mandíbula. As coordenadas dos pontos de aplicação destas forças são respectivamente  $(x_T, y_T)$ ,  $(x_M, y_M)$ ,  $(x_A, y_A)$ ,  $(x_C=0, y_C=0)$  e  $(x_P, y_P)$ . Os correspondentes ângulos com a direcção positiva dos  $xx$  são  $\theta_T$ ,  $\theta_M$ ,  $3\pi/2$ ,  $(\pi+\theta_C)$  e  $3\pi/2$ .

As condições de equilíbrio do sistema implicam que a soma de todas as forças aplicadas sobre a metade direita da mandíbula e a soma dos momentos dessas forças em relação a um ponto do plano, devam ser nulos.

Todas as forças representadas encontram-se no plano do papel e podemos considerar as suas componentes num sistema de eixos coordenados  $XOY$ . A condição de que a força total seja nula traz-nos para as componentes  $X$  e  $Y$  as equações:

$$X \quad F_C \cos(\pi+\theta_C) + F_T \cos \theta_T + F_M \cos \theta_M = 0 \quad \text{III.37}$$

$$Y \quad F_C \sin(\pi+\theta_C) + F_T \sin \theta_T + F_M \sin \theta_M - F_A - P = 0 \quad \text{III.38}$$

A condição dos momentos, considerando a origem das coordenadas como origem dos momentos e o sentido positivo da normal à figura aquele que aponta para nós, pode traduzir-se pelas componentes escalares segundo esta direcção:

$$\mathbf{M} \quad b_T F_T + b_M F_M - x_A F_A - x_P P = 0 \quad \text{III.39}$$

Para calcular os valores de  $b_T$  e  $b_M$  considere-se o pormenor à direita, na Fig. III.34, que se refere a  $b_M$ . A recta que passa pelo ponto  $(x_M, y_M)$  com inclinação  $\text{tg } \theta_M$  intersecta o eixo dos  $xx$  no ponto de abscissa.

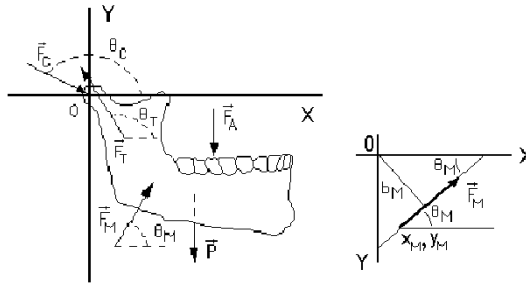


Fig. III.34 - Supondo equilíbrio, a soma de todas as forças aplicadas sobre o objecto e a soma dos momentos dessas forças em relação a um ponto do plano deve ser nula.

$$x_d = \frac{x_M \text{tg } \theta_M - y_M}{x_M \text{tg } \theta_M}$$

então

$$b_M = x_d \sin \theta_M \quad \text{III.40}$$

Igual procedimento levaria ao cálculo de  $b_T$ .

Supõe-se, neste problema, que são conhecidos  $\theta_T$  e  $\theta_M$  bem como as linhas de acção de  $F_T$  e  $F_M$  e, conseqüentemente,  $b_T$  e  $b_M$  e, ainda, os valores de  $x_P$ ,  $y_P$  e  $P$ . Finalmente  $F_A$  e  $x_A$ ,  $y_A$  são dados do problema. As incógnitas são pois  $F_M$ ,  $F_T$ ,  $F_C$  e  $\theta_C$ .

Uma parte importante da biomecânica estuda o equilíbrio do esque-

---

leto. Na constituição dos ossos, encontramos três tecidos distintos: tecido compacto, tecido esponjoso e tecido reticular. O tecido compacto, que lembra o marfim, é constituído por lamelas ósseas, aplicadas umas contra as outras sem cavidades intermédias. O tecido esponjoso é constituído por lamelas ósseas com orientações diversas, deixando entre si pequenas cavidades. O tecido reticular é uma variedade de tecido esponjoso, em que as lamelas ósseas se encontram mais afastadas, limitando portanto cavidades maiores.

Num mesmo osso poderão ocorrer os três tipos de tecido ou aparecerem simplesmente os dois primeiros.

Os ossos longos têm os três tipos de tecido, enquanto que nos ossos chatos e nos ossos curtos só se encontra tecido compacto e tecido esponjoso.

As trabéculas ósseas da porção esponjosa ou reticular dos ossos dispõem-se segundo um esquema onde é muito aproximadamente constante e sempre o mesmo para o mesmo osso. Esta orientação coincide com a direcção das forças a que o osso está normalmente sujeito, de modo a transmitir e distribuir o esforço por toda a superfície do osso. Esta estrutura é um factor da maior importância na resistência do osso. De facto, o estudo das características de alguns ossos e das funções específicas a que se destinam, permitem concluir que a estrutura interna e a forma externa do osso humano estão perfeitamente adaptadas às condições mecânicas existentes em cada ponto do osso e que a arquitectura interna de um osso normal é dirigida, de modo a apresentar um máximo de resistência com um mínimo de material.

Quanto à primeira parte é possível verificá-la de modo muito elucidativo. Consideremos para tal o fémur humano. É possível calcular com boa aproximação a direcção da força que se exerce sobre a epífise da cabeça do fémur e comparar com a orientação das trabéculas.

Na Fig. III.35 podem observar-se as forças com interesse para o problema do equilíbrio, quando um homem se encontrar em pé e assente somente sobre a perna direita (Fig. III.35). É uma situação que obriga a considerável esforço do fémur.



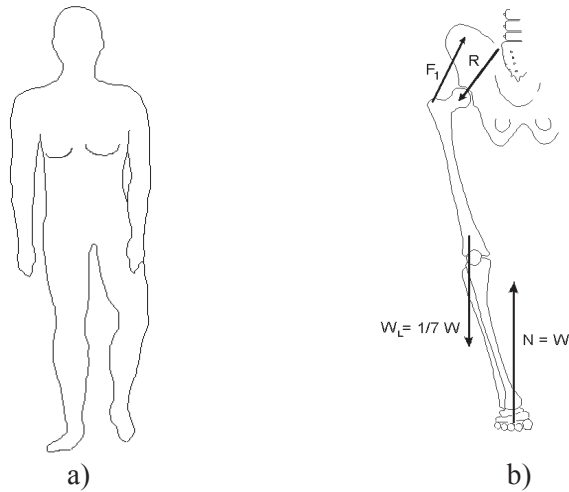


Fig. III.35 - Para um homem assente sobre a perna direita como em a) o esquema anatómico de uma perna e bacia mostrando as forças com interesse para o equilíbrio encontra-se em b).

A força  $\vec{F}_1$  resulta da acção de diversos músculos, cuja inserção se faz na epífise do grande trocanter (esses músculos são os nadegueiros médio e mínimo, Fig. III.36, e de um outro músculo, o tensor do fascia lata).

Outros músculos, com interesse na movimentação do fémur, não têm importância no problema que pretendemos estudar. Vamos considerar uma situação de equilíbrio em que só estão envolvidos músculos adutores.

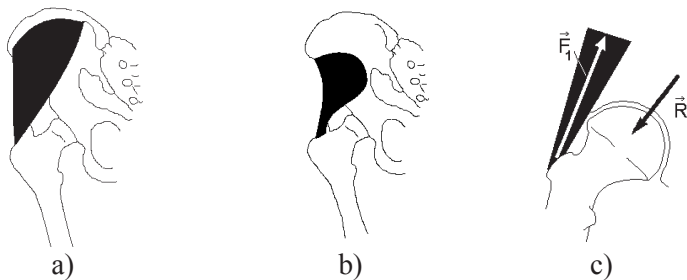


Fig. III.36 – a) e b) Músculos nadegueiros médio e pequeno; c) Forças a actuar no fémur.

Os dois primeiros músculos e o tensor do fascia lata são os mais

importantes, no que respeita à força de adução (movimento de adução é o movimento da perna para fora a partir do eixo do corpo). A linha de acção da resultante das forças produzidas por estes músculos faz um ângulo de  $70^\circ$  com a horizontal.

Na Fig. III.37 podem observar-se as forças com interesse para o problema e as distâncias mais importantes entre as verticais passando por pontos igualmente com interesse.

Consideremos um caso extremo quanto ao esforço do fémur. O caso de uma pessoa se encontrar em pé e assente somente sobre a perna direita. Podemos utilizar as condições necessárias ao equilíbrio estático, anteriormente estudadas, para calcularmos as forças actuantes na articulação do fémur. Em primeiro lugar, para haver equilíbrio no caso de uma pessoa assente sobre um só pé, a vertical que contém o centro de gravidade do corpo tem de passar pelo pé.

As forças envolvidas são:

$\vec{F}_1$  - Força exercida no grande trocanter pelos músculos adutores.

$\vec{R}$  - Força exercida pelo osso coxal sobre a epífise do fémur.

$\vec{N}$  - Força normal exercida pelo solo sobre a perna. É igual ao peso do corpo  $\mathbf{W}$ , donde  $N = W$ .

$\vec{W}_L$  - É igual ao peso da perna. Consideramos este peso igual a  $1/7$  do peso do corpo  $\mathbf{W}$ .

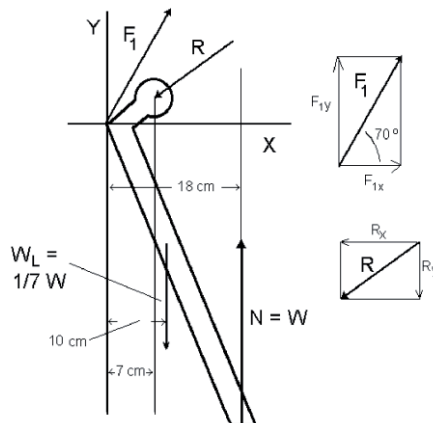


Fig. III.37 - Forças com interesse para o problema e distâncias mais importantes entre as verticais passando por pontos igualmente com interesse.

A reacção  $\vec{N}$  exercida pelo solo sobre o pé tem de estar assente sobre a linha que contém o centro de gravidade e o vector que representa o peso do corpo  $\vec{W}$ . Numa situação de equilíbrio, a soma das forças e dos momentos dessas forças em relação a um ponto do plano deve ser nula.

Consideremos a Fig. III.37, onde de um modo simplificado, o problema é traduzido num diagrama mecânico das forças aplicadas. Todas as forças representadas encontram-se no plano do papel e podemos considerar as suas componentes num sistema de eixos coordenados XOY. A condição de que a força total deve ser zero traz-nos para os componentes X e Y as equações

$$\text{Segundo OY} \quad F_1 \sin 70 - R_y - \frac{1}{7} W + W = 0 \quad \text{III.41}$$

$$\text{Segundo OX} \quad F_1 \cos 70 - R_x = 0 \quad \text{III.42}$$

A terceira equação poderá ser obtida calculando o momento total em relação a um ponto do plano. Escolhemos para origem dos momentos o centro da cabeça do fémur. A força  $\vec{R}$  passa por esse ponto e não vai portanto aparecer nesta equação. Esta escolha tem o grande mérito de permitir o cálculo directo da força  $\vec{F}_1$  possibilitando assim o cálculo de  $R_x$  e  $R_y$  em termos de W a partir das equações anteriores.

A equação dos momentos é:

$$0 = F_1 (\sin 70) 7 + \frac{1}{7} W (10 - 7) - W (18 - 7) \quad \text{III.43}$$

donde se tira  $F_1 = 1,6 W$ .

Deste modo conclui-se que a força nos músculos adutores da coxa é cerca de 1,6 vezes o peso total do corpo. Calculemos agora as componentes  $R_x$  e  $R_y$  das forças de acção  $\vec{R}$  sobre a cabeça do fémur. Usando a segunda das equações iniciais e substituindo o valor de W, vem

$$R_x = 1,6 W \cos 70 = 0,55 W \quad \text{III.44}$$

---

Fazendo de modo idêntico com a primeira equação temos

$$R_y = W (6/7) + 1,6 \text{ sen}70 \quad \text{III.45}$$

$$R_y = 2,4 W \quad \text{III.46}$$

As componentes horizontal e vertical de  $\vec{R}$ , força de acção sobre o osso coxal e exercida na cabeça do fémur são pois

$$R_x = 0,55 W$$

e

$$R_y = 2,4 W \quad \text{III.47}$$

A grandeza e a direcção de  $\vec{R}$  determina-se imediatamente a partir do diagrama vectorial

$$\text{tg } \theta = \frac{R_x}{R_y} = 0,23 \quad \text{III.48}$$

$$\theta \approx 13^\circ \quad \text{III.49}$$

$$R = R_x^2 + R_y^2 = W (0,55)^2 + (2,4)^2 = 2,4 W \quad \text{III.50}$$

A cabeça do fémur é sujeita a uma força que faz  $13^\circ$  com a horizontal e é igual a 2,4 vezes o peso total do corpo. No caso de um homem pesar 100 Kg, essa força é de 240 Kg.

Observemos agora estes resultados sob um ponto de vista anatómico. A disposição das trabéculas no tecido esponjoso da cabeça do fémur pode observar-se na Fig. III.38-a), que representa uma radiografia feita em condições especiais de uma cabeça do fémur. Na Fig. III.38-b) encontra-se um desenho onde se pode observar a força  $\vec{R}$ , calculada pelo processo que estudámos. Facilmente se verifica que a orientação das lâminas de tecido ósseo, observadas na radiografia, é tal que acompanha a linha de acção de  $\vec{R}$ .

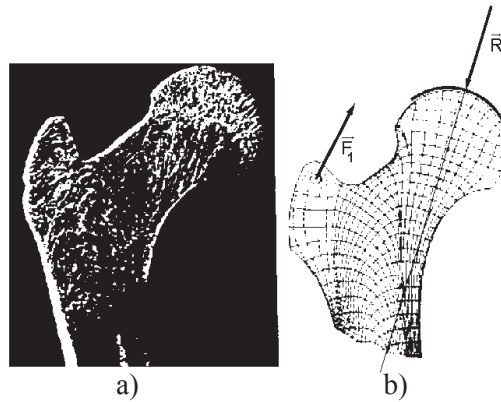


Fig. III.38 - a) Radiografia de uma lâmina da cabeça do fêmur mostrando a orientação das trabéculas e b) Sistemas de resistência com a resistência calculada.

Esta observação sugere que o crescimento deste osso esteja de algum modo relacionado com a força a que está sujeito. No dispositivo trabecular da cabeça do fêmur podem aliás distinguir-se dois sistemas distintos de trabéculas, o sistema interno ou medial (a cheio no esquema) e o sistema externo ou lateral (a tracejado). O sistema interno é compressivo, ou seja, é solicitado à compressão sob a acção de  $\vec{R}$ . O sistema externo é intensivo, ou seja, é solicitado à tracção sob a acção de  $\vec{R}$ . O sistema interno é mais robusto do que o sistema externo, o que se compreende, pois o esforço no primeiro é bastante maior.

Quando os músculos adutores são lesados ou sofrem paralisia podem ocorrer alterações que convém referir. É fácil de verificar que quando estes músculos não funcionam é impossível obter o equilíbrio quando, como anteriormente, o doente está só com um pé assente no solo e colocado na linha média do corpo, visto agora faltar a força  $\vec{F}_1$ . O doente instintivamente corrige isto, mudando a posição do corpo, de modo a que o seu centro de gravidade fique na vertical que contém o centro da cabeça do fêmur. O doente consegue assim que o pé e o centro da cabeça do fêmur fiquem na mesma vertical. A equação dos momentos ficará satisfeita com  $\vec{F}_1 = 0$ . Não haverá qualquer

---

acção por parte dos músculos adutores. Porém, a acção sobre o fémur aponta quase verticalmente para baixo e o seu valor é de aproximadamente o peso do corpo. Quando a lesão ou paralisia ocorre na infância, a mudança na direcção de  $\vec{R}$  produz a rotação do prato cartilágneo da epífise que fica superior e quase horizontal e o osso cresce na vertical, em resposta à força vertical aplicada. A cabeça do fémur acabará por curvar-se mais na vertical, ficando o osso mais comprido que o normal. Ocorre portanto uma adaptação do osso às condições mecânicas existentes. Não havendo esta adaptação estrutural, o osso não oferece garantias de resistência.

É conhecida, por exemplo, a frequência com que ocorre a fractura do colo do fémur nos velhos. Isto acontece porque a estrutura trabecular se apaga consideravelmente nos ossos das pessoas mais idosas. É de referir aqui a extraordinária resistência que a estrutura do fémur oferece em condições normais.

Experiências levadas a cabo para calcular a tensão de rotura por compressão (Fig. III.39), aplicando a força compressiva segundo a orientação natural do osso, demonstraram que o fémur poderia suportar forças superiores a 800 Kg!

Para se ter um termo de comparação, poderemos dizer que experiências feitas paralelamente com modelos de fémur feitos em ferro fundido, só aguentaram mais cerca de 500 Kg que os fémures humanos. É conveniente notar que a resistência do fémur para esforços, segundo direcções diferentes da orientação das trabéculas, é substancialmente menor.

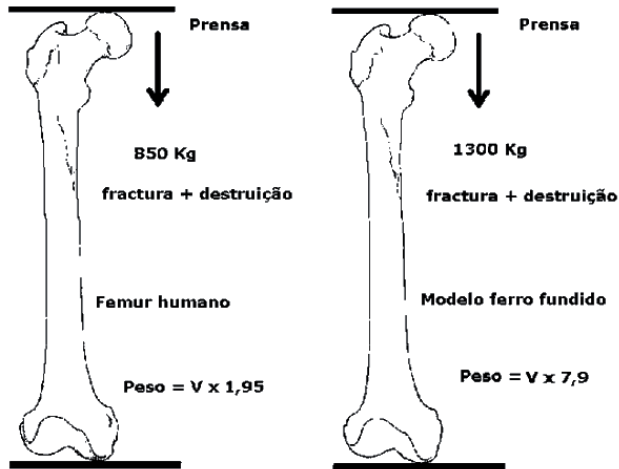


Fig. III.39 - Comparação da resistência à compressão de um fêmur humano e de um modelo em ferro fundido.

### III.12 - Atrito entre sólidos

Quando dois corpos se encontram em contacto, as irregularidades que sempre existem nas suas superfícies e alguma interacção molecular, originam forças que resistem ao movimento (Fig. III.40-b). As leis do atrito podem entender-se através de uma experiência simples.

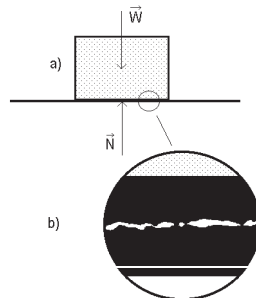


Fig. III.40 - a) Reacção  $\vec{N}$  do apoio sobre um corpo de peso  $\vec{W}$ . b) Ampliação da zona de contacto entre as duas superfícies.

Se um prisma de peso  $\vec{W}$  é colocado sobre uma superfície horizontal plana, as forças a actuar sobre o sólido são o seu peso e a reacção da superfície  $\vec{N}$  que tem de ser vertical e oposta ao peso, visto haver equilíbrio. A reacção normal  $\vec{N}$  da superfície a actuar sobre o prisma é igual à que ocorreria no mesmo problema sem atrito.

Se uma força horizontal  $\vec{S}$  é aplicada ao corpo verifica-se que este se mantém imóvel, enquanto o módulo da força não ultrapassar um dado valor limite  $\vec{S}_m$ . Gera-se, entre as duas superfícies, uma força estática de atrito  $\vec{F}$ , igual e oposta a  $\vec{S}$ , até que o referido valor seja atingido e para o qual  $\vec{F} = \vec{F}_m$

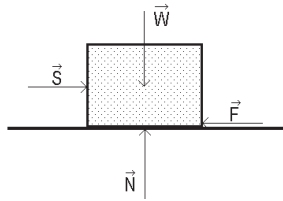


Fig. III.41 - Força estática de atrito  $\vec{F}$ , oposta a  $\vec{S}$ .

Para valores superiores a  $\vec{S}_m$  a força de atrito não consegue manter equilíbrio, deslocando-se o prisma sobre o plano. Contudo, mal ocorra movimento relativo entre as duas superfícies, a força de atrito passa do valor  $\vec{F}_m$  para um valor menor,  $\vec{F}_c$ , como se observa na Fig. III.42. Esta força  $\vec{F}_c$  é chamada de força de atrito cinético. Verifica-se então que, mal o corpo é posto em movimento, a força de fricção oposta à força  $\vec{S}$  diminui.



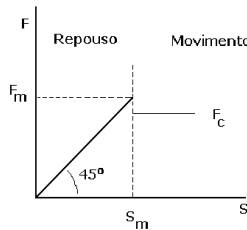


Fig. III.42 - Módulo da força de atrito  $F$  em função de  $S$ . Mal o sólido inicia o seu movimento a força de atrito passa do valor  $\vec{F}_m$  para  $\vec{F}_c$ .

Verifica-se que o valor máximo da força estática de atrito é proporcional ao valor da reacção normal da superfície, ou seja,

$$F_m = \mu_e N \quad \text{III.51}$$

a constante  $\mu_e$  é o coeficiente de atrito estático.

Também se verifica experimentalmente que

$$F_c = \mu_c N \quad \text{III.52}$$

a constante  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito cinético. É evidente que  $\mu_e > \mu_c$ .

Os coeficientes  $\mu_c$  e  $\mu_e$  dependem da natureza das superfícies em contacto mas são independentes da área de contacto.

**Quadro III.1** – Coeficientes de fricção de alguns pares de materiais

Pares de materiais	Coef. de atrito estat., $\mu_e$	Coef. de atrito cinét., $\mu_c$
metal/óleo	0,12	0,07
borracha/asfalto	0,60	0,40
aço/aço	0,75	0,68
vidro/vidro	0,94	0,40

Se a força  $\vec{S}$  for oblíqua em relação à superfície, a soma da sua componente vertical com o peso do corpo determinam a reacção normal e a componente horizontal de  $\vec{S}$  determina a força de atrito (Fig. III.43).

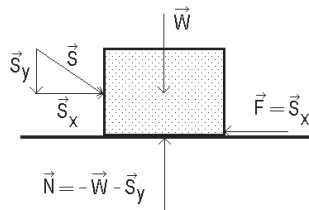


Fig. III.43 - Representação das forças a actuar, quando a força  $\vec{S}$ , oblíqua, é aplicada ao corpo e ocorre equilíbrio.

Podem considerar-se os seguintes casos:

Equilíbrio	$F = S_x$	$F < \mu_e N$	$N = S_y + W$
Situação limite	$F_m = S_x$	$F_m = \mu_e N$	$N = S_y + W$
Movimento	$F_c < S_x$	$F_c = \mu_c N$	$N = S_y + W$

Podem substituir-se as forças  $\vec{N}$  e  $\vec{F}$  pela sua resultante  $\vec{R}$  (Fig.III.44).

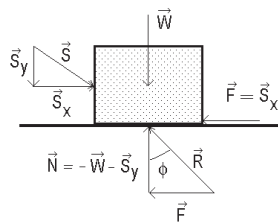


Fig. III.44 - Representação das forças a actuar quando a força  $\vec{S}$ , oblíqua, é aplicada ao corpo, onde se evidencia o ângulo  $\phi$  que a força  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}$  faz com a normal à superfície .

Desde que a força  $\vec{S}$  tenha uma componente  $\vec{S}_x$  não nula o ângulo  $\phi$  é maior do que zero. Se a componente  $\vec{S}_x$  é aumentada até ao limite, após o qual a massa começa a deslocar-se, o ângulo  $\phi$  atinge o seu valor máximo  $\phi_e$  (ângulo de atrito estático). Pode escrever-se

$$\operatorname{tg} \phi_e = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_e N}{N} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \phi_e = \mu_e \quad \text{III.53}$$

Se a intensidade da componente  $\vec{S}_x$  da força aplicada ultrapassa o valor  $F_m$  produz-se o deslocamento da massa e a força de atrito baixa para  $F_c$ . A resultante  $\vec{R}$  faz, nestas condições, o ângulo  $\phi_c$  (ângulo de atrito cinético) com a vertical. Tem-se agora

$$\operatorname{tg} \phi_c = \frac{F_c}{N} = \frac{\mu_c N}{N} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \phi_c = \mu_c \quad \text{III.54}$$

Podemos interpretar a acção das forças de atrito se considerarmos a componente do peso numa direcção paralela ao plano em que o corpo se apoia, para diversas inclinações do plano (Fig. III.45). Na situação mais simples de um corpo em equilíbrio apoiado numa superfície horizontal, Fig. III.45-a), apenas duas forças iguais e directamente opostas, o peso  $\vec{W}$  e a reacção normal do plano  $\vec{N}$ , actuam no corpo.

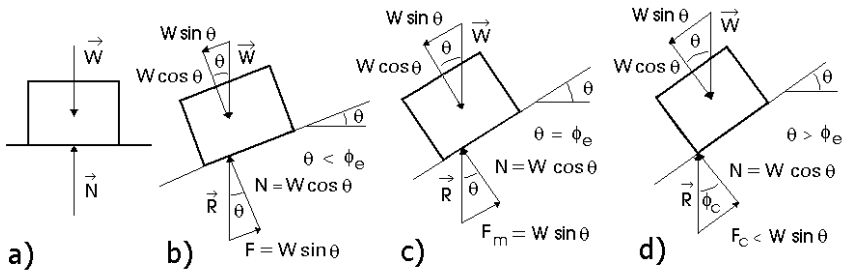


Fig. III.45 - Situações estáticas a), b) e c) e dinâmica d), quando se tem o paralelogramo assente sobre planos com diferentes inclinações.

Para uma pequena inclinação, Fig. III.45-b), o equilíbrio do corpo é garantido pela força de atrito estático  $F = W \sin \phi$  que equilibra a componente do peso  $W \sin \phi$  na direcção do plano; situação semelhante verifica-se até que se atinge a condição limite para a qual  $\theta = \phi_e = \arctg \mu_e$ , Fig. III.45-c), em que a força de atrito estático atinge o valor máximo, para as superfícies em contacto. Para valores de  $\theta > \phi_e$ , Fig. III.45-d), o corpo escorrega sobre o plano em movimento acelerado, pois a componente do peso na direcção do plano excede a força de atrito cinético que se opõe ao movimento, i.e.,

$$W \sin \phi > F_c.$$

Convém referir que, por uma questão de simplificação das figuras, os pontos de aplicação dos vectores não se encontram representados na posição correcta; assim, o vector  $\vec{W}$ , peso do corpo, é um vector aplicado no centro de massa do corpo, a reacção normal  $\vec{N}$  e a força de atrito  $\vec{F}$  são aplicados na superfície de contacto corpo/plano, e o ponto de aplicação da força exterior  $S$  deve entender-se situado na superfície lateral do corpo.

Em ortodôncia, ramo da medicina dentária que trata da correcção das posições defeituosas dos dentes, accidentais ou congénitas, são induzidos movimentos dentários para redução dos espaços anormais entre dentes. Estes movimentos são obtidos utilizando dois conceitos mecânicos distintos. O primeiro tipo, utiliza a reacção elástica de fios metálicos, ligados aos dentes, constituindo arcos fechados, numa técnica chamada de segmentos ou secções. Os dentes deslocam-se sob acções fracas com relação momento/força controlada.

No segundo tipo ocorre o deslocamento de suportes ao longo de fios, ou o deslizamento de fios através de suportes ou de tubos. Um dos factores mais importantes na diferenciação destas metodologias está na participação das forças de fricção que ocorre no segundo caso. As forças aplicadas nesta técnica são parcialmente compensadas pelas forças de fricção sendo a diferença utilizada para produzir os movimentos dentários.

A fricção nos fluidos também chamadas de viscosidade é muito menor do que a que ocorre entre superfícies sólidas. Daí a razão para a utilização dos lubrificantes em múltiplas situações, bem como das almofadas de ar, por

exemplo, nos hovercraft. Algumas das articulações no homem são lubrificadas pelo líquido sinovial que é comprimido contra a cartilagem durante o movimento. O lubrificante tende a ser absorvido pela cartilagem, que é porosa, quando a articulação está imóvel e libertado na compressão. O coeficiente de atrito das articulações sinoviais é da ordem de 0,003.

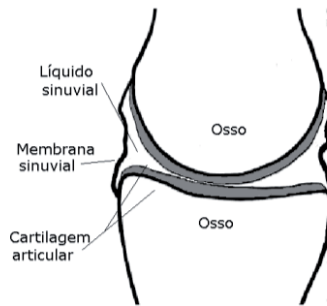


Fig. III.46 – Esquema de uma articulação sinovial humana.

Podemos calcular o trabalho realizado pelas forças de atrito numa articulação sinovial. Escolhemos uma situação em que as forças a actuar são do nosso conhecimento: a da articulação coxo-femural quando o corpo assenta numa só perna (Eq. III.50). Consideremos o trabalho das forças de atrito a actuar no prato cartilagíneo da epífise da articulação, durante o andamento. Na perna assente no solo, no decurso de um passo, ocorre um deslocamento relativo dos pontos de contacto nas superfícies da articulação, com realização de trabalho das forças de atrito. Entretanto a outra perna avança sem estar apoiada no solo, pelo que não interessa, no presente estudo. Vamos supor que, durante um passo normal, o ângulo de rotação da cabeça do fémur é de  $60^\circ$  (1,047 rad). Sendo 3,2 cm o raio de curvatura do prato cartilagíneo da epífise, o deslizamento relativo das superfícies, é de cerca de  $3,2 \times 1,047 = 3,35$  cm. Recordemos que, nas condições consideradas, a resultante das forças de acção do osso coxal sobre a cabeça do fémur (a força  $\vec{R}$  da Fig. III.37), é normal à superfície e tem intensidade 2,4 W. Então a força de atrito cinético é  $F_c = 2,4W\mu_c$  e o trabalho realizado durante o passo é  $T = 3,35 \times 2,4 \times W \times \mu_c$  dyn. Para um homem de 80 Kg e  $\mu_c = 0,003$  o trabalho do atrito é  $T = 7,2 \times 80 \times 9,8 \times 10^3 \times 0,003 = 18\,910,1$  erg  $\approx 1,89 \times 10^{-3}$  J. Este valor é muito pequeno pois equivale aproximadamente ao dispendido

quando se levanta à altura de 50 cm uma massa de 0,380 g!

Considerando ainda o andamento, vamos supor que o pé bate no solo com o calcanhar com uma força de módulo  $F$  que faz o ângulo  $\phi$  com o solo.

As componentes de  $\vec{F}$  segundo a direcção da tangente e da normal ao solo, suposto horizontal, são  $F_t$  e  $F_N$ . Quando o pé não escorrega, a componente  $F_t$  é equilibrada pela força de fricção  $F_f$  entre o calcanhar e o solo.

Temos que

$$F_t = F_N \operatorname{tg} \phi$$

Para o pé não escorregar

$$F_f = F_t$$

e

$$\mu_e F_N = F_N \operatorname{tg} \phi \quad \text{e} \quad \mu_e = \operatorname{tg} \phi$$

ou seja, a condição de não deslizamento é independente de  $F_N$ .

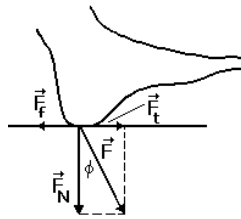


Fig. III.47 - Ao andar o pé bate no solo com o calcanhar com a força de módulo  $F$  que faz o ângulo  $\phi$  com o solo.

No caso de um salto de borracha a bater no asfalto,  $\mu_e = 0,6$  (ver Quadro III.1) vem  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,6 = 30,96^\circ$ . Se a força faz um ângulo menor ou igual a  $30,96^\circ$  o salto não escorrega. Se este ângulo é excedido, mesmo que ligeiramente, o salto desliza subitamente, pois, mal ocorre deslizamento relativo entre as superfícies passa a aplicar-se o coeficiente de atrito cinético.

### III.13 - Fundamentos de dinâmica do ponto e de sistemas de pontos

#### III.13.1 - Momento linear (ou quantidade de movimento) de um sistema de pontos materiais

Um corpo pode considerar-se um conjunto discreto de partículas de massa individual  $m_i$ . Nesta perspectiva a massa  $M$  do corpo é a soma de todas as partículas que o constituem.

$$\sum_1^n m_i = M \quad \text{III.55}$$

Por sua vez, o peso do corpo  $\vec{W}$  é a soma vectorial dos vectores peso  $\vec{w}_i$  correspondentes a cada partícula

$$\sum_1^n \vec{w}_i = \vec{W} \quad \text{III.56}$$

A Eq. III.56 pode obter-se a partir da Eq. III.55 multiplicando ambos os seus membros pelo vector  $\vec{g}$ , aceleração da gravidade e recordando a segunda lei de Newton, ou seja,

$$\sum_1^n m_i \vec{g} = M \vec{g}$$

equação equivalente a III.56.

Estes vectores são praticamente paralelos e a sua soma, o peso do corpo, obtém-se somando escalarmente as intensidades, como se depreende em baixo

$$\sum_1^n \vec{w}_i = W \quad \text{III.57}$$

A resultante dos pesos do conjunto de partículas que constituem um corpo é um vector força, que traduz o efeito da gravidade sobre o corpo. Não

ficaremos, contudo, inteiramente esclarecidos sobre esta força sem sabermos onde é aplicada. Este ponto é o centro de gravidade, ou de massa, do corpo. Implicitamente, já utilizámos este conceito quando analisámos problemas de equilíbrio. Considerou-se sempre o peso aplicado no centro de gravidade do corpo, que supusemos conhecido.

Se considerarmos o corpo um sistema contínuo caracterizado pela função  $\rho(x,y,z)$  (massa volúmica) e considerando o domínio  $\mathbf{D}$ , abrangido pelo sólido, dividido em pequenos elementos finitos de volume  $\Delta\tau_i$ , de massa específica média  $\bar{\rho}_i$ , a massa do sólido é, aproximadamente:

$$M \approx \sum_D \bar{\rho}_i \Delta\tau_i \quad \text{III.58}$$

onde  $\bar{\rho}$  é a massa específica média no elemento de volume  $\Delta\tau$ .

O valor exacto é o limite do somatório da Eq. III.58 quando  $\Delta\tau$  tende para zero, ou seja,

$$M = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_D \rho(x,y,z) \Delta\tau = \int_D \rho(x,y,z) dt \quad \text{III.59}$$

Passámos a ter a soma das massas de um grande número de elementos infinitesimais de volume  $d\tau$ , em torno de pontos  $A(x,y,z)$  onde a massa específica é  $\rho(x,y,z)$ .

Consideremos um corpo constituído por  $n$  partículas de massa  $m_i$  e que sobre cada partícula actua uma força externa  $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$  sendo  $\vec{a}_i$  a aceleração da partícula. Supondo que a partícula  $i$  se desloca com velocidade

$\vec{v}_i$  o seu momento linear será  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ , como  $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$  podemos escrever

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \text{III.60}$$

ou seja, a força externa a actuar sobre cada uma das partículas que formam o corpo é igual à derivada em ordem ao tempo do momento linear dessa partícula.



Vem para a resultante de todas as forças externas a actuar

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_i = \sum_1^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{III.61}$$

onde

$$\vec{P} = \sum_1^n \vec{p}_i .$$

Conclui-se da Eq. III.61 que a resultante das forças exteriores a actuar no corpo é igual à derivada em ordem ao tempo do momento linear do sistema. A resultante das forças interiores é nula, não contribuindo para a variação do momento linear. Podemos ainda concluir que força é requerida para alterar a quantidade de movimento; alternativamente, uma variação da quantidade de movimento (ou impulso) produz a geração de uma força.

Considerando as projecções escalares dos vectores em estudo segundo um eixo orientado, por exemplo, o eixo dos  $zz$  temos:

$$R_Z = \frac{dP_Z}{dt} \quad \text{III.62}$$

$R_Z$  e  $P_Z$  são as projecções de  $\vec{R}$  e  $\vec{P}$  sobre o eixo dos  $zz$  e são valores algébricos. Da Eq. III.62 conclui-se que a derivada em ordem ao tempo da projecção sobre um eixo do vector momento linear de um sistema de pontos materiais, é igual à projecção sobre o mesmo eixo da resultante das forças externas a actuar no sistema.

Se  $\vec{P} = \text{Const.}$  há conservação do momento linear e será

$$\vec{R} = 0 \quad \text{III.63}$$

A resultante das forças exteriores é nula. Isto sucede nos sistemas isolados, isto é, sistemas sobre os quais não actuam forças exteriores. Assim, como para o ponto material isolado, esta expressão diz-nos que o movimento do sistema de pontos é rectilíneo e uniforme (princípio da inércia). Contudo,

agora a expressão diz-nos mais pois podemos ter os mais variados movimentos dentro do sistema.

Podemos considerar alguns exemplos. Quando uma espingarda dispara, o momento linear inicial do sistema espingarda + bala é zero. Se não actuarem forças exteriores, após o disparo o momento linear do sistema continuará a ser nula. Sendo  $m$  e  $\vec{V}$  a massa e velocidade da bala e  $M$  e  $\vec{v}$  a massa e velocidade da espingarda, teremos sempre

$$\vec{P} = m \vec{V} + M \vec{v}$$

claro que  $M\vec{v}$  corresponde à reacção ou coice da espingarda.

### III.13.2 - Momento cinético

Por definição, momento cinético é o momento do vector momento linear. O momento cinético da partícula  $i$  de um corpo que se move com o momento linear  $\vec{p}_i$ , em relação a um dado ponto  $O$  é

$$\vec{\Omega}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{III.64}$$

$\vec{r}_i$  é o vector posição da partícula em relação a um ponto arbitrário tomado como origem de um sistema de eixos.

Admitindo que a regra para a derivação do produto vectorial de duas funções vectoriais é idêntica à do simples produto de duas funções escalares, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Omega}_i}{dt} &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \vec{v}_i \times m \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i \end{aligned}$$

$$= \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad \text{III.65}$$

onde  $\vec{F}_i$  é a resultante das forças a actuar no ponto. Conclui-se que a derivada do momento cinético da partícula  $i$  em relação a um dado ponto  $O$  é igual ao momento das forças aplicadas no ponto em relação a  $O$ .

Considerando o somatório dos momentos cinéticos de todas as partículas constituintes do corpo

$$\vec{\Omega} = \sum_1^n \vec{\Omega}_i \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \sum_1^n \frac{d\vec{\Omega}_i}{dt}$$

por outro lado

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

é o momento resultante das forças exteriores a actuarem em todas as partículas constituintes do corpo, em relação ao ponto  $O$ .

Considerando o somatório de ambos os membros da Eq. III.65, temos

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{M} \quad \text{III.66}$$

A derivada em ordem ao tempo do momento cinético total dum sistema de pontos materiais, em relação a um dado ponto, é igual ao momento resultante das forças exteriores em relação ao mesmo ponto.

Consideremos um eixo orientado ( $zz$ ) e as projecções sobre esse eixo dos vectores derivadas dos momentos cinéticos das partículas em relação a um ponto do eixo

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = M_z \quad \text{III.67}$$

A derivada em ordem ao tempo da componente do momento cinético

total de um sistema de pontos materiais segundo um dado eixo é igual ao momento resultante das forças exteriores em relação ao eixo.

### III.14 - Centro de massa de um sistema de pontos materiais

Centro de massa de um sistema de pontos materiais é um ponto **G** tal que

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad \text{III.68}$$

em que  $\vec{r}_G$  e  $\vec{r}_i$  são os vectores posição do centro de massa e da partícula de ordem **i** em relação a um ponto arbitrário origem de um sistema de eixos e  $M = \sum m_i$  a massa do sistema.

Considerando as componentes escalares do vector posição do centro de massa,  $\vec{r}_G$ , segundo os três eixos, temos

$$R_{G,x} = \frac{\sum m_i r_{i,x}}{M}, \quad r_{G,y} = \frac{\sum m_i r_{i,y}}{M} \quad \text{e} \quad r_{G,z} = \frac{\sum m_i r_{i,z}}{M} \quad \text{III.69}$$

Os centros de massa de objectos simétricos e de densidade uniforme são os seus centros geométricos.

Voltando à Eq. III.68 e como  $\sum_{i=1}^n m_i = M$  podemos escrever:

$$\sum m_i \vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i$$

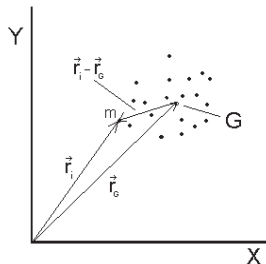


Fig. III.48 - Vector posição ( $\vec{r}_i - \vec{r}_G$ ) da massa  $m_i$  em relação ao centro de massa **G**.

donde

$$\sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G) = 0 \quad \text{III.70}$$

O somatório dos produtos das massas das partículas pelos vectores posição das partículas em relação ao centro de massa do sistema é nulo.

Derivando a Eq. III.68 em ordem ao tempo, obtemos

$$\vec{v}_G = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

O primeiro membro é a velocidade  $\vec{v}_G$  do centro de massa e o numerador do segundo membro é o momento linear total do sistema  $\vec{P}$ , então

$$M \vec{v}_G = \vec{P} \quad \text{III.71}$$

O momento linear do sistema é o momento linear do centro de massa supondo aí concentrada toda a sua massa.

Derivando ambos os membros desta igualdade vem

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

ou

$$M \vec{a}_G = \vec{R} \quad \text{III.72}$$

onde  $\vec{a}_G$  é a aceleração do centro de massa. Esta equação é formalmente idêntica à equação fundamental da dinâmica e diz que o centro de massa de um sistema se move como se fosse um ponto material onde estivesse concentrada toda a massa do sistema e onde estivessem aplicadas todas as forças exteriores que actuam no sistema. O movimento do centro de massa é independente da acção das forças interiores.

Uma outra propriedade do centro de gravidade tem a ver com o momento em relação a um ponto. Consideremos a Eq. III.46,  $\sum_1^n \vec{w}_i = \vec{W}$  referente aos pesos das partículas constituintes de um sistema material e calculemos o momento resultante dos momentos destes pesos em relação a uma origem  $O$ . Obtemos

$$\sum_1^n \vec{r}_i \times \vec{w}_i = \sum_1^n \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \quad \text{III.73}$$

com  $\vec{g}$  o vector aceleração da gravidade.

Consideremos agora a Eq. III.68, multiplicada por  $\mathbf{M}$ ,

$$M \vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i \quad \text{III.74}$$

e multipliquemos vectorialmente ambos os membros da equação por  $\vec{g}$ . Vem:

$$M \vec{r}_G \times \vec{g} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}$$

ou seja

$$\vec{r}_G \times \vec{W} = \sum \vec{r}_i \times \vec{w}_i$$

O momento resultante em relação a um ponto dos pesos de um conjunto de partículas é o momento, em relação ao mesmo ponto, do peso total do sistema concentrado no centro de gravidade.

### III.14.1 - Centro de massa de um corpo plano homogéneo com a forma de um triângulo rectângulo OAB de área S.

Consideremos o triângulo OAB dividido em  $n$  elementos de área  $dS_i = y dx$  e massa  $dm_i = \sigma dS_i$ , para o elemento de área com abcissa entre  $x_i$  e  $x_i+dx$ , onde  $\sigma$  é a densidade superficial (massa/cm<sup>2</sup>).

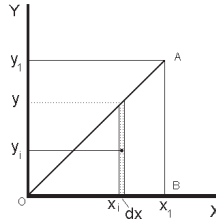


Fig. III.49 - Cálculo do centro de massa do triângulo OAB. A área subentendida pelo lado OA e os XX é dividida em retângulos de área  $ydx$ .

Então, as coordenadas do centro de massa são:

$$x_G = \frac{\sum dm_i x_i}{M} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{\sum dm_i y_i}{M},$$

ou

$$x_G = \frac{\sum \sigma x_i dS_i}{S \sigma} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{\sum \sigma y_i dS_i}{S \sigma},$$

ou ainda

$$x_G = \frac{\sum x_i dS_i}{S} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{\sum y_i dS_i}{S} \quad \text{III.75}$$

No limite, quando  $dx \rightarrow 0$  e, atendendo a que  $dS_i = y dx$ , os últimos somatórios transformam-se em

$$x_G = \frac{\int_0^{x_1} x y dx}{S} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{\int_0^{x_1} \frac{y^2}{2} dx}{S} \quad \text{III.76}$$

Notar que a ordenada do elemento é  $y_i = y/2$ .

Como  $S = \frac{x_1 y_1}{2}$  e a equação da recta que contém a hipotenusa do

triângulo é  $y = \frac{y_1}{x_1} x$ , a primeira das Eqs. III.76 pode escrever-se

$$x_G = \frac{y_1}{x_1} \int_0^{x_1} x^2 dx = \frac{y_1}{x_1} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{x_1} = \frac{y_1}{3} x_1^2$$

donde

$$x_G = 2 \frac{x_1}{3} \tag{III.77}$$

Para a componente segundo os  $yy$  e considerando que  $dx = \frac{x_1}{y_1} dy$

$$\frac{x_1 y_1}{2} G = \int_0^{y_1} \frac{x_1 y}{y_1} \frac{1}{2} y dy = \frac{x_1}{2y_1} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{y_1} = \frac{x_1}{2y_1} \frac{y_1^3}{3}$$

donde

$$y_G = \frac{y_1}{3} \tag{III.78}$$

A localização do centro de massa é então como se vê na Fig. III.50.

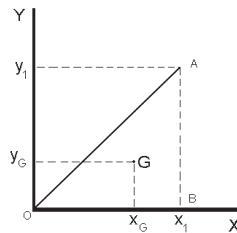


Fig. III.50 - Posição do centro de massa no triângulo rectângulo OAB.

### III.14.2 - Centro de massa de corpos homogêneos com a forma de um triângulo equilátero ou isósceles

O centro de massa de um corpo homogêneo com a forma de um triângulo equilátero ou isósceles pode obter-se facilmente decompondo-o em dois triângulos rectângulos iguais, calculando os correspondentes centros de massa ( $G_1$  e  $G_2$ ), considerando aí concentrada a massa ( $m/2$ ) do respectivo triângulo e calculando o centro de massa ( $G$ ) para este sistema de dois pontos.

O centro de massa do triângulo isósceles é o centro de massa do



sistema de dois pontos  $G_1$  e  $G_2$  cujas coordenadas já aprendemos a calcular e cuja localização é  $G_1(x_{22}/3, y_{11}/3)$  e  $G_2(2x_{22}/3, y_{11}/3)$ .

Então,

$$G_x = (m/2 \times x_{22}/3 + m/2 \times 2x_{22}/3) / m = x_{22}/2 \quad \text{III.79}$$

$$G_y = (m/2 \times y_{11}/3 + m/2 \times y_{11}/3) / m = y_{11}/3 \quad \text{III.80}$$

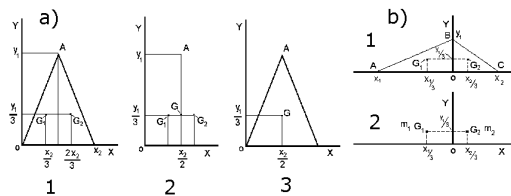


Fig. III.51 – a) Determinação do centro de massa de um triângulo isósceles por decomposição em dois triângulos rectângulos. b) Caso do corpo ter a forma de um triângulo escaleno.

Para o caso do corpo ter a forma de um triângulo escaleno

$$G_x = [m_1 \times (-x_1/3) + m_2 \times x_2/3]/m \quad \text{III.81}$$

$$G_y = (m_1 \times y_1/3 + m_2 \times y_1/3)/m = y_1/3 \quad \text{III.82}$$

Como  $m_1/m_2 = x_1/x_2 = 1/k$  a primeira das equações pode transformar-se em

$$G_x = (m_1 \times (-x_1/3) + k m_1 \times k x_1/3)/m = m_1 x_1 (k^2 - 1)/3m \quad \text{III.83}$$

### III.14.3 - Centro de massa do corpo humano

Em muitas situações interessa conhecer a posição do centro de massa do corpo humano ou de partes do corpo humano. É evidente que a localização do centro de massa do corpo pode depender da postura em que o corpo se encontra, sentado, de cócoras, em pé, etc. Na posição de deitado ou em pé, o centro de massa encontra-se a uma distância dos pés de cerca de 60% da altura do indivíduo.

Um processo de determinar o centro de massa utiliza uma tábua as-

sente sobre arestas de suportes prismáticos de secção triangular (Fig. III.52). Os prismas, por sua vez, têm as bases assentes em pratos de balanças. Supõe-se que a tábua, de peso  $W_t$ , é homogénea. Encontrando-se o sistema em equilíbrio, as forças a actuar nos apoios (cujos módulos igualam os pesos indicados nas balanças) são iguais e opostas às correspondentes reacções a actuar na tábua. Dada a natureza dos apoios há que considerar os momentos das forças na condição de equilíbrio.

Consideremos o caso **a)** em que a tábua está apoiada em pontos equidistantes do ponto médio. Nesta situação verifica-se que as leituras das duas balanças são iguais ( $F_1 = F_2$ ). A condição das forças, no equilíbrio da barra, indica que  $F_1 + F_2 = W_t$ . Sendo  $F_1 = F_2$  a condição dos momentos mostra que  $W_t$  está aplicada no centro da barra, que é também o centro de gravidade.

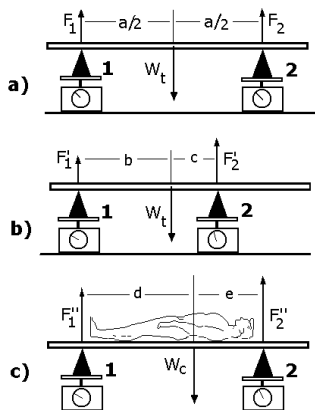


Fig. III.52 - a) A tábua está apoiada em pontos equidistantes do ponto médio. As leituras das duas balanças são iguais ( $F_1 = F_2$ ). b) O apoio 2 está mais próxima do centro da barra, verifica-se que  $F_2' > F_1'$ . c) Determinação do centro de massa de um homem.

Na situação **b)** em que o apoio 2 está mais próxima do centro da barra, verifica-se que  $F_2' > F_1'$ . A condição de  $F_1' + F_2' = W_t$  tem de verificar-se e supõe-se que a distância  $\ell = b+c$  é conhecida. Então, considerando o apoio 1 origem dos momentos é

$$F_2' \ell = W_t b$$

que permite o cálculo directo de  $\mathbf{b}$  e da posição do centro de massa.

O conhecimento das leituras das forças e da distância total permite, como vimos, a determinação do centro de massa de corpos homogéneos mas, se corpo for não homogéneo, nada se opõe à sua aplicação.

Para a determinação do centro de massa de um homem (situação  $\mathbf{c}$ ) coloca-se inicialmente a tábua apoiada em dois pontos equidistantes do ponto médio desta e à distância  $\mathbf{a}$  entre si e levam-se ao zero as leituras nas duas balanças. A pessoa deita-se sobre a tábua e são feitas então as leituras de  $F_1''$  e  $F_2''$ . Chamando  $\mathbf{W}_c$  ao peso do indivíduo podemos escrever

$$W_c = F_1'' + F_2'' \quad \text{III.85}$$

e

$$F_2'' a = W_c (a - e) \quad \text{III.86}$$

que permite o cálculo da distância  $\mathbf{e}$  e conhecer uma das coordenadas do centro de massa. Se o homem se colocar em pé, sobre a tábua, de modo a que o plano perpendicular a esta e contendo o seu eixo, seja um plano frontal e em seguida rodar de  $90^\circ$ , é possível a obtenção das outras duas coordenadas do centro de massa.

É importante referir aqui que no caso b) da Fig. III. 56, o suporte 2 não pode estar na mesma metade da tábua que o suporte 1. Neste caso o equilíbrio dos momentos não pode ser verificado e a tábua roda em torno da aresta mais próxima do centro de massa da tábua. Uma outra maneira de dizer isto é que, para ocorrer o equilíbrio quando um sólido assenta sobre uma superfície, a vertical que contém o centro de massa tem de passar pela base de sustentação. Esta é a área entre os apoios, no nosso caso um rectângulo em que dois dos lados são as arestas de apoio.

### III.15 - Momento de inércia

A posição dum sólido que se move em torno dum eixo fixo, é determinada pelo ângulo diedro  $\theta$ , que fazem entre si dois planos que passem pelo dito eixo, um dos quais é fixo e o outro se encontra ligado invariavelmente ao sólido móvel. O problema do movimento de rotação do sólido

em torno do eixo, resolve-se pela simples aplicação do teorema do momento cinético, Eq. III.57:

$$\frac{d\Omega_Z}{dt} = \mathcal{M}_Z \quad \text{III.87}$$

Este teorema fornece-nos uma relação escalar em que entra o ângulo  $\theta$  e a partir da qual se pode determinar a equação do movimento.

Uma noção que interessa neste estudo é a noção de momento de inércia dum sistema em relação a um eixo. É definido pela equação

$$I = \sum m_k \rho_k^2 \quad \text{III.88}$$

em que  $m_k$  é a massa do ponto material  $A_k$  e  $\rho_k$  a distância de  $A_k$  ao eixo com  $k = 1, 2, 3, \dots$

O momento de inércia  $I$  caracteriza a maneira como a massa do sólido está distribuída em relação ao eixo.

O mesmo sólido tem momentos de inércia diferentes em relação a eixos diferentes.

### III. 15.1 - Movimento de um ponto em relação a um sistema de referência

O movimento de um ponto  $\mathbf{P}$  em relação a um dado sistema de eixos pode ser definido por uma mudança contínua da posição de  $\mathbf{P}$  relativamente ao sistema.

Em cada instante a posição de  $\mathbf{P}$  é determinada pelas suas coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  pelo que a igualdade  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$  (equação do movimento) é equivalente a

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad \text{III.89}$$

A posição do ponto  $\mathbf{P}$  pode também ser determinada pelo seu vector posição, ou seja, o vector que une a origem das coordenadas com o ponto e aponta para este.

A equação do movimento pode escrever-se na forma  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ficando o movimento inteiramente definido. Conhecendo o vector  $\vec{r}(t)$  em cada instante conhece-se a lei do movimento e a trajectória.

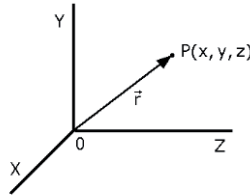


Fig. III.53 -Vector posição  $\vec{r}(t)$  do ponto **P** num sistema de eixos **XYZ**.

Podemos referir-nos não a  $\vec{r}(t)$  mas às suas componentes num sistema de eixos XYZ, ou seja

$$\vec{r}(t) = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \quad \text{III.90}$$

O conjunto de igualdades  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$  é equivalente a  $\vec{r}(t)$ .

### III.15.2. Movimento de um ponto conhecida a trajectória

O movimento de um ponto sobre uma trajectória conhecida pode ser caracterizado fixando sobre a trajectória um ponto  $\mathbf{P}_0$  que se toma como origem dos arcos  $s$ . Teremos para definir a posição do ponto as funções  $P = P(s)$  ou  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  e

$$\begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= z(s) \end{aligned} \quad \text{III.91}$$

Estas relações traduzem somente a parte geométrica do movimento. A lei do movimento, que caracteriza a sua parte cinemática e define, instante a instante, a posição do ponto sobre a trajectória é dada pela função  $s = s(t)$ .

Sejam  $P$  e  $P'$  duas posições ocupadas por um ponto móvel respectivamente nos instantes  $t$  e  $t'$ .

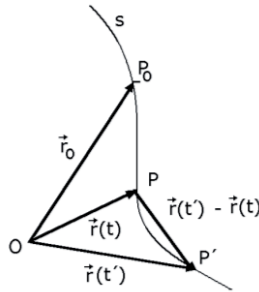


Fig. III.54 - Trajectória do ponto  $P$  e vectores posição para três instantes  $0$ ,  $t$  e  $t'$ .

A expressão

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} \quad \text{III.92}$$

dá-nos a velocidade vectorial média  $\vec{v}_m$  no intervalo de tempo  $t' - t$ . A velocidade vectorial média  $\vec{v}_m$  dá o espaço percorrido sobre a corda no intervalo de tempo  $t' - t$ . O vector  $\vec{v}_m$  tem a direcção e sentido do vector  $\vec{r}(t') - \vec{r}(t)$  e é  $(t' - t)$  vezes mais pequeno.

O limite da relação da Eq.

$$\vec{v} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{III.93}$$

é a velocidade vectorial no instante  $t$ . É o limite para que tende a velocidade vectorial quando o intervalo de tempo em que se calcula tende para zero. A velocidade vectorial no instante  $t$  é a derivada em ordem ao tempo da função  $\vec{r}(t)$  calculada no instante  $t$ .

Sendo  $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$  é também

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad \text{III.94}$$

A relação  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  é o limite da relação  $\frac{\vec{r}(s') - \vec{r}(s)}{s' - s}$  quando  $s' \rightarrow s$ , ou seja a relação entre o comprimento da corda e o comprimento do arco, quando o arco tende para zero.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{s' \rightarrow s} \frac{\vec{r}(s') - \vec{r}(s)}{s' - s} = \hat{t} \quad \text{III.95}$$

Este limite é um vector com a direcção da tangente ao arco em **P** e com grandeza unitária, Fig. III.55 - a), ou seja,

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{t}$$

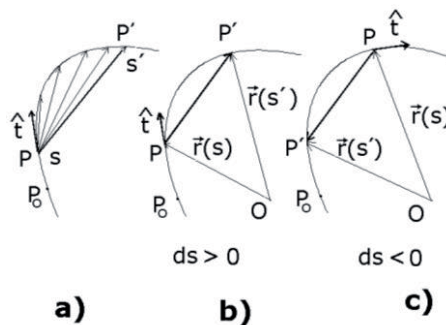


Fig. III.55- a) O limite da relação  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  é um vector com a direcção da tangente ao arco em **P** e com grandeza unitária e tem sempre o sentido dos arcos crescentes, pois será o sentido  $PP'$  se  $ds$  for positivo b) e de  $P'P$  se  $ds$  for negativo c).

Quando consideramos uma origem dos arcos  $P_0$  admitimos implicitamente um sentido positivo e outro negativo para os mesmos. Sendo assim, e como  $dt$  é positivo, a relação  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{t}$  tem sempre o sentido dos arcos crescentes, pois será o sentido  $PP'$  se  $ds$  for positivo e de  $P'P$  se  $ds$  for negativo, Fig. III.55 - b) e c). Então  $\hat{t}$  é um vector unitário tangente à trajectória e com o sentido dos arcos crescentes.

Como podemos escrever  $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$

vem

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

ou, fazendo

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt} \text{ e } v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad \text{III.96}$$

$v_x$  é a componente escalar de  $\vec{v}$  segundo o eixo dos  $xx$ , ou a velocidade de  $x$ , ponto que á a projecção de  $P$  sobre o eixo dos  $xx$ .

Em resumo: a velocidade  $\vec{v}$  é um vector de grandeza  $v = \frac{ds}{dt}$ , dirigido em cada ponto da trajectória segundo a direcção da tangente e no sentido do movimento.

Define-se aceleração média no intervalo  $t' - t$  como o vector

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} \quad \text{III.97}$$

Ao limite

$$\vec{a} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \quad \text{III.98}$$



que é a derivada da função  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  para o valor  $t$  da variável independente, chama-se a aceleração no instante  $t$ .

Sendo

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{t}$$

vem

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \hat{t} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{t}}{dt}$$

ou

$$= \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{t}}{ds} \tag{III.99}$$

Pela fórmula de Frenet tem-se que

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{\hat{n}}{\rho}$$

com  $\hat{n}$  vector normal unitário apontado para o centro de curvatura e  $\rho$  o raio de curvatura da trajectória no ponto. Então

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n} \tag{III.100}$$

Por outro lado a velocidade linear  $v$  e a velocidade angular  $\omega$  estão relacionadas pela equação

$$v = \omega \rho$$

A aceleração pode decompor-se em duas componentes, uma com a direcção da tangente à trajectória a *aceleração tangencial*, outra com a direcção da normal e dirigida para o centro de curvatura (pois  $v^2$  e  $\rho$  são sempre positivos), a *aceleração centrípeta*.

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \omega^2 \rho \hat{n} \quad \text{III.101}$$

A aceleração está portanto no plano definido por  $\hat{t}$  e  $\hat{n}$ , chamado de plano osculador.

No movimento rectilíneo, variado ou não, a parcela  $\frac{v^2}{\rho} \hat{n}$  terá de ser nula pois  $\frac{1}{\rho} = 0$ , já que o raio de curvatura é infinito. No movimento uniforme, rectilíneo ou não, a parcela  $\frac{d^2s}{dt^2} \hat{t}$  terá de ser nula, pois como por hipótese não há variação da intensidade do vector velocidade  $\vec{v}$  será  $v$  constante e

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 0$$

### III.16 - Deformações

#### III.16.1 - Deformações elásticas nos sólidos

Uma barra sólida de secção  $S$  e comprimento  $l_0$ , quando sujeita à força de tracção  $F$  sofre uma deformação que se traduz por um aumento do comprimento (e diminuição das outras dimensões). Quando a deformação é elástica, a lei de Hooke é aplicável, ou seja, verifica-se uma relação de proporcionalidade entre a "tensão" ou esforço  $\frac{F}{S}$  e a deformação relativa ou

alongamento unitário  $\frac{\Delta l}{l_0}$  onde  $\Delta l$  é a variação de comprimento. Assim, temos (Fig. III.56):

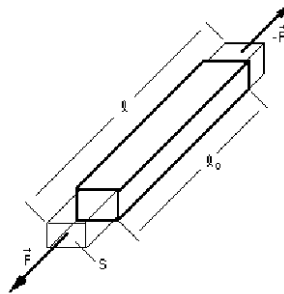


Fig. III.56 - Deformação por tração de uma barra de comprimento  $l_0$ .

$$\frac{F}{S} = E \frac{l - l_0}{l_0} = E \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{III.102}$$

A constante de proporcionalidade **E** é o módulo de elasticidade por tração ou módulo de Young<sup>3</sup>.

Quando a força que actua é uma força de compressão, ocorre um encurtamento da barra (e um aumento das outras dimensões) (Fig. III.57).

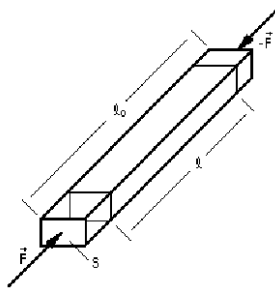


Fig. III.57 - Deformação por compressão de uma barra de comprimento  $l_0$ .

Se a deformação é elástica a relação de proporcionalidade

<sup>3</sup> - Os módulos de deformação são obtidos em laboratório utilizando uma velocidade de deformação padrão constante.

$$\frac{F}{S} = E \frac{\ell_0 - \ell}{\ell_0} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad \text{III.103}$$

permite definir o módulo de elasticidade por compressão que se verifica ser igual ao módulo de Young.

Notar que quando se consideram as deformações por tracção e compressão as forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  se encontram na mesma recta enquanto que, na definição de tensão tangencial ou de corte (Fig. IV.3) as forças se encontram em linhas paralelas.

Os sólidos sofrem também deformação quando actuados por forças tangenciais. Através da relação de proporcionalidade entre a tensão de corte e o ângulo de corte, quando um sólido é sujeito à acção de um binário (Fig. IV.3), definimos a rigidez do material. A equação 2.3 constitui a 3ª Lei de Hooke da elasticidade.

Na deformação de um prisma quadrangular recto de comprimento  $\ell$ , por tracção ou compressão, a variação  $\Delta \ell$  do comprimento do prisma é acompanhada por uma variação em sentido contrário das suas dimensões transversais. Pode considerar-se que o volume da barra se mantém constante durante a deformação, pelo que

$$\ell w h = (\ell + \Delta \ell) (w - \Delta w) (h - \Delta h)$$

na tracção e

$$\ell w h = (\ell - \Delta \ell) (w + \Delta w) (h + \Delta h)$$

na compressão.

Este facto é conhecido por efeito de Poisson.

Verifica-se que as deformações relativas em largura e altura, respectivamente  $\frac{\Delta w}{w}$  e  $\frac{\Delta h}{h}$ , (Fig. IV.62), são proporcionais à variação relativa do comprimento, quer se trate de tracção ou de compressão.

$$\frac{\Delta w}{w} = -\nu \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad \text{III.104}$$

$$\frac{\Delta h}{h} = -\nu \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

$\nu$  é o coeficiente ou razão de Poisson. Este coeficiente não tem dimensões, visto se tratar de uma relação entre dois números que são, afinal, as deformações relativas lateral e axial. O valor de  $\nu$  é sempre inferior à unidade e nos corpos isotrópicos  $\nu = 0,5$ . As Eqs. 2.25 constituem a segunda lei de Hooke da elasticidade.

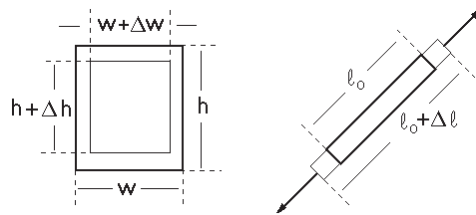


Fig. III.58 - Deformações longitudinal e transversas numa barra elástica sujeita a tração.

O módulo de Young e o coeficiente de Poisson caracterizam inteiramente as propriedades elásticas de sólidos homogêneos e isotrópicos. Nestes corpos, outros coeficientes de elasticidade podem ser definidos, mas serão sempre funções de  $E$  e  $\nu$ .

Se um corpo for constrangido de modo a não haver deformação lateral numa dada direcção verifica-se que há alteração do módulo de Young.

Na Fig. III.59 é exercida tração sobre uma barra com as forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$ , segundo o eixo dos  $xx$  e constrição lateral, também tractora, segundo o eixo dos  $yy$  com as forças  $\vec{R}$  e  $-\vec{R}$  que impedem a deformação segundo esta direcção. Nestas condições o módulo de Young da barra fica diferente e passa a ser

$$E' = E/(1 - \nu^2)$$

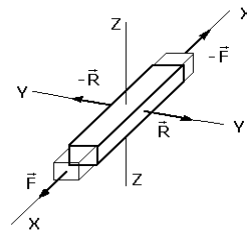


Fig. III.59 - É exercida tração sobre a barra segundo o eixo dos  $XX$  ( $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$ ), e constrição lateral tractora segundo o eixo dos  $YY$  ( $\vec{R}$  e  $-\vec{R}$ ) que impede a deformação segundo esta direcção

Por outro lado a deformação lateral não constrangida é aumentada pelo factor  $(1 + \nu)$ .

As artérias in vivo estão constrangidas na direcção longitudinal e são actuadas internamente por uma pressão radial que provoca tensão circunferencial (Fig.III.60).

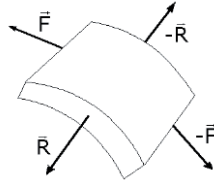


Fig. III.60 - As artérias in vivo estão constrangidas na direcção longitudinal e são actuadas internamente pela tensão circunferencial.

Pelas razões expostas o módulo de elasticidade das paredes é aumentado de um factor  $1/(1-\nu^2)$ .

Quando se considera a deformação sofrida por um volume  $V_0$ , quando sujeito a uma variação de pressão  $\Delta P$  e tratando-se de uma deformação elástica (Fig. III.61), verifica-se que:

$$P = \epsilon \frac{\Delta V}{V_0} \tag{III.105}$$

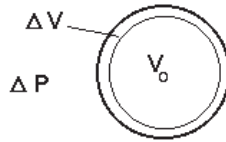


Fig. III.61 - Deformação sofrida por um volume  $V_0$  quando sujeito a uma variação de pressão  $\Delta P$ .

A relação  $\frac{\Delta V}{V_0}$  é a deformação relativa, ou variação relativa de volume e  $\epsilon$  o módulo de compressibilidade.

Facilmente se vê que, para um mesmo esforço, quanto maiores forem os valores de  $E$ , menores serão as deformações. Vejamos valores de módulo de Young (em  $N\ m^{-2}\times 10^{10}$ ) para alguns materiais (Tabela III.1):

**Tabela III.1** – Valores do módulo de Young para alguns materiais em  $N\ m^{-2}\times 10^{10}$

Osso	
Aço	2
Vidro	20
Prata	~9
Borracha	7,5
Membrana do glóbulo vermelho	$10^{-4}$
	0,1–10

O osso humano tem módulo de Young médio de cerca de  $2\times 10^{10}\ N\ m^{-2}$ , mas só suporta deformações relativas até próximo de 0,01. Pela Eq. IV.102 a pressão máxima que o osso pode suportar é de  $2\times 10^8\ N\ m^{-2}$ . Pode ocorrer

Que a área de contacto numa articulação seja da ordem de alguns  $cm^2$  o que significa que poderá suportar forças da ordem dos  $10^4\ N$ .

Consideradas as deformações em comprimento e em volume, falemos agora na deformação sofrida por uma lâmina muito fina (espessura desprezível) e sujeita a deformações elásticas.

A acção deformadora é uma força por unidade de comprimento, situada no plano da lâmina e normal ao lado em que actua, Fig. III.62. Esta relação é, em termos físicos, uma tensão. No caso da tracção da barra, considerado anteriormente, o esforço, cujas dimensões é de força por unidade de área, é pois, incorrectamente chamado de tensão.

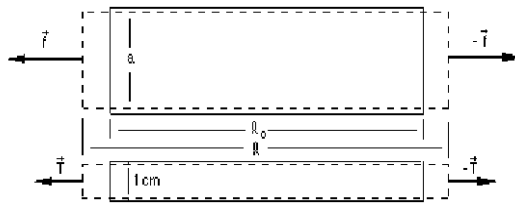


Fig. III.62 - Deformação sofrida por uma tira elástica quando sujeito a uma tensão T.

Verifica-se que a deformação relativa sofrida pelo comprimento da lâmina elástica obedece à lei de Hooke num certo intervalo de valores da tensão. Na Fig. III.62 considera-se também o caso de uma tira elástica com 1 cm de lado para o qual, a tensão iguala a força aplicada

A relação de proporcionalidade entre tensão e deformação relativa é dada pela expressão

$$T = \frac{f}{a} = E' \frac{l - l_0}{l_0} = E' \frac{l}{l_0} - E' \quad \text{III.106}$$

sendo  $E'$  a elastância do material.

A elastância caracteriza a deformação de lâminas de uma particular substância elástica sob a acção de tensões. De modo semelhante ao módulo de Young, para uma mesma acção deformadora, quanto maior for a elastância ( $E'$ ) menor será a deformação relativa. A representação gráfica da função  $T(l)$  é uma recta com coeficiente angular ( $\text{tg } \alpha$ ) igual a  $E'/l_0$  e interceptando o eixo dos xx na abcissa  $l_0$ , Fig. III.63.

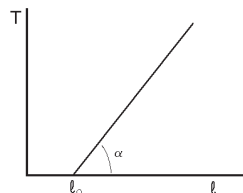


Fig. III.63 - Relação entre tensão e comprimento para uma lâmina de material elástico, obedecendo à lei de Hooke.



### III.16.2 - Deformação relativa (strain)

Definimos a deformação relativa de uma barra quando sujeita a forças de tracção pela relação

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Após aplicar uma tracção a uma barra, cujo comprimento varia de  $l_0$  a  $l_1$ , apliquemos nova tracção produzindo um aumento de comprimento até ao valor final  $l_2$ .

As sucessivas deformações produzidas serão:

$$\varepsilon_1 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = \frac{l_2 - l_1}{l_1}$$

A deformação total pode ser calculada por:

$$\varepsilon = \frac{l_2 - l_0}{l_0} = \frac{l_2}{l_0} - 1$$

Contudo, a soma  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ , que parecia óbvio ser igual à equação anterior, dá

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} + \frac{l_2 - l_1}{l_1} = \frac{l_1}{l_0} + \frac{l_2}{l_1} - 2$$

Como se vê

$$\varepsilon = \frac{l_2}{l_0} - 1 \neq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{l_1}{l_0} + \frac{l_2}{l_1} - 2 \quad \text{III.107}$$

O segundo membro da Eq. IV.107 só tem valor próximo do primeiro se tivermos  $l_1 \approx l_2$ .

A deformação relativa, como a definimos, só se pode aplicar a muito

---

pequenas deformações e de modo aproximado.

### III.16.3 - Deformação diferencial

Pequenas deformações podem escrever-se na forma diferencial

$$d\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varepsilon}{d\ell} = \frac{1}{\ell} \quad \text{III.108}$$

por integração vem

$$\varepsilon = \ln \ell + C^{\text{te}}$$

Para  $\varepsilon = 0$  é  $\ell = \ell_0$  ou  $0 = \ln \ell_0 + C^{\text{te}}$  e  $C^{\text{te}} = -\ln \ell_0$   
vem

$$\varepsilon = \ln \ell - \ln \ell_0$$

ou  $\varepsilon = \ln \ell / \ell_0$

Se tivermos duas deformações sucessivas  $\varepsilon_1$ , e  $\varepsilon_2$  nas mesmas condições do caso anterior vem

$$\varepsilon_1 = \ln \ell_1 / \ell_0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = \ln \ell_2 / \ell_1$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \ln \ell_1 / \ell_0 + \ln \ell_2 / \ell_1$$

$$= \ln [(\ell_1 / \ell_0 \times \ell_2 / \ell_1)]$$

$$= \ln \ell_2 / \ell_0$$

A deformação global é então:

$$\varepsilon = \ln \ell_2 / \ell_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{III.109}$$


---

Para pequenas deformações, a deformação diferencial total para duas tensões crescentes e sucessivas iguala a soma das deformações diferenciais parciais.

### III.16.4 - Tipos de deformação

Considerando a evolução no tempo da deformação quando se aplica a um material uma tensão que se mantém constante, distinguem-se dois casos:

- 1) A deformação  $\varepsilon_0$  mantém-se constante, quando é aplicada uma tensão constante  $T_0$ .

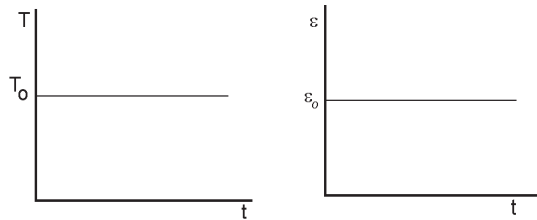


Fig. III.64 - A deformação mantém-se constante durante a aplicação da tensão. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\varepsilon(t)$ .

- 2) A deformação aumenta durante a aplicação de uma tensão constante. O aumento, que pode ser linear no início, tende para um valor máximo.

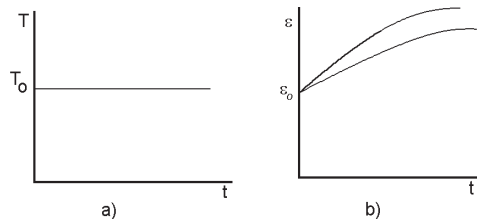


Fig. III.65 - Durante a aplicação da tensão a deformação aumenta com o tempo até ser atingido um patamar. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\varepsilon(t)$ .

### III.16.5 - Reacção à supressão instantânea da tensão

Após a supressão de uma tensão constante, poderão ocorrer diversos comportamentos no que respeita à deformação, desde a sua manutenção parcial ou total, até ao completo desaparecimento. Os exemplos que se seguem são situações típicas dentre um conjunto de possibilidades que serão focadas mais adiante.

- 1) A deformação é definitiva, ou seja, mantém-se constante com o valor que apresentava no instante em que cessa a aplicação da carga ( $t = t_2$ ), Fig. III.66.

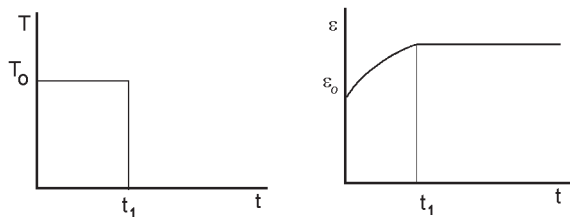


Fig. III.66 - A deformação mantém-se após a suspensão da tensão no instante  $t_0$ .

À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

- 2) A deformação diminuí bruscamente até um certo valor  $\epsilon_1$ , que varia com o material, seguindo-se uma diminuição lenta da deformação (deformação residual) levando muitas vezes a uma deformação permanente  $\epsilon_p$ .

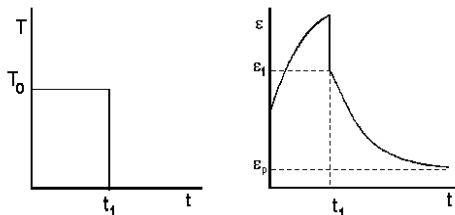


Fig. III.67 - Após a suspensão da tensão no instante  $t_1$  a deformação diminui bruscamente, mantendo-se esta diminuição durante um período de deformação residual até ser atingido um estágio que poderá corresponder à deformação permanente. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

### III.17 - Classificação reológica dos materiais

Em termos reológicos distinguem-se diversas categorias de materiais algumas das quais descrevemos a seguir:

#### III.17.1 - Sólidos indeformáveis (Sólidos de Euclides)

Nestes sólidos teóricos nunca ocorre deformação. Tem-se  $\varepsilon = 0$  para qualquer  $T$ .

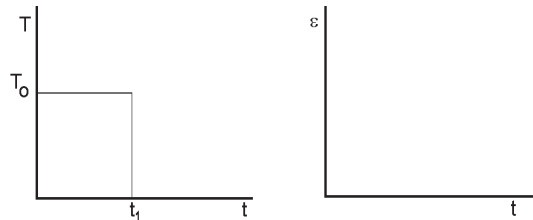


Fig. III.68 - A tensão não produz qualquer deformação no sólido. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\varepsilon(t)$ .

#### III.17.2 - Sólidos dotados de elasticidade linear (Sólidos de Hooke)

A tensão produz, no sólido dotado de elasticidade linear, uma deformação proporcional ao valor da tensão. Um corpo perfeitamente elástico restitui integralmente a energia que lhe foi transmitida.

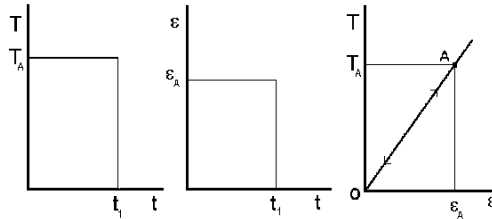


Fig. III.69 - A tensão produz, no sólido, uma deformação proporcional ao valor da tensão. À esquerda a função  $T(t)$ . Ao meio a correspondente função  $\varepsilon(t)$ . À direita a função  $T(\varepsilon)$ .

Na Fig. III.69 encontra-se à esquerda a função  $T(t)$ . Ao meio a correspondente função  $\varepsilon(t)$ . À direita a função  $T(\varepsilon)$ .

Sob a acção da tensão  $T_A$  ocorre a deformação  $\varepsilon_A$ . Suprimindo a tensão,  $\varepsilon$  volta a zero. A função  $T(\varepsilon)$  é linear e unívoca.

### III.17.3 - Corpos plásticos

Os corpos plásticos só acusam deformação a partir de um limiar de tensão  $T_c$  (Fig. III.70). Uma vez ultrapassado esse limiar, se é suprimida a tensão, o material mantém a deformação máxima que atingiu,  $\varepsilon_{\max}$ .

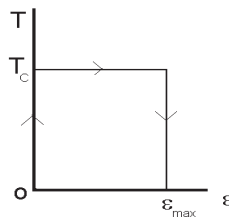


Fig. III.70 - A tensão só produz deformação no sólido a partir de um limiar de tensão  $T_c$ .

A deformação é, portanto, irreversível só sendo alterada por acção de outras forças.

### III.17.4 - Corpos viscosos

#### a) - Caso ideal

Líquido sem viscosidade, (líquido de Pascal)

$$T = 0 \quad \text{qualquer que seja } \varepsilon$$

#### b) - Líquidos viscosos

Podem considerar-se dois tipos de líquidos viscosos:

1. Líquidos newtonianos ou líquidos de viscosidade normal (Ver Fig. IV.28).
2. Líquidos não newtonianos (Ver Fig. IV.41).

Os líquidos viscosos para sofrerem deformação com uma velocidade (ou taxa)  $d\varepsilon/dt$  determinada, exigem que seja aplicada uma tensão tangencial não nula.

As Figs. IV.28 e IV.41 são de  $T$  em função de  $\frac{dv}{dy}$ . Para um dado valor de  $T$ , o gradiente da velocidade de deslocamento  $\frac{dv}{dy}$  das partículas no líquido representa também a velocidade de deformação do líquido, pelo que estas figuras podem também ser entendidas como a representação de  $T$  vs.  $\frac{d\varepsilon}{dt}$ , como é o caso da Fig. III.79.

De facto, se, sob a acção de forças tangenciais, uma partícula com coordenadas  $(x, y)$  sofre um pequeno deslocamento  $\Delta x$ , a deformação em relação à origem de coordenadas é (Ver Fig. IV.27),

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Se o deslocamento  $\Delta x$  ocorreu no intervalo de tempo  $\Delta t$ , a velocidade de deformação é

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{dx}{dy} \right] = \frac{d}{dy} \left[ \frac{dx}{dt} \right] = \frac{dv}{dy} \quad \text{III.111}$$

como se pretendia demonstrar.

Em resumo, o corpo de Newton apresenta uma taxa de deformação proporcional à tensão tangencial. Após a deformação, o corpo de Newton não tende a reconstituir a sua forma e dimensão inicial. Não há restituição de energia após supressão da tensão.

### III.17.5 - Corpos viscoelásticos

Um material puramente elástico é um caso ideal. Em tal material não ocorreria transformação de energia mecânica em calorífica, durante a deformação, ocorreria só armazenamento de energia, recuperável na totalidade.

Os materiais viscoelásticos armazenam energia mas dissipam uma fracção durante a deformação. Uma parte da energia potencial, teoricamente utilizável é, assim dissipada, durante a deformação dos materiais viscoelásticos. Além disso, estes materiais, durante os ciclos de carga e descarga mostram histerese, ou seja, as curvas tensão-deformação não apresentam o mesmo perfil durante a carga e a descarga. Nos corpos viscoelásticos a deformação é simultaneamente função da tensão (carga) e do tempo. Recordemos que nos corpos de elasticidade linear (ou corpos de Hooke), a deformação só depende da tensão  $T$ , não havendo qualquer dependência temporal entre a tensão aplicada e deformação.

As paredes vasculares têm propriedades viscoelásticas que influenciam a hemodinâmica, uma vez que contribuem com um termo reactivo para o valor da impedância do sistema circulatório. É requerida energia para deformar um corpo de Hooke mas essa energia é armazenada na forma de energia potencial elástica. Para se estudarem as propriedades reológicas dos vasos é necessário ter bases sobre teoria da elasticidade e da viscoelasticidade.

Os principais constituintes das paredes arteriais responsáveis são as fibras de colagénio e elastina, com comportamento viscoelástico e as fibras musculares lisas com comportamento passivo fundamentalmente viscoso.

#### III.17.5.1 - Sólidos de Voigt

Estes materiais apresentam propriedades que são, muitas vezes designadas de elasticidade retardada.

É costume considerarem-se três tipos de curvas no estudo da visco-

---



elasticidade: curvas de fluência (creep), curvas de relaxação e curvas de tensão-deformação.

**a) Curvas de fluência**

Fluência é a variação da deformação com o tempo, sem variação da carga. Assim, as curvas de fluência são curvas de deformação/tempo para uma tensão aplicada  $T_0$ , rectangular e de duração apropriada. Nos corpos de Voigt a tensão relaciona-se com a deformação  $\epsilon$  e com a velocidade de deformação  $\frac{d\epsilon}{dt}$ , através da Eq. IV.112

$$T(t) = E \epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt} \tag{III.112}$$

Onde  $E$  é o módulo de Young e  $\eta$  a viscosidade. A deformação tende para um limite  $\frac{T_0}{E}$  através de Eq. III. 113 que é o integral da Eq III.112,

$$\epsilon(t) = \frac{T_0}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}) \tag{III.113}$$

As curvas para um impulso de tensão de valor máximo  $T_0$  são as indicadas na III.71

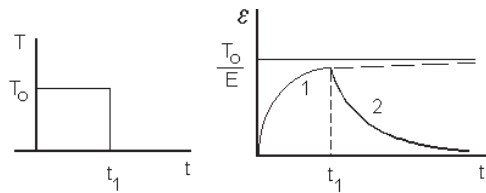


Fig. III.71 - Curva de fluência - corpo de Voigt - À esquerda a tensão rectangular aplicada  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ . 1- deformação vs. tempo até  $t=t_1$  com  $T= T_0$  e 2 recuperação.

A parte 1 da curva traduz a deformação durante a aplicação da tensão e corresponde à equação em baixo, que já conhecemos

$$\epsilon(t) = \frac{T_0}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}) \tag{III.114}$$

A parte 2 da curva traduz a deformação, após suspensão da aplicação da tensão (depois de  $t = t_1$ ) e é representada pela Eq. IV.114

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_1) e^{-\frac{E}{\eta}(t - t_1)} \quad \text{com } t > t_1 \quad \text{III.115}$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade de Young. A deformação tende para zero com o aumento do tempo.

Nas Eqs. III.113 e III.114 a relação  $\frac{\eta}{E}$  é a constante de tempo do processo. Assim, decorrido um intervalo de tempo  $\Delta t = \frac{\eta}{E}$ , após a suspensão da aplicação da tensão ( $t = t_1$ ) vem  $\varepsilon = \varepsilon(t_1) e^{-1}$ , ou seja, neste intervalo o material regenerou até  $e^{-1}$  da máxima deformação atingida.

### b) Curvas de relaxação

Em sentido geral, relaxação é o esforço, variável no tempo, necessário para manter uma deformação constante. Na prática chamam-se curvas de relaxação às curvas  $T(t)$  necessárias para induzir uma deformação rectangular.

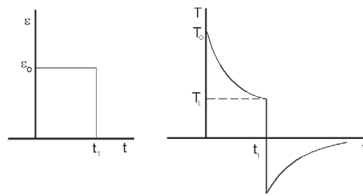


Fig. III.72 - Para a deformação rectangular vs. tempo calcula-se a tensão vs. tempo que é necessário aplicar para a produzir. À esquerda a função  $\varepsilon(t)$ . À direita a correspondente função  $T(t)$  para o corpo de Voigt.

A deformação mantém um valor constante, enquanto que a tensão necessária para a manter diminui a partir de  $T_0$  tendendo para um limite  $T_L$ . Para se anular  $\varepsilon$  para  $t = t_1$  tem  $T$  de tomar valores negativos, tendendo depois para zero.

Nos corpos de Voigt o fenómeno da relaxação mostra a existência de

memória nos sólidos viscoelásticos. A deformação, num dado instante, depende dos valores da tensão que anteriormente foram aplicados no sólido.

### c) Curvas de tensão-deformação

São as curvas  $T(\varepsilon)$  que podem ser obtidas a partir das curvas de relaxação

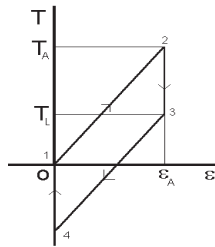


Fig. III.73 - Curva tensão-deformação (ciclo de histerese). (Corpo de Voigt).

Em **1**,  $\varepsilon = 0$  e  $T(\varepsilon) = 0$ ; em **2**,  $T(\varepsilon) = T_A$   $\varepsilon = \varepsilon_A$ . De **1** para **2**,  $T(\varepsilon)$  cresce de forma linear desde que  $\varepsilon_0$  se situe na região do comportamento elástico. De **2** para **3**,  $T(\varepsilon)$  decresce de  $T_A$  a  $T_L$  e  $\varepsilon = C^{te} = \varepsilon_A$ . De **3** para **4**,  $T(\varepsilon)$  decresce de forma linear, tendo  $T(\varepsilon)$  de ser  $< 0$  para  $\varepsilon$  voltar a zero. De **4** para **1**,  $T(\varepsilon)$  regressa a zero com  $\varepsilon = 0$ . O trajecto 1234 constitui um ciclo de histerese característico do material.

### III.17.5.2 - Fluidos de Maxwell

São fluidos que apresentam um certo grau de memória nas deformações. Após aplicação do impulso de tensão e uma vez terminado este, não é restaurada a forma inicial do corpo que mantém uma deformação residual  $\varepsilon_p$ . Certos tipos de silicones são exemplos destes fluidos.

#### a) Curva de fluência

Após aplicação do impulso rectangular de tensão e uma vez terminado este, não é restaurada a forma inicial do corpo que mantém uma deformação residual  $\varepsilon_p$ .

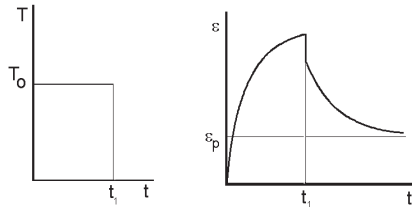


Fig. III.74 - Após o impulso de tensão não é restaurada a forma inicial do corpo que mantém uma deformação residual  $\epsilon_p$ . À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

### b) Curva de relaxação

A deformação nestes fluidos pode considerar-se como tendo dois componentes  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . O termo  $\epsilon_1$  é proporcional à tensão e a derivada de  $\epsilon_2$  em ordem ao tempo é proporcional à tensão, ou seja:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \text{III.116}$$

com

$$\epsilon_1 = \frac{T}{E} \quad \text{e} \quad \frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{T}{\eta}$$

E é o módulo de Young e  $\eta$  o coeficiente de viscosidade.

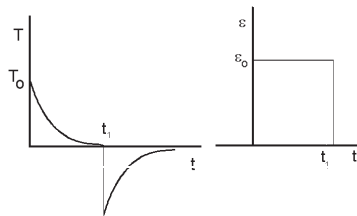


Fig. III.75 - Impulso de tensão a aplicar para originar uma deformação rectangular  $\epsilon_p$ . À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

Derivando a Eq. III.116 obtemos

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{d\epsilon_2}{dt}$$

ou

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\eta} \quad \text{III.117}$$

Analisemos a relaxação da acção deformadora a partir do momento em que a deformação atinge um valor constante  $\varepsilon_0$  para o qual  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ , donde

$$\frac{1}{E} \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\eta} = 0$$

ou

$$\frac{dT}{T} = -\frac{E}{\eta} dt \quad \text{III.118}$$

Integrando a Eq. III.118 considerando a condição inicial de  $T = T_0$  quando  $t=0$ , vem, para os fluidos de Maxwell,

$$T = T_0 e^{-\frac{E}{\eta} t} = T_0 e^{-\tau t} \quad \text{III.119}$$

O tempo  $\tau = \frac{\eta}{E}$ , que é o intervalo de tempo necessário para que a tensão se reduza de  $1/e$ , chama-se tempo de relaxação.

### c) Curva tensão-deformação

Os fluidos mostram um marcado ciclo de histerese (Fig.III.76).

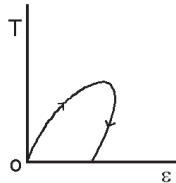


Fig. III.76 - Impulso de tensão a aplicar para originar uma deformação rectangular  $\varepsilon_p$ .

#### III.17.5.3 - Corpos plastoviscoelásticos (corpos de Bingham)

Estes comportam-se como corpos elásticos até um certo valor de tensão  $T_c$  apresentando, a partir daí, escoamento irreversível. O exemplo típico

deste corpo é o “chewing-gum” que apresenta elasticidade para pequenas tensões, após o que se deforma facilmente.

A função que relaciona tensão e deformação no corpo de Bingham acima de  $T_c$  é:

$$T = T_c + b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{III.120}$$

onde  $b$  é o coeficiente plástico.

### a) Curvas de fluência

Quando são aplicados impulsos de tensão inferiores ou iguais a  $T_c$  as curvas de fluência dos corpos de Bingham (Fig.III.77) são idênticas às da Fig.III.69, para a elasticidade linear.

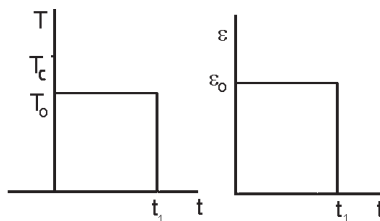


Fig. III.77 - Curva de fluência de um corpo de Bingham para um impulso de tensão inferior ao limiar. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\varepsilon(t)$ .

Para impulsos de tensão superiores a  $T_c$  a deformação dos corpos de Bingham varia de acordo com a Fig.III.78.

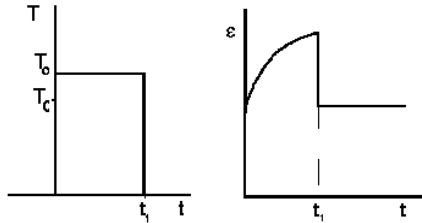


Fig. III.78 - Curva de fluência de um corpo de Bingham para um impulso de tensão superior ao limiar. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\varepsilon(t)$ .

### b) Curva tensão-velocidade de deformação

A função que relaciona tensão com velocidade de deformação (Eq. III.120) é uma recta com inclinação  $b$  e que nasce em  $T_c$  (Fig.III.79).

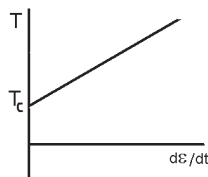


Fig. III.79 - Curva  $T$  vs.  $d\varepsilon/dt$  no corpo de Bingham.

## III.18 - Modelos físicos da deformação

### III.18.1 - Elasticidade

É usual utilizar-se modelos físicos no estudo do comportamento dos diversos materiais, quando sujeitos a tensões. Por exemplo, o comportamento perfeitamente elástico é simulado por uma mola perfeita (sem massa e livre de atritos), sobre a qual se exerce um esforço, Fig. III.80. A força produz uma deformação reversível, cujo valor varia com a intensidade da força sem depender do seu sentido de variação (ausência de histerese).

Sendo a deformação proporcional à força, podemos escrever  $F = K \Delta x$ , onde  $k$  é a constante da mola. Esta equação é formalmente equivalente a

$$T = E \varepsilon \quad \text{III.121}$$

$T$  é a acção deformadora e  $\varepsilon$  a deformação.

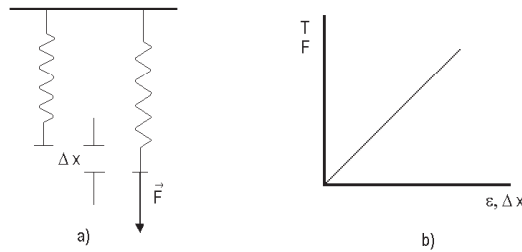


Fig. IV.80 - a) Deformação elástica e linear de uma mola perfeita. b) Modelo físico.

Existe, contudo, a possibilidade do comportamento elástico não ser linear. A função  $T(\varepsilon)$ , neste caso terá uma expressão gráfica como na Fig. III.81.

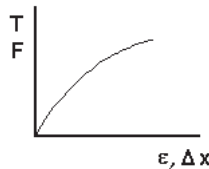


Fig. III.81 - Deformação elástica não linear.

Um exemplo deste comportamento é o das paredes dos vasos sanguíneos e de outras membranas biológicas, resultante de haver dois tipos de fibras elásticas na sua constituição.

Alguns materiais deformam-se de forma não reversível, embora o seu comportamento possa ser descrito por leis bem definidas. Uma deformação diz-se plástica quando é irreversível e se manifesta a partir de um limiar de tensão, ocorrendo, a partir daí, simultaneamente com a carga (ou acção deformadora) aplicada. O comportamento plástico pode ser modelado em termos físicos por uma massa em repouso, apoiada, com atrito, sobre uma superfície horizontal (Fig. III.82). Quando uma força horizontal é aplicada ao corpo, este não se desloca enquanto que esta não ultrapassa a força de atrito entre o corpo e o plano horizontal.



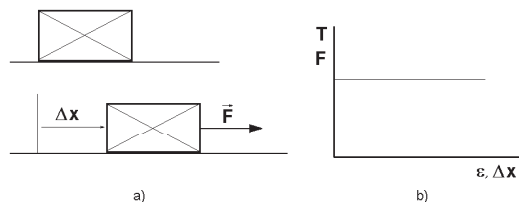


Fig. III.82 - Modelo físico do comportamento plástico.

O modelo físico utilizado para representar outro tipo de deformação, a deformação viscosa, considera o comportamento de um amortecedor, simulado pelo deslocamento de um êmbolo, com um pequeno orifício, no interior de um cilindro contendo líquido, Fig. III.83-a) e b). A velocidade de deslocamento do êmbolo é proporcional à pressão **P** sobre ele aplicada, Fig. III.83-c).

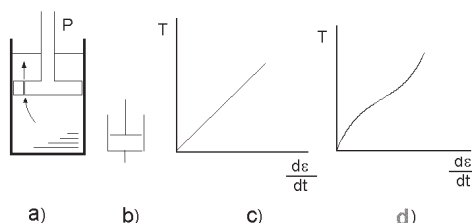


Fig. III.83 - Modelo físico da deformação viscosa. a) Um êmbolo, com um pequeno orifício, no interior de um cilindro contendo líquido a deslocar-se sob a ação da pressão **P** (amortecedor). b) Representação esquemática de a). c) Curva  $T(d\epsilon/dt)$  na viscosidade linear. d) Curva  $T(d\epsilon/dt)$  na viscosidade não linear.

No caso da curva c) tem-se que

$$T = \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad \text{III.122}$$

A Fig. III.83-d) refere-se a uma curva  $T(d\epsilon/dt)$  na viscosidade não linear.

A partir da associação dos modelos físicos que referimos podem considerar-se as propriedades de materiais, cujo comportamento seja a sobreposição dos diversos tipos analisados.

### III.18.2 - Viscoelasticidade

Quando as deformações e as velocidades de deformação são pequenas o comportamento viscoelástico é um processo linear que pode ser simulado por associação dos elementos elásticos e viscosos (mola e amortecedor).

O amortecedor não se deforma instantaneamente pois uma velocidade de deformação infinita obriga a uma tensão infinita. No instante de aplicação do pulso rectangular de tensão é o amortecedor que suporta todo o esforço, pois na mola, ainda sem deformação, a tensão é nula.

No modelo de um sólido de Voigt a mola e o amortecedor encontram-se em paralelo. A deformação da mola e do amortecedor terão de ser iguais mas a tensão é repartida pelos dois elementos. A equação que traduz o processo é, como vimos, a Eq. II.112 que podemos escrever

$$T = T_e + T_v = E \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{III.123}$$

onde  $T_e$  e  $T_v$ , são respectivamente as componentes elástica e viscosa da tensão.

No fluido de Maxwell a mola e o amortecedor encontram-se em série. A tensão é a mesma para os dois elementos mas as deformações correspondentes são diferentes, sendo a deformação total a soma das deformações individuais dos dois elementos.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{III.124}$$

Um terceiro modelo de corpo viscoelástico é o sólido de Kelvin que alguns autores ainda identificam ao modelo de Voigt. No modelo de Kelvin uma mola em série com um amortecedor, encontram-se em paralelo com uma segunda mola.

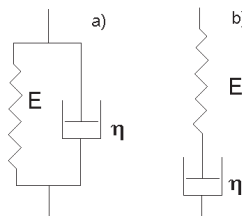


Fig. III.84 - Modelos físicos do comportamento viscoelástico:  
a) Sólido de Kelvin; b) Fluido de Maxwell.

### III.18.3 - Modelo físico do corpo de Bingham

Em a) a força aplicada sobre a mola não faz deslocar a massa senão após ter atingido um certo valor limite, ou seja, após ter distendido a mola e ter vencido o atrito na superfície (situação plastoelástica).

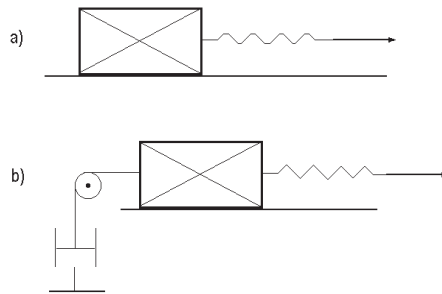


Fig. III.85 - a) Corpo plastoelástico; b) Corpo plasto-viscoelástico.

Em b) há ainda que vencer a fricção imposta pelo comportamento viscoso do amortecedor (situação plastoviscoelástica).

### III.19 - Movimentos harmônicos

Quando um sistema mecânico, inicialmente em equilíbrio, é perturbado devido à acção de forças, a sua configuração modifica-se (ocorre deformação), resultando daí variação na sua energia interna. A energia acumulada pelo sistema pode transformar-se em energia cinética, ocorrendo, em geral, nestas condições, oscilações de diversos tipos. Um dos casos extremos é o de um processo reversível (dito elástico) que após a deformação, evolui no sentido do restabelecimento do estado inicial, por acção de forças proporcionais à deformação. Nestas condições as oscilações são harmónicas, ou seja, durante a deformação o sistema acumula energia potencial que transforma em seguida integralmente em energia cinética, que, por sua vez, pode transformar-se em energia potencial, e assim por diante. Transformações de uma forma de energia na outra sucedem-se de forma

periódica e com um período bem definido  $T$ . Essas oscilações dizem-se oscilações próprias do sistema se, após uma acção de perturbação inicial exterior instantânea, estas se mantêm quando o sistema é abandonado a si próprio. No entanto, nas situações reais, as oscilações próprias não se mantêm indefinidamente devido à inevitável dissipação de energia mecânica. É o caso do pêndulo que oscila no ar. As suas oscilações são, necessariamente, amortecidas. Se o sistema se mantêm a oscilar graças a uma acção externa periódica as oscilações dizem-se forçadas. Certos sistemas são capazes de oscilações não elásticas que se podem opor às oscilações harmónicas. São caracterizadas por apresentarem oscilações de relaxação - variações bruscas nos valores de certas grandezas, durante uma curta fase do período de oscilação e variações muito lentas das mesmas quantidades, no decorrer da parte restante do período.

### III.19.1 - Oscilações harmónicas

Em termos gerais, as oscilações harmónicas são oscilações cuja lei de movimento é dada por

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{III.125}$$

A oscilação de um ponto material que sofre um afastamento da posição de equilíbrio e que para este é solicitado por uma força  $\vec{T}$  proporcional à distância  $x$  (esta chamada alongação) a que o ponto se encontra da posição de equilíbrio (caso de uma mola perfeitamente elástica assente numa superfície sem atrito afastada da posição de equilíbrio). Consideremos o movimento da massa  $m$  apoiada sobre uma superfície horizontal, sem atrito e ligada a um ponto fixo  $O$ , por meio de uma mola ideal. Quando se desloca a massa da posição de equilíbrio  $1$  para a posição  $2$ , a mola exerce sobre a massa uma força elástica  $\vec{T}$  dirigida para  $O$ .  $\vec{T}$  é uma força central atractiva de módulo proporcional à distância  $x$  em relação à posição de equilíbrio, ou seja

$$f = -k x \quad \text{III.126}$$

Se abandonarmos a massa em  $2$ , esta fica sujeita a movimento vibra-

tório em torno de 1

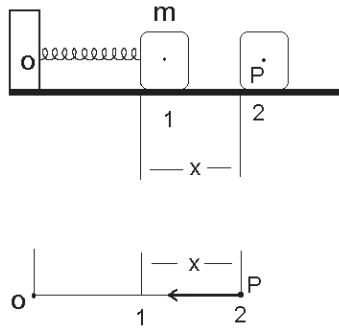


Fig. III.86 - Movimento sem atrito da massa  $m$ , ligada a um apoio fixo por uma mola, após afastamento da posição de equilíbrio 1.

Na expressão anterior  $k$  é uma constante positiva, característica da mola. O sinal menos da expressão indica que a força tem sentido contrário ao do deslocamento.

Entrando com a equação fundamental da dinâmica  $\vec{f} = m\vec{a}$  e com a Eq. III.126 podemos obter a equação do movimento da massa  $m$ . Atendendo a que a trajetória é segundo o eixo dos  $xx$  e que  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , vem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \text{III.127}$$

Quando ocorre uma força é proporcional a um deslocamento e de sentido contrário a este, obtém-se como equação diferencial geral do movimento, suposto rectilíneo, uma equação do tipo da Eq. III.127 onde  $x$  é a variável que traduz as coordenadas do movimento e  $\frac{k}{m}$  tem um valor constante que depende dos parâmetros do sistema.

Qualquer das igualdades:

$$X_1 = A \sin \omega t \quad x_2 = A \cos \omega t \quad x_3 = A \sin (\omega t + \phi) \quad \text{III.128}$$

é solução da equação diferencial (Eq. III.127). Basta derivar duas vezes cada uma das expressões em ordem ao tempo e comparar com o valor do segundo membro após substituição de  $x$ . Não é difícil entender-se o significado físico da existência destas soluções. Consideremos (Fig. III.87) um movimento oscilatório harmónico que está a ocorrer num dado meio desde uma origem de tempo indefinida e que, a partir de um dado instante, se pretende fixar a origem dos tempos.

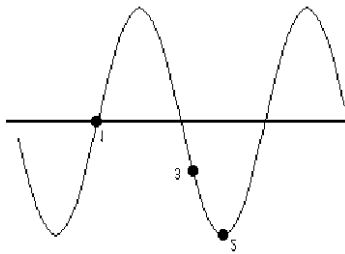


Fig. III.87 - Função sinusoidal do tempo com vários pontos considerados arbitrariamente origem dos tempos.

Se a origem que escolhermos for o ponto **1**, a solução que serve é  $x_1$ , se for **2** é  $x_2$  e se for **3** é  $x_3$ . Portanto qualquer destes valores de  $y$  corresponde ao mesmo fenómeno físico e teria que ser previsto pela Eq. III.27. Aliás a solução  $x_3$  contém  $x_1$  e  $x_2$  respectivamente para  $\phi=0$  e  $\phi=\pi/2$ .

Outro modelo físico equivalente à situação da Fig. III.86 é o da Fig. III.88 onde a mola que sob a acção estática da massa  $m$  sofreria um deslocamento  $\delta$ , foi sujeita a acção instantânea de outra força de tal modo que no instante  $t$  sofre o deslocamento  $(x + \delta)$ .

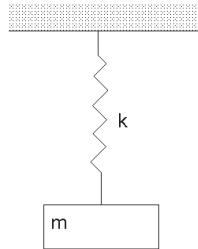


Fig. III.88 - Massa suspensa de uma mola perfeitamente elástica de constante k.

As forças a actuar na massa **m** são o seu próprio peso  $mg$  e a força elástica  $k(\delta + x)$

A aplicação da lei de Newton (da dinâmica) ao sistema leva à equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(\delta + x) + mg \quad \text{III.129}$$

Como  $k\delta = mg$  vem  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$  que é a Eq. III.127.

### III.19.2 - Amortecimento

O estudo que fizemos deste movimento oscilatório corresponde a uma idealização da situação real. O movimento do correspondente sistema real não pode ser representado pela equação de um movimento oscilatório de amplitude constante pois sabemos que ocorreria um gradual enfraquecimento do movimento que acabaria por se extinguir.

Este amortecimento resulta do facto de existirem forças de atrito que, em primeira aproximação são proporcionais à velocidade do móvel. Estas forças não foram consideradas nos casos anteriormente estudadas.

Tomando em conta a força elástica da mola  $f_1 = -kx$  e a força de atrito  $f_2 = -h \frac{dx}{dt}$ , temos

$$a = \frac{f}{m} = \frac{f_1 + f_2}{m}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-kx - h \frac{dx}{dt}}{m} \quad \text{III.130}$$

A constante **h** é a característica do sistema e será tanto maior quanto maior for o atrito exercido sobre a massa **m**.

Podemos dar a forma seguinte à Eq. III.130

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{III.131}$$

onde,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{km}} \quad \text{III.132}$$

A solução da Eq. III.131 quando  $\xi < 1$  tem a forma

$$x = A e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{III.133}$$

Esta equação corresponde ao produto de uma senoide de frequência angular  $\omega_0$  por uma função exponencial decrescente, que tende para zero quando **t** aumenta. A constante  $\omega_0$  é a frequência angular do movimento não amortecido e  $\xi$  a constante que, para um dado sistema com frequência própria  $\omega_0$ , caracteriza o amortecimento.

Quando  $\xi$  é pequeno ( $\xi \ll 1$ ) o amortecimento é pequeno e o movimento oscilatório decresce lentamente como na Fig. III.89 (a cheio) de acordo com o termo exponencial (a tracejado). Quando  $\xi$  é próximo da unidade a amplitude das oscilações é amortecida rapidamente.

Se  $\xi \geq 1$  a Eq. III.133 já não é utilizável. O sistema retoma a posição de equilíbrio sem oscilações.



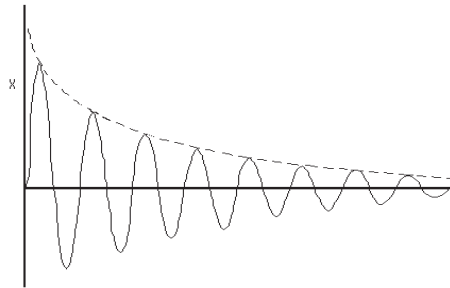


Fig. III.89 - Movimento harmônico amortecido com  $\xi < 1$ .

Para valores de  $\xi$  superiores à unidade obtém-se uma função  $x(t)$  com uma representação gráfica do tipo da Fig. III.90. O movimento é amortecido e tenderá para o equilíbrio, sem alterar o sentido, tanto mais lentamente quanto maior for  $\xi$ .

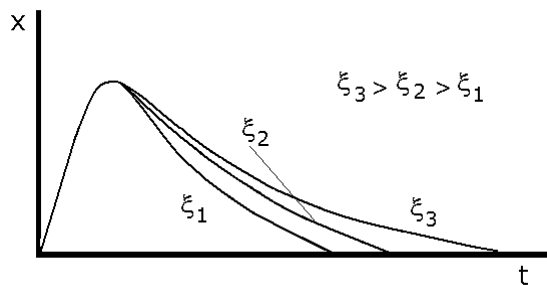


Fig. III.90 - Amortecimento com  $\xi > 1$ .

Uma aplicação do que dissemos encontra-se nos aparelhos de medida analógicos onde existe uma agulha indicadora, com certa massa, ligada a um ponto fixo por uma mola recuperadora constituindo um sistema oscilatório. Se o amortecimento for muito pequeno quando a agulha se afasta da posição de equilíbrio, durante uma medição, ficará a oscilar em torno da nova posição de equilíbrio demorando a parar.

Se  $\xi$  for muito superior ao valor crítico ( $\xi \geq 1$ ) a agulha não oscila mas demora muito tempo a chegar à nova posição de equilíbrio. As melhores

condições para se obter uma resposta rápida são aquelas em que o amortecimento é próximo de  $\xi = 1$ . Cumprida esta condição a Eq. III.133 mostra-nos ainda que o equilíbrio será alcançado mais rapidamente se  $\omega_0$ , a frequência natural for grande.

Um modelo físico que simule o movimento harmónico amortecido encontra-se na Fig III.91.

Em paralelo com a mola elástica encontra-se um amortecedor que simula as forças de fricção em jogo. A resultante das forças a actuar na massa  $m$  é dada pela equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(\delta+x) + mg - h \frac{dx}{dt}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x - \frac{h}{m} \frac{dx}{dt}, \text{ equivalente à Eq. III.131.}$$

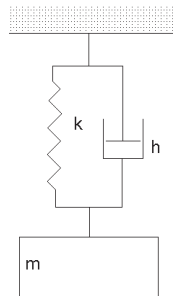


Fig. III.91 - Modelo físico que simula o movimento harmónico amortecido.

### III.19.3 - Oscilações forçadas. Ressonância

Suponhamos que um dado sistema oscilatório com frequência própria (ou natural)  $\omega_0$  é feito oscilar sob a acção de uma força externa variável e com variação sinusoidal  $F = R_m \sin \omega_f t$ .

Notemos que a frequência angular  $\omega$  é diferente de  $\omega_0$ . A equação do sistema é agora

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \xi \omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = (R_m/m) \sin \omega_f t \quad \text{III.134}$$

A solução desta equação mostra que a frequência da oscilação é  $\omega_f$ , a frequência da força aplicada. A resolução desta equação ultrapassa o âmbito das nossas lições mas convém reter que o movimento não é amortecido embora existam forças resistivas de atrito. Embora haja perdas de calor por atrito estas são compensadas através de trabalho realizado pela força externa de modo que a amplitude do movimento não diminui com o tempo. Há uma transferência contínua de energia do sistema que origina a força  $R_m \sin \omega_f t$  para o sistema oscilatório.

As condições em que se verifica tal transferência de energia dependem do valor do amortecimento  $\xi$  e de relação que existe entre a frequência própria do sistema  $\omega_0$  e a frequência do sistema forçante  $\omega_f$ .

São pois os valores de  $\xi$  e  $\omega_f$  que determinam a amplitude de oscilação. Na figura seguinte são representadas em abcissas os valores de  $\omega_f$ , frequência da força, e em ordenadas as amplitudes dos movimentos resultantes, para diversos valores de  $\xi$ .

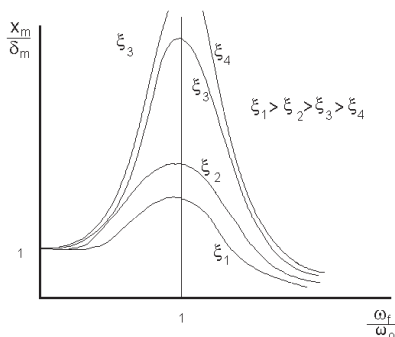


Fig. III.92 - Para diversos valores de  $\xi$  são representados em ordenadas os valores dos factores de amplificação  $x_m/\delta_m$  dos movimentos resultantes, em função de  $\omega_f/\omega_0$ .

Para qualquer valor do amortecimento  $\xi$  a amplitude é máxima quando  $\omega_f = \omega_0$  ou seja quando a frequência do sistema forçante coincide com a frequência própria do sistema oscilante. A amplitude correspondente a uma dada frequência é tanto maior quanto menor for  $\xi$ .

### III.20 – Os movimentos do corpo humano

Os seres humanos executam os mais diversos tipos de movimentos para executar tarefas, para se deslocarem, para se defenderem, etc. Estes movimentos são, na maioria dos casos, acompanhados por acção muscular voluntária e com a participação de outros sistemas. O homem desenvolveu máquinas que se destinam a transformar uma força, noutra ou noutras, com linhas de acção ou intensidade mais apropriadas para a execução de determinadas tarefas. As alavancas constituem um tipo destas máquinas com as quais se pretende aumentar a intensidade de uma força estrategicamente aplicada. Nos vertebrados existem sistemas constituídos por ossos, músculos e articulações que desempenham funções que se assemelham às das alavancas. Os ossos representam as partes rígidas destas alavancas. Os músculos desenvolvem, em geral, as forças que irão produzir a potência útil. Esta é capaz de desencadear movimento ou, simplesmente, criar equilíbrio com o elemento ou força resistente, em torno de uma articulação que é o fulcro, em geral, uma estrutura considerada fixa. O estudo das alavancas, na sua componente física, consiste na aplicação directa de conceitos elementares, já estudados, como momentos de forças e equilíbrio. No corpo humano encontram-se todos os tipos de alavanca que, usualmente, se consideram em mecânica elementar. São classificadas em relação ao elemento intermédio (potência, resistência e fulcro, ou ponto fixo) e chamadas respectivamente de interpotente, interfixa ou interresistente. A tentativa de enquadrar nestas categorias certos movimentos, pode levar a imprecisões devido à complexidade dos sistemas em estudo, com múltiplos ossos, por vezes não rigidamente ligados e numerosas ligações. Na maioria dos casos, é mais rigorosa uma análise do sistema com base no modelo do corpo livre do que a sua classificação em termos de alavanca, com as simplificações, a que, em geral, obriga.

Na Fig. III.93-b pode observar-se o músculo bicépede a ligar o braço ao antebraço. A contracção deste músculo permite a acção de levantamento do antebraço e mão. A articulação do cotovelo é o fulcro em torno do qual o antebraço e mão, a funcionar como alavanca, executa a rotação. O fulcro é considerado fixo. Calculemos a intensidade das forças requeridas para manter o conjunto antebraço e mão na posição horizontal (Fig. III.93-a). O peso do conjunto  $\vec{W}$ , que representa a resistência a vencer, é aqui normal ao antebraço e aplicado no centro de massa do antebraço mais mão.

O músculo bicípide exerce sobre o antebraço a força dirigida para cima  $\vec{F}$ , a potência, com componente normal ao antebraço,  $\vec{F}_N$ , com componente tangencial  $\vec{F}_T$ , anulada pela reacção na articulação do cotovelo. O bicípide está ligado ao antebraço à distância do cotovelo  $OA \approx 4$  cm, e o centro de gravidade do antebraço mais mão, à distância  $OG \approx 21$  cm.

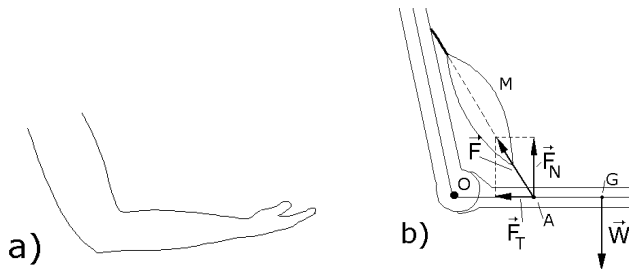


Fig. III.93 - a) Braço e antebraço+mão horizontais; b) Esquema de forças a actuar.

Considerando o sistema em equilíbrio, a equação dos momentos, calculados em relação ao fulcro, conduz-nos a

$$F_N \times \ell_P - W \times \ell_R = 0 \quad \text{III.135}$$

ou 
$$\frac{W}{F_N} = \frac{\ell_P}{\ell_R}$$

onde  $OA = \ell_P$  e  $OG = \ell_R$ .

Esta relação entre as componentes normais das forças e os inversos das respectivas distâncias ao fulcro (braços) é bem conhecida. O elemento intermédio nesta alavanca é a potência (alavanca interpotente). A relação entre a intensidade da força que produz o trabalho útil e a força aplicada é designada de vantagem mecânica do sistema<sup>4</sup>.

Uma situação mais geral com o antebraço não horizontal e a presença de um peso  $P$  na mão está esquematizada de modo simplificado na Fig. III.94. A força exercida pelo músculo pode ser decomposta em duas componentes:  $F_N$  segundo a normal ao antebraço e  $F_T$  com a direcção do ante-

<sup>4</sup> Na prática, a vantagem mecânica de um sistema é inferior ao valor teórico devido a perdas resultantes do atrito.

braço. O corpo com peso  $P$  tem componente  $P_N$  segundo a normal ao antebraço aplicado segundo a vertical que contem o centro de massa e a componente  $P_T$  tangencial. As forças  $W_T$  e  $W_N$  são as componentes do peso  $W$  do antebraço+mão aplicadas no centro de massa do conjunto, respectivamente segundo a direcção do antebraço e da normal. A resultante das componentes  $F_T$ ,  $P_T$  e  $W_T$  segundo a direcção do antebraço é compensada pela reacção do úmero na articulação do cotovelo.

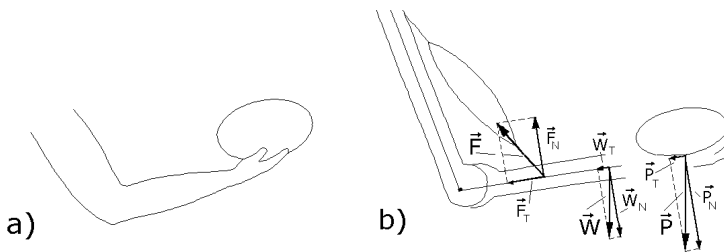


Fig. III.94 – a) Mão segurando um peso; b) Esquema de forças a actuar.

As componentes normais permitiam-nos avaliar o efeito de alavanca. A aplicação directa das equações do equilíbrio das forças e dos momentos neste problema seria mais aconselhável.

Um exemplo de alavanca interfixa é o da articulação occipito-atloideia, onde a cabeça se liga à coluna vertebral.

A Fig. III.95 a) podia servir para calcular a força muscular que é necessário exercer para a cabeça ser mantida direita num indivíduo em pé.

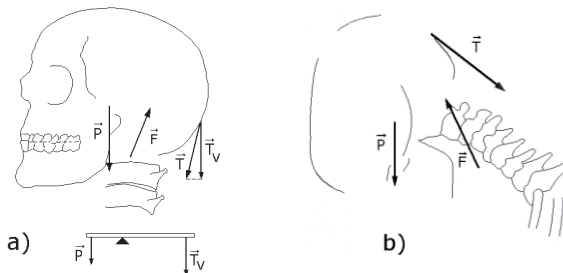


Fig. III.95 - Exemplo de alavanca interfixa: a articulação occipito-atloideia, que liga a cabeça à coluna vertebral. a) Posição normal. b) Inclinação da cabeça.

O vector  $\vec{P}$  que representa o peso da cabeça aplicado no respectivo centro de gravidade é a resistência e a componente  $\vec{T}_V$  da força muscular é a potência. A força  $\vec{F}$  actua na articulação occipito-atloideia sendo anulada por uma reacção igual e oposta. Na Fig. III.95 b) o equilíbrio entre a força do músculo extensor, o peso da cabeça e a reacção da articulação condiciona a posição de leitura com a cabeça inclinada.

Em certas circunstâncias a articulação da perna com o pé pode considerar-se como um exemplo de alavanca interresistente, rara no corpo humano (Fig. III.96 a)). O fulcro encontra-se no polegar.

O peso total de um homem na posição vertical pode ser suportado por um único pé que, além disso, é suficientemente forte para levantar todo o peso devido a uma acção do tipo alavanca. A especialização do pé que torna possível esta acção, inclui a forma do arco do pé e a posição e robustez do polegar.

Os ossos associados à acção de alavanca no pé têm dimensões e encontram-se posicionados de modo a oferecerem suporte adequado para efectuar os passos, no andar.

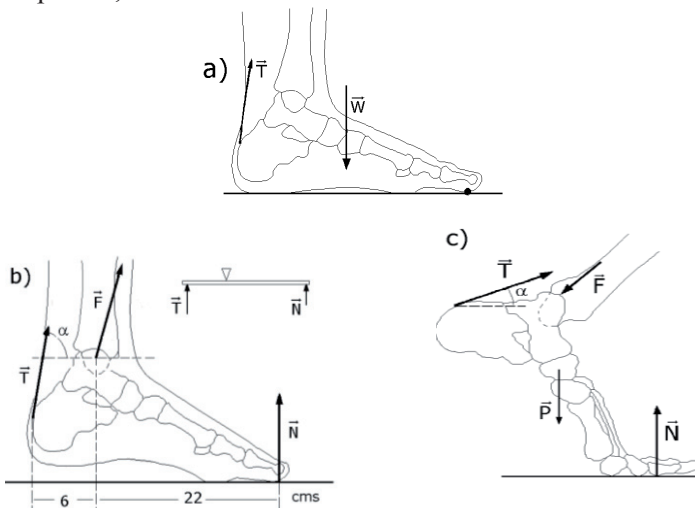


Fig. III.96 – a) Os ossos do tarso e do metatarso no arco do pé, permitem-lhe actuar como uma alavanca interresistente. b) Quando um indivíduo tem o peso assente nos dedos de um pés e produz acção muscular de levantamento ( $\vec{T}$ ) a articulação do tornozelo actua como fulcro. c) Representação das forças a actuar no pé que deverão ser consideradas para uma análise com base no modelo do corpo livre.

Ao dar os passos, a sequência repetitiva dos pontos de apoio e nos quais todo o peso assenta no pé, são o calcanhar, o bordo lateral do pé, a bola do pé e o polegar. No fim de cada passo o polegar suporta o peso e transmite a força propulsora. Os ossos do metatarso e falange no pé, são poderosos para tornar possível esta função. Na Fig. III.96 b)  $\vec{N}$  é a reacção do solo sobre o pé, igual em módulo ao peso do indivíduo,  $\vec{T}$  a força exercida pelos gêmeos no ligamento com o calcâneo e  $\vec{F}$  a acção sobre o fémur na articulação do joelho.

No caso dos dedos assentarem no solo e ocorrer uma acção de levantamento (Fig. III.96 b)) a articulação do tornozelo pode ser escolhida como fulcro e a reacção  $\vec{N}$  como resistência. Considerando que na Fig. III.96 b) há equilíbrio,  $\alpha=83^\circ$  e  $N=70 \text{ Kg}$  é  $T=2535,6 \text{ Newton}$ .

Aplicando o modelo do corpo livre à situação do peso do corpo estar assente sobre os dedos de um pé, por exemplo, ao subir escadas, as forças a actuar no pé encontram-se na Fig. III.96 c) e no conjunto perna e pé encontram-se na Fig. III.97 a). As acções na rótula constituídas pelas forças  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  exercidas pelo ligamento patelar, pelo peso  $\vec{P}$  da rótula e pela acção do fémur  $\vec{F}$  encontram-se na Fig. III.97 b).

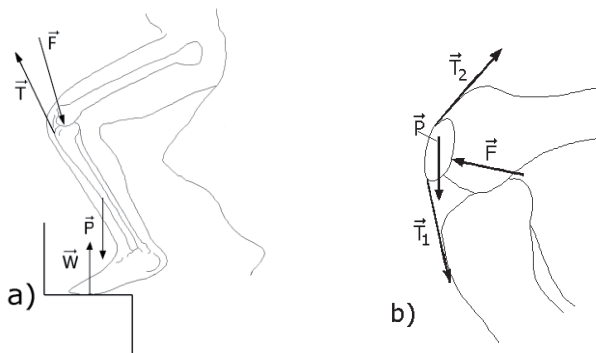


Fig. III.97 – a) Forças a actuar no conjunto perna e pé quando, ao subir escadas todo o peso do corpo assenta sobre os dedos dos pés.  
 b) Forças a actuar na rótula.



Quando se estende um braço lateralmente, o músculo deltóide actua como se observa na Fig. III.98. Se considerarmos o conjunto braço+ante-braço+mão como uma barra rígida o sistema comporta-se como uma alavanca interpotente com fulcro em A (articulação úmero-escapular). O centro de massa do sistema situa-se a uma distância da articulação de cerca de 2/5 do total da distância do ombro ao extremo da mão.

O peso  $\vec{W}$  do conjunto, cujo módulo corresponde a cerca de 5% do peso corporal total, actua no centro de massa C. O vector  $\vec{D}$  corresponde à acção do músculo deltóide, actua a cerca de metade da distância AC e faz um ângulo de aproximadamente 15° com a direcção mão-braço. O vector  $\vec{F}$  é a componente vertical desta força.

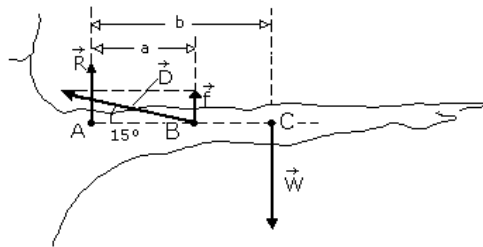


Fig. III.98 - Tronco humano com o braço esquerdo mantido esticado. A única acção muscular considerada é a do músculo deltóide inserido no ponto B.

No ponto A da alavanca actua também a reacção  $\vec{R}$  do osso do ombro sobre o úmero. O modelo físico do sistema, está representado na Fig. III.99

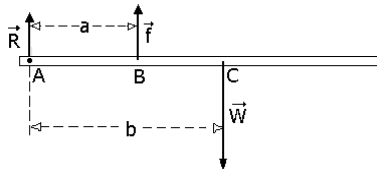


Fig.III.99 - Modelo físico do braço mantido esticado.

No equilíbrio, a equação dos momentos, considerando o ponto A como origem vem

$$a f - bW = 0$$

$$2 \ell W/5 - (D \sin 15) \ell/5$$

donde

$$D = 7,7 W$$

Para um homem de 80 Kg,  $D = 7,7 \times 0,05 \times 80 = 30,8$  Kg.

A análise das forças em jogo nas articulações pode levar a conclusões interessantes.

Os músculos esqueléticos operam entre dois ossos ligados entre si por uma articulação. Quando o músculo (não representado na Fig.III.100) se contrai exerce forças sobre os dois ossos<sup>5</sup> em que se insere, forças que se situam na mesma linha de acção, são iguais em intensidade e de sentidos opostos, ( $\vec{T}_A = -\vec{T}_B$ ), Fig. III.100-a).

<sup>5</sup> Considerados aqui sólidos indeformáveis.

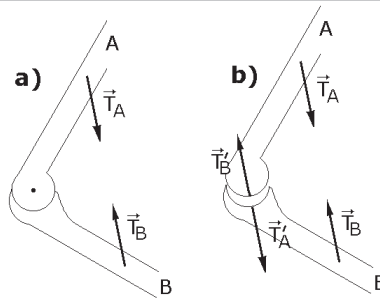


Fig. III.100 - a) O músculo exerce acções de tracção sobre os ossos e desencadeia forças de compressão entre as superfícies comuns da articulação. b) Nesta figura, com fins didácticos, separam-se os ossos, ligeiramente, para evidenciar as forças que actuam na articulação.

Por outro lado, numa situação de equilíbrio, o músculo ao exercer uma acção de tracção sobre um osso, desencadeia forças de compressão entre as superfícies comuns da articulação, Fig. III.100-b). Nesta figura, com fins didácticos, separam-se os ossos, ligeiramente, para evidenciar as forças que actuam na articulação. A força muscular de tracção,  $\vec{T}_A$ , aplicada no osso **A**, empurra-o contra o osso **B** por meio da força  $\vec{T}'_A = \vec{T}_A$  através da junção. De modo semelhante a tracção muscular em **B**,  $\vec{T}_B$ , produz em **A**, a força  $\vec{T}'_B = \vec{T}_B$  através da articulação. Evidentemente  $\vec{T}'_A = -\vec{T}'_B$ .

Como se vê na Fig. III.100-b) o efeito da acção muscular é a aplicação de binários iguais e opostos nos dois ossos da articulação.

Notar porém que o estudo que acabámos de fazer considerou unicamente a força muscular e a reacção na articulação. Contudo, estão também presentes no sistema o peso dos componentes e a reacção na ligação do braço ao ombro na articulação úmero-escapular, esta sem qualquer interferência na articulação do cotovelo quando o braço se supõe imóvel. Pode também ocorrer que um peso esteja a ser sustentado na mão, ou outra acção em curso.

O equilíbrio na presença de forças externas aplicadas implica alterações nas forças compressivas a actuar na articulação.

Suponhamos que, no sistema anterior, foi aplicada a força externa  $\vec{F}_B$  que dá origem à reacção  $\vec{F}_A$ , igual e oposta, o músculo se encontra contraído e ocorre equilíbrio, Fig. III.101.

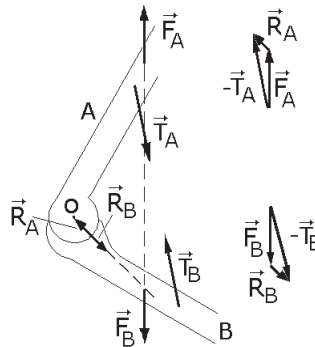


Fig. III.101 – O equilíbrio na presença de forças externas aplicadas.

O equilíbrio das forças para cada um dos ossos **A** e **B** obriga a que a soma de todas as forças aplicadas seja nula, ou seja, a força de tracção muscular é igual e oposta à soma da força externa com a reacção no fulcro,

$$\vec{F}_A + \vec{R}_A = -\vec{T}_A \quad \text{III.136}$$

e

$$\vec{F}_B + \vec{R}_B = -\vec{T}_B$$

Os vectores  $\vec{R}_A$  e  $\vec{R}_B$  são iguais e opostos. Por outro lado, as resultantes dos pares de vectores  $\vec{F}_A, \vec{R}_A$  e  $\vec{F}_B, \vec{R}_B$  respectivamente  $-\vec{T}_A$  e  $-\vec{T}_B$  constituem binários com as correspondentes forças de tracção muscular. Os binários aplicados aos ossos **A** e **B** têm momentos iguais e opostos.

Os princípios que estudámos para músculos intervindo somente numa articulação podem ser estendidos ao caso de músculos que intervêm em duas articulações. Esquematizamos a seguir o caso do bicípede femoral de um

vertebrado com inserção no osso coxal e tíbia. Na situação de equilíbrio, as forças e os binários a actuar nos três ossos têm resultantes nulas.

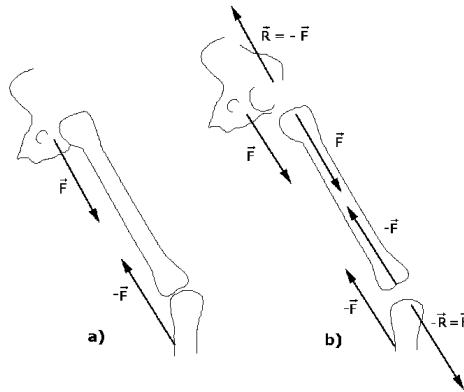


Fig. III.102 - Caso de músculos que intervêm em duas articulações. Esquema do caso do bicípide femoral de um vertebrado com inserção no osso coxal e na tíbia.

### III.20.1 - Esforço na coluna vertebral

A coluna vertebral do homem é constituída por 24 vértebras (7 cervicais, 12 dorsais e 5 lombares) separadas por discos contendo fluído (Fig. III.103).

Quando uma pessoa se curva a coluna comporta-se como uma alavanca com vantagem mecânica muito pequena. Uma consequência disto é que quando nos curvamos para pegar num objecto, mesmo leve, é exercida uma força de valor elevado no disco lombo sagrado que separa a última vértebra do sacro, o osso que suporta a coluna. Quando fragilizado, devido à degeneração das suas estruturas, este disco pode deformar ou romper originando pressão nos nervos vizinhos produzindo dor, espasmos musculares e mesmo imobilização da parte inferior da coluna. A compreensão da origem deste mal obriga ao conhecimento da anatomia e da mecânica da coluna vertebral, bem como das suas unidades funcionais

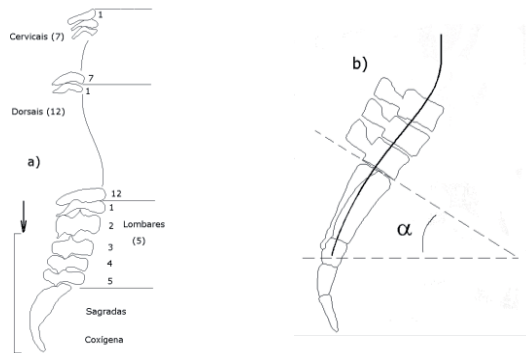


Fig. III.103 – a) Constituição da coluna vertebral humana. b) Pormenor da junção da coluna vertebral com o sacro.

Consideremos um modelo onde a coluna vertebral é considerada uma barra rígida de comprimento  $\ell$ , apoiada no sacro, que funciona como fulcro da rotação (Fig. III.104). A força  $\vec{F}_1$  é a reacção do sacro sobre a coluna vertebral.

A acção dos vários músculos que intervêm no movimento é representada pela força  $\vec{F}_2$  que faz um ângulo de  $12^\circ$  com a direcção da coluna e está aplicada a cerca de 70% do comprimento da barra.

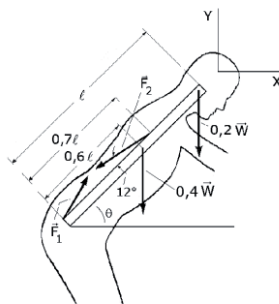


Fig. III.104 - Esquema do modelo da coluna vertebral onde esta é considerada uma barra rígida assente no sacro.

O peso da cabeça que se supõe ser 20% do peso corporal ( $0,2 W$ ) encontra-se aplicada no extremo da coluna. O tórax considerado como 40%

do peso corporal ( $0,4 W$ ) está aplicado a cerca de  $0,6$  do comprimento  $\ell$ . As condições para o equilíbrio são, (Fig. III - 104) para os momentos:

$$\sum_1^n \vec{M}_i = 0$$

e para as componentes das forças segundo os eixos dos  $xx$  e dos  $yy$

$$\sum_1^n F_{x_i} = 0 \quad \sum_1^n F_{y_i} = 0$$

A consideração da condição dos momentos, supondo que se trata de um problema plano e tomando como origem dos momentos o ponto de aplicação da força muscular, dá

$$\sum_1^n \vec{M}_i = F_2 \times 0,7\ell \times \sin 12 - 0,4W \times 0,6\ell \times \sin(90+\theta) - 0,2W \times \ell \times \sin(90+\theta) = 0$$

Para as forças vem

$$\sum_1^n F_{y_i} = -0,4W - 0,2W - F_2 \sin(\theta - 12) + F_{1y} = 0$$

$$\sum_1^n F_{x_i} = -F_2 \cos(\theta - 12) + F_{1x} = 0$$

A partir da equação dos momentos tira-se que

$$F_1 \approx 3 W \cos \theta \quad \text{III.137}$$

Nestas condições, para  $\theta = 30^\circ$  e  $W = 80 \text{ Kg}$  é

$$F_1 = 208 \text{ Kg}$$

Para  $\theta = 0^\circ$  (a direcção da coluna normal à das pernas) e  $W = 80 \text{ Kg}$  é

$$F_1 = 240 \text{ Kg}$$

A partir das equações das componentes das forças tira-se que o ângulo que a força  $F_2$  faz com o eixo dos xx é

$$\alpha = \text{arc tg} \frac{0,2 \sec \theta + \sin (\theta - 12)}{\cos (\theta - 12)}$$

Na Fig. III.105 mostra-se a possibilidade de diminuir bastante a força  $\vec{F}_1$  no acto de levantar um peso do solo, ou seja, a carga sobre o disco lombo-sagrada, dobrando as pernas pelos joelhos. Se, em a) da Fig. III.105,  $\theta \approx 0$  e em b), da mesma figura,  $\theta_1 = 45^\circ$ , tem-se que  $F'_1/F_1 = \sqrt{2}/2 = 0,71$ , ou seja, setenta por cento da carga no levantamento com as pernas direitas.

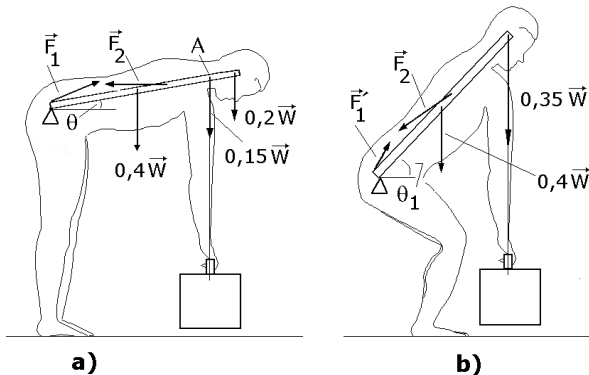


Fig. III.105 – Possibilidade de diminuir a força  $\vec{F}_1$  no acto de levantar um peso do solo. a) Levantamento com as pernas direitas. b) Menor carga dobrando as pernas pelos joelhos.



---

### III.21 - Músculos

Os músculos são os tecidos responsáveis pela criação das forças que, para além da gravidade e outros agentes externos, intervêm nos movimentos do nosso corpo. Os músculos constituem entre 40 a 50% da massa corporal e são motores moleculares que convertem energia química em trabalho mecânico. Exercem a sua acção por contração e relaxação a que que correspondem variações de comprimento com arrastamento dos apoios.

Segundo a morfologia distinguem-se os seguintes tipos de músculos:

Músculo liso – células fusiformes, uninucleares, sem estrias transversais, de contração lenta e controle involuntário. São constituintes das paredes dos órgãos.

Músculo estriado – células cilíndricas longas e multinucleares com estrias transversais. Estes são os músculos esqueléticos de contração rápida e controle voluntário.

Músculo cardíaco - constitui uma excepção já analisada no Cap. I.3.

Os vertebrados movem-se e exercem, ou opõem-se a forças, devido à contração de músculos estriados. Geralmente, estas acções envolvem diversas estruturas operando de modo dedicado. O esqueleto aos quais os músculos estão ligados comporta-se como um sistema de alavancas. Quando um músculo contrai, faz rodar estruturas em torno das articulações a que se liga. Além disso, é comum que nos movimentos coordenados de diversos músculos estes actuem de maneiras diversas. Enquanto que alguns músculos se contraem, outros desenvolvem força mantendo o comprimento constante, e ainda outros podem ser esticados por forças externas mesmo quando contraídos.

A força que um músculo desenvolve é uma força de “puxar”, nunca uma força de empurrar. Se a carga é suficientemente pequena, o músculo pode contrair e produzir um movimento de puxar (condição isotónica). Se a carga é exactamente igual à força máxima que o músculo pode desenvolver, o comprimento do músculo não varia (condição isométrica). Se a carga excede a força máxima, o músculo sofre aumento de comprimento.

Há uma grande variedade de músculos, diferentes quanto à forma, dimensões, complexidade e arquitectura. Contudo, cada músculo está perfei-

tamente adaptado, de modo a produzir uma variação de comprimento segundo uma direcção apropriada e com a força de contracção conveniente para produzir os efeitos usualmente requeridos pela articulação correspondente.

As fibras musculares individuais não são de modo algum uniformes em tamanho variando o seu comprimento desde alguns milímetros até 15-30 centímetros nos músculos mais longos e de diâmetro 10 a 60 micrómetros.

### III.21.1 – Trabalho produzido pela contracção muscular

Consideremos um músculo submetido a uma força exterior e que este se contraí, produzindo um trabalho contra a força aplicada. Suponhamos que o músculo está submetido à força de maior valor, que pode suportar, de modo a poder sofrer contracção máxima. O músculo vai contrair-se um comprimento  $\Delta l_m$  máximo, deslocando desta distância o ponto de aplicação da força exterior aplicada.

O trabalho realizado pelo músculo é máximo nestas condições e é dado por

$$W_m = F_m \Delta l_m \quad \text{III.138}$$

Vamos agora fazer uso das seguintes relações que foram verificadas experimentalmente:

- 1º A força máxima  $F_m$  que um músculo pode exercer é directamente proporcional à sua secção recta.
- 2º O encurtamento máximo que um músculo poderá sofrer por contracção é proporcional ao comprimento do músculo.

Então temos

$$\Delta l_m = K_1 l$$

onde  $K_1$  é uma constante de proporcionalidade e  $l$  é o comprimento do músculo antes da contracção.

Será também

$$F_m = K_2 S$$

onde  $K_2$  é uma outra constante de proporcionalidade e  $S$  a secção do músculo antes da contracção. Substituindo estas igualdades obtém-se para expressão do  $W_m$

$$\begin{aligned} W_m &= K_1 K_2 S \ell \\ &= K V \end{aligned} \quad \text{III.139}$$

onde  $V$  é o volume do músculo distendido.

Assim, o trabalho máximo que um músculo pode produzir por contracção é directamente proporcional ao seu volume.

A força máxima que um músculo pode dispendir é de 3 a 4 Kg por  $\text{cm}^2$  de secção muscular.

Façamos agora algumas considerações energéticas sobre o músculo.

Um músculo dispende energia em três processos distintos:

- a) ao produzir trabalho mecânico contra forças externas;
- b) ao manter-se contraído e submetido a uma força exterior (esta energia é química. Esta energia é, por vezes, designada por trabalho estático, o que é incorrecto pois, não havendo deslocamento, o trabalho é nulo);
- c) ao contrair-se sem carga (força exterior) com a mesma velocidade com que se contrai quando produz um trabalho  $W$ , o músculo dispende energia, a que se chama energia de velocidade.

Designando por  $W$ ,  $Q_e$  e  $Q_v$  as energias respectivamente consumidas naqueles processos, a energia total  $W'$  dispendida numa acção muscular será

$$W' = W + Q_e + Q_v \quad \text{III.140}$$

Assim, o rendimento do músculo na produção do trabalho  $W$  é

$$\rho = \frac{W}{W'} = \frac{W}{W + Q_e + Q_v} \quad \text{III.141}$$

que significa evidentemente que o músculo para produzir um dado trabalho mecânico  $W$  dispense a energia  $W'$ .

Consideremos agora o rendimento de um músculo funcionando durante um certo tempo  $T$  na execução repetida de certa tarefa, para a qual é necessária contracção muscular. Quanto mais rápidas forem as contracções musculares, maior será o número de tarefas executado no tempo  $T$ . O trabalho mecânico produzido será portanto proporcional à velocidade, ou seja,  $W = K_1 v$ .

Por outro lado, a energia de velocidade  $Q_v$  é também directamente proporcional à velocidade, ou seja,  $Q_v = K_2 v$ .

A expressão do rendimento poderá assim vir noutra forma.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{W}{W + Q_e + Q_v} = \frac{K_1 v}{K_1 v + Q_e + K_2 v} \\ &= \frac{K_1}{K_1 + K_2 + \frac{Q_e}{v}} \end{aligned} \quad \text{III.142}$$

ou seja, o rendimento aumentará com a velocidade, pois o denominador da fracção diminui quando  $v$  aumenta. O valor de  $\rho$  tenderá para o limite

$$\rho = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \quad \text{III.143}$$

368

A velocidade de encurtamento de um músculo depende da carga a que está sujeito através de uma relação que é conhecida por equação de Hill:

$$v = \frac{(F_0 - F) b}{F + a} \quad \text{III.144}$$

$v$  é a velocidade de encurtamento do músculo,  $F_0$  é a força máxima do músculo em condições isométricas,  $F$  é a força produzida para um determinado comprimento do músculo e  $a$  e  $b$  são constantes.

---

**C A P Í T U L O • I V**



**BIOFÍSICA DOS FLUIDOS**

---

(Página deixada propositadamente em branco)

---

## IV.1 – Propriedades dos fluidos

### IV.1.1 – Introdução

No homem padrão de 70 Kg, cerca de 42 Kg correspondem a água, 7 Kg a sais minerais, 8 Kg a gorduras e 13 Kg a proteínas e outros compostos. Dos 42 Kg de água referidos, 31,5 Kg são água intracelular, 7,63 Kg são água extracelular intersticial e 2,87 Kg são água extracelular plasmática. Ingerimos e eliminamos cerca de 2,5 L de água por dia e pode ser movimentado quatro vezes este volume por dia, no aparelho digestivo, se considerarmos a saliva, o suco gástrico, a biliar e os sucos pancreáticos e intestinal.

Os fluidos do corpo movimentam-se em complexos labirintos vasculares, através de membranas e em espaços de difusão e arrastamento. Um volume igual ao volume total de sangue (5 L) é bombeado pelo coração para a circulação em cerca de 5 minutos. Um volume de linfa igual ao volume plasmático (3 L) é movimentado pelo sistema linfático em 24 horas.

As leis da física que comandam os movimentos dos fluidos biológicos situam-se na física dos meios contínuos, podendo ser abordadas, muitas vezes, de forma acessível e levando a conceitos de interesse prático em medicina.

### IV.1.2 - A agregação da matéria

A matéria encontra-se em quatro estados (ou fases): sólido, líquido, gasoso e plasma<sup>1</sup>. Em geral, para uma mesma substância, coexistem duas ou três fases e podem ocorrer mudanças de estado. Certas substâncias não se apresentam, ou não são estáveis, em determinadas fases. É o caso do iodo que não apresenta fase líquida estável. Os estados de agregação da matéria resultam da competição entre a energia de agitação térmica e a energia potencial devida às forças de ligação entre átomos ou entre moléculas.

No estado gasoso predomina a energia de agitação térmica, enquanto que no estado sólido, a energia potencial, resultante das ações intermoleculares é, de longe, mais importante. No primeiro caso, as distâncias intermoleculares são muito maiores do que as dimensões das moléculas e as

---

<sup>1</sup> - Um plasma é um gás rarefeito de íons de ambos os sinais e densidade de carga nula.

interacções moleculares são fracas. Nos sólidos as interacções são fortes e as distâncias entre as moléculas são da ordem de grandeza das dimensões das próprias moléculas.

As forças responsáveis pela energia potencial de ligação entre átomos ou moléculas são as forças presentes nas chamadas ligações primárias (ligações iónicas, ligações covalentes e ligações metálicas) e nas chamadas ligações secundárias (ligações de Van der Waals e ligações hidrogénio). As ligações primárias rompem-se para temperaturas entre 1000 e 5000 °K. As ligações secundárias desfazem-se para temperaturas entre 100 e 500 °K.

Em termos muito gerais, as curvas de variação da força e da energia potencial em função da distância interatómica (ou intermolecular) são do tipo representado nas Figs. IV.1-a) e b), onde pode observar-se a presença de uma componente atractiva e de outra repulsiva e da soma destas (a cheio).

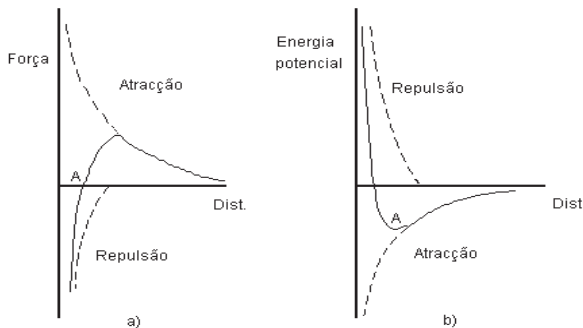


Fig. IV.1 - a) Curvas da força em função da distância interatómica (ou intermolecular) e b) Curvas da energia potencial em função da distância interatómica. A cheio as funções resultantes.

Na Fig. IV.1-a), onde se convencionou a força de atracção como sendo positiva, pode concluir-se que estão presentes duas forças: uma atractiva e outra repulsiva. A última actua só para pequenas distâncias, quando os átomos se encontram muito próximos.

A abcissa do ponto A é a distância a que se encontram os átomos numa estrutura estável, sem outras forças a actuar. O ponto A, na Fig. IV.1-a), corresponde à igualdade entre as forças internas de atracção e de repulsão.



Para a curva da energia, o ponto **A** corresponde ao mínimo da energia potencial, Fig. IV.2.1-b). A energia potencial negativa corresponde a atracção. A energia potencial para as ligações covalentes é descrita por uma função muito simples

$$U(r) = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n} \quad \text{IV.1}$$

onde **r** é a distância, **A** e **B** são constantes e  $n > m$ . A componente repulsiva  $B/r^n$  aumenta rapidamente para pequenas distâncias.

Na ligação iónica a energia potencial é dada pela equação

$$U(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{B}{r^n} \quad \text{IV.2}$$

onde **q** é a carga iónica e  $\epsilon_0$  a constante dieléctrica do vazio.

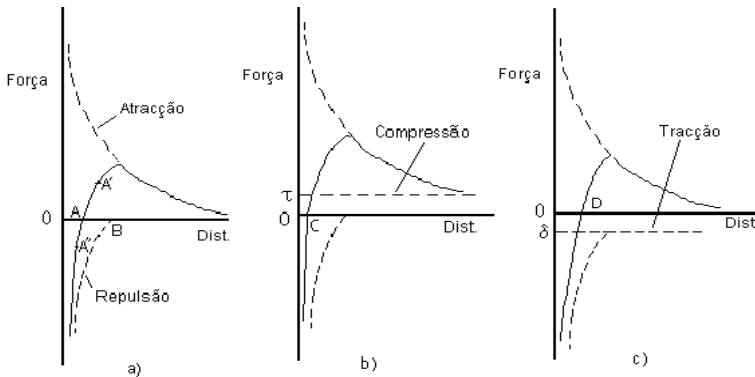


Fig. IV.2 - a) Curvas da força em função da distância interatómica (ou intermolecular) sem a acção de forças externas. b) Com força de compressão de módulo  $\tau$  a actuar. b) Com força de tracção de módulo  $\delta$  a actuar. A cheio as funções resultantes.

A aplicação de uma força externa, sobre um corpo, vai alterar as suas distâncias interatómicas. Num sólido sujeito a uma força de compressão externa de

intensidade  $\tau$ , a curva das forças de atracção corresponde à soma da curva da Fig IV.2 a) com o valor  $\tau$ . A curva resultante tende para o valor  $\tau$  quando a distância aumenta (Fig. IV.2-b). A distância intermolecular (OC) correspondente ao equilíbrio, é menor do que na ausência de forças externas (OA da Fig. IV.2-a).

Pelo contrário, se uma força de tracção  $\delta$  é aplicada, a curva das forças de repulsão corresponde à soma da curva da Fig IV.2 a) com o valor  $\delta$ . As distâncias intermoleculares terão de aumentar para que ocorra o equilíbrio, (OD). Para tracções que originem distâncias intermoleculares para além da abscissa do ponto B, não é já possível o equilíbrio, atingindo-se a rotura do material.

Entre os pontos A' e A'' da curva resultante, a distância intermolecular varia de modo aproximadamente linear com a força aplicada. Nesta porção, aproximadamente rectilínea da curva, haverá proporcionalidade entre tensões e deformações. Verifica-se a lei de Hooke e o sólido tem comportamento elástico.

No estudo elementar das propriedades da matéria considera-se a existência de três estados típicos: o sólido, o líquido e o gasoso. Há, no entanto, substâncias com estados de agregação intermédios e ainda, como vimos, a possibilidade de se considerar um quarto estado, o plasma. Podemos caracterizar os sólidos pela massa, volume e forma geométrica próprios. Os líquidos pela massa e volume. Os gases pela massa. Nos líquidos as forças de coesão actuam de tal modo que, apesar da forma não ser mantida, o volume é preservado não sendo preenchida a totalidade do espaço interior dos recipientes, como se verifica nos gases.

Uma possibilidade de estabelecer uma divisão entre os estados de agregação da matéria é através da deformação a tensões tangenciais. A tensão tangencial, também designada por tensão de corte, por tensão de arrastamento ou ainda por tensão de cisalhamento, é definida pela relação  $F/S$ , quando a força  $F$  é aplicada tangencialmente a uma superfície  $S$  (ver Fig. IV.3). Tem as dimensões idênticas às da pressão (força por unidade de área) mas com a força a actuar tangencialmente à superfície em que actua. Trata-se de uma grandeza vectorial, pois a direcção da força não fica definida apenas pelo facto de ser tangente à superfície; por exemplo, no caso de  $S$  ser um determinado plano de átomos dum cristal, a direcção de  $\vec{F}$  só ficará definida quando indicada a sua orientação relativamente aos eixos cristalográficos no cristal.

Voltando aos estados da matéria, consideremos um paralelepípedo com a base fixa e sobre o qual actua uma força  $\vec{F}$  tangente à face superior.

A reacção tangencial do apoio e a força aplicada constituem um binário ( $\vec{F}$ ,  $-\vec{F}$ ) a actuar no sólido.

Sob a acção do binário, com forças de módulo  $\vec{F}$ , o sólido sofre uma deformação (deformação angular ou distorção) que pode ser traduzida pelo desvio  $\Delta x$  ou pelo ângulo de corte  $\varepsilon$  (Fig. IV.3), que são valores muito pequenos.

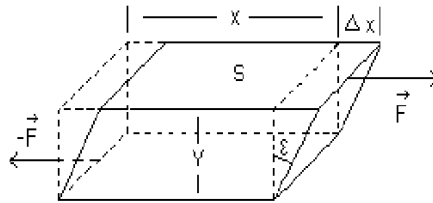


Fig. IV.3 - Deformação de um prisma sujeito a tensão de corte.

Verifica-se que só os sólidos sofrem este tipo de deformação que, para valores suficientemente pequenos de  $F$ , é uma deformação elástica, podendo mostrar-se experimentalmente que

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{\Delta x}{y} = \mu \operatorname{tg} \varepsilon$$

ou  $\square$  ainda, considerando que para valores pequenos de  $\varepsilon$  é  $\operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon$

$$\frac{F}{S} = \mu \varepsilon \quad \text{e} \quad \mu = \frac{F}{S \varepsilon} \quad \text{IV.3}$$

onde  $\Delta x$  e  $y$  são as distâncias indicadas na Fig. IV.3.

Há pois proporcionalidade entre a tensão de corte e a deformação traduzida por  $\varepsilon$ , sendo o coeficiente de proporcionalidade  $\mu$ , chamado de módulo de rigidez, ou simplesmente rigidez (ou módulo de Coulomb ou ainda módulo de corte). Esta proporcionalidade é conhecida por terceira lei de Hooke.

Para uma dada tensão de corte, quanto menor é a rigidez, maior é a deformação produzida, ou seja, o ângulo de corte  $\varepsilon$ . Numa situação limite de

---

um meio material ideal que não oferece qualquer resistência a tensões de corte, a rigidez é nula (ou seja,  $\mu \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ). Esta situação coincide com a definição de fluido ideal, um meio com módulo de rigidez nulo. Um fluido ideal apresenta módulo de rigidez nulo e está associado a propriedades como inexistência de fricção interna, continuidade, uniforme densidade, incompressibilidade e a capacidade de fluir, ou seja, sofrer grandes variações de forma sob a acção de forças externas. Esta definição inclui líquidos ideais e, no que se refere a algumas propriedades, os gases ideais.

Como consequência da rigidez ser nula, conclui-se que para um fluido ideal se encontrar em repouso, é necessário que as forças tangenciais a actuar em qualquer ponto do mesmo, sejam nulas. Por exemplo, se considerarmos um elemento de volume no interior de um líquido em equilíbrio, as forças actuantes sobre esse elemento, terão de ser normais à sua superfície.

Para líquidos em equilíbrio basta-nos, portanto, falar em pressões, grandezas escalares que representam forças a actuar normalmente sobre a unidade de superfície.

Para o caso de fluidos reais o que se disse acima é uma simples aproximação pois, como veremos, o atrito entre as moléculas do fluido (viscosidade) dá lugar ao aparecimento de reacções tangenciais. Contudo, só os sólidos sofrem deformações elásticas quando sujeitos a tensões tangenciais.

Nos líquidos reais, a uma dada temperatura, as partículas mudam facilmente de posição mas mantêm uma distância média constante entre elas.

Neste capítulo estamos interessados sobretudo nos líquidos, passando a recordar algumas propriedades que interessam, na perspectiva das aplicações médicas.

## IV.2 - Revisão de conhecimentos de hidrostática

376

### IV.2.1 - Pressão no interior de um líquido

Uma propriedade importante, para explicar o significado da pressão num ponto qualquer do interior de um líquido em equilíbrio, é ser esta independente da orientação da superfície em que se supõe a força de pressão a actuar. Para demonstrarmos esta propriedade, consideremos no interior de um líquido em equilíbrio, uma prisma triangular de dimensões arbitrariamente pequenas e com centro em **M**.

---

Na Fig. IV.4,  $F_1, F_2, \dots$  são as forças das pressões  $P_1, P_2, \dots$  a actuar nas faces do prisma e perpendiculares a estas. Vamos considerar que as dimensões do elemento de volume são tão pequenas que o seu peso é desprezível, não necessitando de ser considerado nas equações do equilíbrio.

Podemos supor que três faces do prisma assentam nos planos definidos por um sistema de eixos XYZ. A face de área  $\Delta z \Delta s$  faz um ângulo  $\theta$  com o plano XOZ (Fig. IV.4). O equilíbrio das forças é uma condição necessária de equilíbrio, podendo exprimir-se na forma

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

ou seja, no equilíbrio, as resultantes das componentes, segundo os três eixos, das forças a actuar no elemento, são nulas. Para o caso da Fig. IV.4 as condições segundo os eixos dos xx e yy são

$$X \qquad F_1 = F_3 \sin \theta \quad \text{ou} \quad P_1 \Delta y \Delta z = P_3 \Delta s \Delta z \sin \theta$$

$$Y \qquad F_2 = F_3 \cos \theta \quad \text{ou} \quad P_2 \Delta x \Delta z = P_3 \Delta s \Delta z \cos \theta$$

Nas igualdades anteriores, substituímos as forças a actuar, pelos correspondentes produtos das pressões pelas áreas dos lados do prisma em que actua, por exemplo  $F_1$  por  $P_1 \Delta y \Delta z$ .

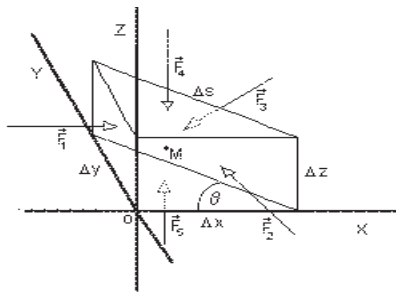


Fig. IV.4 - Forças a actuar num elemento de volume de um líquido em equilíbrio de dimensões infinitesimais.

mas como

$$\Delta s \sin \theta = \Delta y \quad \text{e} \quad \Delta s \cos \theta = \Delta x$$

temos, por substituição nas equações do equilíbrio segundo os  $xx$  e  $yy$

$$P_1 = P_2 = P_3$$

Se aplicarmos a condição do equilíbrio com o prisma rodado de  $90^\circ$ , em torno do eixo dos  $yy$  e raciocinarmos como para o caso anterior, concluímos que  $P_4$  é igual aos outros valores de pressão, ou seja,

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P \quad \text{IV.4}$$

igualdade que prova que num ponto do interior do líquido, a pressão é a mesma qualquer que seja a orientação da superfície sobre a qual se considera a pressão a actuar.

### IV.2.2 - Princípio fundamental da hidrostática

Nos líquidos em equilíbrio a pressão num ponto depende da massa de líquido, acima do ponto, segundo a vertical e por unidade de área.

Consideremos um pequeno prisma rectangular recto, de dimensões finitas, no interior de um líquido em equilíbrio (Fig. IV.5). Seja  $\Delta A$  a área das faces horizontais do prisma.

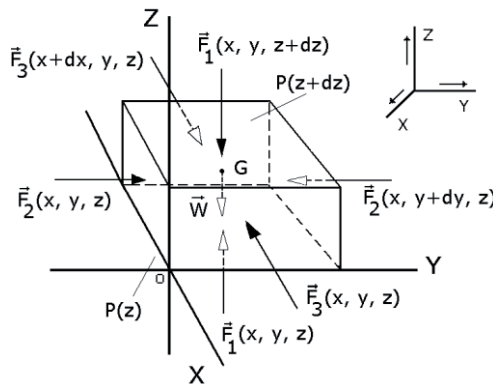


Fig. IV.5 - Pressões e forças a actuar nas faces de um prisma quadrangular regular de dimensões finitas.

Seja  $P(z+dz)$  a pressão a actuar na superfície superior do prisma,  $P(z)$  a pressão a actuar na superfície inferior e  $\mathbf{W}$  o peso do prisma de líquido. Podemos escrever que  $W = dx dy dz \rho g$ . Por outro lado

$$F_1(x, y, z+dz) = P(z+dz) dx dy$$

e

$$F_1(x, y, z) = P(z) dx dy$$

A única força a actuar no elemento para além das forças de pressão é o peso do próprio elemento. Consideremos o equilíbrio das forças

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

Segundo as direcções paralelas aos eixos dos  $xx$  e  $yy$ , as forças de pressão a actuarem nas faces do prisma, perpendiculares a estas direcções, terão de se anular para haver equilíbrio pois, segundo essas direcções, não há outras forças a actuar, deste modo

$$X \quad F_3(x+dx, y, z) - F_3(x, y, z) = 0$$

$$Y \quad F_2(x, y, z) - F_2(x, y+dy, z) = 0$$

Segundo a direcção dos  $zz$ , além das forças de pressão a actuar, nas faces superior e inferior do prisma, há o peso do elemento líquido.

Sendo  $\rho$  a massa específica do líquido, a condição de equilíbrio segundo o eixo dos  $zz$ , é:

$$F_1(x, y, z+dz) + dx dy dz \rho g = F_1(x, y, z)$$

$$P(z+dz) dx dy + dx dy dz \rho g = P(z) dx dy$$

ou, desprezando infinitésimos de segunda ordem,

$$P(z) - P(z+dz) = \Delta P = \rho dz g \quad \text{IV.5}$$

Sendo o líquido incompressível, a massa específica é constante em todo o líquido, podendo obter-se, a partir da equação anterior, a pressão num

ponto a uma profundidade  $z$  (Fig. IV.6), quando se supõe a pressão atmosférica  $P_0$  a actuar à superfície do líquido ( $z = 0$ ),

$$P = P_0 + \rho z g \quad \text{IV.6}$$

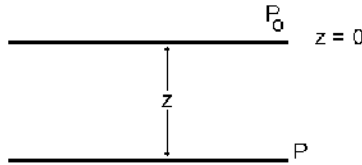


Fig. IV.6 - Pressão  $P$  a uma profundidade  $z$  num líquido de massa específica  $\rho$ .

Concluimos, então que, no interior do líquido, o aumento de pressão relativamente à pressão atmosférica é proporcional ao desnível em relação à superfície do líquido.

Subtraindo membro a membro as expressões obtidas para as pressões em dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  do interior do líquido, com desníveis respectivamente  $z_1$  e  $z_2$  em relação à superfície, temos

$$P_1 - P_2 = (z_1 - z_2) \rho g \quad \text{IV.7}$$

expressão que traduz o princípio fundamental da hidrostática.

A última expressão não depende de  $P_0$ , não sofrendo qualquer alteração se variarmos a pressão à superfície. Por outro lado, se tivermos um líquido incompressível<sup>2</sup> confinado a um recipiente e sobre o qual actuam pressões externas, com diferentes orientações, se o equilíbrio se mantiver, a equação anterior continua válida. De facto, a situação é idêntica à inicial, isto é, nas equações do equilíbrio é só segundo o eixo dos  $zz$  que tem de considerar-se, uma outra força, o peso do líquido, para além das forças de pressão.

Mantendo a diferença de cotas ( $z_1 - z_2$ ), a diferença de pressão ( $P_1 - P_2$ ) permanece constante, sejam quais forem os valores das pressões externas.

<sup>2</sup>A compressibilidade dos líquidos é de cerca de  $10^{-4}/\text{atm}$ , ou seja, se um líquido com volume  $1 \text{ m}^3$  é sujeito a um aumento de pressão de  $1 \text{ atm}$ , o seu volume diminui de  $10^{-4} \text{ m}^3$ , ou seja, de  $100 \text{ cm}^3$ .



Se não existem diferenças de pressão no líquido, a não ser as que resultam do peso, então, quando se aplica uma pressão externa, ela actua igualmente em todos os pontos da massa líquida. O que acabámos de dizer contém o princípio de Pascal: Num líquido em equilíbrio as pressões transmitem-se integralmente a todos os pontos do líquido.

Uma consequência do princípio fundamental da hidrostática tem a ver com a possibilidade de respiração de um indivíduo submerso, através de um tubo aberto em comunicação com a superfície. A máxima pressão inspiratória, acima da pressão atmosférica, que o pulmão, através do diafragma e músculos inspiratórios, é capaz de desenvolver é de cerca de 86 mm Hg, ou seja, 116,9 cm de H<sub>2</sub>O. Considerando que, para um indivíduo em pé, a distância média do pulmão à boca é de 30 cm o comprimento máximo do tubo é de cerca de 87 cm. Este valor refere-se a condições máximas, pelo que, na prática, a distância terá de ser menor para garantir a respiração continuada eficaz e sem esforço considerável.

### IV.2.3 - Princípio de Arquimedes

Consideremos um elemento de volume de líquido  $\Delta V$  situado no interior de um líquido em equilíbrio.

Se há equilíbrio, as forças exteriores exercidas sobre o elemento  $\Delta V$  devem ter uma resultante que equilibra o peso do próprio elemento. As forças exteriores, a actuarem sobre o elemento, são forças de pressão no interior do líquido, que sabemos dependerem da distância à superfície. A resultante destas forças deverá, pois, ser uma força igual mas de sentido oposto ao peso  $\mathbf{P}$  do elemento de líquido e assente na vertical que contém o centro de gravidade do elemento. O módulo desta resultante é  $I = \Delta V \rho g$ , onde  $\rho$  é a massa específica do líquido. Ao vector  $\vec{\mathbf{I}}$  chamaremos impulsão.

Se tivermos um objecto de massa específica  $\rho'$  com as mesmas dimensões e forma que o elemento  $\Delta V$ , mergulhado no mesmo líquido (Fig. IV.7), a resultante total das forças a actuarem no objecto é uma força vertical cuja grandeza é:

$$R = I - P = \Delta V g \rho' - \Delta V g \rho = \Delta V g (\rho' - \rho) \quad \text{IV.8}$$

ou seja, a resultante da força de impulsão  $\vec{I}$  a actuar de baixo para cima e do peso  $\vec{P}$  a actuar em sentido oposto. Podemos dizer que o módulo da impulsão é igual ao peso do volume de líquido deslocado pelo objecto.

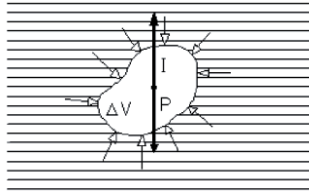


Fig. IV.7 - Força de impulsão e peso a actuarem sobre o elemento de volume  $\Delta V$ .

A resultante  $\mathbf{R}$  apontará para cima se  $P > P'$ , ou seja, se o líquido for mais denso que o objecto e para baixo se  $P' > P$ .

Se  $P' > P$  o corpo descerá no líquido sob a acção da força  $P - I$  a que se oporá a força de atrito. Se  $P > P'$  o corpo virá à superfície, ficando abaixo desta um volume do corpo tal, que o peso de um mesmo volume de líquido iguale o peso total do corpo. Se  $P = P'$  o corpo ficará totalmente no interior do líquido livre de forças a actuar.

Nos raciocínios que fizemos partiu-se sempre do princípio que a pressão no interior do líquido não produzia alterações nas dimensões do sólido.

Poderá, no entanto, acontecer que o módulo da impulsão seja altamente afectado devido a este efeito. O volume de uma bóia de borracha distensível, contendo ar, é reduzido a metade a cerca de 10 m de profundidade.

### IV.3 – Fenómenos de superfície

#### IV.3.1 - Tensão superficial de um líquido

Consideremos uma molécula  $\mathbf{A}$ , suposta esférica, do interior de um líquido. A molécula  $\mathbf{A}$  encontra-se completamente rodeada por outras moléculas que exercem forças de atracção sobre ela, Fig. IV.8-b). O valor da resultante destas forças de atracção,  $\vec{f}_i$ , para um intervalo de tempo que compense as variações da agitação térmica, deve ser zero, ou seja,  $\sum \vec{f}_i = 0$ .

Consideremos agora uma molécula **B** da superfície e desprezemos a atracção das moléculas gasosas em contacto com a superfície do líquido. A resultante das forças de atracção por parte das moléculas do líquido, situadas no hemiespaço em torno e abaixo de **B**, é uma força perpendicular à superfície e dirigida para o interior.

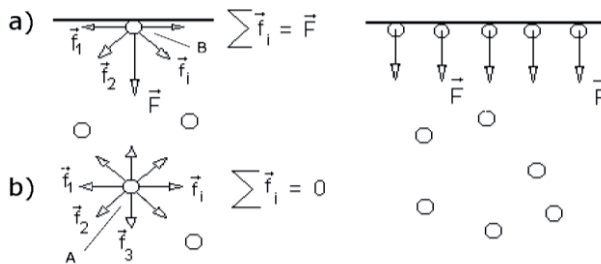


Fig. IV.8 - Forças de coesão e resultantes para as moléculas da superfície, a) e do interior do líquido, b).

Num líquido puro as moléculas da superfície são sujeitas à mesma força, de intensidade **F**, Fig. IV.8-a), pelo que a camada molecular superficial forma uma espécie de película tensa que comprime o líquido.

As forças entre as moléculas no interior de um fluido são simétricas. Não há direcções preferenciais. Para moléculas da superfície, esta simetria não é verificada.

É devido à tensão superficial que toda a superfície líquida tende, espontaneamente, a ter um número mínimo de moléculas à superfície, ou seja, a ocupar uma área mínima. Em condições de imponderabilidade, nas naves espaciais, massas de líquido tomam a forma esférica, à qual corresponde a área externa mínima, para um dado volume.

Para se elevarem moléculas do interior até à superfície do líquido, ou seja, para aumentar a sua superfície livre, é necessário realizar um trabalho contra as forças  $\vec{F}$ , proporcional ao número de molécula movimentadas.

Suponhamos que para se produzir um aumento  $\Delta S$  na superfície de um líquido, a uma temperatura  $T$ , numa transformação isotérmica e reversível, se tem que despendir um trabalho  $\Delta W$ . Verifica-se proporcionalidade directa entre estas duas quantidades e pode escrever-se

$$\Delta W = \sigma \Delta S$$

o coeficiente  $\sigma$ , que é sempre positivo, chama-se tensão superficial do líquido. Representa a energia que é necessário despende para, nas condições referidas, aumentar a superfície livre do líquido de  $1 \text{ cm}^2$ , à temperatura  $T$ .

Na situação real  $E_S$ , a energia total de superfície por  $\text{cm}^2$  a temperatura e pressão constantes, é dado pela equação de Gibbs-Helmholtz.

$$E_S = \sigma - T \left( \frac{d\sigma}{dT} \right)_{T,P}$$

$T$  é a temperatura absoluta. Aqui  $\sigma$  é o trabalho reversível mínimo necessário para aumentar a área da superfície de  $1 \text{ cm}^2$  com a temperatura e pressão constantes.

As dimensões da tensão superficial são as de uma energia por unidade de área. A tensão superficial pode também encarar-se como energia potencial, por unidade de área, existente à superfície. Por outro lado, a tensão superficial, sendo o trabalho reversível, a temperatura constante, necessário para expandir de  $1 \text{ cm}^2$  a superfície líquida, é a variação de energia livre no processo. A energia potencial da superfície de um líquido de área  $S$  é  $S\sigma$ . Num sistema termodinâmico a energia livre tende, espontaneamente, para um valor mínimo. Assim, a energia livre das superfícies líquidas tende, espontaneamente a minimizar-se, o mesmo acontecendo à área superficial.

A tensão superficial é, por vezes, definida a partir da força tangencial  $\vec{F}$  que é necessário exercer-se para manter tensa uma lâmina muito fina de líquido, de comprimento  $\ell$  (Fig. IV.9).

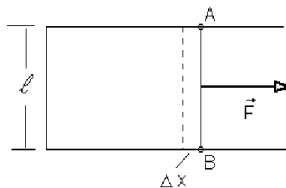


Fig. IV.9 - Força tangencial  $\vec{F}$  que é necessário exercer para manter tensa uma lâmina líquida de comprimento  $\ell$ .

Verifica-se que, para um dado  $\ell$  a força  $\vec{F}$  é independente da área da película, ou seja, a força tangencial que equilibra as forças associadas à superfície, é independente das dimensões desta.

Supondo que a frente **AB** do líquido se desloca de um comprimento

$\Delta x$ , devido a um aumento muito pequeno da força  $F$ , o trabalho realizado será:

$$W = F \Delta x$$

O trabalho realizado, supondo não haver degradação de energia mecânica, deve igualar o aumento da energia de superfície. O aumento da superfície livre do líquido é  $\Delta S = 2 \ell \Delta x$ , tendo em conta as duas faces da película, então,

$$\Delta W = \sigma \Delta S = 2 \sigma \ell \Delta x$$

ou seja,

$$F \Delta x = 2 \sigma \ell \Delta x$$

e

$$\sigma = \frac{F}{2\ell}$$

A cada uma das faces da película corresponde a mesma força de contracção  $f$ , tangente à superfície e resultante das acções de superfície, cujo valor deverá ser  $f = \frac{F}{2}$ .

Então,

$$\sigma = \frac{f}{\ell} \tag{IV.10}$$

Pode, assim, definir-se tensão superficial como a força tangencial que deve exercer-se, por unidade de comprimento, para manter a película superficial tensa.

A tensão superficial aparece, pois, como uma força por unidade de comprimento (tensão), podendo ser expressa, por exemplo, em dine/cm. Notar que as dimensões da tensão superficial podem ser igualmente expressas em força/comprimento ou energia/área. Multiplicando e dividindo a primeira relação por comprimento obtém-se a segunda pois, força×comprimento tem dimensões de energia e área é comprimento×comprimento.

A tensão superficial de um líquido é função da temperatura decrescendo com o aumento desta. Apresentamos no Quadro nº IV.1 valores da tensão superficial de alguns líquidos, para diversas temperaturas.

**Quadro IV.1** – Tensão superficial para diversas substâncias e temperaturas

SUBSTÂNCIA	TENSÃO SUP., dyn / cm	TEMP., °C
Água	71,97	25
Benzeno	28,88	20
Metanol	22,6	20
"	20,1	50
Mercúrio	470	20
Acetona	23,7	20
"	18,6	60

A água tem uma tensão superficial elevada, se compararmos com os valores do benzeno, metanol e acetona, líquidos com moléculas apolares. Os líquidos com moléculas polares têm, em geral, tensões superficiais mais elevadas devido à contribuição adicional das interações dipolares.

No caso do mercúrio, as ligações metálicas em jogo originam um enorme valor para a tensão superficial.

#### IV.3.2 - Tensão superficial de soluções aquosas. Substâncias tenso-activas

A grande maioria das soluções de sais inorgânicos apresentam ligeiros aumentos da tensão superficial em relação à água pura. Ocorrem, no entanto, excepções como, por exemplo, os ácidos clorídrico e azótico. Nos sais inorgânicos a tensão superficial aumenta de forma moderada com o aumento da concentração molar. Por exemplo, para soluções de NaCl a 25 °C com concentração entre 0,1 e 2 moles/L a tensão superficial aumenta de 72,93 a 76,05 dine/cm.

A maioria das pequenas moléculas orgânicas produzem soluções com ligeiros aumentos da tensão superficial em relação à água pura.

Há, contudo, um grupo numeroso de moléculas orgânicas cujas soluções aquosas apresentam tensão superficial muito inferior à da água, mesmo para concentrações muito pequenas. Estas substâncias são chamadas de tensoactivas. São exemplos destas substâncias álcoois, ácidos gordos com cadeias de 4 a 12 carbonos, sais biliares, etc.

Demonstra-se que a força de coesão entre uma molécula de solvente e

uma molécula de um soluto tensoactivo é menos intensa do que a força de coesão entre duas moléculas do solvente. Sendo assim, as forças de coesão sobre as moléculas da superfície são maiores tratando-se de moléculas de solvente ( $M_1$ ) do que de moléculas de soluto ( $M_2$ ). Como a resultante ( $\vec{F}_1$ ) das forças sobre uma molécula de solvente é maior do que sobre uma molécula de soluto ( $\vec{F}_2$ ), Fig. IV.10.1 estas tendem a vir para a superfície, após ter sido feita a solução. Torna-se claro que a substituição de uma molécula de solvente da superfície por uma molécula de soluto produz uma diminuição da energia potencial da superfície.

A tendência termodinâmica de diminuir a energia livre de superfície faz com que moléculas de soluto tendam aí a substituir as moléculas de solvente. Daqui resulta que a concentração de soluto à superfície fica superior à concentração interior.

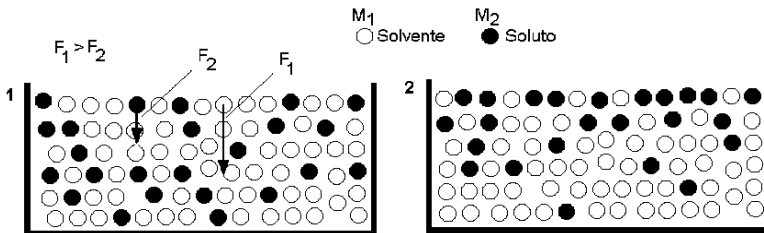


Fig. IV.10 - Solução de uma substância tensoactivo. 1 - Após ter sido feita a solução. 2 - Na situação de equilíbrio.

À medida que se estabelece uma diferença de concentração entre superfície e interior surgem forças de difusão que tendem a opor-se à tendência referida criando-se uma situação de equilíbrio correspondente a uma concentração intermédia de soluto à superfície Fig. IV.10.2, com diminuição da tensão superficial.

### IV.3.3 - Interfaces líquido-ar curvas. Fórmula de Laplace.

É de observação corrente que numa superfície curva, limitada por uma membrana elástica sujeita a tensão, a pressão a actuar na concavidade excede a pressão na convexidade. O efeito da tensão superficial pode ser comparado, em certos aspectos, ao da tensão de uma membrana elástica limitando um volume.

Surge assim a questão de saber se a pressão no interior duma bolha de ar ou de uma esfera líquida é superior à pressão no exterior.

Para o caso de uma superfície esférica é fácil provar esta afirmação e relacionar a variação de pressão com o raio da esfera. Consideremos uma pequena esfera de raio  $r$  de um líquido, cuja tensão superficial seja  $\sigma$  (Fig. IV.11). Seja  $P_0$  a pressão exterior e  $P$  a pressão no interior da esfera. Suponhamos que ocorreu uma expansão na superfície livre do líquido devido à acção de forças de pressão  $\vec{F}$  com aumento infinitesimal do raio de  $dr$ .

O aumento de superfície externa resultante do aumento do raio é, desprezando infinitésimos de segunda ordem,

$$dS = 4 \pi (r + dr)^2 - 4 \pi r^2 = 8 \pi r dr$$

A energia necessária para produzir este aumento de superfície é:

$$dW = 8 \pi \sigma r dr.$$

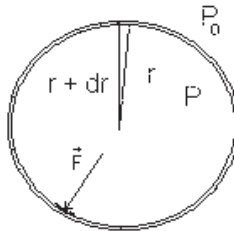


Fig. IV.11 - Esfera líquida de raio  $r+dr$  após expansão na superfície livre do líquido.

Esta energia deve igualar o trabalho das forças de pressão  $\vec{F}$  a actuar na superfície da esfera para o deslocamento  $dr$ , ou seja,

$$dW = (P - P_0) 4 \pi r^2 dr$$

Este trabalho tem que ser positivo, pois corresponde ao aumento da superfície, devendo assim as forças de pressão apontar para fora da esfera, sendo portanto,  $P > P_0$ . Igualando as suas expressões de  $dW$ , vem:



$$P - P_0 = \frac{2\sigma}{r}$$

IV.11

A diferença de pressão através da interface é directamente proporcional à tensão superficial do líquido, inversamente proporcional ao raio e actua sobre o lado côncavo da superfície.

Quando se trata de uma superfície curva qualquer, a situação complica-se. Em termos gerais, a curvatura de uma superfície, num ponto, pode ser descrita em termos dos raios de curvatura máximo e mínimo, obtidos por intercepção da superfície, por planos perpendiculares à mesma, passando pelo ponto. Nas vizinhanças do ponto, as curvas de intercepção dos planos com a superfície podem considerar-se arcos de circunferência, definidos por um raio de curvatura.

Verifica-se que para qualquer ponto de qualquer superfície, os raios de curvatura mínimo e máximo, daquelas curvas, encontram-se em planos que são perpendiculares entre si, além de perpendiculares à superfície. Estes planos são os planos principais e os raios de curvatura das correspondentes curvas os raios principais, Fig. IV.12.a). Os raios principais podem situar-se ambos do mesmo lado da superfície ou cada um em seu lado, Fig. IV.12.b).

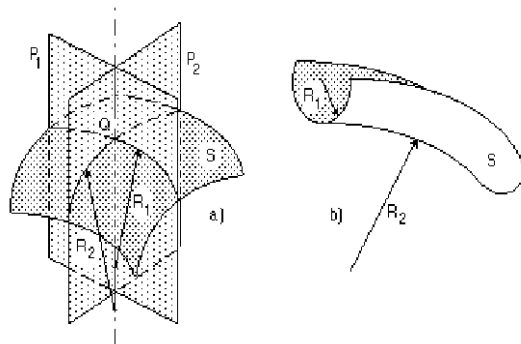


Fig. IV.12-a) Planos e raios principais no ponto O da superfície curva S. b) Raios principais de sinais contrários.

Esta circunstância obriga a considerarem-se os raios principais, quantidades algébricas. No primeiro caso, os raios principais terão o mesmo sinal (+) e sinais contrários no segundo, sendo negativo o de maior módulo.

Para uma situação geral, consideremos a dedução da fórmula de La-

place para uma superfície líquido-ar curva. Considere-se um elemento dessa área, muito pequeno em torno dum ponto  $M$ . A curvatura do elemento pode ser descrita em termos dos raios de curvatura principais  $R_1$  e  $R_2$ . Evidentemente, para um elemento de superfície infinitesimal, os raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$  definem a curvatura da superfície em  $Q$ .

Suponhamos que na parte inferior do elemento de área ABCDA (Fig. IV.13), se encontra o líquido à pressão  $P$  e, na parte superior, ar à pressão  $P_0$ .

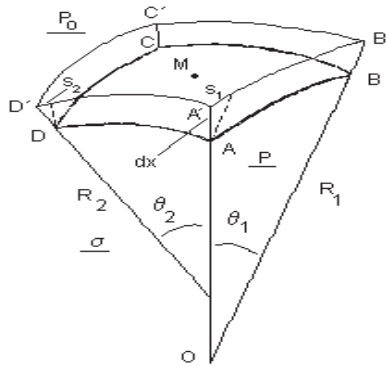


Fig. IV.13 - Elemento ABCD de uma superfície curva de um líquido de tensão superficial  $\sigma$ , sujeito a um aumento de área devido à acção de forças de pressão.

Imaginemos que sob a acção de forças de pressão, ocorreu uma variação na superfície do líquido produzindo um deslocamento  $dx$ , passando o elemento de superfície a ter a área  $A'B'C'D'A'$ .

O lado  $A'B'$  é maior que  $AB$  sendo a diferença entre estes dada por

$$S_1 = dx \operatorname{tg} \theta_1 = dx \theta_1 = dx \frac{AB}{R_1}$$

(Supõe-se que, sendo o elemento de área muito pequeno e a variação  $dx$  do raio igualmente muito pequena, as curvaturas de  $AB$  e  $A'B'$  são praticamente iguais, Fig. IV.13).

Em relação ao lado  $D'A'$  este é superior a  $DA$  sendo a diferença:

$$S_2 = dx \operatorname{tg} \theta_2 = dx \theta_2 = dx \frac{DA}{R_2}$$

O aumento da área do elemento de superfície resultante do deslocamento  $dx$  é,

$$\Delta S = \left( AB + \frac{AB}{R_1} dx \right) \left( DA + \frac{DA}{R_2} dx \right) - AB DA$$

e desprezando infinitésimos de segunda ordem

$$\Delta S = AB DA \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dx$$

O aumento da energia de superfície é:

$$\Delta W = \sigma \Delta S$$

onde  $\sigma$  é a tensão superficial do líquido.

Esta variação de energia é igualmente o trabalho realizado pelas forças de pressão no deslocamento  $dx$ , ou:

$$\Delta W = (P_1 - P_2) AB DA dx$$

como  $\Delta W$  é positivo, a força de pressão tem o mesmo sentido do deslocamento, ou seja,

$$P_1 > P_2$$

Então

$$\Delta W = (P_1 - P_2) AB DA dx$$

$$= AB DA \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$= AB DA \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dx \sigma$$

donde

---

$$P_1 - P_2 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{Fórmula geral de Laplace}) \quad \text{IV.12}$$

A pressão  $P_1$  é a pressão do lado da concavidade e é superior a  $P_2$ , pois o segundo membro da igualdade é positivo. Esta situação não depende obviamente do lado em que se encontra o líquido, mas da curvatura da superfície.

Tratando-se de uma superfície esférica,  $R_1 = R_2 = R$ , ou seja, o raio da esfera, vindo a fórmula de Laplace

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{r} \quad \text{na forma já obtida.}$$

Uma bola de sabão, ou seja, uma película de forma esférica, de uma solução de sabão, apresenta duas superfícies de contacto curvas entre a solução e o ar.

Suponhamos que  $P_0$  é a pressão atmosférica,  $P_1$  é a pressão no interior da película líquida e  $P$  a pressão no ar interior da bola de sabão, Fig. IV.14.

Seja  $r$  o raio da superfície interior da bola de sabão e  $r+\Delta r$  o raio da superfície exterior. A diferença de pressão entre o ar interior da bola de sabão e o líquido da película é:

$$P - P_1 = \frac{2\sigma}{r}$$

A diferença de pressão entre o líquido e o ar exterior é

$$P_1 - P_0 = \frac{2\sigma}{r + \Delta r}.$$

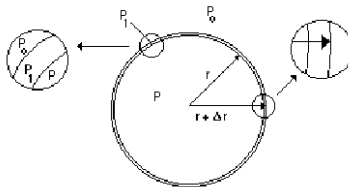


Fig. IV.14 - Bola de solução de sabão de raio interior  $r$  e exterior  $r+\Delta r$ .

De um modo geral, verifica-se que  $r \gg \Delta r$ , pelo que a soma das duas

expressões acima conduz, numa primeira aproximação a

$$P - P_0 = \frac{4\sigma}{r} \quad \text{IV.13}$$

A aplicação da fórmula geral de Laplace a uma interface líquido-ar de forma cilíndrica, já que o raio principal menor é o raio do próprio tubo e o raio principal maior é infinito, é

$$P - P_0 = \frac{\sigma}{r} \quad \text{IV.14}$$

onde  $P$  e  $P_0$  são respectivamente as pressões no interior e exterior do cilindro,  $r$  o raio do tubo e  $\sigma$  a tensão superficial do líquido.

#### IV.3.4 - Tubos capilares

Quando se mergulha um tubo de pequena secção interior num líquido que molhe o vidro, verifica-se uma elevação do líquido no tubo, como se observa na Fig. IV.15-a), até ser atingida uma posição de equilíbrio.

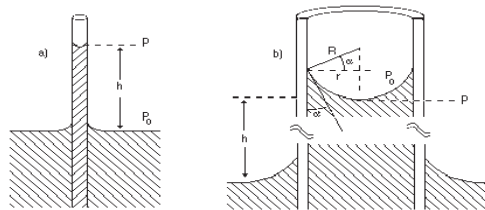


Fig. IV.15 - Fenômeno da capilaridade com um líquido que “molha” o vidro.

Vejamos como se relaciona a altura de elevação do líquido com o raio do tubo e a tensão superficial do líquido.

Suponhamos que a superfície do menisco é esférica, aproximação aceitável para tubos capilares com  $r < 1$  mm. Seja  $R$  o raio do menisco e  $\alpha$  o ângulo de contacto, formado pela tangente à superfície líquida com a superfície sólida, tangente situada num plano contendo o eixo do tubo, Fig.

IV.15-b). O valor do ângulo de contacto  $\alpha$  é tanto mais elevado quanto menos o líquido é capaz de molhar o sólido. Existem tabelas com valores de  $\alpha$  para alguns pares líquido-sólido à temperatura ambiente.

Nas condições referidas  $R = r/\cos\alpha$ . Para um líquido que molhe perfeitamente o tubo  $\alpha = 0$  e  $R = r$ .

Sendo o menisco uma superfície esférica, a diferença de pressão do exterior para o interior do mesmo, através da superfície, é (Eq.IV.11):

$$P_0 - P = \frac{2\sigma}{r}$$

Sendo  $h$  a altura da coluna de líquido, ou seja, o desnível entre as superfícies livres do líquido dentro e fora do capilar, vem

$$P + h \rho g = P_0 \quad \text{ou} \quad P_0 - P = h \rho g$$

donde

$$h \rho g = \frac{2\sigma}{R} \quad \text{ou} \quad h = \frac{2\sigma}{R\rho g}$$

ou

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r \rho g} \quad \text{IV.15}$$

A última destas expressões mostra que a altura da coluna líquida capilar varia directamente com a tensão superficial do líquido e coseno do ângulo de contacto e inversamente com o raio do tubo e a massa específica do líquido (lei de Jurin).

Quando se mergulha o tubo capilar num líquido que não molha o vidro, como por exemplo o mercúrio, o menisco é convexo e há um abaixamento do líquido no interior do tubo, Fig. IV.16.

Expressões idênticas às anteriores podem deduzir-se para este caso, de facto, a pressão no interior do menisco, agora côncavo, é:

$$P = P_0 + \frac{2\sigma}{R}$$

ou

$$P = P_0 + h \rho g \quad \text{e} \quad h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r \rho g}$$

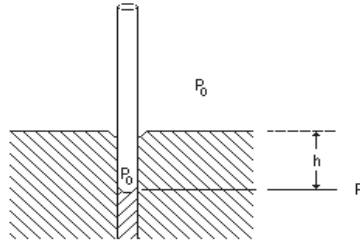


Fig. IV.16 - Abaixamento do nível e formação de menisco convexo num líquido que não molhe o vidro.

Sendo o ângulo  $\alpha > 90^\circ$ , o valor de  $h$  é negativo em relação a uma origem na superfície do líquido.

Uma questão que pode ser levantada é donde vem a energia e qual é a natureza das forças que actuam sobre os líquidos, produzindo a sua elevação ou abaixamento, nos tubos capilares.

Consideremos o primeiro caso, para um tubo de raio  $r$  mergulhado num líquido de tensão superficial  $\sigma_\ell$ , massa específica  $\rho$  e que molha o tubo. Já sabemos que

$$h = \frac{2 \sigma_\ell}{r \rho g}$$

ou

$$\sigma_\ell = \frac{h r \rho g}{2}$$

A energia potencial ganha pelo líquido após a formação de uma coluna líquida de altura  $h$ , que se supõe ter a massa  $m$  é

$$W = 1/2 m g h = \frac{\pi r^2 \rho g h^2}{2}$$

A elevação do líquido e a disponibilização de  $W$  resultam da tendência espontânea da energia livre da superfície do sólido para se minimizar. Para um líquido que molhe o vidro, a energia livre, por unidade de área, para a superfície de contacto sólido-líquido é menor do que para a superfície de

contacto sólido-ar. Assim, quando superfície de contacto sólido-ar é substituída por superfície de contacto sólido-líquido é libertada energia. Quando se forma uma coluna de líquido de altura  $h$  uma área de superfície de contacto sólido-ar igual a  $2\pi r h$  transforma-se em superfície de contacto sólido-líquido. A esta transformação corresponde a variação de energia

$$\Delta E = 2 \pi r h (\sigma_S - \sigma_{Sl})$$

onde  $\sigma_S$  é a tensão de contacto sólido-ar e  $\sigma_{Sl}$  a tensão de contacto sólido-líquido.

Para a elevação do líquido é também despendido um trabalho  $Q$  para vencer forças de atrito, então

$$\Delta E = \frac{\pi r^2 \rho g h^2}{2} + Q \quad \text{IV.16}$$

A soma da energia utilizada para a elevação do líquido mais a energia dissipada, corresponde à diferença entre as energias livres para as superfícies de contacto sólido-ar e sólido-líquido do tubo.

### IV.3.5 - Capilaridade entre lâminas

Quando duas lâminas de vidro muito próximas se mergulham num líquido que molhe o primeiro, observa-se que o líquido se eleva entre as lâminas até ser atingida uma altura de equilíbrio, observa-se a formação de meniscos côncavos nas superfícies de separação superior e laterais (Fig. IV.17).

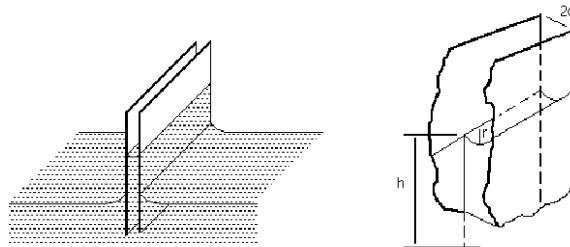


Fig. IV.17 - Fenômenos da capilaridade entre lâminas.



Raciocinando de modo idêntico ao que fizemos com o tubo capilar vem

$$h \rho g = \frac{\sigma}{r} = \frac{\sigma \cos\theta}{d}$$

e

$$h = \frac{\sigma \cos\theta}{d \rho g} \quad \text{IV.17}$$

A velocidade do movimento de um líquido que, por acção da capilaridade, penetra num determinado espaço, é tanto maior quanto maior for a sua tensão superficial e menores a sua viscosidade e ângulo de contacto. É definido um coeficiente de penetração pela equação

$$\tau = \frac{\sigma \cos \alpha}{2 \eta} \quad \text{IV.18}$$

Em medicina dentária interessa que certos adesivos possuam elevado  $\tau$  para actuarem como selantes de fissuras e fossas para preencherem rapidamente sulcos e zonas rugosas, de modo a permitirem uma boa união.

### IV.3.6 - Capilares isolados

Se for colocada uma pequena massa de líquido entre duas lâminas de vidro muito próximas, observa-se que esta adere às superfícies e se imobiliza, ficando como que suspensa entre as lâminas (Fig. IV.18).

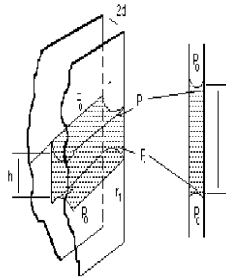


Fig. IV.18 - Formação de capilares isolados entre lâminas.

O equilíbrio no menisco superior é dado por

$$P_0 - P = \frac{\sigma}{r}$$

e no inferior é

$$P_0 - P_1 = P_0 - P - h \rho g = \frac{\sigma}{r_1}$$

Donde

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{h \rho g}{\sigma} \quad \text{IV.19}$$

Vemos que  $r$ , o raio de curvatura do menisco superior, é menor do de  $r_1$ , o raio de curvatura do menisco inferior. A pressão na fase líquida é sub-atmosférica e de valor médio.

$$\frac{P_1 + P}{2} = \frac{1}{2} \left( 2 P_0 - \frac{\sigma}{r} - \frac{\sigma}{r_1} \right) \quad \text{IV.20}$$

A partir da Eq. IV.20 vê-se que, nos capilares isolados, quando o líquido molha as paredes, a pressão no interior do líquido é subatmosférica. Entre os dentes existem espaços com dimensões capilares, ocorrendo a formação de capilares isolados com saliva. A saliva penetra nestes espaços ficando aí com pressão barométrica negativa. Este facto tem consequências indesejáveis, pois existe evidência de que, para menores pressões, a velocidade de crescimento das bactérias pode aumentar até cerca de 20% do valor correspondente à pressão atmosférica.

## IV.4 – Interfaces entre líquidos

### IV.4.1 – Energia de coesão

Uma importante noção, intimamente ligada à de tensão superficial de um líquido, é a de energia de coesão, que se define como a energia mínima que é necessário fornecer para seccionar uma coluna líquida de  $1 \text{ cm}^2$  de secção recta (Fig. IV.19).

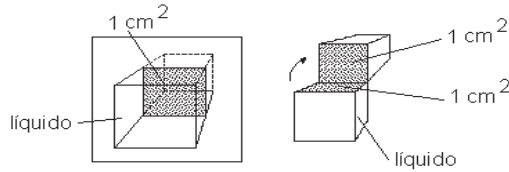


Fig. IV.19 - A energia mínima necessária para sectionar um prisma de líquido com 1 cm<sup>2</sup> de secção recta é a energia de coesão do líquido

Nas condições referidas, é criada uma nova superfície livre com área de 2 cm<sup>2</sup>. Supondo não ter havido dissipação de energia, a energia dispendida corresponde a duas vezes a tensão superficial. Então, a energia de coesão é, no sistema CGS, igual a duas vezes a tensão superficial do líquido.

$$W_c = 2 \sigma \quad \text{IV.21}$$

#### IV.4.2 - Superfície de separação entre dois líquidos não miscíveis

Do mesmo modo que se define energia de superfície para a superfície de separação líquido-gás, pode definir-se uma energia de superfície para a separação entre dois líquidos não miscíveis. Esta energia tem um valor diferente do característico das respectivas superfícies livres, quando em contacto com o seu vapor ou com o ar. A experiência prova que tais superfícies tendem a ocupar uma área mínima. Por exemplo, gotas de um líquido suspensas noutro líquido de igual densidade e não miscível com o primeiro (por exemplo, azeite e solução aquosa de álcool etílico), tomam a forma esférica.

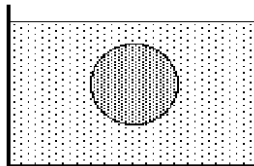


Fig. IV.20 - Porção de um líquido **B** no interior de um líquido **A** de igual massa específica e imiscível com **B**.

Uma área de contacto  $\Delta S$  entre dois líquidos **A** e **B**, não miscíveis possui uma energia

$$\Delta W = \sigma_{AB} \Delta S \quad \text{IV.22}$$

onde  $\sigma_{AB}$  é a tensão de contacto entre os dois líquidos. A tensão de contacto é tanto maior quanto menos miscíveis são os líquidos.

O trabalho, ou energia, de adesão entre dois líquidos é a energia que é necessário fornecer para separar isotérmica e reversivelmente uma área de  $1 \text{ cm}^2$  de contacto entre os dois líquidos (Fig. IV.21).

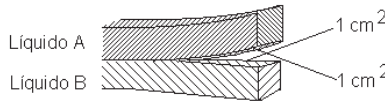


Fig. IV.21 - O trabalho de adesão entre dois líquidos é a energia que é necessário fornecer para separar isotérmica e reversivelmente uma área de  $1 \text{ cm}^2$  de contacto entre os dois líquidos.

Como para se fazer esta separação se cria  $1 \text{ cm}^2$  de superfície líquido-ar (superfície livre), para cada um dos líquidos, e se desfaz  $1 \text{ cm}^2$  de área de contacto entre os dois líquidos, o trabalho de adesão é:

$$W_{AB} = \sigma_A + \sigma_B - \sigma_{AB} \quad \text{IV.23}$$

Consideremos o caso de uma gota de azeite sobre água como se vê em corte na figura abaixo (Fig. IV.22)

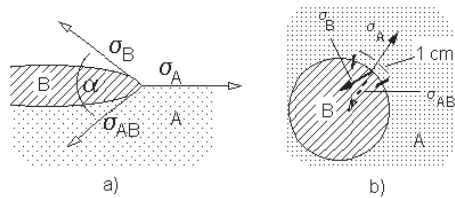


Fig. IV.22 - É útil considerarem-se as tensões superficiais e a tensão de contacto como vectores força tangentes às respectivas superfícies e que aplicadas a  $1 \text{ cm}$  de fronteira mantêm tensas as respectivas superfícies.

Podemos considerar que as tensões superficiais e a tensão de contacto, quando aplicadas a 1 cm da fronteira comum às 3 fases, constituem as forças tangentes às respectivas superfícies que tendem a diminuir as áreas correspondentes.

Para haver equilíbrio em qualquer ponto torna-se necessário que a soma vectorial

$$\vec{\sigma}_A + \vec{\sigma}_B + \vec{\sigma}_{AB} = 0 \quad \text{ou seja} \quad -\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \vec{\sigma}_{AB} \quad \text{IV.24}$$

Para que esta condição de equilíbrio se verifique, a gota de azeite terá que adquirir uma forma lenticular de modo que a soma das componentes de  $\sigma_A$  e  $\sigma_{AB}$  segundo a direcção de  $\sigma_A$  igual este vector em módulo.

No caso de

$$|\vec{\sigma}_A| > |\vec{\sigma}_B + \vec{\sigma}_{AB}| \quad \text{IV.25}$$

não é possível obter-se o equilíbrio e o líquido **B** estende-se sobre a superfície de **A** numa camada finíssima monomolecular. É o caso de certos ácidos gordos sobre a água. Quando o ângulo  $\alpha$  (Fig. IV.22) é muito pequeno a Eq IV.25 pode escrever-se

$$\sigma_A > \sigma_B + \sigma_{AB}$$

ou

$$\sigma_A - \sigma_B > \sigma_{AB}$$

visto neste caso  $\sigma_{AB}$  e  $\sigma_B$  terem aproximadamente a mesma direcção.

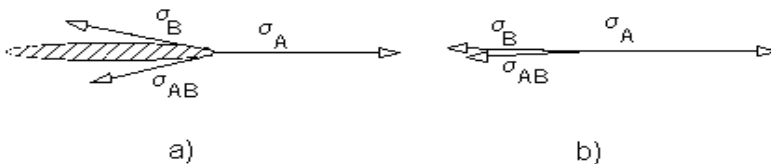


Fig. IV.23 - No caso de  $\sigma_A > \sigma_B + \sigma_{AB}$   $\alpha \rightarrow 0$  a) e o líquido **B** espalha-se sobre a superfície de **A** formando uma camada monomolecular de espalhamento b).

Quando o líquido **B** se espalha sobre **A**,  $\alpha \approx 0$  e é

$$\sigma_A > \sigma_B + \sigma_{AB}$$

Somando  $\sigma_B$  a ambos os membros da desigualdade vem

$$\sigma_A + \sigma_B - \sigma_{AB} > 2 \sigma_B$$

ou

$$W_{AB} > W_B \tag{IV.26}$$

Então, quando ocorre a situação descrita pela Eq. IV.26, o trabalho de adesão entre os dois líquidos é maior do que o trabalho de coesão do líquido **B**.

#### IV.4.3 - Superfície de separação entre líquidos e sólidos

Finalmente consideramos o caso de superfícies de contacto que envolvem sólidos. A existência de uma energia superficial nos sólidos é evidenciada pelo facto de ser necessário fornecer energia para quebrar um sólido e, mais ainda, para o pulverizar. Qualquer destas acções é obtida, vencendo as ligações que asseguram a coesão do sólido.

No caso de um sólido, a energia potencial de superfície depende do estado de polimento da superfície e de outros factores.

Pode, no entanto, definir-se a energia de superfície de um sólido como energia média que é necessário fornecer para criar sem variação de temperatura, 1 cm<sup>2</sup> de superfície

$$\Delta W = \sigma_S \Delta S \tag{IV.27}$$

onde  $\sigma_S$  é a tensão de contacto do sólido com o ar.

Fala-se em energia média porque o trabalho necessário para criar 1 cm<sup>2</sup> de superfície varia consideravelmente de experiência para experiência. Isto deve-se a que, embora à observação macroscópica as superfícies pareçam idênticas, à escala atômica ou molecular poderão ser completamente diferentes.

De modo semelhante ao que definimos para o contacto entre dois líquidos, podemos definir o trabalho (ou energia) de adesão de um líquido sobre um sólido.

É o trabalho necessário para separar isotermicamente o líquido do sólido numa área de 1 cm<sup>2</sup>.

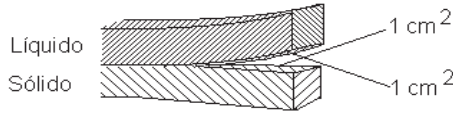


Fig. IV.24 - O trabalho de adesão entre um líquido e um sólido é a energia que é necessário fornecer para separar isotérmica e reversivelmente uma área de 1 cm<sup>2</sup> de contacto entre o líquido e o sólido.

Sendo, respectivamente,  $\sigma_l$ ,  $\sigma_s$ , e  $\sigma_{sl}$ , a tensão superficial do líquido, a tensão de contacto do sólido com a ar e a tensão de contacto entre o sólido e o líquido vem

$$W_{Sl} = \sigma_l + \sigma_s - \sigma_{sl} \quad \text{IV.28}$$

Nesta equação unicamente  $\sigma_l$  é conhecido; contudo o valor da diferença ( $\sigma_s - \sigma_{sl}$ ) pode determinar-se com facilidade embora não se conheçam estes termos individualmente.

Consideremos uma gota líquida em equilíbrio sobre uma superfície sólida, lisa e horizontal. No equilíbrio temos

$$\sigma_s = \sigma_{sl} + \sigma_l \cos \alpha$$

ou 
$$\sigma_s - \sigma_{sl} = \sigma_l \cos \alpha$$

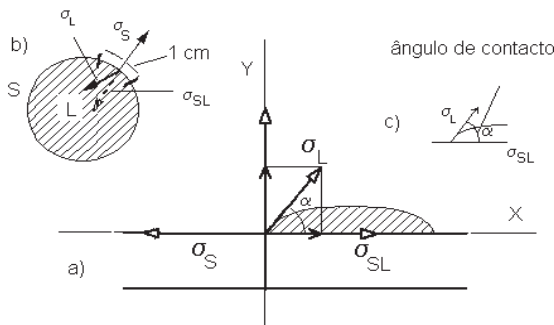


Fig. IV.25 - Equilíbrio no contacto de um líquido com um sólido.

Então a Eq. IV.28 vem

$$W_{S\ell} = \sigma_{\ell} (1 + \cos \alpha)$$

IV.29

onde  $\alpha$  é o ângulo de contacto. Desta expressão conclui-se que o trabalho de adesão aumenta quando o ângulo de contacto diminui. Consideremos diversas situações, Fig. IV.26.

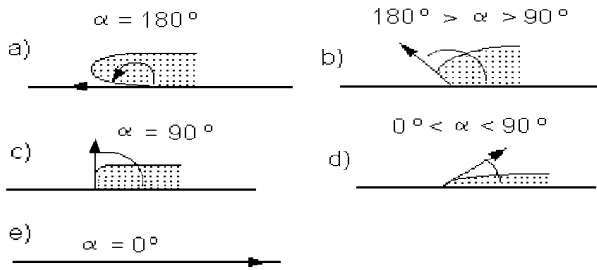


Fig. IV.26 - Casos de líquido em contacto com sólidos para situações diversas de energias de superfície.

No caso a)  $\alpha = 180^\circ$  logo  $W_{S\ell} = 0$ . O trabalho de adesão é nulo, ou seja, o líquido não molha absolutamente o sólido - caso do mercúrio e vidro quando perfeitamente livres de sujidade.

Caso b) o líquido molha deficientemente o sólido.

Caso c) é a situação mais intermediária possível do molhamento. O ângulo de corte situa-se entre o não molhar total e o molhamento perfeito.

Caso d) o líquido molha bem mas não perfeitamente o sólido.

No caso e)  $\alpha = 0$  logo  $W_{S\ell} = 2\sigma_{\ell} = W_{\ell}$ . O trabalho de adesão iguala o trabalho de coesão do líquido. É o caso limite para um líquido molhar o sólido. Naturalmente que quando  $W_{S\ell} > W_{\ell}$  o líquido molha perfeitamente a superfície sólida mas a Eq. IV.28 não se aplica, visto não ocorrer equilíbrio.



## IV.5 – Fundamentos de dinâmica de fluidos

### IV.5.1 - Viscosidade

Uma propriedade essencial dos fluidos é tomarem a forma dos recipientes que os contêm. É da experiência corrente que a água ou o álcool, por exemplo, se podem vaziar de um reservatório para outro (e se deformam, portanto) com maior facilidade do que um óleo ou o mel. Traduz-se este facto, dizendo vulgarmente que os últimos líquidos são mais viscosos do que os primeiros. Um outro facto observado é a resistência que os líquidos apresentam ao movimento. Se agitarmos uma região de um líquido, verifica-se que a agitação se comunica às regiões vizinhas e que, após termos cessado a agitação, os movimentos tendem a desaparecer, tanto mais rapidamente quanto mais viscoso é o líquido. Este atrito interno ou viscosidade nos líquidos é devido às forças de coesão internas, que se opõem aos movimentos relativos entre moléculas vizinhas. Um efeito semelhante ocorre com os gases em movimento mas, visto as moléculas dos gases poderem movimentar-se muito mais livremente do que as dos líquidos, o efeito é muito menos pronunciado.

Quando grandes massas líquidas se deslocam e as velocidades são pequenas, como no caso de um rio em regime estival, podemos imaginar o líquido como sendo constituído por uma sobreposição de camadas líquidas planas com velocidades que aumentam a partir do leito. Desprezamos os efeitos de convecção produzidos pela evaporação e por gradientes térmicos.

Devido ao atrito interior, quando uma camada líquida se desloca, exerce uma força de arrastamento sobre as camadas adjacentes.

O regime laminar para o caudal de um líquido é caracterizado, em termos físicos, pelo facto das linhas de corrente do campo de velocidades das partículas do líquido, serem linhas que nunca se cruzam. No caso acima referido do rio em regime estival, supondo uma situação perfeitamente estacionária, podemos supor que a velocidade que, num particular instante, a partícula que se situa numa dada posição possui, é a mesma que, no mesmo ponto, qualquer outra partícula terá em qualquer instante posterior. As linhas do campo de velocidades (linhas de corrente) são linhas tangentes em cada um dos seus pontos a um vector velocidade  $e$ , no caso presente, serão linhas que nunca se encontram, paralelas no caso da largura do rio ser constante.

Num líquido com escoamento em regime laminar, consideremos dois elementos líquidos planos e paralelas, Fig. IV.27, de área  $\Delta S$ , distanciados de  $\Delta y$  e animados de velocidades paralelas  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ . Devido às interacções

moleculares, a camada de maior velocidade tende a arrastar a de menor velocidade e esta a retardar a primeira.

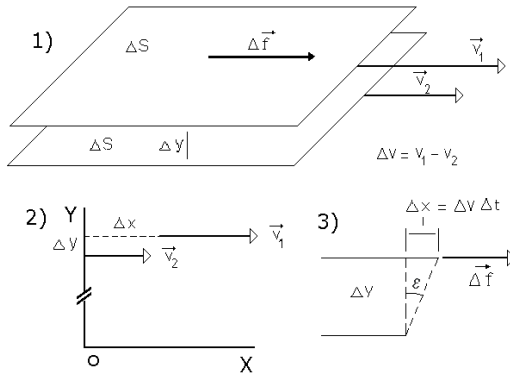


Fig. IV.27 - Dois elementos de área  $\Delta S$  distanciados de  $\Delta y$  com velocidades  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  mantidas constantes à custa da força  $\Delta f$  tangente a um dos elementos.

A velocidade relativa entre as duas superfícies é  $\Delta v = v_1 - v_2$ , que tenderá a anular-se se forças externas não actuarem. Para se manter a velocidade relativa entre as duas superfícies, torna-se necessário exercer uma força que equilibre a força de interacção ou, se quisermos, a força de viscosidade que se exerce entre elas.

Verifica-se que esta força, tangente a  $\Delta S$ , a que chamaremos  $\vec{\Delta f}$  é:

a) - Proporcional ao valor da área de contacto  $\Delta S$  entre as duas camadas;

b) - Proporcional ao gradiente de velocidade, ou seja, à relação  $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ .

Podemos então escrever:

$$\Delta f = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \Delta S \quad \text{IV.30}$$

O coeficiente de proporcionalidade  $\eta$  é, por definição, o coeficiente de viscosidade, coeficiente de viscosidade dinâmica ou, simplesmente, viscosidade do líquido. A Eq. IV.30 é conhecida como a equação de Newton da

viscosidade. A partir da Eq. IV.30 vemos que a viscosidade de um líquido iguala a força de fricção se o gradiente de velocidade e a área forem unitários. Assim, no sistema CGS, podemos definir viscosidade de um líquido como sendo a força, em dynes, entre duas áreas de  $1 \text{ cm}^2$  quando o gradiente de velocidade tem valor unitário, ou seja, a velocidade relativa é de  $1 \text{ cm/s}$  e os planos estão distanciados entre si de  $1 \text{ cm}$ .

A lei de Newton é respeitada pela maioria dos líquidos e gases simples, com caudal em regime laminar. Para certos líquidos, a expressão de  $\Delta f$  é mais complexa do que a anterior pois o coeficiente  $\eta$  é função do gradiente de velocidade, pelo que a força  $\Delta f$ , não varia linearmente com  $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ .

Isto acontece, por exemplo, com as emulsões, com soluções de macromoléculas e com suspensões, quando, para qualquer dos casos, as partículas não são esféricas. Um exemplo das últimas é o sangue. Nestas condições o líquido diz-se não newtoniano e a Eq. IV.30 para diferentes pares de valores experimentais de  $\Delta f$  e  $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ , fornece valores diferentes de  $\eta$ , aqui chamada de viscosidade aparente.

Quando  $\Delta f = 1 \text{ dyne}$ ,  $\Delta S = 1 \text{ cm}^2$  e  $\frac{\Delta v}{\Delta y} = 1 \text{ s}^{-1}$  o coeficiente de viscosidade tem valor de 1 unidade CGS, o poise. A unidade do sistema internacional é o  $1 \text{ Nm}^{-2}\text{s}$  também chamado de poiseuille, que corresponde a 10 poise.

Em Biologia costuma exprimir-se a viscosidade de um líquido em termos de viscosidade relativa considerada em relação à água.

É também usada a viscosidade cinemática, quociente de  $\eta$  pela massa específica  $\rho$

$$v = \frac{\eta}{\rho} \quad \text{IV.31}$$

cuja unidade no SI é o  $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ .

De um modo geral, a viscosidade de um líquido decresce com a temperatura, se não ocorrerem mudanças de estado ou outras modificações químicas. No Quadro IV.2 apresentamos valores da viscosidade da água (poise) para diferentes temperaturas em graus centígrados.

Quadro IV.2 - Coeficiente de viscosidade dinâmica da água em função da temperatura.

Temp. (°C)	0	20	40	60	70
$\eta$ (poises)	0,0178	0,010	0,0072	0,0047	0,0032
$\eta$ (Nm <sup>-2</sup> s)	0,00178	0,001	7,2E-4	4,7E-4	3,2E-4

A equação que utilizámos para a definição de coeficiente de viscosidade  $\eta$  de um líquido pode escrever-se na forma

$$\frac{\Delta f}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad \text{IV.32}$$

O primeiro membro desta igualdade representa a força por unidade de superfície a actuar tangencialmente à mesma. Já sabemos que a grandeza assim definida é tensão de corte (tensão tangencial ou tensão de arrastamento). Podemos definir viscosidade de um líquido usando as relações anteriores. O coeficiente de viscosidade de um fluido surge, assim, como a tensão de corte por unidade de gradiente de velocidade. Fazendo

$$\frac{\Delta f}{\Delta S} = T \quad \text{e} \quad \frac{\Delta v}{\Delta y} = U$$

podemos escrever

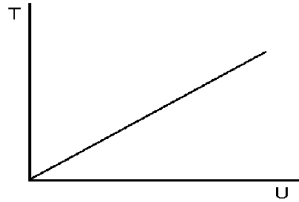
$$T = \eta U \quad \text{IV.33}$$

Na Fig. IV.27 a deformação ocorrida no fluido, devido ao deslocamento  $\Delta x$ , considerada em relação à origem das coordenadas ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) pode traduzir-se pelo ângulo de corte. Ou seja

$$\varepsilon \approx \text{tg } \varepsilon = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \text{IV.34}$$

Provaremos mais tarde que o gradiente de velocidade no fluido,  $U$ , é igual à velocidade de deformação ocorrida  $d\varepsilon/dt$ .

Num sistema de eixos  $T(U)$  e para um líquido newtoniano a equação de Newton corresponde à equação de uma recta com inclinação  $\eta$  que passa pela origem (Fig. IV.28).

Fig. IV.28 - Função  $T(U)$  no caso de um líquido newtoniano.

#### IV.5.2 - Caudal em regime laminar através de tubos cilíndricos

Os caudais dos líquidos através de tubos cilíndricos e uniformes, quando a velocidade de deslocamento é suficientemente pequena, têm características de regime laminar. As linhas de corrente são paralelas, podendo o líquido considerar-se, no seu movimento, como constituído por um número infinito de lâminas líquidas cilíndricas muito finas e concêntricas, deslizando umas sobre as outras.

No caudal em regime laminar, num tubo cilíndrico, as velocidades de escoamento diminuem progressivamente do eixo para a periferia, sendo nulas junto das paredes do tubo.

Verificou-se que a velocidade variava em função da distância radial, segundo uma função que é a equação de uma parábola. Diz-se assim, que no caudal em regime laminar, num tubo cilíndrico, a velocidade tem uma distribuição de perfil parabólico, Fig. IV.29.

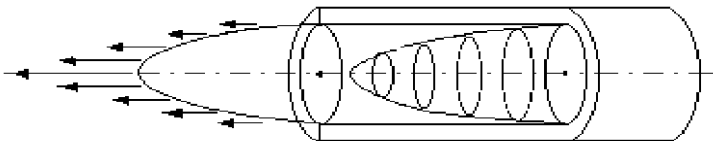


Fig. IV.29 - Perfil parabólico de velocidades num tubo cilíndrico.

A equação que traduz a velocidade de deslocamento do líquido, deslocando-se em regime laminar num tubo cilíndrico é:

$$v_r = \frac{\Delta P R^2}{4 \eta \ell} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{IV.35}$$

onde  $v_r$  é a velocidade da camada líquida de raio  $r$ ,  $\ell$  o comprimento do tubo de raio  $R$ ,  $\eta$  a viscosidade do líquido e  $\Delta P$  a queda de pressão nos extremos de  $\ell$ .

Quando  $r = R$  é  $v_r = 0$ , ou seja, existe uma camada líquida infinitamente fina em contacto com a parede do recipiente, para a qual a velocidade de deslocamento é nula. Esta camada líquida, aderente ao tubo e com velocidade de deslocamento nula, produz um efeito de retardamento sobre a camada adjacente, devido à viscosidade, esta segunda camada exerce retardamento sobre a seguinte e assim sucessivamente até ao eixo do tubo onde a velocidade de deslocamento é máxima, originando-se assim a distribuição parabólica de velocidades.

Se não houvesse viscosidade, as camadas líquidas deslocar-se-iam livremente umas sobre as outras. Se uma força de pressão actuasse uniformemente e por um mínimo intervalo de tempo sobre uma secção recta do líquido no início do tubo, não ocorreria qualquer distribuição de velocidades. Todas as partículas se deslocariam com igual velocidade.

No regime laminar não há dispêndio de energia por parte das forças que ocorrem entre as partículas do líquido e as paredes do tubo, visto não haver movimento relativo entre estas. Toda a energia mecânica transformada em calor no regime laminar resulta de trabalho das forças associadas à viscosidade. É erróneo dizer-se por exemplo, que o coração tem de fornecer energia para compensar o trabalho da fricção entre o sangue e as paredes dos vasos. O trabalho que o coração executa é utilizado para vencer os atritos do próprio sangue e comunicar energia cinética a este, não tendo o atrito do sangue com as paredes qualquer contribuição, visto as partículas do sangue em contacto com os vasos se encontrarem imóveis. Note-se, no entanto, que no regime chamado de turbulento, que pode ocorrer se, por aumento da velocidade do líquido, o regime laminar se tornar impossível, o trabalho das forças de fricção do líquido com a parede pode ter um valor significativo.

Em repouso, o regime do caudal de sangue na circulação sanguínea é laminar, à excepção das proximidades das válvulas cardíacas e, eventualmente, nas bifurcações dos grandes vasos. As turbulências nas proximidades das válvulas cardíacas originam os chamados sons cardíacos que podem ser utilizados em diagnóstico (fonocardiograma).

### IV.5.3 - Energia mecânica dos líquidos. Líquidos ideais

Considere-se a situação ideal de um líquido onde não ocorram forças de coesão entre as moléculas, ou seja, com viscosidade nula, a deslocar-se num tubo cilíndrico. Neste caso, podemos considerar três formas de energia mecânica associadas ao líquido: energia cinética, energia potencial gravitacional e energia potencial devida à pressão.

### IV.5.4 - Energia cinética

Consideremos uma massa  $m$  de um líquido deslocando-se com velocidade  $v_0$ .

O trabalho que uma força constante  $F$ , com a direcção de  $v_0$  e sentido contrário, terá de executar para fazer parar completamente a massa de líquido  $m$  é,  $W = F x_1$ , sendo  $x_1$  o espaço percorrido.

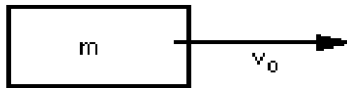


Fig. IV.30 - Massa  $m$  de líquido deslocando-se com velocidade  $v_0$ .

No percurso  $x_1$  o movimento da massa  $m$  é uniformemente retardado com aceleração negativa e dada por:

$$a = \frac{v_0^2}{2x_1}$$

pois a velocidade  $v$  no movimento uniformemente retardado com aceleração  $a$  e velocidade inicial  $v_0$  é:

$$v^2 = v_0^2 - 2 a x$$

então,

$$W = F x_1 = m a x_1 = m \frac{v_0^2}{2}$$

é a energia cinética que a massa de líquido  $m$  possuía antes da actuação da força  $F$ , ou seja, a energia cinética da massa  $m$  de líquido com a velocidade  $v_0$

Na energética dos líquidos é usual exprimir-se a energia em termos específicos, ou seja, por unidade de massa ou de volume.

Sendo  $W_c$  a energia cinética da massa  $m$  de líquido com velocidade  $v$ , a energia cinética por unidade de massa de líquido é:

$$W_c/m = v^2 / 2 \quad \text{IV.36}$$

A energia cinética por unidade de volume de líquido para uma massa  $m$  de um líquido com massa específica  $\rho$  e velocidade  $v$  é:

$$W_c/V = \rho v^2 / 2 \quad \text{IV.37}$$

pois,  $m = \rho V$  ( $V$  – volume da massa  $m$  de líquido).

#### IV.5.5 - Energia potencial gravitacional

Uma massa  $m$  de um líquido é sujeita a uma força gravitacional  $F = m g$ , sendo  $g$  a aceleração da gravidade.

O trabalho necessário para levantar a massa  $m$  à altura  $h$  é  $W = m g h$ . Este valor é também o aumento de energia potencial gravitacional a que foi sujeita a massa de líquido a uma altura  $h$  é então  $W_g = m g h$ .

A energia potencial gravitacional por unidade de massa de líquido é

$$W_g/m = g h \quad \text{IV.38}$$

A energia potencial gravitacional por unidade de volume, quando a massa específica do líquido é  $\rho = m/V$  é:

$$W_g/V = g h \rho \quad \text{IV.39}$$



### IV.5.6 - Energia potencial devida à pressão

Suponhamos que um êmbolo de área  $A$  que separa um líquido com pressões  $P_1$  e  $P_2$ , dum e doutro lado do êmbolo se desloca de um comprimento  $\Delta x$  sob a acção das forças de pressão a actuar, Fig. IV.31.

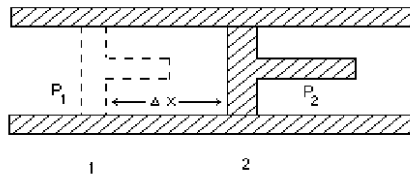


Fig. IV.31 - Trabalho realizado por um êmbolo que se desloca de  $\Delta x$  sob a acção da diferença de pressão  $P_1 - P_2$ .

A força total que se exerce no êmbolo é:

$$F = (P_1 - P_2) A$$

O trabalho realizado por esta força para o deslocamento  $\Delta x$  é:

$$W = F \Delta x = (P_1 - P_2) A \Delta x = P \Delta V$$

onde  $P$  é a diferença de pressão entre os dois lados do êmbolo, ou seja, a pressão a actuar efectivamente neste e  $\Delta V$  o volume de líquido movimentado por acção do deslocamento  $\Delta x$ . O valor do produto  $P\Delta V$  é a energia potencial de pressão da massa  $\Delta m = \rho \Delta V$  de líquido sujeita à pressão efectiva  $P$ . A energia potencial de pressão por unidade de massa de líquido é:

$$W/m = P/\rho \tag{IV.40}$$

A energia potencial devida à pressão por unidade de volume de líquido é:

$$W_p/V = P \tag{IV.41}$$

A energia potencial de pressão tem as dimensões de uma pressão vezes um volume. A energia potencial de pressão por unidade de volume tem, pois, as dimensões de uma pressão. Sendo assim, qualquer das formas ante-

riores de energia, por unidade de volume, que considerámos, deverá ter, igualmente, as dimensões de uma pressão. Facilmente identificamos o princípio fundamental da hidrostática na expressão da energia potencial gravitacional por unidade de volume.

#### IV.6.1 - Conservação da massa

Suponhamos um líquido ideal (sem atrito interno) a deslocar-se através de um tubo de eixo horizontal, com um estrangulamento como se indica na Fig. IV.32.

Sejam  $r_a$ ,  $S_a$  e  $v_a$ , respectivamente, o raio, a área da secção recta e a velocidade de deslocamento do líquido na parte **A** do tubo e  $r_b$ ,  $S_b$  e  $v_b$  as equivalentes quantidades para a parte **B**.

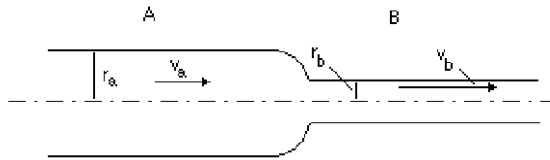


Fig. IV.32 - Caudal estacionário de um líquido ideal através de um tubo com um estrangulamento.

Seja  $\rho$  a massa específica do líquido e admitamos que este sistema hidrodinâmico se encontra numa situação estacionária. A massa de líquido que passa através de qualquer secção  $S_a$  por unidade de tempo é:

$$M_a = \pi r_a^2 v_a \rho \quad \text{IV.42}$$

e através da secção  $S_b$  é:

$$M_b = \pi r_b^2 v_b \rho$$

Não havendo nem afluentes, nem escoadouros no sistema deverá haver conservação da massa, pelo que

$$M_a = M_b$$

ou seja,

$$\pi r_a^2 v_a \rho = \pi r_b^2 v_b \rho$$

ou

$$v_b = v_a \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^2 = v_a \frac{S_a}{S_b} \quad \text{IV.43}$$

Esta equação é uma equação de continuidade para a situação em estudo.

### IV.6.2 - Equação da continuidade

Numa situação estacionária o volume de líquido que passa por unidade de tempo por qualquer secção recta do tubo da Fig. IV.32 é constante. É uma consequência directa da conservação da massa, quando no sistema não há fontes nem escoadouros. Outra maneira de referir a equação da continuidade é dizer que o número de linhas de corrente é conservado no tubo. Por vezes é útil caracterizar o campo de velocidades definido no volume onde se processa um caudal líquido, pelas linhas de corrente.

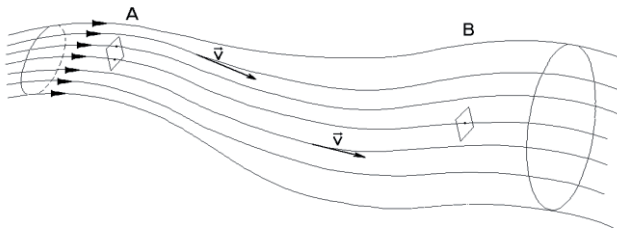


Fig.IV.33 - Tubo com as linhas de corrente.

As linhas de corrente são tangentes, em todos os seus pontos, à direcção do vector velocidade nesses pontos; são linhas orientadas no sentido do vector velocidade e, em qualquer ponto do campo, o número de linhas de corrente, por unidade de área, que atravessa uma superfície colocada no ponto, normalmente à direcção da velocidade, é proporcional ao módulo da velocidade, Fig. IV.33.

O vector velocidade fica assim caracterizado em direcção, sentido e

grandeza. Para se representar a intensidade do vector velocidade quantitativamente, convencionou-se uma relação entre a densidade das linhas de corrente ( $n^\circ$  de linhas de corrente/unidade de área normal às linhas) e o valor da velocidade. Por exemplo, no tubo de corrente se a velocidade do líquido em **A** é de 2 m/s e se fizer corresponder a esta uma densidade de 2 linhas/cm<sup>2</sup> então em **B** onde a densidade das linhas de corrente é de 1 linha/cm<sup>2</sup> a velocidade deverá ser de 1 m/s. Quanto mais próximas se encontram as linhas de corrente maior é o valor da velocidade.

Já vimos que a velocidade de deslocamento do líquido varia inversamente com a área da secção recta. Esta conclusão é igualmente verificada se o caudal do líquido tiver sentido contrário ao adoptado na Fig. IV.32 e também qualquer que seja a forma do tubo, circular, elíptica, quadrada, etc.

Consideremos agora o sistema hidrodinâmico da Fig. IV.34, que apresenta a parte **A** constituída por um tubo horizontal de raio  $r_A$  e uma parte **B** constituída por  $n$  tubos de secção recta individual  $s_i$  igual para todos os elementos. A massa de líquido que passa, por unidade de tempo, através da secção recta de **A** é:

$$M_A = \pi r_A^2 v_A \rho = S_A V_A \rho \tag{IV.44}$$

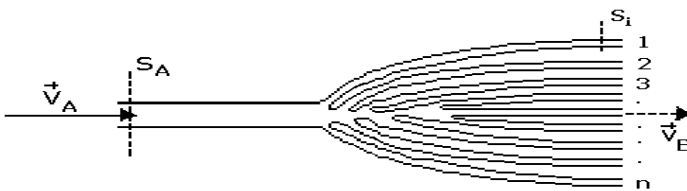


Fig. IV.34 - Tubo que se ramifica originando  $n$  tubos de secção recta individual  $s_i$ .

Sendo  $v_B$  a velocidade de deslocamento do líquido dos ramos de **B**, a massa de líquido que passa, por unidade de tempo, através de cada secção recta individual é  $m_B = s_i v_B \rho$ . Chamamos  $S_B$  à soma das áreas das secções rectas dos ramos de **B**, ou seja,  $S_B = n s_i$  vem para a massa total de líquido que, por

unidade de tempo, passa através de secções rectas em todos os elementos de **B**,

$$M_B = n s_i v_B \rho = S_B v_B \rho$$

Então, pela conservação da massa,

$$v_A = v_B S_B / S_A \quad \text{IV.45}$$

ou seja, a relação de proporcionalidade inversa entre velocidade de deslocamento e áreas totais das secções rectas, mantém-se.

No caso das secções rectas individuais  $s_i$  não serem iguais, se  $v_B$  é a velocidade média do líquido nestes ramos e  $S_B$  a área total, ou seja,

$$S_B = \sum_{i=1}^n s_i, \quad \text{é também} \quad v_A = v_B \frac{S_B}{S_A} \quad \text{IV.46}$$

Pode fazer-se uma aplicação directa desta última relação para o cálculo da velocidade média do sangue dos capilares sistémicos. A velocidade máxima do sangue na aorta é próxima de 0,8 m/s e a velocidade média é de cerca de 0,4 m/s. O somatório das áreas de todos os capilares sistémicos estima-se em cerca de mil vezes<sup>3</sup> a área da secção recta da aorta. Aplicando a relação anterior conclui-se que a velocidade média de deslocamento do sangue nos capilares é da ordem de 0,4 mm/s.

Outro exemplo diz respeito à ventilação na respiração humana. A área da secção recta da traqueia é cerca de 5 000 vezes menor do que a soma das áreas das secções rectas dos bronquíolos da última geração (tubos alveolares). A velocidade do ar nestes bronquíolos é, então, 5 000 vezes menor do que na traqueia. Fazendo os cálculos, obtêm-se valores para esta velocidade que correspondem à ordem de grandeza das velocidades que ocorrem na difusão molecular devida a diferenças de concentração. Mesmo quando se fazem inspirações profundas e rápidas, a velocidade de arrastamento do ar nos tubos alveolares é extremamente pequena. A difusão tem um papel importante no transporte gasoso na região alveolar.

<sup>3</sup> No homem médio existem  $4 \times 10^{10}$  capilares na circulação sistémica, com raio médio da ordem de  $4 \times 10^{-6}$  m. Assim, a área total das secções rectas destes capilares é  $S = 4 \times 10^{10} \times \pi \times (4 \times 10^{-6})^2 = 2 \text{ m}^2$ . A área da secção recta da aorta, de raio 1,5 cm, é  $2,25 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ .

---

**IV.6.3 - Conservação da energia**

No sistema da Fig. IV.32, ocorre conservação da energia mecânica, visto tratar-se da situação ideal de um líquido sem viscosidade. Por outro lado, sendo a altura média do sistema constante, a energia potencial gravitacional não varia ao longo do sistema. Facilmente se entende, assim, que para haver conservação de energia mecânica, a um aumento de energia cinética, por exemplo, por unidade de volume, num ponto do sistema, terá de corresponder uma diminuição da energia potencial de pressão, por unidade de volume, no mesmo ponto.

Já vimos que (Eq. IV.43),

$$v_b = v_a r_a^2 / r_b^2$$

A energia cinética, por unidade de volume em **A** (Eq. IV.37) é:

$$E_{CA} = 1/2 \rho v_a^2$$

Em **B**, a energia cinética por unidade de volume do líquido é:

$$E_{CB} = 1/2 \rho v_b^2$$

Substituindo nesta última expressão o valor de  $v_b$ , na igualdade acima, vem

$$E_{CB} = 1/2 \rho v_a^2 (r_a / r_b)^4 = E_{CA} (r_a / r_b)^4 \quad \text{IV.47}$$

Assim, quando o líquido entra na porção do tubo de menor secção sofre um aumento de velocidade e também de energia cinética. Pelo princípio da conservação da energia, como não há variação na energia potencial gravitacional por unidade de volume, a pressão deverá diminuir no tubo de menor secção.

---

Chamando  $P_A$  e  $P_B$  às expressões das correspondentes partes do tubo, o trabalho que é realizado no deslocamento da unidade de volume do líquido é:

$$W = P_A - P_B$$

Esta expressão, que corresponde à diferença das energias potenciais de pressão, por unidade de volume, nos ramos **A** e **B**, deve igualar a diferença  $E_{CB} - E_{CA}$ , das energias cinéticas por unidade de volume.

Podemos então escrever,

$$P_A - P_B = E_{CB} - E_{CA} = \frac{v_a^2 \rho}{2} \left( \frac{r_a^4}{r_b^4} - 1 \right) \quad \text{IV.48}$$

Sendo  $r_a > r_b$ , terá de ser  $P_A > P_B$ , como já fora previsto.

As alturas nos níveis dos tubos manométricos do sistema da Fig. IV.35 (Tubo de Venturi) horizontal e percorrido por um líquido ideal são, assim, óbvios.

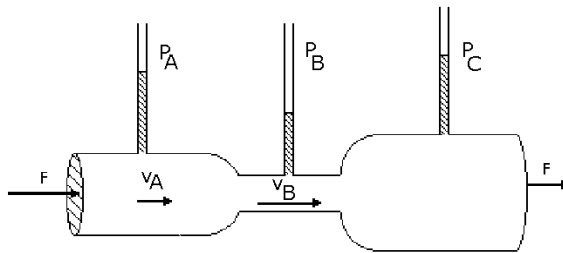


Fig. IV.35 - Sistema hidrodinâmico constituído por tubos cilíndricos em série com secções diferentes (Tubo de Venturi) percorrido por um caudal constante de um líquido ideal.

No tubo de Venturi os resultados dados pela Eq. IV.48 são aproveitados para a medição do caudal. Na situação ideal, conhecidos os valores de  $\rho$ ,  $P_A$  e  $P_B$  e os raios dos tubos  $r_a$  e  $r_b$  calcula-se facilmente  $v_a$  e o caudal  $F$ . Na situação real, para conhecermos rigorosamente o caudal, teríamos de considerar a perda de energia potencial de pressão, entre os dois tubos, devido ao trabalho das forças de fricção.

## IV.6.4 - Teorema de Bernoulli

Traduz a aplicação do princípio da conservação de energia aos líquidos ideais em movimento.

Na situação ideal de um líquido sem viscosidade, o teorema de Bernoulli diz que a soma das energias potencial e cinética de um líquido em movimento, expressas em termos da unidade de massas ou volume, é constante, sendo o decréscimo de uma das formas de energia sempre acompanhado de um correspondente aumento da outra.

Na sua forma mais geral, o teorema de Bernoulli pode aplicar-se ao sistema hidrodinâmico representado na Fig. IV.36, onde  $P$ ,  $v$  e  $h$  representam respectivamente pressão hidrostática, velocidade de deslocamento e altura para os pontos considerados.

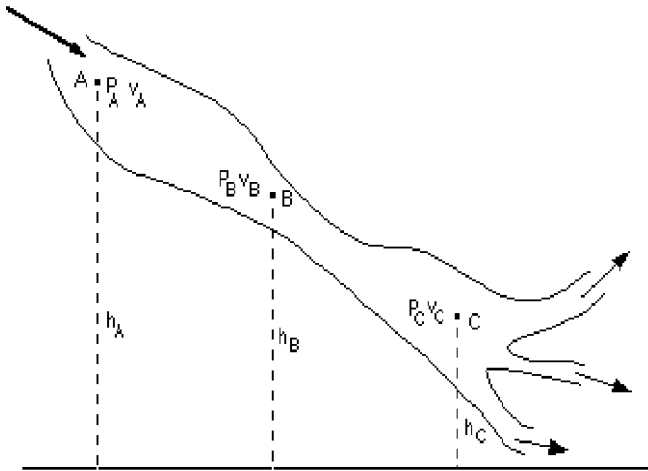


Fig. IV.36 - Sistema hidrodinâmico, percorrido por um caudal constante, satisfazendo a lei da conservação da massa.

Para quaisquer pontos **A**, **B** e **C** do sistema a energia mecânica total por unidade de massa é:

$$h_{Ag} + \frac{P_A}{\rho} + 1/2 v_A^2 = h_{Bg} + \frac{P_B}{\rho} + 1/2 v_B^2 = h_{Cg} + \frac{P_C}{\rho} + 1/2 v_C^2 = k \quad \text{IV.49}$$



onde  $k$  é constante. O teorema de Bernoulli pode, igualmente, ser expresso em termos da unidade de volume de líquido. Considerando os três pontos A, B e C, vem:

$$\begin{aligned} 1/2 \rho v_A^2 + P_A + \rho h_A g &= 1/2 \rho v_B^2 + P_B + \rho h_B g = \\ &= 1/2 \rho v_C^2 + P_C + \rho h_C g = k' \end{aligned} \quad \text{IV.50}$$

Se num sistema do tipo da Fig. IV.36, se verificar que  $P_A < P_B$  e  $h_A = h_B$ , na transição entre A e B, as forças de pressão apontam em sentido contrário à velocidade, significando que o movimento do líquido é retardado. No caso contrário se  $P_A > P_B$  o líquido tende a ser acelerado na transição.

Consideremos um sistema hidrodinâmico em série, caracterizado por um dado valor de  $k'$ . Em qualquer ponto da série, para um dado  $h$ , o aumento da velocidade do líquido, a partir de um dado valor, obriga a que a pressão seja negativa para satisfazer a Eq. IV.50. De facto tal não sucede pois, para muito baixas pressões, o líquido perde a continuidade e formam-se cavidades de vapor do líquido, ocorrendo o fenómeno de cavitação.

Quando se considera o caso de um líquido real, a conservação de energia tem, forçosamente, de entrar em conta com a dissipação de energia mecânica, ou seja, a energia calorífica libertada, correspondente ao trabalho realizado pelas forças de resistência ao movimento. O teorema de Bernoulli aplicado a um líquido real, não reflecte a conservação de energia mecânica, mas, evidentemente, a conservação da energia, visto haver em jogo formas de energia não mecânica. Supondo o sistema da Fig. IV.36 percorrido por um líquido real, e considerando energias por unidade de massa, vem

$$\begin{aligned} h_A g + \frac{P_A}{\rho} + 1/2 v_A^2 &= h_B g + \frac{P_B}{\rho} + 1/2 v_B^2 + Q_1 = \\ &= h_C g + \frac{P_C}{\rho} + 1/2 v_C^2 + Q_2 = k \end{aligned} \quad \text{IV.51}$$

onde  $Q_1$  e  $Q_2$  são as energias dissipadas por unidade de massa entre A e B e entre A e C, respectivamente.

No caso da circulação sanguínea há uma constante transformação de energia mecânica em calor, devido à viscosidade do sangue. Esta transformação é feita à custa de energia potencial de pressão, resultante da acção do miocárdio, também responsável pela energia cinética do sangue.

Nos dois exemplos da Fig. IV.37 representamos, qualitativamente, as variações de pressão em sistemas de tubos percorridos por líquidos reais.

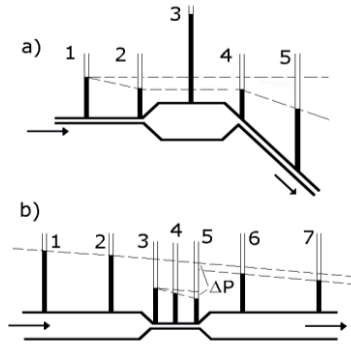


Fig. IV.37 – Alturas de mercúrio plausíveis em dois sistema hidrodinâmicos percorridos por caudais líquidos.

#### IV.6.5 - Fórmula de Poiseuille

Consideremos um tubo cilíndrico rígido de secção constante, horizontal e percorrido por um líquido em regime laminar e suponha-se ainda que o sistema é estacionário. A situação estacionária, neste caso, é completamente caracterizada por um caudal constante em regime laminar.

O caudal líquido  $F$  (volume de líquido que atravessa uma secção do tubo por segundo), é dado pela fórmula de Poiseuille.

$$F = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta P R^4}{\ell} \quad \text{IV.52}$$

onde  $R$  é o raio do tubo,  $\ell$  o comprimento,  $\Delta P$  a diferença de pressão nos extremos de  $\ell$  e  $\eta$  a viscosidade do líquido.

O sentido das variações do caudal  $F$  com cada uma das variáveis da expressão acima não oferece dúvidas. É, por exemplo, lógico, que o caudal diminua com o aumento de  $\ell$ , mantendo as outras variáveis com valores constantes. A dependência do caudal com a 4ª potência do raio (quadrado da área de secção recta) é, talvez, a propriedade mais inesperada nesta fórmula.

Diminuindo para metade o raio do tubo e mantendo constantes os outros parâmetros da fórmula acima, o caudal reduz-se de 16 vezes.

A dependência do caudal com a 4ª potência do raio tem consequências fisiológicas importantes. O caudal de sangue distribuído para as diferentes partes do corpo é controlado, sobretudo, pela acção de músculos lisos existentes nas paredes dos vasos. A contracção destes músculos, resultante de estimulação nervosa, ou acção de hormonas circulantes, faz diminuir o raio do lúmen do vaso. Uma pequena constrição produz uma alteração significativa no caudal, devido à grande dependência do raio, pelo que o controlo terá de ser extremamente ou sensível ou haver outros mecanismos de compensação<sup>1</sup>. Por exemplo, a deposição de betalipoproteínas nas paredes vasculares, no decurso dos processos de aterosclerose, obriga à alteração de outros parâmetros para a reposição do caudal.

A partir da fórmula de Poiseuille pode obter-se a diferença de pressão entre os extremos de um tubo cilíndrico de raio **R** e comprimento **ℓ**, percorrido por um caudal **F** de um líquido de viscosidade **η**.

$$\Delta P = \frac{8 \eta \ell F}{\pi R^4} \quad \text{IV.53}$$

Esta equação é aplicável ao regime laminar e **ΔP** é, também no caso do tubo horizontal de secção constante, a variação de energia mecânica por unidade de volume do líquido, no comprimento **ℓ** do tubo ou, se quisermos, o trabalho realizado por unidade de volume do líquido para vencer as forças de atrito interno do líquido. Se o regime do caudal do líquido no tubo for turbulento, a queda de pressão nos extremos de **ℓ** é dada por

$$\Delta P = K \rho \frac{\ell}{R^5} F^2 \quad \text{IV.54}$$

onde **ρ** é a massa específica do líquido e **K** uma constante.

---

<sup>1</sup> - Na realidade, além do raio, os outros parâmetros da fórmula de Poiseuille também são biologicamente controlados. O comprimento **ℓ** (efectivo) pela mobilização ou colapsamento de vasos; **ΔP** por variações na acção cardíaca; **η** pela diferente mobilização de água ou elementos do sangue. Esta aparente redundância nos mecanismos de controlo é frequente nos sistemas biológicos.

Facilmente se calcula a velocidade média do líquido, no caudal em regime laminar, num tubo cilíndrico. Sendo  $\bar{v}$  a velocidade média do líquido no tubo e  $R$  o raio, o caudal  $F$  no tubo é, como vimos

$$F = \pi R^2 \bar{v}$$

Então, utilizando a fórmula de Poiseuille

$$\pi R^2 \bar{v} = \frac{\pi \Delta P R^4}{8 \eta \ell}$$

ou seja

$$\bar{v} = \frac{\Delta P R^2}{8 \eta \ell} \quad \text{IV.55}$$

Utilizando a equação já referida da velocidade radial num tubo cilíndrico, percorrido por um caudal em regime laminar (Eq. IV.35), vem

$$v_r = \frac{\Delta P R^2}{4 \eta \ell} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

obtém-se para velocidade máxima no tubo ( $r = 0$ )

$$v_M = \frac{\Delta P R^2}{4 \eta \ell}$$

donde se conclui

$$v_M = 2 \bar{v} \quad \text{IV.56}$$

ou seja, no regime laminar num tubo cilíndrico, a velocidade média do líquido é metade da velocidade máxima.

A partir da expressão de  $v_r$  podemos obter a distância radial, para a qual ocorre a velocidade do líquido igual à velocidade média. Tal distância é  $r = R / \sqrt{2}$ .

Determinemos a potência que é necessário fornecer para produzir um caudal constante, em regime laminar, num tubo cilíndrico e horizontal. Sendo  $F$  o caudal,  $\rho$  a massa específica do líquido,  $\bar{v}$  a velocidade média do líquido no tubo e  $(P_1 - P_2)$  a diferença de pressão nos extremos do tubo, vem

$$W = \frac{1}{2} F \rho \bar{v}^2 + (P_1 - P_2) F \quad \text{IV.57}$$

A primeira parcela representa a energia cinética cedida à massa do líquido que, por segundo, atravessa a secção do tubo e, a segunda parcela, representa a energia potencial de pressão que é dissipada na forma de calor, por segundo, ao longo do tubo. Esta última parcela é, também, o trabalho realizado por segundo para vencer as forças associadas à viscosidade do líquido.

De notar que a energia cinética média no tubo não é igual à energia cinética correspondente à velocidade média. O valor da energia cinética correspondente à velocidade média é, entrando com o valor de  $\bar{v}$  da Eq. IV.55,

$$E_v = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{m \Delta P^2 R^4}{128 \eta^2 \ell^2} \quad \text{IV.58}$$

A energia cinética média no tubo pode obter-se calculando o valor médio da função  $v_r^2$  no intervalo de  $0$  a  $R$  e multiplicando por  $\frac{1}{2} m$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{1}{2} m (\bar{v}_r^2) = \frac{1}{2} m \frac{\int_0^R v_r^2 dr}{R} = \frac{m}{2R} \int_0^R \left[ \frac{\Delta P R^2}{4 \eta \ell} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^2 dr \\ &= \frac{m \Delta P^2 R^4}{60 \eta^2 \ell^2} \quad \text{IV.59} \end{aligned}$$

valor que é cerca de duas vezes o valor da energia cinética correspondente à velocidade média (Eq. IV.58).

Consideremos, de novo, a fórmula de Poiseuille. Supondo um particular tubo de comprimento  $\ell$  e raio  $R$  e um líquido de viscosidade  $\eta$ , o caudal através do tubo depende, numa proporcionalidade directa, da diferença de pressão entre os extremos do tubo, ou seja,

$$F = K \Delta P$$

Esta relação entre corrente de líquido, ou caudal e diferença de pressão nos extremos do tubo é, formalmente, análoga à relação de proporcionalidade existente entre corrente eléctrica e diferença de potencial nos extremos de um condutor filiforme. A intensidade da corrente eléctrica é, por definição, a carga eléctrica que, por segundo, passa através de uma secção de um condutor<sup>2</sup>. Caudal de um líquido é o volume de líquido que, por segundo, passa através de qualquer secção do tubo.

Diferença de potencial eléctrico entre dois pontos de um condutor é a diferença da energia potencial eléctrica, por unidade de carga, nesses pontos. Diferença de pressão entre dois pontos é a diferença da energia potencial de pressão, por unidade de volume, entre esses pontos.

É assim flagrante a analogia entre carga eléctrica e volume, entre corrente eléctrica e caudal e entre diferença de potencial eléctrico e diferença de pressão.

A expressão da lei de Ohm da corrente contínua

$$I = \frac{V}{R} \quad \text{IV.60}$$

sugere uma expressão análoga para a hidrodinâmica

$$F = \frac{\Delta P}{R_H} \quad \text{IV.61}$$

$R_H$  é a resistência hidrodinâmica, análoga da resistência eléctrica. No caso da circulação sanguínea é frequente falar-se de resistência hemodinâmica. Por aplicação da fórmula de Poiseuille resulta de imediato, para o tubo cilíndrico:

$$R_H = \frac{8\eta}{\pi} \frac{\ell}{R^4} \quad \text{IV.62}$$

É de salientar a grande dependência da resistência hidrodinâmica do raio do tubo. A resistência hidrodinâmica por unidade de comprimento de um tubo é muitas vezes usada ( $R_H/\ell$ ).

<sup>2</sup> Claro que, para uma definição geral de corrente eléctrica, há que contar com a existência de cargas de sinal contrário e a possibilidade destas se deslocarem nos dois sentidos.

A noção de resistência hidrodinâmica não se restringe, contudo a um tubo cilíndrico. Em qualquer sistema hidrodinâmico estanque, onde preva- leça caudal em regime laminar estacionário, a relação  $R_H = \Delta P/F$  é aplicável.

No sistema CGS, a unidade da resistência hidrodinâmica é o  $\text{dyn s cm}^{-5}$ .

Na circulação sistémica, considerando que o regime do caudal é lami- nar (lei de Poiseuille aplicável) a resistência hidrodinâmica, dos vasos dos diversos tipos expressas em percentagem do total é: aorta e grandes artérias – 10 %; artérias médias e terminais – 15 %; Arteriolas – 40 %; Capilares – 30 %; Veias – 5 %.

O cálculo da resistência hidrodinâmica equivalente de uma série de resistências hidrodinâmicas é efectuado de modo semelhante ao obtido para as associações de resistências eléctricas. Considere-se a associação de resistências hidrodinâmicas em série da Fig. IV.38, percorrida pelo caudal comum  $F$ , e sejam  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  e  $(P_1 - P_2)$ ,  $(P_2 - P_3)$  e  $(P_3 - P_4)$  os valores destas e das correspondentes quedas de pressão através das mesmas, respectivamente.

Podemos escrever:

$$P_1 - P_2 = R_1 F \quad P_2 - P_3 = R_2 F \quad P_3 - P_4 = R_3 F$$



Fig. IV.38 - Associação em série de três resistências hidrodinâmicas.

Somando membro a membro as três expressões anteriores, vem:

$$P_1 - P_4 = (R_1 + R_2 + R_3) F = R_{eq} F \quad \text{IV.63}$$

A resistência equivalente de uma associação de resistências hidrodinâmicas em série é a soma das resistências hidrodinâmicas da série.

Podemos calcular a resistência hidrodinâmica equivalente a uma associação de resistências hidrodinâmicas associadas em paralelo. Considere-se a associação em paralelo de resistências hidrodinâmicas da Fig. IV.39 com caudal total  $F$ , diferença de pressão entre os extremos da associação  $P_1 - P_2$  e sejam  $R_1$ ,  $R_2$ , e  $R_3$ , e  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  os correspondentes valores das resistências e respectivos caudais.

Para cada um dos ramos podemos escrever:

$$F_1 = \frac{P_1 - P_2}{R_1} \quad , \quad F_2 = \frac{P_1 - P_2}{R_2} \quad \text{e} \quad F_3 = \frac{P_1 - P_2}{R_3}$$

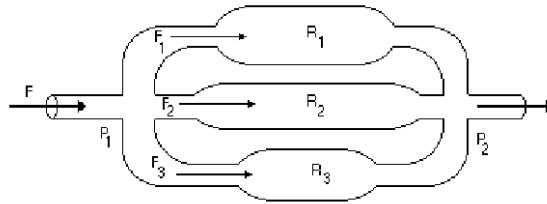


Fig. IV.39 - Associação em paralelo de três resistências hidrodinâmicas.

Somando estas expressões obtemos:

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + F_3 = (P_1 - P_2) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\ &= (P_1 - P_2) \frac{1}{R_{eq}} \end{aligned} \quad \text{IV.64}$$

O inverso da resistência hidrodinâmica, equivalente a uma associação em paralelo de resistências hidrodinâmicas, é igual à soma dos inversos das resistências da associação. As expressões das resistências hidrodinâmicas equivalentes, para as associações em série e paralelo, são perfeitamente idênticas às obtidas para o caso das resistências eléctricas.

Na árvore vascular humana, estímulos naturais podem produzir variações da resistência vascular por variações do raio. Estas variações resultam de alterações no estado de contração de músculos circulares lisos

Em qualquer território vascular, se forem conhecidas as pressões na artéria aferente e na veia eferente, bem como o caudal sanguíneo, pode determinar-se a correspondente resistência hemodinâmica. A comparação de resultados, por exemplo, antes e após a administração de uma droga, permite concluir se houve variação da resistência hemodinâmica do sistema em estudo (dilatação ou constrição).

A resistência periférica total (RPT), é a resistência oferecida ao caudal sanguíneo por toda a rede vascular periférica. No indivíduo normal,



em repouso, o caudal é de 5 L/min, aproximadamente, ou seja, 83 mL/seg. A pressão média na aorta é 100 mm Hg, aproximadamente, e cerca de 5 mm Hg na aurícula direita. Define-se como unidade de resistência periférica designando-se por URP, a resistência dum sistema que, quando sujeito à diferença de pressão de 1 mm Hg é atravessado por um caudal de 1 m L/seg.

Então, a RPT de um indivíduo normal é

$$R = \frac{P}{F} = \frac{100 - 5}{83} = 1,1 \text{ URP.}$$

Durante o exercício, a resistência periférica diminui, sendo da ordem de 0,5 URP no exercício moderado.

Em certas afecções ocorre alteração da resistência periférica total. Na hipertensão essencial, a RPT encontra-se muito elevada devida a constrição vascular. Na anemia crónica a RPT encontra-se diminuída devido ao decréscimo na viscosidade do sangue.

#### IV.6.6 - Resistência hemodinâmica de labirintos vasculares complexos

Comparemos a resistência hemodinâmica de um grande vaso, com área de secção recta  $A_w$ , com a resistência de uma associação em paralelo de  $n$  pequenos vasos iguais de área individual  $A_n$ . As resistências do grande vaso e de um dos pequenos vasos (individual), são, respectivamente

$$R_w = \frac{k}{A_w^2}$$

e

$$R_n = \frac{k}{A_n^2}$$

com  $k = 8\pi\eta\ell$  para tubos cilíndricos e para iguais valores de  $\ell$ .

O inverso da resistência hemodinâmica equivalente da associação em paralelo dos  $n$  pequenos vasos é:

$$\frac{1}{R_t} = n \frac{A_n^2}{k}$$

Suponhamos que

$$n A_n = f A_w$$

ou seja, que a área total das secções rectas dos pequenos vasos é  $f$  vezes a área  $A_w$  e, além disso, que  $\ell = 1$ . Então,

$$R_t = \frac{k}{n A_n^2} = \frac{n k}{f^2 A_w^2}$$

e

$$R_t = \frac{n}{f^2} R_w \tag{IV.65}$$

A resistência da associação em paralelo só aumenta se  $n > f^2$ .

Nas bifurcações das artérias ( $n=2$ ) verifica-se que os valores de  $f$  são sempre aproximadamente iguais a 1,28 do que resulta  $R_t = 1,22 R_w$ . Consideremos as relações entre as resistências hemodinâmicas da aorta e das arteríolas sistémicas e dos capilares sistémicos. Os valores com interesse para o cálculo estão no Quadro IV.3.

Quadro IV.3 – Vasos, seu número e secção recta total

	Número	Área (cm <sup>2</sup> )	f
<b>Aorta</b>	1	2,5	
<b>Arteríolas</b>	$2,8 \times 10^6$	40	16
<b>Capilares</b>	$2,7 \times 10^9$	2500	$10^3$

Então para as arteríolas:

$$R_t = \frac{n}{f^2} \times R_w = 2,8 \times 10^6 \times R_w / 16^2 = 1,1 \times 10^4 \times R_w$$

e para os capilares sistémicos,

$$R_t = \frac{n}{f^2} \times R_w = 2,7 \times 10^9 \times R_w / 10^6 = 2,7 \times 10^3 \times R_w$$

O elevado valor de  $R_t$ , para as arteríolas, justifica a grande queda de pressão que ocorre nesses vasos. Apesar de se observarem grandes quedas de pressão, as variações no volume das arteríolas, a elas associadas, são pequenas.

#### IV.6.7 - Viscosidade e tensão tangencial no regime laminar. Caso do sangue

Os líquidos viscosos, para se deformarem com uma determinada velocidade de deformação  $d\varepsilon/dt$ , exigem que seja aplicada uma tensão tangencial não nula.

As Figs. IV.28, IV.41 e III.79 são de  $T$  em função de  $\frac{dv}{dy}$ . Para um dado valor de  $T$ , o gradiente da velocidade de deslocamento  $\frac{dv}{dy}$  das partículas no líquido, (segundo a direcção normal à velocidade), representa também a velocidade de deformação do líquido, pelo que estas figuras podem também ser entendidas como representações de  $T$  vs.  $\frac{d\varepsilon}{dt}$ .

De facto, se, sob a acção de forças tangenciais, uma partícula com coordenadas  $(x, y)$  sofre um pequeno deslocamento  $\Delta x$ , a deformação em relação à origem de coordenadas pode considerar-se

$$\varepsilon \approx \text{tg } \varepsilon = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Se o deslocamento  $\Delta x$  ocorreu no intervalo de tempo  $\Delta t$ , a velocidade de deformação é, no limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{dx}{dy} \right] = \frac{d}{dy} \left[ \frac{dx}{dt} \right] = \frac{dv}{dy}$$

como se pretendia demonstrar. A equação que utilizámos para a definição de coeficiente de viscosidade  $\eta$  de um líquido (Eq. IV.30) pode escrever-se na forma

$$\frac{\Delta f}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad \text{IV.66}$$

O primeiro membro desta igualdade representa força por unidade de superfície a actuar tangencialmente à mesma. Já sabemos que a grandeza assim definida é a tensão tangencial.

$$\text{Líquidos} \quad \eta = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta S}}{\frac{\Delta v}{\Delta y}} = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta S}}{\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t}}$$

$$\text{Sólidos} \quad \mu = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta S}}{\varepsilon}$$

A partir da Eq. IV.66 podemos definir a viscosidade de um líquido como uma constante de proporcionalidade entre tensão tangencial e gradiente de velocidade ou como tensão tangencial, por unidade de gradiente de velocidade. Quando se trata de um líquido a deslocar-se num tubo, com caudal em regime laminar, a velocidade varia com a distância radial (Eq. IV.67) e o atrito no líquido exerce-se entre superfícies cilíndricas

$$v_r = \frac{\Delta P R^2}{4\eta \ell} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{IV.67}$$

Considerando caudal em regime laminar no tubo cilíndrico a distância  $x$  passa a ser a distância radial  $r$ . Supondo condições limites quando  $\Delta r$  tende para zero a Eq. IV.66 toma a forma

$$\frac{df}{dS} = \eta \frac{dv_r}{dr} \quad \text{IV.68}$$

Derivando a Eq. IV.67 em ordem a  $r$ , obtemos:

$$\frac{dv_r}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta \ell} r = -a r \quad \text{IV.69}$$

sendo  $a$  uma constante característica do sistema em análise. Então, substituindo a Eq. IV.69 na Eq. IV.68, vem

$$\frac{df}{dS} = -\eta a r \quad \text{IV.70}$$

A tensão tangencial varia, linearmente, com a distância radial. No eixo ( $r=0$ ) a tensão tangencial é nula. Junto das paredes do tubo ( $r=R$ ) a tensão tangencial tem, em módulo, o seu valor máximo dado por:

$$\left| \frac{df}{dS} \right|_{\max} = \frac{\Delta P}{2\ell} R \quad \text{IV.71}$$

A variação da tensão tangencial com a distância, em termos gráficos, pode observar-se na Fig. IV.40.

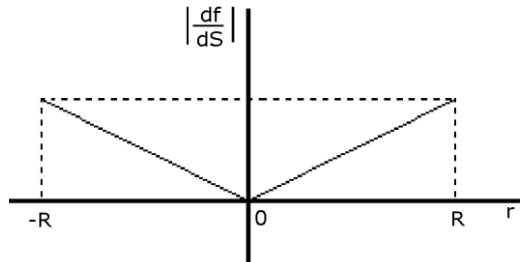


Fig. IV.40 - Módulo da tensão tangencial em função da distância radial.

Podemos concluir que no caudal em regime laminar no tubo cilíndrico a camada de líquido que se encontra imóvel junto da parede do tubo sofre uma tensão tangencial máxima ( $r=R$ ). Dado que esta camada líquida se encontra imóvel devido à acção das forças de coesão que a parede exerce sobre o líquido, a força tangencial da tensão tangencial é transmitida à superfície do tubo.

Em certos vasos sanguíneos a tensão tangencial exercida nas paredes é considerável. O aumento do valor desta tensão poderá influenciar o aparecimento de lesões vasculares.

Como sabemos, o sangue é uma suspensão de partículas deformáveis, não esféricas, comportando-se como um líquido não newtoniano.

A tensão tangencial em função do gradiente de velocidade é uma relação linear para um líquido newtoniano, como é o caso do plasma humano ou do soro fisiológico, o mesmo não ocorrendo para os líquidos não-newtonianos (que não obedecem à Equação de Newton, Eq. IV.30), como é o caso do sangue, Fig. IV.41. Para os líquidos newtonianos, a viscosidade é o coeficiente angular da recta tensão tangencial vs. gradiente de velocidade.

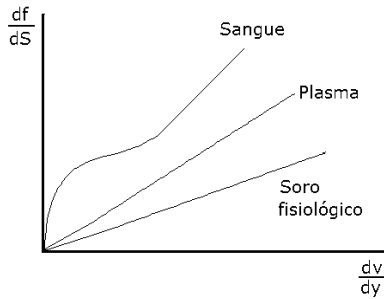


Fig. IV.41 - Tensão tangencial vs. gradiente de velocidade para alguns líquidos.

O coeficiente de viscosidade é constante nos líquidos newtonianos, mas é função do gradiente de velocidade, pelo menos para um intervalo de valores deste parâmetro, (Fig. IV.42).

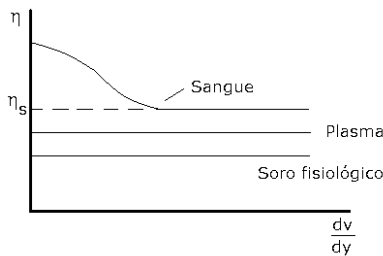


Fig. IV.42 - Viscosidade vs. gradiente de velocidade para os líquidos da Fig. 41.

Os glóbulos vermelhos são as partículas que, em maior número, se encontram em suspensão no sangue e têm a forma e dimensões que estão indicadas, em esquema, na Fig. IV.43. Devido à facilidade em se deformarem, os glóbulos vermelhos passam facilmente através de capilares com diâmetro inferior ao próprio diâmetro globular.

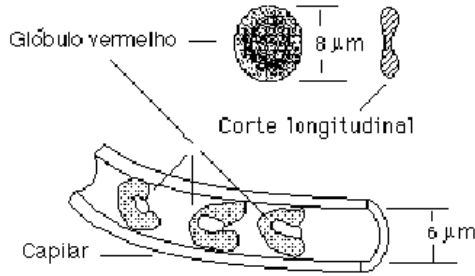


Fig. IV.43 - Forma, dimensões e facilidade de deformação dos glóbulos vermelhos.

A viscosidade do sangue é fortemente dependente do hematócrito como se observa na Fig.IV.44.

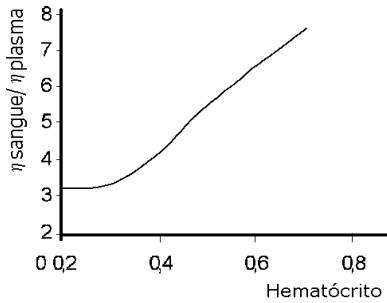


Fig. IV.44 -Viscosidade relativa do sangue em função do hematócrito

Para pequenas tensões tangenciais (ou gradientes de velocidade), os glóbulos vermelhos tendem a dispor-se caoticamente (Fig. IV.45-a). Para elevadas tensões tangenciais os glóbulos vermelhos tendem a alinhar as suas maiores dimensões, segundo as linhas de corrente do sangue (Fig. IV.45-b), situação a que corresponde uma menor interacção entre estas partículas do que para os pequenos gradientes de velocidade. Como consequência da menor interacção ocorre diminuição da viscosidade.

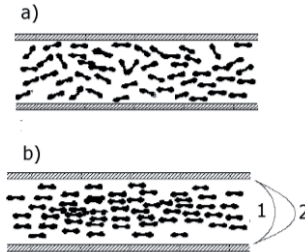


Fig. IV.45 - Disposição dos glóbulos vermelhos: a) caótica para pequenos gradientes de velocidade, b) com as suas maiores dimensões alinhadas segundo as linhas de corrente do líquido.

Um outro efeito, observado para tensões tangenciais elevadas, é a tendência para um aumento da concentração globular nas proximidades do eixo do vaso, na parte central, diminuindo o hematócrito na periferia.

A lei de Poiseuille não se aplica exactamente ao caso do caudal nos vasos sanguíneos, que não são rígidos, mas poderá, em muitos casos, considerar-se uma aproximação aceitável. Numa situação estacionária, de caudal em regime laminar num vaso, a velocidade é, como se sabe, maior no eixo do que junto das paredes. Pode considerar-se que o líquido no vaso é constituído por um conjunto de lâminas cilíndricas de líquido, com raios sucessivamente crescentes, cujos caudais somam o caudal no vaso. Os caudais nestes cilindros terão de obedecer ao teorema de Bernoulli, pelo que a pressão deve ser mais baixa naqueles onde a velocidade do líquido é maior e mais alta naqueles onde a velocidade é menor. Deste modo existe uma diferença efectiva de pressão entre a periferia e a parte central do vaso que origina uma corrente radial de líquido e arrasta os eritrócitos em direcção à parte central do vaso. Esta acumulação de eritrócitos altera o perfil parabólico teórico das velocidades (curva 2 da Fig. IV.45-b) que se transforma numa curva do tipo da curva 1 da Fig. IV.45-b) com curvatura menos acentuada que a parabólica, na parte central do vaso. Como consequência, vasos de pequeno raio têm menor concentração de glóbulos vermelhos do que os vasos de maior raio a partir dos quais se formaram. O chamado efeito de Fahraeus e Lindquist que relataram ter observado um decréscimo na viscosidade do sangue, assim como uma diminuição do hematócrito nas arteríolas, resulta da acumulação axial dos eritrócitos



A viscosidade do sangue, para o mesmo hematócrito, praticamente não varia para os vasos de diâmetro superior a 0,5 mm. A viscosidade do sangue nos capilares é menor devido, sobretudo, ao fenómeno de deslisamento descrito atrás (efeito de Fahraeus e Linqvist. Há, porém, a possibilidade de ocorrer um outro fenómeno que contraria este efeito. Em geral os ramos colaterais das arteríolas inserem-se tangencialmente (ramo 1), mas, por vezes, podem penetrar no lúmen do vaso como se observa na Fig. IV.46 (ramo 2).

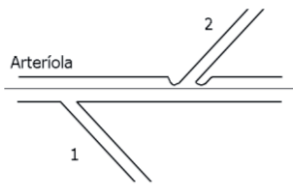


Fig. IV.46 - Os ramos colaterais das arteríolas podem inserir-se penetrando no lúmen das arteríolas como se observa no ramo 2 ou ter uma inserção tangencial.

Dada a maior concentração dos glóbulos na parte central do vaso, o hematócrito (ou a viscosidade) do sangue no ramo 2 é superior ao observado no sangue que sai do ramo 1.

#### IV.6.8 - Alteração do regime do caudal dos líquidos

Nos tubos de pequeno calibre o caudal ocorre, geralmente, em regime laminar.

Nos tubos de calibre apreciável, o regime pode tornar-se facilmente turbulento por aumento da velocidade de deslocamento do líquido.

Os factores que se verifica influenciarem o regime do caudal são a velocidade, a massa específica do líquido e ainda o raio do tubo em que este se desloca.

Usando a análise dimensional é possível obter um número sem dimensões que permite prever o regime do caudal de um líquido. Para uma certa carga linear a velocidade de deslocamento média de um líquido num tubo  $\bar{v}$  depende do coeficiente de viscosidade  $\eta$ , da massa específica  $\rho$  e do

diâmetro  $d$ . Uma maneira de exprimir esta relação funcional é considerar que estas dependências podem exprimir-se através de potências, ou seja

$$\bar{v} = R_e \eta^a \rho^b d^c \quad \text{IV.72}$$

onde  $R$  é uma constante sem dimensões e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes com valor a determinar. Em termos de equações de dimensões podemos escrever

$$L T^{-1} = (M L^{-1} T^{-1})^a (M L^{-3})^b L^c \quad \text{IV.73}$$

que obriga, para a igualdade entre os expoentes nos dois termos da Eq. IV.73

$$\begin{array}{ll} L & 1 = -a - 3b + c \\ T & -1 = -a \\ M & 0 = a + b \end{array}$$

Donde se tira que  $a = 1$ ,  $b = -1$  e  $c = -1$ . Então a Eq. IV.72 vem

$$\bar{v} = R_e \eta \rho^{-1} d^{-1}$$

ou

$$R_e = \frac{\bar{v} d \rho}{\eta}$$

$R_e$  é o número de Reynolds que pondera, de forma adequada, as contribuições das variáveis que determinam o regime do caudal. Para valores de  $R_e$  superiores a 2400 o regime é turbulento.

Em termos físicos, o regime do caudal de um líquido depende da competição de forças de dois tipos:

- as forças de inércia associadas ao movimento do líquido, e
- as forças de fricção resultantes da viscosidade do líquido.

Quando as últimas forças predominam o regime é laminar. Quando ocorre predomínio das forças de inércia o regime é turbulento.

Considerando a unidade de volume do líquido e sendo  $\bar{v}$  a velocidade média de deslocamento do líquido, a relação entre as referidas forças é:

$$\frac{1/2 \rho \bar{v}^2}{2 \eta \bar{v}/R} \quad \text{IV.54}$$

O numerador é a força de pressão que resultaria se a energia cinética, por  $\text{cm}^3$  do líquido, fosse transformada em pressão e actuasse sobre a área de  $1 \text{ cm}^2$ . O denominador é a força de fricção média por unidade de área que se exerce no líquido. Obtém-se combinando as Eqs. IV.37 e IV.30 e supondo  $r=R/2$ .

O número de Reynolds  $R_e$  é proporcional à relação acima referida,

$$R_e = \frac{\bar{v} d \rho}{\eta}$$

onde  $d$  é o diâmetro do tubo. Tratando-se de uma relação entre forças é uma quantidade sem dimensões.

Quando  $R_e$  tem valor elevado, predominam as forças de inércia. Quando o valor é baixo, o domínio é das forças associadas à viscosidade.

Para a maioria dos líquidos, o regime do caudal é laminar quando  $R_e$  se situa abaixo de 2400. Acima de 10000, o regime do caudal é turbulento ocorrendo o regime de transição entre aqueles valores de  $R_e$ .

Em condições normais, o regime da circulação sanguínea no repouso é laminar ou de transição. Na situação típica de uma aorta com 0,95 cm de raio, um caudal sanguíneo de 4,5 L/min, sangue com viscosidade 2,7 centi-poise e massa específica 1,055 a velocidade média do sangue é 26,5 cm/s e o número de Reynolds 1861, que corresponde ao regime laminar.

Em alguns pontos especiais como nas válvulas cardíacas e nas bifurcações dos grandes vasos o regime pode ser turbulento.

Consideremos de novo o sistema multi-tubular da Fig. IV-34. A relação entre os números de Reynolds num dos  $n$  tubo em **B** e no tubo em **A** é

$$\frac{R_{eB}}{R_{eA}} = \frac{v_B r_B}{v_A r_A} = \frac{S_A r_B}{S_i r_A} = \frac{\pi r_A^2 r_B}{n \pi r_B^2 r_A} = \frac{1}{n} \frac{r_A}{r_B} \quad \text{IV.75}$$

Conclui-se que o número de Reynolds mantém-se constante no sistema se o número de tubos em **B** igualar a relação entre os raios dos tubos (ou a raiz quadrada da relação entre as respectivas áreas), ou seja,

$$n = \frac{r_A}{r_B} = \sqrt{\frac{S_A}{S_B}} \quad \text{IV.76}$$

Como vimos, nas bifurcações das artérias ( $n=2$ ) verifica-se que os valores de  $f$  são, aproximadamente, iguais a 1,26. A relação entre os números de Reynolds

$$\frac{R_{eB}}{R_{eA}} = 0,63 \quad \text{IV.77}$$

Nas bifurcações das artérias o número de Reynolds diminui contrariamente à resistência hidrodinâmica que aumenta (Eq. IV.65 e sua discussão).

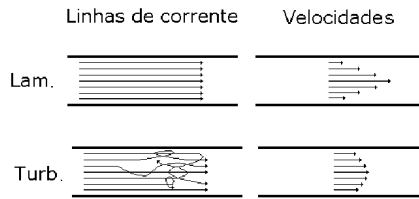


Fig. IV.47 - Linhas de corrente e perfis de velocidade para os caudais em regime laminar e turbulento.

As razões que são geralmente utilizadas para justificar a prevalência quasi exclusiva de regime laminar no caudal da circulação sanguíneo são a não ocorrência, neste regime, de vibrações mecânicas no sangue, capazes de produzir hemólise e o facto de, para o mesmo caudal, o regime laminar levar a um consumo menor de energia do que o regime turbulento.

A partir das expressões de  $\Delta P$  em função de  $F$ , para os regimes laminar e turbilhonar (Eqs. IV.53 e IV.54) podemos escrever:

$$F = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left( \frac{\Delta P}{\ell} \right) \quad (\text{regime laminar}) \quad \text{IV.78}$$

e

$$F = \left( \frac{R^5}{K_0} \right)^{1/2} \left( \frac{\Delta P}{\ell} \right)^{1/2} \quad (\text{regime turbulento}) \quad \text{IV.79}$$

$\frac{\Delta P}{\ell}$  é a perda de pressão por unidade de comprimento do tubo, gradiente de pressão ou ainda perda linear de carga.

Podemos supor que num tubo cilíndrico atravessado por uma corrente líquida à medida que  $\Delta P$  (ou  $\Delta P/\ell$ ). Esta situação mantém-se até ser atingido o número de Reynolds de 2400, a partir do qual ocorrerá caudal em regime turbulento com  $F$  a variar com  $\Delta P/\ell$ , de acordo com a segunda equação referida acima.

A representação gráfica do caudal em função da relação  $\Delta P/\ell$  tem o aspecto da curva da Fig. IV.48. O ponto  $[(\Delta P/\ell)_c, F_c]$  indica a passagem do caudal de laminar a turbulento. No segmento  $\overline{OA}$  a fórmula de Poiseuille é válida.

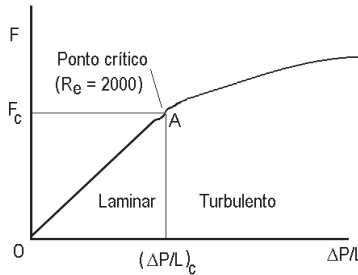


Fig. IV.48 - Caudal em função da perda linear de carga.

Para o ponto A, usando a expressão do número de Reynolds, vem:

$$2400 = \bar{v}_1 d_1 \rho / \eta$$

ou seja, para um tubo de raio  $R_1$ :

$$\bar{v}_1 = K' / R_1 \tag{IV.80}$$

A velocidade  $\bar{v}_1$  é a velocidade crítica para o tubo de raio  $R_1$ . O caudal crítico correspondente é:

$$F_1 = S_1 \bar{v}_1 = \pi R_1^2 \bar{v}_1 = K_1 R_1 \tag{IV.81}$$

com  $K_1 = \pi K'$

O caudal crítico varia, pois, directamente com o raio do tubo.

A relação  $\Delta P/\ell$  no ponto crítico  $A_1$  pode obter-se a partir da fórmula de Poiseuille e da expressão anterior do caudal crítico:

$$(\Delta P/\ell)_1 = K_2 \frac{1}{R^3} \quad \text{IV.82}$$

com

$$K_2 = \frac{8 \eta}{\pi} K_1$$

A perda de carga linear crítica varia inversamente com a 3ª potência do raio. Concluímos então que, quando ocorre constrição de um vaso, ocorre diminuição do caudal crítico, na mesma proporção da diminuição do raio, mas aumenta, severamente, a correspondente perda de carga linear crítica. As curvas 1 e 2 da Fig. IV.49 mostram, graficamente, as variações que ocorrem no caudal e perda de carga linear críticos quando o raio passa de  $R_1$  a  $R_2 = R_1/2$ .

Verificámos que, após a constrição do tubo, só poderão ocorrer caudais superiores a  $F_2$  em regime turbulento e com enorme perda de carga linear.

Na circulação humana, o controle do caudal sanguíneo é efectuado em grande parte, à custa de constrição - dilatação vascular - e isso ocorre sem se verificar, a não ser em condições extremas, o aparecimento do regime turbulento.

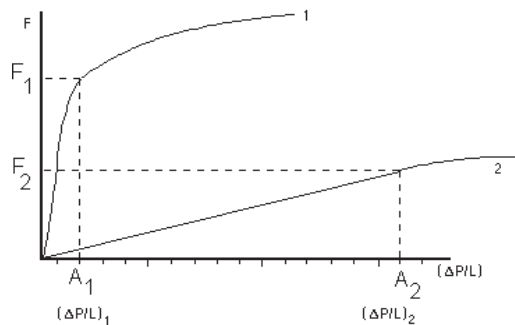


Fig. IV.49 - Caudal em função do gradiente de pressão, para os raios  $R_1$  a  $R_2 = R_1/2$ .

No exercício violento pode, no entanto, por aumento considerável da velocidade no sangue, ocorrer regime turbulento.

Em condições patológicas, como alterações na parede vascular com diminuição do calibre e estenose valvular, onde ocorrem aumentos locais da velocidade sanguínea, o número de Reynolds pode atingir valores onde prevalece o regime turbulento. Na Fig. IV.50 encontram-se algumas causas que, frequentemente, originam turbulência na circulação humana: a) alargamento súbito, b) estreitamento súbito, c) bifurcação e d) lesão da parede com estreitamento do lúmen do vaso (estenose).

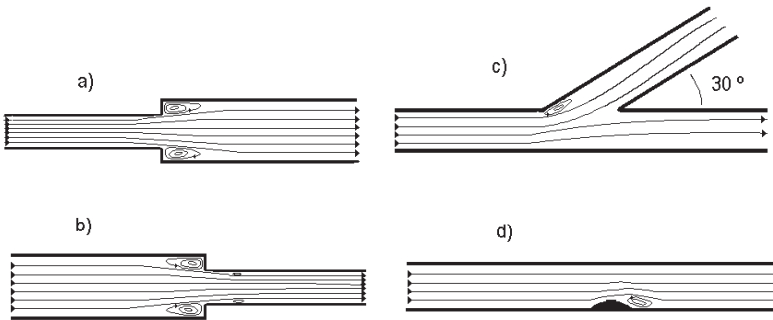


Fig. IV.50 - Algumas causas que, frequentemente, produzem turbulências na circulação humana: a) alargamento súbito. b) estreitamento súbito. c) bifurcação. d) Lesão da parede com estreitamento do lúmen do vaso.

Em estados febris intensos, o aumento de temperatura, pode produzir a diminuição do coeficiente de viscosidade do sangue  $\eta$  e um aumento de  $Re$ . Em situações de anemia severa, a diminuição do hematócrito produz a diminuição do coeficiente de viscosidade do sangue  $\eta$  e o aumento do débito cardíaco, para assegurar a oxigenação, com aumento da velocidade do sangue. Estes factores produzem aumento de  $Re$  que eventualmente ultrapassa os 2400 originando-se turbulências e aparecimento de sopro sistólico.

Nas fístulas arteriovenosas que correspondem a comunicações anormais permanentes entre o sistema arterial sistémico de alta pressão e qualquer porção vascular de baixa pressão (sistema venoso ou circulação pulmonar) são geradas turbulências.

## IV.7 - Aplicações da fórmula de Laplace

### IV.7.1 - Desequilíbrio entre duas gotas do mesmo líquido mas de raios diferentes

Consideremos duas gotas esféricas de um mesmo líquido e de raios  $r_1$  e  $r_2$  com  $r_1 > r_2$ .

Vejam os como se comporta a energia superficial total quando se faz passar um pequeno volume  $\Delta V$  da mais pequena para a maior. As variações de volume para as gotas são:

$$\Delta V_1 = 4 \pi r_1^2 \Delta r_1 \quad \text{e} \quad \Delta V_2 = 4 \pi r_2^2 \Delta r_2$$

estas variações são iguais e de sinal contrário, ou seja,  $\Delta V_1 < 0$  e  $\Delta V_2 > 0$  com

$$|\Delta V_1| = |\Delta V_2|$$

As variações de área  $\Delta S_1$  e  $\Delta S_2$  podem ser introduzidas nas expressões de  $\Delta V$  e  $\Delta V_2$  pois,

$$\Delta V_1 = (8 \pi r_1 \Delta r_1) \frac{r_1}{2} = \Delta S_1 \frac{r_1}{2}$$

$$\Delta V_2 = (8 \pi r_2 \Delta r_2) \frac{r_2}{2} = \Delta S_2 \frac{r_2}{2}$$

Como

$$|\Delta V_1| = |\Delta V_2|$$

temos

$$|\Delta S_1| r_1 = |\Delta S_2| r_2$$

e como  $r_1 > r_2$ ,

$$|\Delta S_1| < |\Delta S_2|$$

ou seja, a área total ficou menor após a transferência. A variação de energia é

$$\Delta W = \sigma (\Delta S_1 + \Delta S_2)$$

e tem um valor negativo pois  $\Delta S_2$  é a variação negativa da superfície da gota de menores dimensões.



A energia superficial total diminui conseqüentemente com a transferência de líquido da gota de menor raio para a de maior raio. Quando duas gotas nestas condições são postas em contacto, dá-se espontaneamente o desaparecimento da menor, visto isso conduzir a uma área total mínima para o volume total, a que corresponde uma energia total mínima para o sistema.

### IV.7.2 - Formação de gotas

A constância do peso das gotas de um líquido quando, a uma certa temperatura, são libertadas por um dado conta-gotas é ainda utilizada para, de modo prático, dosear remédios.

O peso de uma gota líquida pode ser obtido de modo aproximado a partir da própria definição de tensão superficial.

As modificações sofridas pela superfície livre do líquido durante a formação de uma gota podem observar-se na Fig. 51 a) e b) 1, 2, 3 e, no instante em que se destaca da restante massa de líquido, na Fig. 51 a) e b) 4.

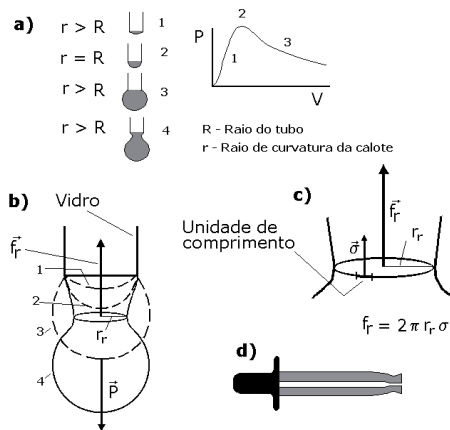


Fig. IV.51 - As modificações sofridas pela superfície livre do líquido durante a formação de uma gota podem observar-se em a) e b) 1, 2 e 3 e no instante em que se destaca da restante massa de líquido em a) e b) 4. A forma da gota no instante da rotura é mostrada em pormenor, em c). Em d) está um esquema de um conta-gotas padrão.

Durante a formação da gota, inicialmente é exercida pressão sobre o líquido no tubo que é forçado a sair formando uma calote aproximadamente esférica cuja curvatura, com concavidade interior, permite o equilíbrio. A diferença de pressão no interior da calote em relação ao exterior é  $P=2\sigma/r$ . A curva  $P(V)$  da Fig. IV.51 a) mostra esta diferença de pressão em função do volume do líquido da gota. O raio de curvatura da calote inicialmente diminui quando aumenta o volume de líquido (1), até atingir um valor mínimo, em que iguala o raio do tubo (2), aumentando a seguir (3). A diferença de pressão em relação ao exterior aumenta inicialmente (1), permitindo o equilíbrio com a pressão aplicada no líquido, atinge o seu valor máximo (2), e depois diminui com o aumento de volume da gota criando uma situação instável entre a pressão aplicada e a pressão no interior da gota (3). Esta situação leva ao estabelecimento de uma zona de grande curvatura na superfície livre, com concavidade no exterior e com um dos raios principais de valor  $r_r$ . A força de pressão originada, a actuar de fora para dentro tende a fazer diminuir  $r_r$  até à rotura. A partir da criação desta zona, o peso  $W$  da gota passa a ter um papel importante no processo. O peso  $W$  é equilibrado por forças de superfície tangenciais, verticais, dirigidas para cima e com resultante  $f_r$ . Pode escrever-se que

$$f_r = 2 \pi r_r \sigma \quad \text{IV.83}$$

Com a diminuição de  $r_r$  a resultante  $f_r$  acaba por ficar inferior a  $W$  e a gota líquida é libertada.

Imediatamente antes da rotura a tensão superficial origina uma força de valor

$$W = f_r = 2 \pi r_r \sigma \quad \text{IV.84}$$

A Eq. IV.84 traduz a lei de Tate que refere que o peso de uma gota é proporcional à tensão superficial do líquido. Se a temperatura se mantiver constante as gotas de um particular líquido têm massas iguais que varia, no entanto, com a forma, material e dimensões do conta-gotas. Mesmo com a utilização de conta-gotas padrão (Fig. IV. 50 d)) os resultados obtidos utilizando o peso das gotas, por exemplo, em medições da tensão superficial, não são suficientemente rigorosos.

**IV.7.3 – Mecanismo das embolias capilares gasosas**

Com base na fórmula de Laplace (Eq. IV.11) é possível explicar o mecanismo das embolias capilares gasosas.

Suponhamos que num tubo capilar existe uma bolha de ar separando as superfícies livres de um líquido em repouso que molha as paredes do tubo, Fig. IV.51.

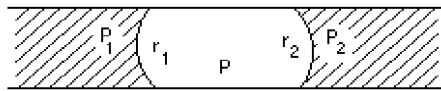


Fig. IV.51 - Êmbolo gasoso num tubo de pequeno diâmetro.  
Se  $P_1 = P_2$  terá de ser  $r_1 = r_2$ .

Numa situação em que os raios de curvatura de **1** e **2** sejam idênticos temos que a expressão da lei de Laplace se aplica a ambas as superfícies **1** e **2** através da mesma expressão:

$$P' = P - P_1 = P - P_2 = \frac{2\sigma}{r_0} \quad \text{IV.85}$$

onde  $r_0$  é o raio de curvatura comum. Isto corresponde ao embolo não ter de suportar qualquer diferença de pressão, pois  $P_1 = P_2$ . Supomos o tubo muito fino, de modo que os meniscos possam considerar-se esféricos.

Se existir uma situação tal que  $P_1 > P_2$ , o raio de curvatura de  $r_1$  tem de ser superior a  $r_2$ , para satisfazer a fórmula de Laplace, Fig. IV.52.

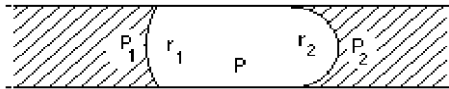


Fig. IV.52 - Êmbolo gasoso num tubo de pequeno diâmetro. Se  $P_1 > P_2$  terá de ser  $r_1 > r_2$ .

Neste caso teremos:

$$P - P_1 = \frac{2\sigma}{r_1} \quad \text{e} \quad P - P_2 = \frac{2\sigma}{r_2}$$

e, por subtracção:

$$P_1 - P_2 = 2 \sigma \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad \text{IV.86}$$

Imaginemos que a diferença  $P_1 - P_2$  aumenta. Cria-se uma situação em que  $r_1$  terá de aumentar e  $r_2$  de diminuir. No limite, quando  $r_1$  tende para infinito,  $r_2$  tende para o raio do tubo.

A diferença

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{r} \quad \text{IV.87}$$

onde  $r$  é o raio do tubo, representa o valor máximo de pressão que o êmbolo de gás é capaz de suportar. Para valores superiores, o êmbolo será desfeito.

Compreende-se que, se  $r$  for muito pequeno, a diferença de pressão entre os extremos do êmbolo, antes de ocorrer a rotura é um valor elevado.

Tratando-se duma situação em que exista no tubo uma série de  $n$  êmbolos gasosos, as quedas de pressão através de cada um dos êmbolos antes de ocorrer a rotura são:

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= 2\sigma \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad P_2 - P_3 = 2\sigma \left( \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} \right) \quad P_n - P_{n+1} = \\ &= 2\sigma \left( \frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{r_{2n-1}} \right) \end{aligned}$$

Estas diferenças de pressão são iguais para todos os êmbolos.

Quando se faz crescer a diferença de pressão através da série, os raios de índice impar tendem para infinito e os de índice par para o raio do tubo.

A pressão máxima que a série de êmbolos pode suportar obtém-se somando as expressões acima para as condições limite.

$$P_1 - P_{n+1} = \frac{2 n \sigma}{r} \quad \text{IV.88}$$

A representação gráfica das pressões ao longo do tubo antes da diferença de pressão limite ser atingida está patente na Fig. IV. 53.

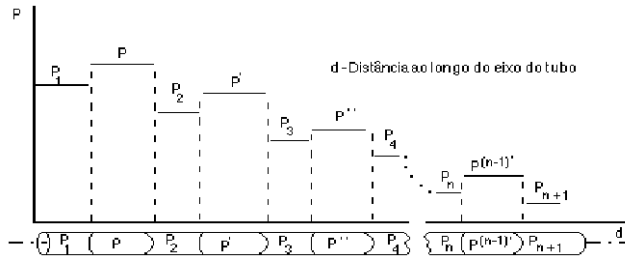


Fig. IV.53 - Variação da pressão, ao longo de um tubo capilar com  $n$  êmbolos gasosos, numa situação de equilíbrio.

Se nos capilares da circulação sanguínea se formar um elevado número de êmbolos de gás, formando séries, as pressões necessárias para movimentar o sangue, desfazendo os êmbolos, poderão ser da ordem de várias atmosferas. Como o coração é incapaz de criar tais pressões, deixará de ocorrer circulação nesse território.

Situações deste tipo surgem quando o corpo é sujeito a uma diminuição brusca de pressão, passando duma pressão elevada, para a qual a concentração de  $N_2$  dissolvido no sangue é considerável, para uma pressão muito mais baixa (Eq. II.19 – Lei de Henry). Nestas circunstâncias o  $N_2$ , dissolvido no sangue, liberta-se e produz êmbolos de gás, como sucede aos mergulhadores de profundidade, que ascendem rapidamente à superfície.

O que estudámos para a série de êmbolos gasosos aplica-se, igualmente, ao caso de êmbolos gordurosos, ou seja, gotículas de líquidos gordurosos não miscíveis com o plasma sanguíneo, encravados nos vasos de pequeno calibre. Neste caso, há que considerar a tensão de contacto entre os dois líquidos em vez da tensão superficial mas o formulário é idêntico ao dos êmbolos gasosos. Isto explica o perigo de serem injectados na corrente sanguínea líquidos gordurosos.

#### IV.7.4 - Generalização da fórmula de Laplace para o caso de paredes elásticas espessas

Estudos efectuados vieram provar que a fórmula de Laplace pode generalizar-se para o caso de membranas elásticas curvas, suportando diferenças de pressão. Consideremos o caso de um vaso elástico. Seja  $P_e$  a

pressão a actuar do lado exterior e  $P_i$  a pressão interior. Tem de admitir-se a existência de um gradiente de pressão a actuar na espessura interior da parede. Por sua vez, a tensão elástica na parede depende da composição desta, podendo variar de ponto para ponto. Seja  $\bar{r}$  o raio médio

$$\bar{r} = \frac{r_e + r_i}{2}$$

A variação da pressão em função do raio poderá ser do tipo da Fig. IV.54.

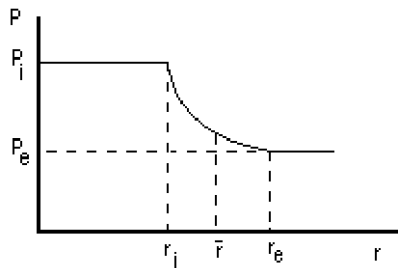


Fig. IV.54 - Variação da pressão através da parede de um vaso sanguíneo.

Demonstrou-se que a fórmula de Laplace podia ser aplicada a um tubo cilíndrico de paredes elásticas espessas, quando a relação entre a espessura da parede e o raio interior do tubo,  $(r_e - r_i)$ , é suficientemente pequena e é dada por:

$$P = \frac{\bar{T}}{r}$$

onde  $\bar{T}$  é a tensão média na parede.

A relação entre a espessura da parede e o raio interior do tubo é de cerca de 0,03 para o caso das veias e de 0,2 para a aorta. Nestes casos, a fórmula de Laplace é aplicável.

No caso das arteríolas, onde a relação espessura da parede/raio interior é por vezes superior à unidade, a referida fórmula já conduz a erros grosseiros.

**IV.7.5 - Tensões nas paredes da crossa da aorta e do coração**

Consideremos as duas meias canas superior inferior da crossa da aorta, Fig. IV.55.

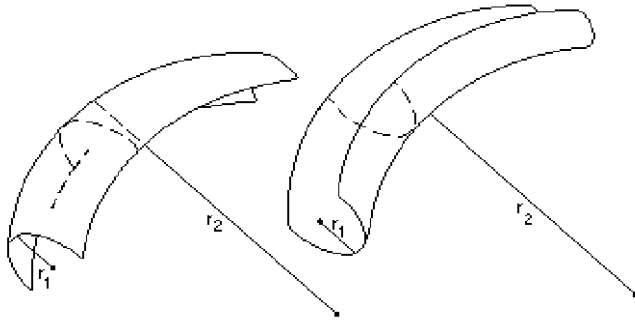


Fig. IV.55 - Meias canas superior e inferior da crossa da aorta e respectivos raios principais. Para a meia cana inferior  $r_2$  é negativo.

Os raios principais das duas meias canas, embora apresentando valores idênticos, apresentam uma diferença importante. A meia cana superior tem os dois raios de curvatura principais do mesmo lado da superfície. Na meia cana inferior, os raios de curvatura encontram-se cada um em seu lado da superfície. Quando isto sucede, consideram-se as curvaturas correspondentes a cada raio como sendo de sinal contrário, atribuindo-se o sinal negativo ao maior raio principal.

Seja  $P_{tm}$  o excesso de pressão do interior do vaso em relação ao exterior (pressão transmural). Aplicando a fórmula geral de Laplace, vem:

$$P_{tm} = T_s \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \tag{IV.89}$$

para a meia cana superior e,

$$P_{tm} = T_i \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{IV.90}$$

para a meia cana inferior.

Igualando os factores dentro dos parêntesis respectivamente a  $a_s$  e  $a_i$  vem:

$$P_{tm} = T_s a_s = T_i a_i \quad \text{IV.91}$$

É evidente que  $a_s > a_i$ , pois o primeiro é a soma de dois números e o segundo a sua diferença. Então,  $T_i > T_s$ .

Mostra este resultado que a parede inferior da crossa da aorta está sujeita a uma maior tensão do que a parede superior. A natureza adaptou o vaso às condições normais: a espessura da parede inferior da crossa da aorta é bastante maior do que a espessura da parede superior (Fig. IV.56). Na crossa normal, a espessura da parede é tanto maior quanto maior é a tensão tangencial.

Os aneurismas da crossa da aorta produzem dilatação da parede do vaso e alterações da sua curvatura. A resistência mecânica natural do vaso não está adaptada às condições patológicas. A maior fragilidade da parede superior, origina que os aneurismas e o seu rebentamento ocorram, sobretudo, na meia cana superior.

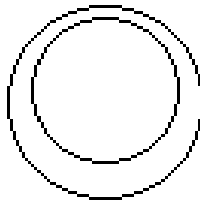


Fig. IV.56 - Secção recta de uma crossa da aorta.

Uma dúvida, directamente relacionada com os valores da tensão na parede superior, pode surgir pelo facto de dever ocorrer um aumento de tensão nesta parede, para compensar o choque das partículas do líquido contra a mesma. Facilmente se vê que as partículas, ao entrarem na curvatura do tubo, pelo princípio da inércia, têm tendência a prosseguir em movimento rectilíneo, chocando com a parte superior do tubo (Fig. IV.57).

Conhecendo a velocidade média do sangue na aorta (0,3 m/s) e a massa específica do sangue (1,02 g/cm<sup>3</sup>), pode determinar-se a pressão cinética na aorta (energia cinética por unidade de volume do sangue na aorta  $\approx 0,5 \times 1,02 \times 30^2 = 459 \text{ erg} = 0,34 \text{ mm Hg}$ ).



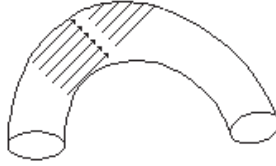


Fig. IV.57 - Choque das partículas do líquido na parede superior da curva da aorta devido ao princípio da inércia.

O valor obtido corresponde a cerca de 0,2 mm Hg, fracção insignificante (0,34 %) da pressão média na aorta, 100 mm Hg. O choque das partículas do líquido na parte superior da curva da aorta não tem, assim, significado.

Uma outra aplicação da fórmula de Laplace a volumes limitados por paredes espessas e elásticas é aos ventrículos do coração. Facilmente se vê na Fig. IV.58 que os raios de curvatura nas paredes laterais dos ventrículos são superiores aos dos vértices.

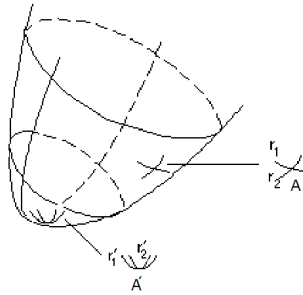


Fig. IV.58 - Raios de curvatura principais das paredes laterais do ventrículo esquerdo e vértice.

Designando por  $r_1$  e  $r_2$  e  $r'_1$  e  $r'_2$  os raios principais em dois pontos  $A$  e  $A'$  respectivamente da parede lateral e vértice do ventrículo esquerdo, por  $\Delta P$  a diferença de pressão do ventrículo em relação ao exterior e  $T_\ell$  e  $T_v$  as tensões vem:

$$P = T_\ell \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = T_v \left( \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} \right) \quad \text{IV.92}$$

ou

$$P = T_\ell a_\ell = T_v a_v \quad \text{IV.93}$$

Como  $a_v > a_\ell$ , visto os raios principais no vértice serem menores é, necessariamente,  $T_\ell > T_v$ .

Prova-se, então, que a tensão a que fica sujeita a parede lateral do ventrículo é superior à tensão no vértice. De facto, o coração está adaptado a esta situação, sendo a parede lateral do ventrículo substancialmente mais espessa que a parede do vértice (Fig. IV.59).

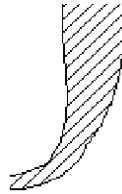


Fig. IV.59 - Espessuras da parede lateral e vértice do ventrículo esquerdo.

Um outro facto, para o qual interessa chamar a atenção, tem a ver com a dilatação do coração. Quando o coração dilata, obviamente, os raios de curvatura principais aumentam. Assim, para um mesmo  $\Delta P$ , a tensão  $T$  nas paredes aumenta em relação às condições normais correspondendo, portanto, a um maior esforço de tensão nas paredes laterais do ventrículo, situação indesejável.

#### IV.7.6 - Tensão na córnea

A córnea comporta-se como uma membrana de forma esférica, espessa, elástica, sob tensão e de raio aproximado 7,5 cm.

O fluido em contacto com a córnea (humor aquoso) está à pressão de cerca de  $3,0 \times 10^4 \text{ dyn/cm}^2$  (Fig. IV.60).



Fig. IV.60 Tensão a actuar na córnea (corte diametral).

Utilizando a fórmula de Laplace para uma superfície esférica obtém-se para  $T$  o valor de  $11,2 \times 10^3$  dyn/cm.

#### IV.7.7 - Biomecânica dos vasos elásticos

A representação dos esforços a actuar num elemento  $\Delta S$  da parede de um tubo cilíndrico de raio  $r$ , elástico e homogéneo (Fig. IV.61-a)) encontram-se representados na Fig. IV.61-b)

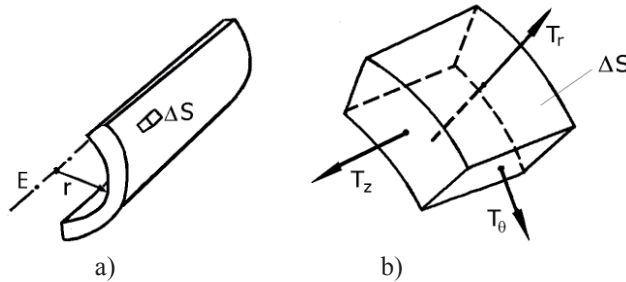


Fig. IV.61 – a) Parede de um tubo cilíndrico elástico e homogéneo de raio  $R_e$  e eixo  $E$ ; b) Tensões a actuar no elemento  $\Delta s$  da parede vascular.

A tensão  $T_r$  resulta da pressão intravascular e produz compressão na espessura da parede. A tensão  $T_\theta$  é a tensão circunferencial que é, em geral, tractora e resulta da reacção elástica à pressão intravascular. A tensão  $T_z$  é, em geral, tractora, produz um esforço longitudinal na parede do vaso e é resultante da pressão intravascular e de acções longitudinais presentes. Nos estudos que faremos sobre vasos sanguíneos vamos desprezar o termo  $T_z$ .

Nos vasos sanguíneos as diferenças de pressão existentes entre o interior e o exterior são equilibradas pela reacção elástica das paredes. A reacção à força de pressão é a força de tensão elástica nas paredes. A Fig. IV.62, mostra um corte de um vaso arterial com uma indicação geral da sua estrutura, realçando a túnica adventícia constituída por fibras elásticas e células gordas, a túnica média constituída por células musculares circulares lisas entrelaçadas com fibras elásticas e a túnica íntima constituída por células epiteliais.

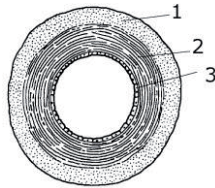


Fig. IV.62 - Corte de um vaso arterial: 1 - Túnica adventícia (fibras elásticas e células gordas). 2 - Túnica média (músculo liso). 3 - Túnica íntima (epitélio).

A túnica média é a mais espessa nas artérias, particularmente nas grandes artérias sendo a sua constituição sobretudo de fibras elásticas. À medida que as artérias ficam menores o número de fibras elásticas diminui enquanto o número de fibras musculares lisas aumenta. A camada mais externa, a túnica adventícia é a mais resistente constituindo como que uma barreira limite que protege o vaso de dilatação exagerada. A reacção elástica do vaso está relacionado com esta estrutura e, em especial, com a túnica adventícia. A parte média tem uma acção que depende do grau de contracção muscular. A contribuição mecânica da túnica epitelial é desprezível. Para melhor objectivar a interacção entre as forças de pressão e as forças elásticas nas paredes dos vasos, suponhamos que se corta uma tira com 1 cm de largura da parede do vaso, se secciona esta tira e se sujeita à força  $T$  como se indica na Fig. IV.63.

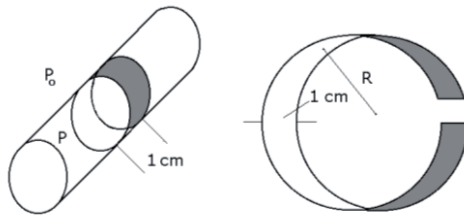


Fig. IV.63 - Tira da parede do vaso com 1 cm de largura seccionada por forma a dar um rectângulo.

A acção  $T$ , supondo a tira fixa num dos extremos, origina um aumento do comprimento desta. Este aumento é, afinal, o mesmo que a parede do vaso sofre, por unidade de comprimento, quando sujeita à tensão  $T$ , originada pelas forças de pressão.

As forças em jogo na tira são facilmente evidenciadas, se considerarmos que esta é tão fina que possa considerar-se uma distribuição plana de moléculas. Supondo a largura da tira 1 cm e admitindo que a força aplicada  $\mathbf{T}$  está igualmente distribuída pelas moléculas da primeira linha, para existir equilíbrio terão que ser nulas as resultantes das forças a actuar sobre cada molécula. Assim, nas moléculas da primeira linha terão que actuar forças iguais e opostas às fracções de  $\mathbf{T}$  correspondentes a cada molécula. Estas forças são forças de coesão que as moléculas da segunda linha exercem sobre as primeiras. Pelo princípio da acção e reacção, as moléculas da segunda linha recebem por parte das primeiras acções iguais e opostas, estas compensadas por forças de coesão impostas pela terceira linha. A resultante das acções de coesão sobre uma fila de moléculas, produzidas por moléculas de uma linha contígua tem por módulo  $\mathbf{T}$ .

Em qualquer secção imaginária da tira podemos considerar duas forças iguais e opostas de valor  $\mathbf{T}$ , Fig. IV.64. Evidentemente, o processo que descrevemos para as três primeiras linhas de moléculas aplica-se, nos mesmos moldes, para todas as moléculas da tira até se atingir a outra extremidade, onde a soma das forças a apontar para fora, de resultante  $\mathbf{T}$  é a reacção do apoio.

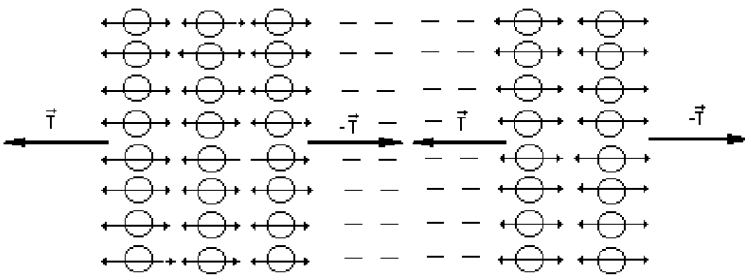


Fig. IV.64 - Considerámos a tira tão fina que possa reduzir-se a uma distribuição plana de moléculas.

Facilmente se compreende que se a repulsão entre as moléculas for aumentada por acção de uma força externa, a atracção molecular terá de aumentar para ocorrer o equilíbrio. Nas curvas a cheio observa-se que um maior valor da força de atracção obriga a uma distância intermolecular  $\mathbf{d}'$  maior (Fig. IV.65).

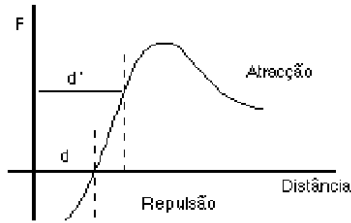


Fig. IV.65 - Como consequência de uma ação externa ocorre aumento da força de atração e da distância intermolecular  $d'$ .

Se a ação deformadora for demasiado intensa, a lei de Hooke deixará de se verificar (Fig. IV.66). A deformação por unidade de ação deformadora é maior do que no comportamento elástico e aumenta com o aumento de  $F$ . Além disso, ocorre deformação irreversível. Este comportamento deixa de se verificar com a rotura do material.

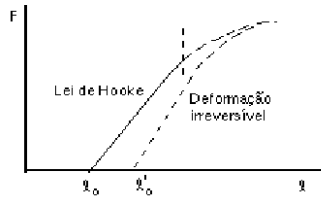


Fig. IV.66 - Se a ação deformadora aumentar a lei de Hooke deixa de se verificar e, eventualmente, ocorre deformação irreversível ou rotura.

Considerando agora a tira fazendo parte do tubo elástico e supondo que ocorre equilíbrio (Fig. IV.67), as tensões  $T$  tangentes à superfície devem compensar as forças de pressão.

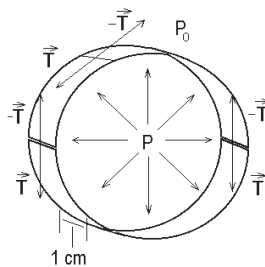


Fig. IV.67 - Forças de pressão e forças de tensão elástica na parede.

Podemos considerar o equilíbrio em metade da tira. Esta metade estará também em equilíbrio, ou seja, as forças aplicadas terão de ter resultante nula (condição necessária de equilíbrio). Na Fig. IV.68 observam-se as forças de pressão por  $\text{cm}^2$ ,  $P' = P - P_0$ , a diferença de pressão do interior para o exterior do vaso ou pressão transmural e as tensões  $T$  tangenciais à superfície a actuar nas extremidades (tensão circunferencial).

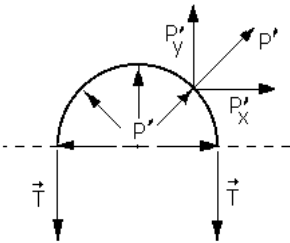


Fig. IV.68 - Equilíbrio de forças num tubo elástico sujeito a pressão transmural.

As componentes das forças de pressão, segundo a horizontal, anulam-se devido à simetria do sistema. A soma de todas as componentes das forças de pressão, segundo o eixo dos  $yy$ , deve dar uma resultante que equilibra a força  $2T$ .

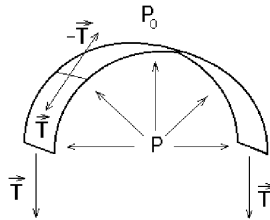


Fig. IV.69 – O modelo do corpo livre pode aplicar-se a metade do anel. O equilíbrio ocorre em qualquer parte de um sistema, onde se verifica o equilíbrio.

O cálculo rigoroso da resultante das forças de pressão conduz ao valor  $2P'R$  (Ver IV.17.9). Igualando este valor a  $2T$  obtém-se:

$$P' = \frac{T}{R}$$

que é o resultado que se obteria, aplicando a fórmula geral de Laplace (Eq.IV.12) a um cilindro elástico, muito fino, de raio  $R$  e sujeito à tensão  $T$ .

A expressão que traduz a variação de comprimento numa tira elástica de largura 1 cm, elastância  $E'$  e comprimento inicial  $l_0$ , sujeita à tensão  $T$ , é

$$T = E' \frac{l - l_0}{l_0} \quad \text{IV.94}$$

Considerando a tira como parte do tubo e supondo que, para  $T=0$ , o raio é  $R_0$  e, para a tensão  $T$ , é  $R$ , podemos reformular a equação anterior

$$\begin{aligned} T &= E' \frac{2\pi R - 2\pi R_0}{2\pi R_0} \\ &= E' \frac{R}{R_0} - E' \end{aligned} \quad \text{IV.95}$$

A função  $T(R)$  é, pois, uma recta que corta as abcissas em  $R_0$  e, cujo coeficiente angular é  $E'/R_0$ .

Verificou-se que, para o caso dos vasos sanguíneos, a função  $T(R)$  não satisfazia a equação anterior, apresentando a forma da Fig. IV.70.

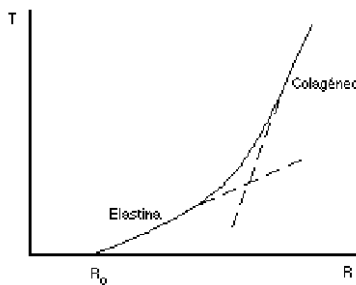


Fig. IV.70 - Curva  $T(R)$  para um vaso sanguíneo.

Uma análise da composição do tecido elástico dos vasos, explica este facto. Existem, com efeito, dois tipos de fibras elásticas no tecido, as fibras de colagénio (Módulo de Young  $\approx 10^8 \text{ N m}^{-2}$ ) e as fibras de elasticina (Módulo de Young  $\approx 3 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ ). Estas últimas têm elastância bastante menor



do que as primeiras, ou seja, uma menor resistência às forças de tracção, com maior facilidade de deformação do que o colagénio.

Mais rigorosamente a elastina e o colagénio são materiais viscoelásticos que, em termos de estrutura, são classificados como altos polímeros com ligações cruzadas, Fig. IV.71 a) e b).

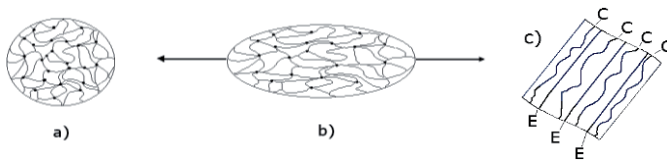


Fig. IV.71 – a) e b) Esquema da estrutura de um polímero com ligações cruzadas sem e com tensão aplicada. c) Modelo funcional da disposição das fibras de elastina (E) e colagénio (C) num vaso.

As moléculas longas destes polímeros estão sujeitas ao movimento estatístico de agitação térmica, condicionado entre outros factores pelas ligações cruzadas, sendo a sua forma, num particular instante, determinada pelas leis do acaso e ocorrendo segundo uma distribuição em torno de uma configuração mais provável. O mecanismo da elasticidade destes materiais é muito condicionado pelas ligações cruzadas. Quando o material é sujeito a tensão as moléculas tendem a alongar-se na direcção da tensão mas são impedidas de deslizar, a partir de certos limites, pelas ligações cruzadas. A explicação da diferença de comportamento entre elastina e colagenio está na existência, na primeira, de muito menos ligações cruzadas do que na segunda pelo que o efeito destas só é observável mais tardiamente e com menos intensidade que no segundo.

O comportamento mecânico das fibras destes materiais nos vasos é semelhante ao que se obteria se, na ausência de tensão, as fibras de colagénio não se encontrassem esticadas contrariamente às de elastina (Fig. IV.71 c)). Desta diferente disposição dos dois tipos de fibras resulta que são as fibras de elastina que primeiro começam a sofrer deformação, e só mais tarde, depois de ter sido atingido um determinado diâmetro, é que as de colagénio são mobilizadas para a deformação com conseqüente aumento da elastância do vaso. Para pequenas alongações são praticamente só as fibras de elastina que estão em acção. O colagénio com uma elastância maior, deforma-se menos, sendo estas fibras as responsáveis pela resistência dos

vasos, impedindo a sua ruptura. Gráficamente a maior elastância é traduzido por um aumento do ângulo da tangente à curva  $T(R)$ .

As curvas que traduzem a variação da tensão em função do raio  $[T(R)]$ , para um vaso sanguíneo, são curvas de concavidade superior, que resultam da sobreposição das curvas anteriores, do colagéneo e da elastina.

Por outro lado, sabemos que para uma certa pressão transmural  $P'$ , existem os valores da tensão circunferencial  $T$  e do raio  $R$ , obedecendo à fórmula de Laplace

$$P' = \frac{T}{R}$$

Esta expressão pode igualmente representar-se no gráfico  $T(R)$ . É uma recta que passa pela origem e tem coeficiente angular  $P'$ .

As funções  $T(R)$  que traduzem a lei de Hooke e a fórmula de Laplace têm de ser, simultaneamente, satisfeitas. Quando se trata de um tubo elástico caracterizado por um único valor de elastância as duas expressões

$$T = \frac{E'}{R_0} R - E'$$

e

$$T = P' R$$

têm, portanto, de ser simultaneamente satisfeitas.

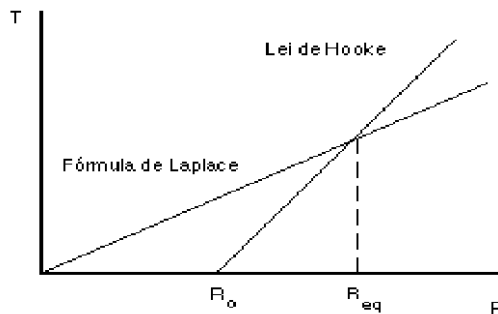


Fig. IV.72 - Raio de equilíbrio obtido a partir do cruzamento da recta da Lei de Hooke com a recta da Fórmula de Laplace), para um tubo cilíndrico.

A condição atrás referida só ocorre no ponto de cruzamento das duas

rectas ao qual corresponde a abcissa  $R_{eq}$ . Isto significa que um tubo elástico de elastância  $E'$  quando sujeito à pressão transmural  $P'$  fica sujeito à tensão  $T$  com o raio  $R_{eq}$ . Nesta situação, as forças de pressão e as reacções elásticas equilibram-se. Facilmente se vê que o raio  $R_{eq}$  corresponde a um estado de equilíbrio. De facto, para valores superiores ocorrem reacções elásticas não compensadas por forças de pressão com conseqüente diminuição do raio. Para raios menores a situação inversa ocorre.

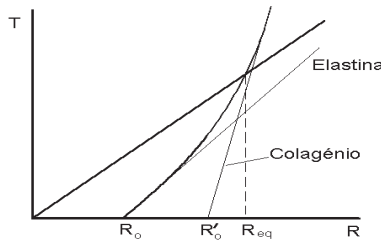


Fig. IV.73 - Raio de equilíbrio para um vaso sanguíneo, sem tónus muscular.

Existem diferentes contribuições relativas de fibras de elastina e colagénio nas paredes dos vasos sanguíneos dos diversos tipos (artérias, arteríolas, veias, vénulas e capilares). Mesmo em vasos do mesmo tipo há diferenças. Por exemplo entre as artérias periféricas e centrais. Na aorta proximal a elastina é o componente dominante enquanto que na aorta distal predomina o colagénio. Nas artérias periféricas o colagénio e as fibras musculares lisas predominam. Estas diferenças originam que as curvas de comportamento elástico apresentam perfis diferentes, pelo que os raios de equilíbrio, para uma mesma pressão transmural, são diferentes, Fig. IV.74.

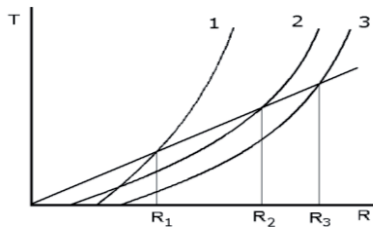


Fig. IV.74 - Diferentes contribuições relativas de fibras de elastina e colagénio nas paredes dos vasos originam que as suas curvas de comportamento elástico apresentam perfis diferentes pelo que os raios de equilíbrio são diferentes, para uma mesma pressão transmural.

A análise que acabámos de fazer para os vasos sanguíneos ignora a acção das fibras musculares dos vasos. Além da tensão elástica que estudámos, há também que considerar a tensão activa resultante do tónus muscular. A acção muscular permite variar o raio de equilíbrio dos vasos sendo determinante no controlo do caudal sanguíneo.

Quando a tensão activa apresenta um valor  $T_A$  suposto constante, a curva  $T(R)$  do comportamento elástico do vaso, é a soma da curva sem tónus (curva 3 da Fig. IV.75) com valor constante  $T_A$  e toma o aspecto da curva 1 (Fig. IV.75). O comportamento elástico só ocorre para valores de  $T > T_A$ .

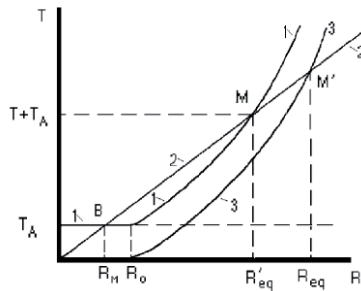


Fig. IV.75 - Influência da tensão activa na curva  $T(R)$ , para um vaso sanguíneo.

A recta de Laplace (curva 2) corta a curva tensão/deformação em dois pontos **M** e **B**. As razões já evocadas para explicar o equilíbrio no ponto **M** provam a sua impossibilidade em **B**, onde se verifica uma situação de equilíbrio instável. Neste ponto, considerando valores do raio ligeiramente superiores, o predomínio das forças de pressão faria tender para o estado correspondente ao ponto **M**. Raios à esquerda do ponto **B** correspondem a predomínio das reacções elásticas com o raio a diminuir até se anular. Esta hipótese não tem, contudo, interesse. De facto, a tensão activa, ao estabelecer-se provoca a passagem do raio do tubo de um valor  $R_{eq}$  para outro  $R'_{eq}$ , valores sempre superiores a  $R_n$ .

Consideremos o que sucede se a pressão transmural diminuir para as duas situações estudadas com e sem tónus muscular.

À medida que a pressão transmural diminui a inclinação da recta de Laplace decresce, diminuindo o raio de equilíbrio. Quando não há tónus muscular, ou seja, a situação de uma tensão puramente elástica, há sempre cruzamento entre a recta de Laplace e a curva de comportamento elástico e, para uma pressão transmural nula, corresponde o raio de equilíbrio  $R_0$ .

Quando há uma tensão activa presente, a situação limite para o cruzamento das duas curvas, corresponde à recta de Laplace ser tangente à curva de comportamento elástico, no ponto **A**. A pressão transmural correspondente a este valor chama-se pressão crítica de colapsamento e o raio  $R_4$  é o raio mínimo do tubo antes do colapsamento. Com efeito, para valores da pressão transmural inferiores, as forças de tensão predominam sobre as forças de pressão, produzindo a diminuição do raio e o colapsamento do tubo, ou seja, as forças de tensão executam trabalho de deformação sobre as paredes dos vasos.

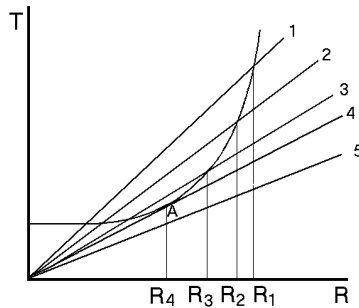


Fig. IV-76 - Raios de equilíbrio para diferentes valores da tensão transmural para uma mesma situação de tonus muscular. O raio normal corresponde ao raio  $R_2$ . O raio  $R_4$  corresponde à pressão crítica de colapsamento.

Na Fig. IV-76 encontram-se, para uma mesma situação de tonus muscular, os valores dos raios de equilíbrio para diferentes valores da pressão transmural. O raio normal corresponde ao raio  $R_2$ . Em pacientes em situação de choque ocorre uma baixa de pressão que pode ser moderada (raio  $R_3$ ) ou produzir colapsamento total. Por outro lado, em situações de hiperpressão ocorre aumento do raio (raio  $R_1$ ).

Podemos estudar o que ocorre quando, para uma mesma pressão transmural, diferentes valores de tonus muscular são aplicados no vaso (Fig. IV-77). O raio  $R_2$  corresponde a uma tensão activa considerada normal. A diminuição da tensão activa (curva 1) origina vasodilatação (raio  $R_1$ ) e o aumento (curva 3) origina vasoconstrição (raio  $R_3$ ). A curva 4, corresponde a um elevado valor da tensão activa, produzindo colapsamento e obstrução, que se verifica em situações de espasmo vascular.

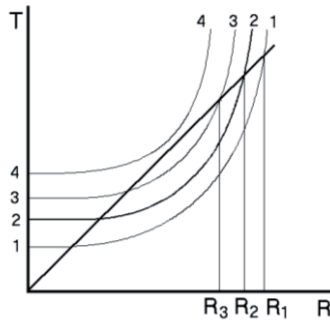


Fig. IV-77 - Raios de equilíbrio para uma mesma pressão transmural e diferentes valores de tonus muscular. O raio  $R_2$  corresponde a uma tensão activa considerada normal. A diminuição da tensão activa produz vaso constrição (raio  $R_1$ ) e o aumento vaso dilatação. A curva 4 corresponde a colapsamento.

Consideremos de novo a fórmula de Laplace para o caso do tubo cilíndrico

$$P' = \frac{T}{R_1}.$$

Esta equação permite calcular a tensão nas paredes dos vasos sanguíneos, conhecendo a pressão do sangue e o raio. Uma artéria com raio 1,5 cm e com uma pressão interior de 100 mmHg =  $1,33 \times 10^5$  dyn/cm<sup>2</sup> (acima da pressão atmosférica) suporta uma tensão nas suas paredes de valor

$$T = 1,33 \times 10^5 \times 1,5 = 2 \times 10^5 \text{ dyn/cm}$$

#### IV.8 - Complacência de um vaso elástico

Consideremos um vaso cilíndrico de comprimento  $\ell$  que se encontra em equilíbrio, apresentando um raio  $r$  quando actua uma pressão transmural

$P_{TM}$  e uma tensão na parede  $T_S$ , soma da tensão elástica  $T_{SE}$  e da tensão activa ou tónus muscular  $T_{SA}$ .

Pode demonstrar-se (Apêndice IV.9.15) que

$$dV = \frac{V}{K} dP_{TM} = C dP_{TM}$$

onde  $V$  é o volume do tubo,  $K = \frac{E' - T_{SA}}{2R}$  com  $E'$  a elastância do vaso e  $C$  a complacência do vaso.

A relação de definição da complacência  $C$  é

$$C = \frac{dV}{dP_{TM}}$$

Esta equação exprime a relação entre o aumento de pressão no vaso e o conseqüente aumento de volume e caracteriza as propriedades de um vaso de paredes elásticas, em oposição às de um vaso de paredes rígidas. O primeiro é capaz de suportar uma variação de volume de líquido no seu interior, variação essa acompanhada de uma variação de pressão. Para o tubo rígido, qualquer variação no caudal de líquido que penetra no seu interior num dado intervalo de tempo, origina uma igual variação no caudal do líquido que abandona o tubo (Fig. IV.78). Não há armazenamento de energia elástica nas paredes do tubo.

Os vasos sanguíneos de menor calibre (arteríolas, vénulas e capilares), além de elásticos são sujeitos a variações de diâmetro por acção de factores externos, de acordo com as necessidades dos tecidos circundantes.

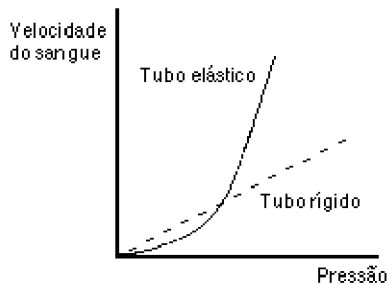


Fig. IV.78 – Variação da velocidade média de um líquido em função da pressão para tubos rígidos e elásticos.

A complacência vascular varia consideravelmente com a idade. A complacência do segmento da aorta de um homem de 75 anos é cerca de 1,7 vezes menor que a de um jovem de 17/18 anos.

#### IV.8.1 - Complacências vasculares sistêmicas equivalentes arterial e venosa

Pode medir-se a complacência vascular equivalente dos vasos da circulação sistêmica. As curvas obtidas para as funções  $P(V)$ , correspondentes às redes arterial e venosa da circulação sistêmica, mostram que a complacência vascular sistêmica venosa é muito maior do que a complacência vascular sistêmica arterial.

No cão a complacência sistêmica venosa equivalente é de aproximadamente  $2 \text{ mL Kg}^{-1} \text{ mm Hg}$  e a complacência sistêmica arterial equivalente é de cerca de  $0,06 \text{ mL Kg}^{-1} \text{ mm Hg}$ . Esta diferença entre as relações volume-pressão para os componentes arterial e venoso da circulação sistêmica, é facilmente relacionável com as diferenças na constituição histológica destes dois tipos de vasos.

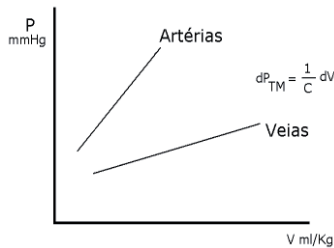


Fig. IV.79 - Curvas  $P(V)$  para os vasos arteriais (A) e para os vasos venosos (B), da circulação sistêmica.

Para o caso da circulação pulmonar, observa-se que, de igual modo, a complacência equivalente da rede venosa é superior à das artérias.

Por outro lado, quando se comparam as complacências totais da circulação sistêmica e pulmonar verifica-se que a primeira é superior à



segunda (Fig. IV.80). Isto é contrário ao que, historicamente, foi considerado para a circulação pulmonar.

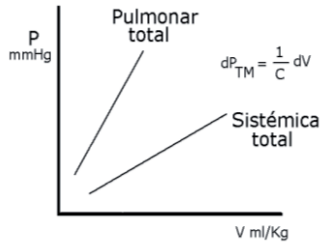


Fig. IV.80 - Curvas  $P(V)$  para os vasos das circulações pulmonar e sistêmica.

As complacências das grandes artérias e veias pulmonares são semelhantes, compartilhando cada uma delas com cerca de 15% da complacência vascular total pulmonar. Os pequenos vasos pulmonares, pequenas veias, vénulas e capilares, compartilham com o restante. A complacência pulmonar total no cão é da ordem de  $0,26 \text{ mL Kg}^{-1} \text{ mmHg}^{-1}$ .

#### IV.9 - Aspectos físicos da circulação sanguínea

A soma dos comprimentos de todos os vasos sanguíneos da árvore vascular humana, de um adulto, é cerca de 160 Km. Estes vasos estão associados em série e em paralelo, formando complexos labirintos, contudo, para certos estudos, o sistema circulatório humano pode ser reduzido a um sistema hidrodinâmico relativamente simples. No cálculo da resistência periférica total ou na aplicação do princípio da conservação da massa, que anteriormente fizemos, o modelo da circulação sanguínea que considerámos não obedeceu a características especiais. Há, contudo, diferenças flagrantes entre as propriedades dos intervenientes num problema banal de hidrodinâmica e o comportamento real do coração, dos vasos sanguíneos e do próprio sangue. Contrariamente aos sistemas físicos usuais, os vasos sanguíneos são elásticos e colapsáveis, de modo que qualquer variação de pressão é acompanhada por variações locais no volume do sistema ou, se quisermos, de variações na quantidade de sangue presente. Há também acção muscular que pode actuar de maneira activa nas paredes dos vasos. Na circulação

não pode existir gás livre, juntamente com o sangue. O caudal à saída do coração é pulsátil mas, à entrada, é aproximadamente constante. O preenchimento com sangue das aurículas ocorre passivamente e não devido a qualquer acção de sucção por parte do coração. O sistema vascular constitui um circuito fechado com uma pressão média positiva que existe independentemente da acção do coração. Além de tudo isto, o sangue é um líquido é não-newtoniano.

Apesar destas características, muitos dos princípios físicos usados em hidrostática e hidrodinâmica têm aplicação imediata à hemostática e hemodinâmica. Porém, dadas as características especiais da circulação sanguínea humana, têm de ser utilizados no seu estudo novos princípios e introduzidos conceitos e modificações, cujo interesse prático se estende a outros campos.

Para se perceberem os conceitos mais elementares da hemostática, basta aplicar o princípio fundamental da hidrostática. Por uma questão de facilidade vamos medir as pressões em mm de sangue em vez de mm de Hg. Vamos supor também que nos grandes vasos arteriais não ocorre queda de pressão devido à viscosidade. Sendo a queda de pressão num tubo cilíndrico percorrido por um líquido viscoso inversamente proporcional à quarta potência do raio podemos supor esta queda desprezável para vasos de grande calibre. Nestas condições facilmente se entende que as diferenças de pressão na circulação sanguínea nos grandes vasos arteriais sejam devidas a variações de energia potencial gravitacional. Estas variações são devidas a desníveis e quando medidas em mm de sangue coincidem com os próprios desníveis medidos em mm. Em qualquer instante podemos fazer a conversão entre pressão em mm de sangue e mm de Hg, pois a relação entre as massas específicas destes líquidos é 12,9.

A pressão média a nível da aorta é de cerca de 100 mm Hg, ou seja 1290 mm sangue. Um indivíduo de 1,8 m (1800 mm) de altura, em pé, apresenta desníveis entre o topo da cabeça e a região cardíaca de 500 mm e entre a última e os pés de cerca de 1300 mm (Fig. IV.81).

A pressão, em mm de sangue nos grandes vasos arteriais, no topo da cabeça é então de  $1290 - 500 = 790$  mm de sangue. Em mm Hg a pressão é 100 mm diminuída da pressão de 39,5 mm Hg, correspondente ao desnível de 500 mm, ou seja, cerca de 60 mm Hg. Nas artérias das extremidades inferiores, para o indivíduo em pé, a pressão em mm de sangue é  $1290 + 1300 = 2590$ . Em mm Hg a pressão é 100 mm Hg mais a pressão correspondente a 1300 mm de desnível, cerca de 100 mm Hg, ou seja o total de  $\sim 200$  mm Hg. Para o indivíduo sentado, a pressão nas artérias das extremidades inferiores é de  $1290 + 800 = 2090$  mm de sangue ou seja cerca de 160 mm

Hg.

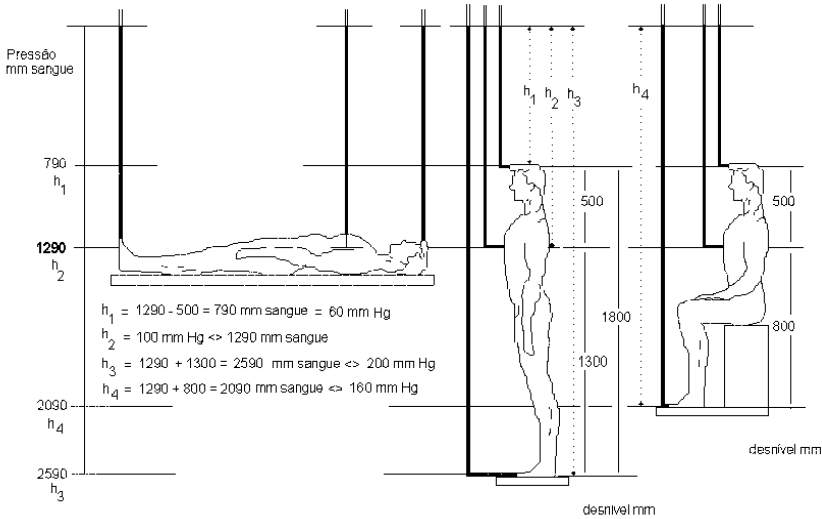


Fig. IV.81 - Pressões nos grandes vasos arteriais, em diversas posturas.

Um sujeito deitado horizontalmente apresenta uma pressão média nas grandes artérias, ao nível dos pés e da cabeça, aproximadamente igual. Na Fig. IV.81 estão indicadas as pressões não só em milímetros de mercúrio, como em milímetros de sangue. Para este último caso há a vantagem do número de milímetros correspondente a dado desnível ser igual ao valor da diferença de pressão em milímetros de sangue. Vimos que as superfícies livres das colunas de sangue ficam sempre ao mesmo nível isto se desprezarmos pequenas variações resultantes da transformação de energia mecânica em calor devido à viscosidade.

Considerámos que as pressões eram medidas em artérias de calibre grande para podermos desprezar a queda de pressão devida às resistências ao movimento do sangue.

No que respeita às veias, as diferenças de nível criam diferenças de pressão idênticas às produzidas nos vasos arteriais. A pressão média do sangue à entrada da aurícula direita é próxima de zero pelo que, no indivíduo em pé, a pressão nos vasos venosos dos pés deve ser de 100 mmHg e nos vasos venosos da cabeça -40 mmHg. Estes valores correspondem a diferenças de pressão média entre as circulações arterial e venosa da ordem dos 100

---

mmHg.

A alteração da postura de horizontal para vertical produz uma alteração considerável na distribuição de pressões no sistema vascular. Esta alteração pode originar sensação de desmaio, quando, em circunstâncias anormais, há uma rápida mudança da postura de deitado para em pé.

Se um indivíduo se levanta bruscamente, o rápido aumento da pressão venosa, em grande parte do corpo, origina, devido à elevada complacência das veias, considerável dilatação da árvore venosa, com grande retenção de sangue. O retorno de sangue venoso ao coração diminui assim, abruptamente, originando a jusante uma diminuição da chegada de sangue ao cérebro com a ocorrência da sensação de desmaio ou mesmo perda de consciência.

Em condições normais este fenómeno não ocorre porque existem mecanismos compensatórios que o evitam ou minimizam. Estes mecanismos são os reflexos induzidos pela resposta de baroreceptores dos vasos sanguíneos às variações de pressão, que produzem aumento da frequência cardíaca e vasoconstricção nas artérias e arteríolas. A actividade muscular nos membros também dificulta o aumento súbito do volume de sangue nas veias.

A circulação sanguínea nos vasos é mantida pelo coração, o qual funciona como uma bomba de funcionamento intermitente que só desenvolve trabalho na ejeção do sangue.

Ao contrair-se na sístole, o ventrículo esquerdo envia o sangue através da aorta para as outras artérias e depois para os capilares, os quais irrigam os tecidos de todos os órgãos. O sangue dos capilares é recolhido pelas veias e levado à aurícula direita, donde passa ao ventrículo direito que o manda para os pulmões através da artéria pulmonar. Depois dos pulmões, o sangue é levado à aurícula esquerda pelas veias pulmonares.

A velocidade média do sangue na aorta é de cerca de 0,4 m/s. À medida que as artérias se ramificam e aumentam a secção total, aquela velocidade diminui. Nos capilares a que corresponde uma secção total da ordem do milhar de vezes a da secção recta da aorta a velocidade média é da ordem da fracção do mm/s.

O volume de sangue enviado por sístole pelo ventrículo esquerdo através da aorta é de cerca de 100 cm<sup>3</sup>, apresentando notáveis variações de indivíduo para indivíduo.

A frequência das sístoles cardíacas é, em média, de 60 a 70 por minuto.

A pressão média gerada pelo ventrículo esquerdo na aorta é de aproximadamente 100 a 200 mmHg. Esta pressão varia com o indivíduo e

---

com a idade.

A pressão produzida pelo ventrículo direito é de 1/3 a 1/5 da pressão produzida pelo ventrículo esquerdo.

Estes valores de pressão indicam as resistências que o coração tem que vencer quando envia o sangue para a grande circulação e para a circulação pulmonar (pequena circulação).

A resistência oferecida pela vascularização pulmonar é muito menor do que a resistência oferecida à circulação sistêmica.

A arquitectura do ventrículo esquerdo adapta-se ao funcionamento de uma autêntica bomba de alta pressão enquanto que a do ventrículo direito se adapta a menores pressões (paredes menos espessas).

Embora a pressões diferentes, os volumes de sangue, ejectados pelos ventrículos durante a sístole, são idênticos.

#### IV.9.1 – Trabalho cardíaco

Conhecendo as pressões ventriculares e o volume correspondente à sístole, podemos calcular o trabalho produzido pelo coração durante um ciclo cardíaco.

Numa primeira aproximação, consideremos nula a pressão sanguínea à entrada das aurículas e designemos por  $P_1$  e  $P_2$  as pressões ventriculares médias, esquerda e direita, durante a sístole e por  $V$  o volume sistólico (suposto igual para os dois ventrículos). Sendo  $P_1$  e  $P_2$  as pressões ventriculares médias durante o sístole e  $V$  a variação de volume sofrida pelos ventrículos, o trabalho produzido por estes, pode calcular-se com se se tratasse de uma variação de volume, a pressão constante, ou seja,  $P_1V$  e  $P_2V$ . O trabalho total do coração durante a sístole é

$$W = (P_1 + P_2) V \quad \text{IV.96}$$

Usando esta expressão obtêm-se, com os valores atrás referidos, um trabalho de aproximadamente 2 joules por sístole.

Com um ritmo cardíaco de uma pulsação por segundo, a energia total libertada em 24 horas dá o valor de 18000 joules.

Estes cálculos dão unicamente uma ordem de grandeza do trabalho

externo produzido pelo coração.

Por vezes, o trabalho é calculado considerando a pressão na aorta em vez da pressão ventricular. Neste caso há que juntar ao termo PV a energia cinética do sangue naquela artéria. Há, portanto, transformação de parte da energia potencial devida à pressão ventricular, em energia cinética.

Designando por  $P_A$  a pressão aórtica média,  $V$  o volume sistólico,  $v$  a velocidade média do sangue na aorta e  $\rho$  a massa específica do sangue, o trabalho na sístole para o ventrículo esquerdo é

$$W = P_1 V = \left( P_A + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) V \quad \text{IV.97}$$

A Eq. IV.96 seria mais rigorosa se considerássemos, em vez de valores médios de pressão, o somatório dos produtos  $P\Delta V$  das pressões instantâneas durante a sístole pelos volumes elementares de sangue  $\Delta V$  ejectados àquelas pressões, ou seja

$$W = \sum_{i=1}^n P_{1i}(t) \Delta V + \sum_{i=1}^n P_{2i}(t) \Delta V \quad \text{IV.98}$$

ou melhor ainda, o limite destes somatórios quando  $\Delta V \rightarrow 0$ , que nos leva a

$$W = \int_{\Gamma 2} P_1(t) dV + \int_{\bar{2} 3} P_2(t) dV \quad \text{IV.79}$$

Num diagrama de pressão-volume de um ventrículo podemos calcular graficamente o trabalho realizado pelo coração e pelo sangue, durante o ciclo cardíaco.

Na Fig. IV.82 o segmento  $\Gamma 2$  representa a fase de preenchimento. O volume ventricular aumenta praticamente para o dobro mas a pressão varia muito pouco. A área subtendida pelo segmento  $\Gamma 2$  representa o trabalho executado pelo sangue sobre o ventrículo ao preenchê-lo. Este trabalho é armazenado no músculo cardíaco sob a forma de energia elástica e é resti-

tuído mais tarde ao sangue como energia cinética na ejeção.

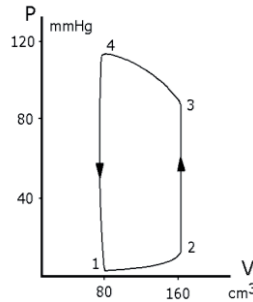


Fig. IV.82 - Gráfico pressão volume do ventrículo esquerdo.

O segmento  $\overline{23}$  é a fase de contracção isovolumétrica (ou isométrica). Não é produzido trabalho mecânico nesta fase, mas a pressão aumenta e é armazenada energia potencial de pressão. A fase  $\overline{34}$  corresponde à ejeção. A área entre  $\overline{34}$  e as abcissas é o trabalho executado pelo ventrículo sobre o sangue no processo. O segmento  $\overline{41}$  é a fase de relaxação isovolumétrica. Não é, praticamente, realizado trabalho mas o músculo cardíaco restitui energia elástica ao sangue. A área subtendida pelo segmento  $\overline{34}$ , subtraída da área subtendida pelo segmento  $\overline{12}$  é o trabalho mecânico total realizado pelo ventrículo num ciclo cardíaco.

Da energia produzida pelo ventrículo esquerdo uma parte é dispendida a fazer deslocar o sangue, outra parte armazenada na forma de energia potencial de pressão, aumentando a pressão sanguínea, alguma energia é armazenada na forma de energia elástica nas paredes da aorta, e finalmente uma parte perde-se como trabalho de forças de fricção.

Poderá interessar ter uma ideia comparativa de potência mecânica do coração. O cálculo anteriormente feito aproximadamente 2 Joules/s ( ou seja 2 watts ) refere-se ao trabalho em condições de repouso e para o débito de 5 litros de sangue por minuto.

Supondo que o trabalho realizado é de 0,8 Joule e que a duração da sístole é 0,27 s, vem para a potência do ventrículo esquerdo na sístole :

$$P_v = \frac{W_v}{t_v} = \frac{0,8}{0,27} \text{ J s}^{-1} = 2,95 \text{ W}$$

---

Considerando que  $1 \text{ W} = 1,34 \times 10^{-3} \text{ hp}$

$$P_v = 3,96 \times 10^{-3} \text{ hp}$$

Uma potência mecânica de 0,004 hp é pequena. Seriam necessárias várias centenas de corações para somarem a potência requerida para accionar uma pequena pequena bomba de aspiração para regas.

Não é porém só a potência mecânica do coração que interessa. A definição física de trabalho implica que uma força só produz trabalho quando há deslocamento do seu ponto de aplicação, ou que uma pressão, actuante sobre um líquido, produz trabalho quando movimenta um certo volume de líquido. Contudo, no caso dos músculos, requiere-se energia para ser mantida a força ou tensão do músculo. Quando suportamos um peso com força muscular, embora não haja produção de trabalho mecânica, o consumo local de energia aumenta e processa-se uma dissipação de energia para manter esse esforço.

É pois necessário considerarmos a energia responsável pela força (tensão) exercida pelo músculo cardíaco.

Um músculo consome tanto mais energia quanto maior é a tensão a que está sujeito e quanto maior é o tempo do esforço considerado, mesmo quando não há produção de trabalho mecânico.

A potência total do coração é de cerca de 13 Watts. A eficiência mecânica do coração, ou seja, a relação trabalho mecânico efectuado e trabalho total, é pois baixa (de ordem dos 10%).

Como já tivemos ocasião de referir, o princípio da conservação da energia para líquidos ideais em movimento está contido no teorema de Bernoulli.

O teorema de Bernoulli exprime, na sua forma original, que a soma das três distintas formas de energia que contribuem para a energia total de um líquido em movimento, é constante. Se o sangue fosse um fluido perfeito, a diminuição da velocidade sanguínea ao longo da corrente circulatória seria sempre acompanhada de um aumento de pressão (supondo que a energia potencial gravitacional pode ser considerada constante, como no caso de um indivíduo deitado, e que não há deformação dos vasos).

É evidente que sendo o sangue um líquido altamente viscoso, parte da sua energia mecânica é dissipada na forma de calor.

Nas grandes artérias, a perda de energia, devida à fricção, é pequena,

---



pele que o princípio de Bernoulli se pode aplicar sem erro apreciável.

#### IV.9.2 - Utilização de cateteres na medição directa da pressão

Interessa, com frequência, determinar a pressão do sangue no interior dos vasos. Uma parte dos métodos utilizados, obriga a que se proceda a cateterismo, de modo a estabelecer-se contacto entre o sangue no interior do vaso e o manómetro. Verifica-se, todavia, que os valores da pressão medidos dependem da orientação relativa das linhas de corrente do líquido, em relação à abertura do cateter (Fig.IV.83).

Na situação **1**, as linhas de corrente e, portanto, a velocidade das partículas do líquido são tangentes à abertura do tubo. Não havendo componente da velocidade, segundo a direcção da normal ao eixo do cateter, não haverá contribuição de energia cinética nesta medida. A pressão registada  $P_1$  resulta, assim, quase exclusivamente, de energia potencial de pressão e é chamada pressão estática. Quando a abertura do tubo (ou cateter) é normal às linhas de corrente, há que considerar a pressão que resulta da transformação de energia cinética em energia potencial de pressão, no líquido.

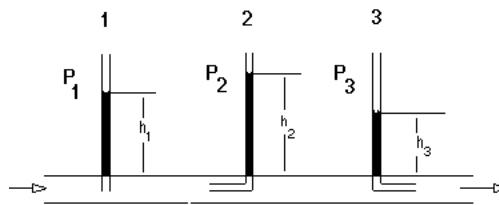


Fig. IV.83 - Pressões medidas com um manómetro de mercúrio com diferentes orientações da abertura do tubo.

Em **2** a energia cinética do líquido, que é transformada em energia potencial de pressão, origina uma "pressão cinética" que é adicionado à pressão estática, sendo a leitura no manómetro

$$P_2 = P_1 + (1/2) \rho \bar{v}^2 \quad \text{IV.100}$$

onde  $(1/2) \rho \bar{v}^2$  é a pressão cinética, com  $\bar{v}$  a velocidade média do líquido e

$\rho$  a sua massa específica.

No caso **3**, o valor de pressão medido é inferior a  $P_1$ . As forças de coesão entre as partículas do líquido originam uma pressão que se opõe à estática e que puxa líquido para o exterior. Para o sangue, o valor de  $P_3$  é, aproximadamente

$$P_3 = P_1 - 0,8 [(1/2) \rho \bar{v}^2] \quad \text{IV.101}$$

No caso da aorta, e no repouso, verifica-se que os valores  $P_2$  e  $P_1$  são praticamente iguais. Já vimos que a velocidade média do sangue na aorta  $0,4 \text{ m.s}^{-1}$  e a massa específica do sangue  $1,02 \text{ g/cm}^3$  permitem determinar a pressão cinética, que corresponde a cerca de  $0,2 \text{ mm}$  de mercúrio, valor insignificante ( $0,2\text{-}0,3\%$ ) em relação à pressão  $P_1$  cerca de  $100 \text{ mm Hg}$ , pelo que  $P_2 \approx P_1$ . No exercício, verificam-se diferenças maiores. Na aorta, no exercício, para um débito cardíaco três vezes o normal, a pressão cinética já é de cerca de  $2,6\%$ .

No caso das veias, para as quais a pressão estática é menor, a variação de pressão, quando se consideram as situações **2** e **1** da Fig. IV.83 pode ser significativa no repouso.

Por exemplo, nas veias pulmonares a pressão média é de aproximadamente  $5 \text{ mmHg}$  e a velocidade média do sangue cerca de  $0,2 \text{ m s}^{-1}$ , já que a área total da secção recta das quatro veias pulmonares é de duas a três vezes a da aorta. A pressão cinética corresponde a  $0,15 \text{ mmHg}$ , cerca de  $3\%$ . Na veia cava superior, a velocidade é de cerca de  $3 \text{ m.s}^{-1}$  e a pressão média de  $2 \text{ mmHg}$ , pelo que a contribuição da energia cinética já é de  $12\%$ . No exercício e nas condições já referidas para a aorta, a contribuição ultrapassa os  $50\%$ .

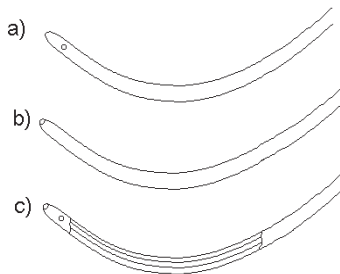


Fig. IV.84 - a) Cateter com abertura lateral. b) Cateter com abertura frontal.  
c) Cateter com aberturas lateral e frontal.

É importante referir uma causa de erro intrínseca à medição de pressões utilizando cateteres em vasos, sobretudo quando se trata de vasos de pequeno raio. As Figs. IV.85-1 e 2 mostram as alterações dos trajectos das linhas de corrente produzidas pela introdução de cateteres.

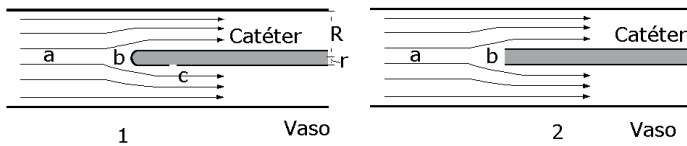


Fig. IV.85 - 1-Cateter de abertura lateral. 2- Cateter de abertura frontal.

As alterações das distâncias entre estas linhas significam variações na velocidade do líquido e na sua pressão local. A introdução de um cateter vai diminuir a área da secção do tubo disponível para o movimento do líquido afectando as medições, quer usando cateteres de abertura lateral quer central. Chamando  $r$  e  $R$  respectivamente aos raios externo do cateter e interno do vaso, consideremos as diferenças de velocidade e de pressão entre os pontos  $c$  e  $a$ , da Fig. IV.85, utilizando para a última, o teorema de Bernoulli, para a situação ideal. Então para as velocidades

$$v_a = v_c \frac{\pi R^2}{\pi(R^2 - r^2)} \tag{IV.102}$$

e para as pressões

$$P_c - P_a = (1/2) \rho v_a^2 \left[ \frac{r^2(2R^2 - r^2)}{(R^2 - r^2)^2} \right] \tag{IV.103}$$

onde  $\rho$  é a massa específica do líquido. A diferença de pressão entre os pontos referidos é o erro que é cometido na leitura da pressão hemostática num vaso sanguíneo, supostamente obtida quando é utilizando o cateter de abertura lateral. Se  $r = R/2$

$$P_c - P_a = (1/2) \rho v_a^2 (0,778) \tag{IV.104}$$

Se  $r = 0,1 R$

$$P_c - P_a = (1/2) \rho v_a^2 (0,02) \quad \text{IV.105}$$

Quando  $r$  é muito menor do que  $R$ , o termo dentro do parêntesis torna-se muito menor do que a unidade e o erro que ocorre utilizando o cateter de abertura lateral é pequeno.

No ponto  $b$ , Fig. IV.85-2 ocorre alteração na direcção das linhas de corrente. Sendo  $v_b$  o valor da componente horizontal da velocidade em  $b$ , é

$$P_b = P_a + (1/2) \rho v_b^2 \quad \text{IV.106}$$

com  $v_b < v_a$ . A energia cinética transformada em energia de pressão e adicionado à pressão estática no ponto  $b$ , depende do raio externo do cateter.

A medição de pressões utilizando manómetros de ar livre, com mercúrio ou água, é prática corrente em experiência animal. A medição da pressão implica a introdução no vaso de um cateter, ou de uma cânula de vidro ou plástico, ligado a um tubo maleável, contendo soro fisiológico com um anticoagulante. Esta fase líquida estabelece o contacto do sangue com o líquido do manómetro (Fig. IV.86).

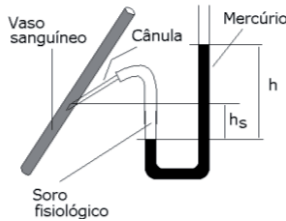


Fig.IV.86 - A medição da pressão intravascular com manómetro de ar livre implica a introdução no vaso de uma cânula com soro fisiológico com um tubo que estabelece o contacto com o líquido do manómetro.

Chamando  $P$  à pressão no ponto de medição no vaso,  $h_s$  ao desnível entre este ponto e o líquido do manómetro,  $\rho_s$  a massa específica do soro fisiológico,  $P_a$  a pressão atmosférica,  $h$  o desnível do mercúrio,  $\rho$  a massa específica do mercúrio e  $g$  a aceleração da gravidade, podemos escrever

$$P + h_s \rho_s g = P_a + h \rho g$$

---

 ou

$$P = P_a + h \rho g - h_s \rho_s g$$

IV.107

O desnível  $h_s$ , vai originar um erro na medição. Este erro é eliminado se o ponto onde se pretende medir a pressão estiver ao nível da superfície de contacto soro-mercúrio.

Em geral as pressões arteriais são expressas em mmHg e as pressões venosas em mm de água.

O método de determinação da pressão atrás referido não é prático para utilização no homem sendo utilizados os métodos electromométricos quando é necessário obter valores da pressão intravascular por punção dos vasos sanguíneos.

### IV.9.3 – O esfigmomanómetro

O método convencional do esfigmomanómetro de Riva e Rocci, embora menos preciso que os anteriormente referidos, dá uma indicação razoável da pressão e é de uso generalizado em Medicina. Uma aplicação médica importante do princípio fundamental da hidrostática é o esfigmomanómetro. Este é constituído por uma câmara (C) em parte preenchida com mercúrio e onde mergulha um tubo (T) aberto assente sobre uma escala. A câmara comunica com uma almofada pneumática insuflável (A) e com uma pêra de borracha (P) que permite insuflar ar para o espaço estanque câmara + almofada.

Uma válvula regulável, existente na pêra, permite diminuir a pressão lentamente. A altura da coluna de mercúrio mede o excesso de pressão na câmara e almofada em relação à pressão atmosférica.

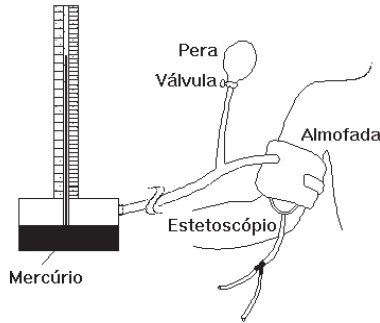


Fig. IV.87 - Esquema da medição da pressão arterial com o esfigmomanômetro.

As variações no nível de mercúrio na câmara, devidas à subida do mercúrio no tubo, não são consideradas. Se o diâmetro do tubo for muito pequeno, aquelas variações podem considerar-se desprezíveis.

A almofada, antes de insuflada, é enrolada em torno do antebraço, ao nível do coração, cobrindo um estetoscópio colocado sobre o trajeto da artéria humeral. No estetoscópio, que permite identificar o regime do caudal sanguíneo nos vasos arteriais do braço, podem obter-se os valores das pressões sistólica (máxima) que varia de 100 a 140 mmHg e diastólica (mínima) que varia de 60 a 90 mmHg.

Quando a pressão na almofada é tornada superior à pressão máxima que ocorre na artéria, esta colapsa totalmente, não ocorre caudal, não se ouvindo qualquer ruído no estetoscópio, Fig. IV.88-a).

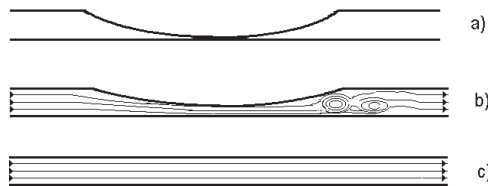


Fig. IV.88 - Efeito da almofada insuflada na artéria humeral: a) A pressão na almofada é superior à pressão sistólica na artéria b) A artéria, quase totalmente colapsada, permite a passagem de jactos de sangue, durante os picos de pressão sistólica. c) Deixa de haver obstáculo à passagem de sangue na artéria.

Baixando lentamente a pressão da almofada, por meio de uma válvula regulável, atinge-se um valor em que a artéria, quase totalmente colapsada, permite a passagem de jactos de sangue, durante os picos de pressão sistólica (cerca de 13 cmHg), Fig. IV.88-b). A passagem de este sangue a alta velocidade produz sons de turbulência perfeitamente audíveis através do estetoscópio (Fig. IV.87).

Baixando mais a pressão da almofada, atingem-se valores em que o ruído se torna praticamente inaudível, acabando por desaparecer. Nesta altura, deixa de haver obstáculo à passagem de sangue na artéria, Fig. IV.88-c). A pressão correspondente à altura em que deixa de se ouvir qualquer ruído é a diastólica (cerca de 8 cmHg).

O esfigmomanómetro mede a pressão em relação à pressão atmosférica com uma precisão de  $\pm 0,5$  cmHg.

As pressões medidas na artéria humeral são aproximadamente iguais à pressão aórtica, pois não há praticamente desnível que introduza uma diferença de pressão hemostática e a energia cinética é muito pequena quando comparada com a energia de pressão.

Para avaliar o efeito da variação da área da secção no número de Reynolds, consideremos um vaso, suposto horizontal, com uma estrangulamento, como se observa na Fig. IV.89.

Sejam  $v_1$  e  $A_1$  e  $v_2$  e  $A_2$  as velocidade do líquido e a área da secção recta do tubo respectivamente nos pontos 1 e 2. A relação entre as velocidades do líquido nestes pontos é

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \quad \text{IV.108}$$

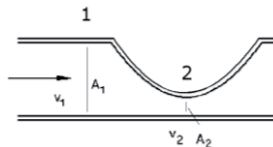


Fig. IV.89 – Estrangulamento com redução da área de secção recta do vaso de  $A_1$  para  $A_2$ .

onde  $d_2$  é o diâmetro de um tubo cilíndrico de área de secção recta igual a

**A<sub>2</sub>**. Se, por exemplo,  $d_1$  se reduzir de um factor  $1/n$  ou seja  $d_2 = d_1/n$  a Eq. 108 mostra que

$$v_2 = n^2 v_1 \quad \text{IV.109}$$

ou seja a velocidade aumenta de  $n^2$  vezes. O número de Reynolds antes e após a redução é,

$$Re_1 = \frac{\bar{v}_1 d_1 \rho}{\eta}$$

e

$$Re_2 = \frac{n^2 \bar{v}_1 \rho d_1/n}{\eta}$$

Donde

$$Re_2 = n Re_1 \quad \text{IV.110}$$

O número de Reynolds aumenta por um factor que é o inverso do factor de redução.

#### IV.9.4 – Colchão de água

É um saco de um plástico muito maleável, com a forma de um colchão vulgar e cheio de água. Quando uma pessoa se deita, molda-se ao seu corpo e as pressões exercidas nos diferentes pontos de contacto correspondem praticamente às pressões na água ao mesmo nível, como  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , da Fig. IV.90. Isto significa que a força de reacção ao peso do corpo é decomposta em pequenas forças, aplicadas num conjunto muito grande de pontos de contacto, e não somente em alguns, com elevadas forças de reacção locais, como acontece nos colchões ordinários. No colchão de água, cada força é igual ao produto pressão a um dado nível vezes a área de contacto a esse nível.



Fig. IV.90 - Colchão de água.

A grande vantagem do colchão de água ocorre nos longos períodos de



acamação. A distribuição dos pontos de contacto evita a formação de úlceras, como ocorre nos colchões de outros tipos, com grandes forças a actuar sempre nos mesmos pontos do corpo.

#### IV.9.5 - Teste de Queckensted

Num indivíduo normal, a pressão no líquido céfalo-raquídeo é de 5 a 20 cm de água, podendo ser mais elevada em situações patológicas, como nas doenças infamatórias do sistema nervoso. A pressão venosa no cérebro é de cerca de 80 mmHg.

Por compressão das veias jugulares, diminui o caudal sanguíneo cerebral e aumentam as pressões venosa, endocranial e intraespinal. Se não houver bloqueios, a pressão no líquido céfalo-raquídeo deve subir a este valor. A não ocorrência de subida é indicativa de obstrução.

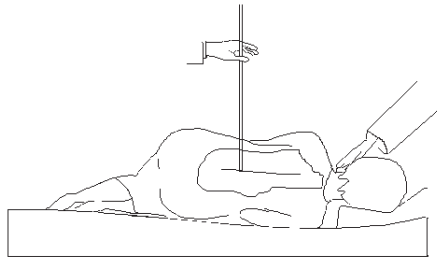


Fig. IV.91 - Teste de Queckensted - As veias do pescoço são comprimidas diminuindo o caudal sanguíneo cerebral e aumentando a pressão venosa. Se não houver bloqueios, a pressão venosa é transmitida ao líquido céfalo-raquídeo, aumentando o seu valor.

#### IV.17.6 - Lei de Stokes

Consideremos uma esfera de raio  $r$  a deslocar-se com velocidade  $\vec{v}$  num líquido de viscosidade  $\eta$ . A força de fricção que é exercida sobre a esfera, pelo líquido, é proporcional à velocidade da esfera, tem a sua direcção e sentido contrário. Para o caso de um líquido homogéneo, a inten-

sidade da força de fricção  $\mathbf{f}$  é também directamente proporcional ao coeficiente de viscosidade do líquido e ao raio da esfera, ou, mais exactamente,

$$f = 6 \pi \eta r v \quad \text{IV.111}$$

O movimento de um corpo esférico mais denso que um líquido de viscosidade  $\eta$ , onde cai, livremente é determinado pela acção simultânea do peso ( $\mathbf{P}$ ), impulsão ( $\mathbf{I}$ ) e força de fricção ( $\mathbf{f}$ ), ou seja,

$$P = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_s g \quad I = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_\ell g \quad \text{e} \quad f = 6 \pi \eta r v = k v \quad \text{IV.112}$$

onde  $\rho_s$  e  $\rho_\ell$ , (com  $\rho_s > \rho_\ell$ ) são, respectivamente, as massas volúmicas do sólido e líquido,  $g$  a aceleração da gravidade e  $k = 6\pi\eta r$ .

A força resultante a actuar na esfera é:

$$f_t = P - I - f \quad \text{IV.113}$$

Como as parcelas  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{I}$  são constantes e a força de fricção  $\mathbf{f}$  aumenta com o aumento de  $v$ , irá atingir-se um instante em que  $f_t = 0$ , ou seja,  $P - I = f$ . A partir deste instante, a força resultante a actuar na esfera é nula, pelo que o seu movimento será uniforme e rectilíneo. A última igualdade, para  $f_t = 0$ , pode escrever-se na forma

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_s - \rho_\ell) g = 6 \pi \eta r v_M \quad \text{IV.114}$$

O valor da velocidade máxima atingida pela esfera, na sua queda, é o valor constante da velocidade do movimento uniforme, ou seja,

$$v_M = \frac{2r^2}{9\eta} (\rho_s - \rho_\ell) g \quad \text{IV.115}$$

Como varia  $v$  até ser atingido o valor  $v_M$ ?

No tempo anterior ao movimento uniforme temos:

$$f_t = m a = m \frac{dv}{dt} = P - I - kv$$

ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = P - I \tag{IV.116}$$

que é uma equação diferencial, cuja solução é

$$v = \frac{P - I}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \tag{IV.117}$$

#### IV.9.7 - Pressão do soro num sistema

Consideremos o sistema para injeção de soro como se esquematiza na Fig. IV.92. Supõe-se a superfície do soro em contacto com o ar à pressão atmosférica  $P_o$ , através de uma agulha, a massa volúmica da solução a injectar  $\rho$ , a pressão venosa  $P_v$  e a altura do líquido  $h$ . A pressão no líquido à entrada do vaso é

$$P_e = P_o + h \rho g - P_v \tag{IV.118}$$

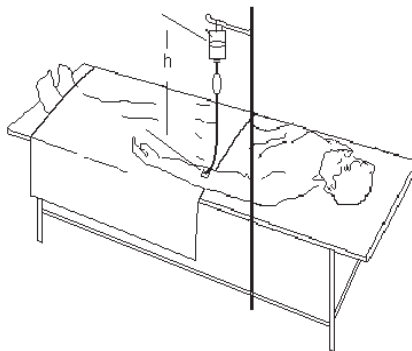


Fig. IV.92 - Sistema de soro.

---

#### IV.9.8 - Perfis dos caudais no transporte dos gases na respiração

Na traqueia, brônquios e nas primeiras gerações de bronquíolos o regime do caudal aéreo é turbulento.

Nas gerações seguintes, para uma ventilação de  $0,5 \text{ L s}^{-1}$ , da geração 4 à 15, o número de Reynolds situa-se entre 2 e 600 e o caudal diz-se "nominalmente" laminar.

Nos bronquíolos seguintes, onde o número de Reynolds se torna menor que 1, a velocidade de deslocamento das moléculas, devido ao arrastamento, fica muito pequena, atingindo ordens de grandeza da velocidade devida à difusão molecular.

Na região "nominalmente" laminar, um caudal verdadeiramente parabólico nunca chega a ser atingido.

Devido à presença de bifurcações, a distância de transição nunca atinge comprimentos consideráveis e o perfil parabólico não se estabelece. Além disso, as eventuais distorções não são dissipadas antes das bifurcações seguintes. Interessa-nos ver como se estabelece o regime laminar num tubo cilíndrico sem bifurcações, onde há variações no perfil de velocidades até se estabelecer o regime laminar. No dispositivo da Fig. IV.93 o líquido no ponto **0**, início do tubo horizontal **H**, de secção constante, é sujeito à pressão, mantida constante, resultante da diferença de nível entre a superfície livre do líquido em **A** e o tubo **H**. O tubo **H** é atravessado por um caudal constante **F** que supomos ser, pelo menos a partir de certa distância a **0**, em regime laminar. Quando se tem caudal em regime laminar num tubo cilíndrico horizontal de secção constante, a pressão diminui linearmente com o comprimento do tubo percorrido pelo líquido. No caso da Fig. IV.93, a curva **C** que une as leituras dos manómetros, situados a diversas distâncias em **H**, mostra que a função pressão/comprimento, só é linear a partir do ponto 4. No ponto 1 próximo do início do tubo (Fig. IV.93), o líquido mantém-se imóvel, junto à parede e ocorre, para pequenas distâncias desta, um elevado gradiente de velocidade. Este gradiente mantém-se até ser atingido uma distância radial a partir da qual as partículas se movem com igual velocidade sendo o perfil de velocidades como se vê em **1** da Fig. IV.93.

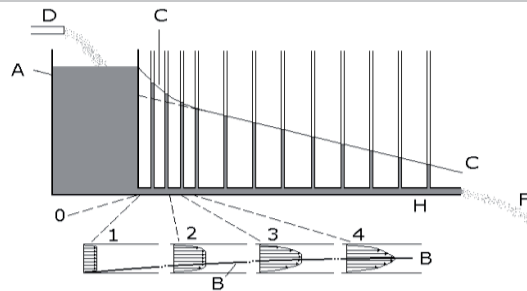


Fig. IV.93 - Limite da camada de transição.

A região de elevado gradiente de velocidade vai aumentando com o deslocamento do líquido no tubo. O líquido em contacto com a parede do tubo mantém-se imóvel devido à acção da adesão sólido-líquido mas sujeito a tensão tangencial. As partículas do fluido contíguas às partículas retidas na parede são obrigadas a deslocar-se mais lentamente, devido a forças de coesão entre as partículas líquidas. Este efeito é transmitido a regiões cada vez mais afastadas da parede à medida que o líquido progride no tubo.

Desde a entrada do tubo até se estabelecer o parabolóide das velocidades, a velocidade em cada ponto (à excepção da parede) aumenta até ser atingido equilíbrio entre forças de pressão e de fricção.

Chama-se camada de transição (boundary layer) à região, antes da estabilização, onde ocorre tensão de corte, tornando a velocidade uma função da distância à parede (Região entre a curva **B** e a parede inferior do tubo na Fig. IV.93). A largura da camada de transição é uma função da viscosidade cinemática do líquido, da distância e da velocidade na parte plana do perfil, a essa distância.

Foi determinada experimentalmente a distância requerida para o perfil de velocidades atingir a forma parabólica estacionária (ponto 4), dada por

$$X = 0,03 d Re$$

IV.119

onde **d** é o diâmetro do tubo e **Re** o número de Reynolds.

A maior inclinação da curva **C** no início do tubo mostra que é necessária mais energia por unidade de comprimento do tubo, utilizada para acelerar o líquido.

Partindo dos perfis de velocidade pode calcular-se a dissipação de

energia ocorrendo, durante a inspiração, nas vias respiratórias.

Exprimiram a resistência ao caudal viscoso nas vias respiratórias em termos da sua relação com a resistência esperada para o caudal laminar.

$$Z = \frac{R_{aw}}{R_l} = 0,33 \left( Re \frac{d}{\ell} \right)^{1/2} \quad \text{IV.120}$$

onde  $R_{aw}$  é a resistência observada nas vias respiratórias ao caudal viscoso,  $R_l$  a resistência esperada se o caudal fosse laminar (Poiseuille),  $d$  o diâmetro médio para uma dada geração,  $\ell$  o comprimento médio para uma dada geração e  $Re$  o número de Reynolds.

Esta equação é aplicável ao regime turbulento se  $\dot{V}$  não exceder  $6 \text{ L s}^{-1}$ . A resistência ao caudal viscoso nas vias respiratórias depende da velocidade das partículas, visto depender de  $Re$ . De acordo com a formula anterior, as maiores perdas de pressão ocorrem nas gerações de 0 a 6.

A máxima resistência ocorre na quarta geração ( $0,004 \text{ KPa L}^{-1}\text{s}$  e  $0,012 \text{ K Pa L}^{-1}\text{s}$  para caudais respectivamente de  $0,2$  e  $1,7 \text{ L}^{-1}$ )<sup>3</sup>. (Para gerações superiores à décima primeira a resistência torna-se menor do que  $0,001 \text{ K Pa L}^{-1}\text{s}$  para aqueles caudais).

O caudal na traqueia e vias aéreas superiores apresenta movimentos secundários e remoinhos que se propagam até à 3ª geração. As perdas de energia são duas a três vezes maiores do que ocorreria se o regime fosse laminar.

#### IV.9.9 - Equilíbrio num tubo elástico

Vamos considerar o equilíbrio entre forças de pressão (normais) e elásticas (tangenciais) num tubo elástico (Ver Figs. IV.67, IV.68 e IV.69).

Consideremos que  $P' = P - P_0$ . Para um ângulo  $\theta$  qualquer, suponhamos um pequeno acréscimo  $d\theta$ , definindo um arco  $d\ell$  e o elemento de superfície  $dS$  por ele limitado no anel de tubo elástico. A área do elemento de superfície  $dS$ , em  $\text{cm}^2$ , é  $d\ell$  vezes 1, ou seja  $d\ell \text{ cm}^2$ . Podemos obter  $dS$  em função de  $\theta$ :

<sup>3</sup> Como  $\Delta P = R_H \dot{V}$  se  $\dot{V}$  estiver em  $\text{L s}^{-1}$  e  $\Delta P$  em Pa vem  $R_H$  em  $\text{K Pa L}^{-1}\text{s}$ .  
1 Pascal =  $1 \text{ N m}^{-2}$ ; 1 Pa =  $0,981 \text{ cm H}_2\text{O}$ ; 1 KPa =  $98,1 \text{ cm H}_2\text{O} = 10^3 \text{ N m}^{-2}$

$$dS = d\ell \times 1 = R d\theta \quad \text{pois} \quad d\ell = R d\theta$$

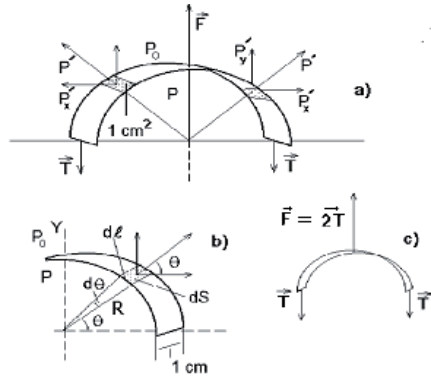


Fig. IV.94 - Forças em equilíbrio num tubo elástico.

A força de pressão a actuar no elemento  $dS$  é

$$df_p = P' dS = P' R d\theta \quad \text{IV.121}$$

Só estamos interessados nas componentes, segundo os  $yy$  das forças  $df_p$  pois as componentes segundo os  $xx$ , devido à simetria do sistema, anulam-se, ou seja, interessa-nos

$$df_{py} = df_p \sin \theta = P' R \sin \theta d\theta \quad \text{IV.122}$$

A soma das componentes, segundo os  $yy$  para todos os elementos de superfície quando  $\theta$  varia de 0 a  $\pi/2$ , é

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} &= \int_0^{\pi/2} P' r \sin \theta d\theta = P' R \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &= P' R \quad \text{IV.123} \end{aligned}$$

**IV.9.10 - Energia armazenada nos materiais elásticos**

É necessário executar trabalho para deformar um corpo elástico. Estes corpos retomam a forma inicial após a actuação das forças que produziram o trabalho de deformação. Isto verifica-se quando a intensidade da força não ultrapassa determinado valor, a partir do qual são introduzidas alterações permanentes na estrutura do material.

O trabalho realizado na tracção de uma tira de material elástico pode ser determinado a partir da curva da força elástica de reacção da tira  $F_e$  em função do aumento de comprimento  $a$ . A partir de um certo aumento de comprimento a função deixa de ser linear (Fig. IV.95).

Dividindo o aumento de comprimento  $a_i$  em  $n$  pequenos intervalos de comprimento  $\Delta a_i$ , o trabalho realizado pela força elástica é, para cada intervalo,  $F_e \Delta a_i$ . O trabalho total realizado é

$$W = \sum_{i=1}^n F_e \Delta a_i$$

que corresponde à área total limitada pela curva.

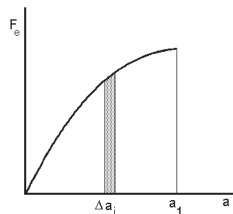


Fig. IV.95 - A área subentendida pela curva é o trabalho realizado na deformação de uma tira de material deformável.

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_e \Delta a_i = \int_0^{a_1} F_e da \tag{IV.104}$$

No gráfico anterior não se verifica a lei de Hooke, a não ser para deformações muito pequenas. Em geral, esta é a situação dos materiais elásticos dos sistemas biológicos.



Se a força de tracção deixa de actuar, o material retoma a forma inicial, contudo os valores de  $F_e$  observados para os diferentes valores de  $a$  não coincidem com os anteriores situando-se mais baixo. O trabalho realizado pelas forças elásticas é menor quando a tira retoma a forma inicial, sendo a diferença a área escura da Fig. IV.96.

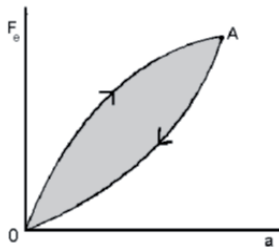


Fig. IV.96 - Ciclo de histerese mecânica.

Isto constitui um ciclo de histerese mecânica. A diferença entre os trabalhos executados pelas forças elásticas de  $0$  para  $A$  e vice versa, corresponde à energia dissipada, para vencer forças de fricção.

#### IV.9.11 - Medição da pressão intravascular através da deformação de membranas

Os sistemas de medição da pressão intravascular do tipo “strain-gauge”, que significa medidor de deformação, consistem, na sua versão mais corrente, de uma cânula (ou cateter) de secção constante que comunica, através de um tubo com líquido, com uma câmara isolada por uma membrana elástica (Fig. IV.97).

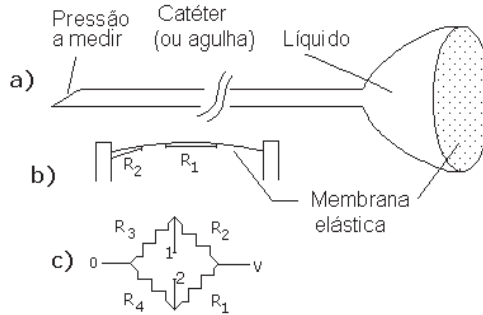


Fig. IV-97 - Esquema de um sistema de medição da pressão intravascular.

A esta membrana, ou diafragma, encontram-se ligados fios cuja resistência eléctrica depende da tensão mecânica a que estão sujeitos. Os transdutores “strain-gauge” são assim utilizados para transformar um esforço mecânico num sinal eléctrico. Os movimentos do diafragma esticam ou relaxam os fios, variando a tensão a que estes estão sujeito. É fácil de analisar este efeito. A resistência  $R$  de um condutor filiforme de comprimento  $\ell$ , secção recta  $S$  e resistividade  $\rho$  é dada por

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad \text{IV.125}$$

e a deformação produz variações, pelo menos em dois parâmetros, na Eq. IV.125.

Um inconveniente do método reside no facto da resistividade  $\rho$  ser uma função sensível e crescente da temperatura. É necessário minimizar esta causa de erro utilizando ligas metálicas com coeficientes de temperatura baixos ou corrigir o efeito da temperatura por outro método. Utilizando quatro fios no diafragma, sujeitos, dois a dois, a esforços opostos de tracção e de compressão e que constituem elementos distintos de uma ponte de medida é possível anular o efeito de temperatura (Fig. IV.97 b) e c)). Os esforços opostos sobre os fios conseguem-se colocando estes, central (compressão) ou periféricamente (tracção). Com o aumento de pressão na membrana,  $R_1$  relaxa e  $R_2$  sofre tracção, assim como sucede com  $R_2$  e  $R_4$  respectivamente, não visíveis na Fig. IV 97 b).

Considerando que o volume  $V$  dos fios pode supor-se constante

quando ocorre deformação,  $S$  é função de  $\ell$  através da equação

$$S = \frac{V}{\ell} \quad \text{IV.126}$$

Substituindo o valor de  $S$  na Eq. IV.125 derivando e dividindo ambos os membros da igualdade por  $R$ , obtém-se

$$\frac{dR}{R} = 2 \frac{d\ell}{\ell} \quad \text{IV.127}$$

A variação relativa da resistência do fio é duas vezes a variação relativa do seu comprimento, ou seja, a relação sinal ruído da quantidade a medir é dupla da resultante da acção mecânica. As variações na resistência de fios são rigorosamente medidas por meio de uma ponte de medida (ponte de Wheatstone), de que os fios são elementos resistivos, sendo o valor da pressão obtido através de uma calibração prévia.

É utilizado um factor de medição definido por  $G = (\frac{dR}{R})/(\frac{d\ell}{\ell})$  que traduz a sensibilidade do método.

Além dos sistemas de strain gauge outros processos são presentemente utilizados para medir a deformação da membrana como, por exemplo, os materiais piezoeléctricos.

#### IV.9.12 - Medição do caudal sanguíneo

Em experiência animal, o caudal sanguíneo foi inicialmente medido usando técnicas que envolviam a medição directa do volume de sangue escoado, durante um certo tempo, para recipientes graduados. É evidente que métodos bastante mais indirectos são desejáveis para aplicação no homem e dois métodos, relativamente recentes, permitem a medição do caudal sanguíneo com boa precisão. São os métodos ultrassónico e electromagnético.

No método ultrassónico, mais usado que o segundo, é aproveitada a variação da frequência dos ultrassons, por efeito Doppler, resultante da reflexão num meio que se desloca, com certa velocidade.

Em termos gerais o efeito Doppler resulta do facto da frequência de emissão dos ultrassons, quando o emissor se encontra em movimento em relação ao meio de propagação, ser detectada com valores diferentes por

qualquer detector imóvel no meio. De um modo geral, desde que haja movimento relativo entre emissor e detector o fenómeno é verificado.

A variação entre as frequências emitida e detectada depende da velocidade de propagação do som no meio e da velocidade de deslocamento do emissor. Se a direcção de propagação da onda coincidir com a direcção da velocidade do emissor, verifica-se a relação

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{v}{c} \quad \text{IV.128}$$

onde  $F$  é a frequência e  $\Delta F$  a sua variação,  $c$  a velocidade de propagação dos ultrassons e  $v$  a velocidade de deslocamento do emissor. A variação  $\Delta F$ , ou frequência de Doppler, é positiva se os sentidos de  $c$  e  $v$  (ou da projecção de  $v$  na direcção de  $c$ ) forem o mesmo. Tudo se passa como se a velocidade de propagação dos ultrassons ficasse maior, quando estes se deslocam no sentido do movimento, parecendo a frequência maior ao detector.

Na medição do caudal sanguíneo é usado um sistema constituído por um emissor e um receptor de ultrassons, que se pode aplicar externamente, em contacto com a pele, utilizando uma pasta apropriada de modo a evitar a presença de ar no percurso dos ultrassons (Fig. IV.98 a)).

Um feixe de ondas ultrassonoras de frequência  $F_i$  é emitido diagonalmente em relação ao caudal sanguíneo por um cristal de titanato de Ba. O feixe de ultrassons é reflectido pelos glóbulos vermelhos em movimento com frequência  $F_o$ , diferente da emitida e é recebido pelo outro cristal (receptor). Imediatamente um segundo feixe é emitido pelo segundo cristal e a componente reflectida recebida pelo primeiro.

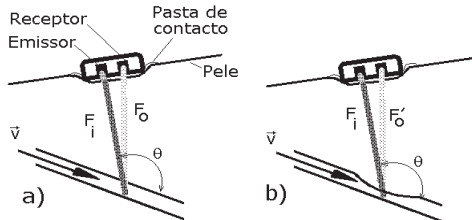


Fig. IV.98 - É possível avaliar o caudal de sangue que percorre um vaso usando um sistema constituído por um emissor e um receptor de ultrassons, que se pode aplicar externamente. Em b) a velocidade do sangue é maior do que em a) pelo que a frequência reflectida é maior.

A velocidade média do caudal é calculada a partir da diferença entre os tempos de transmissão no sentido da corrente e da contra corrente. Os impulsos são enviados alternadamente cerca de 400 vezes por segundo.

No caso da Fig. IV.99, como as direcções das velocidades  $v$  e  $c$  fazem um ângulo de  $\pi-\theta$ , vem

$$\frac{\Delta F}{F_i} = \frac{v \cos(\pi-\theta)}{c} \quad \text{IV.129}$$

O fluxómetro Doppler tem vastas e importantes aplicações clínicas nomeadamente nos estudos da circulação periférica (detecção de estenoses), função cardíaca, doenças da artéria carótica, circulação hepática etc. As aplicações pediátricas são também de grande interesse.

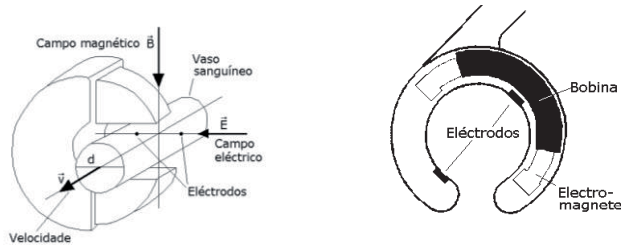


Fig. IV.99 - Princípio e aspecto do fluxómetro electromagnético

O fluxómetro ou debitómetro electromagnético é baseado na propriedade de ser gerado um campo eléctrico quando um líquido condutor (como por exemplo o sangue) se move num campo magnético  $\vec{B}$ . Isto é uma consequência da lei de Laplace do electromagnetismo que diz que a força eléctrica  $\vec{F}$  produzida sobre uma partícula de carga  $e$  a deslocar-se com velocidade de  $\vec{v}$  num campo magnético  $\vec{B}$  é dada por

$$\vec{F} = e \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{IV.130}$$

com  $\times$  a significar produto vectorial. Ou seja, é gerado um campo eléctrico, que se supõe uniforme

$$\vec{E} = \vec{F}/e \quad \text{IV.131}$$

perpendicular ao campo magnético  $\vec{B}$  e à velocidade  $\vec{v}$ .

No debitómetro electromagnético (Fig. IV.99) são colocados dois eléctrodos de medida, em contacto com o vaso, enquanto é aplicado um campo magnético perpendicular à direcção do caudal. Os eléctrodos encontram-se numa linha perpendicular ao campo magnético e ao caudal no vaso, que supomos de diâmetro  $d$ . Estes eléctrodos registam uma diferença de potencial  $\Delta V = Ed$  cujo valor é proporcional à velocidade média do líquido  $\bar{v}$  (Fig. IV.99). Usando a relação  $\bar{v} S = \dot{Q}$  temos

$$\Delta V = d B \bar{v} = 4B\dot{Q} / \pi d \quad \text{IV.132}$$

donde o caudal, vem

$$\dot{Q} = \frac{\pi d \Delta V}{4 B} \quad \text{IV.133}$$

Esta técnica só tem aplicação prática durante o decurso de intervenções cirúrgicas, uma vez que o dispositivo da Fig. IV.99 necessita de ter o vaso exposto para a realização das medidas.

Factores como a espessura dos vasos, hematócrito, propriedades eléctricas do meio exterior, não uniformidade do campo magnético e o estabelecimento de correntes de indução durante as medições têm de ser tomados em conta para a obtenção de resultados quantitativos com o presente método. As aplicações mais importantes desta metodologia situam-se nas áreas das cirurgias cardíaca, vascular, abdominal e neurológica.

#### IV.9.13- Variação da pressão em tubos por acção de estrangulamentos

Considere-se um tubo cilíndrico  $T$  de raio  $r_M$  percorrido por um caudal líquido e admitamos que se efectuou um estrangulamento no tubo que reduziu o raio de forma linear até  $r_0$  como se observa na Fig. IV.100. A variação do raio de  $r_M$  a  $r_0$  ocorre na distância  $b$  à esquerda e à direita do raio mínimo e com uma inclinação da parede dada por  $a = \frac{r_M - r_0}{b}$ . Vamos supor ainda que o regime do caudal líquido no tubo é laminar com e sem o estrangulamento e que as pressões em jogo não originam deformação apreciável nos vasos em estudo.

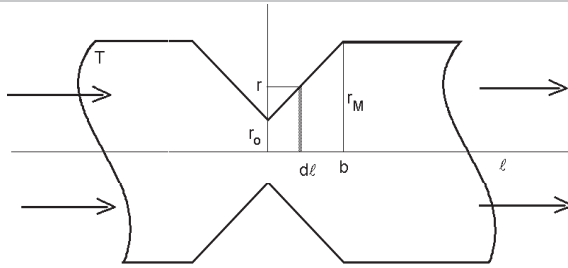


Fig. IV.100 - Tubo cilíndrico  $T$  de raio  $r_M$  percorrido por um caudal líquido onde se efectuou um estrangulamento que reduziu o raio de forma linear até  $r_o$  na distância  $b$ .

Supondo que a viscosidade relativa do líquido é  $\eta$  a resistência hidrodinâmica  $dR$  no elemento do tubo de comprimento  $d\ell$  é, considerando a fórmula de Poiseuille,

$$dR = \frac{k}{r^4} d\ell \quad \text{com} \quad k = \frac{8\eta}{\pi}, \quad r = r_o + a\ell$$

e

$$a = \frac{r_M - r_o}{b}$$

A Fig. IV.101 permite compreender melhor as igualdades apresentadas acima.

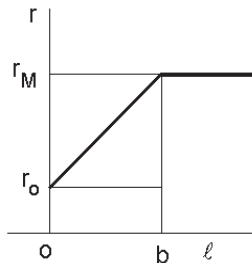


Fig. IV.101 - A variação do raio de  $r_M$  a  $r_o$  ocorre na distância  $b$  de modo linear com inclinação da parede igual  $a = (r_M - r_o) / b$ .

A resistência hidrodinâmica no comprimento de tubo entre **0** e **b** é

$$R = k \int_0^b \frac{1}{r^4} d\ell$$

ou

$$= k \int_0^b \frac{1}{(r_0 + a\ell)^4} d\ell = k \left[ \frac{(r_0 + a\ell)^{-3}}{-3a} \right]_0^b$$

donde

$$R = \frac{k}{3a} \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_M^3} \right).$$

Finalmente, a resistência do tubo para o comprimento **2b** do estrangulamento é

$$R_e = \frac{2k}{3a} \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_M^3} \right) = \frac{2kb}{3(r_M - r_0)} \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_M^3} \right) \quad \text{IV.134}$$

Sem o estrangulamento, a resistência hidrodinâmica correspondente ao comprimento **2b** de tubo de raio **r<sub>M</sub>** é

$$R_s = \frac{2kb}{r_M^4} \quad \text{IV.135}$$

Consideremos, como exemplo de aplicação que  $r_M = 1$  cm,  $r_0 = 0,2$  cm e  $b = 1$  cm. Então

$$R_e = [2k / (3 \times 0,8)] [1/0,2^3 - 1] = 103,3 k$$

$$R_s = 2k$$

e

$$R_e/R_s = 51,6$$



Ou seja, no trajecto **2b** o estrangulamento produziu um aumento de resistência hidrodinâmica correspondente ao factor 51,6. Considerando que o caudal não era afectado pelo estrangulamento, a relação entre as quedas de pressão para o mesmo trajecto, teria o mesmo valor.

Para  $r_o = 0,1$  cm e mantendo as outras quantidades  $R_e = 740$  k e  $R_e/R_s = 370$ .

Suponhamos agora uma outra situação É introduzida uma cânula de comprimento **2b**, cilíndrica, de raio  $r_o$  no tubo de raio  $r_M$ .

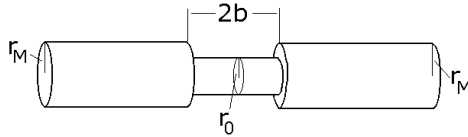


Fig. IV.102 - Cânula de comprimento **2b**, cilíndrica, de raio  $r_o$  no tubo de raio  $r_M$ .

Neste caso

$$R_e = \frac{2 k b}{4 r_o}$$

e

$$R_s = \frac{2 k b}{4 r_M}$$

Então

$$\frac{R_e}{R_s} = \frac{r_M^4}{r_o^4}$$

Consideremos a situação onde  $r_M = 1$  cm,  $r_o = 0,4$  cm e  $b = 2$  cm

$$\begin{aligned} \frac{R_e}{R_s} &= 2,5^4 \\ &= 39,1 \end{aligned}$$

---

Se  $r_M = 1 \text{ cm}$ ,  $r_0 = 0,2 \text{ cm}$  e  $b = 2 \text{ cm}$

$$\frac{R_e}{R_s} = 625$$

Se  $r_M = 1 \text{ cm}$ ,  $r_0 = 0,1 \text{ cm}$  e  $b = 2 \text{ cm}$

$$\frac{R_e}{R_s} = 1\ 000 \quad \text{IV.136}$$

Se o caudal não variar, a relação entre as pressões é idêntica à relação entre as resistências hidrodinâmicas.

Se o regime passar a turbulento, a queda de pressão por unidade de comprimento é,

$$\frac{\Delta P}{\ell} = \frac{k_0 F^2}{r^5} \quad \text{IV.137}$$

para o regime laminar a perda de pressão por unidade de comprimento é

$$\frac{\Delta P}{\ell} = \frac{8 \eta F}{\pi r^4} \quad \text{IV.138}$$

Na comparação das equações acima, para valores pequenos de  $r$  e para um caudal  $F$  constante, estes parâmetros contribuem para aumentar o valor de  $\frac{\Delta P}{\ell}$  caudal de regime turbulento. Os valores da constante  $k_0$  para sangue, nos vasos sanguíneos e para o intervalo de valores de número de Reynolds plausível nas circunstâncias, leva a aceitar que se tenha

$$k_0 > 8 \eta \quad \text{IV.139}$$

Nestas circunstâncias a queda de pressão no estrangulamento deverá ser ainda maior do que no caso do regime se manter laminar.

---

**IV.9.13.1 - Variação da pressão por acção de estrangulamentos em sistemas em paralelo**

Consideremos o sistema constituído por dois ramos com origem comum à pressão  $P_0$ , percorridos por caudais  $I_1$  e  $I_2$  tendo pressões extremas  $P_1$  e  $P_2$ . Suponhamos que o sistema é alimentado em modo "fonte de corrente" de tal modo que se é introduzida a resistência  $R$ , à saída da fonte,  $P_0$ ,  $I_1$  e  $I_2$  não sofrem alteração (Fig. IV.103). Só as pressões extremas  $P_1$  e  $P_2$  serão alteradas, sendo

$$P_1 - P'_1 = P_2 - P'_2 = R (I_1 + I_2)$$

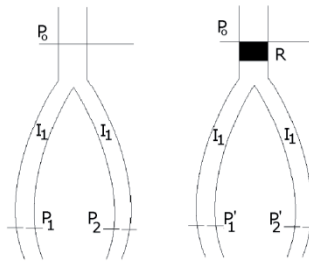


Fig. IV.103 - Sistema constituído por dois ramos com origem comum à pressão  $P_0$ , percorridos por caudais  $I_1$  e  $I_2$  antes e após a introdução da resistência  $R$ .

**IV.9.14 - Impedância dos vasos sanguíneos**

Já considerámos algumas analogias entre o caudal estacionário, em regime laminar através de tubos cilíndricos e a corrente contínua num condutor filiforme. Neste regime de caudal, a diferença de pressão nos extremos de um tubo horizontal de raio  $r$  e comprimento  $\ell$ , percorrido por um caudal constante  $F$  de um líquido com viscosidade  $\eta$ , é dado pela conhecida fórmula de Poiseuille

$$\Delta P = \frac{8 \eta \ell}{\pi r^4} F \tag{IV.140}$$

ou

$$\Delta P = R_H F \tag{IV.141}$$

onde  $R_H$  é uma constante.

Um análogo do sistema anterior é o condutor filiforme de resistência

eléctrica  $R$  percorrido por uma corrente contínua. A lei de Ohm relaciona a diferença de potencial eléctrico nos terminais do condutor com a corrente eléctrica através dele

$$\Delta V = R I \quad \text{IV.142}$$

Por analogia com a equação anterior o termo  $R_H = \frac{8 \eta \ell}{\pi r^4}$  na Eq. IV.121 é a resistência hidrodinâmica.

Ao estabelecermos a analogia entre as Eqs. IV.141 e IV.142 estamos a considerar como análogos a corrente eléctrica e o caudal do líquido, a diferença de potencial eléctrico e a diferença de pressão no tubo e, indirectamente, a carga eléctrica e o volume de líquido.

Mas estas analogias podem ser estendidas a outras situações. Já vimos que facilmente se mostra que as regras para se obterem as resistências equivalentes de associações em série e em paralelo, de resistências hidrodinâmicas, são sobreponíveis às aplicáveis às resistências eléctricas. Além disso, um gerador de pressão (bomba) tem, também, como análogo eléctrico, uma bateria ou um gerador de potência eléctrica.

Tais semelhanças entre hidrodinâmica e electrodinâmica deixa-nos prever a possibilidade de tratar circuitos hidrodinâmicos de modo análogo aos circuitos eléctricos.

O circuito hidrodinâmico da Fig. IV.104, contém uma bomba  $B$  em série com uma resistência hidrodinâmica  $R_H$ . A bomba gera a diferença de pressão  $P_1 - P_2$  constante nos seus extremos e consequentemente nos terminais da resistência originando o caudal  $F = \frac{\Delta P}{R_H}$ . Este circuito é análogo a um circuito de corrente eléctrica contínua.

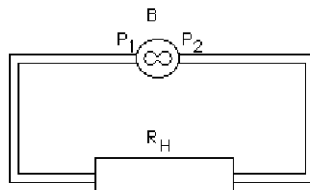


Fig. IV.104 - Circuito hidrodinâmico de caudal constante.

Estas analogias podem ser estendidas aos caudais em regime variável em tubos elásticos.

Tratando-se de um tubo cilíndrico elástico pode estabelecer-se uma relação entre variação de volume e variação de pressão transmural que provocou a primeira.

Esta relação é a complacência ou capacitância do tubo,  $C = \frac{dV}{dP}$  (ver Apêndice IV.9.15).

Pode, também aqui, estabelecer-se uma analogia entre esta quantidade e a capacidade eléctrica de um condutor. As regras para se obterem os valores equivalentes de associações em série e em paralelo de complacências, são sobreponíveis às aplicáveis às capacidades eléctricas. Não esqueçamos, contudo, que a complacência é uma grandeza diferencial já que  $C$  é função da pressão, pelo que uma analogia eléctrica mais flagrante é a da capacidade de uma junção P-N. A capacidade da junção é a relação  $C_{el} = \frac{dQ}{dV}$  com  $dQ$  módulo da carga eléctrica na junção e  $dV$  a diferença de potencial através daquela.

Existe também em hidrodinâmica uma grandeza relacionada com a inductância, o terceiro componente linear da electricidade.

O efeito de inércia associado à energia de um líquido, que se traduz por uma oposição às variações de caudal e que é tanto mais nítido quanto mais rápidas são estas variações, é quantificado pela inertância do líquido. Para uma massa  $m$  de líquido num tubo de secção recta  $S$ , a inertância  $L$  é dada por  $L = \frac{m}{S^2}$  (ver Apêndice IV.9.16).

Quando ocorre uma variação de caudal  $dF$ , no intervalo de tempo  $dt$ , num tubo onde um líquido de viscosidade desprezível se desloca, a diferença de pressão que se opõe à variação de caudal é  $P = L \frac{dF}{dt}$

Num tubo elástico com caudal em regime laminar variável há que considerar simultaneamente a resistência hidrodinâmica, a complacência e a inertância. Nas analogias eléctricas atrás referidas ficou claro que a diferença de potencial eléctrico correspondia à pressão, a corrente eléctrica ao caudal, a carga eléctrica ao volume de líquido, a resistência eléctrica à resistên-

cia hidrodinâmica, etc... Quando o caudal  $F(t)$ , através de cada um dos elementos referidos é sinusoidal, originam-se quedas de pressão sinusoidais nos extremos destes elementos, dadas pelas equações:

$$\text{Resis. hidrodi.} \quad \Delta P_{R_H} = R_H F(t) \quad \text{IV.143}$$

$$\text{Complacência} \quad \Delta P_C = \frac{1}{C} \int F(t) dt \quad \text{IV.144}$$

$$\text{Inertância} \quad \Delta P_L = L \frac{dF(t)}{dt} \quad \text{IV.145}$$

As diferenças de potencial eléctrico com variação sinusoidal no tempo, a que geralmente se chamam tensões alternas, bem como as correntes alternas sinusoidais, são situações de grande interesse em electricidade. A tensão eléctrica de alimentação de que se dispõe, em qualquer lugar, é tensão alterna sinusoidal que pode ser traduzida por uma equação do tipo

$$v(t) = V \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{IV.146}$$

onde  $v(t)$  é o valor instantâneo da tensão,  $V$  o valor máximo ou amplitude,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  é a pulsação ou frequência angular, com  $T$  o período,  $(\omega t + \alpha)$  é a fase da função sinusoidal e  $\alpha$  a fase na origem do tempo.

Quando, na Eq. IV.146,  $\omega t + \alpha = \frac{\pi}{2}$  é  $v(t) = V$ , ou seja, a tensão atinge o seu valor máximo.

Semelhantes propriedades podem considerar-se numa corrente alterna sinusoidal, cuja forma analítica seja

$$i(t) = I \sin(\omega t + \phi) \quad \text{IV.147}$$

Os elementos de um circuito eléctrico que já considerámos: resistência, inductância e capacitância são chamados de lineares porque se uma corrente alterna sinusoidal os atravessa é originada uma diferença de potencial alterna sinusoidal da mesma frequência entre os seus extremos. Na Fig. IV.105 comparam-se casos de comportamentos linear e não linear.

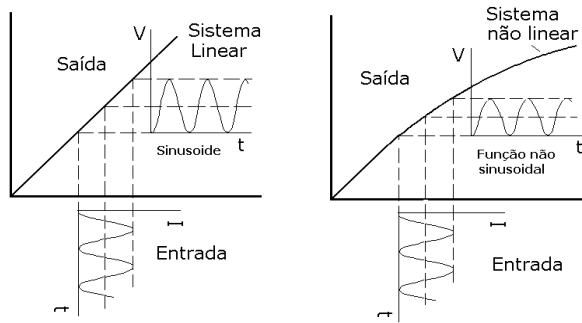


Fig. IV.105 - Comportamento linear (à esquerda) e não linear (à direita).

Analiticamente podem calcular-se as diferenças de potencial nos extremos de qualquer dos referidos componentes quando percorridos por corrente alterna (ver Cap.VII.3.1)

As características de uma tensão ou de uma corrente alterna num circuito, podem representar-se analiticamente, como fizemos acima, mas também por vectores, ou por números complexos.

Apliquemos a representação vectorial à Eq. IV.146: os valores de  $v(t)$  são obtidos supondo um vector de grandeza  $V$  a rodar com velocidade angular  $\omega$ , em sentido directo, em torno do seu ponto de aplicação, situado na origem de um sistema de eixos, e considerando, em cada instante, o valor da função  $v(t)$  a ser dado pela projecção do vector  $V$  sobre o eixo dos  $yy$ .

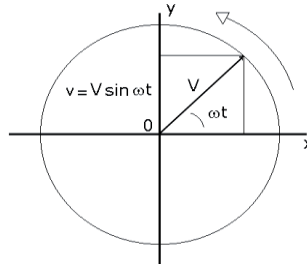


Fig. IV.106 -  $v(t)$  é dado, em cada instante, pela projecção de um vector de grandeza  $V$  (a amplitude da função sinusoidal) a rodar no sentido directo em torno da origem de um sistema de eixos, com velocidade angular  $\omega$ .

Ou seja, se o vector de módulo  $V$ , a rodar no sentido directo em torno da origem, fazia para  $t=0$ , o ângulo  $\phi$  com o sentido positivo do eixo dos  $xx$ , e no instante  $t$ , o ângulo  $(\omega t + \phi)$ , a projecção deste vector sobre o eixo dos  $yy$  é, no instante  $t$ ,  $v(t) = V \sin (\omega t + \phi)$ . A determinação das tensões instantâneas nos extremos da resistência, condensador e bobine utilizando este método estão descritas no Cap.VII.3.1.

O equivalente hidrodinâmico do circuito eléctrico série RLC (resistência, inductância e capacidade), com gerador de corrente sinusoidal, corresponde a uma resistência hidrodinâmica, inertância e complacência associadas em série com uma bomba que produz um caudal de líquido com modulação sinusoidal (Fig. IV.107).

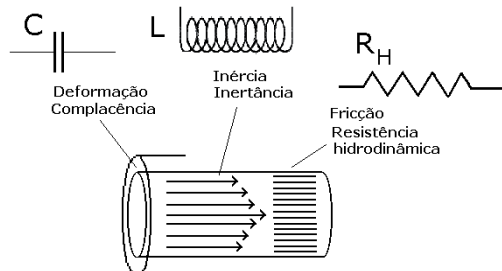


Fig. IV.107 - Os três componentes lineares de um circuito hidrodinâmico.



Um tubo elástico percorrido por um líquido em regime laminar, alimentado em circuito fechado por uma bomba que produza uma variação periódica sinusoidal de pressão, nos extremos do tubo, enquadra-se na situação anterior.

Em Biologia uma modulação sinusoidal do caudal não é comum, mas, se nos lembrarmos de que qualquer modulação periódica pode decompor-se numa soma de modulações sinusoidais com um termo constante, podemos ver o alcance desta analogia. A decomposição em série de Fourier permite, sabendo-se as propriedades das correntes sinusoidais ou, de um modo geral, das funções sinusoidais, estudar quaisquer outras correntes ou funções periódicas, através de uma sobreposição de termos.

Nestas condições a equação para o circuito hidrodinâmico série (resistência hidrodinâmica, complacência e inércia em série), alimentado por uma bomba sinusoidal é:

$$R_H F + L \frac{dF}{dt} + \frac{1}{C} \int F dt = P_0 \sin \omega t \quad \text{IV.148}$$

Onde,  $P_{RH} = R_H F$  é a queda de pressão instantânea, através da resistência hidrodinâmica,  $P_L = L \frac{dF}{dt}$  é a queda de pressão instantânea, através da inércia e  $P_C = \frac{1}{C} \int F dt$  a queda de pressão instantânea, através da complacência.

Também, no caso da hidrodinâmica se tem que:

1. -  $P_{RH}$ , a pressão instantânea nos extremos da resistência hidrodinâmica  $R_H$ , está em fase com o caudal e portanto os seus vectores representativos têm a mesma direcção e sentido. A grandeza de  $P_{RH}$ , amplitude da tensão nos extremos de  $R$ , é  $P_{RH} = R_H F$ .
2. -  $P_C$  a pressão instantânea nos extremos da complacência está desfasada (atrasado), em relação ao caudal  $F$ , de  $-\frac{\pi}{2}$  e, portanto, também em relação à tensão através da resistência. A grandeza de  $P_C$ , amplitude da tensão nos extremos de  $C$ , é  $\frac{F}{\omega C}$ . Os vectores representativos de  $F$  e  $P_C$  têm direcções normais.

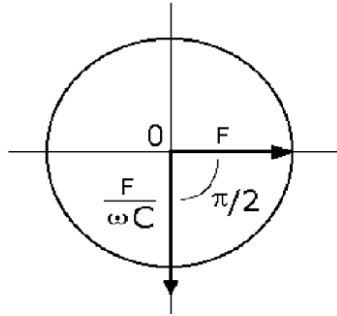


Fig. IV.108 - A tensão entre as placas de um condensador está atrasada de  $\pi/2$  em relação à intensidade da corrente que a percorre e tem amplitude  $\frac{F}{\omega C}$ .

3. -  $P_L$  a pressão instantânea nos extremos da inércia está desfasado (avançado), em relação ao caudal  $F$ , de  $\frac{\pi}{2}$ . A amplitude do vector é  $\omega L F$ . Os vectores representativos de  $F$  e  $P_L$  têm direcções normais entre si.

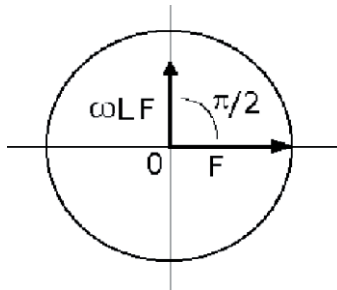


Fig. IV.109 - A tensão através da bobine tem amplitude  $\omega L F$  e está adiantada de  $\pi/2$  em relação à intensidade da corrente que a percorre.

A Eq. IV.128 após derivação, dá

$$L \frac{d^2F}{dt^2} + R_H \frac{dF}{dt} + \frac{F}{C} = \omega P_o \cos \omega t \quad \text{IV.149}$$

A solução desta equação permite obter uma relação escalar do tipo

$$P = Z_H F_0 \quad \text{IV.150}$$

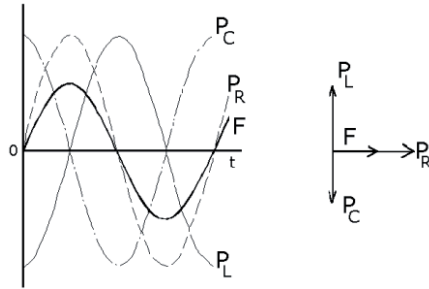


Fig. IV.110 - Representação gráfica das funções  $F$ ,  $P_R$ ,  $P_C$  e  $P_L$ , com o correspondente diagrama vectorial.

Na Eq. IV.150  $P$  e  $F_0$  são, respectivamente, as amplitudes da pressão entre os terminais do circuito e do caudal através do mesmo e  $Z_H$  é o módulo da impedância hidrodinâmica, cujo valor é

$$Z_H = \sqrt{R_H^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{IV.151}$$

O parêntesis, na segunda parcela do radicando, tem as dimensões de resistência hidrodinâmica e é a reatância do circuito. Representa a contribuição dos elementos não dissipativos do circuito: complacência e inertância.

A diferença de fase entre a queda de pressão nos extremos do circuito e o caudal é o ângulo  $\phi$ , cuja tangente é dada pela equação

$$\text{tg } \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_H} \quad \text{IV.152}$$

Estes resultados permitem dizer que, no regime estacionário, após aplicação da pressão  $P(t) = P_0 \sin \omega t$  ao circuito hidrodinâmico série se tem,

de modo semelhante ao que se observa no caso eléctrico, um caudal sinusoidal, através do circuito dado pela equação

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \phi) \quad \text{IV.153}$$

Consideremos agora uma associação de impedâncias em paralelo, por exemplo, um vaso rígido de pequeno raio e um vaso elástico de grande raio, com impedâncias respectivamente  $\vec{Z}_1$  e  $\vec{Z}_2$  dadas, respectivamente, por

$$\vec{Z}_1 = R + j\omega L_1 \quad \text{IV.154}$$

e

$$\vec{Z}_2 = j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right) \quad \text{IV.155}$$

Considerou-se desprezível a resistência hidrodinâmica do vaso de grande calibre.

Na associação de impedâncias em paralelo, o inverso da impedância equivalente do circuito é igual à soma dos inversos das impedâncias dos ramos da associação, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\vec{Z}} &= \frac{1}{\vec{Z}_1} + \frac{1}{\vec{Z}_2} \\ &= \frac{R - j\omega L_1}{R^2 - \omega^2 L_1^2} - j \frac{\omega C}{\omega^2 L_2 C - 1} \\ &= \frac{R}{R^2 - \omega^2 L_1^2} - j\omega \left( \frac{L_1}{R^2 - \omega^2 L_1^2} + \frac{C}{\omega^2 L_2 C - 1} \right) \\ &= A - jB \end{aligned}$$

e

$$\vec{Z} = \frac{A + jB}{A^2 + B^2} \quad \text{IV.156}$$

A aplicação de uma bomba geradora de uma pressão com variação sinusoidal ao circuito, vai originar correntes de líquido através dos dois ramos que podem calcular-se conhecendo os valores das impedâncias.

## Apêndices

### IV.9.15 - Complacência de um vaso elástico

Consideremos um vaso cilíndrico de comprimento  $\ell$  que se encontra em equilíbrio, apresentando um raio  $r$  quando actua a pressão transmural  $P_{TM}$  e a tensão na parede  $T_S$ . Vamos supor que  $T_S$  é a soma da tensão elástica  $T_{SE}$  e da tensão activa, ou tónus muscular,  $T_{SA}$ , ou seja,

$$T_S = T_{SA} + T_{SE} = T_{SA} + \frac{E'}{r_0} r - E' \quad \text{IV.157}$$

$$= P_{TM} r \quad \text{IV.158}$$

ou ainda

$$P_{TM} = \frac{T_{SA}}{r} + \frac{E'}{r_0} - \frac{E'}{r} \quad \text{IV.159}$$

Uma pequena variação de  $P_{TM}$ ,  $dP_{TM}$  tem como consequência variações  $dT_S$ ,  $dr$  e  $dV$ , respectivamente na tensão circunferencial, no raio do tubo e no seu volume.

A variação  $dP_{TM}$  pode escrever-se

$$dP_{TM} = -\frac{1}{r^2} T_{SA} dr + \frac{1}{r^2} E' dr = \frac{E' - T_{SA}}{r} \frac{dr}{r} \quad \text{IV.160}$$

Por outro lado, o aumento de volume  $dV$  é

$$dV = 2 \pi r \ell dr$$

Dividindo  $dV$  pelo volume inicial do cilindro  $V$  temos

$$\frac{dV}{V} = \frac{2 \pi r \ell}{\pi r^2 \ell} dr = \frac{2 dr}{r} \quad \text{IV.161}$$

Esta relação que é independente de  $\ell$ , pode aplicar-se a qualquer porção do tubo.

Substituindo  $\frac{dr}{r}$  por  $\frac{dV}{2V}$  na expressão de  $dP_{TM}$ , temos

$$dP_{TM} = \frac{E' - T_{SA}}{2r} \frac{dV}{V} \quad \text{IV.162}$$

Esta equação exprime a relação entre o aumento de pressão no vaso e o conseqüente aumento de volume. Esta equação é análoga à que já vimos relativa à deformação em volume.

O valor

$$K = \frac{E' - T_{SA}}{2r} \quad \text{IV.163}$$

é o módulo de elasticidade em volume do material do vaso. Este módulo refere-se simplesmente às propriedades elásticas do vaso, não dependendo da qualidade do seu conteúdo que se considera incompressível.

Podemos então escrever

$$dV = \frac{V}{K} dP_{TM} = C dP_{TM} \quad \text{IV.164}$$

Recordemos que um condensador de capacidade  $C'$ , para um aumento de carga  $dQ$  ocorre uma variação da diferença de potencial entre as suas armaduras

$$dQ = C' dU \quad \text{IV.165}$$

No caso do tubo elástico,  $C$  é a complacência (ou capacidade). Encontramos aqui, mais uma vez, uma analogia eléctrica. Um tubo elástico apresenta complacência análoga à capacidade de um condensador eléctrico, Eqs. IV.164 e IV.165.

Contudo, no caso do tubo elástico, a complacência, ou capacidade, não é uma constante, como no caso do condensador, mas depende de  $r$ .

Deste modo e, contrariamente ao caso do condensador, só podemos falar em capacidade do tubo para dado valor de  $r$ .

Observemos agora algumas propriedades relacionadas com  $K$ .

Supondo  $T_{SA} = 0$  é

$$K = \frac{E'}{2r} \quad \text{IV.166}$$

Podemos relacionar a elastância  $E'$  com o módulo de elasticidade (ou de Young) da parede pela equação  $E' = Ee$  onde  $e$  representa a espessura da parede.

Então

$$K = \frac{Ee}{d} \quad \text{IV.167}$$

sendo  $d$  o diâmetro do vaso.

O módulo de elasticidade em volume do tubo, considerado como essencialmente elástico ( $TSA = 0$ ), é igual ao módulo de elasticidade vezes a relação  $e/d$ .

A relação

$$dV = C dP_{TM} \quad \text{IV.168}$$

caracteriza a diferença entre um vaso de paredes elásticas e um vaso de paredes rígidas. O primeiro é capaz de suportar uma variação de volume de líquido no seu interior, variação que é acompanhada de uma variação de pressão. No tubo rígido, não há variação do volume líquido no tubo, qualquer variação no volume de líquido que entra, num dado intervalo de tempo, origina uma igual variação no líquido que abandona o tubo. No caso de um tubo perfeitamente elástico, para uma variação finita da pressão transmural  $\Delta P_{TM}$  a Eq. IV.168 toma a forma

$$\Delta V = C \Delta P_{TM}$$

Se o volume do tubo para a pressão transmural  $P_{TM} = 0$  é  $V_m$ , (chamado de volume morto), então para a pressão  $P_{TM} + \Delta P_{TM}$ , o volume do tubo é

$$V = V_m + C \Delta P_{TM} \quad \text{IV.169}$$

Um vaso complacente satisfaz a Eq. IV.169. Os grandes vasos arteriais e venosos são, fundamentalmente, vasos complacentes significando que são suficientes pequenas variações de pressão para movimentar o débito cardíaco através destes vasos, com significantes variações de volume. A maior resistência situa-se a nível das arteríolas onde se observam grandes variações na pressão e onde as variações de volume são pouco importantes.

**IV.9.16 - Inertância de um líquido**

Consideremos que, para  $t = 0$ , entre dois pontos de um líquido num tubo, se exerce a pressão  $P = P_1 - P_2$  sobre a massa  $m$  de líquido. A força de pressão  $f_p$  exercida à entrada sobre a massa  $m$  de líquido é

$$f_p = P S \tag{IV.170}$$

onde  $S$  é a área da secção recta do tubo (Fig. IV.111). No deslocamento de um líquido real ocorrem forças de fricção que actuam contra o deslocamento do líquido e que são, em módulo, proporcionais à velocidade média do líquido. Podemos escrever para módulo da força de fricção

$$f_f = h \bar{v} \tag{IV.171}$$

onde  $\bar{v} = \bar{v}(t)$  é a velocidade média do líquido no instante  $t$ .

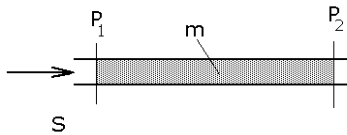


Fig. IV.111 - Para  $t = 0$  exerce-se entre dois pontos do tubo, confinando a massa  $m$  de líquido, a pressão  $P = P_1 - P_2$ .

516

O regime permanente (ou estacionário) do caudal não é atingido instantaneamente. O caudal  $F(t)$  vai variar transitoriamente desde zero até ser atingido o regime permanente. A força total  $f_T$  a actuar na massa  $m$  de líquido, durante o regime transitório, imediatamente após ser aplicada a pressão  $P$  é

$$f_T = PS - h \bar{v} \tag{IV.172}$$

Pela equação fundamental da dinâmica ( $f_T = ma$ ) vem



$$PS - h \bar{v} = m \frac{d\bar{v}}{dt}$$

mas o caudal  $F(t) = S \bar{v}$       donde       $\bar{v} = \frac{F(t)}{S}$

então, derivando é

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dF(t)}{dt}$$

e

$$PS - h \frac{F(t)}{S} = \frac{m}{S} \frac{dF(t)}{dt}$$

ou

$$P - \frac{h}{S^2} F(t) = \frac{m}{S^2} \frac{dF(t)}{dt} \quad \text{IV.173}$$

Todas as parcelas desta expressão têm as dimensões de pressão.

Fazendo

$$\frac{h}{S^2} = R_H \quad (\text{Resistência hidrodinâmica})$$

e

$$L = \frac{m}{S^2} \quad (\text{Inertância do líquido}) \quad \text{IV.174}$$

Obtemos

$$P - R_H F = L \frac{dF}{dt}$$

517

Se

$$F = C^{te} \quad \text{é} \quad \frac{dF}{dt} = 0$$

e

$$P = R_H F$$

que é a lei de Ohm para o caudal estacionário em regime laminar.

IV.9.17 - Regime transitório

Integrando a equação

$$L \frac{dF}{dt} + R_H F = P \quad \text{IV.175}$$

Obtemos a função que traduz o comportamento do caudal até ser atingido o regime permanente. O resultado da integração é

$$F(t) = \frac{P}{R_H} [1 - \exp(-\frac{t R_H}{L})] \quad \text{IV.176}$$

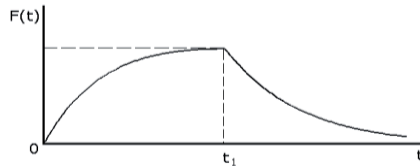


Fig. IV.112 - Curva  $F(t)$  de  $0$  a  $t_1$  após aplicação de um pulso de pressão  $P$ .  
Depois de  $t_1$  a pressão foi suprimida.

Desde  $0$  a  $t_1$ , o caudal tende para o valor constante  $\frac{P}{R_H}$  através da Eq. IV.156 que é constituída por esta mesma constante subtraída de uma função exponencial que tende para zero quando  $t$  aumenta. O termo  $\frac{R_H}{L}$  no expoente, tem dimensões do inverso de um tempo.

Após a pressão  $P = P_1 - P_2$  ter deixado de actuar, no instante  $t_1$ , é libertada energia no circuito hidrodinâmico, diminuindo o caudal de forma exponencial segundo a equação

$$F(t) = \frac{P}{R_H} \exp(-\frac{t R_H}{L}) \quad \text{IV.177}$$

Manifesta-se um efeito de inércia do líquido quando ocorre uma variação de caudal  $dF$  no intervalo de tempo  $dt$  num tubo onde um líquido,

de viscosidade desprezível se desloca, sendo a diferença de pressão que se opõe à variação de caudal dada por

$$P = L \frac{dF}{dt} \quad \text{IV.178}$$

Onde  $L$  é a inertância. Num tubo com secção  $S$ , a inertância de uma massa  $m$  de líquido é dada pela relação

$$L = \frac{m}{S^2} \quad \text{IV.179}$$

O análogo eléctrico da inertância é a indutância.

#### IV.9.18 - Os acontecimentos do ciclo cardíaco

A sequência contracção-relaxamento do músculo cardíaco resulta de um processo cíclico de despolarização e repolarização eléctrica, nas membranas das unidades musculares do coração.

O músculo cardíaco apresenta diversas propriedades que se situam entre as características dos músculos lisos e dos músculos estriados. Estas propriedades intermediárias são não só estruturais como funcionais.

O músculo cardíaco embora sendo estriado (fibras cruzadas) é involuntário, como os músculos lisos. Funcionalmente, o músculo cardíaco apresenta as propriedades de um sincício, tal como os músculos lisos, ou seja, as unidades constituintes do músculo são funcionalmente interdependentes de tal modo que uma vez iniciada a despolarização eléctrica numa unidade, ela continua-se através das unidades do sincício.

Além do miocárdio, há que considerar o tecido nervoso do coração, relacionado com os fenómenos eléctricos de condução, cujos componentes mais importantes são: O nódulo sino-auricular (S-A), o nódulo aurículo-ventricular (A-V), o feixe comum, os feixes esquerdo e direito e as fibras ventriculares de Purkinje.

---

Alguns destes componentes têm a propriedade de despolarizar-se espontaneamente. Tal propriedade permite a estes tecidos imporem o ritmo cardíaco por um processo que estudaremos mais adiante.

No homem, o nódulo S-A é marcador do ritmo cardíaco ("marca-passo"), na situação normal.

Uma vez iniciada a actividade eléctrica (despolarização) no nódulo S-A, esta actividade propaga-se através do miocárdio, ao longo das paredes das aurículas e através do septo inter-auricular.

A onda de despolarização requer cerca de 80 ms para percorrer toda a superfície de uma aurícula humana.

Esta propagação produz uma variação de campo eléctrico que pode ser registada na superfície do corpo - é a onda **P** do electrocardiograma.

O estado de excitação eléctrica da aurícula continua-se por aproximadamente 150 ms. A repolarização seguinte das aurículas ocorre durante a despolarização dos ventrículos.

O miocárdio ventricular inicia a sua despolarização cerca de 80 ms depois da despolarização das aurículas e permanece despolarizado durante aproximadamente 300 ms antes de voltar ao estado inicial.

A despolarização ventricular produz o complexo QRS do ECG. Quando se processa a repolarização do ventrículo é gerada a onda **T** do ECG.

Não se esclareceu ainda completamente o mecanismo físico-químico que relaciona os acontecimentos eléctricos e mecânicos do coração, mas sabe-se que as células cardíacas começam a contrair-se enquanto a despolarização se mantém.

Depois de um período de tempo de inactividade eléctrica, o processo estímulo eléctrico-acção mecânica repete-se e o conjunto dos fenómenos resulta numa contracção rítmica do músculo cardíaco, que bombeia o sangue para a rede circulatória.

Os acontecimentos do ciclo cardíaco são melhor visualizados a partir das curvas de variação do volume e da pressão ventriculares.

A sístole ventricular inicia-se com uma contracção isométrica ou seja a volume constante.

Durante a fase de contracção isométrica (Fig. IV.113) o músculo ventricular comprime o sangue, subindo a pressão e fechando a válvula aurículo-ventricular, produzindo uma sequência de vibrações audíveis, na estrutura cardíaca. Este som é chamado o 1º som cardíaco.

---

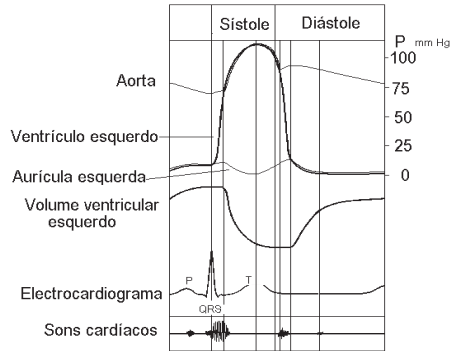


Fig. IV.113 - Acontecimento importantes ao ciclo cardíaco

Nos centésimos de segundo que seguem, nenhuma variação aparente ocorre, mas a pressão intraventricular continua a subir, como resultado do aumento de tensão do músculo ventricular.

Quando a pressão intraventricular excede a pressão aórtica, a válvula aórtica é forçada a abrir e o sangue começa a ser ejetado para a aorta. Este ponto marca o fim da contração isométrica e o início da fase de ejeção.

Como indica a curva de variação do volume cardíaco, o sangue é ejetado rapidamente no início e depois mais lentamente. A expulsão do sangue ventricular termina quando o ventrículo começa a relaxar-se. Nesta altura termina a sístole ventricular e inicia-se a diástole. Nos instantes iniciais desta fase o sangue tende a circular da aorta para o ventrículo, originando o encerramento da válvula aórtica.

A vibração produzida pelo encerramento desta válvula origina um som - o 2º som cardíaco.

As válvulas da cavidade ventricular permanecem fechadas cerca de 0,08 segundos, durante os quais a tensão do músculo ventricular diminui gradualmente sem variações do volume, ao prosseguir o relaxamento muscular. Esta fase é a fase de relaxamento isométrico. Quando a pressão na cavidade ventricular desce abaixo da pressão na aurícula, a válvula auriculo-ventricular abre, permitindo a entrada de sangue no ventrículo. Inicialmente, a entrada é rápida devido à quantidade de sangue acumulada na aurícula durante a precedente sístole.

Esta, é a fase inicial rápida, da diástole, caracterizada pelo grande fluxo entre a aurícula e o ventrículo. Nesta fase produz-se o 3º som cardíaco, que é atribuído às vibrações produzidas pela entrada de sangue na câmara.

---

Após a fase inicial rápida o fluxo de entrada de sangue no ventrículo diminui até um valor que corresponde, aproximadamente, ao fluxo de retorno sanguíneo ao coração. Esta fase é conhecida como diástase.

A diástase prolonga-se por um período de 200-300 ms e caracteriza-se por uma subida lenta dos volumes e pressão na aurícula e ventrículo, visto a pressão venosa exceder a pressão dentro das câmaras e a válvula aurículo-ventricular se encontrar aberta.

Não se registam potenciais no ECG, neste período. A onda **P** do ECG ocorre no fim desta fase.

A aurícula contrai-se, esvaziando o seu conteúdo no ventrículo.

Próximo do instante em que a contracção auricular atinge o seu máximo. O ventrículo inicia a sua contracção, começando um novo ciclo.

Após o início da sístole, fecham-se as válvulas aurículo-ventriculares, abertas devido à corrente de sangue.

Nos indivíduos normais, fenómenos idênticos da contracção e relaxamento sucedem-se simultaneamente nas metades esquerda e direita do coração.

A pressão aórtica varia periodicamente, devido à corrente intermitente de sangue enviada pelo coração.

Durante a ejeção ventricular o sangue entra na aorta em grande quantidade pelo que a pressão sobe durante a fase inicial da sístole e depois mais lentamente quando a ejeção diminui.

A pressão aórtica decresce rapidamente durante a protodiástole (fase de preenchimento rápido), apresenta um pico imediatamente após as válvulas se fecharem e depois volta a decrescer, lenta e constantemente.

#### IV.9.20 - As bombas possíveis dos sistemas hidrodinâmicos

A geração de força motriz nos sistemas hidrodinâmicos produzindo movimento de fluidos, aumento de pressão e deformação de componentes elásticos é produzida por bombas que podem ser de vários tipos:

**Bomba tipo A** - Este tipo de bomba tem acção de aspiração e de ejeção produzindo uma determinada corrente de líquido (fonte de corrente). É uma bomba que utiliza energia para o enchimento activo à entrada e também para o esvaziamento, à saída. A corrente de líquido produzida só depende de parâmetros da bomba, ou seja, o volume de ejeção e o número de ciclos executados por unidade de tempo (frequência de batimento). Um exemplo deste tipo é a bomba de êmbolo, que depende energia para aspirar um certo volume

---

de líquido e depois o ejecta sob pressão. Não é invulgar o coração ser enquadrado, erradamente, neste tipo de bomba Fig. IV.114.

**Bomba tipo B** - Este tipo de bomba tem acção de aspiração e de ejeção mas, em vez de produzir uma determinada corrente gera um gradiente pressão entre entrada e saída (fonte de pressão). A corrente à saída desta bomba depende não só de factores intrínsecos da bomba (potência e frequência), bem como de factores extrínsecos tais como pressão e impedância do sistema a ser alimentado. As bombas centrífugas pertencem a esta categoria.

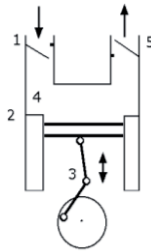


Fig. IV.114 - Bomba tipo A. É despendida energia primeiro para aspirar um certo volume de líquido e depois para o ejectar sob pressão. 1 - Válvula de entrada que encerra quando a pressão na câmara 4 é superior à pressão a montante. 2, 3 sistema de êmbolo e excêntrico para aspiração e ejeção. 4 - câmara. 5 - Válvula de saída que encerra quando a pressão a jusante é superior à pressão na câmara 4.

**Bomba tipo C:** Este tipo de bomba só desenvolve acção de ejeção não executa aspiração sendo, portanto, o seu enchimento passivo. Só ocorre dispêndio de energia no esvaziamento do líquido, que preenche a câmara de ejeção. Exemplos de órgãos que se comportam como bombas deste tipo são a bexiga e o coração

Não é criada qualquer acção de sucção ou pressão negativa sobre os ureteres ou rim para o preenchimento da bexiga. Do mesmo modo, no coração, não é desenvolvida qualquer pressão negativa nas aurículas, durante a diástole, para retirar sangue da circulação. A função destas bombas depende de factores externos. No caso da bexiga, por exemplo, o caudal total não vai depender do número de micções ou do seu volume individual, mas sim da função renal.

**IV.9.20 - A pulsatilidade nos vasos sanguíneos**

As características hemodinâmicas da circulação pulmonar, em particular a nível capilar, são altamente complexas. Um parâmetro de grande importância é a área total da parede capilar, através da qual se processam as trocas gasosas. A resistência desta parede capilar às forças da pressão transmural, é substancialmente menor do nos capilares sistémicos. De facto, os capilares alvéolares não são finos tubos, mas lâminas de pequena curvatura, implantadas na parede alvéolar e suportadas por pilares de tecido conjuntivo. Esta estrutura constitui um sistema complacente que limita uma camada de sangue de espessura variável durante o ciclo cardíaco. As paredes dos capilares pulmonares são muito mais complacentes do que as dos capilares sistémicos, contribuindo com uma fracção importante para a complacência total do órgão. No cão, a complacência capilar pulmonar é cerca de 13% da complacência pulmonar total.

Na maior parte da rede vascular pulmonar, a pressão, o caudal e o volume são pulsáteis, sendo detectada pulsação nas artérias, capilares e mesmo vénulas.

Devido à estrutura de camada dos capilares pulmonares, é neles que se situa a grande resistência da circulação pulmonar (30 a 50%), com maior participação da porção capilar arterial. De facto, nas arteríolas e capilares arteriais ocorre uma queda de pressão de 25 a 40% do diferencial de pressão total da circulação pulmonar. Contrariamente, na circulação sistémica, a queda de pressão no leito capilar é somente de cerca de 10% (Fig. IV.115).

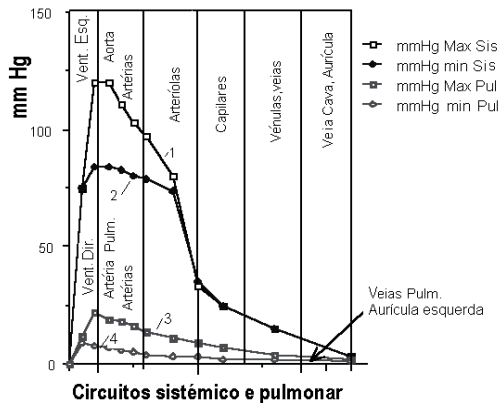


Fig. IV.115 - Valores máximos e mínimos da pressão nos territórios vasculares das circulações sistémica e pulmonar.



Durante o ciclo cardíaco, ocorrem variações de pressão de cerca de 12 mm Hg na artéria pulmonar e de 3 a 5 mm Hg nos capilares pulmonares. Por outro lado, as variações de pressão, caudal e volume, encontram-se praticamente em fase, na porção arterial da circulação pulmonar.

Na circulação sistêmica não se verifica pulsatilidade a partir das arteríolas (Fig. IV.115). Em particular, a nível dos capilares da circulação sistêmica, a pressão, velocidade média do sangue e caudal são constantes durante o ciclo cardíaco, Figs. IV.115 e IV.116.

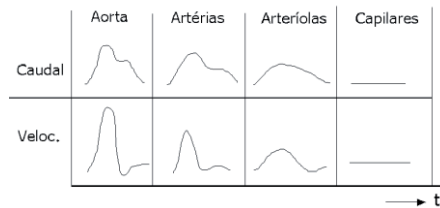


Fig. IV.116 - Valores da velocidade média do sangue e caudal em função do tempo, durante o ciclo cardíaco na circulações sistêmica.

São associáveis a estas características dos caudais sanguíneos nos capilares das circulações sistêmica e pulmonar, razões fisiológicas importantes. O interesse em ser mantida uma oxigenação constante nos órgãos, em particular naqueles responsáveis pelas funções mais nobres como o cérebro e a visão, está associado à constância do caudal sanguíneo, no primeiro caso. A agitação e conseqüente facilitação das trocas gasosas associável à pulsatilidade da circulação capilar pulmonar, no segundo.

O volume de sangue na árvore vascular pulmonar varia periodicamente durante o ciclo cardíaco, aumentando após a sístole ventricular direita. As variações do volume vascular pulmonar correlacionam-se no tempo com as variações da pressão arterial pulmonar. Estudos realizados em pulmões de cão mostraram que a elevação da pressão na artéria pulmonar, quando aumenta o caudal sanguíneo, é a principal responsável pelo aumento de volume do sangue pulmonar. Não se verifica correlação entre as variações do volume vascular pulmonar e da pressão venosa pulmonar. Por outro lado, o volume de sangue na rede vascular alvéolar correlaciona-se linearmente com a pressão na artéria pulmonar, sendo pouco influenciado pela pressão na veia pulmonar.

As variações locais de volume de sangue pulmonar podem ser consequência de deformação complacente das paredes vasculares, bem como da mobilização ou colapso de pequenos vasos sanguíneos.

As variações locais do volume sanguíneo, que ocorrem nos vasos pulmonares, durante o ciclo cardíaco, podem ser evidenciadas após marcação radioactiva do sangue.

#### IV.9.21 - Dedução da fórmula de Poiseuille

Num tubo cilíndrico de raio  $R$ , percorrido por um líquido com caudal em regime laminar, Fig. IV.117, é conhecida a expressão da velocidade do líquido à distância  $r$

$$v_r = \frac{\Delta P R^2}{4 \eta \ell} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{\Delta P}{4 \eta \ell} (R^2 - r^2)$$

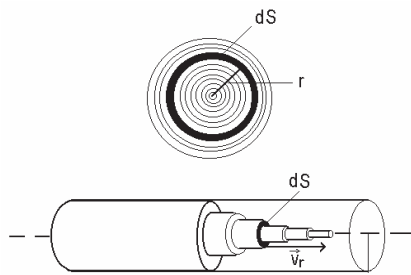


Fig. IV.117 – Distribuição das velocidades do líquido com caudal em regime laminar num tubo cilíndrico.

Recordando que a área da coroa circular elementar à distância  $r$ , compreendida entre os raios  $r$  e  $r+dr$  é  $dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr$ , podemos dizer que o volume de líquido que, por segundo, passa através de uma secção recta do tubo entre as distâncias  $r$  e  $r+dr$  é  $v_r dS$ , ou seja, a parcela  $dF$  do caudal total que corresponde à área  $dS$  é  $v_r dS$ , que podemos escrever

$$dF = v_r dS = \frac{\Delta P}{4 \eta \ell} (R^2 - r^2) 2 \pi r dr \quad \text{IV.180}$$

Numa primeira aproximação, o caudal através do tubo  $\mathbf{F}$ , é a soma de todos os  $d\mathbf{F}$  quando  $\mathbf{r}$  varia de  $\mathbf{0}$  a  $\mathbf{R}$ , ou seja,

$$F \approx \sum_{r=0}^R v_r 2 \pi r dr \quad \text{IV.181}$$

O resultado rigoroso será obtido se considerarmos o limite deste somatório quando  $dr \rightarrow 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^R v_r r dr = \frac{\pi \Delta P}{2 \eta \ell} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \\ &= \frac{\pi \Delta P R^4}{8 \eta \ell} \end{aligned} \quad \text{IV.182}$$

que é a conhecida fórmula de Poiseuille.

#### IV.9.22 - Área efectiva da válvula aórtica

Designando por  $P_1 - P_A$  a diferença de pressão entre o ventrículo esquerdo e um ponto qualquer da aorta<sup>1</sup>, num dado instante,  $V$  o volume de sangue no ventrículo esquerdo neste instante,  $v$  a velocidade do sangue nesse ponto e nesse instante,  $\rho$  a massa específica do sangue, e supondo ainda desprezível a velocidade do sangue no ventrículo comparada com  $v$ , podemos escrever

$$\Delta P = P_1 - P_A = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{IV.183}$$

Por outro lado, se não houver shunts intracardíacos ou outras patologias que originem movimentos anormais de sangue, pode escrever-se

$$\frac{dV}{dt} = Sv \quad \text{IV.184}$$

<sup>1</sup> Antes de ocorrerem ramificações.

onde  $S$  é a área da secção onde a velocidade do sangue é  $v$ . Então, combinando as Eqs. IV.183 e IV.184 temos

$$S = \left[ \frac{\rho}{2 \Delta P} \right]^{1/2} \frac{dV}{dt} \quad \text{IV.185}$$

A Eq. IV.185 pode ser utilizada para o cálculo da área efectiva de uma válvula aórtica. Os valores instantâneos podem, com algum erro, ser substituídos pelos valores médios correspondentes a intervalos finitos. É necessário conhecer o caudal e a pressão em pontos próximos da válvula, a jusante.

#### IV.9.23 - Teoria das medidas com “strain gauges”

Como vimos na secção IV.9.11, para ser efectuada a medição da pressão sanguínea, é introduzida no vaso a cânula de comunicação com a câmara que contém líquido e que contacta a membrana. A diferença de pressão entre o interior do vaso e a pressão a que se encontra o líquido da câmara, vai originar movimento do líquido, alterando a situação de equilíbrio da membrana elástica. No caso de uma artéria as próprias flutuações na pressão arterial vão ser traduzidas pelo movimento de um pequeno volume de líquido  $V$  a sair e a entrar no sistema. Neste caso, podemos supor que a frente do líquido se desloca da distância  $x$ , dado por  $x=V/\pi R^2$ , onde  $R$  é o raio interior da agulha. O movimento do diafragma, originado pelo movimento do fluido é registado para, após conveniente calibração, determinar o valor da pressão arterial. Devido à diferença entre as áreas das secções rectas da agulha e da câmara, a velocidade e a aceleração do líquido são muito superiores na agulha. Também o deslocamento da membrana é muito menor do que  $x$  mas proporcional a este. Assim, as forças inerciais e viscosas associadas ao fluido na câmara são muito menores do que as correspondentes forças na agulha, considerando-se desprezíveis. Por outro lado, no sistema, a única deformação elástica com interesse considerar é a do diafragma. Deste modo, os três únicos parâmetros a determinar o comportamento do sistema são a massa de fluido na agulha, as forças viscosas presentes no deslocamento do líquido da agulha e a elasticidade do diafragma. A Fig. IV.118 é um modelo do sistema, onde  $p$  é a pressão a medir,  $M$  a massa efectiva do líquido no cateter,  $k$  a constante elástica efectiva da membrana,  $C$  o coeficiente de viscosidade efectivo do líquido e

$x$  o deslocamento linear da massa de líquido. Vamos tentar analisar a resposta do sistema quando é aplicada uma pressão  $P_a$  sobre o líquido na agulha.

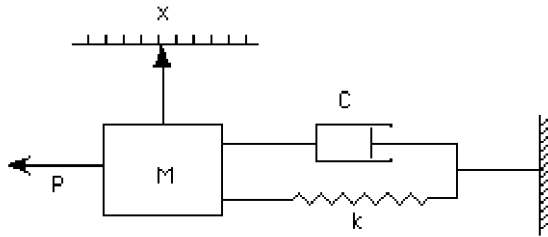


Fig. IV.118 - Modelo do sistema.  $p$  - pressão a medir,  $M$  - massa efectiva do líquido no cateter,  $k$  - constante elástica da membrana,  $C$  - coeficiente de viscosidade e  $x$  - deslocamento da massa de líquido.

O balanço das forças aplicadas na massa  $M$  encontra-se representado, em esquema, na Fig. IV.119. A força de pressão aplicada  $F_a$  é compensada pela soma das forças de inércia  $F_i$ , força elástica da mola  $F_e$  e força de fricção do líquido no cateter  $F_v$ .

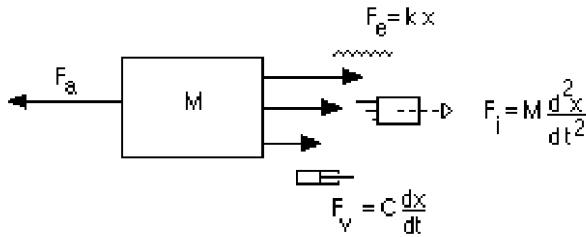


Fig. IV.119 - Forças a actuar na massa  $M$  de líquido na agulha:  $F_a$ -força de pressão aplicada,  $F_i$ -força de inércia,  $F_e$ -força elástica da mola e  $F_v$ -força de fricção do líquido no cateter.

Podemos escrever, para o sistema em estudo

$$F_a = F_i + F_e + F_v$$

E substituindo os valores das forças

$$p \pi R^2 = (\rho L \pi R^2) \frac{d^2x}{dt^2} + (8\eta L \pi) \frac{dx}{dt} + (E \pi^2 R^4) x \quad \text{IV.187}$$

onde  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{d^2x}{dt^2}$  são o deslocamento, a velocidade linear e a aceleração do volume de líquido em movimento no cateter,  $p$  é a pressão que se pretende medir,  $L$  é o comprimento da agulha,  $\rho$  e  $\eta$  são respectivamente a massa específica e viscosidade do líquido e  $E$  a inclinação  $\Delta p/\Delta V$  da curva  $p(V)$  da câmara com a membrana elástica. O coeficiente da aceleração é a massa de líquido em movimento no tubo, o coeficiente da velocidade resulta directamente da fórmula de Poiseuille e o coeficiente de  $x$  a partir da própria definição de  $E$ . Outra forma da Eq. IV.187 é

$$p = M \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + K x \quad \text{IV.188}$$

onde  $M = \rho L$ ,  $C = 8\eta L/R^2$  e  $K = E \pi R^2$  são respectivamente a massa efectiva, o coeficiente de viscosidade efectivo e a constante elástica efectiva da mola.

Se o parâmetro que nos interessa é o valor médio de  $x$ , ou termo constante da pressão, então os termos dinâmicos  $\frac{d^2x}{dt^2}$  e  $\frac{dx}{dt}$  poderão considerar-se nulos e a Eq. IV.188 reduz-se a  $p = Kx$ .

Quando a componente variável da pressão é considerada a Eq. IV.188 tem de ser aplicada completa. Nestas condições e dependendo dos parâmetros do sistema, várias possibilidades podem acontecer para a função  $x(t)$ .

A solução geral da Eq. IV.188 é a soma de dois termos: a solução complementar ou transitória e a solução particular. Esta, tem a ver com a acção específica do processo, por exemplo uma força instantânea  $F_a$ , ou uma acção sinusoidal forçada e corresponde a uma solução para o estado estacionário.

Uma solução particular da Eq. IV.188 é, obviamente,  $x = p/K$ .

A solução complementar é a solução da equação diferencial

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + K x = 0 \quad \text{IV.189}$$

A solução da Eq. IV.189 descreve a resposta transitória, ou seja, a resposta do sistema se, no instante  $t=0$  e para um dado espaço inicial é aplicada uma velocidade inicial e se estuda, em seguida, o movimento produzido (caso semelhante ao do movimento de uma mola após ter sido esticada e largada).

A Eq. IV.189 é uma equação linear, homogénea completa que podemos escrever na mesma forma que a Eq. III.131, que vimos no Capítulo III, com constantes relacionadas com o problema presente, ou seja

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{IV.190}$$

com

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{C}{\sqrt{KM}} \quad \text{IV.191}$$

e onde se demonstra que  $\omega_0$  é a frequência natural (não forçada) do sistema e  $\xi$  um factor de amortecimento.

A solução da Eq. IV.190 quando  $\xi < 1$  é oscilatória amortecida.

Se  $\xi \geq 1$  a solução da Eq. IV.190 mostra que o sistema retoma a posição de equilíbrio sem oscilações. O movimento é amortecido e tenderá para o equilíbrio, sem alterar o sentido, tanto mais lentamente quanto maior for  $\xi$ .

Facilmente se entende que, se pretendemos medir, com rigor, a pressão  $p$ , não interessam oscilações, nem que o valor que se quer medir só esteja disponível depois de um grande tempo de aproximação, devido a um grande amortecimento, o que interessa é o mais rápido amortecimento possível e ausência de oscilações.

No sistema que estudámos, os parâmetros mecânicos escolhidos terão que satisfazer estas condições para os resultados serem optimizados.

#### IV.9.24 - Modelos da circulação sanguínea em vasos elásticos

Em 1899 um fisiologista alemão, Otto Frank, com base na observação da expansão das artérias na sístole, propôs a teoria da "windkessel" (câmara de ar) para a circulação arterial. De facto, este modelo não é senão a suposição de que as artérias, no seu conjunto, se comportam como uma câmara complacente cujo volume é proporcional à pressão transmural nela existente.

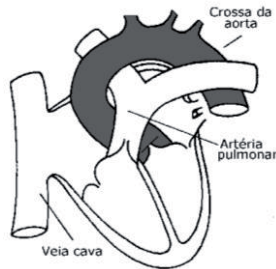


Fig. IV.120 – Os grandes vasos arteriais da circulação sistêmica, no seu conjunto, (parcialmente representadas a escuro), comportam-se essencialmente como uma câmara complacente.

Neste modelo a microcirculação é uma simples resistência e a diferença de pressão através desta é proporcional ao caudal que a percorre. A relação

$$P_a = R_H F \quad \text{IV.192}$$

onde  $P_a$  é a pressão arterial e  $F$  o caudal permite a definição de resistência periférica total  $R_H$ . A pressão venosa é considerada desprezável.

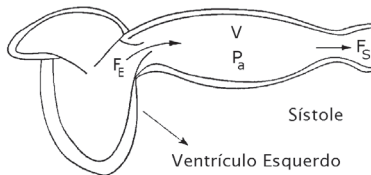


Fig. IV.121 - Neste modelo considera-se que as artérias, no seu conjunto, se comportam como uma câmara complacente cujo volume é proporcional à pressão transmural nela existente.

O volume da "câmara arterial" está relacionado com a pressão arterial por

$$P_a = V/C \quad \text{IV.193}$$

onde  $C$  é a complacência arterial. Esta relação é uma grosseira simplificação mesmo para uma única artéria. Finalmente, a variação de volume por unida-



de de tempo na câmara é igual à diferença entre o caudal de entrada, vindo do coração e o de saída para os capilares venosos, para um dado instante, ou seja,

$$\frac{dV}{dt} = F_E - F_S \quad \text{IV.194}$$

com  $F_E$  o caudal de entrada e  $F_S$  o caudal de saída. Para a diástole, quando  $F_E = 0$ , temos, das equações acima

$$\frac{dP_a}{dt} + \frac{P_a}{R_H C} = 0 \quad \text{IV.195}$$

e, por integração

$$P_a \propto e^{-t/R_H C} \quad \text{IV.196}$$

Este decréscimo exponencial é verificado, com aproximação, na prática.

Contudo, no início da sístole, quando o caudal de entrada  $F_E$  é grande, a teoria prevê que a derivada da pressão em ordem ao tempo é proporcional ao caudal, enquanto que experimentalmente se mostra que é a pressão (em relação ao fim da diástole) que é proporcional ao caudal

$$(P_a - P_{fd}) \propto F_E \quad \text{IV.197}$$

Esta falha mostra que o modelo da "windkessel" não é adequado para descrever o fenómeno em termos dinâmicos mesmo para a circulação central.

A ideia é simples e atraente mas ignora factos cruciais, tais como a propagação da pressão ao longo dos vasos como uma onda.

#### IV.9.25 - Propagação de uma onda pulsatória nos vasos sanguíneos. O pulso

Consideremos uma porção de um vaso de parede elástica limitada por duas secções rectas de abcissas  $x$  e  $x+dx$ , marcadas a partir de uma origem arbitrária escolhida no eixo (Fig. IV.122). Admitiremos, além disto, que o vaso é homogéneo em todo o seu comprimento, ou seja, que tem por unida-

de comprimento, uma resistência  $R$ , uma capacitância  $C$  e uma inércia  $L$ , bem definidas

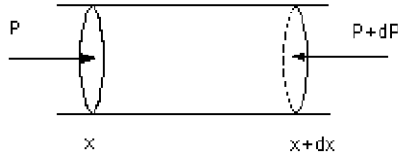


Fig. IV.122 - Elemento de comprimento  $dx$  de um vaso sanguíneo.

Vamos ainda admitir que estamos em regime laminar variável, ou seja, a pressão  $P$  e o caudal  $\dot{Q}$ , no vaso, dependem simultaneamente da posição  $x$  e do tempo  $t$ .

No instante  $t$ , sendo  $P$  a pressão no ponto de abscissa  $x$  e  $P+dP$  no ponto de abscissa  $x+dx$ , podemos aplicar ao elemento de tubo a equação

$$L \, dx \frac{d\dot{Q}}{dt} + R \dot{Q} \, dx = P - (P + dP) = -dP \quad \text{IV.198}$$

ou

$$L \frac{d\dot{Q}}{dt} + R \dot{Q} = -\frac{dP}{dx}$$

$\frac{dP}{dx}$  é a derivada da pressão em relação à variável de espaço  $x$  no instante  $t$  fixado e  $\frac{d\dot{Q}}{dt}$  é a derivada do caudal em relação ao tempo na posição  $x$  fixada.

Tratando-se de derivadas parciais escrevemos

$$L \frac{\partial \dot{Q}}{\partial t} + R \dot{Q} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{IV.199}$$

Seja, por outro lado,  $dV_1$ , o volume de líquido que entra na secção de abscissa  $x$  do tubo entre os instantes  $t$  e  $t+dt$  e  $dV_2$  o volume de líquido que sai na secção de abscissa  $x+dx$  no mesmo tempo. O elemento de vaso apresentará, deste modo, uma variação de volume  $dV$  tal que

$$dV = dV_1 - dV_2$$

---

ou 
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_1}{dt} - \frac{dV_2}{dt} = \dot{Q}(x) - \dot{Q}(x+dx) \quad \text{IV.200}$$

Esta última relação, que se encontra em numerosos problemas deste tipo, é frequentemente designada, por razões óbvias, equação da continuidade.

Como a parede do vaso é elástica, ao aumento de volume  $dV$  corresponde um aumento de pressão  $dP$ , tal que

$$dV = C dP dx \quad \text{IV.201}$$

e a equação da continuidade pode escrever-se

$$C \frac{dP}{dt} = - \frac{\dot{Q}(x+dx) - \dot{Q}(x)}{dx} \quad \text{IV.202}$$

Então, por definição de derivada de uma função e tratando-se de derivadas parciais

$$C \frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} \quad \text{IV.203}$$

Derivando a Eq. IV.199 em ordem a  $x$  e a Eq. IV.203 em ordem a  $t$ , vem

$$L \frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial t \partial x} + R \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad \text{IV.204}$$

e

$$C \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial x \partial t} \quad \text{IV.205}$$

Como 
$$\frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial t \partial x} = - \frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial x \partial t}$$

Vem 
$$\frac{1}{LC} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{IV.206}$$

Esta equação relaciona entre si as derivadas parciais da pressão  $P(x,t)$ . É uma equação às derivadas parciais. Estas equações têm como soluções funções arbitrárias sem expressão analítica bem determinada.

---

Tais equações são importantes em Física e também em Biologia como no caso da difusão.

A obtenção das soluções da Eq. IV.206 é um problema complexo. Tudo se simplifica, contudo, se supusermos que a resistência por unidade de comprimento do tubo R é desprezável. A Eq. IV.206 transforma-se então em

$$\frac{1}{LC} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad \text{IV.207}$$

Esta última equação às derivadas parciais é fundamental em física - é uma equação de onda. Todas as ondas planas que se propagam sem perda de energia, ou seja, sem diminuição da amplitude, sejam materiais (ondas acústicas) ou electromagnéticas (ondas hertzianas, ondas luminosas, raios X e gama), obedecem a esta equação.

Consideremos uma função arbitrária  $f(z)$  da variável  $z = x - vt$  onde  $v$  é um parâmetro cujo valor precisaremos mais tarde. Podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} = f'(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f'(z) \frac{\partial (x-vt)}{\partial t} = -v f'(z) \quad \text{IV.208}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(z) \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} = f''(z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -f''(z) v \frac{\partial (x-vt)}{\partial t} = v^2 f''(z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{IV.209}$$

Se dermos ao parâmetro  $v$  o valor  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  a função arbitrária verifica a Eq. IV.207 e é uma solução. Qualquer que seja a forma desta função ela toma o mesmo valor para os pares  $x_1 t_1, x_2 t_2, x_3 t_3, \dots$  das variáveis posição

e tempo, de tal modo que  $x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2 = x_3 - vt_3 = \dots$ , ou seja, que se no ponto  $x_0$  e no instante  $t=0$  esta função tem o valor  $f_0$  ela terá o mesmo valor no ponto  $x = x_0 + vt$ .

A pressão  $P(x,t)$  no vaso, obedecendo à Eq. IV.208 é, portanto uma função deste tipo. Se, então, criarmos no ponto  $x_0$  do vaso uma sobrepressão transitória entre os instantes  $0$  e  $\theta$ , ela aparecerá sem alteração entre os instantes  $t$  e  $t + \theta$  no ponto  $x = x_0 + vt$ . Fisicamente isto significa que toda a perturbação de pressão num vaso se propaga ao longo deste com uma velocidade finita

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{IV.210}$$

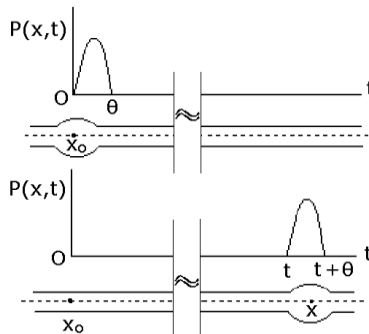


Fig. IV.123 - Percurso do pulso de pressão ao longo de um vaso.

Por exemplo, a brusca variação de pressão que se produz no orifício da aorta, no momento da sístole ventricular, não se transmite instantaneamente a todos os pontos da aorta. Não se pode falar de uma pressão  $P_a(t)$  igual em todos os instantes em todos os pontos do reservatório aórtico, como por vezes se faz como aproximação.

Calculemos a velocidade de propagação da onda de pressão num vaso elástico.

Sendo  $L$  e  $C$  a inércia e complacência (capacitância) por unidade de comprimento ( $\ell = 1$ ), temos

$$L = \frac{m}{S^2} = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{\rho}{S} \quad \text{IV.211}$$

e

$$C = \frac{V}{k} = \frac{\ell S}{k} = \frac{S}{k}$$

Assim, a velocidade de propagação da onda de pressão é

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad \text{IV.212}$$

onde  $\rho$  é a massa específica do líquido e  $K$  o módulo de elasticidade volumica do vaso. Recordando que  $k = \frac{E e}{d}$  (Eq. IV.167) a Eq. IV.212 transforma-se em

$$v = \sqrt{\frac{E e}{d \rho}} \quad \text{IV.213}$$

que é conhecida como equação de Moens-Korteweg.

Para um indivíduo de 20 a 25 anos o módulo de elasticidade em volume da aorta é da ordem de 118 mm Hg ou seja  $118 \times 1334 \text{ dyn/cm}^2$ . Considerando a massa específica do sangue unitária, a velocidade de propagação da onda de pressão é

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{118 \times 1334} = 390 \text{ cm.s}^{-1} \approx 3,9 \text{ m s}^{-1}$$

Experimentalmente a velocidade de propagação da onda pressão na aorta é efectivamente da ordem de  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

A onda de pressão propaga-se, portanto, na aorta com uma velocidade cerca de 20 vezes superior à do deslocamento do sangue.

A onda de pressão subdivide-se na rede arterial e, ao nível da artéria radial, que se encontra próximo dos planos cutâneos, pode sentir-se, ou mesmo ver-se, a deformação da parede arterial associada à sua passagem. Isto constitui o chamado pulso.

Contudo, na velocidade a nível das artérias periféricas, a resistência  $R$  não é desprezável e a função  $P(x,t)$ , que dá o valor da pressão num ponto  $x$  e num instante dado  $t$  em relação à perturbação inicial fornecida pela sístole ventricular, terá de ser obtida a partir da Eq. IV.206. Esta equação, ou melhor, a sua análoga eléctrica, é a equação dos telegrafistas que governa a pro-

---

pagação de um sinal eléctrico ao longo de um cabo apresentando uma resistência, uma capacitância e um coeficiente de auto-indução definidos por unidade de comprimento.

A solução da Eq. IV.206 caracteriza a propagação de uma onda que se propaga aliás com velocidade pouco diferente da correspondente à Eq. IV.212. Porém, contrariamente à solução da Eq. IV.207, a onda deforma-se ao propagar-se e, além disso, a amplitude diminui.

Esta deformação depende dos parâmetros que influenciam a resistência, a complacência e a inertância dos vasos. Percebe-se assim a riqueza semiológica do pulso.

Ainda duas observações em relação à Eq. IV.212.

Sabemos que a distensibilidade das artérias diminui com a idade. Esta diminuição da distensibilidade corresponde a um aumento do módulo de elasticidade em volume. É assim, de prever, um aumento da velocidade de propagação da onda de pressão com a idade. Um facto que se observa é que quanto mais "duras" são as artérias, mais depressa se propaga a onda de pressão.

A Eq. IV.212 também dá a velocidade de propagação de um som num fluido. No estudo de Física da circulação que fizemos, considerámos implicitamente o sangue incompressível e a capacitância de um vaso essencialmente dependente da elastância das suas paredes. De facto, o sangue, como todos os fluidos, tem uma certa compressibilidade associada à sua elasticidade volúmica característica. O módulo de elasticidade em volume caracteriza as propriedades elásticas do próprio fluido e não as propriedades elásticas das paredes que o limitam. A esta compressibilidade do fluido corresponde então uma velocidade de propagação dada pela Eq. IV.213, mas, apesar disso, diferente da onda de pulsação, já que corresponde a um módulo de elasticidade volúmica completamente diferente.

O módulo de elasticidade em volume corresponde à compressibilidade do sangue, que é próximo do da água, é muito maior do que o módulo de elasticidade em volume  $K$  correspondente às paredes arteriais. A velocidade da onda de compressibilidade, que é da ordem de 1500 metros por segundo na água (velocidade do som na água), é muito maior do que a velocidade da onda de pulsação, que, como vimos, é de 4 metros por segundo. Não há portanto confusão entre o pulso ou onda de pulsação e a onda de compressibilidade do sangue. Esta última é com efeito desprezável na circulação, pois a sua amplitude é muito pequena. Por outras palavras, a capacitância das artérias está quase exclusivamente ligada à distensibilidade das suas paredes, não dependendo praticamente nada da compressibilidade do sangue que contém.

---

Já referimos que a equação utilizada para transmissão de sinais em cabos coaxiais ou linhas de transmissão é análoga, formalmente, à equação que deduzimos para a artéria e nos permite tirar as conclusões acima.

Para a situação simplificada que considerámos, isto é resistência nula, o análogo eléctrico será o da Fig. IV.124

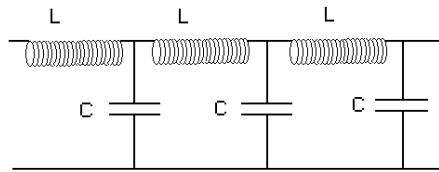


Fig. IV.124 - Circuito eléctrico equivalente de um vaso.

Este circuito corresponde a uma linha sem perdas cuja equação é

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad \text{IV.214}$$

Com

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

sendo  $L$  e  $C$  a indutância e capacidade por unidade de comprimento.

Porém, o modelo que usámos para a artéria é uma simplificação algo grosseira. Em primeiro lugar aplica-se ao movimento de um líquido num tubo de comprimento infinito e diâmetro constante, a não ser que perturbações como pulsos de pressão sejam impostos. Além disso duas aproximações mais são consideradas: 1) a viscosidade do líquido não afecta o seu movimento e 2) as perturbações ou pulsos de pressão são tão pequenos que as propriedades elásticas de parede e a mecânica do fluido seja linear.

A linha de transmissão é também, basicamente, modelo para a transmissão do potencial de acção ao longo do axónio.

A elevada resistividade do axoplasma e o seu pequeno diâmetro (de 10 a 500  $\mu\text{m}$ ) originam um comprimento característico muito pequeno para o axónio (2–3 mm). Por exemplo, para as fibras nervosas da rã com diâmetro da ordem de  $10^{-3}$  cm e axoplasma com resistividade  $\rho=100 \Omega\text{cm}$ , a resistência por unidade de comprimento é  $R/\ell = \rho/A = 100 : (\pi \times (10^{-3})^2 : 4) = 127 \text{ M}\Omega/\text{cm}$ .



É de esperar, portanto, uma severa atenuação do sinal no axónio, contudo, apesar de tudo isto, o impulso nervoso é menos atenuado e deformado no axónio do que na mais bem calculada linha de transmissão.

#### IV.9.26 - A conservação da quantidade de movimento e a circulação pulmonar humana

No Cap. III.13.1 estudámos a conservação do momento linear em sistemas isolados. É possível criarem-se condições tais que o sangue e resto do corpo sejam estudados como se fossem partes de um sistema isolado. Este sistema é constituído pela totalidade do corpo assente numa placa mantida como que a flutuar por acção de jactos de ar incidindo na sua parte inferior, Fig. IV.125. Neutralizado, deste modo, o peso, a resultante das forças exteriores a actuar no sistema é nula e haverá conservação do momento linear ou seja o vector momento linear total do sangue terá de ser igual e oposto ao correspondente ao corpo+placa.

Os movimentos da placa são registados no registador **R**. O gráfico obtido nestas condições é conhecido por balistocardiograma e foi interpretado como contendo informação sobre o coração esquerdo como resultado da aceleração no corpo+placa, em reacção à força de inércia do sangue ejectado pelo ventrículo na aorta.

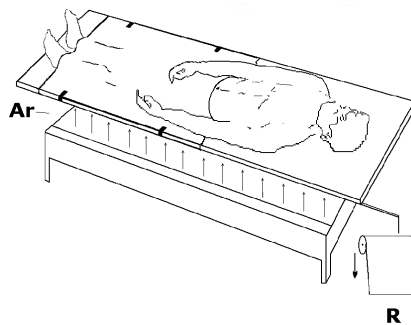


Fig. IV.125 - O corpo, assente numa placa, é mantida a flutuar por acção de jactos de ar incidindo na sua parte inferior criando-se condições tais que o sangue e resto do corpo podem ser estudados como se fossem partes de um sistema isolado constituído pela totalidade do corpo + placa.

Esta interpretação foi amplamente confirmada mas deixa, sem dúvida, uma questão que tem a ver com a ausência de aceleração no corpo como resultado da sístole direita. Seria de esperar uma reacção semelhante para a ejeção direita. Todavia, tudo se passa como se no caso da circulação pulmonar a conservação do momento linear ocorresse no próprio compartimento do sangue pulmonar sem qualquer reacção corporal. Devido à estrutura da árvore circulatória pulmonar o momento linear do sangue que entra nos vasos pulmonares com uma dada direcção é sempre compensado por um momento linear igual e oposto de sangue que entra noutra vaso. Desta estratégia de anular os esforços sobre a frágil estrutura vascular pulmonar resulta um efeito de protecção mecânica altamente eficiente.

#### IV.9.27 - A fonação e os princípios da aerodinâmica

Uma das características que distingue o homem dos outros animais é a sua capacidade de falar e usar a linguagem simbólica.

Todos os sons produzidos na fala são iniciados por uma expiração controlada. Na expiração o ar que é expelido pelos pulmões ascende pela traqueia, passa através da glote e laringe, entra na laringofaringe e sai pelo nariz e boca (Fig. 14.12). A laringofaringe é a parte inferior da faringe, uma passagem que se prolonga por trás da laringe até às cavidades oral e nasal.

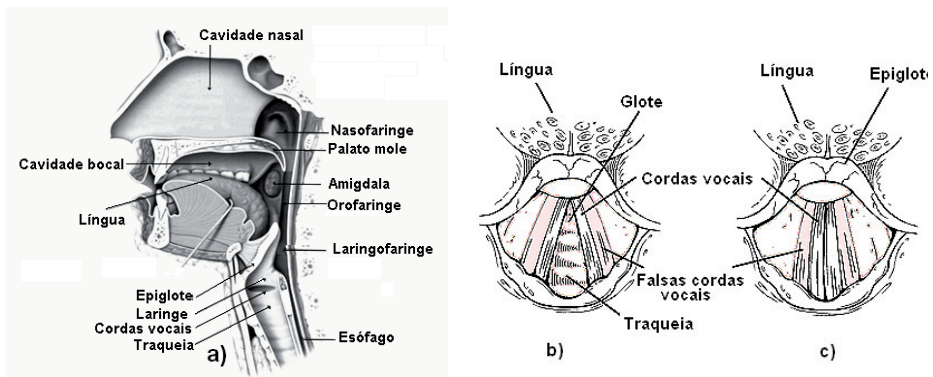


Fig. IV.126 - a) Esquema mostrando os elementos anatómicos mais importantes associados à fonação. b) Quando se respira normalmente e sem falarmos, as cordas vocais estão relaxadas. c) No discurso a tensão aplicada às cordas vocais aumenta, aproximando-as.

---

A laringe é um conjunto de onze cartilagens entre a faringe e a traqueia, com funções de controlo do fluxo de ar, início do processo de fonação e protecção da entrada dos pulmões no seguimento da acção da epiglote. Esta impede a progressão de alimentos para o aparelho respiratório, quando se engole, fechando a abertura da laringe.

As cordas vocais, são um par de ligamentos dentro da laringe que definem uma abertura triangular de dimensões variáveis, a glote, que pode controlar o fluxo de ar. Quando se respira normalmente e sem falarmos, as cordas vocais estão relaxados e não apresentam obstrução à passagem de ar através da laringe (Fig. IV.126b).

Durante a preparação para o discurso a tensão aplicada às cordas vocais aumenta, aproximando estas. Reduzida a área livre da glote (Fig. IV.126c), se nada mais variar, é produzida uma diminuição do caudal. Esta redução faz com que a pressão do ar abaixo das cordas vocais (pressão subglótica) aumente, forçando estas a abrir. O aumento da pressão é uma consequência que resulta da Equação de Newton, (Eq. IV.30).

As vibrações que se verificam nas cordas vocais podem ser entendidas com a ajuda do Teorema de Bernoulli (IV.6.4). Quando o ar passa através de uma área reduzida de glote, a sua velocidade é grande, e, conseqüentemente, a pressão na abertura é reduzida, obrigando a que as cordas vocais tendam a aproximar-se. Uma vez que a abertura se torna suficientemente pequena a pressão abaixo das cordas vocais aumenta criando forças nas cordas que, sendo elásticas, tendem a afastar-se de novo. Esse processo (fonação) continua-se enquanto a exalação persiste e origina vibrações (som laríngeo) onde se encontra um som fundamental, característico para dada tensão exercida pelos músculos tensores das cordas vocais, bem como os seus harmónicos.

A sucessão das acções opostas que referimos e as características físicas instantâneas das cordas vocais fazem com que estas vibrem com frequências bem determinadas, contudo, não são os sons laríngeos que vão ser efectivamente emitidos pela boca.

Órgãos ressoadores (faringe, cavidade bucal e cavidade nasal) e órgãos articuladores (faringe, boca, lábios, língua, palato mole e mandíbula) são encarregados de transformar a voz laríngea em voz falada, ou cantada. Para que os sons sejam produzidos correctamente estes órgãos devem adquirir conformações adequadas ou executar movimentos precisos, no instante certo, para que os sons pretendidos saiam correctos. As ressonâncias amplificam determinadas frequências e a articulação altera as ressonâncias para produzir sons inteligíveis.

A coordenação destes processos, executada pelo sistema nervoso, é um componente do estágio final de produção da fala, de enorme importância.

---

(Página deixada propositadamente em branco)

---

**C A P Í T U L O • V**



**PRINCÍPIOS BÁSICOS DE  
FÍSICA ATÓMICA,  
FÍSICA DA RADIOLOGIA,  
FÍSICA E MEDICINA NUCLEARES,  
FÍSICA DAS RADIAÇÕES IONIZANTES  
E  
FÍSICA DA LUZ SOLAR.**

---

(Página deixada propositadamente em branco)

---

## V.1 - Conceitos sobre as estruturas atómica e molecular

### V.1.1 - Considerações gerais

O estudo das reacções químicas veio mostrar que as moléculas são constituídas por átomos dos elementos. O número de moléculas possíveis de obter é praticamente ilimitado e, dentre estas, as moléculas biológicas são, igualmente, em número elevadíssimo. Recordemos alguns conceitos de importância no contexto presente.

O princípio de Avogadro estabelece que um volume de 22 400 cm<sup>3</sup> de um gás, a 0 °C e à pressão de 760 mm Hg, contém o mesmo número  $N_A$  de moléculas, qualquer que seja o gás. O número  $N_A$  é conhecido por número de Avogadro cujo valor ( $N_A = 6,023 \times 10^{23}$ ) foi determinado com idêntico resultado por um grande número de métodos diferentes. Massa atómica é a massa de um átomo expressa em **u** (unidades de massa atómica). Define-se a **u** como 1/12 da massa do isótopo 12 do elemento carbono. A **u** é próxima da massa do átomo de hidrogénio<sup>1</sup>. Massa molecular é a massa de uma molécula expressa em **u**. Átomo-grama é a massa atómica expressa em gramas. É também a massa em gramas de  $N_A$  átomos da espécie considerada. Molécula-grama (ou mole) é a massa molecular expressa em gramas. É também a massa em gramas de  $N_A$  moléculas da espécie considerada. Um conjunto notável de dados concordantes levou a considerar que o átomo é constituído por duas partes:

**a.-** Um núcleo central que concentra praticamente a totalidade da massa do átomo e onde se encontram **A** nucleões, as partículas mais pesadas do núcleo, que possuem uma massa muito próxima de 1 u. **A** é o número de massa do átomo considerado. Dentre os **A** nucleões, **Z** são portadores de carga positiva elementar **e**, são os protões. **Z** é o número atómico do átomo. Os restantes  $N=A-Z$  nucleões não têm carga eléctrica e são chamados neutrões. A carga eléctrica total do núcleo é positiva de valor **Ze**.

**b.-** Os electrões periféricos que “gravitam” em torno do núcleo, são em número de **Z** e cada electrão transporta uma carga eléctrica negativa elementar **-e**. A massa de 1 electrão é de 1/1822 u.

---

<sup>1</sup> A massa atómica do hidrogénio é 1,00797 u ( $1 \text{ u} = 1,6605402 \times 10^{-27} \text{ Kg}$ ).

Considerado globalmente o átomo é electricamente neutro. Algumas ordens de grandeza com interesse: raio do átomo  $\approx 10^{-8}$  cm (1 Å); raio do núcleo  $10^{-13} - 10^{-12}$  cm; raio do electrão  $\approx 10^{-13}$  cm; raio do nucleão  $\approx 10^{-13}$  cm. Exemplos: raio do átomo de hélio  $0,9 \times 10^{-8}$  cm; raio do átomo de radão  $2,2 \times 10^{-8}$  cm.

As massas específicas dos nucleões e do núcleo são enormes. A massa que teria um milímetro cúbico de nucleões é cerca de  $10^5$  toneladas.

A comparação dos raios do átomo e do núcleo mostra que embora pareça compacto à nossa escala, o átomo é essencialmente espaço vazio. Aumentando à escala o átomo, de modo a que o núcleo tenha 1 m de raio, o átomo fica com raio da ordem da centena de quilómetros.

Entre os núcleos de carga positiva e os electrões orbitais, de carga negativa, exercem-se forças electrostáticas atractivas que, como sabemos, variam com  $1/r^2$ , sendo  $r$  a distância entre as cargas.

A energia total de um electrão orbital é a soma da energia cinética do seu movimento em torno do núcleo, com a energia potencial resultante da atracção electrostática do núcleo. Ao próprio átomo pode ser atribuída uma energia total que permanecerá constante se não ocorrerem trocas com o exterior.

Quando um átomo recebe energia pode ocorrer aumento da sua energia total à custa do aumento da energia potencial de um electrão periférico que se afastará do núcleo. Não esqueçamos que a energia potencial de um electrão no campo do núcleo é

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-e(+Ze)}{r} \quad \text{V.1}$$

ou seja, quanto maior for a distância  $r$ , maior será  $U$  (um valor negativo é tanto maior quanto menor é o seu módulo).

Na Eq. V.1, em termos de mecânica clássica, o valor de  $r$  e o correspondente valor de  $U$  podem ser quaisquer. No caso dos electrões orbitais, os valores de energia possíveis, obedecem a restrições. Os resultados experimentais da espectrometria mostraram que um particular átomo só pode absorver, ou emitir, luz de frequências bem determinadas. Isto sugere que os saltos electrónicos que originam quer a emissão, quer a absorção da luz, ocorrem somente entre certos níveis de energia, característicos de cada espécie atómica. Adicionalmente, a teoria electromagnética provou que a órbita electrónica clássica, sem restrições energéticas, não é estável, pois o electrão teria de perder energia por emissão de radiação electromagnética.



A mecânica quântica do átomo veio esclarecer as contradições que a física clássica apresentava para interpretar os resultados experimentais obtidos sobre a estrutura atômica. Segundo a mecânica quântica nem todos os valores de energia do sistema electrão-núcleo são permitidos. Existe uma série finita de valores discretos de energia que constituem os estados possíveis de energia do electrão. A energia mecânica total correspondente a cada um destes estados é dada pela fórmula

$$E_n = (-b/n^2)Z^2 \quad \text{V.2}$$

onde  $Z$  é o número atómico do átomo e  $b$  uma constante. Igualou-se a zero a constante aditiva dependente da origem de potencial escolhida. A variável  $n$  pode tomar unicamente valores inteiros e positivos que caracterizam os diversos níveis de energia. Sendo um valor negativo, a energia do estado é tanto maior quanto maior for  $n$ . A energia é uma função crescente de  $n$  que se designa número quântico principal. Representando os níveis permitidos num eixo de energias, obtém-se a Fig. V.1.

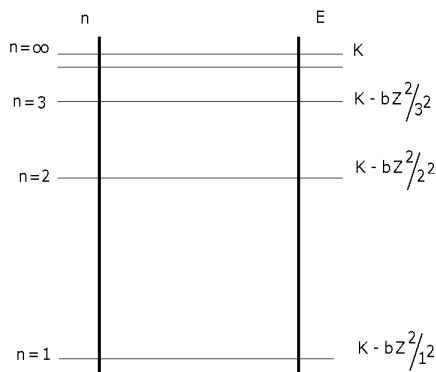


Fig. V.1 - Níveis de energia permitidos para os electrões periféricos.  $K$  é uma constante aditiva dependente da origem dos potenciais e que, na Eq. V.2, se iguala a zero.

Por definição, a energia potencial zero corresponde a um electrão situado no infinito, fora do campo de atracção nuclear.

Quando um electrão se encontra num dado nível definido por um dado valor de  $n$ , não emite energia radiante e a sua orbita é estável. Só haverá absorção ou libertação de energia quando um electrão passa de um nível para outro. A energia do estado, ou nível de energia do electrão, é tanto maior quanto maior for  $r$ , a distância do núcleo ao electrão. Aos sucessivos valores de  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) correspondem camadas electrónicas cada vez mais periféricas (designadas pelas letras maiúsculas K, L, M, N, ...) cada vez mais energéticas e para as quais a correspondente distância  $r$  cresce com  $n^2$ . Contudo, em mecânica quântica, a noção rígida de trajectória perde bastante do seu sentido clássico porque se mostra que é impossível conhecer simultaneamente, com exactidão, a posição e a velocidade de uma partícula (Princípio da incerteza). Pode, no entanto, determinar-se a região do espaço onde a probabilidade de presença do electrão é máxima. Esta região está tanto mais afastada do núcleo quanto maior for o valor de  $n$ . Em média um electrão **L** (que corresponde à segunda camada para a qual  $n = 2$ ) está quatro vezes mais afastado do núcleo do que um electrão **K** (correspondente a  $n = 1$ ).

Para se definir inteiramente, em termos de mecânica quântica, o estado dinâmico de um electrão são necessários mais três números quânticos, além de  $n$ .

Consideremos os restantes números quânticos, necessários para caracterizar o estado do electrão:

1.- O número quântico de momento angular (ou azimutal)  $\ell$  que pode tomar o valor zero e os inteiros e positivos compreendidos entre 0 e  $n - 1$ , ou seja

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \ell < n \quad \text{V.3}$$

A cada valor de  $\ell$  corresponde uma subcamada.

2.- O número quântico magnético  $m$  (número inteiro como  $\ell$ ) que pode tomar os valores inteiros compreendidos entre  $+\ell$  e  $-\ell$  ou seja:

$$-\ell \leq m \leq +\ell \quad \text{V.4}$$

3.- O número quântico  $s_e$  de spin que toma o valor  $+1/2$  ou  $-1/2$  consoante o electrão roda em torno do seu eixo no mesmo sentido ou em sentido inverso da sua rotação em torno do núcleo.

As características dos quatro números quânticos encontram-se sumariados no Quadro V.1.

Quadro V.1 - Números quânticos e características.

Nº Quântico	Designação	Valores	
Principal	n	1, 2, 3, ...	Camada
Azimutal	$\ell$	0, 1, 2, ....., n-1	Subcamada
Magnético	m	$-\ell, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell$	Orbital
Spin	$s_e$	+1/2, -1/2	

Interessa caracterizar, com um pouco mais de precisão, o significado dos números quânticos, atrás referidos.

Os números quânticos são soluções das equações de onda que definem a probabilidade de encontrar o electrão numa particular posição do espaço. Tais soluções caracterizam o movimento dos electrões, em torno do núcleo e o movimento próprio de rotação dos electrões.

O número quântico principal **n** caracteriza a energia das camadas e, podemos dizer, em termos gerais, que quanto mais elevado é **n** maior é a orbita do electrão.

O número quântico de momento angular  $\ell$  determina a excentricidade das órbitas electrónicas, ou seja, as possíveis distribuições de probabilidade para os electrões, numa mesma camada. Estas diferentes possibilidades constituem as subcamadas. Foi convencionalmente designarem-se as subcamadas por **s, p, d, f, g, h, ...** consoante o valor de  $\ell$  é 0, 1, 2, 3,...

Para  $\ell = 0$  a função de distribuição dos electrões é uma esfera com centro no núcleo, correspondente à subcamada **s**.

Para  $\ell = 1$  a função distribuição corresponde a duas esferas tangentes ao núcleo e corresponde à subcamada **p**.

Para valores de  $\ell > 2$  as funções de distribuição são progressivamente

mais complexas correspondendo a maiores graus de excentricidade.

O número máximo de electrões em cada subcamada pode indicar-se por:  $s^2$ ,  $p^6$ ,  $d^{10}$ ,  $f^{14}$  ...

O número quântico magnético  $m$  caracteriza a orientação das orbitais no espaço.

Para  $\ell = 0$  é  $m = 0$ , há um único orbital possível, o que seria de esperar, pois há uma única orientação para uma esfera com centro no núcleo.

Para  $\ell = 1$ ,  $m = -1, 0, 1$  ou seja, três possíveis orientações para as esferas tangentes ao núcleo que referimos atrás (Fig. V.2).

Quanto ao número quântico de spin, já nos referimos anteriormente ao seu significado.

O princípio de exclusão de Pauli exclui a possibilidade de haver, num mesmo átomo, mais do que um electrão com o mesmo conjunto de números quânticos ou seja, com os mesmos valores de  $n$ ,  $\ell$ ,  $m$ , e  $s_e$  simultaneamente.

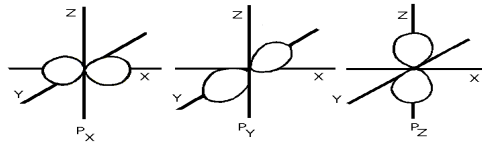


Fig. V.2 - Função distribuição dos electrões para  $\ell = 1$ . Esta função distribuição é representada por duas esferas tangentes ao núcleo e corresponde à subcamada  $p$ .

Isto impõe que a camada  $K$  seja saturada com dois electrões. Com efeito ser  $n = 1$  condiciona para  $\ell$  um único valor possível  $\ell = 0$  e, ao mesmo tempo,  $m = 0$ . Só restam, assim, os dois valores possíveis de  $s_e$ .

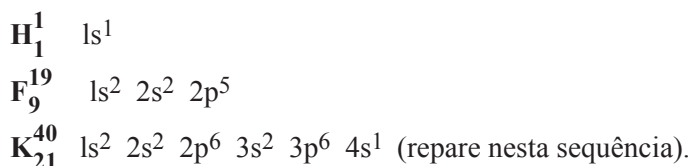
Por seu turno, a camada  $L$  não pode conter mais do que oito electrões. De facto

$n=2$	[	$l = 0$	—	$m = 0$	—	$s_e = \pm 1/2$	(Dois electrões)
		]	$l = 1$	[	$m = -1$	—	$s_e = \pm 1/2$
	$m = 0$			—	$s_e = \pm 1/2$	(Dois electrões)	
	$m = 1$			—	$s_e = \pm 1/2$	(Dois electrões)	
<b>Total de 8 electrões</b>							

Através de um cálculo simples pode demonstrar-se que o número máximo de electrões, na camada de ordem  $n$ , é  $2n^2$ . Pode assim mostrar-se que a camada **M** fica saturada com 18 electrões e a camada **N** com 32.

É muitas vezes útil considerar que cada conjunto de três números quânticos  $n, l, m$  define um orbital onde poderão estar dois electrões de spin oposto.

É costume representar cada subcamada pelo respectivo número quântico principal e pela letra correspondente ao número quântico orbital, indicando-se em índice superior o número de electrões presente. Vejamos as representações das estruturas electrónicas de alguns átomos



A estrutura electrónica do **In<sup>49</sup>** é apresentada no Quadro V.2 para uma melhor visualização.

Quadro V.2 - Distribuição electrónica do In (Z=49)

n	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5
ℓ	s	s	p	s	p	d	s	p	d	f	s	p
n+ℓ	1	2	3	3	4	5	4	5	6	7	5	6
												1
									10			
											2	
								6				
						10						
							2					
					6							
				2								
			6									
		2										
	2											

### V.1.2 - Preenchimento das camadas

Se as órbitas electrónicas fossem todas circulares o preenchimento das camadas seria feito por ordem crescente dos valores de  $n$  e  $\ell$ , sem qualquer complicação. Sucede, porém, que muitas órbitas são elípticas ocupando o núcleo do átomo um dos focos da elipse. Daqui resulta que o preenchimento das subcamadas nem sempre é efectuado segundo aquela ordem. A energia de um nível é realmente determinada pela soma dos números quânticos principal  $n$  e azimutal  $\ell$ . O preenchimento dos níveis faz-se segundo a ordem crescente da soma  $n + \ell$ .

Quando, para várias subcamadas, a soma  $n + \ell$  é igual, faz-se o preenchimento, em primeiro lugar, das subcamadas com menor  $n$ . Obtém-se então, a distribuição seguinte

	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^6$	$4s^2$	$3d^{10}$	$4p^6$	$5s^2$
$(n + \ell) =$	1	2	3	3	4	4	5	5	5
	$4d^{10}$	$5p^6$	$6s^2$	$4f^{14}$	$5d^{10}$	$6p^6$	$7s^2$	$8f^{14}$	
$(n + \ell) =$	6	6	6	7	7	7	7	8	

Deste modo ficaria explicada a estrutura electrónica do potássio considerada acima.

## V.2 - Estrutura electrónica e química dos elementos

### V.2.1 - Posição na tabela periódica

Para os átomos com mais de dois electrões, a carga nuclear é, de certo modo, impedida de actuar sobre os electrões mais externos devido ao efeito de anteparo exercido pelos electrões **K**. É este efeito que faz a energia de um orbital ser dependente do número quântico de momento angular  $\ell$  juntamente com o número quântico principal **n**.

Já sabemos que a cada repartição dos electrões, nas diferentes camadas e subcamadas, corresponde um valor de energia do átomo. O estado fundamental de um átomo é o estado de energia mínima. Neste estado os electrões encontram-se nos níveis de energia mais baixos, tendo em conta o princípio da exclusão de Pauli. O estado fundamental é o mais estável. Todos os outros estados tendem para este. A configuração electrónica dos átomos, no estado fundamental, determina as suas propriedades químicas, assim como a sua posição na tabela periódica. Os períodos da tabela estão relacionados com o preenchimento das camadas electrónicas.

A camada **K** pode ter um máximo de dois electrões. O primeiro período da tabela tem dois elementos: hidrogénio e hélio, H ( $Z = 1$ ), He ( $Z = 2$ ).

Na camada **L** ( $n = 2$ ) os primeiros electrões correspondem a  $\ell = 0$ . O lítio e o berílio são os elementos correspondentes, Li ( $Z = 3$ ), Be ( $Z = 4$ ). Depois seguem-se os electrões correspondentes a  $\ell = 1$ , de maior energia. Os elementos correspondentes vão agora do boro ao néon; B ( $Z = 5$ ), Ne ( $Z = 10$ ), num total de 6.

O segundo período da tabela compreende então oito elementos.

Na camada **M** ( $n = 3$ ), têm-se 2 electrões para  $\ell = 0$  e 6 electrões para  $\ell = 1$ , vai-se deste modo do Na ( $Z = 11$ ) ao árgon  $Z = 18$ . Antes porém de considerar  $\ell = 2$ , ao qual correspondem 10 electrões, temos os electrões da camada **N** ( $n = 4$ )  $\ell = 0$  que, como vimos, têm menor energia. Entra-se assim no quarto período antes de completar a 3ª camada. Portanto o 3º período

apresenta oito electrões embora a 3ª camada suporte 18 electrões. Usando raciocínios semelhantes podemos explicar toda a tabela periódica.

Por outro lado, propriedades químicas fundamentais são dependentes do potencial de ionização dos átomos e da sua afinidade electrónica. O primeiro é a energia mínima necessária para remover um electrão de um átomo neutro, a segunda é a energia com que um átomo neutro é capaz de ligar um electrão à sua estrutura. Estas propriedades estão também intimamente ligadas à estrutura electrónica.

Na grande maioria das situações os átomos agrupam-se de modo a constituírem agregados mais ou menos estáveis.

Quando estes agregados são constituídos por um número limitado e constante de átomos, temos as moléculas, quando são constituídos por um número quase ilimitado de átomos que varia de caso para caso, apresentando periodicidade na sua distribuição, temos os cristais.

As forças que os átomos exercem entre si poderão ser atractivas (ou de ligação) e repulsivas. Podemos ainda subdividir as forças atractivas em quatro tipos diferentes, dos quais três constituem as chamadas ligações fortes. Estas, também chamadas ligações químicas, são devidas a acções dos electrões mais periféricos dos átomos, não tendo os electrões mais internos qualquer participação em tais forças. As ligações mencionadas são: a) Ligação iónica, b) Ligação covalente e c) Ligação metálica.

A quarta das forças mencionadas como atractivas é bastante menos intensa que as anteriores. A ligação que origina é chamada ligação física. As forças em causa dizem-se de Van der Waals.

### V.2.2 - Ligação iónica

A ligação iónica (também chamada de electrovalente ou polar) é uma ligação electrostática entre iões. Entende-se por ião um átomo ou agregado estável de átomos portadores de carga eléctrica. O número de cargas elementares com o respectivo sinal transportados pelo ião constituem a electrovalência do ião.

Entre dois iões de sinal contrário à distância  $r$  e transportando cargas  $q$  e  $q'$  existe uma força de atracção de módulo

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2}$$



No caso mais simples o ião é um átomo único que perdeu ou adquiriu um ou vários electrões. O número de electrões que pode perder ou ganhar um átomo ou seja a sua electrovalência é indicado pela regra do octeto<sup>2</sup>: o nível periférico do ião deve ter 8 electrões (2 electrões  $\ell = 0$ , 6 electrões  $\ell = 1$ ) como um gás raro. Isto explica a pequena reactividade química dos iões, como vemos por exemplo comparando o comportamento do átomo de Na com o ião  $\text{Na}^+$ .

As características gerais da ligação iónica são:

1. - É uma ligação que se exerce até distâncias relativamente grandes. A distância entre dois iões vizinhos é de molde às nuvens electrónicas respectivas serem exteriores uma à outra.

2. - Não há uma direcção privilegiada na ligação iónica - A electrovalência não é dirigida.

3. - O campo eléctrico criado por um ião actua não só sobre o ião vizinho mas também sobre outros mais afectados. A força electrostática não é "saturada", exerce-se sobre um número ilimitado de iões.

4. - A ligação iónica não cria moléculas mas cristais onde os iões se dispõem regularmente.

### V.2.3 - Ligação covalente

É uma ligação entre átomos neutros que não pode verdadeiramente ser explicada senão com os conceitos da mecânica quântica.

Esta ligação envolve a partilha de electrões, em geral 2 electrões, por átomos vizinhos.

Quando cada um dos átomos fornece um electrão a ligação chama-se covalente simples. Quando os dois electrões são fornecidos pelo mesmo átomo a covalência diz-se dativa.

Como no caso da ligação iónica a formação da ligação covalente conduz a completar um octeto de electrões. Os átomos ficam com oito electrões na sua camada externa se for incluído o electrão (ou electrões) compartilhado(s) com o átomo vizinho. (Para o átomo de hidrogénio este número é reduzido a dois).

A molécula do cloro,  $\text{Cl}_2$ , é formada pela comunhão de dois electrões

---

<sup>2</sup> O Hidrogénio é excluído desta regra.

por dois átomos que deste modo completam o octeto de electrões de nível **M**. Após ter completado o octeto de nível **M** o átomo não pode contrair mais ligações de covalência.

Um par de electrões postos em comum são suficientes para satisfazer a condição anterior no caso do cloro.

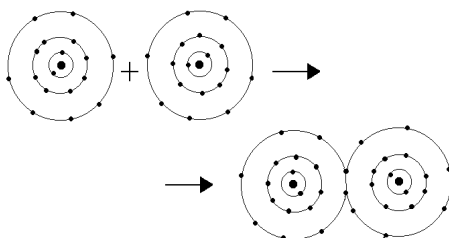


Fig. V.3 - Ligação de covalente por partilha de electrões da acamada **M** na molécula de  $\text{Cl}_2$ .

Para o oxigénio que tem 6 electrões na camada **L** (bivalente) a molécula  $\text{O}_2$  é formada à custa da partilha de dois pares de electrões (dupla ligação) obtendo-se a estrutura que se representa por  $\text{O}=\text{O}$ .

O átomo do carbono tem 4 electrões periféricos na camada **L**. Pode constituir  $8 - 4 = 4$  ligações covalentes com átomos vizinhos. Estas ligações podem ser duplas ou mesmo triplas. Vejamos alguns casos ilustrativos:  $\text{CH}_4$  (quatro ligações simples);  $\text{CH}_2=\text{CH}_2$  (uma ligação dupla e duas simples).

Do que para trás ficou dito podemos ainda concluir que a valência de um átomo é igual ao número de pares de electrões que um átomo pode ter em comum com outros átomos.

Natureza quântica das forças em jogo: já vimos que os oito electrões periféricos são obtidos para os valores  $\ell = 0$  (electrão **s**) e  $\ell = 1$  (electrão **p**) do número quântico de momento angular. Para  $\ell = 1$  correspondem três valores de **m**, número quântico magnético. A cada um dos valores de **m** correspondem, por sua vez, pares de electrões que apresentam spins opostos.

Num octeto incompleto é possível que certos electrões não apresentem os correspondentes pares de spin oposto. São estes electrões não emparelhados que contribuem para a ligação covalente. Tudo se passa como se os electrões compartilhados passassem de um átomo ao outro incessantemente e criando uma força de troca entre eles.

As características gerais da ligação covalente são as seguintes:

1. É uma ligação a pequena distância. As nuvens electrónicas de dois átomos ligados com este tipo de ligação covalente encontram-se sobrepostas. A distância entre dois núcleos vizinhos é inferior à soma dos raios dos átomos.

2. É uma ligação saturada - uma vez formadas as ligações necessárias para completar os octetos não há formação posterior de outras ligações covalentes. Os grupos de átomos que se associam com estas ligações são em geral pequenos e constituem moléculas.

3. A ligação covalente é dirigida no espaço porque os quatro pares de electrões de um octeto tendem a dispor-se no espaço segundo a configuração de um tetraedro regular.

4. A ligação covalente é uma ligação forte. É necessário uma energia elevada para romper uma ligação covalente (4,3 eV para a ligação H–H).

#### V.2.4 - Covalência dativa

É a ligação em que são partilhados dois electrões fornecidos por um dos átomos envolvidos. Um exemplo simples de covalência dativa é o caso do ião amónio.

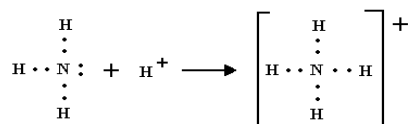


Fig. V.4 – Exemplo de covalência dativa.

A ligação entre três átomos de oxigénio pode também ser dada como exemplo pois há uma covalência dativa entre dois dos átomos da molécula (ozono).

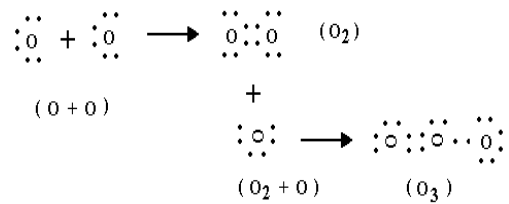
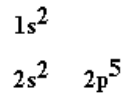


Fig. V.5 – Estrutura electrónica do ozono.

Aprofundemos um pouco mais o que temos vindo a dizer consideremos para isso a estrutura electrónica do flúor  $F_9^{19}$



O primeiro orbital ( $n = 1$ ) está completo com electrões com spins antiparalelos.



Fig. V.6 – Primeiro orbital completo do  $F_9^{19}$ .

A segunda camada possui um electrão isolado pertencente à subcamada  $p$ .

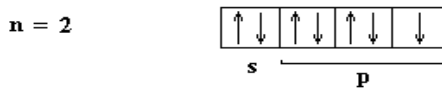


Fig. V.7 – Segunda camada do  $F_9^{19}$  com um electrão isolado pertencente à subcamada  $p$ .

Para que esta subcamada se encontre completa necessita de ter 6 electrões.

Se acontecer que o electrão isolado deste átomo e o electrão isolado de outro tenham spins antiparalelos eles passam a formar um orbital e é

estabelecida uma ligação entre os respectivos átomos. Fica a molécula F-F em que se representam apenas os electrões que participam na ligação, (correspondentes ao nível energético de número quântico  $n = 2$ ), por um traço contínuo entre os dois átomos.

Se representarmos a estrutura electrónica do átomo de flúor por

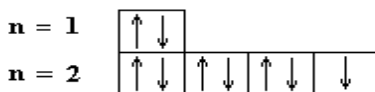


Fig. V.8 – Estrutura electrónica do átomo de  $F_9^{19}$ .

A estrutura da molécula é como na Fig. V.9 apresentando uma covaleência simples.

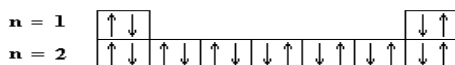


Fig. V.9 – Estrutura electrónica da molécula do flúor.

Consideremos o caso do lítio com o hidrogénio. A estrutura do lítio é

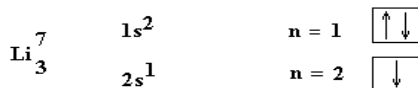


Fig. V.10 – Estrutura electrónica do átomo de  $Li_3^7$ .

Existe um electrão isolado de número quântico de momento angular zero. A estrutura electrónica do Hidrogénio é

Fig. V.11 – Estrutura electrónica do átomo de  $\text{H}_1^1$ .

Se os spins do electrão de Hidrogénio e do electrão isolado do lítio forem antiparalelos os átomos ligam-se pelo processo que considerámos anteriormente.



Consideremos agora a combinação do lítio com o flúor. As estruturas electrónicas dos átomos de flúor e de lítio, já indicadas, mostram que ambos possuem camadas incompletas com electrões não emparelhados. Nestas condições unem-se desde que os electrões não emparelhados possuam spins antiparalelos para formar a molécula de fluoreto de lítio.



Contudo aqui as coisas modificam-se pois o átomo de flúor possui muito maior afinidade para os electrões do que o lítio, pelo que o electrão isolado do lítio vai mudar de posição e aproximar-se do flúor que assim fica com as orbitais **p** completas. O flúor fica então com um electrão a mais do que antes e a sua estrutura electrónica fica semelhante à do néon que é o gás raro mais próximo.

Por ficar com as orbitais completas é pouco reactivo. O flúor transforma-se pois num ião com carga negativa. O átomo do lítio transforma-se também num ião e a sua estrutura electrónica torna-se semelhante à do hélio, já sem electrão na segunda camada.

A molécula fica então a ser constituída por dois iões de carga eléctrica oposta que se atraem mutuamente o que explica a sua grande estabilidade. Esta acção eléctrica estende-se a outros iões vizinhos constituindo-se cristais. Isto é pois a ligação iónica que já vimos.

Consideremos agora a ligação do flúor com o hidrogénio para dar uma molécula de ácido fluorídrico.

Tendo em conta as estruturas do flúor e do hidrogénio já indicadas podemos propor duas possibilidades para a molécula do ácido fluorídrico.

Uma em que os electrões livres dos dois átomos possuam spins antiparalelos e passem a pertencer a um orbital para o qual contribui um electrão de cada átomo.



Outra em que se completa a camada externa do F por captação do electrão livre do hidrogénio. O flúor transforma-se em fluoretião de carga negativa e o hidrogénio em hidrogenião (um protão) cuja carga positiva será



Mas como é que se pode saber qual é a estrutura que contribui para a constituição das moléculas? É possível saber-se a energia de dissociação da molécula e daí responder à pergunta. No caso presente, verifica-se que quer a estrutura covalente quer a polar são possíveis, coexistem as duas estruturas. A estrutura é ressonante entre os dois tipos indicados, ou seja entre



Indica-se com o sinal  $\Leftrightarrow$  que há ressonância



Se a contribuição da ligação iónica é superior a 50% dizemos que a ligação é iónica. Caso contrário dizemos que é covalente. No caso do ácido fluorídrico a ligação é iónica pois esta contribui com mais de 50%.

Consideremos agora outros aspectos das ligações covalentes. Já vimos que, ao estabelecer-se uma ligação covalente, os electrões não emparelhados de dois átomos possuindo spins antiparalelos, são compartilhados, preenchendo simultaneamente ambos os orbitais. Para o caso da ligação covalente feita à custa de dois electrões s, se recordarmos que o orbital s corresponde a uma distribuição esférica de probabilidade, facilmente se compreende que a aproximação dos dois átomos, envolvidos na ligação, produz uma sobreposição de duas distribuições esféricas de probabilidade. Origina-se uma nova distribuição na qual a probabilidade de encontrar os electrões aumenta na zona de sobreposição. A força de ligação resulta aliás da existência desta zona. Podemos apreciar o caso do hidrogénio na Fig. V.12.

Esta sobreposição frontal dos dois orbitais, no caso presente **s** (embora possa ocorrer com electrões **p** ou com um electrão **p** e um **s**), dá origem a um orbital molecular que se designa por  $\sigma$  (sigma).

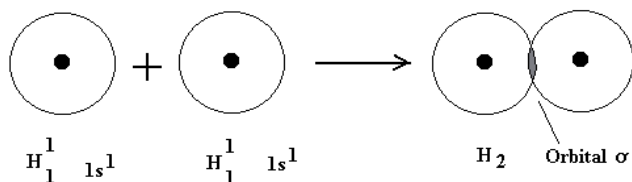
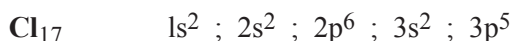


Fig. V.12 – A aproximação dos dois átomos envolvidos produz uma sobreposição de duas distribuições esféricas de probabilidade.

Consideremos em seguida o caso simples da molécula de cloro onde a ligação covalente é feita à custa de dois electrões **p**.

A estrutura electrónica do cloro é



O orbital  $\sigma$  para o caso da molécula  $Cl-Cl$  toma a configuração da Fig. V.13.

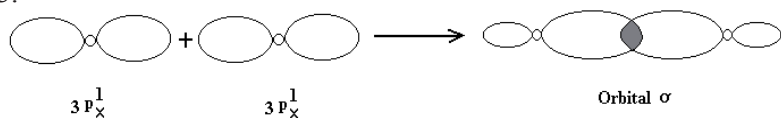


Fig. V.13 – Molécula de cloro com a ligação covalente feita à custa de dois electrões **p**.

Os orbitais são deformados sendo favorecidas as porções situadas entre os dois núcleos.

A característica fundamental do orbital  $\sigma$  é a simetria em torno do eixo, que une os núcleos dos dois átomos.

Dissemos anteriormente que o átomo do flúor atraía para mais próxi-



mo de si o electrão isolado do lítio, a ponto do electrão lhe ficar a pertencer.

O mesmo se dá com o flúor em relação do hidrogénio. Dizemos então que o flúor é mais electronegativo do que o hidrogénio. A electronegatividade de um átomo representa então a força de atracção que este átomo exerce sobre os electrões que pertençam a esse ou a outros átomos. O que interessa é o valor relativo da electronegatividade dos vários elementos.

Como exemplos, da escala das electronegatividades tirámos alguns valores:

F (4,0) ; Br (2,8) ; Mg (1,2) ; Cl (3,0) ; Li (1,0);

K (0,8) ; Na (0,9) ; P (2,1) ; H (2,1) ; O (3,5)

As ligações iónicas ou polares são, como vimos, de um tipo perfeitamente distinto das ligações covalentes embora possam ocorrer nas mesmas moléculas.

A primeira das ligações é puramente heteropolar (atracção electrostática entre dois pólos).

De um modo geral os compostos de ligações polares (compostos electrovalentes) possuem as características seguintes:

- a) Boa condução da corrente eléctrica quando fundidos.
- b) Pontos de fusão e ebulição elevados
- c) Rápida dissolução em solventes com constante dieléctrica elevada
- d) Formam cristais cuja unidade na rede é o ião.

Na covalência, a ligação não tem qualquer carácter polar se os átomos forem idênticos. As moléculas Cl-Cl ou O=O não são dipolos. Contudo se os átomos são diferentes possuindo diferentes electronegatividades surge o carácter polar da molécula.

Os compostos resultantes de ligações covalentes têm as seguintes características gerais:

- a) Má condução da corrente eléctrica quando fundidos.
- b) Baixos pontos de fusão e ebulição.
- c) Rápida dissolução em solventes com constantes dieléctrica elevada
- d) Formam cristais cuja unidade na rede é a molécula.

No último caso, são forças de Van der Walls, acções intermoleculares

fracas, as responsáveis pela estrutura dos cristais (ver VII.6.5).

Em face dos conceitos citados anteriormente sobre electronegatividade é de prever que certas moléculas apresentem assimetria na distribuição de carga eléctrica devido aos electrões serem mais fortemente solicitados por um dos átomos de molécula, como por exemplo no caso da molécula H-F. Deste modo embora não se trate de um ião haverá um polo positivo e outro negativo na molécula ou seja trata-se de um dipolo.

A assimetria na distribuição de carga pode ser avaliada pelo momento dipolar eléctrico da molécula. (ver V.7.1).

As acções mútuas entre corpos carregados electricamente são alteradas pela presença de moléculas de um dieléctrico. Esta acção deve-se à existência de moléculas polares no dieléctrico.

A constante dieléctrica de um meio permite comparar a intensidade da força electrostática entre corpos carregados, nesse meio, com a intensidade, para igual situação, no vazio.

A constante dieléctrica do vazio é 1 unidade C.G.S. (1 U.E.C.G.S.) e a da água 80 U.E.C.G.S. Deste modo, a força atractiva entre duas cargas a uma dada distância é 80 vezes maior no vazio do que quando há água entre as cargas. Esta proporcionalidade inversa é evidente pela expressão da lei de Coulomb.

A dissolução de cristais iónicos em água deve-se a este factor.

O fenómeno da ressonância quântica pode também ocorrer entre várias estruturas possíveis do tipo ligação covalente. Seja a molécula do ozono O=O-O. Esta molécula apresenta uma marcada assimetria ou pelo menos a sua representação assim o sugere. Contudo, na prática tudo se passa como se as ligações fossem idênticas.

Uma possibilidade de explicação do facto é por uma ressonância entre a covalência e a covalência dativa, constituindo-se a chamada situação de estrutura híbrida. Diz-se que a dupla ligação do ozono está em ressonância entre as duas posições.

O benzeno  $C_6H_6$  é um exemplo demonstrativo que permite desenvolver esta ideia.

Já foram propostas as estruturas seguintes para o benzeno

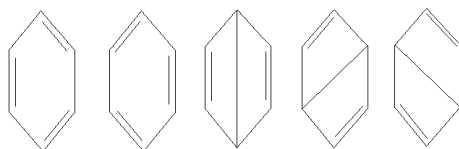


Fig. V.14 – Estruturas propostas para o benzeno

Nenhuma destas fórmulas explica completamente as propriedades do benzeno. Em particular, todos os resultados experimentais fazem acreditar numa completa equivalência entre as 6 ligações existentes na molécula. Tudo se passa como se o benzeno estivesse em ressonância entre as cinco estruturas possíveis.

Esta coexistência de várias estruturas que se chama mesomeria não significa que algumas moléculas tenham uma certa estrutura e outras uma outra. O verdadeiro estado da molécula é intermediário a estas 5 fórmulas que correspondem a situações limite.

Interpreta-se a mesomeria do benzeno através da existência de 6 electrões de ligação (ditos electrões  $\pi$ ) que não pertencem em particular a um determinado par de átomos, mas à molécula no seu conjunto. Estes electrões encontram-se para cima e para baixo do plano definido pelos 6 átomos e seriam constantemente sujeitos a trocas com estes.

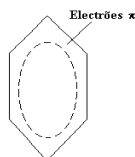


Fig. V.15 – Estrutura electrónica do benzeno.

Encontra-se explicado já que os 6 átomos do benzeno são equivalentes, constituindo cada par uma ligação covalente à qual se junta uma ligação parcial, devida aos electrões  $\pi$ .

Sob o ponto de vista energético pode mostrar-se que a energia total de ligação dos diversos elementos da molécula de benzeno é superior à que corresponderia a qualquer das estruturas que apresentámos, ou seja (soma das energias de ligação de 3 ligações covalentes simples + 3 ligações covalentes duplas). O suplemento de energia de ligação que corresponde a um aumento da estabilidade chama-se energia de "ressonância".

### V.2.5 - Ligação metálica

É uma ligação forte que assegura a coesão estrutural nos metais. A rede cristalina dos metais é constituída por iões positivos. Não obstante a repulsão que exercem estes iões, os electrões livres existentes no metal asseguram a coesão existente na estrutura, sem contudo estarem ligados aos iões da rede.

---

### V.2.6 – Ligações fracas

Resultam da interacção electrostática entre dipolos moleculares. Podem actuar no interior das moléculas, originando ligações secundárias de pequena energia, importantes na definição da estrutura terciária.

De particular importância são, nesta categoria de forças, as ligações hidrogénio (ver VII.6.2). As moléculas contendo **H** comportam-se como dipolos de momento dipolar elevado. Por este facto é possível formarem-se ligações com outras moléculas sobretudo se contém **O**, **F** ou **N**, elementos bastante electronegativos.

Embora menos sólida do que as ligações atómicas, a ligação hidrogénio é mais forte do que as ligações de Van der Waals (ver VII.6.5). A ligação de Hidrogénio (ponte de hidrogénio) pode representar-se



(Sendo **AH** a molécula contendo **H** e **OB** uma molécula contendo **O**).

A ligação **H** explica certas propriedades físicas da água, das proteínas, ácidos nucleicos, etc.

## V.3 - Princípios básicos de física da radiologia

### V.3.1 - Generalidades

Presentemente, e de um modo geral, os raios **X** usados para fins de diagnóstico médico, são produzidos por bombardeamento de eléctrodos com feixes de electrões de elevada energia cinética. As características exigidas aos raios **X**, para a execução das diferentes técnicas radiológicas são, em grande parte, obtidas por variação da energia cinética dos electrões e da densidade de corrente daqueles feixes<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Densidade de corrente de um feixe de electrões numa ampola de raios **X** é, muitas vezes, definida pelo número de electrões que, por segundo, atravessam a área de 1 cm<sup>2</sup> normal à

As Figs. V.16 a) e b) mostram, em esquema simplificado, a constituição de uma moderna ampola de raios X

Na ampola, onde se faz um vácuo elevado ( $<10^{-6}$  mm Hg), existe um filamento de tungsténio **f**, um dispositivo de focagem **D** e um ânodo **A** (ou anticátodo) também, em geral, de tungsténio.

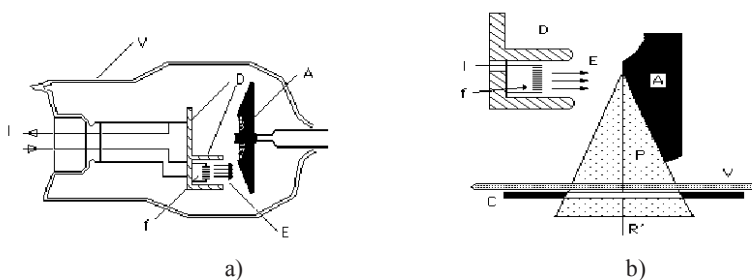


Fig. V.16 - a) - Corte esquemático de uma ampola de raios X.  
 X. b) - Pormenor do esquema anterior. A - Ânodo; E - Electrões; V - Parede de vidro; P - Feixe primário<sup>4</sup> dos raios X; D - Eléctrodo de focagem; R' - Raio central; f - Filamento; C - Colimador; I - Intensidade de corrente de filamento.

O filamento é levado ao rubro por efeito Joule produzido pela corrente eléctrica **I** que o atravessa. Entre o ânodo e o filamento é aplicada uma diferença de potencial que pode ir de algumas dezenas à centena e meia de quilovolts.

Os electrões emitidos do filamento por efeito termoiónico são acelerados no campo eléctrico existente entre **A** e **f**. Devido à acção do eléctrodo de focagem **D**, os electrões são dirigidos sobre uma área mínima do ânodo, o foco, idealmente pontual, cedendo aí a sua energia cinética.

A maior parte desta energia é libertada na forma de calor e só uma pequena fracção é emitida na forma de energia electromagnética **X**. O aspecto típico do espectro de energia da radiação emitida está representado na Fig. V.17.

Neste espectro, sobre uma distribuição contínua, observam-se alguns

direcção da sua velocidade. Multiplicando esse número pelo valor da carga do electrão (em Coulomb), obtemos a densidade de corrente em  $A\ cm^{-2}$ .

<sup>4</sup> Um feixe de radiação electromagnética é um conjunto de fotões emitidos por uma fonte, em geral, de pequenas dimensões, limitado por um colimador com forma circular ou rectangular, situado próximo da fonte. No caso dos raios X a secção normal ao raio central é geralmente quadrangular ou rectangular.

picos, cuja contribuição para a intensidade total é pequena.

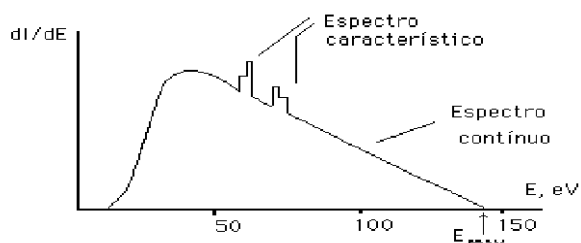


Fig. V.17 - Distribuição da energia emitida por uma ampola de raios X. ( $dI/dE$  – intensidade do feixe por unidade de energia dos fotões.  $E_{\max}$  - máxima energia dos fotões emitidos).

As Figs. V.18 e V.19 esquematizam os processos que ocorrem no anticátodo com os electrões do feixe, e de que resulta a produção de raios X.

O fenómeno esquematizado na Fig. V.18 é o responsável pela distribuição contínua do espectro e consiste na perda de energia cinética de electrões que passam próximo do núcleo de átomos do anticátodo. É o efeito de bremsstrahlung (travagem dos raios). A variação da velocidade dos electrões, sobretudo devido à acção atractiva de núcleos, de elevado número atómico, é a causa desta emissão de fotões.

A energia dos fotões emitidos neste processo ou, se quisermos, a energia perdida pelos electrões, depende do número atómico dos núcleos, da distância de interacção electrão-núcleo e da energia cinética dos electrões.

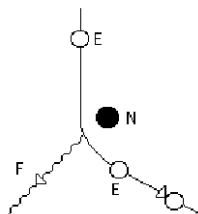


Fig. V.18 - Efeito de bremsstrahlung. E - Electrão; N - Núcleo; F - Fotão de bremsstrahlung.

A energia máxima do espectro dos raios X,  $E_{\max}$ , é igual à energia

cinética dos electrões incidentes e corresponde à transformação em energia electromagnética de toda a energia cinética do electrão.

Os picos que se observam no espectro da Fig. V.17 devem-se aos fenómenos esquematizados nas Figs. V.19 a) e V.19 b).

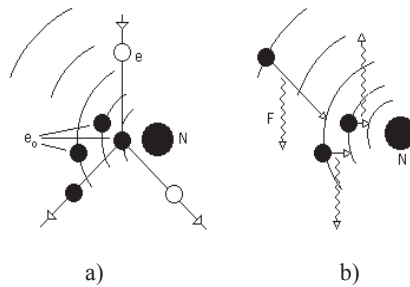


Fig. V.19 -Produção de raios X característicos. e - Electrão incidente; e<sub>0</sub> - Electrão orbital; N - Núcleo; F - Fóton característico.

Os electrões incidentes (no anticátodo) **e** podem colidir com electrões **e<sub>0</sub>** das camadas mais internas dos átomos do ânodo, produzindo ionização ou excitação, Fig. V.19 a) e b). No primeiro caso, um electrão orbital é expelido do átomo. No segundo caso, um electrão passa a ocupar um nível de energia mais elevado no átomo. Em qualquer destas condições, os átomos ficam instáveis e um electrão de uma das camadas de maior energia potencial, irá ocupar a vaga produzida pela colisão. Este processo ocorre com a emissão de um fóton. A energia desse fóton é característica dos átomos do ânodo e poderá ser de raios **X**, para átomos de **Z** elevado. Outros saltos quânticos com libertação de radiação electromagnética característica se seguirão, até ao estado energético do átomo ser mínimo. No caso da ionização, este estado corresponde ao átomo sem um dos electrões de energia de ionização mínima, no caso da excitação corresponde ao estado fundamental.

As energias dos vários picos que ocorrem no espectro são características da espécie atómica que constitui o ânodo; as intensidades relativas desses picos dependem das diversas possibilidades de interacção com os electrões mais próximos do núcleo, bem como das diferentes alternativas

para emissão da energia de excitação do átomo. O espectro de riscas que se sobrepõe à parte contínua, na Fig. V.17, tem, assim, uma natureza idêntica à dos espectros ópticos de emissão, igualmente de riscas. Para o caso dos raios **X**, as riscas resultam de interacções com os electrões mais ligados ao núcleo em elementos de número atómico elevado, e são riscas **K**, **L** ou **M**. Torna-se evidente que estas riscas só estarão presentes se a energia cinética dos electrões incidentes for superior à energia característica dos níveis correspondentes, o que pode verificar-se numa ampola de raios **X**.

No caso dos espectros ópticos trata-se de transições de baixa energia e os fótons característicos emitidos são fótons luminosos.

Os dois processos, atrás mencionados, que explicam a Fig. V.17 e estão na origem da produção dos raios **X**, estão longe de ser os únicos que levam à perda de energia dos electrões acelerados, quando estes colidem com o átomo. As colisões com os electrões menos ligados ao núcleo, mais abundantes nos átomos de **Z** elevado, são os processos que predominam. Destas colisões resulta a transformação em calor de mais de 99% da energia cinética dos electrões acelerados. O rendimento total para emissão de raios **X**, numa ampola vulgar para fins clínicos, é cerca de 1%.

O valor máximo de energia,  $E_{\max}$  da Fig. V.17, a que corresponde o comprimento de onda mínimo  $\lambda_{\min}$  da radiação **X**, ocorre quando toda a energia cinética do electrão incidente é transformada em energia electromagnética. Se o potencial acelerador na ampola for **V** e se admitirmos que os electrões partem de **f** com velocidade inicial desprezável, a energia cinética dos electrões, ao atingirem o anticátodo, por aplicação da conservação de energia, vem dada por

$$\frac{m_e v^2}{2} = eV \quad \text{V.6}$$

onde  $m_e$  é a massa do electrão.

Se toda a energia cinética aparecer na forma de um fóton de raios **X**, tem-se

$$E_{\max} = h\nu_{\max} = eV \quad \text{V.7}$$

onde **h** é a constante de Planck e  $\nu_{\max}$  a frequência máxima da



radiação **X** emitida. Lembrando a definição de electrão-Volt<sup>5</sup>, facilmente se vê que a energia máxima dos fotões emitidos na ampola é o número de eV que iguala o valor em volts do potencial acelerador.

Como  $v = \frac{c}{\lambda}$ , com  $c$  velocidade da luz no vazio, a equação anterior pode escrever-se:

$$E_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} =$$

ou seja,

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} \quad \text{V.8}$$

Substituindo os valores das constantes, podemos obter a fórmula de Douane e Hunt

$$\lambda_{\min} (\text{Å}) = \frac{12,403}{V (\text{kV})} \quad \text{V.9}$$

Para um feixe de raios **X** obtido com uma tensão aceleradora constante no ânodo, é usual indicar o seu comprimento de onda efectivo, que corresponde ao comprimento de onda de um feixe monoenergético com propriedades idênticas às do feixe real de raios **X**. Em geral, considera-se que

$$\lambda_{\text{ef}} = 3/2 \lambda_{\min} \quad \text{V.10}$$

A energia efectiva,  $E_{\text{ef}}$  é a energia que corresponde ao comprimento de onda efectivo  $\lambda_{\text{ef}}$ , ou seja, usando as Eqs. V.8 e V.10.

$$\begin{aligned} E_{\text{ef}} &= \frac{2}{3} \frac{hc}{\lambda_{\min}} \\ &= \frac{2}{3} E_{\min} \end{aligned} \quad \text{V.11}$$

A energia efectiva é, portanto, 2/3 da energia máxima dos fotões

---

<sup>5</sup> Electrão-Volt é a energia cinética que um electrão adquire por acção de uma diferença de potencial de 1 V.

emitidos.

A equivalência entre as propriedades de um feixe monoenergético de energia igual à energia efectiva (ou comprimento de onda igual ao comprimento de onda efectivo) e as propriedades do feixe real é uma aproximação tanto mais grosseira, quanto mais largo for o espectro de energia deste feixe.

Deve, no entanto, referir-se que a Eq. V.10 é uma aproximação que só é aplicável se a tensão aceleradora for constante. Por exemplo, quando a tensão  $V$  aplicada ao ânodo, for obtida directamente por rectificação de onda completa<sup>6</sup>, então

$$\lambda_{ef} = 1,8 \lambda_{min} \quad V.12$$

Raios  $X$  com diferentes  $\lambda_{ef}$  dizem-se de qualidade diferente. Os raios  $X$  clínicos de pequeno  $\lambda_{ef}$  (mais penetrantes) denominam-se duros e os de maior  $\lambda_{ef}$  (menos penetrantes) denominam-se moles. O ânodo das ampolas de raios  $X$  para fins clínicos é, em geral, de tungsténio, por duas razões principais: a primeira é que os elementos de número atómico elevado são mais eficazes na produção de fotões do espectro contínuo de energias, que é o que interessa em medicina, e o segundo, é o elevado ponto de fusão do tungsténio (3 380 °C). Esta última propriedade é importante pois, não obstante os anticátodos serem rotativos e arrefecidos por circulação interior de água ou óleo, podem atingir temperaturas elevadíssimas, depois de algum tempo de funcionamento.

Na Fig. V.16 b) está representado a sombreado o feixe de raios  $X$  útil, limitado pela janela existente no colimador  $C$ . Os fotões de raios  $X$  não são emitidos isotropicamente. Para as condições de trabalho utilizadas em radiologia, as maiores probabilidades de emissão ocorrem para ângulos próximos dos 90° com a direcção de incidência dos electrões.

Os comprimentos de onda e as correspondentes energias dos raios  $X$  usados no diagnóstico e na terapêutica, bem como os dispositivos utilizados na sua produção, podem observar-se na Fig. V.20.

Raios  $X$  de muito elevadas energias podem ser obtidos com electrões

---

<sup>6</sup> - Obtida por rectificação de corrente monofásica utilizando, em geral, uma ponte de quatro díodos.

acelerados em aceleradores, tais como o betatrão onde se obtêm raios X de  $10^7$  a  $10^8$  eV mas, neste caso, com elevados rendimentos, da ordem dos 80%.

Como é de esperar, as diferentes aplicações radiológicas exigem diferentes qualidades, quantidades e modos de aplicação dos raios X. O espectro dos raios X de um feixe depende da tensão aceleradora aplicada ao tubo.

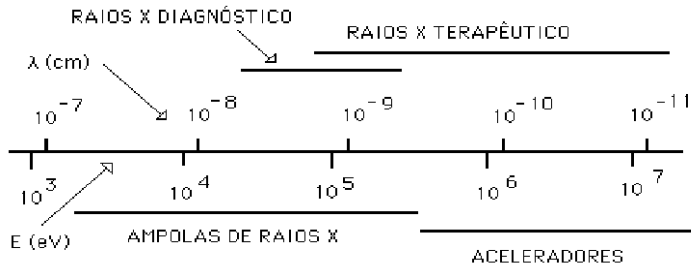


Fig. V.20 - Comprimentos de onda, energias e dispositivos de produção de raios X com interesse médico.

A modificação desta tensão faz variar as energias máxima e efectiva, bem como a intensidade total dos raios X emitidos (Fig. V.21). Nesta figura as curvas foram obtidas para a mesma intensidade de corrente anódica  $I_a = 20$  mA.

A quantidade de radiação X emitida por uma ampola pode ser alterada sem variar a energia máxima. Para uma dada tensão aceleradora, a quantidade de raios X emitida depende do número de electrões que atingem o ânodo, ou seja, da intensidade anódica que, por sua vez, depende da intensidade da corrente de aquecimento do filamento I.

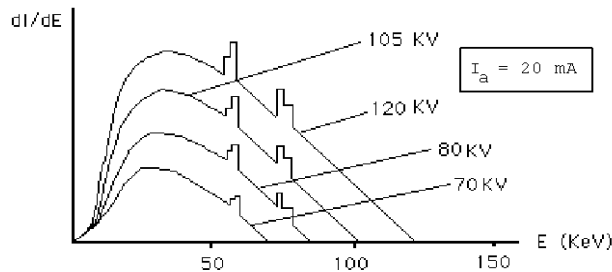


Fig. V.21 - Curva  $dI/dE$  em função de E para diversas tensões aceleradoras.

Na Fig. V.22, as coordenadas são idênticas às da figura anterior mas o parâmetro é a corrente anódica.

Em medicina, o espectro dos feixes de raios X mais correntemente utilizados em radiologia, após absorção no vidro da ampola e filtragem apropriada (alumínio ou cobre), tem o aspecto da Fig. V.23. Embora uma parte considerável da área subentendida corresponda a energias próximas do máximo do espectro, este está longe de ser monoenergético.

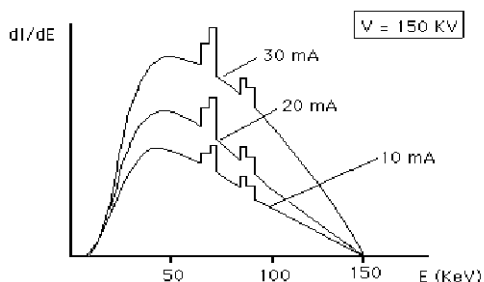


Fig. V.22 - Curvas  $dI/dE$  vs.  $E$ , obtidas com diversas intensidades de corrente anódica e para tensão aceleradora constante.

Praticamente só a parte contínua do espectro tem interesse em medicina. A grande exceção é a mamografia, com ânodos de molibdénio, onde por razões dosimétricas é utilizada sobretudo radiação característica.

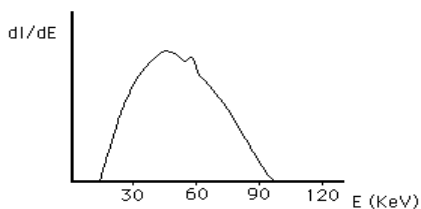


Fig. V.23 - Espectro de raios X clínicos após filtragem acentuada (tensão anódica de 100 kV).

---

A filtragem do feixe de raios **X** altera a forma do espectro, aumentando a participação relativa das energias mais altas, ou seja, endurece o feixe. A filtragem total do feixe é a soma da filtragem inerente com a filtragem adicional. A filtragem inerente é devida ao vidro do tubo, a líquido de arrefecimento e à espessura e constituição da janela. A filtragem adicionada é colocada para alterar o espectro de raio **X**, tornando-o mais próximo do monoenergético. De um modo geral, usam-se filtros de alumínio em diagnóstico e de cobre em radioterapia. Em radiologia são usados filtragens equivalentes a 1,5 mm de **Al** para tensões aceleradora de 70 kV<sub>p</sub> e 2,5 mm de **Al** para 100 kV<sub>p</sub>.

## V.4 - Princípios básicos de física nuclear

### V.4.1 - Núcleo

Para garantir a electroneutralidade do átomo, a carga positiva do núcleo deve ser igual e de sinal contrário à soma das cargas negativas dos electrões. A carga do núcleo deve ser então um múltiplo **Ze** da carga elementar positiva **e**. O número inteiro **Z** é o número atómico do elemento; representa o seu número de ordem na tabela periódica, bem como o número de electrões orbitais e de protões presentes no núcleo. O número atómico **Z** determina as propriedades químicas do elemento.

Os núcleos atómicos são constituídos por **Z** protões, partículas iguais ao núcleo do átomo mais leve do hidrogénio e **N** neutrões, partículas com massa próxima da do protão mas neutras.

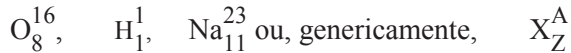
O número  $A = Z + N$  é o número de massa do elemento.

Abrangendo protões e neutrões na designação de nucleões, o número **A** representa o número de nucleões presentes no núcleo.

O número de massa **A** é também o número inteiro mais próximo da massa nuclear, expressa em unidades de massa atómica.

Chama-se nuclide qualquer configuração atómica capaz de existir, mesmo que transitoriamente.

Para perfeita caracterização de um nuclide, deve indicar-se, além do seu símbolo químico, o seu número atómico e o seu número de massa, como se segue:



Esta notação permite conhecer o número de prótons  $Z$  desse nuclídeo, bem como o número de neutrões  $N = A - Z$ .

Enquanto que o raio dos átomos não varia, praticamente, com o número de massa  $A$ , o raio do núcleo varia, de acordo com a relação:

$$r = 1,4 \times A^{1/3} \times 10^{-13} \text{ cm}$$

O maior núcleo existente naturalmente é o do  $\text{U}_{92}^{238}$  cujo raio é próximo de  $9 \times 10^{-13}$  cm.

O volume nuclear, proporcional a  $r^3$ , varia directamente com  $A$ . Consequentemente a densidade nuclear é, aproximadamente, constante. O átomo tem raio da ordem dos  $10^{-8}$  cm, ou seja, cerca de  $10^5$  vezes maior do que o raio do núcleo. A relação entre os volumes nuclear e atómico é, aproximadamente,  $10^{-39}/10^{-24} = 10^{-15}$ , que é um valor muito inferior à relação entre o volume do sol e o volume do sistema solar. Assim, em termos relativos, o núcleo ocupa menos espaço no átomo do que o sol ocupa no volume limitado pelas órbitas do planeta Plutão.

A estabilidade e coesão dos constituintes do núcleo atómico, onde se concentram todas as cargas positivas existentes no átomo, não pode, necessariamente ser explicada por forças electrostáticas.

Por outro lado, as forças de atracção gravitacional não podem explicar a estabilidade do núcleo. Quando se calcula a força newtoniana, atractiva, entre um próton e um neutrão, no núcleo de deutério ( $\text{H}_1^2$ ), considerando como distância entre os dois nucleões o raio de núcleo ( $r \approx 10^{-13}$  cm), o resultado obtido é uma força cerca de  $10^{38}$  vezes menor que a necessária para explicar a energia de ligação entre os dois nucleões.

As forças gravitacionais são, pois, desprezáveis no núcleo. Para explicar as ligações intranucleares teremos de admitir a existência de forças de natureza não prevista pela física clássica.

Bombardeando hidrogénio com prótons e estudando a distribuição angular dos prótons difundidos, foi possível demonstrar que a energia potencial entre dois prótons se comporta, em função da distância, do modo seguinte (Fig. V.24):

Para distâncias maiores do que  $3 \times 10^{-13}$  cm, os prótons repelem-se, devido à força electrostática, havendo uma energia potencial electrostática positiva.

Para uma distância de cerca de  $3 \times 10^{-13}$  cm, há uma descida súbita da energia potencial electrostática, passando a exercer-se uma força nuclear atractiva de grande intensidade.

Por outro lado, há razões para supor que para distâncias ainda mais pequenas ( $\approx 10^{-14}$  cm), a força nuclear se transforma em repulsiva.

As forças nucleares entre próton e neutrão foram estudadas fazendo incidir neutrões sobre alvos de hidrogénio e, mais uma vez, analisando a distribuição angular das partículas difundidas.

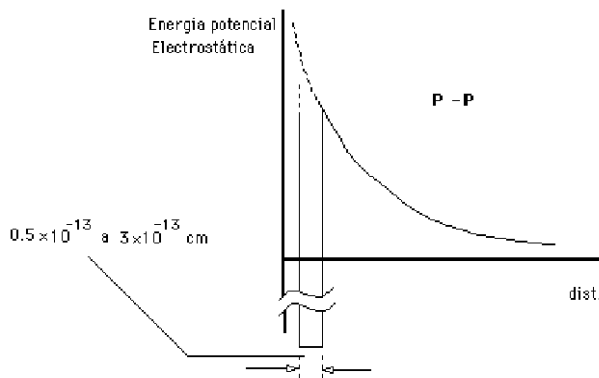


Fig. V.24 - Energia potencial em função da distância entre 2 prótons.

Para grandes distâncias, não há interacção, mas para cerca de  $3 \times 10^{-13}$  cm, o próton e neutrão atraem-se sob a acção de uma intensa força nuclear.

Como se vê na Fig. V.25-a), para grandes distâncias, não há interacção mas, a partir de  $3 \times 10^{-13}$  cm, o próton e neutrão atraem-se sob a acção da força nuclear (energia potencial negativa). Para distâncias da ordem de  $0,5 \times 10^{-13}$  cm a força nuclear torna-se repulsiva (energia potencial positiva).

Como se observa na Fig. V.25-b), a força nuclear pode considerar-se como resultante de duas acções, uma atractiva a actuar a partir de  $3 \times 10^{-13}$  cm e outra repulsiva, esta actuante a partir de distâncias de cerca de  $0,5 \times 10^{-13}$  cm.

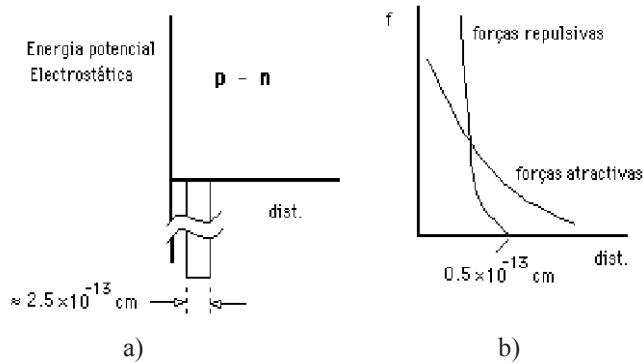


Fig. V.25 - Energia potencial em função da distância entre próton e um neutrão.

A grandeza da força p-n é praticamente igual à p-p.

Embora as forças nucleares entre dois neutrões não se possam estudar por experiências de difusão, visto não ser possível preparar alvos de neutrões livres, há provas indirectas de que a força neutrão-neutrão ( $f_{n-n}$ ) é igual à força próton-neutrão ( $f_{p-n}$ ) e, portanto, também à força próton-próton ( $f_{p-p}$ ). A curva da energia potencial em função da distância para a interacção n-n deve ser pois, idêntica à da Fig. V.25-a).

Podemos resumir as propriedades fundamentais das forças nucleares, como se segue:

1 - Independência da carga

$$f_{p-p} = f_{p-n} = f_{n-n}$$

2 - Exercem-se a pequenas distâncias (só se fazem sentir a distâncias da ordem de grandeza dos raios dos núcleos).

3 - Mais intensas que as forças electrostáticas (a  $10^{-13}$  cm, a força nuclear p-p é cerca de 40 vezes maior que a força repulsiva electrostática).

4 - São forças saturadas, ou seja, ocorrem entre pares de nucleões.

Uma pergunta que surge, após esta breve discussão de algumas propriedades das forças nucleares, é qual a sua natureza.

O físico japonês Hideki Yukawa demonstrou teoricamente que, para explicar a intensa força de ligação entre os nucleões, a distâncias tão pequenas, seria necessário admitir a existência de uma nova partícula de massa 200 a 300 vezes a do electrão, que, "saltando" constantemente entre dois nu-



cleões, produziria uma força chamada de troca.

Essa partícula, o mesão, que pode ser positiva, negativa ou neutra, foi mais tarde evidenciada experimentalmente, confirmando a teoria de Yukawa.

Conhecem-se actualmente para cima de mil nuclídeos diferentes em  $A$ ,  $Z$ , ou ambos, dos quais 276 são estáveis.

Os nuclídeos existentes distribuem-se em cerca de 100 grupos, de igual valor de  $Z$ .

Cada um desses grupos é formado por átomos com o mesmo número de electrões orbitais  $Z$ , sendo pois átomos de um mesmo elemento químico, embora o número de massa  $A$  difira.

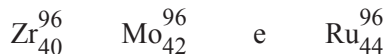
A nuclídeos com o mesmo número atómico  $Z$  mas número de massa diferentes, dizem-se isótopos.

Por exemplo:



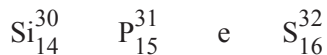
são isótopos do mesmo elemento, o oxigénio.

Isóbaros são nuclídeos com o mesmo número de massa, porém com número atómico diferente. Os nuclídeos



são isóbaros de número de massa  $A = 96$ .

Quando dois ou mais nuclídeos possuem igual número de neutrões  $N$ , dizem-se isótonos. Por exemplo:



possuem todos 16 neutrões.

Traçando um diagrama em que se colocam como ordenadas os valores de  $N$  e abcissas os valores de  $Z$ , para os nuclídeos estáveis que ocorrem na natureza, obtemos

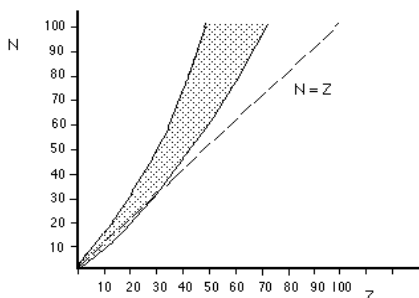


Fig. V.26 - Gráfico N vs. Z para os nuclídeos estáveis.

A zona a escuro, onde se situam os pontos  $(N, Z)$  correspondentes aos nuclídeos estáveis, mostra que nos núcleos leves (até  $Z = 20$ ) o número de neutrões é aproximadamente igual ao do protões.

Para valores de  $Z$  elevados, a estabilidade só é possível muito acima da linha  $N = Z$ . Por exemplo o  $\text{Pb}_{82}^{208}$  tem  $Z = 82$  e  $N = 126$ .

Nos nuclídeos de  $Z > 20$ , a força coulombiana repulsiva entre os protões começa a tornar-se significativa e, para ser atingida a estabilidade, terá de haver mais neutrões que protões, pois estes contribuem com força nuclear sem aumentar a repulsão electrostática. A repulsão coulombiana, embora menos intensa do que a força nuclear não tem a limitação de actuar a curta distância, pois varia continuamente com  $Ze^2/r^2$ , nem de ser uma acção saturada entre pares de nucleões, como é a força nuclear. De facto, qualquer dos protões do núcleo, exerce repulsão sobre todos os outros e por todos eles é repellido. Nos núcleos pesados, quando  $A$  aumenta, e como consequência destas propriedades da força electrostática, a repulsão aumenta mais rapidamente do que a atracção nuclear.

Ao trabalho necessário para decompor um núcleo e deixar com velocidade nula, a distância infinita, os nucleões constituintes, chama-se energia de ligação desse núcleo.

Para se juntarem de novo esses mesmos nucleões, formando o núcleo inicial, terá de libertar-se uma quantidade de energia que é igual à energia de ligação. A energia de ligação é normalmente expressa em MeV (megaelectrão-volt) que corresponde a  $10^6$  eV (electrão-volt).

Recorda-se que o electrão-volt (eV) é a energia cinética que o electrão adquire quando sujeito a uma diferença de potencial de 1 volt.

A energia potencial eléctrica que uma carga  $Q$  adquire, quando sujeita a um potencial  $V$  é dada pela igualdade

$$W = Q V$$

A carga do electrão ( $e$ ) no sistema internacional (SI) é  $1,60219 \times 10^{-19}$  C.

A energia cinética que um electrão adquire quando é acelerado pela diferença de potencial de 1 volt, é igual à energia potencial que o electrão possui no instante em a sua velocidade ainda é nula mas o potencial de 1 V já actua sobre ele, ou seja, no SI,

$$W = Q V = 1,6 \times 10^{-19} \text{ joule}$$

então

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ joule} \quad \text{V.13}$$

Para se ter a relação entre eV e erg, unidade de energia do sistema de CGS, podemos entrar com a igualdade  $1 \text{ joule} = 10^7 \text{ erg}$  na Eq. V.13 ou raciocinar como fizemos para o SI. Neste caso, como a carga do electrão no sistema CGS, é  $4,8 \times 10^{-10}$  Statcoulomb (U. CGS Q.) e  $1 \text{ volt} = 1/300 \text{ Statvolt}$  (U. CGS de potencial), vem para a energia que o electrão adquire quando é actuado pela diferença de potencial de 1 volt, no sistema CGS.

$$W = 4,8 \times 10^{-10} \times \frac{1}{300} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

logo

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ erg} \quad \text{V.14}$$

Para os múltiplos do eV vem:

$$1 \text{ Quilo electrão-volt (KeV)} = 1,6 \times 10^{-16} \text{ joule} = 1,6 \times 10^{-9} \text{ erg}$$

$$1 \text{ Mega electrão-volt (MeV)} = 1,6 \times 10^{-13} \text{ joule} = 1,6 \times 10^{-6} \text{ erg}$$

#### V.4.2 - Defeito de massa

As medidas efectuadas com o espectrógrafo de massa, são suficientemente precisas para mostrar que a massa dum núcleo é sempre inferior à soma das massas dos seus nucleões constituintes.

Um núcleo formado por  $Z$  prótons de massa  $m_p$  e de  $N$  nêutrons de massa  $m_n$ , não tem uma massa atômica igual a  $Z m_p + N m_n$ , mas uma massa  $M$  sempre inferior.

A diferença

$$\Delta M = M - (Z m_p + N m_n) \quad \text{V.15}$$

entre estes dois valores é chamada defeito de massa. Tem um valor negativo indicando assim que a massa das partículas diminui quando se juntam, de modo a formar um núcleo.

Aplicando o princípio de equivalência entre massa e energia de Einstein, podemos calcular a que energia corresponde o defeito de massa  $\Delta M$ .

$$\Delta E = |\Delta M| c^2 \quad \text{V.16}$$

Esta energia  $\Delta E$  é a energia libertada quando os nucleões se unem para constituir o núcleo, é a energia de ligação, já definida.

Esta pode ser calculada a partir da expressão

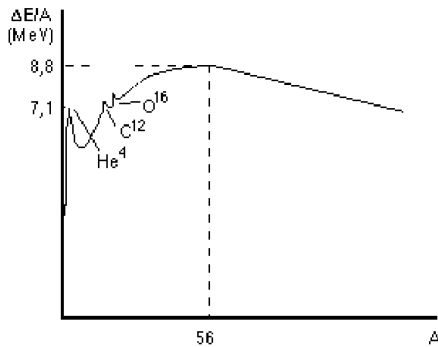
$$\begin{aligned} \Delta E &= |\Delta M| c^2 \\ &= |M - (Z m_p + N m_n)| c^2 \end{aligned} \quad \text{V.17}$$

O defeito de massa varia de nuclídeo para nuclídeo e não é proporcional, como se poderia supor, ao número de nucleões.

É costume exprimir-se a energia de ligação em termos de energia média de ligação por nucleão, ou seja,

$$\frac{\Delta E}{A} \quad \text{V.18}$$

Consideremos a curva  $\frac{\Delta E}{A}$  em função de  $A$ , para as estruturas nucleares naturais.

Fig. V.27 - Energia de ligação por nucleão em função de  $A$ .

A curva mostra que  $\Delta E/A$  cresce de maneira rápida e algo desordenada para os elementos mais leves e decresce lentamente para os elementos pesados. Sobe rapidamente até cerca de  $A = 20$ , apresentando em  $A = 4$  ( $\text{He}^4$ ) um pico de grandes proporções (7,07 MeV), continua a subir mais lentamente até  $A = 56$  (que corresponde ao Fe), onde  $\Delta E/A = 8,8$  MeV e decresce por fim até 7,58 MeV para  $A = 238$ , correspondente ao  $\text{U}^{238}$ .

Picos bem diferenciados, indicando grande estabilidade nuclear, observam-se também para o  $\text{C}^{12}$  e  $\text{O}^{16}$ .

O estudo desta curva mostra que, para os elementos pesados, onde a curva decresce, a perda de um nucleão corresponde a um aumento de energia média de ligação por nucleão. Nos elementos leves passa-se o contrário.

Por outro lado, as estruturas mais estáveis correspondem aos elementos de número de massa médio.

A forma desta curva permite explicar a possibilidade de obter energia pela fissão nuclear e pela fusão nuclear.

Visto a energia de ligação por nucleão, para os nuclídeos pesados, aumentar quando diminui o número de massa, a fissão que produz a fragmentação de um núcleo pesado conduz à libertação de energia.

Nos nuclídeos leves, a energia de ligação por nucleão aumenta quando aumenta o número de massa. Assim, a fusão de dois nuclídeos leves produz um nuclídeo de maior energia de ligação por nucleão, ou seja, produz libertação de energia. Uma reacção de fusão particularmente eficaz na libertação de energia é a que conduz à formação de  $\text{He}_2^4$ , cuja energia de

ligação é muito elevada, a partir de  $H_1^2$



A energia libertada nesta reacção é da ordem dos 20 MeV.

### V.4.3 - Unidade de massa atómica

Como as massas reais dos átomos, quando expressas nas unidades habituais, dão números muito pequenos (da ordem dos  $10^{-24}$  g), tornou-se necessário exprimi-las em comparação com a massa de um átomo tomado arbitrariamente como padrão.

Presentemente, é baseada na massa do isótopo 12 do carbono, ao qual foi atribuído a massa inteira 12.

Considerando um átomo-grama de  $C^{12}$  e entrando com o número de Avogadro, facilmente se chega à relação

$$1 \text{ u} = 1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$$

Pela relação  $E = m c^2$  calculemos a energia equivalente a 1 u

$$\begin{aligned} E &= 1,67 \times 10^{-24} \times (3 \times 10^{10})^2 \times \frac{1}{1,6 \times 10^{-12}} \text{ eV} \\ &= 931 \text{ MeV} \end{aligned}$$

### V.4.4 - Modelos nucleares

Diversas teorias foram apresentadas para explicar o modo como se organizam os nucleões nos núcleos. O modelo da gota líquida considera o núcleo como uma mistura relativamente homogénea de nucleões com interações entre si. No interior do núcleo, a energia de ligação estaria uniformemente distribuída mas os nucleões da superfície estariam sujeitos a uma força que os solicitava para dentro e era responsável pela forma esférica do núcleo. Do mesmo modo que o átomo, o núcleo, além do estado fundamental, pode ter estados energéticos excitados. Este modelo, aparentemente empírico, permitiu obter fórmulas que

---

relacionam com alguma precisão a massa nuclear com  $A$  e  $Z$ .

No modelo de camadas, os nucleões interagem entre si mas supõem-se situados em níveis de energia característicos do núcleo. Estes estados podem ser estudados, bombardeando núcleos com partículas com elevada energia cinética, como prótons ou deutérios, obtidos em aceleradores de partículas.

Além disso, diversos factos apontam para a existência de níveis de energia característicos no núcleo.

Nas estruturas estáveis, os nuclídeos mais abundantes têm número de neutrões e de prótons par, ou seja par-par há 162 isótopos. Com o número de prótons ou de neutrões ímpar, ou seja, par-ímpar há 108 isótopos. Só quatro isótopos estáveis têm prótons e neutrões em número ímpar (ímpar-ímpar). Por outro lado, isótopos contendo 2, 8, 20, 50, 82, ou 126 prótons, neutrões, ou ambos são mais abundantes, e mais estáveis. Esta associação a números mágicos é análoga ao que sucede com os electrões orbitais nas camadas electrónicas.

Finalmente os nucleões de um núcleo podem receber energia de excitação passando a um nível mais elevado e libertar, posteriormente essa energia na forma de radiação gama.

#### V.4.5 - Radioactividade

Até aqui falámos de nuclídeos estáveis. Após os trabalhos de Becquerel, dos esposos Curie e de outros, nos princípios deste século, tornou-se conhecido que existem átomos que espontaneamente se transformam em átomos de outros elementos, pela emissão de radiação.

As radiações observadas foram de três tipos: as partículas  $\alpha$  que são núcleos de átomos de Hélio ( $\text{He}_2^4$ ), as partículas  $\beta$  que são electrões e a radiação  $\gamma$  que é de natureza electromagnética e de pequeno comprimento de onda.

As partículas  $\alpha$  possuem fraco poder de penetração, sendo em geral detidas por uma simples folha de papel. São emitidas com velocidades da ordem de  $1/15$  a  $1/30$  da velocidade da luz.

As partículas  $\beta$  são electrões altamente energéticos emitidos pelo núcleo com velocidades que podem ser próximas da velocidade da luz. Poderão penetrar alguns milímetros no alumínio.

A radiação  $\gamma$  é de natureza electromagnética, como a luz visível, o ultravioleta ou os raios X, diferindo destes por ter menor comprimento de onda e consequentemente maior energia.

A emissão de radiações gama é posterior à emissão  $\alpha$  ou  $\beta$  por um núcleo e resulta da libertação de um possível excesso de energia do núcleo após a desintegração.

A radiação  $\gamma$  propaga-se com a velocidade da luz e é altamente penetrante, podendo atravessar vários centímetros de chumbo.

Nenhum núcleo pode emitir os três tipos de radiação citados.

Poderá ocorrer só emissão de  $\alpha$  ou  $\beta$ , ou de qualquer das duas, seguidas de emissão  $\gamma$ . A emissão  $\gamma$  é, assim, sempre posterior a uma emissão corpuscular.

Os isótopos radioactivos naturais, com raras excepções, ( $K^{40}$ ,  $Rb^{87}$ ,  $Sm^{147}$ ,  $Re^{187}$ ,  $Lu^{176}$ ) têm um número atómico acima de 82 e estão distribuídos em 3 famílias radioactivas de elementos que se desintegram em cadeia. Estas famílias são as do urânio, do tório e do actínio. Recentemente, com a produção de elementos transuranianos artificialmente, uma quarta família ficou bem estabelecida, a do neptúnio.

Para compreendermos porque ocorrem os processos de desintegração alfa, beta e gama reportemo-nos ao diagrama neutrões-protões nos núcleos estáveis (Fig. V.28).

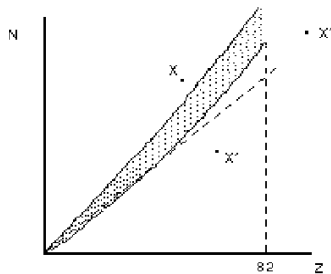


Fig. V.28 - Gráfico N vs. Z para os núcleos estáveis.

Na zona a escuro situam-se as combinações possíveis de neutrões e protões que constituem núcleos estáveis. Estas combinações correspondem a elementos que ocorrem na natureza e não sofrem processos de desintegração.

Na Fig. V.29-a) pode observar-se o que ocorre num núcleo  $X_Z^A$  se um protão se transformar em neutrão, obtendo-se o núcleo  $Y_{Z-1}^A$ , ou um neutrão se transformar em protão, obtendo-se o núcleo  $Y_{Z+1}^A$ . O número de massa A



não sofrerá alteração.

Suponhamos que uma dada estrutura nuclear possui excesso de neutrões, em relação às estruturas estáveis correspondentes ao mesmo  $Z$ , como é o caso do núcleo  $X$  da Fig. V.29-b). Em tal núcleo terá de ocorrer um processo ou vários que conduzam a uma estrutura estável<sup>7</sup>.

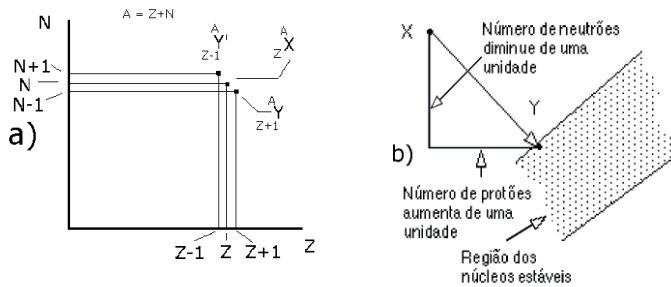


Fig. V.29 – a) Ocorrências num núcleo se um próton se transformar em neutrão, ou um neutrão se transformar em próton. b) Variação de  $N$  e  $Z$  na emissão de partícula  $\beta^-$ . O seu número de neutrões diminuiu de uma unidade e o número de prótons aumentou de uma unidade

Um dos neutrões em excesso irá espontaneamente transformar-se em próton e uma partícula beta será emitida



O núcleo resultante terá o mesmo número de massa mas, pelo facto de ter aumentado o número de prótons em uma unidade, o número  $Z$  sofrerá idêntico acréscimo



<sup>7</sup> - As condições energéticas para a emissão de partículas  $\beta$  e para a captura electrónica estão descritas no apêndice V.19.1.

No diagrama  $N, Z$  anterior o núcleo que representámos por  $X$  transformar-se-ia num núcleo  $Y$  mais próximo ou dentro já da região das estruturas estáveis. O seu número de neutrões diminuiu de 1 unidade e o número de protões aumentou de 1 unidade.

O núcleo  $Y$  pode ser deixado, após a desintegração, com um excesso de energia, visto a energia de ligação do novo núcleo ser diferente da anterior. Este excesso, que constitui energia de excitação, é libertado na forma de um ou vários fotões gama.

Por vezes, mais do que um decaimento beta é necessário para que dado núcleo instável adquira a configuração estável. Poderá uma dada estrutura ser instável pela circunstância de ter excesso de protões. Neste caso, ocorrerá a transformação de um protão em neutrão, sendo emitida uma partícula beta positiva (positrão).



O núcleo  $X'$ , representado na figura manterá o seu número de massa mas o número  $Z$  diminui de uma unidade



ou seja, o número de neutrões aumenta de um e o número de protões decresce de um.

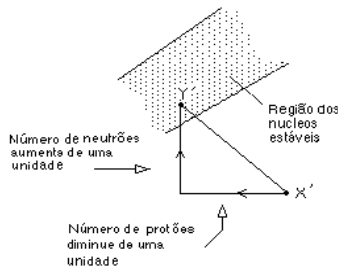


Fig. V.30 - Variação de  $N$  e  $Z$  na emissão de partícula  $\beta^+$ . O número de neutrões aumenta de uma unidade e o número de protões decresce de uma unidade.

Os positrões não são estáveis como os electrões, tendo um tempo médio de vida muito curto (cerca de  $10^{-10}$  seg).

Após emitidos e uma vez reduzida a sua velocidade, por acções electrostáticas no meio que percorrem, sofrem um processo de aniquilação de matéria ao combinarem-se com um electrão negativo.

Após desacelerados, os positrões ao encontrarem um electrão dos átomos do meio, formam um sistema chamado positrónio, que rapidamente se transforma em dois fotões de igual energia emitidos em direcções opostas<sup>8</sup>.

A energia correspondente à massa do electrão é, pela relação de Einstein:

$$\begin{aligned}
 E &= m c^2 \\
 &= 9,1096 \times 10^{-28} \times (3 \times 10^{10})^2 \frac{1}{1,6 \times 10^{-6}} \text{ MeV} \\
 &= 0,511 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

Os fotões emitidos terão pois a energia de 0,511 MeV.

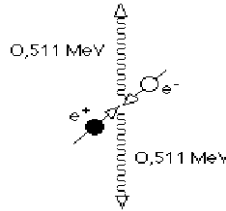


Fig. V.31 - Processo de aniquilação entre um positrão e um electrão do meio.

Outro processo do núcleo alterar a sua estrutura para adquirir a estabilidade é o decaimento alfa.

A emissão de partículas  $\alpha$  só ocorre nos núcleos pesados, encontrando-se os emissores  $\alpha$  distribuídos nas 4 famílias radioactivas (urânio, rádio, actínio e tório); à excepção do  $\text{Sm}_{62}^{147}$ , de certas terras raras e de alguns isótopos dos elementos transuranianos.

Para  $Z > 82$ , os núcleos são instáveis, encontrando-se na natureza porque alguns dos seus isótopos se desintegram muito lentamente ou porque pertencem a famílias radioactivas, cujo primeiro membro tem vida muito

<sup>8</sup> - Ocorre também, com pequena probabilidade, a emissão de 3 fotões com energia total igual a 1,022 MeV e os fotões fazendo 120 ° entre si.

longa ( $10^8$  a  $10^{10}$  anos).

Como vimos, a energia de ligação média por nucleão é menor nos núcleos mais pesados do que nos núcleos de peso médio.

A curva  $\Delta E/A$  em função de  $A$  atinge um máximo para  $A = 56$  de 8,8 MeV e decresce depois lentamente para os núcleos mais pesados, até cerca de 7,5 MeV.

Quando um núcleo, por emissão de uma partícula  $\alpha$ , se transforma noutro mais leve, a estrutura resultante deve portanto possuir maior energia de ligação.

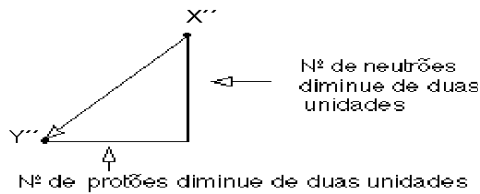
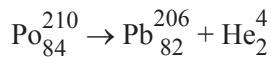


Fig. V.32 - Variação de  $N$  e  $Z$  na desintegração do nuclídeo  $X''$  (emissão de partícula  $\alpha$ ).

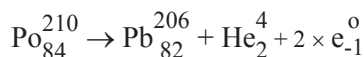
A energia de ligação correspondente ao núcleo de  $He^4$  é de 28 MeV, o que dá um  $\Delta E/A = 7$  MeV, sendo para núcleos leves a estrutura mais estável.

Para ocorrer a emissão  $\alpha$ , a massa de  $X''$  tem que ser superior à soma das massas de partícula  $\alpha$  e do núcleo resultante,  $Y''$ .

Por exemplo, o  $Po_{84}^{210}$  é emissor  $\alpha$  e decai para o  $Pb^{206}$



A reacção anterior refere-se aos núcleos. Se considerarmos a reacção de desintegração com as massas dos átomos, facilmente disponíveis em tabelas, temos de entrar com a massa dos dois electrões que o  $Po$  vai perder



As massas atómicas em jogo são

$$\begin{aligned} \text{Po}^{210} &= 210,04850 \text{ u} \\ \text{Pb}^{206} &= 206,03883 \\ \text{He}^4 &= 4,00277 \\ e &= 0,00055 \end{aligned}$$

A diferença de massa entre o  $\text{Po}^{210}$  e os produtos de reacção é de 0,0058 u, que equivale a 5,4 MeV.

A emissão de partículas  $\alpha$  é pois uma reacção exoenergética, ou seja, com libertação de energia.

Deve-se este facto, como facilmente se entende, a que a soma das energias de ligação da partícula  $\alpha$  e do núcleo resultante é maior do que a energia de ligação do núcleo emissor.

A emissão de um deuteron  $\text{H}^2$  por parte de um núcleo pesado não é possível porque a energia de ligação de  $\text{H}^2$  é muito pequena, de cerca de 2 MeV.

A soma de massa do  $\text{H}_1^2$  com a do núcleo resultante, daria maior que a massa do núcleo emissor, a reacção seria endotérmica. Não pode ocorrer espontaneamente pois, para se produzir, será necessário fornecer energia exterior. A energia resultante do processo de desintegração  $\alpha$ , correspondente à perda de massa, vai surgir na forma de energia cinética da partícula e energia de recuo do núcleo emissor.

As partículas  $\alpha$  emitidas por um dado nuclide ou têm todas a mesma energia ou estão distribuídas num pequeno número de valores de energia, podendo ou não ser acompanhadas de emissão de radiação  $\gamma$  (Fig. V.33).

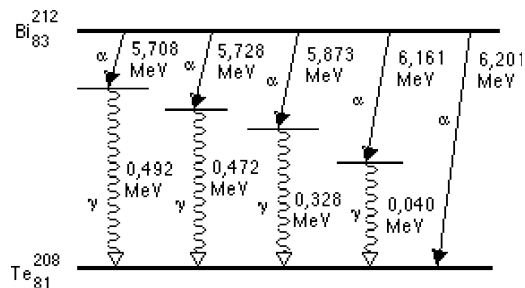


Fig. V.33 - Esquema de desintegração do  $\text{Bi}^{212}$ , por decaimento  $\alpha$ .

Se o total da energia correspondente à desintegração for libertada na forma de energia cinética de uma partícula  $\alpha$ , não haverá libertação de ra-

diacção  $\gamma$ .

Se é emitida só parte da energia, na forma de energia cinética da partícula  $\alpha$ , o nuclídeo resultante fica num estado energético superior ao seu estado fundamental, sendo a energia de excitação libertada como radiação  $\gamma$ .

Quando há possibilidades quânticas de ocorrerem vários estados de excitação, há emissão de partículas  $\alpha$  com várias energias, acompanhadas pela emissão  $\gamma$ , de tal modo que em todos os processos a energia total é a mesma.

#### V.4.6 - Espectros de energia das partículas $\beta$

A distribuição das energias das partículas  $\beta$ , emitidas por qualquer elemento radioactivo, pode ser estudada com o espectrómetro de raios  $\beta$ .

Neste dispositivo, as partículas  $\beta$  são dirigidas para um campo magnético intenso, sendo a velocidade das partículas e o campo magnético normais entre si. Nestas condições, as partículas  $\beta$  descrevem trajectórias circulares com raios tanto maiores quanto maior for a energia cinética com que são emitidos.

Os espectros obtidos para as partículas  $\beta$ , correspondentes a uma dada transição não são monoenergéticos, em vez disso, as energias distribuem-se continuamente desde zero até um valor máximo  $E_m$ , Fig. V.34.

Para uma dada emissão de partículas  $\beta$ , a energia mais provável  $E_p$ , correspondente ao máximo da curva (Fig. V.34), situa-se entre  $1/4$  e  $1/3$  do valor  $E_m$ .

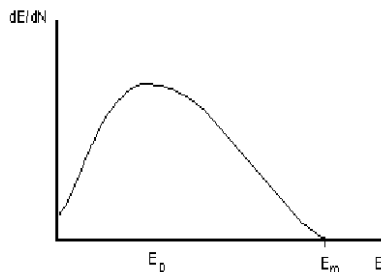


Fig. V.34 - Espectro de energia das partículas  $\beta$ .

De um modo geral, nas partículas  $\beta^+$ , devido ao facto da interacção Coulombiana por parte do núcleo, ao dar-se a emissão, ser repulsiva, o valor  $E_p$  é mais próximo de  $E_m$ .

Os estudos dos espectros  $\alpha$  e  $\gamma$  já tinham demonstrado que o núcleo possui estados energéticos bem definidos.

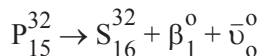
O espectro contínuo de energias das partículas  $\beta$  parecia, pois, estar em contradição com os conhecimentos existentes sobre o núcleo e com o próprio princípio da conservação da energia.

Coube a W. Pauli e Fermi a explicação do facto, ao demonstrarem que, simultaneamente com a partícula  $\beta$ , outra partícula teria de ser emitida. No caso da emissão  $\beta^-$  o antineutrino, cuja reacção de transformação é:



A soma das energias da partícula  $\beta$  e do antineutrino  $\bar{\nu}$  dão um valor constante, qualquer que seja a energia cinética da partícula  $\beta$ . Quando a energia desta última for  $0$ , o antineutrino terá energia máxima e igual a  $E_m$ .

Por exemplo, no decaimento do  $P^{32}$  para  $S^{32}$ .



há uma diferença de energia entre o núcleo do  $P$  e do  $S$  de 1,71 MeV. Esta energia corresponde à energia cinética máxima da partícula  $\beta$ . É o valor  $E_m$  representado na Fig. V.34.

Quando a partícula  $\beta$  é emitida com uma energia  $E < E_m$ , a energia do antineutrino é a diferença  $E_m - E$ .

À emissão de partículas  $\beta^+$ , como vimos, corresponde também um espectro contínuo de energias. A reacção é



As existências do neutrino e antineutrino foram já comprovadas experimentalmente. O neutrino e o antineutrino, não têm carga, a sua massa em repouso é nula, possuindo, contudo, quantidade de movimento e energia quando emitidos.

### V.4.7 - Emissores $\beta$ puros

No processo de emissão  $\beta$  mais simples, toda a energia resultante de perda de massa durante a desintegração é transferida para a partícula  $\beta$  sob a forma de energia cinética e neutrino. O núcleo resultante é deixado no estado fundamental após a emissão  $\beta$ .

Os nuclídeos que se desintegram segundo este esquema simples são os emissores  $\beta$  puros. Exemplos:

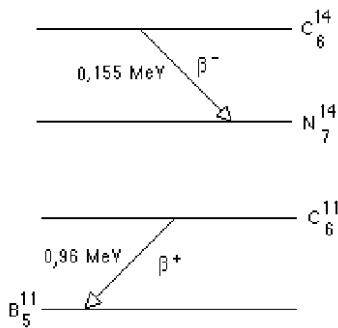


Fig. V.35 - Esquema de desintegração do  $C_{6}^{14}$  e do  $C_{6}^{11}$ .

Este tipo de desintegração não é o mais comum a não ser nos elementos de baixo  $Z$ . Na maioria dos casos a energia  $E_m$ , transportada pela partícula beta mais o neutrino, é inferior ao excesso disponível. O núcleo resultante contém ainda energia de excitação. Esta energia é libertada na forma de um fóton  $\gamma$ , ou vários, em cascata.

Do mesmo modo que na desintegração  $\alpha$ , a radiação  $\gamma$  emitida, tem energias características para cada tipo de desintegração nuclear. Em algumas transformações radioactivas, o processo da emissão  $\beta$  pode dar-se segundo vários esquemas. Cada esquema pode ocorrer com maior ou menor probabilidade e diferem nas energias  $E_m$  e nas correspondentes energias gama.

A energia total de cada esquema (energia cinética da partícula  $\beta^{+}$  + energia do fóton  $\gamma$ ) é a mesma, de modo idêntico ao que vimos para as partículas  $\alpha$ .

Podemos ver exemplos desta situação nas Figs. V.36 e V.37.



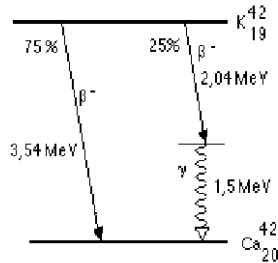


Fig. V.36 - Esquema de decaimento do K<sup>42</sup>

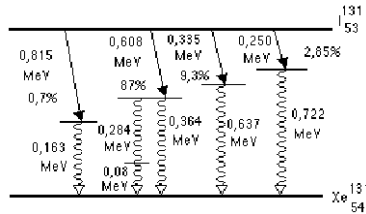


Fig. V.37 - Esquema de desintegração do I<sup>131</sup><sub>53</sub>

#### V.4.8 - Captura K ou captura de um electrão

Quando a relação N/Z é mais baixa do que nas formas estáveis dos elementos, os processos de desintegração conduzem a um aumento desta relação. Dois processos poderão ocorrer:

- a) A transformação de um próton em neutrão com emissão de  $\beta^+$  e neutrino é, como vimos, um dos processos possíveis

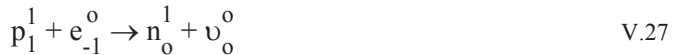


- b) Outro processo, competitivo com este, é a captura electrónica, em que um electrão periférico é capturado pelo núcleo.

Em cerca de 90% destes processos, são os electrões da camada **K** que

entram na reacção, pelo que também é conhecido por captura **K**. (Cerca de 10% dos electrões capturados são da camada **L** e aproximadamente 1% de **M**).

O electrão capturado vai ligar-se a um protão, originando um neutrão, sendo expelido um neutrino.



Com a captura de um electrão da camada **K** (ou **L** ou **M**) um espaço vago é originado, que irá ser preenchido por um electrão proveniente de um nível de energia mais alto. Esta transição é acompanhada pela emissão de raios **X**, característicos do nuclídeo filho.

Por sua vez, o electrão que foi preencher o lugar vago deixou novo espaço vazio, que poderá ser preenchido de modo análogo.

O reajustamento das camadas electrónicas pode pois originar a emissão de vários fotões em cascata.

Por outro lado, se o núcleo, após a captura, ficar num estado excitado, o excesso de energia é libertado na forma de fotão  $\gamma$ .

Embora as radiações electromagnéticas **X** e  $\gamma$  possuam características idênticas, os raios **X** referidos provém de transições electrónicas orbitais, enquanto que as radiações  $\gamma$  são originadas por transições dentro do núcleo.

Exemplos:

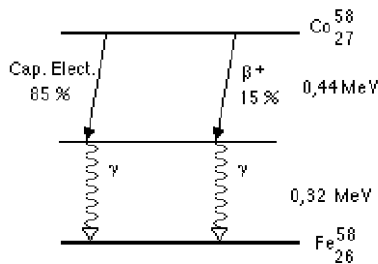


Fig. V.38 - Esquema de decaimento do  $\text{Co}^{58}$ .

No caso do  $\text{Co}^{58}$ , quer a emissão  $\beta^+$  quer a captura electrónica levam à emissão de um fotão  $\gamma$  de 0,22 MeV

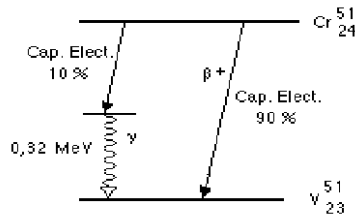


Fig. V.39 - Esquema de decaimento do  $\text{Cr}^{51}$ .

Cerca de 90 % dos decaimentos do  $\text{Cr}^{51}$  ocorrem por emissão de positrões (ou captura eletrônica) com passagem directa para o estado fundamental do  $\text{V}^{51}$ . Só 10 % das desintegrações ocorrem por com emissão de fótons gama de 0,30 MeV.

#### V.4.9 - Conversão interna

Se um núcleo excitado tem uma energia superior à do estado fundamental, esta energia normalmente é libertada sob a forma de um fóton de radiação gama. No entanto, pode ocorrer que o núcleo excitado transfira o seu excesso de energia e de momento angular para um dos electrões orbitais. Este é emitido com energia cinética igual à energia de excitação do núcleo menos a energia de ligação do electrão. Os electrões emitidos têm uma energia bem definida e não um espectro de energia como os da radiação beta. A este processo chama-se conversão interna.

A maior probabilidade de ocorrência verifica-se para os electrões da camada **K**, uma vez que são eles que estão mais ligados ao núcleo, podendo raramente ocorrer para os electrões da camada **L** e **M**.

Os electrões emitidos por este processo costumam representar-se por  $e^-$  (e não por  $\beta^-$ ), visto já existirem antes da emissão.

#### V.4.10 - Isomeria nuclear

São isómeros nucleares, núcleos com o mesmo número atômico **Z** e igual número de massa **A**, mas possuindo estados energéticos diferentes.

Já vimos que os núcleos excitados, devido ao seu estado energético ser superior ao compatível com o seu número de prótons e neutrões, passam ao estado energético normal pela emissão de radiação  $\gamma$ . Normalmente, o tempo de duração destes estados excitados é muito curto,  $10^{-9}$  a  $10^{-13}$  segundos.

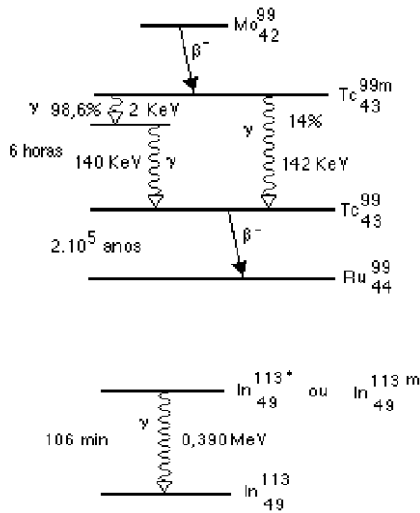


Fig. V.40 - Esquemas de decaimento do  $Tc^{99m}$  e do  $In^{113m}$ .

Em alguns casos, porém, o núcleo excitado pode emitir o fóton  $\gamma$  após um tempo caracterizado por um período que pode ir de alguns segundos e alguns meses, constituindo assim um isómero nuclear do estado normal do mesmo isótopo.

### V.5.1 - Lei da desintegração radioactiva

As substâncias radioactivas desintegram-se espontaneamente.

A actividade de uma substância radioactiva decresce em função do tempo num ritmo característico para cada nuclide e que não é modificado por nenhum processo químico ou físico (à excepção de reacções nucleares).

Como dados de experiências, sabe-se que a desintegração radioactiva é um processo sujeito às leis do acaso e que a velocidade de desintegração

ou actividade é proporcional, em cada instante, ao número de átomos radioactivos presentes.

A velocidade de desintegração é o número de átomos radioactivos que se desintegram por unidade de tempo.

Designando por  $N$  o número de átomos e  $t$  o tempo, vem

$$\frac{-\Delta N}{\Delta t} = \lambda N \quad \text{V.28}$$

onde  $-\Delta N$  é o número de átomos que se desintegram em  $\Delta t$  e  $\lambda$  é uma constante de proporcionalidade que se designa por constante de desintegração.

O limite da expressão anterior quando  $\Delta t \rightarrow 0$  reflecte rigorosamente o que atrás mencionámos como dado de experiência.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \text{V.29}$$

A função  $N(t)$  é decrescente tendo a sua derivada um valor negativo,  $N$  e  $\lambda$  são obviamente positivos.

À igualdade anterior podemos dar a forma

$$\frac{-dN}{N dt} = \lambda \quad \text{V.30}$$

e concluir que a fracção do número total de átomos que sofre a desintegração, por unidade de tempo, é constante.

A equação  $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ , é uma equação diferencial, que integrada conduz à igualdade

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{V.31}$$

onde  $N_0$  é o valor de  $N$ , para  $t = 0$  e  $e$  a base dos logaritmos Neperianos.

Esta expressão mostra-nos que o número de átomos radioactivos é uma função exponencial do tempo, de expoente negativo.

---

### V.5.2 - Período de um radionuclídeo

Chama-se período de um dado radionuclídeo,  $T$ , ao tempo necessário para que uma dada quantidade desse nuclídeo se reduza a metade, por desintegração.

Então, para  $t = T$ , temos

$$N = \frac{N_0}{2}$$

e

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

ou

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T}$$

Aplicando logaritmos naturais, vem

$$-\ln 2 = -\lambda T$$

e como

$$\ln 2 = 0,693$$

temos

$$T = \frac{0,693}{\lambda} \tag{V.32}$$

ou

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}}$$

Por substituição, obtemos nova forma na igualdade exponencial anterior

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{0,693}{T_{1/2}}t\right) \tag{V.33}$$

Aplicando logaritmos decimais a esta expressão, vem

---

$$\log_{10} N = \log_{10} N_0 - \frac{1}{2,303} \frac{0,693}{T_{1/2}} t$$

pois que

$$\log_{10} e = \frac{1}{2,303}$$

Fazendo  $\log_{10} N = y$  e  $t = x$  a equação anterior toma a forma  $y = ax + b$ , ou seja, fica a equação de uma recta.

Quer dizer, a representação gráfica da função  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  é uma recta se, em ordenadas, entrarmos com o logaritmo do número de átomos  $N$ , presentes em cada instante  $t$ .

Outra forma de escrever a Eq.V.33, já que  $e^{\ln 2} = 2$ , é

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \text{V.34}$$

Se combinarmos a expressão  $-\frac{dN}{dt} = \lambda N$  com  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , obtemos

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{V.35}$$

$-\frac{dN}{dt}$  é a velocidade de desintegração ou actividade. Então, a actividade varia também de modo exponencial com o tempo.

Se entrarmos em ordenadas com o logaritmo de actividade e em abcissas com o tempo, a representação gráfica da função anterior é igualmente uma recta.

Designando a actividade pela letra,  $A$ , vem

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

Para  $t = 0$

$$A = A_0,$$

ou seja,

$$A_0 = \lambda N_0$$

e

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad \text{V.36}$$

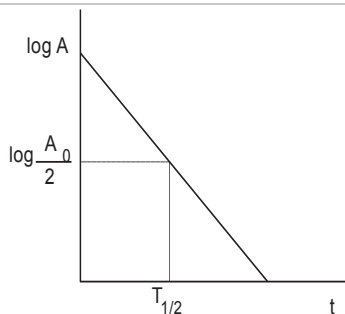


Fig. V.41 - Actividade em função do tempo numa escala semi-logarítmica.

Para  $t = T$ ,  $A = A_0 / 2$

Conhecendo a actividade de um dado radionuclídeo para diversos tempos e traçando a recta logaritmo de  $A$  em função de  $t$ , facilmente se determina o valor de  $T$ .

### V.5.3 - Vida média

Outra constante característica de um radionuclídeo, e que ocasionalmente é necessário utilizar, é a vida média.

Vida média é o tempo médio de vida provável para um radionuclídeo, antes de sofrer desintegração.

Demonstra-se que

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{0,693} = 1,443 T \quad \text{V.37}$$

### V.5.4 - Unidade de velocidade de desintegração

A velocidade de desintegração, ou actividade, de uma amostra, define-se como o número de átomos radioactivos da mesma que se desintegram por segundo.

A unidade de actividade recomendada e, presentemente mais usada, é o Becquerel (Bq), que equivale a uma desintegração por segundo.



---

Outra unidade ainda usada é o curie (Ci) que se define como sendo a actividade correspondente a  $3,7 \times 10^{10}$  desintegrações por segundo. Esta actividade é sensivelmente igual à de 1 grama de Ra em equilíbrio com os seus descendentes. A relação entre estas unidades é

$$1 \text{ Bq} = 2,7 \times 10^{-11} \text{ Ci}$$

Interessam em Medicina Nuclear os múltiplos do Becquerel e os submúltiplos do curie. Os mais usados são o MBq (mega bequerel) e o microcurie e o milicurie.

Para se conhecer a actividade de uma certa quantidade de material radioactivo, torna-se necessário utilizar detectores de radiação.

Um detector detecta radiações, desde que estas cedam, por algum processo, energia ao dispositivo de detecção.

Por diversas razões, o número de detecções (contagens) por unidade de tempo fornecido por um detector é, em geral, menor que o número de desintegrações correspondentes à amostra em estudo.

A relação entre velocidade de contagem e velocidade desintegração para dada amostra é a eficiência da detecção.

### V.6.1 - Interação das radiações com a matéria

Embora marcadamente diferentes nas suas características físicas, os diferentes tipos de radiação exercem algumas acções análogas sobre a matéria que atravessam. Essas acções são resultantes da cedência de energia ao meio que percorrem.

A energia das partículas carregadas é energia cinética, enquanto que a energia dos fotões é energia electromagnética.

Qualquer tipo de radiação pode:

- Passar através da matéria sem alteração da trajectória nem cedência de energia - não haverá interacção
  - Interagir com electrões orbitais
  - Interagir com o núcleo.
-

### V.6.2 - Partículas carregadas

Quando partículas carregadas e com elevada energia cinética, se deslocam no meio material, vão exercer-se forças coulombianas entre as partículas e os electrões ou o núcleo dos átomos do meio. Diz-se haver uma colisão, sempre que a partícula passa suficientemente próximo de um electrão, ou núcleo, de modo a haver interacção, ou seja, troca de energia. As interacções mais prováveis das partículas carregadas ocorrem com electrões do meio, dado o seu elevado número, pelo que uma grande parte da energia dissipada por uma partícula se destina a aumentar a energia média dos electrões do meio, ou seja, aumentar a sua temperatura local.

### V.6.3 - Ionização

As partículas carregadas podem actuar sobre os electrões orbitais, produzindo ionização ou simples excitação.

Chama-se ionização específica, ou poder ionizante, ao número de pares de iões formados por unidade de comprimento de percurso.

O poder ionizante  $\delta$  é aproximadamente proporcional ao quadrado da carga da partícula e inversamente proporcional à sua velocidade.

$$\delta \propto \frac{Q^2}{v} \quad \text{V.38}$$

Uma outra quantidade, também utilizada é a transferência linear de energia (LET), que se define como a energia cedida ao meio por unidade de comprimento de percurso da partícula. Sabendo a energia média necessária para produzir uma ionização, num particular meio, pode saber-se a LET conhecendo o  $\delta$ . O poder de paragem de um material  $\sigma$  tem uma definição idêntica à anterior. É a energia perdida por unidade de comprimento percorrido sobre a sua trajectória  $s$ , ou seja

$$\sigma = \left| \frac{dE}{ds} \right| \quad \text{V.39}$$

onde  $E$  é a energia cinética da partícula.

Para o caso de partículas carregadas, quando uma partícula de massa  $M$  colide com outra de massa  $m$ , a cedência de energia é proporcional à relação  $M/m$  e o desvio da trajectória, sofrido pela primeira, é inversamente proporcional à mesma relação.

A ionização específica das partículas  $\alpha$  é alta, devido à sua pequena velocidade em relação à da luz e à sua dupla carga.

Devido à elevada relação  $M/m$  as trajectórias das partículas  $\alpha$  não são, praticamente, alteradas na produção de ionizações e excitações, mas, nas interacções com o núcleo podem ocorrer grandes desvios.

#### V.6.4 - Interacção das partículas $\beta$ com o núcleo

Uma colisão de uma partícula  $\beta$  com um núcleo envolve uma atracção coulombiana, na qual o electrão é desviado na sua trajectória.

Como a massa do núcleo é muito superior à do electrão, a energia que é comunicada ao núcleo é muito pequena, como se demonstra pelas leis de choque.

O electrão é desviado, não sofrendo redução considerável na sua energia. Este processo chama-se dispersão de Rutherford e equivale a uma colisão elástica.

Quando um electrão é desviado da sua trajectória inicial, é sujeito a uma aceleração. Segundo a teoria electromagnética clássica, toda a aceleração do electrão deve provocar emissão de radiação electromagnética.

A teoria quântica veio trazer uma alteração neste conceito. A aceleração cria uma certa probabilidade de emissão de um fóton e a energia irradiada nesse quantum de energia pode variar desde zero até à energia cinética total do electrão. A interacção entre o electrão e o núcleo pode pois conduzir à emissão de radiação electromagnética. A energia irradiada (radiação de Bremsstrahlung) conduz a perda de energia cinética.

Sendo  $E_{\beta}$  e  $E'_{\beta}$  as energias da partícula  $\beta$ , antes e após a emissão,  $h\nu$  a energia do fóton de Bremsstrahlung emitido, vem

$$E_{\beta} - E'_{\beta} = h\nu \quad \text{V.40}$$

As perdas de energia por este processo tornam-se tanto mais importantes quanto maior for o número atómico do absorvente e quanto maior for a energia do electrão.

### V.6.5 - Interação com os electrões orbitais dos átomos do absorvente

A colisão entre uma partícula  $\beta^-$  e um electrão periférico, traduz-se por uma repulsão coulombiana que origina uma distribuição entre os dois da energia cinética  $E_\beta$  do primeiro. A energia cinética pode produzir excitação ou ionização do átomo atingido.

Quando a energia cinética é suficiente para expelir o electrão orbital, forma-se um ião positivo e o electrão expelido, animado de uma energia cinética  $E_i$  comporta-se como uma partícula ionizante.

Sendo  $E_\ell$  a energia de ligação do electrão periférico, a energia  $E'_\beta$  da partícula  $\beta$  após a colisão é

$$E'_\beta = E_\beta - (E_\ell + E_i) \quad \text{V.41}$$

Devido à pequena massa do electrão, a colisão sofrida é em geral suficiente para produzir desvios apreciáveis no percurso das partículas  $\beta$ , cujo trajecto nos meios materiais é tortuoso. Após a colisão, o átomo ionizado emite radiação electromagnética, ao reajustar as suas camadas electrónicas.

A partícula  $\beta$ , perdendo energia diminui a sua velocidade, o que significa o aumento do poder ionizante. Este, contudo, é sempre pequeno em relação às partículas  $\alpha$ , visto aquelas possuem carga menor e velocidade muito superior. A probabilidade de absorção das partículas  $\beta$  pela matéria, do ponto de vista macroscópico, é uma função da distância percorrida pela partícula na substância em causa. Como as partículas  $\beta$  têm um espectro contínuo de energias e, além disso, podem perder uma fracção considerável da sua energia numa única colisão, o tratamento estatístico do processo de perda de energia em moldes semelhantes ao que se pode efectuar para as partículas  $\alpha$  é desprovido de interesse.

Devido a estas características, ao sinuoso trajecto e à dispersão em diferentes direcções, os percursos variam consideravelmente e o efeito de straggling é muito acentuado.

Devemos notar que a espessura da matéria atravessada por uma partícula  $\beta$  é, em geral, muito menor que o percurso real por ela percorrido. O comprimento total percorrido pela partícula nos seus numerosos desvios pode atingir 1,5 a 4 vezes a espessura atravessada.

A conjugação dos factores atrás indicados (espectro contínuo, disper-

são e diferente trajecto) origina, contudo, que a absorção das partículas  $\beta$  se faça de modo aproximadamente exponencial.

Sendo  $I_0$  a intensidade (número de partículas/(cm<sup>2</sup> s)) de um feixe de partículas  $\beta$  dirigido sobre um material de espessura  $X$ , a intensidade emergente  $I$ , é dada por

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad \text{V.42}$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de absorção linear, que depende do meio e das características da radiação  $\beta$  incidente.

### V.6.6 - Interação da radiação $\gamma$ com a matéria

A ionização específica inerente à radiação  $\gamma$  é bastante menor do que no caso das radiações corpusculares.

Para iguais energias, a densidade de ionização é cerca de 100 vezes menor do que nas  $\beta$ .

Quando um fóton interage com a matéria, a colisão pode ocorrer com o núcleo ou com os electrões orbitais. Esta colisão pode ser elástica, inelástica ou resultar na absorção completa do fóton.

Começemos por estudar as interações dos fótons  $\gamma$  com os electrões orbitais dos átomos do absorvente.

**Efeito fotoeléctrico** - um fóton de energia  $E_\gamma$  entrando em colisão com um electrão orbital, comunica-lhe toda a sua energia, deixando de existir.

Parte da energia  $E_\gamma$  é dispensada para extrair o electrão do seu nível energético, sendo a restante transferida ao electrão na forma de energia cinética  $E_c$ .

$$E_c = E_\gamma - E_\ell \quad \text{V.43}$$

Com  $E_\ell$  = energia de ligação do electrão.

Desta expressão depreende-se que, para ocorrer este efeito é necessário que o fóton tenha energia pelo menos igual à energia de ligação do electrão.

O efeito fotoeléctrico ocorre, geralmente, com os electrões mais fortemente ligados ao átomo, ou seja, das camadas mais internas **K** ou **L**.

O átomo atingido fica ionizado e num estado de excitação, sofrendo um rearranjo dos electrões periféricos, com emissão de raios **X** característicos (pode ocorrer também emissão de electrões periféricos, ao dar-se este

rearranjo, por um efeito chamado de Auger).

A probabilidade de ocorrência do efeito fotoelétrico aumenta rapidamente com o número atômico do absorvente e decresce drasticamente, quando aumenta a energia do fóton. Esta probabilidade é, com certa aproximação, proporcional a:

$$\left(\frac{Z}{E}\right)^3.$$

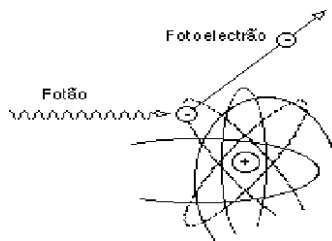


Fig. V.42 - Efeito fotoelétrico.

O fotoelétrão, ou seja, o elétron libertado, torna-se uma partícula ionizante e vai ser um agente de ionização secundária à radiação  $\gamma$ .

**Efeito Compton** - envolve uma colisão entre um fóton e um elétron orbital, na qual só parte de energia do primeiro é cedida.

Ocorre com elétrons frouxamente ligados, das camadas mais periféricas. O fóton perde energia e muda de direcção.

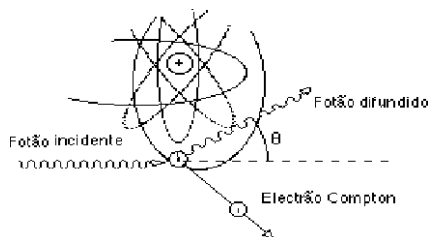


Fig. V.43 - Efeito Compton.

Considerando que a energia e a quantidade de movimento têm de ser

conservadas durante a colisão, chega-se à formula seguinte:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta) \quad \text{V.44}$$

que relaciona o ângulo das direcções inicial e final do fotão com o aumento do comprimento de onda. A quantidade  $\frac{h}{m_0c}$ , em que  $m_0$  é a massa do electrão em repouso, é designada por comprimento de onda de Compton do electrão. O valor desta constante é 0,023 Å, pelo que a expressão se pode escrever

$$\lambda' - \lambda = 0,023 (1 - \cos \theta) \text{ \AA} \quad \text{V.45}$$

A probabilidade de ocorrência deste efeito é proporcional a  $\frac{Z}{E}$ .

O electrão libertado é uma partícula ionizante secundária.

**Difusão de Rayleigh-Thomson** - se a interacção entre o fotão e o electrão periférico é insuficiente para produzir ionização ou excitação do átomo, a colisão é elástica. O fotão sofre uma ligeira mudança de direcção sem perda de energia. Esta difusão só se manifesta para baixas energias.

Consideremos agora as interacções com o núcleo:

**Efeito de produção de pares** - para energias elevadas, de valor superior a 1,022 MeV, quando o fotão fica sujeito ao campo eléctrico intenso que existe nas proximidades de um núcleo, pode ocorrer um efeito de materialização da energia, produzindo-se um positrão e um electrão.

O excesso de energia que o fotão possuía em relação a 1,022 MeV (energia equivalente a 2 vezes a massa do electrão em repouso) aparece na forma de energia cinética daquelas partículas.

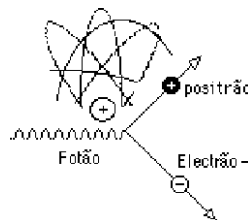


Fig.V.44 - Efeito de produção de pares.

Sendo  $E_\gamma$  a energia do fóton vem

$$E_\gamma = h\nu = 2m_0c^2 + T_{\varepsilon-} + T_{\varepsilon+} \quad \text{V.46}$$

onde  $T_{\varepsilon-}$  e  $T_{\varepsilon+}$  são as energias cinéticas do electrão e positrão. Estas são partículas ionizantes secundárias, do mesmo modo que o fotoelectrão ou o electrão Compton. A energia cinética que possuem vai gradualmente ser utilizada a produzir ionizações.

Quando o electrão tiver perdido praticamente toda a sua energia, combina-se com um átomo ionizado do meio.

Quando o positrão tiver perdido quase toda a sua energia cinética, combina-se com um electrão negativo, as duas massas desaparecem e são produzidos dois fótons de 0,511 MeV.

A probabilidade de ocorrência do efeito de produção de pares é aproximadamente proporcional a  $Z^2(E-1,022)$ . Aumenta pois com o quadrado do número atómico do absorvente e com a energia do fóton.

**Absorção da radiação  $\gamma$  pela matéria** - quando a radiação passa através de matéria, sofre absorção ao interagir com os átomos do meio. Esta interacção deve-se aos já estudados efeito fotoeléctrico, efeito Compton e, para energias maiores que 1,022 MeV, ao efeito de produção de pares.

O resultado é um decréscimo na intensidade da radiação incidente, à medida que aumenta a distância percorrida no material.

Consideremos um feixe monoenergético de raios paralelos, incidindo sobre uma camada absorvente de espessura  $X$ . A lei que relaciona a intensidade incidente com a intensidade emergente é

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad \text{V.47}$$

A intensidade é, pois, uma função exponencial da distância. A constante  $\mu$  é o coeficiente de absorção linear, que depende do meio e da energia dos fótons incidentes.

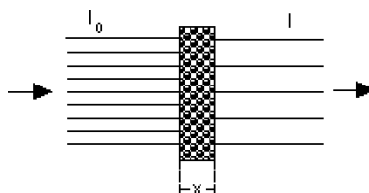


Fig.V.45 - Absorção de um feixe homogêneo de raios paralelos.



A expressão anterior resulta da integração da equação diferencial

$$\frac{dI}{dx} = -\mu I \quad \text{V.48}$$

que diz que a intensidade que é absorvida por unidade de comprimento é proporcional à intensidade.

Sendo assim o coeficiente

$$\frac{\frac{dI}{dx}}{I}$$

representa a fração da intensidade que é perdida por unidade de comprimento do meio absorvente.

Um conceito muito útil no estudo da qualidade da radiação  $\gamma$  e também dos raios  $X$  é o da camada semi-redutora ou espessura de semi-absorção.

Define-se como espessura de um dado absorvente necessária para reduzir a metade a intensidade de um feixe incidente de radiação  $\gamma$  ou  $X$ . Esta espessura ( $x_{1/2}$ ) que os anglo-saxónicos designam por H.V.L. (half value layer) e os franceses por C.D.A. (couche de demi-absorption), pode facilmente relacionar-se com  $\mu$ . Assim, para

$$x = x_{1/2}$$

vem

$$I = I_0/2$$

e

$$1/2 = e^{-\mu x_{1/2}}$$

donde se tira que

$$\mu = \frac{0,693}{x_{1/2}} \quad \text{V.49}$$

De modo análogo ao que vimos para a radiação  $\beta$ , a espessura pode ser dada em termos de densidade superficial  $x_m$  e o coeficiente  $\mu$ , por divisão pela

massa específica, transformar-se no coeficiente de absorção de massa  $\mu_m$ .

O coeficiente de absorção  $\mu$  é a soma de 3 coeficientes

$$\mu = \tau + \sigma + \kappa$$

V.50

$\tau$  – coeficiente de absorção devido ao efeito fotoelétrico

$\sigma$  – coeficiente de absorção devido ao efeito Compton

$\kappa$  – coeficiente de absorção devido ao efeito de produção de pares.

O coeficiente  $\sigma$  engloba as perdas de energia dos fotões e também as perdas resultantes de fotões que, por mudança de direcção saem do feixe.

Como a importância dos diferentes efeitos depende da energia da radiação  $\gamma$  e do número atómico do absorvente, o coeficiente total  $\mu$  varia com a energia dos fotões  $\gamma$ , como se pode ver na Fig. V.46, referente à absorção em alumínio.

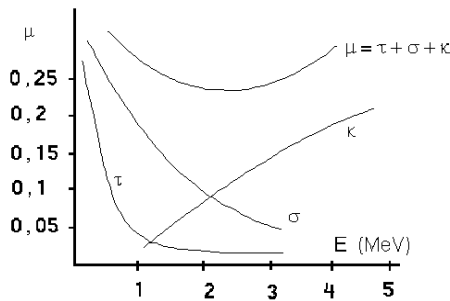


Fig. V.46 - Coeficiente de absorção linear total e devido aos efeitos fotoelétrico, Compton e produção de pares.

## V.7 - Utilização dos radioisótopos em biomedicina

O método dos traçadores é uma técnica destinada a estudar uma dada população de átomos, moléculas, células ou outras entidades utilizando a marcação de alguns dos seus elementos. Os elementos marcados são,

---

supostamente, reconhecíveis por algum processo e a observação do seu comportamento pode conduzir a informações sobre a população em geral.

Uma das grandes aplicações dos radioisótopos é a possibilidade do seu emprego, como agentes de marcação<sup>9</sup>, para obter traçadores radioactivos.

A produção de isótopos artificiais emissores de radiação, comportando-se química e biologicamente como os elementos naturais e sendo detectáveis em massa ínfimas, inspirou, há mais de cinquenta anos, o aparecimento da medicina nuclear (MN). Uma molécula biológica incorporando um destes isótopos radioactivos, quando administrada a um ser vivo, não é identificada como uma entidade estranha pelo organismo, podendo ser detectada por técnicas de detecção da radiação, eventualmente por detecção externa. As moléculas marcadas desempenham, assim, as mesmas funções que as moléculas nativas e, simultaneamente, emitem informação. Cedo foi reconhecido que a quantidade de moléculas que era necessário administrar para avaliar os processos bioquímicos era diminuta, não interferindo com a fisiologia dos sistemas em estudo. Este conceito de uma técnica não invasiva que permita “identificar as moléculas naturais nos seus processos de metabolismo, ou secreção pelos órgãos e quantificar as funções no vivo, é obviamente, excitante e é, ainda, o principal objectivo da MN.

Por outro lado o conceito de terapêutica metabólica foi criado mal as pessoas associaram os efeitos biológicos da radiação ionizante com a especificidade metabólica que podia ser obtida com as moléculas marcadas. A capacidade de irradiar *in situ* tecidos malignos, usando partículas beta emitidas por moléculas metabolicamente incorporadas no tumor, tem sido uma expectativa constante, desde os primeiros passos da aplicação dos radionúclídeos em medicina. Apesar de nem todas as esperanças que, inicialmente, foram idealizadas para aplicações dos radioisótopos em medicina, terem sido plenamente materializadas, não restam dúvidas de que estas técnicas são, e muito provavelmente continuarão a ser, o método mais sensível de estudar os processos bioquímicos no vivo e fazer a sua irradiação local.

De um modo muito geral, os radioisótopos podem ser utilizados em biologia e medicina:

1. - Como fontes de radiação
2. - Como traçadores

---

<sup>9</sup> - Isótopos naturais não radioactivos podem também ser utilizados como traçadores. Por exemplo o  $H_1^2$  (deutério) é usado em biologia como marcador da água (água pesada).

---

---

### V.7.1 - Como fontes de radiação

Em radioterapia com radioisótopos, estes são utilizados como fontes de radiação. Estas aplicações vão desde a teleradioterapia, com fontes externas à distância, até à irradiação directa através de átomos radioactivos incorporados nos tumores (radioterapia metabólica) ou em contacto com fontes seladas. Em geral, nestas modalidades, a forma química em que se encontram os radionuclídeos é de importância terapêutica secundária.

A escolha das fontes é feita com base quer nas características físicas das radiações, tais como o tipo ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $X$  ou  $\gamma$ ), a energia e o período, quer nas características dos tecidos a irradiar.

Quando se considera o binário radiação-matéria podem distinguir-se dois tipos de efeitos:

**a) Efeitos da matéria sobre as radiações**

Absorção e dispersão

**b) Efeitos da radiação sobre a matéria:**

Efeitos biológicos, efeitos físicos e efeitos químicos.

Nas aplicações terapêuticas da radiação estes dois efeitos têm de ser tomados em consideração, tornando estas técnicas um forte compromisso entre física e medicina.

### V.7.2 - Como traçadores

A primeira hipótese básica do experimentador com isótopos radioactivos é a do comportamento idêntico entre compostos naturais e compostos marcados. Em certas situações esta identidade é evidente. Um exemplo é a demonstração do envolvimento da vitamina **D** na absorção do Ca pelo intestino. Herrison em 1960 cortou um segmento de intestino de rato e inverteu-o de modo à parede interna original ficar exterior. Este segmento do intestino foi dobrada em **U** e suspenso numa solução que iria representar o conteúdo intestinal. A transferência de iões desta solução para o interior do tubo em **U** é um modelo "in vitro" da transferência do trato para a corrente sanguínea. Na presente experiência foram adicionados iões de  $\text{Ca}^{45+}$  ( $\text{Ca}^{45}\text{Cl}_2$ ) à solução exterior a simular o cálcio no conteúdo intestinal. Dentro

---

do tubo colocou-se soro fisiológico. Nestas condições o  $\text{Ca}^{45+}$  difunde com facilidade para o interior do tubo através da parede intestinal.

Efectuando esta experiência com segmentos de intestino do rato com deficiências em vitamina **D** a difusão de iões de  $\text{Ca}^{45}$  é muito menor do que a verificada com segmentos de intestino de ratos normais.

Ficou demonstrada a influência da vitamina **D** na absorção do Ca e provado também que o processo é difusão passiva e não transporte activo (enzimático) visto a velocidade de transferência do Ca não depende da temperatura nem da acção de inibidores. Além disso, o decréscimo de radioactividade da solução exterior, em função de tempo, é exponencial como seria de esperar num processo de difusão.

Um dos problemas que a MN teve de enfrentar, desde o início, está relacionado com o facto da maioria das moléculas biológicas serem constituídas por átomos de baixo número atómico. Este simples facto, que tem certamente a ver com a adaptação dos seres vivos às condições de sobrevivência é, todavia, um desastre no ponto de vista da obtenção de imagens em medicina nuclear convencional (MNC). De facto, dentre os radioisótopos artificiais dos elementos de baixo número atómico, como são os principais elementos biológicos, não há emissores de radiação gama com período utilizável, permitindo detecção externa. Os radioisótopos artificiais destes elementos são emissores beta puros (beta negativo e positrão). Esta situação levou ao aparecimento de moléculas marcadas com isótopos de elevado **Z**, emissores de radiação gama, que supostamente se comportam como moléculas nativas, pelo menos nos primeiros passos do metabolismo. As técnicas da MNC usam, assim, moléculas biológicas “fingidas”, intrinsecamente diferentes daquelas que se pretendem estudar. Estamos a excluir algumas excepções, tais como os radioisótopos do iodo, ferro e sódio que têm, eles próprios, papéis importantes no metabolismo humano e ainda algumas moléculas biológicas marcadas com estes elementos.

As moléculas marcadas com isótopos radioactivos, que podem integrar-se nos sistemas biológicos permitindo o seu estudo (radiofármacos), comportam-se como traçadores (traçam processos nestes sistemas), podendo distinguir-se dois tipos:

*a) Traçadores isotópicos*

São aqueles com composição igual à das entidades químicas que traçam, mas com a propriedade de emitir radiação. São radioisótopos ou, moléculas, em que um dos seus átomos é um isótopo radioactivo.

Exemplos:

---

---

Estudo do metabolismo do Fe utilizando  $\text{Fe}^{59}$ .

Estudo do metabolismo da glucose com glucose marcada com  $\text{C}^{14}$ .

*b) Traçadores não isotópicos (marcadores)*

São aqueles que não apresentam identidade química com as moléculas nativas, incorporam um elemento radioactivo e têm comportamento biológico semelhante àquelas, pelo menos, nos primeiros passos dos processos metabólicos em que participam.

Exemplos:

Estudo do metabolismo da glucose com  $\alpha$ -2-Deoxi-2  $\text{F}^{18}$ -glucose.

Estudo do metabolismo da albumina com  $\text{I}^{123}$ -Albumina.

Em MN a fixação selectiva de compostos marcados com emissores  $\gamma$  permite obter imagens da distribuição do traçador, que contém para além dos aspectos morfológicos, dados sobre as capacidades metabólicas dos órgãos, com informação local e muitas vezes quantitativa. Através das imagens, a MN permite retratar as variações espaciais e temporais das distribuições das biomoléculas que constituem o corpo humano.

Estas imagens são como que projecções ortogonais planas da concentração local de um radiofármaco, presente num volume parcial do corpo e são chamadas de imagens planares ou, simplesmente, de gamagrafias (ou ainda cintigrafias). São mapeamentos bidimensionais onde é subtraída uma dimensão à distribuição original, volúmica.

Estudos dinâmicos podem também ser realizados, adquirindo rápidas sequências de imagens planares. Esta facilidade é importante pois, uma imagem estática de um sistema biológico, num dado instante, poderá ser pouco informativa visto a dinâmica ser a essência da fisiologia.

O conteúdo funcional único, das técnicas da MN representou um avanço decisivo no estudo da dinâmica metabólica de numerosos órgãos.

A aquisição radial em torno do objecto, seguida de reconstrução, permitiu a obtenção de mapeamentos tomográficos da concentração de radionuclídeos. Esta metodologia, quando utilizada com a detecção de um único fóton, é conhecida por SPECT (Single Photon Emission Computerized Tomography) e oferece um contraste bastante melhor do que a gamagrafia planar. Além disso, a aquisição de séries de cortes transversais da distribuição de actividade permite reconstruir, aproximadamente, a sua localização espacial. A existência de câmaras de raios gama com movimento de rotação a um custo razoável, veio tornar o SPECT uma técnica de rotina em MNC.

---

---

Depois do aparecimento do SPECT, decorreram mais de trinta anos, até ser possível utilizar os fótons de aniquilação emitidos pelos elementos de vida curta, emissores de positrões  $O^{15}$ ,  $N^{13}$  e  $C^{11}$  que permitem marcar moléculas biológicas, sem lhes alterar a composição. Este avanço deve-se sobretudo à tecnologia moderna e está associada ao desenvolvimento de pequenos ciclotrões de baixo custo, dedicados à produção de emissores de positrões, ao desenvolvimento de sistemas compactos e servo controlados de síntese química dedicados à produção rápida e segura das moléculas marcadas, bem como ao seu controlo de qualidade e, finalmente, ao desenvolvimento de sistemas de imagem por detecção de coincidências, PET (Positron Emission Tomography), com excelentes características e elevada eficiência.

A tomografia de emissão com positrões não usa métodos indirectos ou parâmetros físicos para estudar o funcionamento dos órgãos ou tecidos, ou obter a sua visualização, pois consiste na detecção directa e quantificação de distribuições de moléculas naturais emissoras de positrões, que estão a desempenhar as suas tarefas biológicas específicas. Deste modo, as imagens da PET são documentos vivos das funções em estudo.

A MN é um bom exemplo de esforço multidisciplinar já que inclui fisiologia, instrumentação, radiofarmácia, modelagem matemática, ciência computacional, radiobiologia, protecção contra as radiações, estatística e aplicação clínica, isto referindo só algumas das disciplinas oriundas de ciências básicas puras e aplicadas, que não referimos.

As vantagens principais na utilização dos traçadores radioactivos são:

- Não perturbam o processo biológico em estudo. Utilizam-se massas ínfimas das moléculas traçadoras - são traçadores fisiológicos.

- Apresentam identidade de comportamento químico em relação às moléculas traçadas;

- Tornam desnecessárias ou minimizam o uso das técnicas de separação e processamento químico;

- Existem métodos muito sensíveis para a sua detecção e medida;

- Os emissores de radiação  $\gamma$  e de positrões podem ser detectados externamente.

As principais desvantagens na utilização dos radiotraçadores são:

- Necessitam de aparelhagem sofisticada e requerem cuidados especiais;

- Em certos casos a sua utilização em humanos, deve ser feita com cuidados especiais devido a possíveis factores de risco;

- A existência de um traçador adequado não é garantida e a marcação

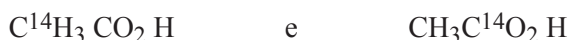
---

de moléculas nem sempre é prática ou possível;

- Frequentemente o material radioactivo é dispendioso.

### V.7.3 - Esquema geral do método dos traçadores

Para possibilitar a identificação de precursores, ou caracterizar reacções, é necessário, com frequência, obter as moléculas marcadas na posição apropriada. A marcação do ácido acético com  $C^{14}$  tem as alternativas



É necessário também que a ligação seja firme, para evitar trocas passivas com o sistema ou a hidrólise da molécula marcada.

Os métodos usados na obtenção das moléculas marcadas utilizam:

- Reacções de síntese química.
- Reacções de substituição
- Reacções de troca
- Biosíntese

Factores importantes a ter em conta ao projectar uma experiência com radionuclídeos são: a actividade específica do traçador (Bcq/g), a actividade total a utilizar, a metodologia da detecção, a segurança na utilização e a viabilidade de interpretação dos resultados.

### V.8 - Localização compartimental e mecanismos de transporte

Existe um já vasto conhecimento sobre o comportamento e trajecto de elementos e compostos, depois da sua administração no corpo.

É conhecido que a localização dos elementos nos tecidos e a sua configuração electrónica específica estão estreitamente relacionados.

No lado esquerdo da tabela periódica, predominam as relações verticais, tendo os elementos de uma dada família periódica (coluna da tabela), distribuições nos tecidos semelhantes entre si. Pelo contrário, no lado direito da tabela periódica, especialmente para os metais de transição, são predominantes as relações horizontais. A distribuição nos tecidos de um elemento tende a assemelhar-se à dos elementos vizinhos com quase a mesma massa atómica.

Em regra, os aniões, incluindo iões dos halogénios, iões oxigenados ou halogenados dos grupos IV, V e VI e os metais de transição, tendem a ser



rapidamente eliminados pelos rins. Em contraste, os catiões metálicos com as camadas mais interiores completamente preenchidas por electrões, tendem a ser retidos no esqueleto e tecidos moles por tempo prolongado.

As propriedades mais importantes na determinação da localização e excreção de um elemento nos tecidos são: oxidação ou estado de valência, para o pH do sangue ( $\text{pH} = 7,4$ ); a solubilidade relativa em meio aquoso ou, se insolúvel, a dimensão das partículas coloidais constituintes e a sua tendência para se incorporarem em compostos orgânicos ou proteínas específicas.

Os factores que determinam a localização biológica de compostos radioactivos são mais complexos do que aqueles já referidos para elementos radioactivos. Depois da injeção intravenosa, a maior parte dos radiofármacos abandonam o compartimento vascular principalmente através dos capilares. Num homem médio, existem cerca de  $4 \times 10^{10}$  capilares com uma área de superfície para troca de cerca de  $1000 \text{ m}^2$ , contendo no entanto, no estado de repouso, menos de 5% do total da circulação do sangue.

A captação de um composto por um órgão depende da fracção do débito cardíaco recebida pelo órgão e da presença de sítios receptores, tendo uma afinidade bioquímica específica para extracção e concentração do composto. Também considerados importantes são os factores relacionados com os capilares, em particular como o número de capilares por milímetro cúbico de tecido e o tipo de endotélio capilar dentro do órgão. O endotélio dos capilares tem sido classificado em três grandes tipos: contínuo, fenestrado e descontínuo. O endotélio contínuo não-fenestrado encontra-se em músculos, gordura, tecido conectivo e pulmões.

O endotélio fenestrado pode ser fechado como no trato gastrointestinal e glândulas endócrinas, ou aberto como no glomérulo renal, onde o raio efectivo do poro é  $45\text{-}50 \text{ \AA}$ . O endotélio descontínuo, permitindo a passagem de grande quantidade de moléculas no espaço perivascular, existe nos sinusóides dos órgãos reticuloendoteliais - fígado, baço e medula óssea.

Algumas das causas determinantes da localização de fármacos no corpo são:

- 1 - Dimensão e forma molecular quando no plasma;
- 2 - Natureza e intensidade da força da ligação às proteínas no sangue e tecidos;
- 3 - Liposolubilidade da droga;
- 4 - Mecanismos celulares específicos.

Geralmente, a distribuição e localização de radiofármacos, não é um processo simples mas uma complexa cadeia de processos com múltiplas interacções envolvendo, provavelmente, vários dos fenómenos que vão ser descritos a seguir.

---

Depois da administração de um traçador radioactivo, podem prevalecer processos lentos de difusão passiva, devidos a gradientes de concentração, através de barreiras permeáveis. Quando isto acontece, o traçador pode ser usado para medir parâmetros dentro do seu espaço de localização, como o volume e através das próprias barreiras, como a permeabilidade ou a dinâmica do processo.

Um radiofármaco, para alcançar uma determinada célula após a administração, deve passar através de uma série de membranas, que são de natureza lipídica e entre as quais se podem incluir a membrana gastrointestinal, o endotélio capilar, e mesmo as membranas dos organelos intracelulares. Frequentemente é importante o conhecimento da permeabilidade destas membranas para com os diferentes agentes.

Um exemplo de transporte passivo com uso em medicina nuclear é o  $Tc^{99m}$ -pertechnetato como agente explorador do cérebro. A este ião é vedada a passagem através da barreira normal existente entre o sangue e o tecido cerebral (barreira hematoencefálica). No sistema nervoso central as fendas interendoteliais dos capilares encontram-se seladas (as chamadas *zonula occludens*) de que resulta estes vasos serem relativamente herméticos para a maioria das drogas. Quando, devido a um trauma, tumor ou lesão metastática, ou ainda como resultado de um acidente vascular cerebral, a barreira hematoencefálica é destruída e o pertechnetato passa a poder atravessar a barreira, torna-se detectável, externamente, um aumento anormal de actividade, localizado nessa zona.

Em termos gerais, os gradientes de energia potencial responsáveis pelo transporte passivo de moléculas radioactivas, não carregadas, nos meios biológicos, dizem respeito à concentração e à pressão. Esta última é o factor mais importante nos métodos de diluição.

### V.8.1 - Trocas iónicas

A localização devida a trocas iónicas pode ocorrer por efeito de ião comum. Iões nativos do órgão de interesse são removidos por troca com iões de um radiotraçador da mesma espécie, concentrando-se assim no órgão. De modo análogo à diluição e à difusão através de barreiras de permeabilidade, a troca por efeito ião comum participa no estabelecimento da distribuição biológica de muitos agentes radiofarmacológicos.

Outras possibilidades de troca iónica podem ocorrer não envolvendo o

---

ião comum. Os iões de tálio, estrôncio, fluoreto e fosfato são extraídos do plasma sanguíneo, por processos de troca iónica.

O tálio é concentrado activamente no miocárdio, pela acção da bomba de sódio/potássio. Apesar do ião tálio não ser um verdadeiro análogo químico do potássio, a sua distribuição biológica é bastante semelhante, actuando a bomba sobre o primeiro, como se fosse  $K^+$ .

Em áreas de osteogénese, seja por crescimento ou reparação, ocorre aumento do *turn-over* dos iões cálcio e hidroxilo e aumentam também as trocas que envolvem a substituição do estrôncio por cálcio e do fluoretião por hidroxilo. Depois da localização por troca iónica, os passos seguintes poderão envolver incorporação metabólica ou eliminação.

A deposição de radionucléidos traçadores no osso parece ser, inicialmente, o resultado de uma rápida troca iónica, na superfície do cristal, sobre esta ou já no interior, seguida de uma incorporação lenta dos iões na própria malha do cristal, agora por troca iónica intracristalina.

Os complexos de fosfato e fosfonato de  $Tc^{99m}$  utilizados em gamagrafia óssea não são, provavelmente, utilizados por mecanismos de troca iónica, mas por adsorção na superfície dos cristais de hidroxiapatite. Foi confirmado por estudos cristalográficos que existe uma relação entre os parâmetros de coordenação do cálcio na hidroxiapatite e o arranjo espacial dos átomos dadores de oxigénio, nos ligandos.

### V.8.2 - Fagocitose e pinocitose

Uma das técnicas de gamagrafia hepática, actualmente em uso, utiliza partículas de dimensões coloidais que são captadas, ou melhor, "engolidas" por células fagocíticas, como as células Kupffer do fígado ou os macrófagos do baço e medula óssea. A fagocitose é um processo com vários passos, no qual as partículas são inicialmente levadas a contactar com a superfície da célula fagocítica. As partículas são então identificadas a seguir ao que são postas em contacto com a membrana celular e incluídas na célula. O processo de reconhecimento é feito por receptores existentes na membrana celular, que correspondem a material coberto com imunoglobulina G (receptores Fc), materiais cobertos com complemento (receptores C3) e a superfície estranha. As partículas podem ser ou não opsonizadas (cobertas com opsonina).

Partículas de  $2,5 \times 10^{-7}$  cm a  $10^{-3}$  cm de diâmetro podem ser reconhecidas e fagocitadas mas, outros factores, tais como o número de partículas e carga

---

superficial, afectam o processo. Colóides de  $Tc^{99m}$ -estanho ou enxofre, usados para gamagrafia hepática e colóides de sulfureto de antimónio ou de albumina marcados com  $Tc^{99m}$  para cintigrafia óssea, são todos sujeitos a fagocitose.

A pinocitose assegura a entrada na célula de moléculas e partículas em solução quando a membrana não é, normalmente, permeável a estas. Existem na parede da célula microvilosidades que limitam pequenos vacúolos com fluído, onde se encontram as moléculas sujeitas a pinocitose.

### V.8.3 - Retenção nos capilares

A perfusão regional relativa do sangue numa rede capilar pode ser avaliada, bloqueando uma fracção dos muitos capilares da área com partículas radioactivas.

Suspensões de partículas de 20 a 40  $\mu m$  injectadas em veias sistémicas vão, encontrar, progressivamente, vasos cada vez mais finos no seu trajecto até ao coração direito e cedo serão retidas na árvore capilar pulmonar se o seu diâmetro exceder o diâmetro do vaso. A microembolização ocorre na proporção da perfusão local.

Os pré-capilares pulmonares têm 10-15  $\mu m$  de diâmetro e são muito curtos (cerca de 8  $\mu m$  de comprimento), e menos de 0,5% dos vasos pulmonares disponíveis, será bloqueado num indivíduo normal, por um miligrama de albumina humana, com a forma de esferas com 60-90  $\mu m$  de diâmetro.

### V.8.4 - Incorporação metabólica

O exemplo mais típico de incorporação metabólica é o uso de iodo radioactivo nos estudos da função tireóideia. O iodo administrado oralmente ou por via intravenosa, é fixado activamente pela glândula e utilizado para produzir as hormonas tireóideas. O iodo radioactivo pode ser utilizado para estudar os passos da formação, armazenamento e utilização destas hormonas. O iodo radioactivo segue passos metabólicos idênticos ao do substrato natural, não-radioactivo. A elevada dose absorvida associada à radiação do  $I^{131}$  torna-o pouco adequado para a aplicação em diagnóstico e o seu uso tem sido largamente substituído por  $I^{123}$ .

Nos rins ocorre transporte activo durante a filtração do plasma. Os tubos renais separam as substâncias do filtrado glomerular que serão

---

---

reabsorvidas no sangue daquelas que serão excretadas. O sal sódico do ácido ortoiódopírico é activamente excretado pelos tubos renais e parcialmente reabsorvido de modo passivo pelo sangue.

Um importante problema no desenvolvimento de novos traçadores radioactivos é a falta de isótopos convenientes dos elementos naturais presente nos metabolitos, isto é, carbono, nitrogénio, oxigénio e enxofre. Os nuclídeos emissores de positrões  $C^{11}$ ,  $N^{13}$  e  $O^{15}$  já foram utilizados, por exemplo, na forma de  $C^{11}$ -glucose para o estudo do metabolismo da glucose.

### V.8.5 - Deposição e transporte de aerossóis

Desde há largos anos que, em medicina nuclear, são utilizados radioaerossóis em diversos estudos da função pulmonar. Suspensões de aerossóis, principalmente aerossóis líquidos, são utilizadas em estudos de ventilação, como alternativa aos gases radioactivos bem como em estudos de remoção da actividade depositada nos pulmões, quer para avaliação da permeabilidade da barreira alvéolo-capilar quer para o estudo do transporte muco-ciliar.

A deposição de aerossóis nos pulmões depende, principalmente, de três mecanismos: impacto inercial, sedimentação gravitacional e difusão Browniana. Os primeiros dois mecanismos são predominantes em partículas de diâmetro superior a  $1 \mu\text{m}$  e o último passa a ter importância para partículas inferiores a  $0,5 \mu\text{m}$ . Outras influências podem estar presentes com uma contribuição variável, tais como as relacionadas com a carga das partículas, a convecção originada pelas diferenças de concentração e temperatura, o método de inalação, a forma das partículas, algumas propriedades físicas e químicas das partículas, etc. O diâmetro ideal, não só para a penetração máxima das partículas na pequena galeria de ventilação, mas também para a deposição dentro dos pulmões é de cerca de  $0,5 \mu\text{m}$ .

Os fenómenos que podem ocorrer depois da deposição são também dependentes de vários factores. O lugar inicial da deposição do aerossol, a natureza química das partículas, o volume dos pulmões e a integridade do tecido da deposição, são alguns dos factores que condicionam a drenagem das partículas. A remoção de micelas pode ocorrer por transporte mucociliar, reabsorção e tosse.

A remoção mucociliar ocorre com partículas depositadas nas vias ciliadas e depende de factores como a frequência de batimento dos cílios, acoplamento mucociliar e quantidade de muco acumulada.

Na membrana alvéolo-capilar, a permeabilidade do endotélio para a

---

água e solutos hidrofílicos de baixo peso molecular é muito mais alta do que para o epitélio. Por outro lado, é pouco provável que a circulação do sangue tenha um efeito significativo na permeabilidade epitelial dos pulmões em condições de repouso. A remoção alveolar dos aerossóis solúveis depende do diâmetro molecular em relação ao diâmetro dos poros e às estreitas junções entre as células epiteliais. As suspensões de aerossol líquido podem ser produzidas de várias maneiras, incluindo nebulização por jacto, ultrassons, métodos de condensação, etc.

### V.8.6 - Radiofármacos gasosos

Em estudos de medicina nuclear, os gases utilizados são, essencialmente, isótopos do xénon e kripton ( $\text{Xe}^{133}$ ,  $\text{Xe}^{127}$  e  $\text{Kr}^{81m}$ ) que são quimicamente inertes e, que, para as concentrações usadas, são também fisiologicamente inertes, embora seja conhecido que o xénon tem efeito anestético a concentrações muito altas. Os gases inspirados, após atravessarem a barreira alvéolo-capilar, passam à circulação venosa pulmonar, coração direito e circulação sistémica podendo, a partir daí, trocar livremente com os tecidos, concentrando-se sobretudo na gordura do corpo. O xénon injectado intravenosamente entra na circulação e é libertado, através dos pulmões, pelo mecanismo da difusão alvéolo-capilar. Grande parte do xénon que entra na circulação é libertado por este processo, na primeira passagem através da circulação periférica.

### V.8.7 - Receptores

Ligandos ou substâncias com ligação específica a receptores são, frequentemente, consideradas como sendo constituídas por duas partes. Uma parte do composto contém o sítio essencial, que é a parte da molécula que irá interagir com o sítio de ligação do receptor. A outra parte da molécula é modificável dentro de certa medida. Quando um radionuclídeo é introduzido nestas molécula para produzir um radiofármaco, a incorporação deve acontecer na parte modificável da molécula.

Os receptores podem ser vistos como macromoléculas, com as quais uma droga ou um radiotraçador interagem para produzir um efeito biológico característico. Muitos tipos de receptores podem ser definidos e potencialmente, uma compreensão mais completa dos receptores pode resultar na

---

produção de radiotraçadores altamente específicos. Nos receptores já investigados encontram-se hormonas polipeptídicas, acetilcolina e receptores beta.

### V.8.8 - Mecanismos imunológicos

Tornou-se comum e continua a ser largamente investigada, a utilização de anti-corpos marcados como radiofármacos específicos em diagnóstico e terapêutica. O conceito de marcação de moléculas alvo neste caso é simples, mas na prática é difícil de alcançar. Anti-corpos monoclonais, derivados de células hibridoma de cultura, têm a capacidade de reconhecer e interagir com antigénios individuais, e, potencialmente, podem identificar e marcar grupos específicos de células, tais como células sanguíneas e tumorais. O maior problema na aplicação das técnicas de imagem e na radioterapia de células tumorais é que os antigénios visados não diferem, necessariamente em termos qualitativos, daqueles presentes nas células dos tecidos não afectados. As diferenças podem ser apenas de natureza quantitativa, com actividades significativas em tecidos, que não aqueles que se pretendem alcançar.

## V. 9 - Radioisótopos in vivo e in vitro

Os radioisótopos são extensivamente usados em medicina de diagnóstico, quer in vivo quer in vitro, em terapêutica e também para fins de investigação. Recentemente, novas estratégias de aplicação dos traçadores radioactivos em diagnóstico, acompanhamento e tratamento de muitas doenças foram introduzidas, reforçando o sempre crescente interesse desta metodologia.

Os estudos de MN no vivo são frequentemente classificados em dois tipos principais: os estudos funcionais e os estudos morfológicos. Estritamente isto quer dizer que podemos detectar a localização de radiofármacos nos órgãos (ou seja, a morfologia da distribuição do traçador) e o seu evoluir no tempo, como resultado das interacções nos seres vivos, na sequência de processos fisiológicos específicos.

As aplicações in vitro dos radioisótopos tornaram-se um dos mais importantes instrumentos de análise bioquímica em todos os ramos da medicina, desde a hormonologia à oncologia. Esta componente menos visível das aplicações dos radioisótopos no diagnóstico, tem hoje uma importância que nos atrevemos a comparar à da própria radiologia. É de referir que, modernamente, através de análises radiométricas de competição,

usando sistemas antigénio-anticorpo, enzima-substrato ou ligando-receptor, e ainda outros métodos isotópicos, torna-se possível dosear, praticamente sem manipulação química, centenas de compostos biológicos. Podemos dizer que as análises clínicas de hoje são, fundamentalmente, métodos físico-químicos radioisotópicos. Nestas análises são usados quer radioisótopos artificiais ( $I^{123}$ ,  $Na^{24}$ ) quer naturais ( $H^3$ ,  $C^{14}^{10}$ ).

Os usos terapêuticos dos radioisótopos vão desde as fontes externas de raios gama em teleradioterapia até à irradiação directa das células, na radioterapia metabólica.

A MN in vivo evoluiu no sentido de se tornar uma especialidade predominantemente dedicada à obtenção de imagens funcionais de órgãos do ser humano. As imagens funcionais fornecem informação para lá da simples representação morfológica de estruturas e, este facto, é um dos maiores interesses da MN. A informação veiculada pelo PET é sobretudo funcional e difere intrinsecamente da fornecida pela TAC (tomografia axial computadorizada com raios X) ou NMI (imagiologia por ressonância magnética nuclear) que é informação essencialmente de natureza estrutural. Esta qualidade é importante na detecção precoce e diagnóstico, visto que as perturbações funcionais precedem as alterações estruturais na evolução dos processos patológicos e as dimensões das lesões funcionais são frequentemente diferentes das correspondentes alterações anatómicas. É interessante lembrar que a designação de imagem funcional cobre um largo número de tarefas que podem ser divididas em: imagens de movimentos de órgãos (coração e sangue) e imagens de metabolismo (utilização da glucose, reacções ligando-receptor), incluindo nestas a função de excreção (rim e fígado). Os movimentos e a excreção podem ser estudados por outras técnicas, a segunda, referente às imagens de metabolismo in vivo, são o verdadeiro e quase exclusivo campo da MN.

### V.9.1 - Câmara de raios gama e $Tc^{99m}$

Uma situação talvez não esperada na MNC do presente é que a grande maioria dos estudos de diagnóstico são efectuados utilizando quase

---

<sup>10</sup> - O  $C^{14}$  é natural não porque possua um período muito grande (~5 500 anos) mas porque é constantemente produzido nas camadas superiores da atmosfera como resultado de uma reacção entre neutrões cósmicos e azoto.



A câmara de raios gama é um sistema de detecção desenvolvido por Hal Anger em 1958 para a obtenção de imagens e estudos funcionais. A cabeça de detecção da câmara consiste essencialmente de um cristal de iodeto de sódio activado com tálio NaI(Tl), que é um disco (ou rectângulo) de grandes dimensões 30-50 cm e espessura 0,6-1 cm, um mosaico de tubos fotomultiplicadores (60-90 tubos) opticamente acoplado ao cristal, a electrónica associada e um colimador de chumbo. O colimador é um prato de chumbo com milhares de orifícios que eliminam os raios dispersos não utilizáveis para a formação da imagem. Os tubos fotomultiplicadores colectam a luz originada no cristal pelos raios  $\gamma$ , por ionização e excitação, dando origem a sinais eléctricos com informação da posição dos eventos e da energia das interacções no cristal. Estes sinais são dirigidos para amplificadores de carga, amplificados logaritmicamente e aceites pelos circuitos de posição, que computam as coordenadas individuais, x e y, das detecções. Estes passos são preferivelmente efectuados por circuitos digitais.

As respostas logarítmicas são dirigidas a analisadores de altura de impulsos, que validam estes sinais se eles se encontram dentro da janela de energia do fotopico escolhida. A visualização com o pontos, dos sinais x e y dá origem à imagem gamagráfica. Uma maior densidade de pontos corresponde a uma maior actividade do radionuclídeo, possivelmente maior actividade funcional do órgão. Os parâmetros de funcionamento típicos de uma câmara gama encontram-se indicados no Quadro V.3. As primeira três linhas do quadro referem-se ao campo de visão central, ou seja, 75% do campo útil

Quadro V.3 - Especificações da câmara gama.

Resolução espacial intrínseca	3,9 mm (FWHM) ; 7,6 mm (FWTM)
Uniformidade campo (Integ.; difer.)	2.5 % ; 2.0 %
Distorção espacial	0,35 mm
Dimensões detector (rectang.; circular)	53 × 38 cm ; 45 cm
Resolução espacial com colimador	5 - 9 mm (de 5-10 cm dist. do colimador)
Resolução de energia	11- 13 %
Resolução temporal	~ 200 000 cps com 20 % perda
Sensibilidade	100 - 250 cps MBq <sup>-1</sup> (dependente do colimador)

Na tabela periódica o tecnécio (Tc) é o elemento 43, um metal de transição. Este nome vem do grego *technetos* que significa artificial. Todos os isótopos do Tc são radioactivos sendo destes o período mais longo  $10^5$  anos, pelo que o elemento original já desapareceu há muito tempo. Todavia, ocorre a produção de pequenas quantidades de Tc pela fissão espontânea do  $U^{238}$  e pela fissão do  $U^{235}$ , induzida por neutrões, que ocorre naturalmente.

O isótopo  $Tc^{99m}$  ( $T_{1/2} = 6$  h) pode ser produzido a partir do decaimento do  $Mo^{99}$  ( $T_{1/2} = 67$  h) e é geralmente utilizado a partir de geradores comerciais contendo molibdato radioactivo (de sódio), adsorvido numa coluna de óxido de alumínio. O  $Tc^{99m}$  que se vai formando continuamente na coluna não tem a mesma afinidade química para a alumina que o molibdato pelo que pode ser extraído com soro fisiológico por eluição.

O  $Tc^{99m}$  é um estado isomérico que decai para  $Tc^{99}$  por emissão gama. O  $Tc^{99}$  é um emissor beta com período  $2,1 \times 10^5$  anos. As actividades de  $Tc^{99m}$  usadas em estudos de MN vão até cerca de 30 mCi (1,11 GBq) em estudos cardíacos. A partir da relação entre os períodos do  $Tc^{99}$  e  $Tc^{99m}$  (cerca de  $3 \times 10^8$ ), vê-se facilmente que a irradiação beta num doente que receba uma actividade de  $Tc^{99m}$ , para fins de diagnóstico, é praticamente nula, só a irradiação pelos raios gama do  $Tc^{99m}$  interessa. Isto representa um facto de enorme importância em MN pois as partículas beta, sem qualquer utilidade para o processo de obtenção da imagem, libertam a sua energia nos tecidos num percurso muito pequeno, sendo a maior contribuição para a dose absorvida pelos pacientes, quando coexiste com a radiação gama. Por exemplo, nos estudos da função tireóideia efectuados, no passado com  $I^{131}$  (um emissor beta+gama com  $T_{1/2} = 8,04$  dias), mais de 90% da dose absorvida no órgão deve-se às partículas beta. No que diz respeito à dosimetria, o curto período do  $Tc^{99m}$  é também uma vantagem pois permite o aproveitamento duma fracção considerável dos fotões emitidos durante o tempo do exame.

Em termos gerais, o uso de estados metaestáveis diminui a dose absorvida pelos pacientes em estudos de MN por um factor de cerca de dez. Para além desta vantagem a energia dos fotões gama do  $Tc^{99m}$  é próxima do óptimo em termos da resposta da câmara de raios gama.

O  $Tc^{99m}$  é um elemento de transição, ávido de electrões, tendo tendência em formar complexos metal-dador por ligação a um grande número de átomos ou grupos funcionais que são capazes de ceder um par de electrões.

Amina, amida, tiol, isonitrilo, fosfina e outros são dadores capazes de formar complexos com  $Tc^{99m}$  o que explica a grande quantidade de moléculas que podem ser marcadas por este radioisótopo.

O radioisótopo mais usado em MN, o ( $Tc^{99m}$ ), mantém esta posição há mais de 30 anos e é muito provável que a mantenha dada a facilidade de obtenção, custo baixo, baixa dose e vantajosas propriedades químicas.

### V.9.2 - Outros radionuclídeos com aplicação clínica

Outras transições isoméricas dando estados metaestáveis, comercialmente disponíveis, são o  $Rb^{81}$  dando  $Kr^{81m}$  ( $T_{1/2} = 13$  s; 190 KeV), largamente usado em estudos de ventilação pulmonar e o  $Sn^{113}$  dando  $In^{113m}$  ( $T_{1/2} = 99$  min; 390 KeV), usado como marcador celular e em estudos de detecção de inflamação.

Outros radionuclídeos com aplicação clínica mas que são emissores de electrões e radiação gama, estão referidos no Quadro V.4. À excepção do último todos são utilizados in vivo.

Quadro V.4 - Radionuclídeos com aplicação clínica

	Período, horas	Energia raios $\gamma$ , KeV	Finalidade
$I^{123}$	13,2	159	Marcador (Hippuran, proteínas, etc)
$Xe^{133}$	126	81	Estudos ventilação Pulmonar
$In^{111}$	67	171, 245	Estudos sobre inflamação
$Ga^{67}$	78,2	93; 185; 300	Marcação de tumores
$Tl^{201}$	73	167	Estudos cardíacos
$I^{125}$	59,6 dias	27, 32 (raios X)	Maração in vitro- radioensaios

O custo mais alto do PET bem como das suas instalações restringiu esta técnica a um número mais limitado de centros. Todavia, o PET forneceu informações que facilitaram o desenvolvimento de radiofármacos marcados com emissores de fóton único para o SPECT que, em muitos casos, se tornaram uma boa alternativa.

Os radioisótopos emissores de positrões com interesse em medicina são eficazmente produzidos bombardeando isótopos estáveis apropriados com feixes de prótons com energias que podem ser da ordem dos 12 MeV. Estas energias podem ser obtidas com ciclotrões de pequeno porte desenhados especificamente para a produção de emissores de positrões para a PET.

No presente, todos os pequenos ciclotrões disponíveis para produção de emissores de positrões são aceleradores de íon negativo que transformam íons  $H^-$  em prótons pela técnica de “ion stripping”. As correntes de feixe são da ordem dos 50-100 mA.

Uma das características mais importantes da PET é o facto de, potencialmente, permitir a obtenção de qualquer molécula biológica marcada com um emissor de positrões, sem alteração da sua estrutura ou das suas propriedades químicas e a sua utilização como radiofármaco capaz de fornecer informações sobre as funções metabólicas em que entrem.

Os radionúclídeos artificiais dos elementos biológicos disponíveis são:  $C^{11}$  ( $T_{1/2} = 20,03$  min);  $O^{15}$  ( $T_{1/2} = 2,03$  min);  $N^{13}$  ( $T_{1/2} = 9,97$  min);  $Ga^{68}$  ( $T_{1/2} = 67,8$  min);  $Rb^{82}$  ( $T_{1/2} = 1,26$  min) e  $F^{18}$  ( $T_{1/2} = 109,8$  min).

Estes radionúclídeos vão substituir átomos estáveis de igual número atómico, em moléculas como, por exemplo, glucose, aminoácidos, proteínas e neurotransmissores.

Uma gama completa de alvos, projectados para produzir os radionúclídeos acima referidos, estão já disponíveis comercialmente, para ser usados nos ciclotrões.

Os períodos muito curtos dos radionúclídeos com interesse para a PET obrigam a que os ciclotrões que os produzem tenham de se situar nas proximidades dos centros utilizadores. O processamento químico necessário para a obtenção das moléculas bem como o controlo de qualidade antes da sua administração, que obrigam frequentemente à execução de técnicas complexas como métodos de síntese, no primeiro caso e (high performance gas chromatography) HPGC no segundo, são também operações que têm de ser executadas nas proximidades do tomógrafo. As moléculas mais

---

importantes, utilizadas em tomografia de emissão com positrões podem já ser obtidas por processamento automático que diminui o tempo de execução e melhora as condições de protecção do pessoal.

Facilmente se compreende assim que a tomografia de emissão com positrões seja, de facto, um conjunto de três unidades praticamente indissociáveis: ciclotrão, unidade de radioquímica e tomógrafo.

É a conjugação das tarefas destes três componentes, numa verdadeira luta contra o tempo, que torna a técnica possível.

Em termos gerais, os processos químicos relacionados com os alvos do ciclotrão e com a síntese ou simples marcação dos radiofármacos com emissores de positrões para uso de rotina em PET são já efectuados automaticamente e controlados por computador com uma diminuição do tempo de processamento e melhoria na protecção pessoal. O curto período dos emissores de positrões utilizados e as grandes áreas dos detectores do PET permitem eficiências de detecção que podem ser uma ordem de grandeza superiores às do SPECT.

O PET tem todavia algumas limitações intrínsecas. A resolução espacial é limitada pelo percurso dos positrões antes da aniquilação e pela dispersão angular no ângulo dos fotões de aniquilação, como resultado da conservação da quantidade de movimento. Consequentemente a resolução teórica depende da energia do positrão e da distância entre os detectores de coincidência. O primeiro dos pontos é o mais relevante e leva a distâncias de resolução intrínsecas que podem variar de 1 a 3 mm.

### V.9.3 – Progressos nas imagens da medicina nuclear

Têm sido efectuados esforços, continuamente, para se aproximar a técnica de imagens da MN, tão perto quanto possível, de um método ideal de diagnóstico: não-invasivo e fornecendo simultaneamente informação funcional, morfológica, tridimensional e quantitativa. As imagens da MN e particularmente o PET, não estão, provavelmente, muito distantes de alguns destes objectivos. Com as referidas técnicas obtêm-se imagens funcionais de alto contraste traduzindo a dinâmica de moléculas marcadas (nativas ou funcionalmente semelhantes) metabolizadas pelos órgãos sujeitos a investigação.

Em sentido lato todos os processos da medicina nuclear são exercícios de teoria dos sistemas: uma função de entrada é utilizada para estudar um sistema através de uma resposta induzida. Em MN o sistema é um

---

---

compartimento, ou um conjunto de compartimentos, com propriedades metabólicas muito específicas. A função de entrada está intimamente relacionada com o radiofármaco usado e a resposta detectada tem a ver com o transporte e com o destino biológico do traçador usado.

A MN tem progredido como resultado de avanços em cada um dos pontos citados. Avanços no desenvolvimento de radiofármacos, avanços na tecnologia e propriedades dos detectores, avanços na capacidade de modelar o destino metabólico dos produtos injectados nos sistemas biológicos e, finalmente, melhorias na capacidade de extrair e processar dados.

Recentemente, a investigação científica em MN explorou os avanços da biologia celular a nível molecular e, como resultado, foi desenvolvido um número substancial de novos radiofármacos, particularmente substratos metabólicos e ligandos de receptores diversos, destinados ao estudo de funções celulares específicas.

Os factores que determinam a localização metabólica dos compostos radioactivos são complexos. Depois de injeção intravenosa a maioria dos radiofármacos abandona o compartimento vascular sobretudo através dos capilares. No homem médio existem cerca de  $4 \times 10^{10}$  capilares com uma área total de superfície de troca de cerca de  $1000 \text{ m}^2$ , contendo todavia, no estado de repouso, menos de 5 % do sangue total em circulação.

A captação de drogas por um órgão depende da fracção do débito cardíaco recebido pelo órgão e da presença de sítios receptores tendo uma afinidade bioquímica específica para a extracção e concentração do composto.

São também importantes os factores relacionados com os capilares, tais como o seu número por centímetro cúbico de tecido e o tipo de endotélio capilar no interior do órgão. A permeabilidade dos capilares aos diferentes materiais não é a mesma para todos os órgãos. Por exemplo, grandes moléculas podem passar para o espaço perivascular nos sinusoides dos órgãos reticuloendoteliais – fígado, baço e medula óssea.

Os factores determinantes mais importantes na localização de drogas no corpo são: dimensões e forma das moléculas no plasma, tipo e intensidade da ligação às proteínas no sangue e tecidos, liposolubilidade da droga e mecanismos celulares específicos.

A distribuição e localização dos radiofármacos não é, geralmente, um processo simples mas uma cadeia de processos. Após a administração, um traçador radioactivo tem de penetrar através de uma série de membranas, que são predominantemente de natureza lipídica e incluem membranas celulares e membranas envolvendo estruturas intracelulares. Os mecanismos

---

---

últimos de localização dos radiofármacos podem incluir trocas iónicas, fagocitose e pinocitose, retenção nos capilares, incorporação metabólica, ligação a receptores e mecanismos imunológicos.

Tratando-se de uma especialidade multidisciplinar a MN é muito dependente de disciplinas como a física (física nuclear, instrumentação, física das radiações, biofísica, etc.), química (radioquímica, bioquímica, química-física, etc.), matemática (transformadas ortogonais, equações diferenciais, métodos de convolução e desconvolução, análise factorial, etc.), ciência computacional (análise de dados, processamento de imagem, reconstrução a partir de projecções, etc.) e outras.

O uso generalizado de computadores em linha está por detrás dos mais recentes progressos em medicina nuclear. Para satisfazer as novas solicitações da MN, e de outras especialidades, o computador fez aparecer modernas subespecialidades com propósitos bem definidos, tais como processamento de imagem, manuseamento de dados dinâmicos, visualização 3-D, coregisto e modelagem. O coregisto é a palavra usada para descrever a combinação de informação a partir de duas, ou mais modalidades de imagem, um processo que é suposto fornecer informação clínica superior à das respectivas componentes individuais. Imagens multimodais do cérebro criadas a partir de informação da MRI e PET, ou seja, associando no computador dados anatómicos e funcionais, apresentam resultados promissores.

#### **V.9.4 - Aplicações dos radioisótopos em diagnóstico**

Uma imagem de MN é um mapeamento da distribuição de um radiofármaco a partir de dados acumulados durante um tempo de aquisição. Um requisito fundamental das imagens em MNC é que o radiofármaco não deve ser metabolizado ou transportado durante o tempo de aquisição. Nas imagens planares isto não é, em geral, um problema mas poderá sê-lo em SPECT. Neste caso, impõe-se um tempo de renovação (turn over) maior do que o tempo de aquisição dos dados (20 min), pois doutro modo aparecerão artefactos nas imagens. A acrescentar a esta última, o radiofármaco ideal deve somar as seguintes características: energia dos raios gama de valor, próximo dos 150 KeV, estabilidade química in vivo, especificidade, e, finalmente, deve reflectir o estado fisiológico do tecido alvo no qual alterações patofisiológicas deverão ser identificadas.

No que diz respeito a contraste e detalhe geométrico o SPECT trouxe melhorias em relação à cintigrafia planar. Todavia, a última é mais rápida e, visto o contraste no objecto ser alto na maioria das técnicas de MN é usada em muitas situações com bons resultados.

No Quadro V.5 encontram-se alguns radiofármacos importantes e os estudos em MNC que em que são mais frequentemente utilizados. O ião pertecnetato ( $Tc^{99m}O_4^-$ ) é correntemente utilizado na cintigrafia planar da tireóide. Neste ião, o  $Tc^{99m}$  está no estado de oxidação VII e apresenta propriedades bioquímicas semelhantes às do iodeto, sendo captado pela tireóide e pelo estômago. Pode também ser usado para a detecção de lesões na barreira hemato-cerebral, uma vez que é retido no espaço extracelular na área da lesão. O ião pertecnetato é também utilizado para marcar o espaço sanguíneo (após sensibilização dos glóbulos vermelhos) nos estudos vasculares, tais como o método do equilíbrio

O  $Tc^{99m}$ -DTPA (ácido dietileno-triamino-pentacético) é utilizado para gamagrafia planar renal e avaliação da velocidade de filtração (GFR), o  $Tc^{99m}$ -DMSA (ácido dimercaptosuccínico) para visualização cintigráfica da massa renal (planar ou SPECT) ou detecção de tecido cicatricial, e o MAG3 (mercapto-acetil-triglicina) é usada para estudos funcionais e de imagem.

A gamagrafia do fígado e baço é efectuada por captação reticuloendotelial de coloides marcados com  $Tc^{99m}$  (agregados de albumina humana e microesferas de albumina humana). Para a cintigrafia hepatobiliar são usados derivados do ácido iminodiacético (HIDA, DISIDA, BrIDA) marcados com  $Tc^{99m}$ .

O caudal sanguíneo cerebral regional é avaliado com  $Tc^{99m}$ -HMPAO (hexametilpropilenoamina oxina) ou  $Tc^{99m}$ -ECD (dímero de etilcisteinato). Para ser possível este estudo, o radiotraçador necessita de atravessar a barreira hemato-cerebral intacta (ser lipofílico e electricamente neutro), ter uma elevada eficiência de extracção durante a primeira passagem através do cérebro e, uma vez dentro das células cerebrais, deve ser retido um tempo suficiente para permitir a aquisição de dados.

As imagens do esqueleto são correntemente efectuadas com  $Tc^{99m}$ -MDP (complexo de metilendifosfonato) e com  $Tc^{99m}$ -EHDP (complexo de Etanohidroxidifosfonato). A captação dos complexos de difosfonato depende do caudal sanguíneo local e da actividade osteoblástica. A ligação ocorre com a hidroxiapatite na superfície mineral do osso. Como exemplo vê-se na Fig. V.47 uma gamagrafia osteo-articular dos pés com  $Tc^{99m}$ -MDP Observam-se lesões traumáticas, indetectáveis pelos raios X, sobretudo no pé esquerdo.





Fig. V.47 - Gamagrafia dos pés com Tc99m-MDP.  
Observam-se lesões traumáticas, indetectáveis pelos raios X.

Visto o iodo ser o elemento ideal para estudos de diagnóstico da glândula tireóide o  $I^{123}$  tirou o lugar ao  $I^{131}$  em MN. O  $I^{123}$  tem período de 13 h e decai por captura electrónica para o  $Te^{123}$  ( $T_{1/2} = 1,2 \times 10^{13}$  anos) emitindo radiação gama de 159 KeV. Infelizmente é difícil de obter com suficiente pureza radioactiva, o que, associado ao pequeno período, o torna dispendioso e de limitada disponibilidade quando distante dos centros de produção. A  $I^{123}$  IBZM (iodobenzamida) e outros, tais como  $I^{123}$  iodolisuride e  $I^{123}$  epidepride, são usados para determinar a presença de receptores D2 no síndrome idiopático de Parkinson como um requisito para tratamento.

Quadro V.5 - Radiofármacos e aplicações importantes em diagnóstico em MNC

Radio-isótopo	Forma química	Estudo
Tc99m	Pertechnetato	Cintig. tireóide; Barreira hem. cereb.; Espaço sangue
	DTPA, DMSA, MAG3	Função renal, visualização renal, GFR
	Coloide	Sist. ret. end. do fígado e baço; visualização linfática
	Deriv. ácd. iminodiacético	Gamagrafia hepatobiliar
	HMPAO, ECD	Caudal sanguíneo cerebral; Perfusão
	Difosfonatos (MDP, EHDP)	Gamagrafia esqueleto; metástases ósseas; fracturas
	MIBI, Tetrafosmina	Visualização do miocárdio

	MAA	Perfusão pulmonar
	aerosóis	Ventilação pulmonar
I123	Iodeto de sódio	Função tireoideia
	IBZM, iodolisuride	Estudos dos receptores D2
	MIBG	Tumores neuroendócrinos
	ocreótido	Visualização tumoral
Xe <sup>133</sup>	gás	Ventilação pulmonar
Kr <sup>81m</sup>	gás	Ventilação pulmonar
Ga <sup>67</sup>	Citrato	Infecção, inflamação; sarcoidose; linfoma
Tl <sup>201</sup>	Cloreto	Perfusão do miocárdio; Visualização tumoral
In <sup>111</sup>	Anticorpos; Peptidos	Visualização tumoral (próstata, cólon, etc.)

Outros fármacos marcados com I<sup>123</sup> no Quadro V.5 são marcadores tumorais (I<sup>123</sup>-MIBG e I<sup>123</sup>-ocreótido). A tendência na detecção tumoral em MN é usar características metabólicas específicas e propriedades biológicas dos tumores para diagnóstico, estagiamento e acompanhamento.

A fluor-deoxi-glucose marcada com F<sup>18</sup> (F<sup>18</sup>DG) é o composto mais usado em PET e destina-se à localização e avaliação da actividade metabólica. Um exemplo bem conhecido é a localização da actividade cerebral que é revelada por um aumento no metabolismo da glucose, que num estudo do PET corresponde a detectar aumento na actividade de F<sup>18</sup>DG.

Diversas razões estão por trás da escolha do F<sup>18</sup> como marcador da deoxi-glucose e não o C<sup>11</sup> ou O<sup>15</sup>: o período é maior (110 min); a energia é baixa, donde o percurso ser pequeno (cerca de 1mm, FWTM); os raios de Van der Waals do hidrogénio e do F são próximos e conseqüentemente quando o segundo substitui o primeiro a perturbação esteérica produzida é pequena quando comparada com substituições por outros halogéneos. Contudo, a electronegatividade do F<sup>18</sup> é maior do que a dos outros halogéneos e a energia da ligação C-F é elevada. Assim as propriedades químicas e bioquímicas de um composto organofluorado pode estar alterada com respeito ao análogo não substituído.

Além do  $F^{18}DG$  muitas outras moléculas marcadas com emissores de positrões foram já utilizadas em numeroso estudos metabólicos, em áreas diversificadas. A lista dos ligandos marcados com emissores de positrões produzidos até hoje inclui acetilcolina, aminas biogénicas, aminoácidos, neuropeptidos, purinas and esteroides.

O PET clínico é hoje um importante instrumento em oncologia. Os estudos de evolução tumoral com o PET podem ser classificados em:

- 1 - Avaliação do metabolismo tumoral da glucose e oxigénio
- 2 - Localização e estagiamento de tumores
- 3 - Avaliação do caudal local de sangue
- 4 - Determinação do pH
- 5 - Avaliação da integridade da barreira (tumores do cérebro)
- 6 - Utilização de aminoácidos
- 7 - Estudos com citoestáticos marcados
- 8 - Diferenciação entre necrose e regeneração.

A quantificação da perfusão local dos tumores obriga à utilização de radiotraçadores não metabolizáveis enquanto que para a avaliação do metabolismo local são utilizados derivados da glicose e aminoácidos O estudo da farmacocinética dos citoestáticos implica a sua marcação, nem sempre fácil. Se for confirmada a heterogeneidade de um tumor poderá interessar o estudo das lesões com múltiplos traçadores antes do diagnóstico e, eventualmente, da terapêutica. O conhecimento actual de biologia molecular incluindo as técnicas de clonagem celular e a caracterização dos receptores celulares dos antigénios, possibilitaram a produção de numerosos anticorpos monoclonais capazes de se ligarem especificamente aos receptores na célula neoplásica

Baseada neste conceito, foram desenvolvidos radiofármacos específicos para diagnóstico e terapêutica em oncologia.

A utilização de substratos metabólicos marcados e, em particular  $^{18}FDG$ , análogo da glucose, parcialmente metabolizável, que se acumula no tecido do miocárdio, é um método sensível na previsão da viabilidade do miocárdio. Os ácidos gordos marcados com  $C^{11}$  podem também ser úteis nestes estudos. O uso de ligandos de receptores do miocárdio marcados com emissores de positrões pode ser uma importante arma no estudo das miopatias.

Numa aproximação muito geral os estudos neurológicos com o PET podem ser classificados em:

---

- 1 - Determinação da concentração local dos receptores dos sistemas neurotransmissor e neuromodulador
- 2 - Avaliação do caudal local do sangue cerebral
- 3 - Avaliação da utilização local de glucose
- 4 - Avaliação da utilização de local O<sub>2</sub>
- 5 - Determinação do pH intracelular cerebral
- 6 - Determinação da incorporação de aminoácidos marcados na síntese de proteínas cerebrais
- 7 - Detecção da epilepsia focal
- 8 - Diagnóstico da doença de Alzheimer

A metodologia mais usada para desenvolver radioligandos para utilização no PET tem sido a modelagem baseada na dinâmica de compartimentos. Para uma dada espécie molecular é criado um modelo que é suposto similar o metabolismo do composto no organismo através de constantes de troca, actividades específicas locais, etc. e verificada a sua aplicabilidade aos dados reais provenientes da experiência animal.

Uma nova abordagem para desenvolver ligandos para utilização no PET é usando modelagem no computador. O conhecimento da acção farmacológica de diversas moléculas que se comportam como prováveis receptores, bem como das reacções que determinam a sua função, podem levar a pistas para a modelagem de ligandos com afinidade e facilidade de síntese que torne possível a sua utilização como radiofármacos do PET, para fins de diagnóstico, eventualmente com vantagens, quando comparadas com outros presentemente em uso.

### **V.9. 5 - Aplicações terapêuticas dos radioisótopos**

A radioterapia metabólica é uma poderosa modalidade de tratamento do cancro. As doses de radiação são selectivamente libertadas nos tecidos alvo através de mecanismos sistémicos, não invasivos. Esta técnica pode ser bem planeada pois tem a vantagem de ser possível conhecer a fixação e a retenção no tumor através de um estudo com uma pequena dose de traçador antes de administrar a dose terapêutica. Em geral, muito poucos efeitos colaterais imediatos e tardios estão associados à radioterapia metabólica.

---

O sucesso em terapia com radionuclídeos depende de uma fixação grande e selectiva e de uma retenção longa do radionuclídeo no tumor com reduzida fixação nos tecidos normais.

Há já disponíveis para uso em humanos um número de radiofármacos com afinidade para diversos tumores utilizando diferentes mecanismos de ligação. O conhecimento da posição do radionuclídeo em relação ao núcleo da célula a irradiar é essencial para uma escolha apropriada do marcador no que respeita ao percurso efectivo das partículas beta.

A maioria dos antigénios (antigénios de superfície ou intracitoplasmáticos) produzidos pelas células neoplásicas, poderão também estar presentes num número de tecidos adultos normais e em tecidos fetais. A elevada concentração de antigénios encontrados nas células malignas torna interessante o seu uso para fins de diagnóstico. Os marcadores tumorais tornam possível detectar a existência de tumores malignos quando antigénios estão presentes em concentrações acima do normal.

Esta ideia pode ser generalizada aos oncogénos relacionados quer com factores celulares do crescimento ou dos seus receptores, quer com as proteínas que transportam a informação do receptor até ao núcleo da célula. Há uma vasta bibliografia sobre as tendências recentes em radioterapia metabólica. O Quadro V.6 contém aplicações clássicas da terapêutica com radioisótopos.

Quadro V.6 - Aplicações terapêuticas dos radioisótopos.

Radio-isótopo	Forma química	Aplicação terapêutica
$^{131}\text{I}$	Iodeto de sódio	Tirotoxicose; cancro tireóide e metástases tireóideias
	MIBG	Neuroblastoma; feocromocitoma; neuroblastoma; paraganglioma
$\text{Sr}^{89}$	Cloreto	Dor óssea terminal; metástases ósseas (paliativo)
$\text{Y}^{90}$	Coloide	Sinoviortose (joelho); efusões pleuro/peritoneais
$\text{P}^{32}$	Ortophosphate	Polícitemia vera rubra; trombocitemia essencial

Re <sup>186</sup>	Sulphide	Sinoviortose
	HEDP	Metástases ósseas (paliativo)
I <sup>131</sup> , Y <sup>90</sup>	Anticorpos marcados	Diversos tumores
Cu <sup>67</sup>		

Resumidamente e em termos muito gerais, os métodos da MN e os seus princípios gerais, atrás referidos, podem dividir-se quanto ao objectivo em:

1 - Métodos baseados nas propriedades metabólicas de elementos que têm isótopos radioactivos com propriedades físicas convenientes para utilização médica (I<sup>123</sup>, O<sup>15</sup>, Fe<sup>59</sup>, ...).

2 - Métodos onde se estudam passos do metabolismo de moléculas tornadas radioactivas por inclusão de radionuclídeos na sua estrutura (Fuor-d-glucose-F<sup>18</sup>, DTPA-Tc<sup>99m</sup>, albumina-I<sup>123</sup>, Vitamina B<sub>12</sub>-Co<sup>58</sup>)

3 - Métodos que permitem obter imagens correspondentes a uma acumulação de produto radioactivo, quer por impregnação de órgãos devido a propriedades metabólicas, quer por razões morfológicas ou mecânicas (gamagrafia da tireóide-I<sup>123</sup>, fígado-coloide de Tc<sup>99m</sup>).

4 - Técnicas onde é utilizado o método da diluição isotópica para a determinação de volumes de espaços e compartimentos. (volémia - Albumina-Tc<sup>99m</sup>, espaço sódio - Na<sup>22</sup>, água trocável do pulmão - DMSA-Tc<sup>99m</sup>).

5 - Técnicas onde são utilizadas propriedades dinâmicas de fluidos orgânicos (tempos de trânsito, estudos de primeira passagem e débito cardíaco, etc.)

6 - Técnicas *in vitro*. (Dosagens pelos métodos radioimunológico, radiométrico, competição com resinas, etc.)

7. - Radioterapia metabólica onde a radiação emitida é utilizada para a destruição local de tecidos.

## V.10 - Análise compartimental

Em sentido lato, todas as metodologias da medicina nuclear são procedimentos da teoria dos sistemas, ou seja, uma função de entrada é utilizada para estudar um sistema através da reacção induzida. Em medicina nuclear, a função de entrada está intimamente relacionada com o radio-

---

fármaco usado. A resposta detectada tem a ver, não só com o transporte mas também com o destino biológico do traçador usado. O transporte pode ser devido à difusão passiva através das membranas, transporte activo, arrastamento mecânica, etc. O percurso biológico depende de muitas variáveis, algumas delas já consideradas.

A medicina nuclear tem progredido, como o resultado de progressos em cada fase deste processo. Progressos nas funções de entrada devidos à introdução de novos radiofármacos, progressos na tecnologia e reabilitação dos detectores e, finalmente, melhorias na capacidade de extrair e processar informação adquirida.

Em medicina nuclear o sistema é constituído por um ou vários compartimentos. Na criação dos modelos determinísticos, um compartimento pode ser uma subdivisão anatómica, fisiológica, química ou física do sistema sob investigação. Nos organismos vivos existem muitos compartimentos, quer fisicamente bem limitados, quer simplesmente definidos em termos teóricos. De facto, um organismo pode, fundamentalmente, ser considerado como uma série de compartimentos dinamicamente interrelacionados. Uma troca contínua de matéria e energia ocorre entre esses compartimentos e também com o meio exterior. Estas trocas são os processos físico-químicos relacionados com a absorção, a distribuição, a síntese, a degradação e a excreção. As relações entre estes compartimentos são tão estreitas que, de um modo geral, o desequilíbrio em determinada troca tem repercussões no funcionamento de vários sistemas. A doença é uma alteração de uma, ou algumas, destas trocas ou dos seus mecanismos de regulação.

Os radiofármacos podem alcançar a sua biodistribuição inicial, por simples distribuição em semelhante compartimento. Um traçador permanece num compartimento determinado tempo, que depende do processo bioquímico e biofísico específico, no qual será envolvido. A evolução no tempo da quantidade do traçador presente num compartimento, ou em parte dele, depois de uma rápida injeção é, frequentemente, a função obtida por detecção externa (detecção por resíduo).

Utilizam-se correntemente modelos e análogos para estudar a biocinética dos radiofármacos. Um modelo utiliza as grandezas e dimensões físicas do fenómeno biológico em estudo e permite, matematicamente, prever o comportamento no tempo de uma droga, determinando a sua concentração e dos seus metabolitos activos, nos vários compartimentos.

Alguns modelos físicos são, essencialmente, determinísticos. O modelo assume as leis como conhecidas e os valores dos seus parâmetros são obtidos

---

directamente a partir de amostras. Outros sistemas são estocásticos por natureza. As leis estatísticas do sistema e os seus parâmetros têm de ser estabelecidos, a partir da análise dos resultados obtidos.

Como afirmado anteriormente, é geralmente suposto que o traçador é rapidamente misturado com o traçado ao entrar num compartimento, para que a actividade específica seja uniforme, em qualquer ponto do compartimento em qualquer momento. Nesta secção, analisam-se alguns modelos compartimentais, frequentemente encontrados na literatura, fazendo-se referências à sua aplicação clínica.

### V.10.1 - Modelos de um único compartimento

Podemos começar por um modelo para a simples injeção de um radiofármaco na circulação sanguínea e o seu eventual desaparecimento. Aqui, o sangue é considerado como um compartimento único de volume  $V$ .

Seja  $c(t) = \frac{q(t)}{V}$ , a concentração do traçador no sangue, (em actividade por unidade de volume), para  $t \geq 0$ . Seja  $i(t)$  a função que traduz a velocidade instantânea de entrada do radiofármaco no sangue (em actividade por unidade de tempo).

É suposto que o desaparecimento do radiofármaco ocorre de acordo com uma reacção de primeira ordem com constante  $\lambda_{ef}$ . Isto é uma coacção determinística, assumida como sendo baseada na experiência.

No intervalo de tempo  $dt$ , ocorrido a partir do instante  $t$ , a eliminação efectiva a actuar no compartimento irá diminuir a actividade do traçador de  $q(t)$  para  $q(t)(1 - \lambda_{ef} dt)$  enquanto a entrada irá aumentá-la de  $i(t)dt$ , assim

$$q(t + dt) = q(t) (1 - \lambda_{ef} dt) + i(t) dt$$

Assumindo a função  $q(t)$  como contínua

$$q(t + dt) = q(t) + q'(t)dt + \dots$$

e, desprezando os termos de segunda ordem e superiores vem

$$q'(t) = -\lambda_{ef} q(t) + i(t)$$

ou



$$q(t) = q_0 e^{-\lambda_{ef} t} + \int_0^t e^{-\lambda_{ef} (t-s)} i(s) ds \quad \text{V.51}$$

e, dividindo por V

$$c(t) = c_0 e^{-\lambda_{ef} t} + \int_0^t e^{-\lambda_{ef} (t-s)} i(s) ds / V \quad \text{V.52}$$

Se  $i(t) = 0$  para  $t > 0$ , isto é, não existe entrada e para  $t = 0$ ,  $c(t) = c_0 = q_0/V$ , vem

$$q(t) = q_0 e^{-\lambda_{ef} t} \quad \text{V.53}$$

e

$$c(t) = c_0 e^{-\lambda_{ef} t} \quad \text{V.54}$$

Um exemplo desta situação (Fig. V.48), é a injeção instantânea da actividade  $q_0$ , no instante  $t = 0$ , de um traçador difusível, com mistura instantânea no compartimento.

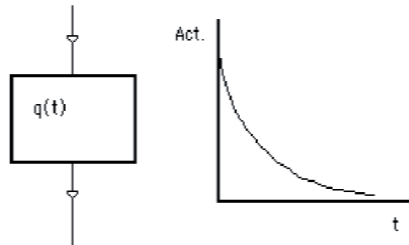


Fig. V.48 - Curva actividade/tempo após uma injeção instantânea num sistema aberto de um compartimento. Supõe-se a mistura instantânea.

Se a concentração no compartimento para  $t = 0$  é zero, isto é,  $C_0 = 0$ , mas  $i(t)$  não é nulo, temos

$$c(t) = \int_0^t e^{-\lambda_{ef} (t-s)} i(s) ds / V \quad \text{V.55}$$

que é a convolução da função de entrada com a resposta do sistema a uma injeção instantânea de actividade unitária.

Se  $i(t)$  tem valor constante,  $i(t) = k$ , assim a integração da Eq. V.55 dá

$$c(t) = \frac{k}{\lambda_{ef}V} (1 - e^{-\lambda_{ef} t}) \quad \text{V.56}$$

A representação gráfica desta função é

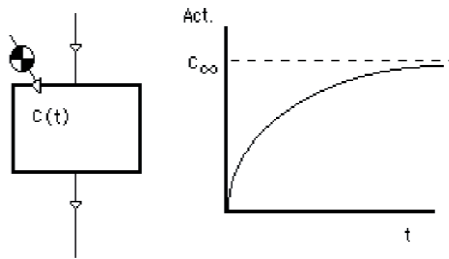


Fig.V.49 - Curva actividade/tempo durante a perfusão contínua num sistema aberto de um compartimento.

Um exemplo desta situação é a perfusão contínua do  $Tc^{99m}$ -DTPA para a determinação da clarificação renal.

Num compartimento onde ocorre mistura instantânea e homogénea, se para  $t = 0$  é realizada uma injeção instantânea de uma actividade de traçador  $q_0$ , e  $\lambda_{ef} = 0$ , o volume de distribuição pode ser facilmente determinado se a actividade da amostra e o volume injectado forem conhecidos e for possível a colheita de amostras. Se  $q_0$  é a actividade administrada no volume  $v$  e se, depois da homogeneização for recolhida uma amostra de volume  $v'$  e actividade  $a'$ , a concentração no compartimento é,

$$c = \frac{a'}{v'} = \frac{q_0}{V+v} = \frac{q_0}{V}$$

e

$$V = \frac{q_0 - c v}{c} = \frac{q_0}{c} \quad \text{V.57}$$

$q_0$  e  $c$  são conhecidos. A aproximação mantém-se para o caso de  $V \gg v$ . Esta situação é conhecida como o princípio da diluição. Assume-se que

nenhum declínio significativo de actividade ocorre e aparece como um princípio irrealista de conservação para a actividade, em sistemas biológicos. Devido ao decaimento radioactivo e eliminação biológica, mesmo as amostras que são recolhidas um pequeno intervalo de tempo depois da injeção, necessário para garantir a homogeneização no sangue, já estão afectadas de erro. Após a colheita de amostras de sangue em diferentes tempos e realizado o ajuste das curvas da actividade vs. tempo, o valor para o tempo zero pode ser determinado por extrapolação e a correcção introduzida na Eq. V.57. Para uma diminuição exponencial, como no caso da Fig. V.48 o ajuste em escala semilogarítmica é linear, o que torna fácil o processo.

Exemplos típicos da determinação do volume de compartimentos são o plasma e os glóbulos vermelhos. O primeiro usando albumina do soro humano marcada e o segundo glóbulos vermelhos autólogos marcados.

## V.10.2 - Modelos de dois compartimentos

### a. Sistema aberto de dois compartimentos em série

Para  $t = 0$ , é realizada uma injeção instantânea de um traçador no compartimento **1** com mistura instantânea, originando-se uma concentração homogénea no compartimento,  $q_0$ . As constantes de troca  $k_1$  e  $k_2$  referem-se às trocas do compartimento **1** para o compartimento **2** e do compartimento **2** para o exterior, respectivamente. As equações para as variações de concentração do traçador em **1** e **2** são

$$\frac{dq_1}{dt} = -k_1 q_1 \quad \text{V.58}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = k_1 q_1 - k_2 q_2 \quad \text{V.59}$$

A integração da primeira equação é, imediatamente

$$q_1(t) = q_0 e^{-k_1 t} \quad \text{V.60}$$

A integração da Eq. V.59 dá

$$q_2(t) = q_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \quad \text{V.61}$$

Os gráficos das Eqs. V.60 e V.61 podem ser vistos na Fig. V.50 para o caso geral de  $k_2 \neq 0$  (gráfico I) e para  $k_2 = 0$  (gráfico II).

Um exemplo do caso I é, numa primeira aproximação, a  $Tc^{99m}$ -Des-hida, um radiofármaco para estudos hepático-biliares. Depois da injeção é retirado do plasma por células do parênquima hepático e eliminado com a bÍlis para o intestino. Para o caso II, e de novo com os estudos hepáticos, mas agora com radiocolóides, como o  $Tc^{99m}$ -S, e supondo a não fixação pelo baço e medula óssea.

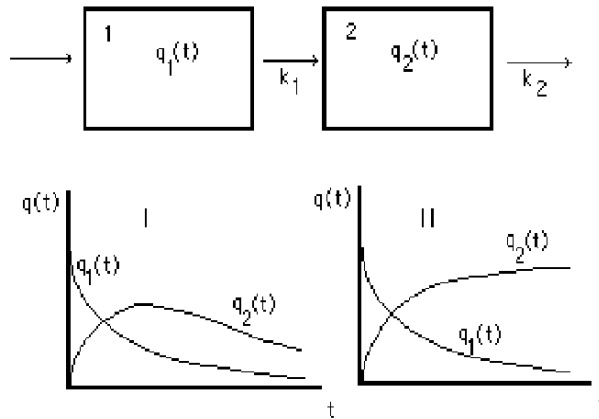


Fig. V.50 - Variações de actividade em compartimentos 1 e 2, depois de injeção instantânea de radiotraçador no primeiro. Caso I  $\rightarrow k_2 \neq 0$ ; caso II  $\rightarrow k_2 = 0$ .

### b. Sistema mamilar aberto de dois compartimentos.

Em modelos mamilares, do qual o sistema da Fig.V.51 é a situação mais simples, um ou mais compartimentos estão ligados a um compartimento central aberto.

No caso da Fig.V.51 as concentrações nos compartimentos 1 e 2 são  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  e um bolo radioactivo é injectado no compartimento 1. A constante  $k_{10}$  pode considerar-se a velocidade de excreção relativa do comparti-

mento 1.

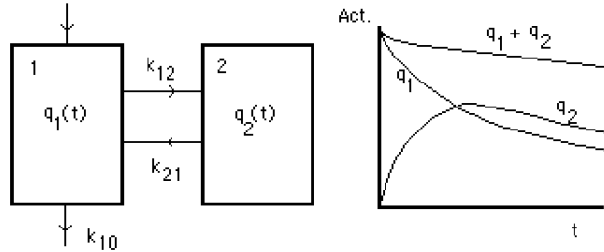


Fig. V.51 - Sistema mamilar aberto de dois compartimentos.

As velocidades de mudança de actividade são

$$\frac{dq_1}{dt} = -k_{10} q_1 - k_{12} q_1 + k_{21} q_2 \quad \text{V.62}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = k_{12} q_1 - k_{21} q_2 \quad \text{V.63}$$

Para  $t = 0$ :

$$q_1 = q_0 ; \quad q_2 = 0 ; \quad \frac{dq_1}{dt} = -k_{10} q_1 - k_{12} q_1 \quad \text{e} \quad \frac{dq_2}{dt} = k_{12} q_1$$

Assim por integração

$$q_1(t) = q_0 \left( \frac{k_{21} - s_1}{s_2 - s_1} e^{-s_1 t} + \frac{k_{21} - s_2}{s_1 - s_2} e^{-s_2 t} \right) \quad \text{V.64}$$

$$q_2(t) = q_0 \frac{k_{12}}{s_2 - s_1} ( e^{-s_1 t} + e^{-s_2 t} ) \quad \text{V.65}$$

com

$$s_1 s_2 = K_{10} K_{12} \quad \text{e} \quad s_1 + s_2 = K_{10} + K_{12} + K_{21}$$

O metabolismo das proteínas do plasma e a fixação de  $^{99m}\text{TcO}_4^-$  pela

tireóide, foram estudados utilizando este modelo.

### V.10.3 - Clarificação

Se num pequeno intervalo de tempo  $dt$ , no qual a concentração do plasma  $p(t)$  é aproximadamente constante, o volume de urina  $dV$  com a concentração de traçador  $u(t)$  é excretada, podemos escrever para o valor instantâneo da clarificação

$$\text{clarificação} = \frac{u(t) dV}{p(t) dt} \quad \text{V.66}$$

que tem as dimensões de  $(L)^3(T)^{-1}$ , e representa o volume teórico de plasma com concentração de marcador  $p(t)$ , que é completamente clarificado do plasma por unidade de tempo.

Considerando um intervalo de tempo limitado entre  $t_2$  e  $t_1$ , podemos obter o valor médio da remoção neste intervalo

$$\text{Clarificação} = \frac{\bar{u}}{\int_{t_1}^{t_2} p(t) dt} \quad \text{V.67}$$

$\bar{u}$  é a concentração de traçador no volume  $V$  de urina excretado.

A velocidade de filtração renal (GFR) reflecte a fracção do caudal total de plasma das artérias renais, que é filtrado. Nos adultos normais, 20 a 30% do plasma total irriga os dois rins (caudal renal efectivo de plasma, ERPF).

Se a actividade total injectada  $A_0$  é excretada pelos rins, a velocidade de remoção pode ser escrita assim

$$R = \frac{A_0}{\int_0^{\infty} p(t) dt} \quad \text{V.68}$$

### V.11 - Traçadores, volumes e caudais em sistemas de distribuição

Um sistema no qual um traçador se distribui e se pretende que dê informações acerca de volumes, de caudais, de tempos de trânsito e da dinâmica geral do líquido no sistema, é designado de sistema de distribuição ou de diluição.

Consideremos um tubo percorrido por um líquido onde se encontram aplicados dois detectores de radiação bem colimados sobre pequenos volumes  $dV_1$  e  $dV_2$ , respectivamente à entrada e saída do tubo, Fig. V.52.a). Se uma única e pequena partícula radioactiva é injectada à entrada do tubo, as respostas dos dois detectores  $D_1$  e  $D_2$ , em função do tempo, são obtidas no mesmo registo, serão como na Fig. V.52.b).

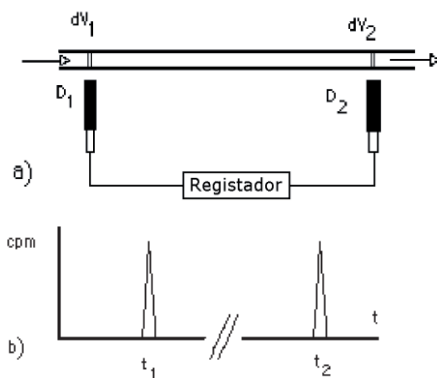


Fig. V.52 - a) Tubo percorrido por um líquido onde se encontram aplicados dois detectores de radiação bem colimados vendo pequenos volumes  $dV_1$  e  $dV_2$ . b) Respostas dos dois detectores,  $D_1$  e  $D_2$ , em função do tempo, são obtidas no mesmo registo

A pequena partícula passou através do reduzido volume visto pelos detectores nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente. Esta experiência com uma única partícula é, provavelmente, a única situação, no que diz respeito à dinâmica dos traçadores, na qual a curva de saída é previsível e igual à curva de entrada.

Se injectarmos não uma partícula mas um bolo de um traçador radioactivo, miscível na corrente líquida, e assumirmos que o caudal através do tubo tem regime laminar, a curva de saída é diferente da curva de

entrada, como se mostra na Fig. V.53.

Assumimos, no presente exemplo, que a entrada é uma injeção muito rápida (injeção ou função impulso ou, ainda, função delta).

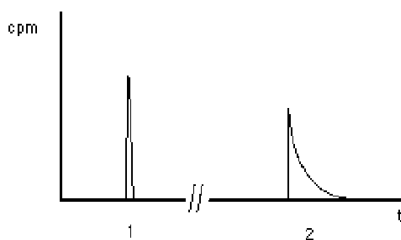


Fig.V.53 - Curva à saída se injectarmos não uma partícula mas um bolo de um traçador radioactivo e assumirmos que o caudal através do tubo é laminar.

Embora diferente do primeiro caso, de novo, nesta situação, a saída é previsível, isto é, se a entrada é uma injeção impulso e o caudal é em regime laminar, podemos prever a curva à saída. No entanto, em muitas das situações com interesse em biologia e medicina, os sistemas são muito mais complexos que simples tubos. As partículas injectadas podem não só ter uma variedade diversificada de percursos possíveis no sistema, mas também ser arrastadas por velocidades de corrente diferentes dentro do sistema. Será necessário, desta maneira, considerar tais sistemas como caóticos, nos quais os processos são, por natureza, sujeito a às leis do acaso. Estamos interessados nas propriedades estatísticas globais da população das partículas e lidamos com as funções estatísticas densidade e distribuição.

Contrariamente aos casos precedentes, não é possível prever a curva de saída de uma maneira determinística.

Suponhamos que, para uma injeção impulso (injeção instantânea) de um traçador radioactivo, num sistema real, se obtém a curva **2** à saída (Fig. V.54)

O traçador injectado em  $t_1$  numa injeção praticamente instantânea, surge, à saída, não como um rápido impulso mas, em vez disso, os tempos de trânsito das partículas estão distribuídos entre os tempos  $t_a$  e  $t_b$ . Existe uma distribuição estatística dos tempos de trânsito. Podemos ver pela forma da curva que, no caso hipotético que considerámos, os tempos de trânsito que ocorreram mais frequentemente, são aqueles localizados, aproximadamente a



meio do intervalo entre  $t_a$  e  $t_b$ . A curva de saída é uma indicação de quão provável (frequente) é um dado tempo de trânsito, através do sistema.

Se designarmos por  $dV_2$  o elemento de volume visto pelo detector 2, à saída, por  $F$  o caudal através do sistema e por  $C_2(t)$  a concentração do traçador à saída, então a quantidade do traçador presente em  $dV_2$  entre  $t$  e  $t+dt$  é

$$dq_2(t) = dV_2 C_2(t)$$

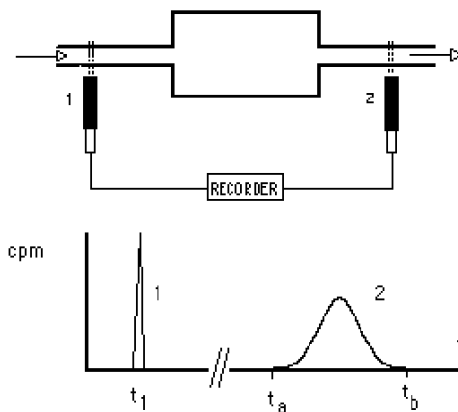


Fig.V.54 - Para uma injeção impulso de um traçador radioactivo, num sistema real hipotético, a curva 2 foi obtida à saída.

Definindo a função  $f(t) = \frac{dq_2}{dt}$  que, para cada valor de  $t$ , representa a velocidade de variação da quantidade do traçador no volume  $dV_2$ , Fig.V.55 vem

$$dq_2(t) = f(t) dt$$

Na Fig.V.55 a área do rectângulo tracejado  $f(t)dt = dq_2$  representa a quantidade elemental do marcador que passou o sistema entre os instantes  $t$  e  $t+dt$ .

A área por baixo de  $f(t)$  é a quantidade total  $Q$  de traçador injectado

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \int dq_2 = Q$$

É conveniente usar, em vez de  $f(t)$ , outra função dada por

$$h(t) = \frac{f(t)}{Q} = \frac{dq_2}{Q} \frac{1}{dt} \quad \text{V.69}$$

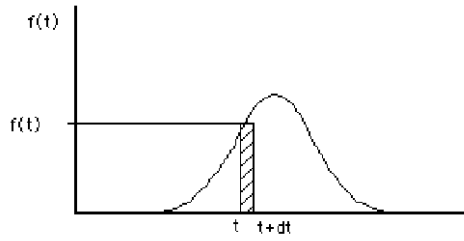


Fig.V.55 - A área do rectângulo tracejado é  $f(t)dt$   
 =  $dq_2$  e representa a quantidade elemental de marcador que  
 atravessou o sistema entre os instantes  $t$  e  $t+dt$

O produto  $h(t) dt$  não é a quantidade absoluta de traçador que atravessou o sistema entre os instantes  $t$  e  $t+dt$ , mas a fracção da quantidade total do traçador injectado que atravessou o sistema, entre os instantes  $t$  e  $t+dt$ . Claro que se fizermos uma injeccção com  $Q = 1$ , a área subtendida pela curva iguala a unidade, a curva encontra-se normalizada e  $f(t) = h(t)$ . A função  $h(t)$  é denominada de função frequência dos tempos de trânsito ou função de resposta unitária do sistema. As dimensões de  $h(t)$  são  $(T)^{-1}$ .

A seguir a uma injeccção instantânea, a fracção da quantidade total da traçador que deixa o sistema, através de  $\mathbf{2}$ , até ao instante  $t$ , em função do tempo, é  $H(t)$ , função cumulativa de frequências (Fig.V.56).  $H(t)$  é a área subtendida por  $h(t)$ , entre o instante zero e  $t$ . Pode obter-se pelo integral

$$H(t) = \int_0^t h(t) dt \quad \text{V.70}$$

Uma vez que a área total abaixo de  $h(t)$  é unidade, vem

$$H(\infty) = \int_0^{\infty} h(t) dt = 1 \quad \text{V.71}$$

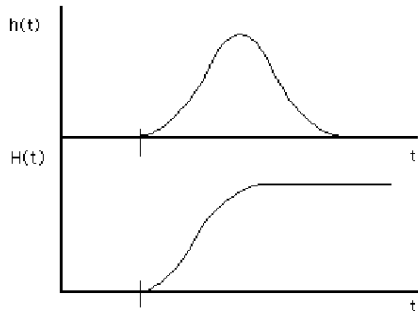


Fig.V.56 -  $H(t)$  é a função cumulativa de frequência. Representa a fração da quantidade total do traçador que deixou o sistema até ao instante  $t$ .

Uma relação óbvia é

$$\frac{d}{dt} (H(t)) = h(t) \quad \text{V.72}$$

Existe outra forma de obter a função cumulativa de frequências dos tempos de trânsito, para além da integração de  $h(t)$ .

Se o traçador é introduzido no sistema com uma velocidade constante, depois de uma muito rápida subida, (função degrau  $i(t)$ ) a saída será a função cumulativa de frequências (Fig. V.57).

Se a entrada do sistema é uma função  $\delta$  a saída é, por definição,  $h(t)$ .

Então como  $\delta(t) = \frac{d}{dt} (i(t))$  e  $h(t) = \frac{d}{dt} (H(t))$ , vê-se que por derivação das funções da Fig. V.57, à entrada e saída, se obtêm as funções à entrada e saída para a injeção instantânea (Fig. V.58).

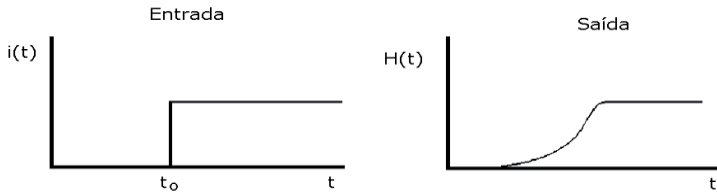


Fig.V.57 - Se o traçador é introduzido no sistema com uma velocidade constante a saída será a função cumulativa de frequências  $H(t)$ .

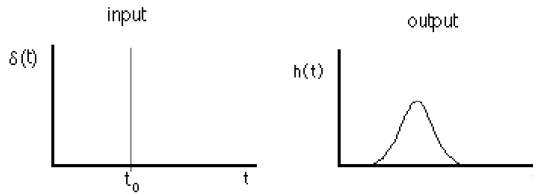


Fig.V.58 - Se a entrada é uma função  $\delta$ ,  $\delta(t) = \frac{d}{dt}(i(t))$  a saída é  $h(t) = \frac{d}{dt}(H(t))$ .

### V.11.1 - Função de resposta de um cateter

A equação que traduz o perfil das velocidades no caudal constante em regime laminar, num tubo cilíndrico, é a equação de uma parábola

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad \text{V.73}$$

com  $v(r)$  a velocidade do líquido à distância radial  $r$ ,  $\Delta P$  a queda de pressão no tubo, de comprimento  $L$  e  $\eta$  a viscosidade do líquido. Outra forma para a Eq. V.73 é

$$v(r) = \frac{2F}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{V.74}$$

onde  $F$  é o caudal do líquido. O nosso problema é obter a função

frequência dos tempos de trânsito quando, para as condições estabelecidas, uma injeção radioactiva é realizada à entrada. Consideramos esta como uma injeção instantânea em que o traçador se dilui instantaneamente e com concentração uniforme, no líquido contido numa secção recta do cateter.

Com o movimento do líquido este bolo é dividido numa série de anéis de raio interno  $r$  e espessura  $dr$ , deslocando-se com velocidade  $v(r)$ , ao longo do tubo.

Para se obter a quantidade de traçador que cada anel liberta à saída, diferenciamos a Eq. V.74, depois de notarmos que

$$v(r) = \frac{L}{t}$$

onde  $t$  é o tempo requerido pelo anel de líquido à distância radial  $r$  percorrer o comprimento  $L$ , assim

$$-d v(r) = \frac{L dt}{t^2} = 4 F r \frac{dr}{\pi R^4}$$

da qual se tira

$$r dr = \frac{\pi L R^4}{4 t^2 F} dt \tag{V.75}$$

A fracção do traçador total contida num anel é a relação da correspondente área ( $dA$ ) com a área de secção recta total do tubo ( $\pi R^2$ ). Assim, a quantidade total do traçador no anel é

$$dq_r = \frac{2\pi r dr}{\pi R^4} Q \tag{V.76}$$

onde  $Q$  é a quantidade total do traçador no bolo inicial.  
Substituindo a Eq. V.75 na Eq. V.76

$$dq_r = \frac{\pi L R^2 Q}{2 F t^2} dt = \frac{V Q}{2 F t^2} dt \tag{V.77}$$

$V$  é o volume do tubo. Uma quantidade  $dq_r$  de traçador, num volume  $dV$  de líquido, sai do tubo, depois de percorrer o comprimento  $L$ , num intervalo de tempo entre  $t$  e  $t+dt$ . Uma vez que  $dV = Fdt$ , a concentração

média do marcador que deixa o tubo em intervalo de tempo  $dt$  é

$$C(t) = \frac{dq_r}{F dt} = \frac{Q V}{2 F^2 t^2} \quad \text{V.78}$$

A partir da Eq. V.79, calculamos que o tempo necessário para o aparecimento inicial do marcador

$$T = \frac{L}{v_{\max}} = \frac{\pi R^2 L}{2 F} = \frac{V}{2 F} \quad \text{V.79}$$

que corresponde a  $r = 0$ . Para todos os tempos  $t < T$ ,  $C(t) = 0$ . Usando a definição de  $h(t)$ , (Eq. V.69), vem

$$Q h(t) dt = F C(t) dt \quad \text{V.80}$$

e

$$h(t) = \frac{V}{2 F} \frac{1}{t^2} = \frac{T}{2 t^2} \quad \text{V.81}$$

que é a resposta, na saída do sistema. A representação gráfica desta função é

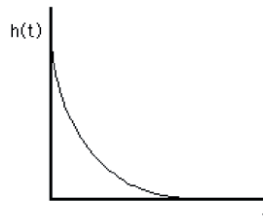


Fig.V.59 - Representação gráfica da função resposta de um cateter após uma injeção em que o traçador se dilui instantaneamente e com concentração uniforme, no líquido contido numa secção recta.

### V.11.2 - O princípio de Stewart-Hamilton

Consideremos um sistema percorrido por um caudal líquido  $F$  cons-

tante e que para  $t = 0$  se procede a uma injeção instantânea de uma quantidade  $Q$  de traçador.

A função de saída é  $Q h(t)$  e a quantidade de traçador que abandona o sistema entre os instantes  $t$  e  $t+dt$  é  $dq = Q h(t) dt$ . No entanto,  $dq$  pode também ser dado pelo produto do volume elementar de líquido que deixou o sistema durante o mesmo intervalo de tempo, ou seja,  $dV = F dt$ , pela concentração do marcador  $C_o(t)$

$$\begin{aligned} dq &= F C_o(t) dt \\ \text{assim} \quad F C_o(t) dt &= Q h(t) dt \end{aligned} \tag{V.82}$$

Integrando esta equação entre  $0$  e  $\infty$  e considerando as condições iniciais, e que  $\int_0^{\infty} h(t) dt = 1$

$$F = \frac{Q}{\int_0^{\infty} C_o(t) dt} \tag{V.83}$$

que foi uma equação muito usada na determinação de caudais sanguíneos.

### V.11.3 - Cálculo de volumes

Suponhamos que num sistema de distribuição labiríntico percorrido por um caudal líquido em regime estacionário, iniciávamos a injeção de uma função degrau (não necessariamente unitária)  $kU(t)$  de um líquido traçador no instante  $t = 0$ .

À saída obteríamos uma função  $kH_1(t)$ . Para cada valor de  $t$ , a função  $H(t)$  dá a fracção do número de partículas injectado, cujos tempos de trânsito se situam entre  $0$  e  $t$ .

Se no caudal estabelecido injectarmos uma função  $\delta$  de um traçador, detectamos a função  $h(t)$  à saída, (por definição de traçador, que se comporta perfeitamente como o líquido do meio), ou seja

$$\int_0^t h(t) dt = H_1(t)$$

Assim, as respostas do sistema ao líquido ou ao traçador são equivalentes (proporcionais).

Se  $h(t)dt$  é a fracção do traçador injectado, cujos tempos de trânsito se encontram entre  $t$  e  $t+dt$ , isto significa que uma fracção equivalente do número total de trajectos possíveis do líquido no sistema, tem um comprimento tal, que o tempo necessário para os atravessar, se situa entre  $t$  e  $t+dt$ . Assim, o caudal à saída correspondente aos trajectos, com este particular comprimento será

$$F h(t) dt$$

e o volume deste grupo de canais é

$$F t h(t) dt$$

O volume total do sistema que corresponde a todos os grupos de canais com comprimento, correspondendo a tempos de trânsito entre  $0$  e  $\infty$

$$V = F \int_0^{\infty} t h(t) dt$$

O integral acima é equivalente a

$$\frac{\int_0^{\infty} t h(t) dt}{\int_0^{\infty} h(t) dt} = \bar{t}$$

V.84

por definição de valor médio de uma função. Assim

$$V = F\bar{t}$$


---



O volume do sistema é igual ao produto do caudal pelo tempo médio de trânsito.

#### V.11.4 - Sistemas de distribuição em série e o integral de convolução

Supomos uma série de dois sistemas de distribuição em estado estacionário (Fig. V.60) e que uma injeção impulso de um traçador,  $\delta(t)$ , é efectuada à entrada do primeiro membro, para  $t = 0$ . Sejam as funções frequência dos tempos de trânsito para os membros do conjunto, respectivamente  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$ .

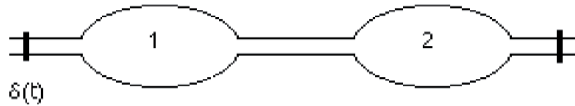


Fig.V.60 - Sistemas de distribuição de dois compartimentos em série.

Toda a partícula que deixa o conjunto entre os tempos  $t$  e  $t+dt$  necessitou de um tempo entre  $\tau$  e  $\tau+d\tau$  para atravessar o primeiro elemento do conjunto e um tempo entre  $(t-\tau)$  e  $(t-\tau)+d(t-\tau)$  para atravessar o segundo.

A fracção do número total de partículas que atravessa o primeiro elemento entre os tempos  $\tau$  e  $\tau+d\tau$  é  $h_1(\tau)d\tau$ .

Se no instante  $\tau$ , a função  $\delta$  fosse introduzida à entrada do segundo elemento, a função de frequência dos tempos de trânsito obtida à saída seria  $h_1(t-\tau)$ .

Todo o volume elementar  $h_1(\tau)d\tau$  saído do primeiro compartimento pode ser considerado como uma função  $\delta$ , de amplitude muito pequena, que é introduzido em tempo  $t$  no segundo sistema, isto é,  $h_1(\tau)d\tau\delta(t-\tau)$ , (significando uma função  $\delta$  de área  $h_1(\tau)d\tau$  aplicado no instante  $t = \tau$ ).

A saída para esta função, que é a saída da série, é

$$h_1(\tau) h_2(t-\tau) d\tau$$

Se para todos os valores de  $t$ , todos os valores plausíveis de  $\tau$  são

considerados, ou seja, se considerarmos todos os valores de tempo de trânsito no elemento **1** que adicionados a possíveis tempos de trânsito no elemento **2**, vão dar **t**, e se calcularmos todos os produtos  $h_1(t)d\tau$  e assumidos como funções  $\delta$  para com o segundo elemento, com saídas  $h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau$ , o somatório de todas essas funções de saída é a função de frequência dos tempos de trânsito da série, ou seja

$$h(t) = \int_0^t h_1(\tau)h_2(t-\tau) d\tau \quad \text{V.85}$$

Se, em vez de considerar as partículas que deixam o primeiro elemento no instante  $\tau$ , considerarmos aquelas que demoram a atravessar o segundo elemento no tempo  $\tau$ , então estas partículas terão atravessado o primeiro membro no tempo  $t-\tau$ . Pelo mesmo raciocínio usado anteriormente, vem

$$h(t) = \int_0^t h_2(\tau)h_1(t-\tau) d\tau \quad \text{V.86}$$

Os segundos elementos das duas últimas equações descrevem o mesmo  $h(t)$ . O significado físico disto é que se arranjarmos de novo os conjuntos de tal modo que a saída do segundo elemento seja agora a entrada do primeiro elemento e se injectarmos um impulso unitário na entrada do segundo elemento e analisarmos o caudal total à saída do novo conjunto, obtemos a mesma função frequência.

As Eqs. V.85 e V.86 são denominadas integrais de convolução e acabámos de ver que a sequência das funções sob convolução é imaterial. No último membro da Eq. V.87 colocou-se a notação simplificada para a convolução de duas funções.

$$h(t) = \int_0^t h_1(\tau)h_2(t-\tau) d\tau = h_1(t) * h_2(t) \quad \text{V.87}$$

Podemos então escrever

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t) \quad \text{V.88}$$

Uma propriedade imediata, a ser retirada das equações acima, é que a convolução de uma função frequência com outra função frequência é, ela própria, uma função frequência.

Três tempos característicos das funções frequência são aditivos:

1. O menor tempo de trânsito através de uma série é a soma dos menores tempos de trânsito através de todos os membros da série.

2. O maior tempo de trânsito através de uma série é a soma dos maiores tempos de trânsito através de todos os membros da série.

3. O tempo médio de trânsito através das séries é a soma dos tempos médios de trânsito através de todos os membros da série.

A última propriedade não é óbvia, mas pode ser demonstrada usando alguma matemática.

Através da terceira característica surge outra propriedade importante, isto é, se numa série de dois elementos conhecemos o caudal e o tempo médio de trânsito através de ambos os membros, então podemos conhecer os volumes dos elementos.

O caudal através da série pode ser escrito

$$F = \frac{V_1}{\bar{\tau}_1} = \frac{V_2}{\bar{\tau}_2} = \frac{V}{\bar{\tau}} \quad \text{V.89}$$

onde  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V = V_1 + V_2$  são, respectivamente, os volumes dos elementos e o volume total, e  $\bar{\tau}_1$ ,  $\bar{\tau}_2$  e  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2$  os tempos médios de trânsito através dos elementos e o tempo médio de trânsito total.

Uma vez que

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau} - \bar{\tau}_2$$

e  $F$  é conhecido, vem

$$V_1 = F (\bar{\tau} - \bar{\tau}_2)$$

e, do mesmo modo

$$V_2 = F (\bar{\tau} - \bar{\tau}_1) \quad \text{V.90}$$

Existem no corpo humano sistemas de distribuição em série, como é o caso das circulações pulmonar e sistêmica.

Quando são recolhidas amostras por meio de um cateter, um novo sistema de distribuição é introduzido na série, o próprio cateter.

### V.11.5 - Formas diferentes de injeção

Supondo que o traçador é injectado não como uma função  $\delta$  mas ao longo do tempo como uma função  $i(t)$  (em unidades de actividade por unidade de tempo) e que a função frequência dos tempos de trânsito através do sistema é  $h(t)$ , assim, a velocidade, à qual o traçador deixa o sistema, isto é, a função de saída, nas mesmas unidades, é

$$k(t) = \int_0^t i(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

Se a concentração à saída  $C_o(t)$  é conhecida, a velocidade de entrada pode também ser escrita como

$$k(t) = F C_o(t)$$

A concentração à saída vem então

$$C_o(t) = \frac{1}{F} \int_0^t i(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad \text{V.91}$$

Se  $i(t) = I$ , é constante, então

$$\begin{aligned} C_o(t) &= \frac{I}{F} \int_0^t h(\tau) d\tau \\ &= \frac{I}{F} H(t) \end{aligned}$$

onde  $H(t)$  é a função cumulativa de frequência.

Como

$$\int_0^{\infty} h(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 1$$

é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_o(t) = \frac{I}{F} \quad \text{V.92}$$

A Eq. V.92 permite a determinação do caudal  $F$  quando se procede à infusão de um traçador a velocidade constante.

Se a injeção é realizada a aceleração constante  $i(t) = at$ , com  $a$  constante, então

$$\begin{aligned} C_o(t) &= \frac{a}{F} \int_0^t (t-\tau) h(\tau) d\tau \\ &= \frac{a}{F} \left( \int_0^t t h(\tau) d\tau - \int_0^t \tau h(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{a}{F} \left( t H(t) - \int_0^t \tau h(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad \text{V.93}$$

Uma vez que o limite de  $H(t)$  é a unidade e o limite do último integral é o tempo médio de trânsito

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_o(t) = \frac{a}{F} (t - \bar{T})$$

Suponhamos que  $C_o(t)$  é a concentração venosa e que uma injeção com aceleração constante foi efectuada na artéria aferente correspondente. A concentração arterial à entrada, num ponto onde o traçador já se encontra misturado com o sangue, é  $C_a(t) = a \frac{t}{F}$  (uma vez que  $at = i(t)$  e  $i(t) = FC_a(t)$ ). Se subtrairmos a concentração venoso da arterial, no limite, quando  $t \rightarrow \infty$

$$C_a(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} C_o(t) = \frac{a}{F} \bar{T} \quad \text{V.94}$$

Deste modo, podemos obter o tempo médio de trânsito  $\bar{T}$  a partir das concentrações do traçador nos sangues arterial e venoso.

É o atraso de tempo necessário para que a concentração venosa iguale

qualquer concentração arterial dada. Esta regra é válida para qualquer instante após a função  $C_o(t)$  se ter tornado linear (ponto indicado pela seta na Fig.V.61).

Uma maneira mais fácil de obter o  $\bar{t}$  é por extrapolação da parte recta de  $C_o(t)$  (Fig.V.61).

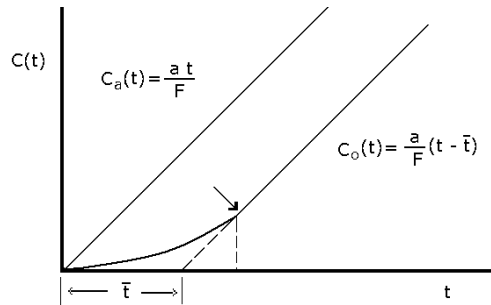


Fig.V.61 - Podemos obter o tempo médio de trânsito  $\bar{t}$  partir das concentrações do traçador nos sangues arterial e venoso. É o atraso necessário para que a concentração venosa iguale qualquer valor da concentração arterial.

### V.11.6 - Determinação do caudal

Não necessitamos de saber a forma da função de entrada para obtermos o caudal e, provavelmente, o tempo de trânsito, se a injeção tem o seu início e final durante o tempo da experiência. É

$$F C_o(t) = i(t) * h(t)$$

Podemos escrever  $i(t) = q f(t)$ , onde  $q$  é a quantidade total do traçador injectado durante a experiência e  $f(t)$  é a função de frequência dos tempos de trânsito da injeção, assim

$$F = q \frac{f(t) * h(t)}{C_o(t)}$$

$f(t) * h(t)$  é a convolução de duas funções frequência, então é uma função frequência e o seu integral de zero a infinito é a unidade. A integração da equação acima para todos os tempos dá

$$F \int_0^{\infty} C_o(t) dt = q \int_0^{\infty} f(t) * h(t) dt$$

ou

$$F = \frac{q}{\int_0^{\infty} C_o(t) dt} \quad \text{V.95}$$

Deste modo, pode calcular-se o caudal de sangue a partir da actividade total injectada e da área da curva de concentração do traçador, qualquer que tenha sido a duração da injeção. No entanto, não podemos calcular o volume do sistema sem conhecimento adicional da função de entrada. Só no caso da injeção instantânea, o tempo médio da função de concentração à saída é igual função de frequência dos tempos de trânsito através do sistema.

O verdadeiro tempo médio de trânsito através do sistema é a diferença entre o tempo médio de trânsito da função de concentração à saída e o tempo médio da função de entrada do traçador

$$\bar{t} = \bar{t}_o - \bar{t}_i \quad \text{V.96}$$

### V.11.7 - Regeneração da função frequência dos tempos de trânsito por desconvolução

Assumindo uma concentração de saída  $C_o(t)$  em resposta a uma concentração arterial à entrada  $C_a(t)$  e supondo que estas funções são conhecidas, então

$$C_o(t) = \int_0^t C_a(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

Agora o nosso interesse é calcular  $h(t)$ .

A transformada de Laplace da equação anterior pode escrever-se

$$C_o(s) = C_a(s) H(s) \quad \text{V.97}$$

e a transformada inversa da função  $H(s)$  é

$$L^{-1} \{H(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{C_a(s)}{H(s)} \right\} = h(t)$$

Em geral,  $C_o(s)$  e  $C_a(s)$  são determinados apenas empiricamente e não têm uma forma analítica simples identificável, para transformação inversa formal.

Existem duas maneiras de ultrapassar esta dificuldade. Na primeira, o integral de convolução é considerado como um simples somatório e  $h(t)$  calculado numericamente ou por computador digital. Na segunda, as curvas  $C_a(t)$  e  $C_o(t)$  são ajustadas de modo empírico a expressões formais arbitrárias, que depois são mais facilmente desconvoluídas.

O integral de convolução na forma de somatório torna-se (Fig.V.62)

$$C_o(t) = \sum_{k=1}^t h(t+1-k)C_a(k) \quad \text{V.98}$$

onde  $k$  assume apenas valores totais para valores totais de  $t$ .

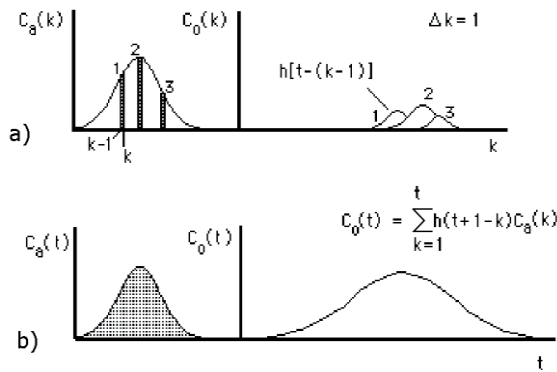


Fig.V.62 - a) A função de entrada é decomposta num sequência de funções delta deslocadas no tempo e constituídas por pequenos rectângulos com área que iguala numericamente o valor médio da ordenada. A cada uma destas funções corresponde uma saída como se mostra em a) 1, 2 e 3. b) A soma de todas as funções delta à entrada dá  $C_a(t)$  e de todas as saídas  $C_o(t)$ .

Na Fig. V.62.a) a função de entrada é decomposta numa sequência de



funções delta deslocadas no tempo e com área que iguala o correspondente valor da ordenada. A cada uma destas funções corresponde uma saída como se mostra em a) 1, 2 e 3.

Por exemplo

$$C_o(t) = h(1) C_a(1)$$

$$C_o(2) = h(2) C_a(1) + h(1) C_a(2)$$

$$C_o(t) = h(t) C_a(1) + h(t-1) C_a(2) + \dots + h(1) C_a(t)$$

Ou seja, temos um sistema de  $t$  equações lineares simultâneas cuja solução nos traz  $t$  valores para  $h$ .

Os procedimentos de ajuste têm incluído diversas funções (somadas de exponenciais, séries Fourier, etc.) para ajustar as funções de frequência às expressões formais.

### V.11.8 - Sistemas de distribuição em paralelo

Supomos dois sistemas de distribuição em paralelo (Fig. V.63).

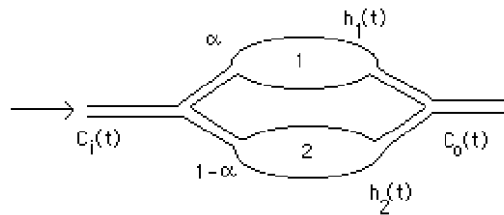


Fig.V.63 - Sistema de distribuição com dois compartimentos em paralelo.

Uma fracção  $\alpha$  do caudal total de entrada vai para o elemento **1** descrito pela função frequência  $h_1(t)$ , a restante fracção  $(1-\alpha)$  vai através do

elemento 2 descrito por  $h_2(t)$ . A função frequência dos tempos de trânsito totais é

$$h(t) = \alpha h_1(t) + (1 - \alpha) h_2(t)$$

Considerando que  $V = V_1 + V_2$  é o volume total do sistema e que  $F$  é o caudal na entrada comum, é

$$V = V_1 + V_2 = F \bar{\tau} = \alpha F \bar{\tau}_1 + (1 - \alpha) F \bar{\tau}_2$$

então

$$\bar{\tau} = \alpha \bar{\tau}_1 + (1 - \alpha) \bar{\tau}_2 \quad \text{V.99}$$

O tempo médio de trânsito de um sistema de resistências hidrodinâmicas em paralelo é a soma dos produtos dos tempos médios de trânsito de cada secção pelas respectivas fracções do caudal total.

Para se determinarem os tempos médios de trânsito através de cada secção,  $\bar{\tau}_1$  e  $\bar{\tau}_2$ , ou os caudais parciais, existem várias aproximações:

1. Injecção directa nos vasos no início de um dos circuitos paralelos. Neste caso obtém-se  $h_1(t)$ . Com a injecção à entrada do sistema completo obtém-se  $h(t)$ . A diferença entre os dois é  $(1 - \alpha) h_2(t)$ .

2. Possibilidade de se dispor de um traçador que circule apenas em um dos circuitos. Por exemplo, se um dos circuitos não tem capilares mas apenas shunts artério-venosos, então um traçador altamente difusível pode ser removido completamente por difusão transcapilar. O traçador que aparece à saída do sistema irá, assim, representar apenas o traçador que viajou através de desvios a-v e a sua função de frequência será  $\alpha h_1(t)$ .

3. Alguns investigadores defendem que as funções frequência dos tempos de trânsito têm forma característica, sendo comum assumir-se que a fase descendente destas funções é bem ajustada por um termo exponencial simples. Esta suposição carece de confirmação geral mas, certamente que se não for ajustável a um só, será a vários termos exponenciais.

## V.12 - Aspectos químicos e biológicos da acção das radiações

As interacções físicas dos diversos tipos de radiação ionizante com a matéria viva, são o primeiro estágio de uma série de fenómenos que conduzem a alterações biológicas, cujas manifestações podem ocorrer escalonadas no tempo, até muitos anos após a irradiação.

---

A radiação cede energia ao meio, desencadeando-se fenómenos físicos, químicos e biológicos que irão traduzir-se nessas alterações. A parte de biologia que estuda essa cadeia de fenómenos, desde a interacção física até às suas consequências extremas, chama-se Radiobiologia. É um ramo novo dentro da Biologia, com conhecimentos ainda dispersos, sobretudo dos processos intermediários da cadeia. Devido à sua complexidade, não se conhecem ainda com pormenor muitos dos fenómenos físico-químicos desencadeados nas moléculas constituintes das células dos seres vivos, após a irradiação.

A desproporção entre a energia cedida e as suas consequências biológicas, realça esta complexidade. Realmente, a energia cedida ao corpo de um animal, sujeito a uma irradiação mortal, se fosse transformada em calor, só elevaria a temperatura do corpo de alguns milésimos de grau.

A energia que é cedida na irradiação com radiação ionizante, embora pequena, tem notáveis consequências, pois é libertada a nível molecular.

### **V.13 - Grandezas e unidades usadas em dosimetria das radiações**

Quando um feixe de raios atravessa a matéria, três tipos de informações físicas têm interesse:

- 1 - a sua distribuição espectral de energias.
- 2 - a intensidade dos raios (ou, alternativamente, o fluxo de partículas).
- 3 - a quantidade de energia que é libertada por unidade de massa nos pontos do material irradiado.

A acção ionizante das radiações no ar pode ser utilizada para se avaliarem as duas últimas quantidades.

Modernamente, a grandeza que, aplicada à radiação X ou  $\gamma$ , exprime a carga produzida por ionização por unidade de massa de ar é a dose exposição. A unidade moderna de dose exposição é o Coulomb por quilograma de ar. Define-se como a exposição produzida por uma quantidade de raios X ou  $\gamma$  que actuando sobre 1 Kg de ar, liberta, por ionização primária ou secundária, iões que transportam um Coulomb (Fig. V.64).

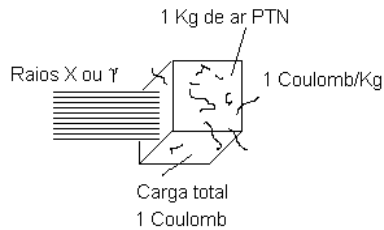


Fig. V.64 - Definição da unidade de dose exposição (C/Kg).

Nesta definição só se consideram os electrões secundários resultantes de interacções primárias que ocorrem dentro do volume da massa de 1 Kg de ar em condições P.T.N. mas considera-se toda a carga produzida por estes fora e dentro do volume (Fig. V.63).

O efeito biológico depende da energia libertada no tecido e, por isso, foi criada uma grandeza que exprime directamente a energia localmente absorvida. É a dose absorvida que é definida para radiação ionizante de qualquer tipo e para qualquer material irradiado, é a energia cedida por unidade de massa de material. A unidade de dose absorvida é o Gray (Gy) que corresponde a 1 J/Kg. Outra unidade de dose absorvida ainda utilizada é o rad, que equivale à libertação de 100 erg/g de material irradiado. Outras grandezas correntemente utilizadas em dosimetria das radiações são: a velocidade de dose exposição que é a dose exposição por unidade de tempo (exprime-se em  $C\ Kg^{-1}s^{-1}$ ), a velocidade de dose absorvida - é a dose absorvida por unidade de tempo (exprime-se em  $Gy\ s^{-1}$  ou  $rad\ s^{-1}$ ) e a dose integral - que se refere, não a energia por unidade de massa mas a energia total absorvida, em todo ou parte do meio irradiado (exprime-se em J ou Kg Gray).

Como a carga do electrão é de  $1,6 \times 10^{-19}$  Coulomb, o número de iões que é contabilizado na exposição de 1 Coulomb/Kg é

$$\frac{1}{1,6 \times 10^{-19}} = 6,225 \times 10^{18} \text{ pares de iões} \quad \text{V.100}$$

A energia média necessária para se produzir uma ionização no ar é de 34 eV, logo a energia cedida/Kg de ar na exposição de 1 Coulomb/Kg é

$$E(C/Kg) = 6,225 \times 10^{18} \times 34 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J/Kg} \quad \text{V.101}$$

$$= 33,86 \text{ J/Kg}$$

A dose exposição foi definida, inicialmente, de modo diferente do actual, ou seja, como a grandeza que exprime a capacidade da radiação **X** ou  $\gamma$  produzir iões no ar. A unidade adoptada foi o roentgen (R), que se define como a exposição produzida por uma quantidade de raios **X** ou  $\gamma$  que, actuando sobre 0,001293 g de ar, liberta, por ionização primária ou secundária, iões que transportam 1 U.E.C.G.S. de carga (1 statcoulomb). A massa de 0,001293 g é a massa de 1cm<sup>3</sup> de ar em condições P.T.N.. A energia libertada na exposição de 1 R, por grama de ar é 86,9 erg/g

A exposição de 1 roentgen de raios **X** ou  $\gamma$ , incidindo sobre tecido biológico, vai aí libertar, por grama, uma energia maior do que no ar, pois o número de pares de iões produzidos é maior (os Zs do tecido e ar são próximos mas a densidade do tecido é muito superior). A exposição de 1 R incidindo sobre tecido liberta aí uma energia de 98,4 ergs por grama, o que equivale a uma dose absorvida de cerca de 1 rad. A relação entre a dose exposição, que se mede facilmente e a dose absorvida, ou energia libertada por grama de tecido, difícil de medir, mas que determina, em grande parte, o efeito biológico, é muito importante.

#### **V.14 - Efeitos biológicos das radiações**

Os fenómenos elementares primários que estudamos, podem desencadear, após tempo mais ou menos longo, alterações que se situam quer ao nível celular, quer ao nível do organismo. Estas alterações podem ser funcionais ou morfológicas. As alterações funcionais caracterizam-se por uma diminuição na actividade da matéria viva: diminuição na secreção de uma glândula, perda da contractilidade muscular, esclerose do tecido conjuntivo, etc. Estas constituem as primeiras reacções do organismo à acção da radiação e surgem geralmente para doses pouco elevadas. As alterações morfológicas atingem a estrutura íntima da substância viva. Ao nível celular, o protoplasma, o núcleo ou qualquer das outras estruturas banhados no citoplasma, podem ser lesados. As alterações estruturais são mais ou menos graves e podem provocar, por inibição de certas funções essenciais, a morte imediata ou tardia, da célula.

---

---

As funções metabólicas podem ser modificadas ao ponto de a célula se tornar incapaz de efectuar as sínteses que são necessárias à sua vida própria, originando-lhe a morte após um prazo mais ou menos longo. Uma agressão menos severa destas mesmas funções pode cancelar os processos de síntese, que associados à divisão celular, fazendo-a perder toda a sua capacidade de reprodução.

À escala do organismo, as alterações que se manifestam são o somatório das lesões elementares bem como das modificações que surgem ao nível das substâncias intercelulares.

### **V.15 - Características fundamentais dos efeitos biológicos das radiações**

Verificou-se que os efeitos biológicos das radiações:

- São de natureza extremamente diversa, variando com a pessoa irradiada, o órgão atingido, a dose administrada, as condições de irradiação, etc. - são essencialmente polimorfos.

- Podem ser provocados por outras causas para além das radiações - são efeitos não específicos. Embora certos critérios etiológicos e estatísticos permitam, por vezes, estabelecer uma relação de causa e efeito entre uma irradiação e determinadas lesões, a maior parte das vezes essa relação não pode ser estabelecida. A inespecificidade é geral, aplicando-se aos efeitos somáticos e aos efeitos genéticos.

- Decorre sempre um certo "tempo de latência" entre o momento da irradiação e o do aparecimento das lesões.

O tempo de latência é variável, mas é sempre superior às ínfimas fracções de segundo, no decurso das quais se desenrolam os fenómenos físicos e bioquímicos imediatos à irradiação.

Quando a acção da radiação é maciça e instantânea, este tempo de latência pode, no que respeita ao aparecimento dos primeiros efeitos, reduzir-se a alguns minutos, ou horas, advindo a morte em alguns dias ou semanas.

As lesões que seguem às irradiações de intensidade média e às irradiações crónicas, apresentam geralmente tempos de latência longos:

- vários meses para a anemia;
- anos para a indução de afecções cancerosas.

As estatísticas que se referem aos irradiados de Hiroshima e Nagasaki mostram uma frequência anormal de leucemias entre o sexto e o décimo

---

segundo anos, após as explosões atômicas.

– Em certos casos, os efeitos biológicos apresentam carácter de reversibilidade.

As modificações funcionais podem ser temporárias, seguindo-se uma restauração mais ou menos total. A nível celular, este poder de restauração parece relacionado com a faculdade da célula poder restaurar certos edifícios moleculares que entram na sua estrutura.

Outras estruturas são, segundo parece, demasiado complexas e especializadas para que a célula as possa restaurar e o seu dano determina efeitos irreversíveis.

Deste modo, a restauração intervém em todas as escalas, havendo lesões susceptíveis de restauração parcial, outras de restauração total e ainda outras, como a necrose e as afecções cancerosas, totalmente irreversíveis.

– A maior parte das lesões devidas à acção das radiações afectam uma célula ou um organismo, mas não se transmitem às células ou organismos que deles derivam por divisão ou reprodução assexuada.

É necessário, portanto, destacar e considerar como particularmente graves, certos danos da estrutura celular que são transmissíveis de célula a célula e se manifestam pela anarquia da função reprodutora (afecções cancerosas), assim como as lesões do património hereditário, transportado pelas células reprodutoras, que propagam as anomalias na descendência do ser irradiado - (efeitos genéticos).

– Quando se estudam as relações entre doses de radiação e efeitos biológicos, constata-se que certos efeitos, para aparecerem, exigem que a dose seja superior a um certo limiar, (dose limiar).

Um eritema só se manifesta na palma da mão a partir de doses, naturalmente variáveis de indivíduo para indivíduo, mas que se situam sempre acima de 3 Sv. A irradiação total do organismo só pode provocar a morte, com uma probabilidade a tomar em consideração, para doses superiores a 3 Sv.

Para provocar uma anemia por diminuição do número de glóbulos vermelhos do sangue, é necessário uma dose superior a 1 Sv.

A existência de um limiar não significa que não possa ocorrer qualquer acção nociva quando a dose seja inferior a esse limiar.

Mesmo para doses muito pequenas há sempre fenómenos de ionização, com as suas consequências químicas e biológicas, mas os efeitos bioló-

---

gicos não se manifestam, ou porque a restauração, no próprio seio da célula, actua com bastante eficácia de modo que nenhum dano na vida celular se manifeste, ou porque as células que morrem são substituídas por células jovens, produzidas pelos tecidos regeneradores.

Há outros efeitos, para os quais, pelo contrário, parece não haver limiar.

É, contudo, difícil obter ensinamentos válidos quando se pretendem obter resultados com doses muito pequenas, porque muitas outras causas podem provocar efeitos idênticos aos da radiação, com uma frequência que é da mesma ordem de grandeza. Nestas condições a estatística dificilmente conduz a resultados significativos.

Quando é possível estabelecer-se a curva que relaciona a frequência de aparecimento de um dado efeito com a dose, para um domínio de valores suficientemente grande, podem, em certos casos, obter-se, por extrapolação, indicações sobre a existência, ou não, de limiar (Fig. V.65).

Quando a curva é simples (uma recta, por exemplo), o facto do seu prolongamento cortar o eixo das abcissas (dose) na origem ou num ponto de valor positivo, torna no primeiro caso mais provável a ausência de limiar (efeito estocástico) e no segundo caso a sua existência (efeito não estocástico).

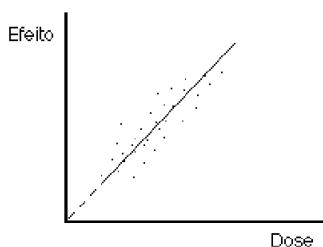


Fig. V.65 - Curva dose-efeito para efeitos estocásticos.

É admitido por algumas correntes que os efeitos genéticos se produzem sem limiar. As opiniões são mais cautelosas no que respeita à indução de leucemias ou de cancros pelas radiações ionizantes. Para qualquer das situações não existem elementos que permitam afirmar com segurança a existência, ou não, de um limiar para esses efeitos.

É de grande interesse saber se uma dada lesão pode ter sido devida às radiações, para valores abaixo de uma certa dose limiar. Se é provada a não



---

ocorrência da lesão pode estabelecer-se uma curva de efeito vs. dose para doses superiores ao limiar.

O eritema cutâneo, por exemplo, não pode ser devido a uma dose de 0,20 mSv administrada na pele. Quando, pelo contrário, a dose administrada na pele for superior ao limiar de cerca de 3 Sv, sem qualquer outra causa presente e ocorrer o aparecimento de eritema, será lógico atribuir o aparecimento da lesão à acção das radiações ionizantes.

É necessário notar também que os efeitos que se supõem ser sem limiar, são afecções que aparecem com uma certa frequência natural em toda a população que não é atingida por nenhuma irradiação artificial.

Se todos os elementos de uma população são irradiados com uma certa dose e se verifica, estatisticamente, que a frequência de aparecimento do efeito aumenta, pode concluir-se que, para um indivíduo irradiado a probabilidade de ser atingido cresce com a dose. Pode, no entanto, ser difícil estabelecer-se, no plano individual, uma relação de causa e efeito e afirmar que a afecção que sofre é especificamente devida à radiação.

As radiações podem atingir as células que constituem o nosso corpo individualmente, o soma, ou as células que são destinadas à reprodução.

No primeiro caso desencadeiam danos que constituem os efeitos somáticos, no segundo as lesões só se manifestam na descendência do indivíduo irradiado, constituindo os efeitos genéticos.

Os efeitos somáticos podem revestir-se de toda a espécie de formas porque as radiações podem atingir todos os órgãos e todas as funções do organismo. Há contudo alguns, dentre estes efeitos, que apresentam um maior interesse, devido à importância e à radiosensibilidade dos tecidos lesados.

No sangue circulante só os linfócitos são sensíveis à radiação. Os órgãos hematopoiéticos, pelo contrário, são facilmente lesáveis, quer por destruição, quer por dano nas estruturas que regem o ritmo da divisão celular.

No primeiro caso, segue-se uma diminuição temporária ou definitiva da formação de glóbulos que deveriam chegar regularmente ao sangue circulante, originando anemia e leucopenia. No caso de lesão de certas estruturas, pode surgir proliferação anormal de glóbulos brancos, ou seja leucemia, que pode ser comparada a um cancro dos órgãos hematopoiéticos.

Ao nível da pele, as radiações podem provocar simples modificações funcionais, tais como o eritema.

Quando surgem modificações estruturais, a epiderme, ou a derme poderão ser atingidas, como no caso das queimaduras térmicas. Em geral, estas

---

lesões só se manifestam depois de um tempo de latência de alguns dias a semanas.

Muitas vezes necroses comparáveis às que aparecem nas queimaduras por ácidos surgem e a cicatrização só é possível após eliminação dos tecidos mortos.

Podem ocorrer lesões cancerosas nas superfícies cutâneas anteriormente irradiadas. Os tempos de latência são sempre muito longos, geralmente dezenas de anos.

As mucosas e o pulmão constituem, juntamente com as gónadas e embrião, outros tecidos de grande radiosensibilidade.

### V.16 - Utilização terapêutica dos radionuclídeos

Para determinado tecido de um dado indivíduo, o efeito biológico e radioterapêutico é tanto maior, quanto maior for a dose absorvida. Por outro lado, a mesma dose absorvida por tecidos diferentes do mesmo indivíduo ou por tecidos correspondentes de indivíduos diferentes, pode originar efeitos desiguais, traduzindo uma diferença de radiosensibilidade.

Sabe-se hoje que as radiações ionizantes agem com maior intensidade sobre os tecidos se:

- a) a sua actividade reprodutora for maior
- b) o seu futuro cariocinético, índice de divisão celular, for mais provável
- c) a sua morfologia e função estiverem menos definitivamente fixadas.

Estas são as leis de Bergonié-Tribondeau de radiosensibilidade, que constituem, afinal, as regras que determinam o emprego terapêutico das radiações e em particular dos radioisótopos. Assim, conforme as referidas leis, os tecidos do organismo que são afectados pelas radiações são: a base do epitélio de revestimento, o tecido hematopoiético, os tecidos fundamentais das gónadas e do embrião e, no campo da patologia, os tecidos cancerosos.

De um modo geral chamam-se radiações ionizantes àquelas radiações capazes de produzir ionização em estruturas biológicas.

Os potenciais de ionização dos elementos existentes em maior quantidade nas estruturas biológicas variam entre cerca de 11 eV e 14 eV. No Quadro V, encontram-se alguns valores de potenciais de ionização de átomos, moléculas e radicais orgânicos ou com interesse biológico.

---

Quadro V.7 -Potenciais mínimos de ionização de moléculas ou átomos com interesse biológico.

H <sub>2</sub>	15,44 eV	CH <sub>4</sub>	13,12 eV
H	13,62	CH <sub>3</sub>	9,96
C	11,24	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	10,56
N	14,24	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	11,42
O	13,57	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	11,62

Estes valores são as energias mínimas necessárias para ionizar os átomos.

Como veremos adiante, a energia média cedida pela radiação aos meios materiais por par de iões produzido é bastante maior do que os potenciais de ionização. Isto deve-se ao facto de mais de metade da energia ser utilizada em excitações atómicas e moleculares.

As partículas  $\alpha$  e  $\beta$  e a radiação  $\gamma$ , emitidas pelos radionuclídeos, são de um modo geral radiações ionizantes. A ionização produzida pela radiação  $\gamma$  deve-se, quase exclusivamente, aos iões resultantes das interacções dos electrões que são libertados nos efeitos fotoeléctrico, Compton e produção de pares. Assim, e contrariamente às partículas carregadas, a radiação electromagnética não é considerada directamente ionizante.

No espectro das radiações electromagnéticas os comprimentos de onda correspondentes aos fotões mais energéticos são:

Rad. Cósmica	-	$10^{-11}$ cm
Rad. $\gamma$	-	$10^{-8}$ - $10^{-11}$ cm
Rad. X	-	$10^{-7}$ - $10^{-11}$ cm
Rad. U.V.	-	$4 \times 10^{-5}$ - $1,4 \times 10^{-6}$ cm

Os raios U.V. (ultra violeta) de menor comprimento de onda possuem já energias suficiente para excitar e ionizar átomos e moléculas das estruturas biológicas.

Quando nos queremos referir a efeitos biológicos, a dose absorvida só ficará caracterizada se introduzirmos um coeficiente relacionado com a qualidade de radiação. A eficiência biológica de uma dada radiação tem sido estabelecida, em relação à eficiência de uma outra que se toma como padrão - os raios X de 200 KeV. Esta escolha deve-se ao facto de haver uma larga experiência na utilização desta radiação em radioterapia com um consequente conhecimento dos seus efeitos biológicos. Esta radiação serve, assim, de padrão para uma medida dos efeitos biológicos das radiações ionizantes. Define-se um factor qualidade **Q**, de valor unitário para a radiação padrão, do modo seguinte:

Se considerarmos um dado material biológico irradiado separadamente por uma dada radiação e pela radiação padrão e administrando, nos dois casos, igual dose absorvida **D**, o factor de qualidade é

$$Q = \frac{\text{Efeito biol. da rad. considerada}}{\text{Efeito biol. da rad. padrão}} \quad (\mathbf{D} \text{ constante}) \quad \text{V.102}$$

O efeito biológico terá de ser algo mensurável como, por exemplo, o número de células mortas ou alteradas.

O **Q** pode ainda ser definido a partir da relação entre as doses absorvidas (em Grays ou rads) necessárias para se obter determinado efeito biológico (por exemplo, morte de 10% das células) usando a radiação padrão e a radiação em estudo assim:

$$Q = \frac{\text{n}^\circ \text{ Grays rad. padrão } (\mathbf{D}_p)}{\text{n}^\circ \text{ Grays rad. considerada } (\mathbf{D})} \quad (\text{igual efeito biológico}) \quad \text{V.103}$$

Para uma dada radiação o **Q** pode variar com o efeito biológico em estudo. O **Q** foi inicialmente chamado eficiência biológica relativa (R.B.E.).

Tomando como base os efeitos biológicos, podemos considerar uma nova grandeza, o equivalente de dose **H**

$$H = D Q$$

Um equivalente de dose de radiação de qualquer tipo, num dado tecido, produz o mesmo efeito biológico que o mesmo equivalente de dose de raios X de 200 keV. O efeito biológico para um dado equivalente de dose é constante, qualquer que seja a radiação utilizada.

A unidade de equivalente de dose é o Sievert (Sv). Para a radiação padrão (RX de 200 keV), 1 Sv = 1 Gy. Assim, 1 Sv de uma qualquer radiação produz o mesmo efeito biológico que 1 Gy (ou 1 Sv) de raios X de 200 keV. Uma outra unidade de equivalente de dose, hoje obsoleta, é o rem. O equivalente de dose de 1 rem de uma qualquer radiação produz o mesmo efeito biológico que 1 rad de raios X de 200 keV.

Sendo assim, a partir da definição de  $Q$ , vem, para qualquer tipo de radiação

$$1 \text{ Sv} = \frac{1 \text{ Gy}}{Q}$$

Para os efeitos que citamos, em que as partículas  $\alpha$  são 10 vezes mais eficientes do que os raios X, o  $Q$  será, de acordo com a definição, igual a 10. Nestas condições específicas, 1 Sv é 10 vezes menor do que o Gy.

Esta definição, foi generalizada, em protecção radiológica, para o caso de um órgão, ou tecido, irradiado por radiações de diversos tipos, originando uma outra grandeza, a dose equivalente  $H_T$ . Considerando a dose equivalente num órgão  $T$ , vem

$$H_T = \sum_R W_R D_{T,R} \quad \text{V.104}$$

somatório das doses absorvidas num órgão ou tecido multiplicadas pelos factores de ponderação das diferentes radiações, sendo

$D_{T,R}$  - Dose devida à Radiação  $R$  recebida pelo órgão  $T$ .

$W_R$  - Factor de ponderação da radiação  $R$ .

A dose equivalente de 1 Sv = 100 rem. Os factores  $W_R$  encontram-se em tabelas.

Outra grandeza da protecção radiológica é a dose efectiva  $E$ , que é o somatório das doses equivalentes  $H_T$  resultantes de irradiação interna e externa ponderadas para todos os tecidos e órgãos através de factores de ponderação  $W_T$

$$E = \sum_T W_T H_T \quad \text{V.105}$$

A unidade de dose efectiva é o Sievert

## V.17 - Doses em órgãos resultantes de irradiação por partículas $\beta$

### V.17.1. Decaimento e eliminação biológica

A desintegração nuclear é um processo estatístico. Considerando uma população de  $N$  átomos radioactivos, a probabilidade média de decaimento por átomo, num intervalo de tempo  $dt$ , é

$$-\frac{dN}{N} = \lambda dt \quad \text{V.106}$$

$(-dN)$  é o número de átomos radioactivos que decaem num intervalo de tempo  $dt$  e  $\lambda$  a probabilidade de decaimento, quando  $dt = 1$  unidade de tempo.  $\lambda$  é uma constante característica das espécies nucleares, tem dimensões de  $[T]^{-1}$  (inverso do tempo) e é chamada de constante de desintegração ou constante de decaimento.

Num sistema biológico, os átomos e moléculas são mobilizados e eliminados a todo o instante. Cada átomo de uma população de  $N_0$  átomos, retido pelo sistema no tempo zero, tem uma dada probabilidade de ser biologicamente eliminado num dado intervalo de tempo. Esta probabilidade depende apenas do sistema e das moléculas em estudo bem como da duração do intervalo de tempo e é traduzida pela equação

$$-\frac{dN}{N} = \lambda_b dt \quad \text{V.107}$$

$\lambda_b$  é denominado velocidade de renovação, constante de transferência, constante de depuração, etc. O recíproco de  $\lambda_b$  é geralmente denominado tempo de renovação.

Se a Eq. V.107 é aplicável, a eliminação biológica ocorre de acordo com uma reacção de primeira ordem, isto é, a velocidade de eliminação  $(-\frac{dN}{dt})$  é proporcional a  $N$  (à potência de ordem um de  $N$ ).

Reacções de primeira ordem, originando equações exponenciais, são

comuns em biologia mas, reacções de outros tipos são também encontradas. Assim, pela integração da Eq.V.107, temos

$$N = N_0 e^{-\lambda_b t} \quad \text{V.108}$$

O período biológico  $T_b$  de um átomo (ou molécula) é o tempo necessário para qualquer população desta espécie de átomo, ser reduzida a metade do seu valor inicial devido apenas à acção biológica.

É fácil verificar que

$$T_b = \frac{0,693}{\lambda_b} \quad \text{V.109}$$

Se o decaimento radioactivo e a eliminação biológica actuam simultaneamente sobre a mesma população de átomos ou moléculas radioactivas, a velocidade relativa total de redução da amostra é

$$-\frac{dN}{dt} \frac{1}{N} = \lambda + \lambda_b \quad \text{V.110}$$

A integração desta equação conduz a

$$N(t) = N_0 e^{-(\lambda + \lambda_b)t} \quad \text{V.111}$$

É importante verificar que  $\left(-\frac{dN}{dt}\right) = \lambda + \lambda_b$  não representa a actividade da amostra mas a velocidade total de desaparecimento dos átomos do radionuclídeo. A actividade, por definição, é  $\lambda N$ . Multiplicando a Eq.V.111 por  $\lambda$ , obtemos

$$\begin{aligned} \lambda N(t) &= A(t) = \lambda N_0 e^{-(\lambda + \lambda_b)t} \\ &= A_0 e^{-(\lambda + \lambda_b)t} \end{aligned} \quad \text{V.112}$$

Como seria de esperar (devido à proporcionalidade entre  $A$  e  $N$ ), a actividade da amostra decresce com o tempo segundo a mesma lei que o número de átomos da amostra.

O período efectivo de um fármaco marcado com uma espécie radioactiva é, por definição, o tempo necessário para qualquer população destas

moléculas (ou átomos), se reduzir a metade do seu valor inicial devido à acção conjunta do decaimento físico e eliminação biológica, assim

$$T_{\text{ef}} = \frac{0,693}{\lambda + \lambda_b} \quad \text{V.113}$$

ou, recordando as Eqs. V.32 e V.109 vem

$$T_{\text{ef}} = \frac{T \times T_b}{T + T_b}$$

ou ainda

$$\frac{1}{T_{\text{ef}}} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T_b} \quad \text{V.114}$$

O inverso do período efectivo é a soma dos inversos dos períodos físico e biológico.

Quando radionuclídeos, ou produtos marcados com radionuclídeos, são administrados a pacientes, ocorre distribuição, retenção e eliminação dos átomos radioactivos e, simultaneamente, é libertada energia nos tecidos. As propriedades físicas do elemento radioactivo utilizado, a forma química em que é administrado, a via de administração e as características biológicas do receptor determinam as energias cedidas localmente.

Os valores das doses absorvidas pelos diferentes órgãos são factores importantes a ter em conta quando, por exemplo, se considera a aplicabilidade clínica de determinada técnica de diagnóstico com radionuclídeos.

### V.17.2 - Actividade acumulada $\tilde{A}$

É o número total de desintegrações que ocorre durante o tempo em que se encontra actividade num dado órgão. Pode, no entanto, falar-se de actividade acumulada em dado intervalo de tempo.

Sendo

$$A(t) = \frac{|\Delta N|}{\Delta t}$$

Temos que

$$|\Delta N| = A(t) \Delta t$$



que é a área do rectângulo de lados  $\Delta t$  e  $A(t)$  - valor médio da actividade no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Então, graficamente  $\tilde{A}$  é a área subtendida pela curva  $a(t)$ , Fig. V.66.

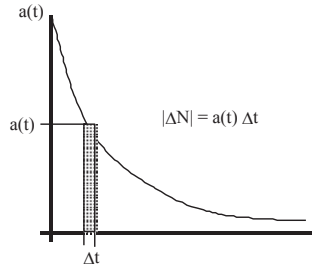


Fig.V.66 - Actividade acumulada no intervalo de  $t$  a  $t+\Delta t$ .

$$\tilde{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_0^{\infty} a(t) \Delta t = \int_0^{\infty} a(t) dt \quad \text{desintegrações} \quad \text{V.115}$$

com  $a(t)$  a actividade no órgão no instante  $t$ .

A actividade acumulada exprime-se em Bq s ou, nas unidades antigas, em mCi s ou  $\mu\text{Ci h}$ .

### V.17.3 - Fixação instantânea sem excreção

Uma actividade  $a_{h_0}$  é fixada no instante  $t=0$  por um órgão e permanece aí até ao completo decaimento.  $N_h(t)$  é o número de núcleos radioactivos correspondentes à actividade  $a_h(t)$  presente no órgão no instante  $t$ .

A actividade no órgão no instante  $t$  é

$$\begin{aligned} a_h(t) &= - \frac{dN_h(t)}{dt} \\ &= a_{h_0} e^{-\lambda t} = N_{h_0} \lambda e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

A actividade acumulada entre  $t_1$  e  $t_2$ , é

$$\begin{aligned}\tilde{A}_h(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} -dN = \int_{t_1}^{t_2} a_h(t) dt \\ &= \frac{a_{h0}}{\lambda} (e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2})\end{aligned}\quad \text{V.116}$$

Se considerarmos todas as desintegrações que irão ocorrer no órgão ( $t_1 = 0$ ;  $t_2 = \infty$ )

$$\tilde{A}_h(0, \infty) = \frac{a_{h0}}{\lambda} = N_{h0} = \frac{a_{h0}T}{0,693} = a_{h0}\tau$$

Não ocorrendo excreção para o exterior, todos os átomos inicialmente no órgão, irão aí desintegrar-se.

$$\tilde{A}_h(0, \infty) = 1,443 a_{h0} T \quad \text{V.117}$$

Para a actividade acumulada dar directamente o número de desintegrações, a actividade  $a_{h0}$  deve ser expressa em desintegrações por unidade de tempo sendo  $T$  expresso nesta mesma unidade.

#### V.17.4 Fixação instantânea e excreção biológica

Suponhamos que em adição ao decaimento físico com constante de decaimento  $\lambda$ , o produto radioactivo administrado é excretado biologicamente. O desaparecimento biológico da radioactividade do órgão ocorre, em geral, segundo uma reacção de primeira ordem, com uma constante de eliminação biológica característica,  $\lambda_b$ .

A velocidade de variação do número de átomos  $N_h$  quando excreção e desintegração ocorrem é, então

$$\frac{dN_h}{dt} = -(\lambda + \lambda_b) N_h$$

A solução desta equação é uma equação exponencial da forma

$$N_h(t) = N(0) e^{-(\lambda + \lambda_b)t} \quad \text{V.118}$$

A actividade de  $N_h(t)$  átomos radioactivos de constante de desintegração  $\lambda$  é  $\lambda N_h(t)$ . Visto  $a_h(t)$  ser proporcional a  $N_h(t)$  podemos escrever

$$\begin{aligned} a_h(t) &= a_{h_0} e^{-(\lambda + \lambda_b) t} \\ &= \lambda N_{h_0} e^{-(\lambda + \lambda_b) t} \end{aligned} \quad \text{V.119}$$

De novo,

$$N_{h_0} = \frac{a_{h_0}}{\lambda}$$

A constante de desaparecimento  $\lambda + \lambda_b$  é maior do que a constante de decaimento físico  $\lambda$ . O período efectivo é

$$T_{\text{ef}} = \frac{0,693}{\lambda + \lambda_b} \quad \text{V.120}$$

Em termos de períodos físico e biológico  $T$  and  $T_b$ , temos

$$T_{\text{ef}} = (T^{-1} + T_b^{-1})^{-1} = \frac{T_b T}{T_b + T} \quad \text{V.121}$$

A actividade acumulada vem

$$\begin{aligned} \tilde{A}_h(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} a_h(t) dt = a_{h_0} \int_{t_1}^{t_2} e^{-(\lambda + \lambda_b)t} dt \\ &= \frac{a_{h_0}}{\lambda + \lambda_b} [e^{-(\lambda + \lambda_b)t_1} - e^{-(\lambda + \lambda_b)t_2}] \end{aligned} \quad \text{V.122}$$

Para todo o tempo  $(0, \infty)$  vem

$$\tilde{A}_h(0, \infty) = \frac{a_{h_0}}{\lambda + \lambda_b} = 1,443 a_{h_0} T_{\text{ef}} \quad \text{V.123}$$

### V.17.5 – Fixação não instantânea

Quando a aproximação a uma fixação instantânea não é possível têm

de ser usadas outras estratégias.

Suponhamos que a curva de fixação de um paciente que recebeu e fixou instantaneamente na glândula tireóide 148 MBq (4 mCi) de  $^{131}\text{I}$  (período 8,04 dias), é como se representa na Fig. V.67 em escala semilogarítmica. Esta curva toma em consideração a eliminação biológica e o processo físico de desintegração.

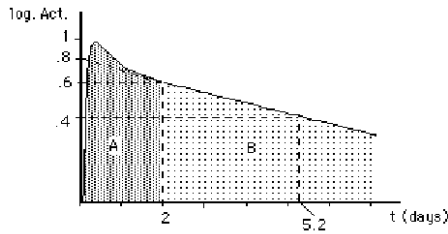


Fig.V.67 - Curva log. act./tempo com duas regiões para o cálculo da actividade acumulada.

A partir do segundo dia a curva é uma exponencial com período 5,2 dias. Este é o período efectivo. A fracção da actividade administrada existente na glândula tireóide para  $t = 2$  dias é 0,6. A actividade acumulada desde o segundo dia até infinito vem então

$$\tilde{A}_h(2,\infty) = 1,44 \times T_{ef} \text{ (horas)} \times \text{fixação (aos 2 dias)} \times \text{Act admin (MBq)}$$

$$= 1,44 \times 5,2 \times 24 \times 0,6 \times 148 = 31\,916,8 \text{ MBq h}$$

A actividade acumulada nos dois primeiros dias  $\tilde{A}_h(0,2)$  é, com alguma aproximação a área A a ponteados. Como segunda aproximação podemos considerar que a área A iguala a área de um rectângulo de base  $2 \times 24$  horas e altura 0,75, Fig. V.68.

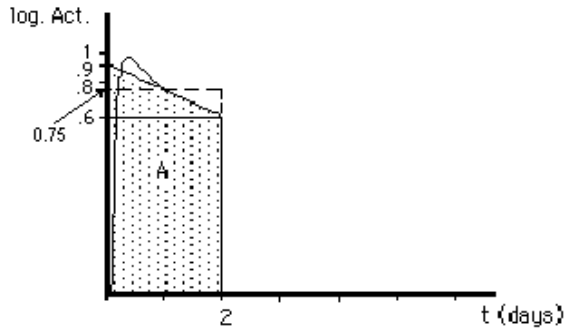


Fig. V.68 - Cálculo aproximado da área A.

Então

$$\tilde{A}_h(0,2) = 0,75 \times 148 \times 2 \times 24 = 5\,328 \text{ MBq h}$$

A actividade acumulada total é

$$\tilde{A}_h(0,\infty) = (5\,328 + 31\,916,8) = 575\,308,8 \text{ MBq h}$$

As unidades utilizadas MBq h, destinam-se a facilitar o cálculo da área A. Para obtermos o número total de desintegrações ocorridas na glândula, teremos de multiplicar por  $10^6 \text{ des/s} = 1 \mu\text{Ci}$  e por  $3600 \text{ s} = 1 \text{ h}$ .

### V.17.6 – Energia libertada num órgão pela emissão $\beta$

Conhecendo a energia média das partículas  $\beta$  e a actividade acumulada no órgão é possível calcular a energia libertada. A energia média das partículas  $\beta$ , em geral, vem expressa em MeV.

Considerando a actividade administrada  $a_{h_0}$  em MBq, o período efectivo  $T_{ef}$  em dias e a energia  $\bar{E}_\beta$  das partículas  $\beta$  em MeV, a energia libertada vem

$$\begin{aligned} W &= f \times \frac{1,6 \times 10^{-13}}{0,693} \times 8,6 \times 10^4 \times 10^6 \times a_{h_0} \times T_{ef} \times \bar{E}_\beta \quad \text{J} \\ &= 1,99 \times 10^{-2} \times f \times a_{h_0} \times T_{ef} \times \bar{E}_\beta \quad \text{J} \end{aligned} \quad \text{V.124}$$

Recordemos que  $f$  expressa fixação em fracção

$$1 \text{ MeV} = 1,6 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$1 \text{ dia} = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$$

Se o órgão tiver massa **M** em quilogramas a energia libertada por unidade de massa é

$$W/M = 1,99 \times 10^{-2} \times f \times \frac{ah_0}{M} \times T_{ef} \times \bar{E}_\beta \quad \text{J/Kg} \quad \text{V.125}$$

Um método geral de cálculo da dose absorvida após administração de radionuclídeos é apresentado no apêndice VII.19.2.

### V.17.7 - Sobrevivência celular sob radiação ionizante

A capacidade das células se multiplicarem por divisão celular é de capital importância em qualquer sistema biológico. A perturbação desta capacidade devido à acção da radiação interessa fundamentalmente à radioterapia e à radioprotecção.

Na ausência de radiação e de um modo geral, os agentes que limitam a capacidade de divisão celular nas células integras, em meio apropriado, são a privação de nutrientes, o aumento da densidade celular e factores regulatórios sistémicos.

Numa primeira aproximação para o desenvolvimento de um modelo que traduza os efeitos biológicos da radiação ionizante e devido à grande percentagem de água na sua constituição, os tecidos biológicos, podem ser considerados como soluções diluídas.

A inactivação de entidades biológicas individuais por acção da radiação é um postulado nos modelos desenvolvidos para o estudo dos efeitos da radiação sobre as células.

Nestes modelos devem sobressair duas possibilidades de interacção da radiação ionizante com moléculas importantes nas funções celulares: acções directas da radiação e acções indirectas, resultantes da intervenção de produtos intermediários.

Para uma mesma intensidade da radiação, a probabilidade de uma determinada molécula, ou estrutura, se encontrar no trajecto da radiação e ser afectada por acção directa, aumenta com as dimensões da molécula.

---

O DNA, com massa molecular 6 a  $8 \times 10^6$  u e um papel primordial na vida celular é, assim, um alvo crítico.

A acção directa, diz respeito aos efeitos que ocorrem quando a radiação atinge directamente moléculas ou microestruturas de importância vital para as células.

O número de moléculas atingido, relativamente ao total existente na célula é, em geral, muito pequeno, mas os seus efeitos poderão ser importantes se se tratar de enzimas ou moléculas constituintes de genes ou cromossomas. É sabido, por exemplo, que o número de moléculas de alguns enzimas existentes numa célula é mínimo, limitado a algumas unidades, sendo, no entanto, decisiva a sua acção. A inactivação de moléculas do enzima afecta irremediavelmente a função em que participam.

A Teoria do Alvo constitui o desenvolvimento matemático da acção directa, com certa base experimental, mas sem considerar os mecanismos biológicos da destruição celular.

Segundo esta teoria, a probabilidade de aparecimento de determinados fenómenos radiobiológicos é função da probabilidade de que o acontecimento físico primário tenha ocorrido em determinadas zonas da célula. Cai-se assim na definição de zonas sensíveis na célula, que correspondem, afinal, às estruturas vitais referidas.

A teoria do alvo começou a ter base experimental com Lotargé, biólogo francês. Este irradiou bacilos da disenteria em suspensão aquosa suficientemente diluída para que as interacções celulares fossem desprezáveis. Por colheitas de amostras e observação das alterações, verificou que, diminuindo a intensidade da radiação mas mantendo a sua qualidade, as lesões observadas não eram menos graves mas sim em menor número.

O que acabámos de referir aplica-se a lesões que ocorrem devido a um simples impacto.

A teoria do alvo assenta em dois postulados: o da natureza estatística da deposição da energia e o da existência de uma relação de um para um entre o número de lesões iniciadas e o efeito biológico final. Uma dificuldade inerente a estes métodos é relacionar a interacção com uma alteração física ou química concreta.

A sobrevivência celular é determinada pela capacidade das células em formarem colónias macroscópicas.

A situação de uma única região sensível e morte com um único toque, pode ser analisada a partir de uma equação muito simples que relaciona a variação do número de elementos **N** de uma população celular com a dose **D**,

---

$$dN = -a N dD \quad \text{V.126}$$

onde **a** é uma constante, ou seja, a constatação de que o número de toques **dN** que se espera que ocorram para a dose **dD** aumenta quando **N** e **dD** aumentam. A integração da Eq. V.126 é

$$N = N_0 e^{-aD} \quad \text{V.127}$$

A constante **a** tem dimensões do inverso da dose absorvida (energia recebida por unidade de massa. Unidade no S.I.: Gray (Gy) = 1 J/kg). A Eq. V.127 é uma equação exponencial, aliás a função de sobrevivência celular mais simples. Ocorre quando se irradiam tecidos *in vivo* ou culturas (bactérias, células animais, etc.). Neste caso os dados experimentais são ajustáveis por rectas em gráfico semilogarítmico. Podemos escrever a Eq. V.127 na forma de uma equação de sobrevivência

$$S = \frac{N}{N_0} = e^{-D/D_0} \quad \text{V.128}$$

onde **S** é a fracção das células vivas para a dose **D**.

$D_0 = 1/a$  é a dose letal média, ou seja, a dose média recebida pela população celular, suposta de vida biológica infinita, e que morre devido exclusivamente à acção da radiação. **D<sub>0</sub>** é um indicador da radiosensibilidade: aumenta quando a radiosensibilidade diminui. **D<sub>0</sub>** é também a dose que reduz a população inicial pelo factor  $\frac{1}{e} = 0,37$ .

No caso presente, onde supusemos a inactivação produzida por um só toque, **D<sub>0</sub>** é a dose que cria a certeza de ocorrer um toque por região sensível. O número de toques será igual ao número total de regiões sensíveis, ou seja, de células irradiadas.

**D<sub>0</sub>** varia de alguns Gy, em células de mamíferos até valores da ordem dos milhares de Gy em vírus.

A maior parte das células dos mamíferos possuem diversas zonas sensíveis. Nestas condições, para que ocorra morte celular, terão que ser atingidas todas as zonas sensíveis. Estamos a supor que as zonas sensíveis não resistem a mais do que um toque.



A probabilidade de uma zona sensível não ser atingida é dada pela equação da sobrevivência para uma zona, um toque (Eq. V.128).

A probabilidade de uma zona ser atingida é então

$$p = 1 - e^{-aD}$$

Havendo **h** zonas sensíveis a probabilidade de todas estas serem atingidas é

$$p_h = (1 - e^{-aD})^h$$

A probabilidade de sobrevivência da célula com **h** zonas sensíveis é a probabilidade contrária a esta, ou seja

$$S_h = 1 - (1 - e^{-aD})^h \tag{V.129}$$

Que é a equação da sobrevivência da célula com **h** zonas sensíveis que, em coordenadas cartesianas, é uma sigmóide.

Expandindo a equação anterior por aplicação do teorema do binómio<sup>11</sup> e considerando valores de **D** elevados vem

$$S_h = h e^{-aD} = h e^{-D/D_h} \tag{V.130}$$

com  $a=1/D_h$ . Como se vê na Fig. V.65 em gráfico semilogarítmico, a curva de sobrevivência torna-se linear para doses elevadas.

A extrapolação desta parte linear até ao eixo das ordenadas dá o valor de **h**, número de zonas sensíveis por célula, Fig. V.69.

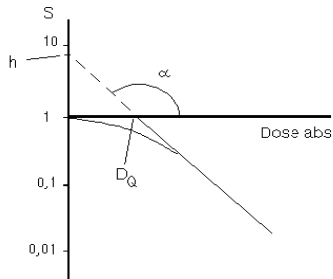


Fig. V.69 - Representação gráfica de Eq. V.109

<sup>11</sup> - Um binómio de grau **n** pode expandir-se de acordo com a expressão  $(x + a)^n = C_p^n a^p x^{n-p}$  com **n** e **p** inteiros e  $0 < p < n$ .

O valor  $D_0$  é a dose absorvida que corresponde a  $S = 1$  na recta extrapolada.  $D_0$  é chamada de dose limiar e é uma medida do patamar que precede a porção linear da curva de sobrevivência na situação de múltiplo alvo um só toque. Este coeficiente está relacionado com a capacidade das células recuperarem dos danos subletais e dá uma indicação do dano que tem de ser acumulado antes da morte celular ocorrer.

Aplicando logaritmos à Eq. V.130 tem-se

$$\ln S_h = - D/D_h + \ln h$$

ou em logaritmos decimais

$$\log_{10} S_h = - 2,304 D/D_h + \log_{10} h \quad \text{V.131}$$

Então, quando  $S_h = 1$

$$\log_{10} 1 = 0 = - 2,304 D_0/D_h + \log_{10} h$$

ou

$$D_0 = D_h \log_{10} h / 2,304$$

ou ainda

$$D_0 = D_h \ln h \quad \text{V.132}$$

Usando as Eqs. V.131 e V.132. tem-se para a expressão da parte linear da Eq. V.130

$$\log_{10} S_h = - 2,304 (D-D_0)/D_h$$

O coeficiente angular da tangente à curva da Eq. V.129, para a dose  $D$ , é

$$\frac{dS_h}{dD} = - a h e^{-aD} (1 - e^{-aD})^{h-1} \quad \text{V.133}$$

Para  $D = 0$  o valor de  $\frac{dS_n}{dD}$  é nulo. Para este valor, a curva  $S(D)$  é paralela ao eixo dos  $DD$  o que significa ausência de efeito para doses muito pequenas.

Algumas das sigmóides experimentais diferem das referentes ao modelo anterior justamente porque o coeficiente angular da tangente não é nulo para  $t=0$ .

Um modelo misto aproxima-se da situação experimental referida.

Neste modelo considera-se uma região sensível, dita letal e  $n$  regiões sensíveis subletais.

Algumas das sigmóides experimentais diferem da anterior justamente porque o coeficiente angular da tangente não é nulo na origem das doses.

A morte celular ocorrerá ou por toque na região letal ou por toques acumulados nas  $n$  regiões subletais.

Nestas condições, a probabilidade de sobrevivência de uma célula é

$$S_n = \frac{N}{N_0} = e^{-D/D_0} [1 - (1 - e^{-D/D_n})^n] \quad \text{V.134}$$

$D_0$  é a dose letal média para a zona letal e  $D_n$  a dose letal média para as regiões subletais. O coeficiente angular desta função para qualquer valor de  $D$ , é

$$\frac{dS_n}{dD} = -1/D_0 e^{-D/D_0} - n/D_n e^{-D/D_0} (1 - e^{-D/D_n})^{n-1} \quad \text{V.135}$$

Para  $D = 0$ ,  $\frac{dS_n}{dD} = -1/D_0$ . A curva  $\log S_n$  vs.  $D$  (Fig. V.70).

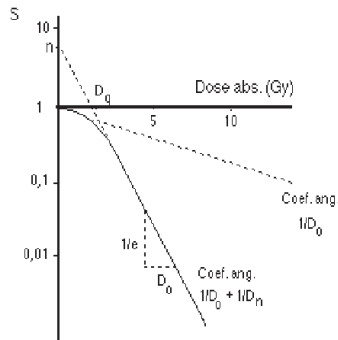


Fig. V.70 - Curva de sobrevivência para o modelo misto da Eq.V.134.

Para valores de **D** elevados a inclinação da curva passa a ser constante e de valor  $-(1/D_0 + 1/D_n)$ .

A inclinação inicial  $-1/D_0$  caracteriza a ação de morte imediata por toque na região sensível letal.

Numa amostra com duas populações subletais distintas a curva de sobrevivência, supondo prevalecer o modelo misto dos mamíferos, será do tipo mostrada na Fig. V.71a.

Finalmente, tratando-se de situações em que, para além de diversas zonas sensíveis letais e não letais seja necessário um número de toques variável para ocorrer a morte celular, a curva poderá não apresentar qualquer porção linear para as doses com interesse (Fig. V.71b).

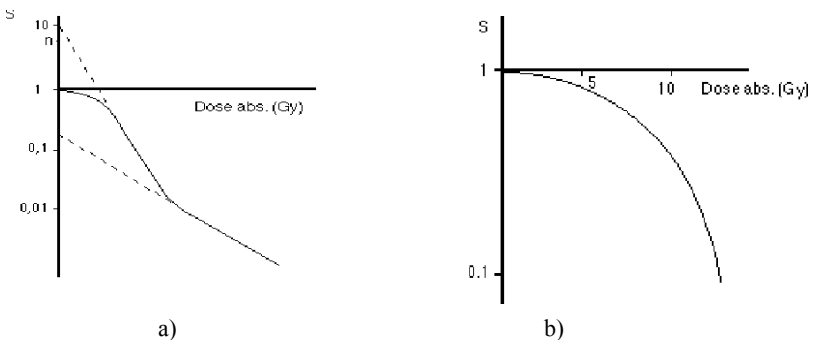


Fig. V.71 – a) Curva de sobrevivência para o modelo misto com duas populações subletais distintas .b) Curva de sobrevivência sem porção linear para as doses com interesse.

Um dos maiores problemas com os modelos de alvo único - único toque, ou múltiplo alvo - único toque, é que três, o número de parâmetros usado é, em geral, grande demais para ser manuseado nas situações práticas.

Um modelo matemático mais simples com menos parâmetros a avaliar é o modelo linear quadrático (L-Q)

Visto haver uma forte evidência de que a maioria dos efeitos biológicos das radiações ionizantes são consequência directa ou indirecta de quebras da dupla faixa do ADN, faz sentido que, para se analisarem os efeitos das radiações sobre células, se tenha desenvolvido um modelo baseado na avaliação directa dos danos cromosómicos, alternativo às análises assentes na teoria do alvo.

A probabilidade de ocorrerem quebras de dupla faixa do ADN depende fortemente do poder ionizante da radiação em estudo como se representa na Fig. V.72. Por exemplo, a probabilidade de ocorrer uma dupla quebra com partículas alfa é muito maior, do que com electrões de igual energia.

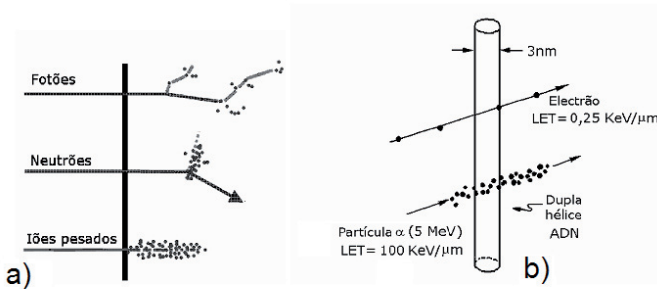


Fig. V.72 – a) Ionização produzida por fotões, neutrões e iões pesados. b) Esquema das dimensões relativas do ADN e do percurso ionizante de uma partícula  $\alpha$  de 5 MeV.

O modelo L-Q distingue dois tipos de danos, A e B. No dano tipo B, uma partícula única parte uma única faixa do ADN, Fig. V.73 b). Só se uma outra partícula quebra a outra faixa, muito próximo do primeiro dano e antes de ocorrer reparação, o cromossoma sofrerá rotura com dupla quebra (que não é o caso da Fig. V.73c)). No dano tipo A, a partícula ionizante, com uma

única agressão, quebra os dois braços do ADN, e o cromossoma é partido em dois fragmentos Fig. V.73 d).

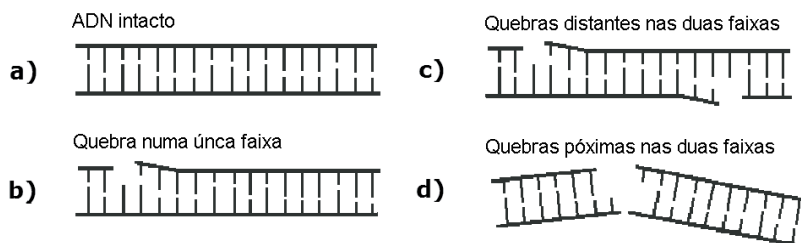


Fig. V.73 – Quebras simples e duplas nas faixas da molécula de ADN. a) Molécula de ADN intacta. b) Quebra numa única faixa. c) Dupla quebra com as fracturas bem separadas, a reparação ainda ocorre eficazmente. d) Fracturas próximas em faixas diferentes podem originar uma fractura de dupla faixa que pode ter consequências graves.

A probabilidade do dano tipo A é proporcional à dose. O número médio de células com dano tipo A, após uma dose  $D$ , é  $m = \alpha D = D/D_0$ , e a probabilidade de sobrevivência (sem qualquer dano) é a probabilidade de Poisson  $P(0) = e^{-m} = e^{-\alpha D}$ .

No dano tipo B um braço é danificado por uma partícula ionizante e o outro por uma segunda partícula. A probabilidade de fragmentar a molécula de ADN através dos dois toques é, portanto, proporcional ao quadrado da dose. O número médio de moléculas com dano do tipo B, após uma dose  $D$ , é então  $\beta D^2$ , e a equação de sobrevivência, somente para dano do tipo B, é  $e^{-\beta D^2}$ .

A constante  $\alpha$  representa a probabilidade de dano letal irreparável do tipo A por uma única partícula.

Para radiação de baixo TLE o valor de  $\alpha$  situa-se entre  $0,1 \text{ Gy}^{-1}$  e  $1,5 \text{ Gy}^{-1}$ .

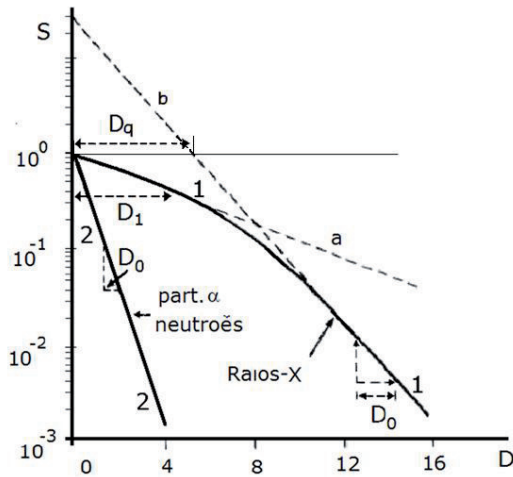


Fig. V-74 – Os parâmetros importantes nas curvas L-Q. A curva é descrita pela inclinação inicial ( $D_1$ ), a inclinação final ( $D_0$ ), e um parâmetro que representa a largura do patamar  $D_q$ .

A constante  $\beta$  permite obter a probabilidade de danos subletais independentes e parcialmente reparáveis do tipo B se combinarem de modo a produzirem eventos letais, ou seja, duplas quebras.

A representação semilogarítmica do processo pode ter o aspecto da:

Curva 1 – Sobrevivência celular sob a acção dos raios X ou  $\gamma$  (danos do tipos A e B), ou da

Curve 2 – Dano do tipo A para radiação de alto TLE.

Para pequenas doses de raios X ou  $\gamma$ , as duplas quebras são resultantes da acção de um único electrão secundário e são representados pela linha recta a tracejado a na Fig. V.74 e correspondem a dano do tipo A. Para doses maiores, as duplas rupturas de cromossoma resultam de dois electrões independentes. A curva de sobrevivência dobra-se para baixo quando a componente quadrática do dano tipo B predomina, como se vê na Fig.V.74.

Para os raios X ou  $\gamma$  o modelo linear-quadrático da sobrevivência celular inclui os danos dos tipos A e B, é

$$S = e^{-(\alpha D + \beta D^2)}$$

onde  $S$  é a fracção das células que sobrevivem à dose  $D$ .

Este modelo supõe que estão presentes duas componentes de morte celular devida a radiação, uma proporcional à dose e a segunda proporcional ao quadrado da dose.

Para radiação densamente ionizante (elevado TLE), como as partículas alfa, ou os neutrões de baixa energia, a curva de sobrevivência celular é uma linha recta que passa pela origem; ou seja a sobrevivência, aproxima-se de uma função exponencial da dose. Quanto maior for o TLE maior o valor da constante  $\alpha$ , ou seja, maior a inclinação da linha recta. Neste caso a curva de sobrevivência pode ser descrita por um único parâmetro, a inclinação da recta.

A curva linear-quadrática para doses elevadas curva continuamente mas ajusta-se bem aos dados experimentais na primeira parte da curva de sobrevivência. A curva é caracterizada por parâmetros de inclinação inicial ( $D_1$ ) e final ( $D_0$ ) e um parâmetro que representa a largura do patamar  $D_q$  ou dose limiar.  $D_0$  e  $D_1$  representam os inversos das inclinações das partes inicial e final da curva, para iguais intervalos de ordenada.

O modelo linear quadrático é correntemente o modelo escolhido de sobrevivência celular num número substancial de situações.

No entanto, é uma curva com curvatura constante que não é o caso dos dados experimentais, mas é, no presente, o modelo mais usado.

### **V.17.8 - Efeitos não dirigidos, complementares da acção directa da radiação ionizante, para baixas doses**

Os sistemas biológicos desencadeiam mecanismos de defesa e de resposta biológica quando sujeitos a radiação ionizante.

Quando se consideram doses elevadas, os efeitos associados à acção das radiações ionizantes, são relativamente bem conhecidos e englobam a morte celular (apoptose e necrose), as mutações somáticas (em especial as que resultam em cancro) e as mutações nas células germinativas (defeitos genéticos transmissíveis).

---



Para baixas doses de radiação ionizante verifica-se que a resposta dos sistemas biológicos não é extrapolável a partir dos efeitos obtidos com doses elevadas.

É geralmente aceite que os danos no ADN podem ser o acontecimento mais devastador nas células irradiadas com radiações ionizantes, e que as quebras de duplas cadeias não reparadas ou mal reparadas, são as lesões do ADN responsáveis pelos efeitos biológicos mais importantes. As consequências dos danos no ADN levaram à aceitação, desde há muito, do paradigma da acção citotóxica, indutora de mutagénese e de transformações malignas que ocorrem nas células, após irradiação com radiação ionizante. A teoria do alvo postula que uma colisão directa (excitação ou ionização) da radiação com um componente crítico de uma célula, em geral o ADN dos cromossomas, pode produzir um efeito biológico. Nomeadamente, a colisão de um microfeixe de radiação ionizante com o núcleo de uma célula pode produzir rapidamente a morte celular.

Tem vindo, no entanto, a ser acumulada evidência, ao longo da última década, da ocorrência de processos não explicáveis pela teoria do alvo, que mostram que a radiação pode induzir efeitos mesmo sobre células que não são irradiadas.

A colisão de um microfeixe de radiação ionizante com o núcleo de uma célula pode induzir efeitos análogos em células vizinhas não atingidas pelo microfeixe (41). Este processo é conhecido por efeito “bystander”, e traduz o fenómeno no qual as células irradiadas transmitem sinais de dano para células não-irradiadas numa população mista, conduzindo a efeitos genéticos em células vizinhas que não receberam exposição às radiações.

Dois mecanismos possíveis foram propostos para explicar o efeito de “bystander”: comunicações intercelulares por junções através dos espaços intercelulares e mecanismos dependentes de factores solúveis produzidos no meio (42,43). Os efeitos “bystander” dependem de diversos factores tais como a qualidade da radiação, a dose e a velocidade de dose, o tipo de tratamento, as condições da cultura das células, as linhas celulares, e podem ser observados segundo diversas perspectivas (activação clonogénica, apoptose e micronúcleos, mutações, expressão genética, aberrações cromosómicas, etc.).

---

---

A instabilidade genômica é um processo induzido pela radiação, que consiste na transmissão de sinais à descendência das células irradiadas, que pode estender-se por muitas gerações, levando à ocorrência de efeitos genéticos, como mutações e aberrações cromossômicas, em descendentes das células irradiadas distantes no tempo (44).

A resposta adaptativa, um outro fenómeno, consiste na resposta das células a uma agressão externa através de um mecanismo intrínseco que confere resistência a uma próxima agressão.

Os sinais enviados pelas células atingidas perturbam a função normal das células vizinhas (efeito bystander), e estimulam-nas a enviar novos sinais dirigidos à célula inicialmente atingida e sobre células próximas. Os sinais enviados pelas células bystander podem ajudar a reparar células atingidas, ou a desencadear o processo que leva estas a cometer suicídio

Além do acima referido, a interpretação da expressão final do dano celular, para baixas doses, tem de considerar também os processos de redistribuição, repovoamento, e mobilização celulares.

### V.18 - Física da radiação solar

O sol é uma estrela com raio médio de  $6,95 \times 10^8$  m (raio médio da terra  $6,38 \times 10^6$  m), com massa de  $1,99 \times 10^{30}$  kg (massa terrestre  $5,98 \times 10^{24}$  kg) e cuja distância média à terra é da ordem de  $1,5 \times 10^{11}$  m.

A maior parte da radiação que atinge a terra é de natureza electro-magnética e provém, directa ou indirectamente, do sol. A radiação solar é bastante complexa na sua constituição, mas contém apenas uma pequena parte dos diferentes tipos de radiação electromagnética conhecidos.

As ondas electromagnéticas podem ter comprimentos de onda que vão desde  $10^9$  cm (dezena de milhar de quilómetros) a  $10^{-13}$  cm (bilionésimo do milímetro), (Fig. V.75).

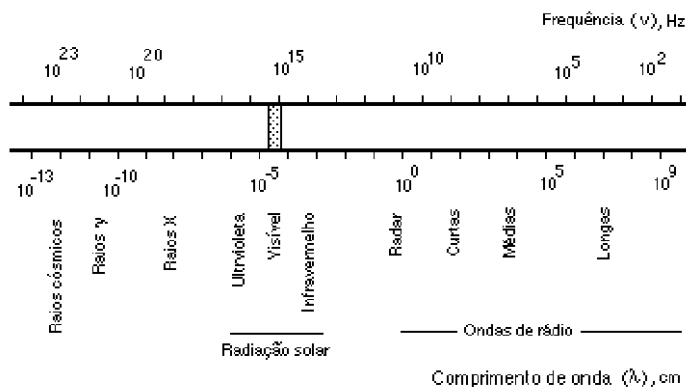


Fig. V.75 - Distribuição da radiação electromagnética.

Embora certas propriedades básicas sejam comuns a todas as radiações electromagnéticas, a gama das frequências do espectro é tão larga que as características físico-químicas individuais dos diferentes tipos de radiação e o seu impacto sobre o homem são, essencialmente, diferentes.

Uma parte da radiação emitida pelo sol, na direcção da terra, é absorvida pelas atmosferas solar e terrestre, não atingindo a terra. Por sua vez, a radiação solar que chega à superfície terrestre é constituída por duas componentes, uma directa e outra de radiação dispersa, por vezes designadas respectivamente luz solar e luz do céu. A radiação total, conjunto da luz solar e da luz do céu, é também frequentemente designada de radiação global. Só parte da radiação global é, porém, luz visível, correspondendo esta a um estreito intervalo de comprimentos de onda do espectro que se estende dos 400 aos 700 nm.

A radiação solar é predominantemente térmica visto 59 % da sua energia se situar no infravermelho (I.V.). Do restante da energia, 40% é radiação luminosa (visível) e 1% ultravioleta (U.V.).

A potência total média por unidade de área proveniente do sol, recebida na camada externa da atmosfera, chamada de constante solar, é de cerca de  $2 \text{ cal cm}^{-2} \text{ min}^{-1}$  ou, mais exactamente,  $1368 \pm 7 \text{ W m}^{-2}$ . Devido à reflexão nas nuvens, absorção atmosférica, etc., a energia média que, de facto, atinge a superfície da terra é de cerca de  $1,5 \text{ cal cm}^{-2} \text{ min}^{-1}$  ou  $1046 \text{ W m}^{-2}$ .

A intensidade máxima da radiação electromagnética proveniente do

sol é na região do verde, para comprimentos de onda da ordem dos 500 nm.

O sol emite luz aproximadamente como a do corpo negro a uma temperatura próxima dos 5800 °K. A curva 1 da Fig. V.73 mostra o espectro de emissão do corpo negro a esta temperatura.

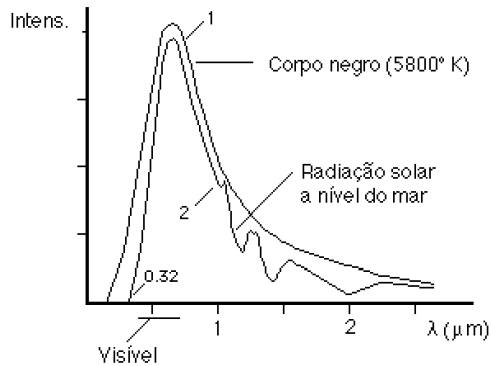


Fig. V.76 - Curva 1 - Espectro solar aproximado (corpo negro).  
Curva 2 - espectro da radiação solar ao nível do mar depois da atenuação atmosférica.

Na curva 2 da Fig. V.76 é observável o efeito da absorção da luz solar pela atmosfera. A grande diferença nos U.V. de cerca de 320 nm (0,32 μm) é produzido pelo ozono ( $O_3$ ) que absorve drasticamente os raios com comprimentos de onda entre os 200 a 320 nm e depois, menos intensamente, até comprimentos de onda da ordem dos 360 nm.

Por sua vez, o oxigênio molecular absorve fortemente abaixo dos 180 nm.

A quantidade de U.V. que atinge a superfície da terra depende também da altitude, da latitude e da hora do dia. Este efeito é devido ao aumento do trajecto dos raios quando a luz percorre obliquamente a atmosfera. No inverno, muito pouca radiação de comprimento de onda inferior a 320 nm atinge o solo, ao nível do mar, nas latitudes norte. Contrariamente, durante o Verão, entre as 09:30 H e as 15:30 H, quantidades apreciáveis de U.V., desta gama de comprimentos de onda, são detectáveis naquelas latitudes.

Por outro lado, nas montanhas, comprimentos de onda tão pequenos como 290 nm poderão atingir o solo, em quantidades significativas.

Na Fig. V.77 encontram-se os espectros absolutos das energias atingindo a superfície terrestre, ao nível do mar, para diferentes ângulos do sol

acima do horizonte. Estas curvas são calculadas e foram obtidas com a suposição de não haver vapor de água na atmosfera e existir uma concentração de ozono constante e igual ao valor médio real.

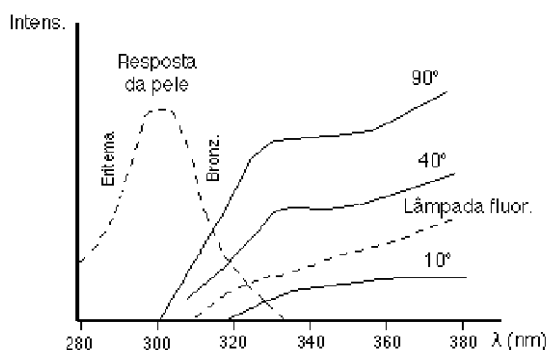


Fig.V.77 - Espectros aproximados da radiação solar na região de interesse biológico, para vários ângulos de incidência da luz solar, espectro de uma lâmpada de fluorescência e curva de resposta da pele.

A radiação solar recebida do sol é responsável pelo desenvolvimento e existência continuada de vida na terra.

A distribuição espectral, bem como a energia total da radiação que atinge a superfície da terra, têm importantes consequências biológicas e ambientais.

Por exemplo, o papel da luz solar como causadora de efeitos biológicos sobre a pele humana é conhecido desde há muitos anos (Fig.V.77). Com as investigações levadas a cabo, no último século, sobre os efeitos (benéficos e prejudiciais) da luz solar, ficou claro que a maioria das acções, sobre a pele, eram causadas por radiação de comprimento de onda inferior a 400 nm, ou seja, radiação U.V..

Na radiação solar encontram-se U.V. de comprimentos de onda entre 100 e 400 nm que os dermatologistas costumam distribuir em três regiões:

	$\lambda$ (comprimento de onda)	Energia
U.V.A	- 400 - 315 nm	3,1 - 3,9 eV
U.V.B	- 315 - 280 nm	3,9 - 4,4 eV
U.V.C	- 280 - 100 nm	4,4 - 12,4 eV

Outras classificações existem, porém, para os **U.V.** em geral, e não somente os do espectro solar. A radiação **U.V.** forma a parte do espectro que se situa entre a região do visível e a região dos raios **X** sendo comum, em física, estabelecer os seguintes grupos:

U.V. próximos	400 - 300 nm	3,1 - 2,7 eV
U.V. médios	300 - 200 nm	2,7 - 6,2 eV
U.V. remotos	200 - 100 nm	6,2 - 12,4 eV
U.V. extremos	< 100 nm	< 12,4 eV

Uma terceira classificação é, por vezes, usada em biologia:

U.V. próximos	400 - 315 nm	3,1 - 3,9 eV
U.V. actínicos	315 - 200 nm	3,9 - 6,2 eV
U.V. vácuo	< 200 nm	< 6,2 eV

É também comum dividir os **U.V.** em duas categorias: os abióticos e os bióticos. Os primeiros, com comprimento de onda inferior a 300 nm, capazes de destruir células, os últimos, incapazes de produzir a morte celular, com comprimento de onda acima daquele valor. A nomenclatura desta divisão como que estabelece implicitamente duas capacidades biológicas inerentes aos raios **U.V.**: a estimulação de funções (ação biótica) e a eliminação de germes (ação abiótica).

Artificialmente, a radiação **U.V.** pode ser produzida por aquecimento de um corpo até à incandescência ou através de descargas em gases ou vapores. Apesar da maior fonte de **U.V.**, o sol, ser do primeiro tipo, não é possível obter, através de aquecimento de filamentos, por efeito Joule, uma produção eficaz de **U.V.**. Por exemplo, numa lâmpada de 100 W só cerca de 0,1 % da potência emitida é na região dos **U.V.**. Por esta razão as descargas em gases são virtualmente o único meio utilizado na produção de radiação **U.V.** artificial. As lâmpadas de arco e as de descarga em vapor de mercúrio, com ou sem revestimentos fluorescentes são, presentemente, os tipos mais usados.

As lâmpadas de arco de **Xe**, a várias atmosferas, emitem um espectro de **U.V.** que é semelhante ao solar (Fig. V.78).

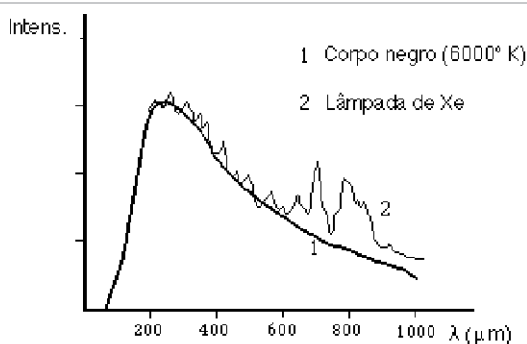


Fig. V.78 - Espectros aproximados da radiação produzida pelo corpo negro a  $6000^{\circ}\text{K}$  e por uma lâmpada de Xe pulsada.

As lâmpadas de descarga em vapor de mercúrio a baixa pressão emitem um espectro com uma risca de comprimento de onda  $253,7\text{ nm}$  onde se encontra mais de 90% da potência emitida, como se pode observar na Fig.V.79. Estas lâmpadas são utilizadas como germicidas.

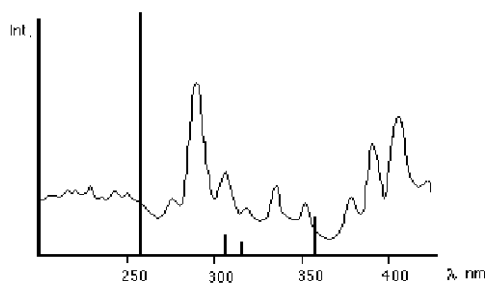


Fig. V.79 - As riscas (traço grosso) são o espectro emitido por uma lâmpada de mercúrio de baixa pressão. O espectro contínuo corresponde à emissão para uma pressão do vapor de mercúrio de valor médio.

Uma importante utilização deste espectro é nas chamadas lâmpadas fluorescentes que utilizam a risca de  $253,7\text{ nm}$  para obter luz visível de fluorescência. De facto, estas são lâmpadas de descarga em vapor de mercúrio, a baixa pressão, com um revestimento fluorescente na face interior do tubo de vidro. A substância fluorescente é excitada pelos U.V. de  $253,7\text{ nm}$  sendo emitido um espectro de fluorescência que depende da natureza da substância. O rendimento destas lâmpadas é muito superior ao

das lâmpadas de incandescência. Por exemplo para o corpo negro a 2 000 °C o rendimento da emissão luminosa visível é, somente, de 0,3%. Para 3 000 °C o rendimento sobe para cerca de 3%. Quando se estuda o rendimento de emissão de luz visível em função da temperatura do corpo negro obtém-se uma função crescente até cerca de 6 000 °C, ocorrendo aí um máximo, com o valor de aproximadamente 13%. Curiosamente o máximo referido corresponde à temperatura do sol. Este facto tem certamente a ver com a adaptação da visão humana à luz solar e poderá ser uma importante razão para explicar a selecção desta franja do espectro para luz visível.

Quando se aumenta a pressão do vapor de mercúrio, o espectro emitido torna-se contínuo (Fig. V.79).

As lâmpadas modernamente utilizadas em actinoterapia emitem um espectro contínuo que se estende dos 270 aos 400 nm com um pico a cerca de 310 nm.

Neste texto vamos basear-nos, sobretudo, na primeira das classificações dos **U.V.**, acima referidas.

As três regiões definidas possuem propriedades físicas e potencialidades de acção biológica consideravelmente diferentes.

As propriedades dos diversos tipos de radiações **U.V.** estão relativamente bem estudadas podendo ser resumidas muito sumariamente como se segue:

**U.V.A** - São os menos energéticos. Estão presentes na luz solar em maior abundância do que os tipos **B** e **C**. Podem ser obtidos a partir do arco de carbono após filtragem (por exemplo, com filtro de Novio-flint bário). Estão presentes na luz das lâmpadas de vapor de Hg para pressões iguais ou superiores à normal. Apresentam pequeno poder eritematogénico. Têm grande acção fotoquímica. São bióticos. São os principais responsáveis pela fotossíntese. Penetram bem o vidro ordinário, a água, o quartzo, o sal gema e o ar. Apresentam poucas propriedades biológicas utilizáveis directamente em medicina.

**U.V.B** - Podem ser obtidos com lâmpadas de vapor de mercúrio (média pressão) ou de arco metalizado (ferro e tungsténio) após filtragem (por exemplo, com filtro de Pyrex-flint bário). Têm grande poder eritematogénico. São capazes de produzir pigmentação e formar a vitamina **D** a partir da pró-vitamina **D**. São os **U.V.s** mais utilizados no campo da medicina.

**U.V.C** - São os mais energéticos. Na porção inferior do respectivo intervalo de comprimentos de onda já pertencem ao grupo das chamadas radiações ionizantes. Podem obter-se utilizando lâmpadas de vapor de mercúrio, de baixa pressão e paredes de quartzo, com filtro de Pyrex-flint bário. São produzidos também pelas lâmpadas de hidrogénio. São abióticos.



---

São facilmente absorvidos pelos vidros.

A radiação U.V.C na região de 100 a 200 nm é praticamente absorvida no ar, apresentando poucas probabilidades de acção biológica, aparte os efeitos indirectos resultantes da produção de ozono e óxidos de azoto no ar.

As acções físico-químicas da radiação U.V. podem resumir-se aos efeitos resultantes da interacção desta radiação com átomos ou com moléculas.

A produção de ionização (por efeito fotoeléctrico ou Compton), de fenómenos de fluorescência e o desencadeamento de reacções fotoquímicas são efeitos destas interacções.

A segunda destas propriedades tem sido utilizada através da chamada luz de Wood. Após filtragem por óxido de níquel (filtro de Wood) que deixa passar unicamente comprimentos de onda entre 330 e 380 nm, a radiação U.V. é utilizada, por exemplo, em análise química, para identificar fracções separadas de substâncias fluorescentes .

São também conhecidos os espectros de absorção dos U.V. para numerosas moléculas de interesse biológico. Um exemplo é o caso das proteínas. De um modo geral os espectros de absorção U.V. das proteínas podem decompor-se em três partes: na região dos comprimentos de onda de 250 nm o espectro de absorção é devido aos ácidos aminados aromáticos (tirosina, triptofano e fenilalanina) para os quais ocorrem transições quânticas. No intervalo de comprimentos de onda entre os 250 e 210 nm o espectro é mais complexo e depende dos outros ácidos aminados. Para os comprimentos de onda inferiores a 210 nm o espectro depende principalmente das ligações peptídicas. Um ponto importante a frisar é o de que o espectro de absorção de uma macromolécula não é igual à soma dos espectros de absorção dos seus constituintes. Muitas vezes verifica-se que o espectro de absorção de uma proteína é mais intenso do que a soma dos espectros dos seus constituintes, efeito que é chamado de hipercrómico. Além disso o espectro encontra-se ligeiramente deslocado para os grandes comprimentos de onda. Noutras condições, contudo, pode observar-se hipocromia e os deslocamentos ocorrem no sentido dos pequenos comprimentos de onda. Estes efeitos devem-se às modificações do meio onde se situam os cromóforos e estão também associados à estrutura da proteína. Dependem de um conjunto de factores entre os quais a temperatura, o tipo de solvente e o pH.

Para se ter uma ideia correcta da radiação U.V. que, de facto, atinge a crusta terrestre, interessa conhecer os fenómenos que ocorrem na atmosfera com esta radiação.

A radiação ultravioleta é atenuada na atmosfera principalmente pelos

---

efeitos seguintes:

a) Absorção pelo ozono atmosférico que se concentra numa camada entre 10 e 50 km acima do nível do mar com uma máxima concentração de cerca de 10 ppm a uma altitude de 25 km.

b) "Rayleigh scattering" (dispersão de Rayleigh) causado pelo oxigénio, azoto e outros componentes moleculares presentes na atmosfera, que funcionam como centros de dispersão com dimensões pequenas comparadas com o comprimento de onda da radiação.

c) "Mie scattering" (dispersão de Mie) produzida por partícula de pó, aerossóis, gotículas de água e outras partículas de diâmetro comparável ao comprimento de onda da radiação.

O espectro de energia da radiação dispersa é muito diferente do espectro incidente na atmosfera (Fig.V.80).

Além disto, o tecto de nuvens e a reflexão do solo afectam a componente difusa da radiação global.

A radiação U.V. de comprimento de onda menor do que 200 nm é efectivamente absorvida por todos os materiais comuns, incluindo o ar, não oferecendo geralmente risco como constituinte da radiação solar.

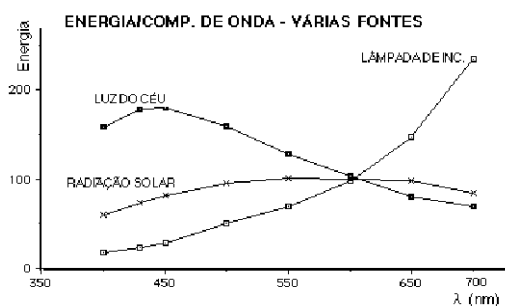


Fig. V.80 - Espectros aproximados da luz solar directa, da luz dispersa (luz azul do céu) e da luz emitida por uma lâmpada de incandescência. Em ordenada a energia emitida, em abcissa o comprimento de onda,  $\lambda$ .

A radiação dispersa de Rayleigh é originada pela interacção da luz incidente com os electrões da molécula dispersora. Se a energia de um fóton é diferente daquelas para as quais ocorre absorção numa dada molécula, o campo eléctrico da onda electromagnética força vibrações periódicas nos electrões dessa molécula. Origina-se assim um momento dipolar eléctrico

oscilatório com a frequência da luz incidente. O dipolo oscilante assim criado funciona como um emissor secundário de radiação electromagnética, dando origem à radiação dispersa.

Quando a luz emitida é do mesmo comprimento de onda da luz incidente diz-se que ocorreu dispersão de Rayleigh. Se vibração ou rotação moleculares originam que a radiação dispersa tenha comprimento de onda diferente da radiação excitadora incidente, então diz-se que ocorreu dispersão de Raman. Este efeito é, contudo, muito menos provável do que a dispersão de Rayleigh, podendo desprezar-se no presente contexto. Igualmente, a acção da componente do campo magnético da onda incidente na produção da luz dispersa é irrelevante.

A relação entre a intensidade incidente  $I_0$  de um feixe de luz não polarizada e a intensidade  $i_\theta$  da luz difundida emergente, por unidade de volume e segundo o ângulo  $\theta$ , é dada pela equação

$$\frac{i_\theta}{I_0} = \frac{8 \pi^4 \nu^2 \alpha^2 (1 + \cos^2 \theta)}{\lambda^4 r^2} \quad \text{V.137}$$

onde  $\nu$  é o número de centros de dispersão por  $\text{cm}^3$ ,  $\alpha$  é a polarização ou dipolo induzido por unidade de intensidade de campo,  $r$  é a distância das moléculas ao detector e  $\lambda$  o comprimento de onda da radiação.

A dispersão é fortemente dependente do comprimento de onda da radiação, visto variar com o inverso da sua quarta potência. No caso da luz visível do espectro da radiação solar, a maior dispersão ocorre com os menores comprimentos de onda (azul e violeta). Este facto e a maior sensibilidade do olho humano ao azul, são os responsáveis pela cor azul do céu. Também, no pôr do sol, a cor vermelha resulta do mesmo fenómeno. Neste caso, o espectro da luz que atinge os nossos olhos foi privado de azuis e violetas, devido à dispersão de Rayleigh.

A equação de Rayleigh aplica-se a partículas isotrópicas suficientemente distanciadas entre si e com dimensões pequenas, quando comparadas com o comprimento de onda da luz incidente.

Os raios infravermelhos (**I.V.**) são radiações electromagnéticas cujos comprimentos de onda se situam entre os  $3 \times 10^6$  e os 760 nm. É radiação invisível, incapaz de accionar o mecanismo molecular da visão. É possível distinguirem-se as seguintes regiões no espectro de **I.V.**.

---

760 – 1300 nm	região fotográfica
1 300 – 2 500	região dos harmônicos
2 500 – 25 000	região das vibrações fundamentais
25 000 – $3 \times 10^6$	região das rotações moleculares

Na primeira das regiões a característica proeminente, como o nome indica, é a capacidade oxidadora.

As regiões seguintes são determinadas pelos espectros de absorção molecular dos **I.V.**.

A absorção molecular de energia na região do **I.V.** origina aumento nas frequências de vibração de átomos ou grupos de átomos constituintes das moléculas. Contrariamente ao que sucede nas interações com radiação visível e **U.V.**, a configuração electrónica não é alterada. Ocorre, contudo, alteração no momento dipolar eléctrico das moléculas devido ao novo movimento dos átomos que as constituem. Os espectros de **I.V.** com interesse ocorrem como resultado de movimentos ao longo das ligações de valência, ou normais a estas, correspondendo ao alongamento da ligação ou à sua deformação.

Os raios infravermelhos têm um poder de penetração tanto maior quanto maior for a sua energia. Deste modo, os raios infravermelhos de maior comprimento de onda são absorvidos na espessura de cerca de um décimo de mm, a seguir à superfície da pele.

Para os infravermelhos de menor comprimento de onda (1500 a 760 nm), cerca de 20% dos raios podem atingir 1mm de profundidade e aproximadamente 5% os 2 mm. Com raios de 1200 nm só uma fracção mínima dos raios atinge os 3 mm. Contudo, é interessante notar que a luz vermelha tem maior poder de penetração que a radiação infravermelha. Espessuras de tecido como a orelha e a mão, não absorvem totalmente os feixes de luz vermelha.

Como dissemos, a radiação infravermelha é absorvida nas camadas superficiais da pele onde origina a produção de calor. No entanto, a pequena penetração destes raios na pele é suficiente para permitir obter fotografias com interesse da rede vascular venosa subcutânea, invisível, na sua maior parte, com luz branca.

Dada a sua pequena energia os fótons infravermelhos não produzem ionização em moléculas orgânicas e dificilmente originam reacções fotoquímicas. A sua acção reduz-se ao aumento da energia de vibração e rotação moleculares, ou seja, da agitação térmica das moléculas do meio absorvente levando a uma elevação da temperatura.

---

A produção de calor no local da irradiação com infravermelhos, associada a uma muito débil actividade fotoquímica, são as características básicas da acção biológica dos I.V..

Numa perspectiva macroscópica, a interacção da radiação electromagnética de baixa energia com a matéria é iniciada pelo efeito dos campos magnético  $\vec{H}$  e eléctrico  $\vec{E}$  da radiação sobre as cargas e correntes eléctricas existentes no meio, gerando o aparecimento de magnetização e polarização eléctrica no meio. Podem traduzir-se estes fenómenos pelos vectores indução magnética  $\vec{B}$  e indução eléctrica  $\vec{D}$  que, para meios homogéneos e isotrópicos, estão relacionadas com os campos através das equações de Maxwell.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \text{V.138}$$

onde  $\mu(\nu)$  e  $\epsilon(\nu)$  são a permeabilidade magnética e a permissividade dieléctrica do meio, funções da frequência  $\nu$  da radiação.

O valor de  $\mu$  nos tecidos biológicos é muito pequeno sendo, em geral, desprezada. A permissividade dieléctrica  $\epsilon$  costuma considerar-se constituída por dois componentes  $\epsilon'$  e  $\epsilon''$ . A primeira componente  $\epsilon'$  caracteriza a tendência de formação e orientação de dipolos eléctricos no meio (corrente de deslocamento), sendo chamada de constante dieléctrica do meio. A componente  $\epsilon''$  caracteriza o deslocamento das cargas frouxamente ligadas e depende directamente da conductividade eléctrica  $\sigma$  do meio, de acordo com a equação

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{2\pi\nu\epsilon_0} \qquad \text{V.139}$$

Os tecidos têm, na sua constituição, um conjunto de electrólitos limitados por membranas de diversos tipos e dimensões e contêm cargas eléctricas livres e ligadas. As correntes de deslocamento resultam da acção do campo eléctrico sobre os iões provenientes de ligações iónicas, sobre moléculas dipolares e sobre a carga induzida em moléculas não polares. A energia da radiação electromagnética que produz polarização e rotação molecular (correntes de deslocamento) é chamada de perda no dieléctrico. A energia que é transferida para os electões e iões comunicando-lhes energia cinética é a perda por condução.

Para representar o comportamento dos tecidos, quando sob a acção da radiação electromagnética, foram propostos modelos constituídos por circuitos em paralelo com capacidade e resistência. O tratamento com quantidades

complexas é correntemente utilizada nestes modelos. A permissividade generalizada complexa define-se como  $\epsilon^* = \epsilon' - j \epsilon''$ . Consideremos o tecido como uma capacidade não ideal, obtido a partir da adição de um dieléctrico, de permissividade relativa complexa  $\epsilon^*$ , a um condensador ideal. A admitância complexa  $Y^*$  fica relacionada com a conductividade complexa  $\sigma^*$  pela equação  $Y^* = k \sigma^*$ . Por seu lado a conductividade complexa está relacionada com a permissividade complexa por  $\sigma^* = \sigma + j \omega \epsilon_r \epsilon_0$  e a permissividade complexa é dada por  $\epsilon^* = \epsilon_r - j \sigma / \omega \epsilon_0$ .

Quando a frequência tende para zero a conductividade complexa tende para o termo real (mínima penetração). Inversamente a permissividade torna-se real quando a frequência tende para infinito. A variação no módulo de  $\epsilon'$  (constante dieléctrica) e na conductividade  $\sigma$ , em tecidos com elevado conteúdo de água, em função da frequência da radiação electromagnética de baixa energia é mostrada na Fig. V.81.

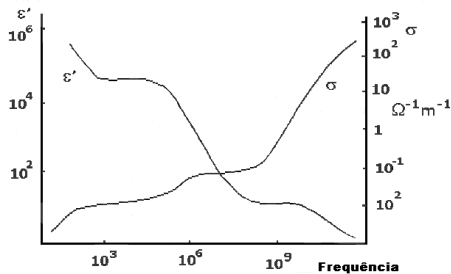


Fig. V.81 – Variação de  $\epsilon'$  (constante dieléctrica) e condutividade  $\sigma$  nos tecidos com elevado conteúdo de água em função da frequência da radiação electromagnética

Em comparação com as mais baixas frequências, nesta zona do espectro da radiação electromagnética, as frequências mais elevadas tendem a ser mais severamente atenuadas no material biológico.

Num modelo aceite, o circuito equivalente adoptado é uma resistência em paralelo com uma série capacidade-resistência. A aplicação destes modelos às situações práticas obriga a aproximações que suscitam dúvidas ainda não totalmente ultrapassadas.

Para certas frequências, chamadas de frequências de ressonância, verifica-se uma variação drástica destas grandezas.

As fontes de radiação electromagnética podem produzir energia radiante (radiação) e energia não radiante (campos). Depois da emissão, a energia radiante é independente da fonte, propaga-se no espaço e existirá num ponto qualquer depois da fonte ser desligada. Os campos não se propagam no espaço e deixam de existir quando a fonte é desligada. Nos campos eléctricos ou magnéticos estáticos não há componente radiante. Numa particular situação o campo é uma propriedade do ponto. Campos eléctricos fortes podem influenciar consideravelmente a estrutura eléctrica da matéria sobretudo para valores elevados de  $\epsilon'$  e  $\epsilon''$ .

Comparando os potenciais de ionização de moléculas ou radicais com interesse biológico, com as energias dos fotões dos diferentes tipos que constituem o espectro solar, poderá ter-se uma ideia dos processos prováveis de interacção. No Quadro V.7 encontram-se potenciais de ionização de moléculas orgânicas e de átomos que nelas intervêm. No Quadro V.8 encontram-se os comprimentos de onda e energias da radiação electromagnética desde os U.V. aos I.V.. Facilmente se constata que a ionização de estruturas biológicas só poderá ocorrer com o U.V. remoto.

Quadro V.8 - Comprimentos de onda e correspondentes energias de alguns fotões.

$\lambda$ , nm	E, eV
10	124,2
100	12,4
124	10
200	6,2
400	3,1
800	1,6
1000	1,2
1200	1,03
1400	0,89
1600	0,78

De um modo geral, as estruturas biológicas necessitam de energias acima dos 10 eV para sofrerem ionização. Os fotões com esta energia têm comprimento de onda 124 nm e correspondem ao U.V. solar que não atinge,

praticamente, a superfície terrestre.

A radiação U.V. solar pode contudo, produzir excitação em átomos ou moléculas. Às transições correspondentes à excitação de um electrão de valência de um nível para outro estão associadas energias da ordem do eV, ou seja, fotões na região do U.V. e do visível. Os fotões de maior comprimento de onda do espectro solar não são suficientemente energéticos para induzir transições electrónicas, mas têm a possibilidade de fazer vibrar os átomos de uma molécula em relação a uma posição de equilíbrio. As energias de vibração são da ordem de 1/10 eV. Deste modo, os I.V. próximos podem excitar as transições de vibração molecular.

Uma outra possibilidade requer ainda menos energia. Trata-se da rotação molecular em torno do centro de massa da molécula. As energias de rotação molecular são da ordem de 1/100 eV a que corresponde o I.V. remoto e as microondas.

As energias do espectro ainda mais baixas só afectam o conjunto global das moléculas conferindo-lhes uma orientação determinada pela direcção e sentido do campo eléctrico da radiação electromagnética.

Consideremos agora a penetração e propagação das ondas electromagnéticas, num meio material de dimensões muito grandes, em comparação com o comprimento de onda da radiação.

Tratando-se de um dieléctrico perfeito, ou seja, um isolante ( $\epsilon' = 0$ ), a onda ao encontrar o meio, é reflectida por este e refractada através dele sem dissipação de energia. Se o meio é um condutor perfeito ( $\epsilon' = 0$ ) a onda não pode penetrar senão até ao limite de uma fina camada de espessura  $\delta$ , chamada profundidade de penetração, cujo valor é

$$\delta = 1/\sqrt{\pi \nu \mu \sigma} \quad \text{V.140}$$

A potência dissipada por unidade de volume é

$$P = 1/2 \sigma |\vec{E}|^2 \quad \text{V.141}$$

Quando o meio tem dimensões da ordem do comprimento de onda da radiação, ou apresenta variações, geométricas ou estruturais ocorrendo em distâncias inferiores ou comparáveis a este, fenómenos como a difracção e a



dispersão poderão ocorrer.

O tecido biológico sujeito à radiação solar é submetido ao conjunto dos fenómenos mencionados.

No Quadro V.9, para diversos comprimentos de onda da radiação incidente, encontram-se a constante dielétrica relativa do meio  $\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}$  (em relação à constante do vázio  $\epsilon_0$ ), a sua condutividade  $\sigma$  em  $\text{mho.m}^{-1}$  e a profundidade de penetração da radiação  $\delta$  em m.

Os valores dentro de um rectângulo correspondem a tecido muito rico em  $\text{H}_2\text{O}$  (por exemplo, pele ou músculo) enquanto que, do outro lado da seta, se encontram os valores para tecidos pobres em água (por exemplo, osso ou gordura).

Quadro V.9 - Constante dielétrica relativa do meio  $\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}$  (em relação à constante do vázio  $\epsilon_0$ ), condutividade  $\sigma$  em  $\text{mho.m}^{-1}$  e profundidade de penetração da radiação  $\delta$  em m para diversos comprimentos de onda da radiação incidente.

	$\lambda$ (nm)	$\epsilon_r = \epsilon'/\epsilon_0$	$\sigma$ ( $\text{mho m}^{-1}$ )	$\delta$ (m)
Micro ondas	$3 \times 10^{10}$	<b>160</b> → 30	<b>0,06</b> → 0,02	<b>0,2</b> → 2
Micro ondass	$3 \times 10^8$	<b>50</b> → 6	<b>1,5</b> → 1	<b>0,03</b> → 2
Infraverm., visível.	$3 \times 10^5$	≈ 1	<b>alta</b>	Derme
Ultravioleta	300	≈ 1	alta	Epiderme

## Apêndices

### V.19.1 – Energética da emissão de partículas $\beta^-$ e da captura electrónica

A análise que fizemos para justificar, em termos energéticos a emissão de partículas  $\alpha$ , pode ser feita para a emissão ou captura de electrões. A condição energética que justifica a emissão de partículas  $\beta^-$  é

$$E_- = [m_{Z,A} - (m_{Z+1,A} + m_e)] c^2 > 0 \quad \text{V.142}$$

onde  $m_{Z,A}$  é a massa do núcleo  $X_Z^A$  e  $m_e$  a massa do electrão em repouso.

Somando e subtraindo  $Z \times m_e$  e desprezando a energia de ligação dos electrões periféricos vem

$$E_- = [M_{Z,A} - M_{Z+1,A}] c^2 > 0 \quad \text{V.143}$$

onde  $M_{Z,A}$  é a massa do átomo  $X_Z^A$ . Para ocorrer emissão de  $\beta^-$  basta que  $M_{Z,A} > M_{Z+1,A}$

Usando idêntico raciocínio para as condições energéticas da captura electrónica vem

$$E_c = [(m_{Z,A} + m_e) - m_{Z-1,A}] c^2 > 0$$

$$E_c = [m_{Z,A} + Z \times m_e - (m_{Z-1,A} + (Z-1) \times m_e + m_e) + m_e] c^2 > 0$$

$$\text{e} \quad E_c = [M_{Z,A} - M_{Z-1,A}] c^2 > 0 \quad \text{V.144}$$

Para ocorrer captura electrónica basta que  $M_{Z,A} > M_{Z-1,A}$   
 Para as condições energéticas da emissão das partículas  $\beta^+$ , vem

$$E_+ = [m_{Z,A} - (m_{Z-1,A} + m_e)] c^2 > 0$$

$$E_+ = [m_{Z,A} + Z \times m_e - (m_{Z-1,A} + Z \times m_e - m_e) - 2 \times m_e] c^2 > 0$$

$$\text{e} \quad E_+ = [M_{Z,A} - M_{Z-1,A} - 2 \times m_e] c^2 > 0 \quad \text{V.145}$$

Após uma emissão de  $\beta^+$  o átomo tem de perder um electrão, pois o seu  $Z$  diminui de uma unidade. Deste modo para ocorrer a emissão de  $\beta^+$  a massa atómica inicial tem de ser maior do que a massa do átomo resultante mais  $2 \times m_e$ , ou seja,  $M_{Z,A} > M_{Z-1,A} - 2 \times m_e$ . Notar que esta condição permite a ocorrência de captura electrónica que é mais exoenergética que a emissão de  $\beta^+$ .

### V.19.2 - Cálculo da dosimetria interna pelo método da fracção absorvida

Este método permite calcular a dose absorvida por um dado órgão (alvo) devida a irradiação proveniente de outros órgãos (fontes). Um mesmo órgão pode ser, simultaneamente, fonte e alvo, não sendo raro a actividade presente no órgão alvo constituir a sua maior fonte de irradiação.

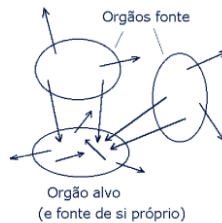


Fig.V.82 – Órgão alvo e órgãos fonte.

Os valores fornecidos por este método são estimativas de condições médias obtidas para a situação do homem padrão.

Torna-se necessário definir diversas grandezas e explicar alguns conceitos para a compreensão deste método e posterior determinação das doses absorvidas pelos órgãos, após administração de radiofármacos:

1. - Actividade acumulada (num órgão fonte),  $\tilde{A}$  - é o número total de desintegrações que ocorre durante o tempo em que se encontra actividade nesse órgão. Evidentemente

$$\tilde{A} = \int_0^{\infty} a(t)dt \quad \text{desint.} \quad \text{V.146}$$

com  $a(t)$  a actividade no órgão no instante  $t$ .

2. -  $\Delta_i$  - é a energia média emitida, por unidade de dose acumulada, por um órgão fonte, para a emissão  $i$  considerada.

Sendo  $N_i$  a frequência relativa de dada emissão (número de emissões por desintegração) com energia média  $E_i$  em MeV, então

$$\Delta_i = E_i \times N_i \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-13} \times 3600 = 5,76 \times 10^{-4} N_i E_i \quad \text{Kg J MBq}^{-1} \text{ h}^{-1}$$

$$\text{ou }^{12} \quad \Delta_i = 2,13 N_i E_i \quad \text{grad } \mu\text{Ci}^{-1} \text{ h}^{-1} \quad \text{V.147}$$

O produto da actividade acumulada  $\tilde{A}$  por  $\Delta_i$  é a energia total emitida devida à emissão  $i$ , durante o tempo em que a actividade esteve presente no órgão.

Já existem tabelas dos valores de  $\Delta_i$  para todos os radionuclídeos com interesse médico.

3. - Fracção absorvida  $\phi_i$  é a fracção da energia emitida pelo órgão fonte, correspondente a uma dada emissão, que é absorvida pelo órgão alvo.

A notação seguinte foi adoptada

$$\phi_i (r_k \leftarrow r_h)$$

significando fracção da energia, emitida pelo órgão ou região  $r_h$  (fonte), absorvida pelo órgão ou região  $r_k$  (alvo), para a emissão  $i$  do radionuclídeo.

Existem tabelas de valores de  $\phi$  para diferentes radionuclídeos e para pares de órgãos do homem padrão.

Chama-se fracção absorvida específica  $\Phi$  à fracção da energia

<sup>12</sup> - Para obter a Eq. V.147 fizemos uso das relações seguintes:  $1 \mu\text{Ci} = 3,7 \times 10^4 \text{ des s}^{-1}$ ;  $1 \text{ MeV} = 1,6 \times 10^{-6} \text{ erg}$ ;  $1 \text{ rad} = 100 \text{ erg g}^{-1}$ ;  $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ .

emitida pelo órgão fonte que é absorvida, em média, por grama do órgão alvo.

Supondo que a massa do órgão alvo  $\mathbf{k}$  é  $\mathbf{m}_k$ , então

$$\Phi_k (r_k \leftarrow r_h) = \frac{\phi (r_k \leftarrow r_h)}{m_k} \quad \text{V.148}$$

**4. - Energia total absorvida**

Para um dado par, órgão (ou região alvo)/órgão (ou região fonte), a energia total absorvida, considerando todas as emissões possíveis, é

$$E_T (\text{g rad}) = \tilde{A} \sum_i \phi_i (r_k \leftarrow r_h) \Delta_i \quad \text{V.149}$$

$\tilde{A}$  é a actividade acumulada no órgão fonte. O  $\Sigma$  contempla as possíveis diferentes emissões do radionuclídeo da fonte.

**5. - A dose média  $\mathbf{D}_k$  absorvida, por unidade de massa, pelo órgão alvo  $\mathbf{k}$  de massa  $\mathbf{m}_k$ , devido à irradiação proveniente do órgão fonte  $\mathbf{h}$ , é**

$$D_k (r_k \leftarrow r_h) = \frac{E_T}{m_k} = \frac{\tilde{A}}{m_k} \sum_i \phi_i (r_k \leftarrow r_h) \Delta_i$$

$$D_k (r_k \leftarrow r_h) = \tilde{A} \sum_i \frac{\phi_i (r_k \leftarrow r_h)}{m_k} \Delta_i$$

ou, entrando com a fracção absorvida específica

$$D_k (r_k \leftarrow r_h) = \tilde{A} \sum_i \Phi_i (r_k \leftarrow r_h) \Delta_i \quad \text{V.150}$$

com

$$\Phi_i = \phi_i/m_k$$

**6. - A dose total absorvida  $\mathbf{D}_t$  no órgão  $\mathbf{k}$ , é a soma das doses absorvidas produzidas em  $\mathbf{k}$  por todos os órgãos fonte, incluindo o próprio órgão  $\mathbf{k}$ , que é fonte de si próprio.**

$$D_t = D_k (r_k \leftarrow r_h) \quad \text{V.151}$$

**7. - Teorema da reciprocidade da dose**

Para um determinado par de órgãos a fracção absorvida específica é a mesma qualquer que seja o órgão fonte ou o órgão alvo. Então

$$\Phi_i (r_k \leftarrow r_h) = \Phi_i (r_h \leftarrow r_k) \quad \text{V.152}$$

Este teorema diz pois que a fracção da energia que é emitida por um dos órgãos e absorvida, em média, por unidade de massa, pelo outro, não depende de qual órgão se considera a emitir ou a receber.

O teorema da reciprocidade da dose é útil quando não se dispõe de tabelas para  $\phi$ , para todos os pares de órgãos. Se  $\phi_i (r_k \leftarrow r_h)$  é conhecida então também  $\phi_i (r_h \leftarrow r_k)$  se pode obter

$$\frac{\phi_i (r_k \leftarrow r_h)}{m_k} = \frac{\phi_i (r_h \leftarrow r_k)}{m_h}$$

donde

$$\phi_i (r_h \leftarrow r_k) = \frac{m_h}{m_k} \phi_i (r_k \leftarrow r_h) \quad \text{V.153}$$

**8. - Dose média por unidade de massa e de actividade acumulada,  $S_k$ .**

Face ao anteriormente exposto esta quantidade corresponde a

$$S_k (r_k \leftarrow r_h) = \frac{1}{m_k} \sum_i \phi_i (r_k \leftarrow r_h) \Delta_i$$

ou 
$$S_k (r_k \leftarrow r_h) = \tilde{A} \sum_i \Phi_i (r_k \leftarrow r_h) \Delta_i \quad \text{V.154}$$

A dose média por unidade de massa e de actividade acumulada tem como unidade o Gy Bq<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup> ou rad  $\mu$ Ci<sup>-1</sup>h<sup>-1</sup>.

Obtiveram-se os valores de  $S_k$  para diferentes pares de órgãos fonte-alvo e para vários radionuclídeos com interesse em medicina nuclear.

Conhecido o valor de  $S_k$  e sabendo-se o valor da actividade acu-

mulada  $\tilde{A}$ , a dose absorvida média no órgão é

$$D_k (r_k \leftarrow r_h) = \tilde{A} S_k (r_k \leftarrow r_h) \quad \text{V.155}$$

Esta expressão constitui a via mais cómoda e é a mais usada, para a utilização do método da fracção absorvida.

### V.19.3 – Datação com $C^{14}$

A constância na ocorrência dos isótopos dos elementos existentes na natureza é, em geral, verificada rigorosamente na prática. Há contudo, como veremos, uma excepção importante: o  $C^{14}$ .

O  $C^{14}$  tem um período de cerca de 5 500 anos e ocorre na natureza porque é constantemente produzido na atmosfera. Existe, em geral, um equilíbrio entre o  $C^{14}$  que desaparece por desintegração e aquele que é produzido devido à reacção natural entre neutrões cósmicos e o azoto das camadas superiores da atmosfera. A reacção é:



O  $C^{14}$  assim formado aparece na atmosfera na forma de  $C^{14}O_2$  contacta e equilibra com o C terrestre e é absorvido pelas plantas incorporando-se nas suas moléculas constituintes. As plantas são ingeridas pelos animais que posteriormente expiram o  $C^{14}$  na forma de  $CO_2$ . O isótopo  $C^{14}$  participa pois no ciclo universal do C que incorpora uma quantidade mínima (uma parte em  $10^{12}$ ) deste isótopo. Contudo nem todo o  $C^{14}$  incorporado em matérias orgânicas participa neste ciclo. O C que não está em contacto com a atmosfera não pode equilibrar com o  $C^{14}$  produzido pela irradiação cósmica e decai com a velocidade de desintegração característica do  $C^{14}$ . Acontece isso com o C do carvão de pedra, do petróleo dos depósitos calcários e de madeiras preservadas no subsolo, ou em locais não expostos a troca com o exterior. Em consequência o C fóssil tem menor actividade em  $C^{14}$  do que o carbono das plantas frescas ou dos animais. Conhecendo-se a curva de decaimento do  $C^{14}$  é possível calcular-se o intervalo de tempo em que o  $C^{14}$  de determinado objecto orgânico está a

---

desintegrar-se sem trocar com a atmosfera, ou seja, por quantos anos ele esteve fora do ciclo do carbono, enterrado ou isolado do contacto com o  $\text{CO}_2$  do ar o que, em muitos casos, significa que é possível conhecer-se a sua idade aproximada. Esta é a base da determinação da idade de matérias orgânicas que Libby descobriu em 1955 (datação de carbono).

A principal dificuldade do método reside no facto da actividade do  $\text{C}^{14}$  na natureza ser muito baixa, mesmo quando em equilíbrio com a atmosfera (13,5 des./min/grama para o  $\text{C}^{14}$  contemporâneo). A actividade do C antigo é obviamente ainda menor. Para cada intervalo de tempo igual a uma período do  $\text{C}^{14}$  ( $5\,568 \pm 30$  anos) há uma redução de 50% no número de contagens e, por consequência, é necessário contar amostras grandes e reduzir a radiação de fundo ao mínimo (com contadores próprios para o efeito) para se obterem contagens estatisticamente significativas. O método apesar de se tornar pouco rigoroso para amostras com idades acima dos 40 000 anos tem grande aplicação em arqueologia.

Uma aplicação recente do  $\text{C}^{14}$  é a detecção da poluição devido a detritos da indústria química na água dos rios. A vasta maioria dos produtos da indústria química provêm do petróleo e do carvão. Se o C da matéria orgânica contida numa amostra de água de um rio for contado e se obtiverem valores inferiores a 13,5 des./min/grama então haverá poluição química por detritos orgânicos provenientes do petróleo ou do carvão, pobres em  $\text{C}^{14}$ .



---

**C A P Í T U L O • V I**



**BIOENERGÉTICA**

---

(Página deixada propositadamente em branco)

---

## VI.1 - Introdução

A bioenergética é a aplicação da termodinâmica (ou energética) aos seres vivos. Estuda as diferentes formas de energia nos sistemas biológicos, assim como os aspectos quantitativos das suas trocas e transformações.

A energia está presente em todas as funções biológicas. Também o trabalho mecânico realizado no decurso de qualquer processo biológico resulta de transformações de energia. Assim, a vida, as suas manifestações e manutenção, estão associadas a constantes trocas de energia. Numa certa perspectiva, estrutura e energia constituem uma síntese da vida.

Todas as formas de energia tendem a transformar-se em energia calorífica. Esta está presente em todas as transformações energéticas.

Embora seja sempre possível converter as outras formas de energia em energia calorífica, nem sempre é viável transformar-se calor em trabalho mecânico. Por outro lado, não é realizável uma transformação integral das outras formas de energia em trabalho mecânico, visto ocorrer dissipação de energia calorífica. Esta afirmação é equivalente a dizer-se que qualquer transformação energética é acompanhada de perda de energia utilizável.

A eficiência do processo de conversão da energia em trabalho e, de um modo geral, as próprias transformações de energia entre as suas diferentes formas, são importantes no ponto de vista físico. Por outro lado, os fenómenos físico-químicos têm sempre a intervenção de forças e estas resultam de gradientes de formas de energia potencial.

## VI.2 - Sistemas termodinâmicos

De um modo geral, em energética, refere-se um sistema como uma quantidade de matéria bem determinada, que se pretende estudar em separado. Uma mole de um gás, um órgão ou um organismo, poderão ser o sistema, num dado contexto. O exterior, em relação a um sistema termodinâmico, é o resto do universo.

Numa transformação em que o volume do sistema sofre variação, há realização de trabalho. O trabalho é realizado pelas forças de pressão, caso da expansão, ou contra estas, caso da compressão.

Em muitos dos processos da termodinâmica ocorrem trocas de massa, de calor e de trabalho mecânico, entre os sistemas e o exterior. Justifica-se assim uma classificação destes sistemas, de acordo com as suas

---

possibilidades de troca com o meio exterior.

Num sistema isolado não ocorrem trocas de trabalho, calor e massa com o meio exterior.

Num sistema aberto poderão ocorrer trocas de trabalho, calor e massa com o meio exterior.

Num sistema fechado não poderão ocorrer trocas de massa com o meio exterior.

Num sistema adiabático não ocorrem trocas de calor com o meio exterior.

O quadro VI.1 mostra esquematicamente estas propriedades.

**Quadro VI.1** – Classificação dos sistemas termodinâmicos.  $n_x$  é a soma do número de moles,  $n_1, n_2, \dots$  dos componentes químicos trocados, enquanto que  $Q$  e  $W$  são respectivamente o calor e o trabalho envolvidos no processo.

Sistemas isolados	$Q = 0$	$W = 0$	$n_x = 0$
Sistemas abertos	$Q \neq 0$	$W \neq 0$	$n_x \neq 0$
Sistemas fechados	$Q \neq 0$	$W \neq 0$	$n_x = 0$
Sistemas adiabáticos	$Q = 0$	$W \neq 0$	$n_x \neq 0$

Os sistemas biológicos, em particular, são sistemas abertos.

Os parâmetros que caracterizam um sistema isolado são independentes do tempo. Num sistema aberto estes parâmetros variam, em geral, com o tempo.

Os sistemas reais podem ainda encontrar-se em três situações distintas: estado de equilíbrio, estado estacionário e estado de transformação.

Os sistemas em estado estacionário são independentes do tempo, pelo menos em intervalos que permitam o seu estudo. Os sistemas biológicos, em geral, encontram-se na situação estacionária.

### VI.3 - 1ª Lei de Termodinâmica

A **primeira lei de termodinâmica** traduz o princípio da conservação da energia. Não é possível criar ou destruir energia. Só é possível transformar-se uma forma de energia noutra, ou noutras, das suas diversas formas.

Esta lei não é contrariada pelas enormes quantidades de energia aparentemente criadas na fissão nuclear, pois a massa é, também, uma forma de

energia. Assim, na fissão nuclear, massa do núcleo é transformada noutras formas de energia.

A primeira lei de termodinâmica implica a constância de energia no nosso universo.

Em termodinâmica química e, de um modo geral, as energias potencial de posição e cinética macroscópica não têm particular interesse. A energia que um sistema possui devida à pressão, temperatura e volume a que se encontra, bem como à estrutura molecular que apresenta, é aquela que interessa à termodinâmica química. Esta energia chama-se **energia interna do sistema**. Podemos materializar mais esta noção, considerando as diversas formas em que a energia interna se pode apresentar.

Como sabemos, há razões para se aceitar que, em todos os estados da matéria, as moléculas e os átomos se encontram animadas de movimento com uma energia cinética média determinada pela temperatura e crescente com esta. Chama-se agitação térmica a este movimento aleatório das moléculas ou átomos.

Por outro lado, quando os átomos ou as moléculas se encontram a pequena distância, como sucede nos sólidos e líquidos, exercem entre si atracções e repulsões, conferindo energia potencial a estas partículas.

No movimento desordenado das moléculas processa-se assim uma constante transformação de energia potencial em energia cinética. Contudo, a soma das energias potencial e cinética, de todas as moléculas que constituem um corpo, é constante a uma dada temperatura e caso não ocorram mudanças de estado.

Avaliar a energia total associada a um conjunto de moléculas é muito mais complexo do que para conjuntos de átomos independentes. No caso das moléculas há a considerar as seguintes formas de energia especificamente ligadas às moléculas:

- a) energia potencial devida às ligações entre os átomos (eV)
- b) energia cinética de translação
- c) energia cinética devida à vibração dos núcleos em relação ao centro de massa (eV/10)
- d) energia cinética devida aos movimentos de rotação do total ou de parte das moléculas (eV/100)

Dentro de parêntesis estão indicadas as ordens de grandeza das respectivas energias em electrões-Volt (eV).

Rotações e vibrações contribuem assim com energia cinética para o estado energético das moléculas. A energia de rotação é, contudo, muito

menor do que a energia de vibração.

A capacidade calorífica de um corpo, ou seja, o calor absorvido para o aumento da temperatura do corpo de 1 °C é determinada, em grande parte, por estes movimentos moleculares.

Em geral, não é possível medir a quantidade de energia interna de um sistema em termos absolutos. Na verdade, o que interessa são as variações de energia interna que acompanham mudanças de temperatura, pressão, volume ou composição química, ou seja, variações na própria situação do sistema.

Estas variações de energia tomam lugar quando um sistema produz ou recebe trabalho e quando absorve ou perde calor. Vamos convencionar que o trabalho **W** é positivo se o sistema executa trabalho sobre o exterior e negativo se o sistema recebe trabalho do exterior.

Um valor positivo para a variação da quantidade de calor **Q** significa que o sistema recebe ou absorve calor do exterior. Um valor negativo de **Q** significa que o sistema cede calor ao meio exterior. Por exemplo,  $Q = -5$  cal, significa que o sistema cedeu 5 calorias ao exterior.

As propriedades, fronteiras e meio exterior de um sistema, quando bem definidas, caracterizam um estado do sistema.

Um sistema termodinâmico em equilíbrio é desprovido de memória. Não interessam nem o modo como foi atingido o equilíbrio, nem os estados anteriores por que passou. As propriedades termodinâmicas do equilíbrio são designadas de variáveis de estado.

Podemos aplicar a 1ª lei da Termodinâmica às trocas de energia num sistema, quando ocorrem transições entre estados de equilíbrio. Consideremos um sistema no estado inicial **I**, possuindo energia interna **E<sub>1</sub>**, que recebeu calor **Q** do exterior e produziu trabalho **W** sobre o exterior, passando para um estado final **II**, no qual possui a energia interna **E<sub>2</sub>**.

Visto a energia não poder ser criada nem destruída, a energia interna no estado **II** é igual à energia interna, no estado inicial, somada do calor adicionado ao sistema e subtraída do trabalho produzido por este. Então,

$$E_2 = E_1 + Q - W$$

ou, fazendo

$$\Delta E = E_2 - E_1$$

vem

$$\Delta E = Q - W$$

---

O símbolo  $\Delta$ , em termodinâmica, significa variação finita e positiva. (No caso da energia interna, se  $E_2 < E_1$ , deve escrever-se  $-\Delta E = E_2 - E_1$ ).

Os valores da energia interna  $E$  do sistema são determinados unicamente pelas características dos respectivos estados, sendo assim independentes dos passos ocorridos na passagem do sistema do estado **I** ao estado **II**. Pelo contrário, os valores individuais de  $Q$  e  $W$  são determinados pelos passos seguidos, variando geralmente com as condições específicas correspondentes às respectivas trocas de trabalho e calor. Mas, aprofundemos esta noção um pouco mais.

Em termodinâmica, um sistema num estado bem definido  $i$  é caracterizado pelos valores específicos das suas variáveis de estado, ou sejam, a sua composição  $n_x$ , o seu volume  $V_i$ , a sua pressão  $P_i$ , a temperatura  $T_i$ , e, eventualmente, por forças de campos externos impostos (gravitacional, eléctrico, magnético). Verifica-se que estas variáveis são de dois tipos distintos:

**Intensivas** - aquelas que mantêm o mesmo valor em qualquer ponto de uma fase homogénea, tais como a temperatura, a massa específica e a pressão. São independentes das dimensões do sistema. Não são aditivas.

**Extensivas** - aquelas que são proporcionais à massa existente na fase, tais como o volume, as várias formas de energia e a entropia, de que falaremos mais tarde. São propriedades aditivas e a sua determinação requer a avaliação da totalidade do sistema.

Para as diversas formas de energia num sistema termodinâmico podemos considerar de imediato duas variáveis, uma intensiva e outra extensiva, que reflecte a propriedade capacitiva. No caso da energia calorífica o factor intensivo é a temperatura e o capacitivo a capacidade calorífica. No caso da energia eléctrica estes factores são o potencial eléctrico e a capacidade eléctrica.

Sempre que ocorrem variações numa ou em várias variáveis de estado diz-se que o sistema sofreu uma transformação. Em muitas transformações, uma ou algumas das variáveis de estado mantêm-se constantes. Por exemplo, os processos biológicos ocorrem em condições praticamente isobáricas, ou seja, a pressão constante e igual à pressão atmosférica e em condições isotérmicas, ou seja a temperatura constante. Adicionalmente, reacções bio-

---

lógicas em fase condensada, ocorrendo por exemplo entre solutos de uma solução ou líquido biológico, são isocóricas, ou seja, a volume constante. Nas transformações adiabáticas não há trocas de calor entre o sistema e o exterior. Numa transformação cíclica o estado final e o inicial são iguais.

Uma função das variáveis de estado é chamada de função de estado se os seus valores dependem unicamente dos valores das variáveis de estado do sistema e não dependem da história do sistema, ou seja, do modo como o estado em causa foi atingido. As funções de estado também são chamadas de variáveis termodinâmicas intrínsecas.

Assim, se  $F = F(V, P, T, n_i)$  é uma função de estado e considerando a sua passagem do estado **1** ao estado **2** como uma sequência de variações infinitesimais  $dF$ , podemos dizer que

$$\Delta F = \int_1^2 dF = F(V_2, P_2, T_2, n_i) - F(V_1, P_1, T_1, n_i) = F_2 - F_1 \quad \text{VI.2}$$

$\Delta F$  só depende dos limites de integração, não dependendo dos valores das variáveis entre estes pontos.

Lembrando o que dissemos, a energia interna é uma variável de estado.

Analisemos algumas consequências da primeira lei da Termodinâmica.

No caso de um gás monoatômico pode demonstrar-se que a energia transaccional média, por mole, é igual a  $3/2$  KT. Neste caso, segundo qualquer das direcções de um sistema de três eixos a energia cinética média é  $1/2$  KT. Para um gás constituído por moléculas com  $n$  átomos a energia cinética média por mole é igual a  $3n/2$  KT.

Num gás ideal, visto não existirem forças de coesão entre as moléculas, a energia interna é a soma das energias cinéticas de todas as moléculas.

Referindo-nos ainda a gases ideais, uma relação que resulta de imediato das propriedades destes gases é a de que a energia interna de determinada quantidade de gás ideal, a temperatura constante, é independente do seu volume. Se não ocorre variação de temperatura na massa de gás,  $\Delta E = 0$ .

Se tal massa de gás produz trabalho numa expansão isotérmica, ela terá de absorver calor. Deste modo, o trabalho executado pelo gás iguala o calor absorvido, pois que, pela Eq.VI.1, como  $\Delta E = 0$  terá que ser  $W = Q$ . Então, para uma variação de volume em condições isotérmicas num gás



ideal é sempre  $W = Q$ .

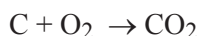
Se cedermos calor a volume constante a um gás ideal, de tal modo que não seja executado nenhum trabalho de expansão, então  $W = 0$  e, consequentemente e de novo pela Eq.VI.1, o aumento da energia interna do gás é igual ao calor absorvido:

$$\Delta E = Q_V \quad \text{VI.3}$$

O índice  $V$  indica que o volume se manteve constante.

Se durante a compressão de um gás se mantiver este perfeitamente isolado, de modo a não ser cedido calor ao exterior ( $Q = 0$ ), o aumento da energia interna do gás é igual ao trabalho de compressão executado sobre ele e  $\Delta E = -W_o$ . O índice  $o$  recorda que não há trocas de calor com o exterior durante o processo a que se chama, como vimos, de adiabático.

Algumas das conclusões a que chegámos para os gases ideais são também válidas para as variações de  $E$ ,  $Q$  e  $W$ , em reacções químicas. Em particular a equação  $\Delta E = Q_V$ , contando que não seja realizado qualquer trabalho. Quando uma reacção ocorre a volume constante, o calor posto em jogo deve, portanto, ser igual à variação da energia interna. Por exemplo, a combustão do carbono a 25 °C é dada pela reacção química



Para esta reacção, o calor da combustão a 25 °C e a volume constante é de 94030 calorias. A correspondente variação da energia interna é  $\Delta E = Q_V = -94030$  cal (o sinal - indica que o calor é libertado durante a reacção). A partir destes dados concluímos que a energia interna a 25 °C de 44 g de  $CO_2$  é menor 94030 cal do que a soma das energias internas de 12 g de C e 32 g de  $O_2$  à mesma temperatura.

#### VI.4 - Processo reversível

Muitas das conclusões a que chegámos são baseadas na suposição de se tratar de processos, ou transformações, reversíveis. Um processo ou transformação diz-se reversível quando todos os seus estados intermediários são

---

estados de equilíbrio. Um sistema em equilíbrio não tem, por si só, capacidade de transformação, devendo manter-se indefinidamente nesse estado. Para entendermos o que significa um processo ser reversível, imaginemos um gás num cilindro com um êmbolo, sem peso e sem atrito e sobre o qual se colocou uma certa quantidade de areia muito fina, cujo peso faz comprimir o gás. No início da experiência, o êmbolo encontra-se imóvel, indicando que existe equilíbrio entre a pressão no gás e a soma da pressão atmosférica com a pressão devida à acção da areia. Tiremos um grão de areia que se encontra sobre o êmbolo. O gás sofrerá uma expansão muito pequena mas o equilíbrio é restabelecido quase imediatamente. O sistema não se afasta praticamente do equilíbrio durante o processo de expansão. Tal variação aproxima-se bastante de uma variação infinitesimal. Se o grão de areia é colocado de novo sobre o êmbolo, o gás retomará o seu volume original - o processo é, portanto, reversível. Se prosseguirmos com a remoção da areia, grão a grão, após um certo número de remoções, o gás terá sofrido uma expansão finita. Cada passo da expansão foi um passo infinitesimal que pode ser invertido por uma variação infinitesimal nas condições externas. Em qualquer instante o sistema está, quanto muito, infinitesimalmente fora do equilíbrio. Um processo conduzido deste modo é um processo reversível.

Um processo reversível ideal não é realizável na prática, mas uma transformação realizada com muita lentidão e de tal modo que, em qualquer instante, o seu sentido possa ser invertido, se as forças motoras se inverterm, aproxima-se da reversibilidade. Os fenómenos dissipativos são sempre causa de irreversibilidade.

### VI.5 - Trabalho máximo num processo isotérmico

734 A experiência veio mostrar que só se pode extrair o máximo de trabalho num processo, quando este se realiza reversivelmente. Este trabalho máximo disponível é também o trabalho mínimo necessário para fazer voltar o sistema às condições iniciais.

É evidente que para se fazer voltar o sistema às condições iniciais, com o trabalho mínimo, é também necessário que este processo seja conduzido reversivelmente. O princípio da conservação da energia está respeitado no que acabámos de dizer. Se fosse possível levar o sistema e o exterior às condições iniciais com menos energia do que a inicialmente necessária

---

para a transformação inversa, teríamos a criação de energia.

É universalmente verdadeiro que só se consegue obter o trabalho máximo de qualquer processo quando este é levado a cabo reversivelmente.

Consideremos, por exemplo, o trabalho máximo que será possível extrair quando se tem a expansão isotérmica de  $n$  moles de gás ideal. Seja o estado inicial do gás representado por  $T$ ,  $P$  e  $V$ .

Mantendo a temperatura constante, façamos diminuir a pressão de uma quantidade infinitesimal  $dP$ , de tal modo que o volume aumente de uma quantidade infinitesimal  $dV$ . A quantidade infinitesimal de trabalho realizado pelas forças de pressão, considerando  $(P - \frac{dP}{2})$  o valor médio da pressão durante a variação de volume, é

$$dW = (P - \frac{dP}{2}) dV = P dV - \frac{dV}{2} dP = P dV \quad \text{VI.4}$$

(Na segunda parcela do penúltimo membro da igualdade, o produto das duas quantidades infinitesimais é desprezável, vindo  $dW = P dV$ , o que mostra que no domínio do infinitesimal podemos considerar a pressão  $P$  como constante durante a variação infinitesimal de volume.)

A Eq. VI.4 mostra que a quantidade infinitesimal de trabalho envolvida na transformação é  $PdV$  e, como o processo é reversível, esta é também a quantidade máxima de trabalho que se pode obter no processo, ou seja,  $dW_{\text{ma}} = PdV$ .

Para um gás ideal é  $PV = nRT$ , ou seja, substituindo  $P$ , vem:

$$dW_{\text{ma}} = nRT \frac{dV}{V} \quad \text{VI.5}$$

O trabalho efectuado durante uma variação da pressão, finita e reversível, pode considerar-se como a soma de uma grande quantidade de variações infinitesimais entre as pressões inicial e final. Executando essa soma de modo que, a temperatura constante, as condições iniciais do gás  $P_1$  e  $V_1$  passem a  $P_2$  e  $V_2$ , temos

$$W_{\text{max}} = nRT \int_{V_1}^{V_2} f(V) dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

ou,

$$W_{\max} = n R T 2,303 \log \frac{V_2}{V_1} = - 2,303 n R T \log \frac{P_2}{P_1} \quad \text{VI.6}$$

Esta equação, que foi obtida procedendo a uma integração, traduz o trabalho máximo que é possível obter-se da expansão isotérmica de  $n$  moles de um gás ideal entre uma pressão inicial  $P_1$  e outra final  $P_2$ .

Visto ser  $\Delta E = 0$ , este trabalho é exactamente a quantidade de calor absorvida ao exterior para manter a temperatura constante. Nesta expressão de  $W_{\max}$ , se fizermos  $P_2 < P_1$  é  $W_{\max} > 0$ , ou seja, trata-se de uma expansão e o gás produz trabalho sobre o exterior. Se  $P_2 > P_1$  é  $W_{\max} < 0$ , ou seja, foi exercido trabalho sobre o gás produzindo compressão.

Uma reacção química que envolva um aumento de volume e ocorrendo a pressão constante (como é o caso de reacções em recipientes abertos e das reacções biológicas) implica necessariamente a realização de trabalho contra a pressão atmosférica. As reacções biológicas ocorrem também, geralmente, a pressão constante.

Se num sistema à pressão atmosférica, ocorre uma reacção com aumento de volume, então uma parte de variação da energia intrínseca foi usada para executar trabalho contra a pressão atmosférica. Deste modo, só parte da energia libertada aparecerá sob a forma de calor de reacção. É conveniente, nestas situações, fazer uso de uma outra grandeza, a entalpia  $H$  ou conteúdo em calor, que se relaciona com a energia interna  $E$  pela expressão

$$H = E + P V \quad \text{VI.7}$$

onde  $P$  é a pressão de valor constante e  $V$  o volume do sistema. A entalpia e a energia interna diferem, assim do produto  $PV$ .

A entalpia, assim como a energia interna de um sistema têm valores bem definidos para cada estado do sistema - são funções de estado. Pode facilmente estabelecer-se a relação entre as variações em  $E$  e  $H$  em certas reacções. Se  $V_1$  e  $V_2$  são os valores dos volumes inicial e final respectivamente vem, numa reacção a pressão constante

$$W = P V_2 - P V_1 = P \Delta V \quad \text{VI.8}$$

ou seja, o valor do trabalho realizado para o sistema passar do estado inicial ao final. Esta relação não oferece dúvidas pois, para  $P$  constante,

$$W = \sum P dV = P \Delta V \quad \text{VI.9}$$

---

Sendo assim, a variação da energia interna é

$$\Delta E = Q_P - P \Delta V \quad \text{e} \quad Q_P = \Delta E + P \Delta V \quad \text{VI.10}$$

Consideremos a variação da entalpia pressão constante a partir da sua equação de definição (Eq.VI.7)

$$\Delta H = \Delta E + P \Delta V \quad \text{VI.11}$$

expressão que é igual à interior, ou seja,

$$Q_P = \Delta H \quad \text{VI.12}$$

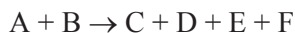
ou seja, a pressão constante a variação da entalpia é igual ao calor absorvido na reacção.

Os valores da  $\Delta H$  podem ser obtidos calorimetricamente.

No caso de uma reacção exotérmica, a pressão constante, em que há libertação de calor, a entalpia dos produtos de reacção é menor do que a entalpia dos reagentes. O valor de  $\Delta H$ , diferença entre a entalpia dos produtos e a entalpia dos reagentes é, assim, menor do que zero. No caso de uma reacção endotérmica o valor de  $\Delta H$  é positivo.

Nas determinações calorimétricas é, em geral, mais cómodo fazer determinações a volume constante (por exemplo, na bomba calorimétrica). Já vimos que a volume constante, os calores da reacção medidos são iguais às variações de energia interna. Estas variações podem ser convertidas em valores de  $H$ .

Suponhamos uma reacção entre componentes gasosos representada por



significando que à temperatura  $T$  ocorre um aumento do número de moléculas gasosas de 2 para 4. Como para  $PV = nRT$  onde  $n$  é o número de moles, o trabalho realizado devido ao aumento de volume é a pressão constante

$$P \Delta V = \Delta n RT$$


---

---

No caso da reacção acima,  $\Delta n = 4 - 2 = 2$ , ou seja,  $P \Delta V = 2 RT$ . Portanto,

$$\begin{aligned} H &= \Delta E + P \Delta V \\ &= \Delta E + 2 RT \end{aligned}$$

Quando nas reacções aparecem sólidos ou líquidos e se pretende calcular variações de volume a partir do número de moles, desprezam-se aqueles, quando em comparação com os gases. Deste modo, se no exemplo anterior **A** for sólido, **B** e **C** líquido e **D**, **E** e **F** gases,  $\Delta n$  será **3** e o trabalho realizado devido ao aumento de volume  $3 RT$ .

## VI.6 - 2ª Lei da Termodinâmica

Lorde Kelvin enunciou esta lei como se segue:

É impossível retirar calor de um sistema e convertê-lo em trabalho sem que simultaneamente outras mudanças não ocorram no sistema.

Uma forma equivalente de anunciar esta lei deve-se a Lewis:

Todo o processo que ocorre espontaneamente é capaz de produzir trabalho. Para impedir tal processo é necessário distender trabalho do exterior.

A 2ª lei da Termodinâmica desempenha um papel importante no estudo da probabilidade de ocorrência de reacções químicas, ou seja, na chamada afinidade dessas reacções. No século passado, os estudos de Termodinâmica foram orientados na suposição de que o calor de uma reacção era uma medida da afinidade dessa reacção. Esta ideia tornou-se insustentável com a descoberta de reacções endotérmicas que podiam iniciar-se e prosseguir por si, exibindo portanto afinidade, embora absorvessem calor durante a reacção.

Quando, todavia se focou a atenção no trabalho que uma reacção era capaz de executar, em vez do calor que podia produzir, tal dificuldade deixou de existir.

A capacidade de uma dada reacção produzir trabalho, embora seja facilmente evidenciada em situações especiais, tal como o caso da oxidação dos hidrocarbonetos num motor de combustão, tal não acontece na maioria das reacções que ocorrem no Laboratório. A segunda lei da Termodinâmica esclarece aliás o que anteriormente se disse: se uma reacção não pode produzir trabalho não pode ocorrer espontaneamente, ou seja, não prosseguirá por

---

---

si, não exibindo portanto qualquer afinidade química. Não se encontram pois, valores negativos para o trabalho produzido numa reacção espontânea, em contraste com os valores negativos que se encontram para o calor libertado.

A probabilidade que uma reacção tem de prosseguir espontaneamente até atingir o equilíbrio está pois relacionada com a energia que é susceptível de transformar-se em trabalho quando a reacção ocorre reversivelmente (ou seja, o trabalho máximo).

Um outro conceito que surge a partir da 2ª Lei da Termodinâmica é o de entropia que geralmente se designa por  $S$ .

A entropia é uma função de estado cujo significado se pode entender mais facilmente através das alterações que ocorrem nos sistemas quando a entropia varia.

Se a uma temperatura fixa  $T$ , um sistema absorve reversivelmente uma quantidade de calor  $Q$ , a entropia do sistema aumenta de  $Q/T$ .

Se a transferência de calor de um sistema para o outro for reversível, ou seja, se uma quantidade de calor passar de um sistema para o outro, havendo entre eles uma diferença infinitesimal de temperatura, a perda de entropia do 1º sistema será igual ao ganho de entropia do segundo. A variação total de entropia,  $\Delta S = 0$ . Nos casos reais, nas trocas finitas de calor, haverá diferença de temperatura entre os sistemas e o processo não será reversível. Por estas razões as variações de entropia nos dois sistemas são diferentes, maior no sistema com o menor valor de  $T$ . No caso de um sistema a temperatura mais elevada que o exterior o valor de  $Q/T$  após uma transferência de calor é maior para o exterior do que para o sistema. Há portanto um aumento da entropia  $S$ , o valor de  $\Delta S > 0$ . Os fenómenos vitais ocorrem com aumento de entropia. Quando calor passa de um sistema a temperatura mais elevada para outro a menor temperatura, espontaneamente, como consequência do nivelamento da temperatura há o desaparecimento de um arranjo ordenado. Assim, quando ocorre transferência de calor entre dois gases há tendência para as moléculas com maior energia cinética média, se misturarem com as moléculas que se deslocam com menor energia cinética média. O processo termina quando as temperaturas se igualarem, ou seja, quando deixar de existir a distinção entre duas populações de moléculas uma com maior energia cinética que a outra. As moléculas ficam mais distribuídas ao acaso, aumentou a desordem no conjunto das moléculas. É um fenómeno geral na natureza que as mudanças que ocorrem espontaneamente produzem aumento da desordem e isso trás paralelamente um aumento da entropia  $S$ .

---

---

Informação e entropia são quantidades intimamente relacionadas. Os sistemas ordenados contêm muita informação. Muitas vezes a informação pode ser calculada ou o seu conteúdo quantificado, e expresso em unidades de informação (bits). A entropia, por sua vez, é uma medida da desordem dos sistemas.

Uma outra maneira de encarar  $S$  é observar a energia interior como sendo produzida pelas energias das ligações químicas, que é libertada como energia livre nas reacções, juntamente com a energia de vibração e rotação de átomos e moléculas. As moléculas, em particular as mais complicadas estruturalmente, têm elevada capacidade de absorver esta energia estatística de vibração e rotação, possuindo uma elevada entropia. Os organismos não destroem nem consomem energia: só a transformam de uma forma noutra ou noutras formas. A partir do ambiente, os organismos absorvem energia numa forma útil e lançam para o ambiente uma quantidade de energia equivalente agora numa forma menos útil em termos biológicos. A energia útil ou energia livre, pode definir-se como a energia capaz de produzir trabalho sob condições isotérmicas (condições onde não existam gradientes de temperatura). A energia livre está associada a qualquer reacção química. Energia menos útil do que a energia livre é devolvida ao exterior, em geral, na forma de calor. O calor não pode executar trabalho nos sistemas biológicos porque todas as partes de um sistema biológico estão, essencialmente à mesma temperatura e pressão.

A energia livre  $G$  é mais uma função de estado da termodinâmica, cuja definição pode ser obtida a partir da sua variação  $\Delta G$ . Num sistema fechado a variação de energia livre é igual à energia interna utilizável, ou melhor, não dissipada na forma de calor. Numa reacção a temperatura e pressão constantes  $\Delta G$  é Equivalente ao trabalho máximo  $W_{\max}$  realizável.

A identificação feita acima de calor com energia interna libertada não utilizável é, evidentemente, desprovida de generalidade. Por exemplo, nos processos metabólicos, cerca de 50% da energia interna posta em jogo não aparece na forma de energia livre, mas na forma de calor que é utilizado na regulação térmica e na activação das reacções biológicas possibilitando que estas prossigam com velocidade de reacção óptima. Deste modo, energia térmica é transformada em energia de activação.

A reacção entre energia livre, entropia e entalpia é:

$$G = H - T S$$



O termo **TS** descreve a energia do sistema não disponível para conversão em trabalho.

Se uma transformação ocorre num sistema e a temperatura se mantém constante, a variação da energia livre é,

$$\Delta G = \Delta H - T \Delta S \quad \text{VI.14}$$

visto **G** ser uma função de estado  $\Delta G$  é independente dos passos da reacção, ocorrendo entre os estados inicial e final.

Sendo **G** uma medida da capacidade de um sistema produzir trabalho, permite saber se uma dada reacção pode ocorrer espontaneamente ou não. Só poderão ocorrer reacções espontâneas com diminuição da energia livre ou seja  $\Delta G < 0$  - são as chamadas **reacções exergónicas**. Se houver aumento da energia livre, então é porque foi cedido trabalho ao sistema para a reacção se produzir.  $\Delta G > 0$  - são as **reacções endergónicas**.

Assim, se a variação de energia livre numa reacção é - 9000 cal, a reacção pode ocorrer espontaneamente, havendo um decréscimo em **G** de 9000 cal. Este valor, mesmo sendo elevado, não significa que uma dada reacção se processa com velocidade mensurável. Realmente **G** mede unicamente a diferença entre as energias livres dos estados inicial e final de uma reacção, sem dar indicações sobre a velocidade de reacção. Para tornar mensurável a velocidade de reacção poderá ser necessário adicionar, por exemplo, um catalisador.

A variação da energia livre de uma reacção reversível está relacionada com a constante de equilíbrio da reacção pela equação

$$\Delta G^\circ = - RT \ln K \quad \text{VI.15}$$

onde **R** é a constante dos gases,  $\Delta G^\circ$  é a variação padrão de energia livre e **K** é a constante de equilíbrio.

$\Delta G^\circ$  é a variação da energia livre numa reacção, quando todos os reagentes e produtos de reacção se encontram no estado padrão. Este estado padrão é uma condição de referência que se torna necessária e na qual as actividades são arbitrariamente definidas como unitárias para sólidos ou líquidos puros, gases a 1 atmosfera e compostos na concentração 1M, à temperatura de 25 °C. Portanto  $\Delta G^\circ$  é uma constante para uma dada reacção.

Os valores de  $\Delta G^\circ$  são aditivos, quer dizer conhecendo  $\Delta G^\circ$  para duas reacções, o valor para uma terceira reacção, soma das outras duas, pode obter-se por simples adição algébrica de modo semelhante ao do cálculo dos valores de reacção. A energia livre padrão não deve confundir-se com a energia livre de uma reacção  $\Delta G$ . Quando se tem



a variação  $\Delta G$  é

$$\Delta G = \Delta G^\circ + RT \ln \frac{[C][D]}{[A][B]} \quad \text{VI.16}$$

onde  $[A]$  e  $[B]$  são as concentrações iniciais dos reagentes e  $[B]$  e  $[C]$  as concentrações finais dos produtos de reacção. É o valor  $\Delta G$  e não  $\Delta G^\circ$  que permite saber se uma dada reacção ocorrerá ou não espontaneamente. Existem tabelas de  $\Delta G^\circ$  para numerosas reacções com interesse em bioquímica.  $\Delta G^\circ$  é uma quantidade bem definida para uma dada reacção, enquanto que  $\Delta G$  depende dos valores das diferentes concentrações utilizadas.

Contrariamente a  $\Delta G$ , a variação de entalpia  $\Delta H$  é praticamente independente do estado ou concentração dos reagentes. Então, o valor  $\Delta H^\circ$  (que se define para as mesmas condições em que definimos  $\Delta G^\circ$ ) caracteriza uma reacção, ou seja,  $\Delta H \sim \Delta H^\circ$ .

Uma menção especial deve ser feita aos valores da concentração da água quando pretendemos calcular a variação da energia livre padrão a partir dos dados referentes ao equilíbrio. Como líquido puro, a sua actividade no estado padrão deve ser tomada como unitária mas a concentração molar é  $100 : 18 = 55,55$  em soluções aquosas diluídas. Temos pois que aplicar à água as regras usadas na definição do  $\Delta G^\circ$ , caso contrário haverá diferenças apreciáveis em relação ao valor concreto de  $\Delta G^\circ$ .

Para se calcularem as constantes de equilíbrio, a actividade da água pura ou em soluções diluídas é tomada como unitária.

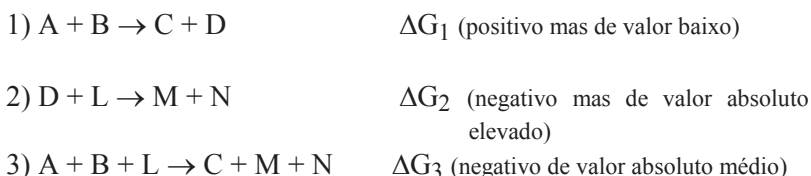
Quando um sistema reversível está em equilíbrio, a variação da energia livre  $\Delta G = 0$  é, portanto

$$\Delta H = T \Delta S$$

A entropia do sistema e exterior estão no máximo valor. O sistema está no seu estado mais provável.

Por vezes, uma reacção endergónica que por si só não se desenvolverá, devido ao aumento da energia livre na reacção, pode fazer-se ocorrer acoplando-a com uma reacção exergónica.

Consideremos as 3 reacções:



O composto **D** que se forma na reacção 1) é um reagente na reacção 2) e a reacção total é a reacção 3) que é exergónica pois  $(\Delta G_1^0 + \Delta G_2^0) < 0$ . Deste modo, o composto **C** é realmente formado à custa de **A** e **B** e a reacção ocorrerá por si.

Nos organismos vivos, muitos exemplos de reacções de acoplamento poderão ser dados. De particular importância são as reacções que envolvem as ligações fosfato, que constituem uma das chamadas ligações de alta energia. Da hidrólise de esteres fosfatos resultam variações de energia livre da ordem das -2000 calorías. Das hidrólises das adenosina difosfato (ADP) e da adenosina trifosfato (ATP) resultam  $\Delta G_s$  de -8.000 e -12.000 cal, respectivamente. A importância dos ADP e dos ATP e das suas ligações de alta energia reside no facto de, em processos metabólicos com reacções de acoplamento, uma parte da energia livre despendida quando as ligações fosfato são desfeitas é transformada em energia química necessária para o aparecimento de certos produtos. Os compostos com ligações de alta energia são como que armazéns de energia para os organismos.

### VI.7 - 3ª Lei da Termodinâmica

Deve-se a Nernst o enunciado desta lei: a entropia de uma substância pura e cristalina à temperatura do zero absoluto é nula.

Consequentemente, o aumento de entropia de uma substância quando a sua temperatura é elevada do zero absoluto à temperatura **T**, é igualmente o valor absoluto da entropia da substância à temperatura considerada.

Na prática, os valores da entropia de uma substância não obtida dos conjuntos de valores do calor específico e dos calores latentes associados a mudanças de estado medidos a diversas temperaturas, algumas extremamente baixas.

Consideremos a reacção  $A + B \rightarrow C + D$ . Se as entropias de cada um dos componentes da reacção tiver sido separadamente determinada, é possível conhecer-se a variação de entropias quando se dá a reacção. A variação de entropia é

$$\Delta S = (S_C + S_D) - (S_A + S_B) \quad \text{VI.18}$$

Conhecendo os valores de  $S$ , pode calcular-se a variação de energia livre,  $\Delta G$ , a partir da relação já conhecida  $\Delta G = \Delta H - T \Delta S$ .

Parks e Huffman estudaram a reacções entre constituição química e entropia, tendo chegado a um conjunto de regras empíricas que permitem o cálculo aproximado da entropia das substâncias. Eis as regras de Parks e Huffman, cujos valores indicados se referem à temperatura de 25 °C:

- a. Por cada átomo de **H** numa molécula, **S** aumenta de 11,3 unidades de entropia (1 unidade de entropia = 1 cal/(mole. °C);
- b. Por cada átomo de **C** numa molécula, **S** diminui 13,4 unidades de entropia.
- c. A contribuição de **O** depende do tipo de ligação em que participa.

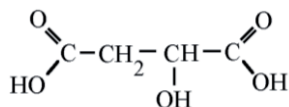
Assim:

1. Por cada átomo de oxigénio terminal (tal como no -OH de um -COOH) **S** aumenta de 0,9 unidades de entropia.
2. Por cada átomo de oxigénio secundário (tal como no -OH de um >CHOH) **S** diminui de 4,6 unidades de entropia.
3. Por cada átomo de oxigénio em grupo carbonilo (como no >C=O do -COOH) **S** aumenta de 24,4 unidades.

Deste modo, verifica-se que o tipo de ligação de oxigénio numa molécula pode ter um papel muito importante na determinação da entropia de um composto, particularmente se existem grupos carbonilo.

Devemos frizar que, quando o grupo carbonilo pode também ser considerado terminal, só se deve entrar em conta com o valor correspondente ao grupo carbonilo.

A fórmula de estrutura do ácido *d*-málico a 25 °C é



Ácido *d*-málico

então a entropia do ácido *d*-málico a 25 °C é, pelas regras atrás referidas:

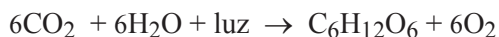
6 H.....	6 × 11,3	= + 67,8
4 C.....	4 × (-13,4)	= - 53,6
2 O Terminal .....	2 × 0,9	= + 1,8
2 O Carbonilo.....	2 × 24,4	= + 48,8
1 O Secundário.....	1 × (-4,6)	= - 4,6
Entropia Total .....		+ 60,2 U.E.

A aplicação destas regras tem o maior interesse quando, para dado composto, não existem dados termodinâmicos. Contudo, é sempre desejável usar os dados termodinâmicos, sem dúvida mais rigorosos. A principal razão para esta opção reside no facto de qualquer alteração na estrutura das moléculas, resultante, por exemplo, de interacção com o meio, modificar profundamente o valor da entropia. As reacções bioquímicas ocorrem geralmente em solução e sob condições em que as ligações hidrogénio e a água de solvatação são factores importantes na determinação da entropia. Num solvente polar, como por exemplo a água, solutos iónicos ou de moléculas polares atraem as moléculas de água, ficando solvatados, ou seja, as moléculas do solvente orientam-se e dispõem-se de acordo com as moléculas do soluto, o que restringe os movimentos de rotação e translação das moléculas do soluto, conduzindo portanto, a uma diminuição da entropia.

### VI.8 - Luz solar em bioenergética

A radiação solar é uma fonte de energia impulsionadora das transformações biológicas. Além de possibilitar aos seres vivos manter temperaturas

para as quais os processos metabólicos podem ocorrer, é também fonte de energia para as próprias reacções. Nos organismos foto-autotróficos, a energia solar do visível e dos I.V. e U.V. próximos é convertida em energia livre de compostos estáveis. As plantas verdes, as algas e algumas bactérias fazem uso da energia radiante na região do visível e dos U.V.A, para a síntese de compostos ricos em energia, tais como a glucose. Esta síntese é feita a partir de moléculas inorgânicas muito simples, essencialmente água e anidrido carbónico. A reacção global da fotosíntese é representada por:



$$\Delta G^\circ = + 2870 \text{ KJ/mole}$$

VI.19

Esta reacção, que é exergónica, corresponde ao inverso da combustão da glucose. Nesta reacção, o processo de aproveitamento da energia solar não é simples. O primeiro importante e também complexo estágio é a redução de  $\text{NADP}^+$  e a fosforilação do ADP, originando ATP, com libertação de uma molécula de oxigénio. Numa cadeia subsequente de reacções sem a intervenção da luz, NADPH e ATP surgem como fontes de energia para a redução do  $\text{CO}_2$ .

Após uma reacção fotoquímica, moléculas são excitadas ficando em estados de energia mais elevados que o fundamental, por absorção de energia luminosa. Como consequência, poderão ser quebradas ligações químicas e formadas novas bandas de energia, criando-se a possibilidade das moléculas serem oxidadas ou reduzidas, com alteração da sua configuração.

Só a luz absorvida pode ser efectiva em termos fotoquímicos. A maioria das moléculas, todavia, é estável sob a acção da luz visível, embora a possam absorver. Existem, nestes casos, canais de reacção efectivos para desactivação dos estados ópticos excitados que são competitivos com as reacções químicas.

Todos estes processos, incluindo a própria absorção da luz, são chamados de reacções fotofísicas. Em termos gerais, uma reacção fotofísica consiste numa sequência de passos, na qual só a primeira é verdadeiramente fotoquimicamente induzida (primária). Por exemplo, conhecem-se mais de cem passos na reacção, cuja equação se escreveu em cima.

Algumas considerações sobre os estados de energia das moléculas poderão ser úteis. Uma molécula livre pode existir em diferentes "estados estacionários" (com tempos de vida médios longos). Estes estados podem ser

suficientemente bem descritos pelas soluções  $\psi(\mathbf{k})$  da equação de Schrödinger do sistema, não relativista e independente do tempo.

A cada um destes diferentes estados corresponde um valor distinto de energia e momento angular, uma distribuição característica da densidade electrónica, e, em geral, uma geometria de equilíbrio bem definida.

Com uma aproximação suficientemente boa, a energia do estado  $\psi_i$  pode considerar-se constituída por três termos

$$E_i = E_{el(i)} + E_{v(i)} + E_{rot(i)} \quad \text{VI.20}$$

onde  $E_{el(i)}$  é a energia electrónica,  $E_{v(i)}$  é a energia vibracional do núcleo no campo de potencial dos electrões e  $E_{rot(i)}$  é a energia rotacional da totalidade da molécula.

Os electrões de valência podem ser excitados para níveis de energia mais elevados, com energias de excitação ( $\Delta E_{el}$ ) na gama de valores de 1 a 5 eV, correspondendo a quantas de luz de comprimentos de onda  $\lambda$  entre 1000 e 200 nm respectivamente.

As vibrações internas e rotações moleculares requerem fotões de menor energia, tipicamente  $\Delta E_v \approx 10^{-1}$  eV e  $\Delta E_{rot} \approx 10^{-3}$  eV, respectivamente.

Em situações não especiais em fotoquímica, bem como em fotobiologia, a gama de energias com interesse vai de 1 a 10 eV. Dos fotões do espectro solar, só aqueles com comprimento de onda  $\lambda > 300$  nm (energia  $< 2,7$  eV) penetram na atmosfera e atingem a superfície da terra. As lâmpadas de tungsténio com ampola de vidro têm um limite semelhante, enquanto que as lâmpadas de hélio e de vapores de metal com ampola de quartzo emitem efectivamente quantas até 6,2 eV ( $\lambda = 200$  nm).

O primeiro potencial de ionização da maioria dos compostos orgânicos é, como vimos, de cerca de 10 eV.

A energia das regiões da luz visível, U.V. próximo e I.V., é convertida em energia livre e armazenada na própria constituição de compostos químicos estáveis. Só cerca de 0,05% ( $1,7 \cdot 3 \times 10^{17}$  KJ/mês) da energia solar total que atinge a terra é transformada através da fotosíntese e, portanto, tornada utilizável pela biosfera. A maior fracção é emitida na forma de energia calorífica para o espaço exterior.

As energias dos diferentes estados de uma molécula podem observar-se convenientemente através de diagramas de níveis de energia. Nas fases condensadas, a rotação está dificultada e as vibrações amortecidas em maior

---

ou menor grau. Como consequência, os correspondentes níveis de energia não são estreitos mas antes alargados. No que se segue vamos ignorar as rotações. Falaremos unicamente de estados vibracionais de excitação electrónica. De grande importância são as suas vidas médias "naturais" individuais  $t_i$ , das quais dependem muito a população de moléculas que se pode obter (concentração) e as velocidades de reacção.

Quase todas as moléculas orgânicas têm um número par de electrões. Nos seus estados electrónicos mais baixos, os momentos angulares intrínsecos (spins) dos electrões têm soma nula, ou seja, um spin resultante total zero, caracterizado por um número quântico  $S = 0$  e uma multiplicidade  $2S+1 = 1$  (singlete). Os estados singletos são diamagnéticos.

Uma outra importante configuração corresponde a  $S = 1$  e  $2S+1 = 3$  (triplete), no qual um par de electrões tem spins paralelos. Os estados com  $S = 0$  são paramagnéticos.

As transições entre estados, e portanto os seus tempos médios de vida, são governadas por regras de selecção, sendo um dos mais rigorosos o princípio da conservação da multiplicidade. Deste modo, um estado triplete é de vida média relativamente longa, se houver unicamente estados singletos abaixo dele na escala de energia.

Uma mudança de multiplicidade, ou seja, uma variação de spin proibida, pode ocorrer devido à acção de um campo magnético interno intenso resultante do movimento orbital de electrões.

## VI.9 - Elementos sobre cinética de enzimas

Enzimas são moléculas proteicas especializadas na propriedade de acelerar, de forma mais ou menos específica, a velocidade de reacções químicas. A grande maioria das reacções bioquímicas é catalizada por enzimas específicos.

### VI.9.1 - Catalize e energia de activação

É importante perceber como actua um catalizador, de modo a acelerar uma reacção química, sem alterar o equilíbrio final.

Quando a glucose-1-fosfato é colocada em meio aquoso, a pH 7,0 e à temperatura de 37 °C, na ausência do enzima fosfoglucumutase, a reacção de

---



conversão em glucose-6-fosfato é extremamente lenta. Embora a reacção seja exergónica ( $\Delta G = - 1,75$  Kcal) pode observar-se no diagrama da Fig. VI.1-a) que existe uma elevada barreira de potencial de valor  $E_a$  para a ocorrência desta reacção, que é chamada de energia de activação.

A energia das moléculas numa população, obedece a uma curva de distribuição, como se vê na Fig. VI.1-b). Só as moléculas com energia mais elevada que a energia de activação são capazes de reagir, de modo a formar o produto. Para aumentar a velocidade de uma reacção devíamos assim aumentar a energia da população de moléculas. Uma maneira de conseguir este objectivo, é aumentar a temperatura da mistura, uma vez que o calor absorvido pelas moléculas aumenta a energia interna e, deste modo, a probabilidade das suas colisões e reacção. Todavia, há um outro processo através do qual a barreira de energia pode ser ultrapassada que é pela adição de um catalisador. O catalisador diminui a energia de activação, ( $E_a > E'_a$ ) permitindo a um muito maior número de moléculas entrar em reacção.

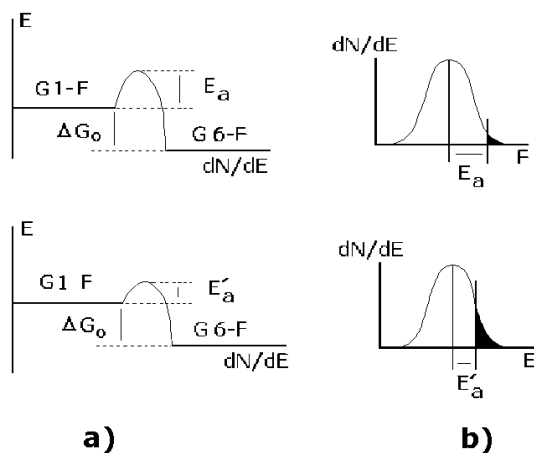
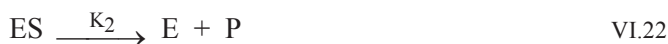


Fig. VI.1 - Barreira de potencial para a ocorrência duma reacção (energia de activação) sem e com catalisador. a) Reacção sem catalisador; b) Reacção com catalisador; E - Energia interna; G-6-F – Glucose-6-fosfato; G-1-F – Glucose-1-fosfato;  $E_a$ ,  $E'_a$  – Energias de activação;  $\Delta G_o$  - Variação padrão de energia livre (-1,75 Kcal);  $dN/dE$  – variação do número de moles por unidade de energia.

O catalisador produz este efeito porque pode formar um complexo intermediário instável com o substrato que se decompõe rapidamente, dando o produto. Tudo se passa como se um túnel, ou canal, através da barreira de energia de activação fosse tornado acessível pela adição do catalisador. Nos dois casos não há qualquer variação nas energias correspondentes à glucose-1-fosfato e à glucose-6-fosfato.

### VI.9.2 – Conceitos básicos

A reacção entre o composto (substrato) e o enzima envolve colisões entre estes. Os enzimas são grandes moléculas ( $10^2$  a  $10^3$  KD) enquanto que os substratos apresentam pesos moleculares da ordem de  $10^2$  D. Devido a esta desproporção nas massas só uma pequena parte do enzima contacta com o substrato sendo a região de contacto chamada sítio activo. Em geral cada subunidade de um enzima tem um sítio activo capaz de ligar substrato. As forças que atraem o substrato para a superfície de um enzima são de natureza física, ou química, dentro dos diversos tipos que estudámos. Para baixas concentrações de substrato, muitos enzimas apresentam reacções de primeira ordem. Para elevadas concentrações do substrato a ordem da reacção passa a ser zero. Muitos sistemas enzimáticos de um só substrato, sem complicações de reacções inversas ou efeitos de inibidores ou activadores, são representáveis pelas equações



onde **E** é o enzima, **S** o substrato, **ES** o complexo e **P** o produto de reacção.

Para a primeira das equações e supondo equilíbrio, isto é  $k_1 = k_{-1}$ , a constante de equilíbrio é

$$k = \frac{[ES]}{[E][S]} \quad \text{VI.23}$$

Nesta equação  $[E]$  representa a concentração do enzima livre, não a concentração total do enzima que escreveremos  $[E_{\text{tot}}]$ .

A equação de Michaelis-Menton relaciona a velocidade de reacção de um sistema enzimático com as concentrações do enzima e substrato.

Visto que uma molécula de enzima está envolvida no aparecimento de uma molécula de complexo, a concentração total de enzima, considerando as duas formas, livre e ligado, é

$$[E_{\text{tot}}] = [E] + [ES] \quad \text{VI.24}$$

então a Eq. VI.23 vem

$$k = \frac{[ES]}{\{[E_{\text{tot}}] - [ES]\}[S]}$$

que leva a

$$[ES] = \frac{k [E_{\text{tot}}] [S]}{1 + k [S]} \quad \text{VI.25}$$

Verifica-se que a velocidade  $v$  de formação dos produtos é proporcional a  $[ES]$ , sendo a constante de proporcionalidade a respectiva constante de reacção. Se chamarmos a esta constante de reacção  $k_2$  vem

$$v = k_2 [ES] \quad \text{VI.26}$$

ou

$$v = \frac{k k_2 [E_{\text{tot}}] [S]}{1 + k [S]} \quad \text{VI.27}$$

que é uma versão da equação de Michaelis-Menton.

Considerando outro caminho, seja  $\theta$  a fracção do número total de moléculas de enzima presentes que está na forma de complexo. A fracção livre é então  $1 - \theta$ .

A velocidade de reacção dos reagentes na Eq.VI.21, é proporcional à concentração de enzima livre  $[E]$ , ou  $(1 - \theta)$  e à concentração de substrato  $[S]$ , então

$$v_1 = k_1 (1 - \theta) [S] \quad \text{VI.28}$$

A velocidade de reacção da direita para a esquerda é unicamente proporcional à concentração de complexo,  $\theta$

$$v_{-1} = k_{-1}\theta \quad \text{VI.29}$$

No equilíbrio as duas velocidades de reacção são iguais

$$k_1(1-\theta) [S] = k_{-1}\theta$$

e

$$\frac{\theta}{1-\theta} = \frac{k_1}{k_{-1}} [S] = k [S]$$

donde

$$\theta = \frac{k [S]}{1 + k [S]} \quad \text{VI.30}$$

A velocidade de reacção da Eq. VI.22 é proporcional à concentração de complexo, então

$$v = k_2 [E_{\text{tot}}] \theta \quad \text{VI.31}$$

ou usando a Eq. VI.30

$$v = \frac{k_2 k [E_{\text{tot}}] [S]}{1 + k [S]} \quad \text{VI.32}$$

equação igual à obtida com a formulação inicial (Eq. VI.27).

A velocidade de reacção obtida está numa forma diferente da obtida por Michaelis que usou não a constante de equilíbrio da Eq. VI.23 mas o seu inverso  $k_m$ . Esta constante é chamada, geralmente, de constante de Michaelis para a decomposição do complexo em enzima e substrato. Se  $k$  for substituído por  $1/k_m$  na Eq. VI.32 esta vem

$$v = \frac{k_2 [E_{\text{tot}}] [S]}{k_m + [S]} \quad \text{VI.33}$$

A constante  $K_m$  tem as dimensões de uma concentração.

---

**VI.9.3 - Tratamento para o estado estacionário**

O tratamento para o estado estacionário baseia-se na hipótese de que em certas reacções a concentração de substâncias intermediárias, como o complexo enzima-substrato, varia muito lentamente durante o decurso da reacção. Se  $[ES]$  é a concentração do complexo a aproximação feita é

$$\frac{d[ES]}{dt} = 0 \quad \text{VI.34}$$

Esta relação leva a uma simplificação considerável nas equações diferenciais e permite obter soluções com relativa facilidade.

Suponhamos que os passos da reacção em estudo são descritos pelas Eqs VI.21 e VI.22.

As equações diferenciais gerais aplicáveis a estas são

$$-\frac{d[E]}{dt} = -\frac{d[S]}{dt} = k_1[E][S] - k_{-1}[ES] \quad \text{VI.35}$$

$$\frac{d[ES]}{dt} = k_1[E][S] - k_{-1}[ES] - k_2 [ES] \quad \text{VI.36}$$

$$\frac{d[P]}{dt} = k_2 [ES] \quad \text{VI.37}$$

Para se resolver este sistema é necessário eliminar  $[ES]$  e integrar a equação diferencial resultante, de modo a obter  $[P]$  em função de  $t$ . Esta integração não é possível, utilizando métodos matemáticos conhecidos, sem a imposição de condições iniciais.

Em situação de estado estacionário considera-se que a velocidade de variação de  $[ES]$  é muito menor do que a velocidade de variação de  $[S]$ , já que  $[ES] \gg [S]$ . Esta suposição só não se aplica aos estágios iniciais da reacção. Então através das Eqs. VI.34 e VI.36, vem

$$k_1 [E] [S] - k_{-1}[ES] - k_2 [ES] = 0 \quad \text{VI.38}$$


---

e [ES] é

$$[ES] = \frac{k_1 [E][S]}{k_{-1} + k_2} \quad \text{VI.39}$$

donde a Eq. VI.37

$$\frac{d[P]}{dt} = k_2 \frac{k_1 [E][S]}{k_{-1} + k_2} \quad \text{VI.40}$$

Pela Eq. VI.24 é

$$[E] = [E_{\text{tot}}] - [ES] \quad \text{VI.41}$$

substituindo na Eq. VI.39, obtém-se para [ES]

$$[ES] = \frac{k_1 [E_{\text{tot}}] [S]}{k_{-1} + k_2 + k_1 [S]} \quad \text{VI.42}$$

Comparando as Eqs. VI.42 e VI.25, concluímos que

$$\frac{1}{k} = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1} = k_m \quad \text{VI.43}$$

A velocidade de reacção de formação dos produtos, nestas condições, é

$$v_i = \frac{k_1 k_2 [E_{\text{tot}}] [S]}{k_{-1} + k_2 + k_1 [S]} \quad \text{VI.44}$$

$$v_i = \frac{k_2 [E_{\text{tot}}] [S]}{\frac{k_{-1} + k_2}{k_1} + [S]} \quad \text{VI.45}$$

ou

$$v_i = \frac{k_2 [E_{\text{tot}}] [S]}{k_m + [S]} \quad \text{VI.46}$$

Quando

$$[S] \rightarrow \infty. \quad v_{\infty} = k_2 [E_{\text{tot}}] = v_M \quad \text{VI.47}$$

O valor  $v_M$  corresponde à velocidade de reacção máxima.

A velocidade de reacção  $v_i$  pode então exprimir-se em função de  $v_M$ ,  $[S]$  e  $k_m$

$$v_i = \frac{v_M [S]}{k_m + [S]} \quad \text{VI.48}$$

Quando, na Eq. 46 se tem  $[S] \rightarrow 0$  e  $k_m \gg [S]$

$$v_o = \frac{k_2}{k_m} [E_{\text{tot}}] [S] \quad \text{VI.49}$$

Se  $k_m = [S]$  vem

$$v_i = \frac{v_M [S]}{2 [S]} = \frac{v_M}{2} \quad \text{VI.50}$$

ou seja a constante de Michaelis  $k_m$  é igual à concentração do substrato para a qual a velocidade inicial de reacção é metade da velocidade máxima.

O gráfico da velocidade de reacção em função da concentração de substrato (Eq. VI.46) fornece um arco de hipérbole rectangular (Fig. VI.2).

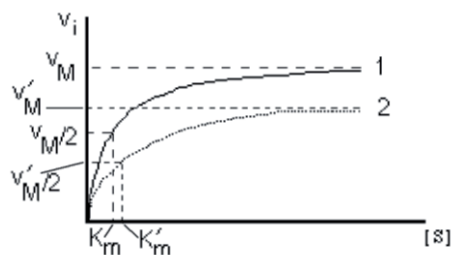


Fig. VI.2 - Velocidade de reacção em função de  $[S]$  para dois sistemas diferentes, com constantes de Michaelis  $k_m$  e  $k'_m$ .

Valores elevados da constante de Michaelis significam pequena afinidade entre enzima e substrato visto um valor maior de  $[S]$  ser necessário para obter metade da velocidade limite.

Valores aproximados de  $k_m$  para alguns sistemas:

Pepsina - albumina de ovo 4,5 %

Catalase -  $H_2O_2$  0,025 M

Sacarose - frutose 0,016 - 0,04 M

A aplicabilidade da equação de Michaelis-Menten pode ser verificada calculando  $v_i$  para vários valores de  $[S]$ , determinando as constantes  $V$  e  $k_m$  na curva experimental e comparando com os correspondentes valores das tabelas.

O método referido não é muito rigoroso pois  $v_M$  ( $v_{max}$ ) só pode obter-se de maneira aproximada. De facto  $v_M$  só ocorre para  $[S]$  muito elevado ( $[S] \rightarrow \infty$ ) obrigando a incerteza no cálculo de  $k_m$ .

Pode, no entanto, usar-se uma determinação gráfico mais rigorosa, obtendo uma forma linear da equação de Michaelis-Menten. Um método bastante usado foi proposto por Lineweaver e Burk que indicamos a seguir.

Se considerarmos o inverso da Eq. VI.48 vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_i} &= \frac{k_m + [S]}{v_M [S]} \\ &= \frac{k_m}{v_M} \frac{1}{[S]} + \frac{1}{v_M} \end{aligned} \quad \text{VI.51}$$

Fazendo  $\frac{1}{v_i}$  a variável dependente e  $\frac{1}{[S]}$  a variável independente obtém-se a equação de uma recta de inclinação  $\frac{k_m}{v_M}$  que corta as ordenadas no ponto  $\frac{1}{v_M}$  e as abcissas no ponto  $-\frac{1}{k_m}$ .



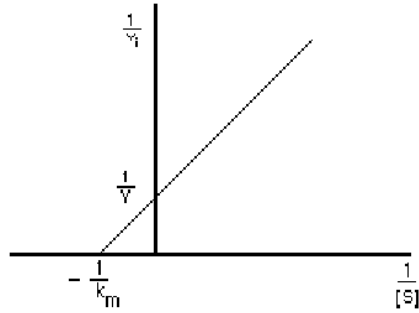


Fig. VI.3 - Linearização da equação de Michaelis-Menten ( $\frac{1}{v_i}$  vs.  $\frac{1}{[S]}$ ).

Um outro método de obter um gráfico linear da equação de Michaelis-Menten é o método de Eadie. A partir da Eq. VI.48, vem

$$v_i [S] + v_i k_m = v_M [S]$$

$$\frac{v_i}{[S]} = -\frac{v_i}{k_m} + \frac{v_M}{k_m} \quad \text{VI.52}$$

Considerando  $\frac{v_i}{[S]}$  como função de  $v_i$  obtemos uma recta de coeficiente angular  $-\frac{1}{k_m}$ , ordenada na origem  $\frac{v_M}{k_m}$  e abscissa na origem  $v_M$ .

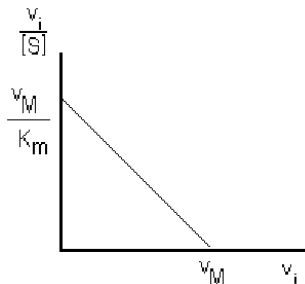


Fig. VI.4 Linearização da equação de Michaelis-Menten ( $\frac{v_i}{[S]}$  em função de  $v_i$ ).

Em muitos casos um enzima só funciona na presença de um coenzima que se liga à proteína do enzima. A combinação do enzima com o coenzima pode ser sujeita ao mesmo tratamento que a formação do complexo enzima-substrato podendo determinar-se a constante de dissociação do complexo enzima-coenzima.

#### VI.9.4 - Inibição

Observa-se que a velocidade das reacções enzimáticas é muitas vezes influenciada pela acção de substâncias estranhas. Um caso comum é quando há redução na velocidade e, neste caso, a substância é chamada de inibidor. A cinética dos sistemas enzimáticas, na presença de inibidores, é de grande importância.

Diversos tipos de inibição foram, no entanto, observados sendo os mais comuns descritos como inibição competitiva e inibição não competitiva.

As substâncias que são estruturalmente análogas ao substrato actuam frequentemente como inibidores competitivos enquanto que outros tipos de substâncias poderão actuar como inibidores não competitivos. Todavia, são conhecidas muitas excepções a estas regras.

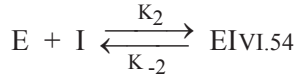
Quando o comportamento do tipo competitivo é observado é necessário supor-se que as moléculas do substrato **S** e do inibidor **I** se substituem reciprocamente no centro activo do enzima, ou seja, o enzima pode formar um complexo **ES** com o substrato e outro, **EI**, com o inibidor. Um complexo onde estejam simultaneamente o **S** e o **I** ligados ao enzima não pode ocorrer. Pelo contrário, na inibição não competitiva, o substrato e o inibidor estão ligados a diferentes sítios no enzima de tal modo que ocorre a formação de complexos **IES**.

758

#### VI.9.5 - Inibição competitiva

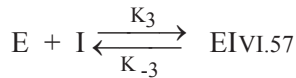
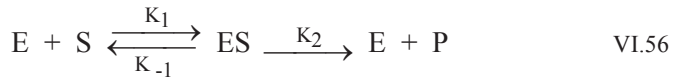
Podemos traduzir as reacções já indicadas para a inibição competitiva pelas equações





A segunda destas equações reflecte a formação do complexo enzima-inibidor.

O sistema acima aparece muitas vezes na forma equivalente que segue



As equações que reflectem o estado estacionário para o **ES** são

$$K_1 [E] [S] - k_{-1}[ES] - k_2 [ES] = 0 \quad \text{VI.58}$$

e

$$[ES] = \frac{k_1 [E][S]}{k_{-1} + k_2} \quad \text{VI.59}$$

De modo análogo a equação do estado estacionário para o **EI**

$$k_3 [E] [I] = k_{-3} [EI]$$

donde

$$k_I = \frac{k_{-3}}{k_3} = \frac{[E][I]}{[EI]} \quad \text{e} \quad [EI] = \frac{[E][I]}{k_I}$$

A concentração total do enzima é

$$\begin{aligned} [E_{\text{tot}}] &= [E] + [ES] + [EI] \\ &= [E] + \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} [E][S] + \frac{[E][I]}{k_I} \end{aligned}$$

---

então

$$= [E] \left\{ 1 + \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} [S] + \frac{[I]}{k_1} \right\}$$

$$[E] = \frac{[E_{\text{tot}}]}{1 + \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} [S] + \frac{[I]}{k_1}} \quad \text{VI.60}$$

A velocidade de decomposição de **ES** nos seus produtos de reacção governa a velocidade da verdadeira reacção enzimática. Então

$$v = k_2 [ES] = k_2 \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} [E][S]$$

$$= k_2 \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} \frac{[E_{\text{tot}}] [S]}{1 + \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} [S] + \frac{[I]}{k_1}}$$

$$= \frac{k_2 [E_{\text{tot}}] [S]}{\left(\frac{k_{-1} + k_2}{k_1}\right) \left(1 + \frac{[I]}{k_1}\right) + [S]} \quad \text{VI.61}$$

Quando

$$[S] \rightarrow \infty, \quad v_{\infty} = v_M = k_2 [E_{\text{tot}}] \quad \text{VI.62}$$

Então com

$$v_M = k_2 [E_{\text{tot}}]$$

e

$$k_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$$

temos

$$v = \frac{v_M [S]}{[S] + k_m \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_1} \right\}} \quad \text{VI.63}$$


---

Comparando com a Eq. VI.48 observamos que tudo se passa como se  $K_m$  fosse multiplicado pelo factor  $\{1 + \frac{[I]}{k_I}\}$ , ou seja, efectivamente aumentado, pois que este factor é superior à unidade excepto se  $[I] = 0$ .

A curva  $v\{[s]\}$  ou seja, velocidade de reacção vs. concentração de substrato para a inibição competitiva encontra-se na Fig. VI.5. A velocidade de reacção máxima  $v_M$  é a mesma quer se trate de substrato só, ou de substrato mais inibidor.

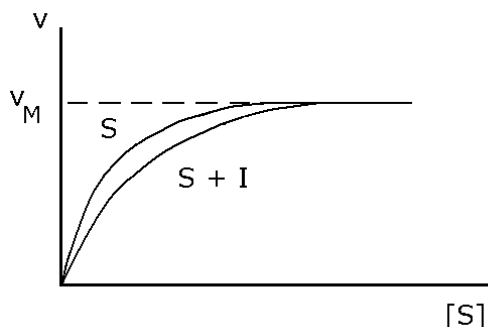


Fig. VI.5 - A curva  $v\{[s]\}$  ou seja, velocidade de reacção/concentração de substrato sem e com inibição competitiva.

As curvas de Lineweaver e Burk para o caso da inibição competitiva podem obter-se pela forma  $\frac{1}{v}$  vs.  $\frac{1}{[S]}$  da Eq. VI.63, ou seja,

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{[S]} \frac{k_m \{1 + \frac{[I]}{k_I}\}}{v_M} + \frac{1}{v_M}$$

A constante  $k_m$  aparente é

$$k'_m = k_m \left(1 + \frac{[I]}{k_I}\right)$$

A inclinação da recta e a intercepção com o eixo das abcissas (ou seja o ponto  $-\frac{1}{k_m}$ ) dependem da [I].

Quando

$$[I] \rightarrow \infty \quad -\frac{1}{k'_m} = -\frac{1}{k_m \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}} \rightarrow 0$$

A intercepção das rectas com o eixo dos  $1/v$  é independente da [I].

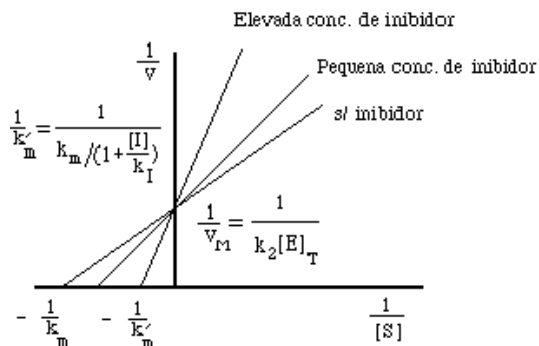
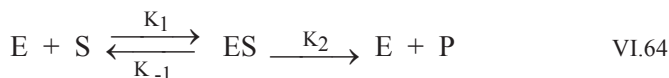
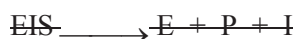


Fig.VI.6 - Curvas de Lineweaver e Burk para o caso da inibição competitiva.

### VI.9.6 - Inibição não-competitiva

As reacções referentes à inibição não-competitiva podem ser traduzidas pelas equações





A última equação reflecte a impossibilidade da obtenção de **P** a partir do complexo EIS. A solução deste sistema de equações para o estado estacionário é

$$v = \frac{v_M [S]}{\{[S] + k_m\} \left\{1 + \frac{[I]}{k_I}\right\}} \quad \text{VI.68}$$

Quando

$$[S] \rightarrow \infty, \quad v_\infty = \frac{v_M}{1 + \frac{[I]}{k_I}}$$

$v_M$  é menor que  $v_\infty$  por um factor  $\left\{1 + \frac{[I]}{k_I}\right\}^{-1}$ .

Quando se trata da inibição não-competitiva a velocidade máxima da reacção com **[S]** é diferente da que se observa na presença do substrato mais inibidor.

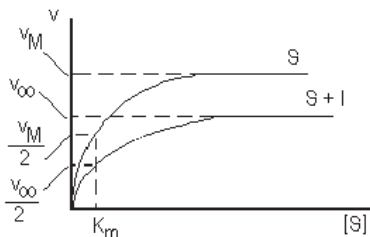


Fig. VI.7 - Velocidade de reacção vs. **[S]** na inibição não-competitiva. A velocidade de reacção máxima que se observa na presença do substrato mais inibidor  $v_\infty$ , é menor do que  $v_M$ .

Vejamos as curvas de Lineweaver e Burk para o caso da inibição não competitiva usando igualmente a função  $\frac{1}{v}$  vs.  $\frac{1}{[S]}$ ; a partir da Eq. VI.68 temos

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{[S]} \frac{k_m \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}}{v_M} + \frac{1}{\frac{v_M}{\left( 1 + \frac{[I]}{k_I} \right)}} \quad \text{VI.69}$$

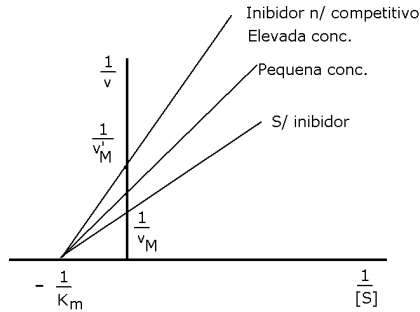


Fig. VI.8 - Curvas de Lineweaver e Burk para a inibição não competitiva.

O valor de  $v'_M$  (ou  $v_M$  aparente) é dado pela equação

$$v'_M = \frac{v_M}{\left( 1 + \frac{[I]}{k_I} \right)} \quad \text{VI.70}$$

### VI.9.7 - Cálculo do $K_I$

Procede-se a duas séries de determinações, uma sem inibidor e outra com uma concentração constante de inibidor. Considera-se, a seguir, a determinação de  $K_I$  nas duas situações de inibição competitiva e não-competitiva, primeiro de forma directa e depois pelos gráficos de Dixon.



### Situação de inibição competitiva

A partir dos gráficos de Lineweaver e Burk obtém-se  $k_m$  e  $k'_m$ . Como  $[I]$  é conhecido vem

$$K_I = \frac{[I]}{\frac{k'_m}{k_m} - 1} \quad \text{VI.71}$$

### Situação de inibição não-competitiva

$K_I$  pode ser obtida a partir de

$$K_I = \frac{[I]}{\frac{v'_M}{v_M} - 1} \quad \text{VI.72}$$

### Gráficos de Dixon

Dixon desenvolveu um método gráfico simples que permite obter  $k_I$  sem qualquer cálculo.

Se a velocidade de reacção for calculada com diversas concentrações de inibidor, mantendo constante a concentração de substrato, a função  $1/v$  vs.  $[I]$  é uma recta. Vejamos:

### Inibição competitiva

Já conhecemos as equações

$$v = \frac{v_M [S]}{[S] + k_m \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{[S]} \frac{k_m \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}}{v_M} + \frac{1}{v_M}$$

Então

$$\frac{1}{v} = [I] \frac{k_m}{v_M k_I [S]} + \frac{1}{v_M} + \frac{k_m}{v_M [S]} \quad \text{VI.73}$$

Se  $[S_1] = \text{const.}$

$$\frac{1}{v} = [I] \frac{k_m}{v_M k_I [S_1]} + \frac{1}{v_M} + \frac{k_m}{v_M [S_1]} \quad \text{VI.74}$$

que é uma recta num gráfico  $1/v$  vs.  $[I]$ .

Se obtivermos uma segunda série de pontos, para diferentes  $[I]$ , para outro valor  $[S_2]$  de concentração de substrato, vem

$$\frac{1}{v} = [I] \frac{k_m}{v_M k_I [S_2]} + \frac{1}{v_M} + \frac{k_m}{v_M [S_2]} \quad \text{VI.75}$$

que é a equação de uma segunda recta com inclinação e pontos de cruzamento com os eixos diferentes da anterior. O ponto de intercepção destas rectas corresponde a  $\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2}$ .

O valor de  $v_M$  é o mesmo nos dois casos pois são casos de reacção competitiva. Então

$$\begin{aligned} & [I] \frac{k_m}{v_M k_I [S_1]} + \frac{1}{v_M} + \frac{k_m}{v_M [S_1]} \\ &= [I] \frac{k_m}{v_M k_I [S_2]} + \frac{1}{v_M} + \frac{k_m}{v_M [S_2]} \end{aligned} \quad \text{VI.76}$$

ou

$$[S_1] \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\} = [S_2] \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}$$

Esta igualdade só poderá verificar-se, visto  $[S_1] \neq [S_2]$  se  $\left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\} = 0$  ou  $[I] = -k_I$ .

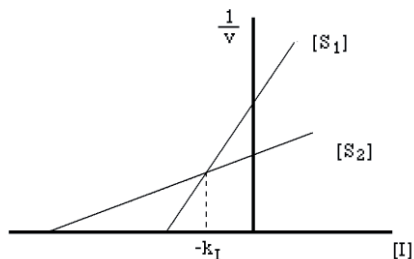


Fig. VI.9 - Gráfico  $1/v$  vs.  $[I]$  na inibição não-competitiva.

$k_m$  pode igualmente ser obtido por este método, pois que as rectas cortam o eixo dos  $[I]$  para valores de  $[I]$  iguais a

$$-k_m \left\{ 1 + \frac{[S]}{k_m} \right\} \quad \text{VI.77}$$

A partir da Eq. IV.75

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_M} + [I] \frac{k_m}{v_M k_I [S]} + \frac{k_m}{v_M [S]} \quad \text{VI.78}$$

quando  $[I] = -k_I$  vem

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_M} \quad \text{VI.79}$$

Se determinássemos o  $k_m$  não usando inibidor e sabendo o valor de  $1/v_M$  só necessitamos de uma concentração de substrato para calcular  $k_I$ . Traça-se uma horizontal com ordenada  $1/v_M$  e traça-se a recta correspondente à concentração de substrato usada, Fig. VI.10.

Esta técnica só pode aplicar-se à inibição competitiva

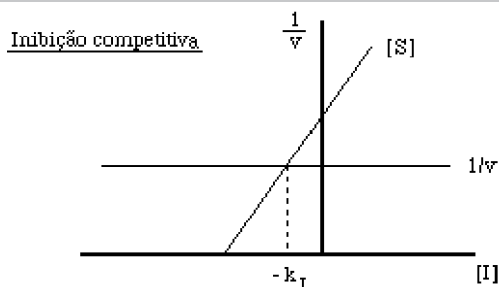


Fig. VI.10 - Gráfico  $1/v$  vs.  $[I]$  na inibição competitiva.

### Inibição não-competitiva

Já obtivemos a equação

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{[S]} \frac{k_m \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}}{v_M} + \frac{1}{\frac{v_M}{\left( 1 + \frac{[I]}{k_I} \right)}} = \left\{ \frac{k_m}{v_M [S]} + \frac{1}{v_M} \right\} \left( 1 + \frac{[I]}{k_I} \right) \quad \text{VI.80}$$

Usando o mesmo método das duas concentrações de substrato, utilizado para a inibição competitiva

$$\left\{ \frac{k_m}{v_{M1} [S_1]} + \frac{1}{v_{M1}} \right\} \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\} = \left\{ \frac{k_m}{v_{M2} [S_2]} + \frac{1}{v_{M2}} \right\} \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}$$

ou

$$\frac{1}{v_{M1}} \left\{ \frac{k_m}{[S_1]} + 1 \right\} \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\} = \frac{1}{v_{M2}} \left\{ \frac{k_m}{[S_2]} + 1 \right\} \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\} \quad \text{VI.81}$$

Os produtos dos dois primeiros factores em ambos os membros igualam o inverso da velocidade de reacção para o caso da reacção sem inibidor. Como a velocidade de reacção depende de  $[S]$  aqueles produtos são diferentes. Para a igualdade se verificar terá de ser  $I = -k_I$  o que ocorre para  $1/v = 0$ , Fig. VI.11. Então

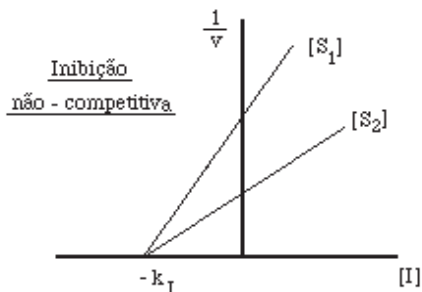


Fig. VI.11 - Gráfico  $1/v$  vs.  $[I]$  na inibição não-competitiva.

Nos gráficos  $1/v$  vs  $[I]$  distingue-se a inibição competitiva da não competitiva. Quando as duas rectas se encontram no eixo dos  $[I]$  a inibição é não-competitiva.

### VI.9.8 - Gráfico da relação da velocidade de reacção em função de $[I]$

Para um dado par, enzima-substrato, comparemos as velocidades de reacção das reacções sem e com inibidor. Consideremos primeiro o caso da inibição competitiva.

A velocidade de reacção sem inibidor é

$$v = \frac{V [S]}{k_m + [S]} \quad \text{VI.82}$$

Quando ocorre a inibição competitiva é

$$v_I = \frac{V [S]}{[S] + k_m \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}}$$

Então

$$\frac{v}{v_I} = 1 + \frac{k_m}{k_I} \left\{ \frac{[I]}{k_m + [S]} \right\} \quad \text{VI.83}$$

A curva  $\frac{v}{v_I}$  vs. [I] é uma recta de inclinação  $\frac{k_m}{k_I} \left\{ \frac{1}{k_m + [S]} \right\}$  que corta o eixo dos  $\frac{v}{v_I}$  no ponto 1,0. A inclinação da recta depende de [S].

Para o caso da inibição não competitiva vem

$$v_I = \frac{V[S]}{\{[S] + k_m\} \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}}$$

e

$$\frac{v}{v_I} = \frac{\{k_m + [S]\} \left\{ 1 + \frac{[I]}{k_I} \right\}}{\{k_m + [S]\}}$$

$$= 1 + \frac{[I]}{k_I}$$

VI.84

A representação gráfica da função  $\frac{v}{v_I}$  vs. [I] é uma recta de inclinação  $\frac{1}{k_I}$  que corta o eixo das ordenadas no ponto 1,0, como se vê na figura seguinte

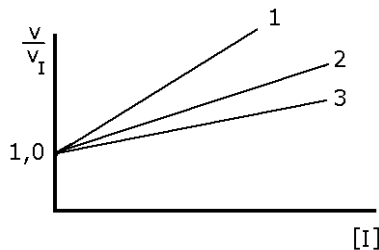


Fig. VI.12 – Gráfico da função  $\frac{v}{v_I}$  vs. [I]. Curva 1 – Inibição não competitiva, recta com inclinação  $1/k_I$ . Independente de [S]. Curvas 2 e 3 – Inibição competitiva, rectas com inclinação  $\frac{k_m}{k_I} \left\{ \frac{1}{k_m + [S]} \right\}$ , funções de [S].

## VI.9.9 - Significado molecular da inibição

Competitiva - O mecanismo geralmente associado à inibição competitiva é a possibilidade de ligação de um segundo composto ao sítio de ligação do substrato, na molécula do enzima. Este composto está, em geral, relacionado estruturalmente com o substrato, não sendo, contudo, reactivo ou sendo muito pouco reactivo.

É muitas vezes possível que outro substrato, que reaja mais lentamente que o substrato em estudo, actue como inibidor competitivo. Compostos não reactivos competindo com o substrato na ligação ao sítio de especificidade dos enzimas, poderão ligar-se mais, menos ou com igual firmeza ao substrato. O efeito de alterações estruturais na constante de inibição é muito informativo.  $k_I$  pode ser interpretado como se fosse uma constante termodinâmica de ligação e o efeito da estrutura na energia de ligação pode fornecer dados úteis sobre a configuração do sítio de especificidade. Há considerável evidência de que a combinação de certos substratos com o enzima origina alterações estruturais no sítio activo.

Não-competitiva - O modelo mais simples desta inibição pode ser descrito em termos de locais de especificidade separados, no enzima, onde se ligam o substrato e o inibidor mediando a reacção subsequente do substrato para formar o produto.

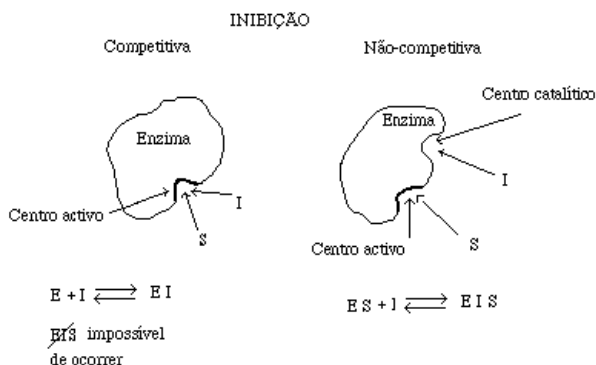


Fig. VI.13 – Esquema das ocorrências nos dois tipos de inibição. O inibidor actua no centro activo do enzima na inibição competitiva e no centro catalítico na inibição não-competitiva.

O inibidor não competitivo liga-se ao sítio catalítico alterando a reactividade sem interferência com a ligação do substrato. Não há alteração na afinidade,  $k_m$  não sofre alteração, mas  $v$  é afectada.

Na inibição competitiva **S** e **I** actuam no mesmo ponto, o centro activo do enzima. Na inibição não-competitiva o substrato actua no centro activo e o inibidor no centro catalítico.

Parece razoável interpretar a ligação de muitos substratos aos sítios específicos dos enzimas em termos de geometria molecular e empacotamento de áreas hidrofóbicas. As variações de energia livre envolvidas nas combinações enzima-substrato, em geral da ordem de -3 a -6 kcal, são inteiramente consistentes com esta hipótese. Deve, no entanto mencionar-se que a contribuição da carga eléctrica e de fortes interacções dipolares poderão ter uma contribuição importante induzindo alterações no centro activo quando o substrato se combina com o enzima.



---

**C A P Í T U L O • V I I**



**B A S E S D A E L E C T R I C I D A D E**

---

(Página deixada propositadamente em branco)

---

## VII.1- Electrostática

### VII.1.1 - Introdução

As experiências iniciais da electrostática vieram a demonstrar que existem dois tipos distintos de electrização que podem ser tratados como quantidades da mesma espécie mas com sinais contrários. A quantidade total de electricidade num corpo é a soma algébrica das duas quantidades de electricidade presentes. As designações de electricidade positiva e negativa resultam deste facto.

A observação dos fenómenos electrostáticos levou também à conclusão de que, em qualquer sistema isolado, a carga eléctrica total, ou seja, a soma algébrica das quantidades de electricidade positiva e negativa, é constante. Esta observação traduz o princípio da conservação da carga eléctrica.

Com os conhecimentos que já dispomos sobre a constituição do átomo facilmente entendemos o qualitativo dos fenómenos da electrostática.

A carga eléctrica de um corpo electrizado surge-nos como um múltiplo da carga do electrão com sinal a traduzir ou o excesso de electrões (carga negativa), ou a sua falta, em relação à neutralidade.

Do mesmo modo, o conceito de energia de ligação dos electrões permite-nos entender os processos de electrização e transferência de cargas.

Em muitas outras situações impuzemos conceitos como energia potencial eléctrica, campo eléctrico e corrente eléctrica.

Logo no Cap. I vimos como se geram campos eléctricos nas membranas biológicas.

Analisaremos aqui as leis que comandam os fenómenos eléctricos, numa perspectiva mais geral e em termos quantitativos.

### VII.1.2 - Quantidade de electricidade ou carga eléctrica

Consideremos as forças que duas pequenas esferas electricamente carregadas  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$  exercem de forma independente sobre uma terceira esfera, também carregada,  $\mathbf{M}_3$  e para uma mesma distância  $\mathbf{r}$ .

Mostra a experiência que a relação entre as intensidades destas forças não depende da carga da terceira esfera nem da distância  $\mathbf{r}$  escolhida.

Sendo assim, a relação  $\frac{F_1}{F_2}$  entre os módulos das forças produzidas

---

por  $M_1$  e  $M_2$ , sobre  $M_3$ , a uma mesma distância e independentemente, só depende das cargas eléctricas  $q_1$  e  $q_2$  presentes em  $M_1$  e  $M_2$ .

Face a esta proporcionalidade e considerando que, no início, o único processo de medir cargas eléctricas era por determinação de forças entre corpos carregados, introduziu-se a definição de que a relação entre duas cargas eléctricas era a relação entre as forças que estas exercem sobre uma terceira carga, à mesma distância. Então,

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_1}{F_2} \quad \text{VII.1}$$

Considerando outras distâncias  $r_1, r_2, \dots$  e repetindo a experiência anterior, obter-se-iam outros pares de forças de módulos  $F'_1$  e  $F'_2, F''_1$  e  $F''_2, \dots$  para as interacções entre as esferas, mantendo-se a relação entre  $q_1$  e  $q_2$  igual à relação entre aquelas forças, ou seja,

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{F'_1}{F'_2} = \frac{F''_1}{F''_2} = \dots$$

Das igualdades anteriores tira-se que:

$$\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2}, \quad \frac{F'_1}{q_1} = \frac{F'_2}{q_2} \quad \text{VII.2}$$

donde facilmente se conclui que a relação entre a força que se exerce sobre uma dada carga e o valor da própria carga, é uma constante. As forças são assim proporcionais às cargas sobre as quais estão aplicadas.

### VII.1.3 - Lei de Coulomb

A força  $\vec{F}$  que uma carga eléctrica pontual  $q_1$  exerce sobre outra  $q_2$  diminui rapidamente com o aumento da distância entre as cargas. Por outro lado, a acção que  $q_1$  exerce sobre  $q_2$  implica uma reacção de  $q_2$  sobre  $q_1$  igual e de sinal contrário (princípio de igualdade de acção e reacção). A força  $F$  depende pois das cargas  $q_1$  e  $q_2$  e da distância  $r$  entre elas, ou seja,

$$F = q_1 q_2 Q(r) \quad \text{VII.3}$$

Coulomb (~1785) provou que

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{VII.4}$$

onde  $K$  é uma constante e  $\vec{r}$  o vector dirigido de  $q_1$  a  $q_2$ , quando se considera a acção que  $q_1$  exerce sobre  $q_2$ . O vector  $\frac{\vec{r}}{r}$  é unitário e tem a direcção e sentido de  $\vec{r}$ .

As quantidades  $q_1$  e  $q_2$  são os valores algébricos das cargas.

A lei de Coulomb diz-nos que a força  $\vec{F}$  que  $q_1$  exerce sobre  $q_2$  é dirigida segundo a direcção definida pelos sinais das cargas pontuais, proporcional a estas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa.

A força  $\vec{F}$  é atractiva se  $q_1$  e  $q_2$  são de sinais contrários e repulsiva se  $q_1$  e  $q_2$  têm o mesmo sinal.

O valor da constante de proporcionalidade  $K$  depende do meio em que se consideram as cargas e do sistema de unidades escolhido.

Quando se considera a acção que um conjunto de cargas  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_m$  exerce sobre uma mesma carga  $q$  que dista das primeiras respectivamente  $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_m$  a lei de Coulomb toma a forma

$$\vec{F} = K \sum_1^n \frac{q_i q}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \sum_1^n F_i \quad \text{VII.5}$$

$\vec{F}$  é portanto a resultante das forças  $\vec{F}_i$ , ou seja, a sobreposição das acções independentes de cada carga  $q_i$  sobre  $q$ .

A lei de Coulomb é de uma importância fundamental em electrostática e tem verificação experimental a partir de distâncias da ordem dos  $10^{-12}$  cm.

### VII.1.4 - Unidades

Usaremos exclusivamente, neste capítulo, o sistema internacional de unidades (S.I.). Este sistema, além do tempo, massa e comprimento usa como grandeza fundamental, em electricidade, a corrente eléctrica.

As unidades daquelas grandezas no sistema internacional são o segundo, o quilograma massa e o metro. A unidade de corrente eléctrica é o ampere, que é definido a partir da força que se exerce entre duas correntes.

Um sistema de unidades onde a corrente eléctrica é grandeza fundamental e se postula que a força exercida entre duas correntes é proporcional a estas, é um sistema dito electromagnético.

No sistema internacional a unidade de carga eléctrica é o coulomb (C), definido a partir do ampere (A), como a quantidade de electricidade que atravessa por segundo a secção de um condutor em que circula uma corrente constante de 1 ampere. Considerando duas cargas de 1 coulomb, no vazio e à distância de 1 metro, verifica-se que estas se repelem com a força de  $9 \times 10^9$  newtons.

Usando a expressão da lei de Coulomb para estes valores, imediatamente se conclui que:

$$K = 9 \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \quad \text{VII.6}$$

Contudo, no Sistema Internacional, a constante de proporcionalidade na lei de Coulomb aparece na forma  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , quando se trata do vazio, ou seja,

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{VII.7}$$

Entrando com as Eqs. VII.6 e VII.7 tira-se que

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2 \quad \text{VII.8}$$

$\epsilon_0$  - é a constante dieléctrica, permissividade ou poder indutor específico do vazio. Para qualquer outro meio, o valor da constante dieléctrica  $\epsilon$  é sempre maior do que  $\epsilon_0$ .

Então, para um dado meio, pode definir-se uma constante dieléctrica

relativa  $\epsilon_r$  a partir da relação<sup>1</sup>

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad \text{VII.9}$$

Para um meio qualquer a expressão da lei de Coulomb passará a ser:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{VII.10}$$

O aparecimento do factor  $4\pi$  deve-se ao facto do sistema internacional ser racionalizado. Num sistema racionalizado evita-se que a quantidade de  $4\pi$  apareça em numerosas equações da electricidade exactamente introduzindo-a em denominador na expressão da lei de Coulomb.

### VII.1.5 - Definição de campo eléctrico

Entendemos por campo eléctrico uma região do espaço onde se manifestam acções eléctricas. O vector intensidade do campo eléctrico ou simplesmente vector campo eléctrico  $\vec{E}$ , criado pela carga  $q_1$  num ponto  $P$  à distância  $r$  é, por definição, a força que  $q_1$  exerce sobre a unidade de carga positiva colocada em  $P$ . Fazendo  $q_2 = 1$  C em VII.10

vem

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{VII.11}$$

O vector campo eléctrico aponta no sentido do vector  $\vec{r}$  se  $q_1$  for positivo e em sentido contrário se  $q_1$  for negativo.

Num campo eléctrico, as cargas positivas tendem a deslocar-se no sentido do campo e as negativas em sentido contrário.

Entrando com VII.10 em VII.11

<sup>1</sup> A constante dieléctrica relativa da água líquida (80 a 20 °C) é das mais altas de todos os líquidos. Isto é importante em termos biológicos pois permite dissolver substâncias polares e iónicas para formar soluções aquosas, facilita a mobilidade iónica na fase aquosa e mantém os iões separados em solução.

tem-se:

$$\vec{F} = q_2 \vec{E} \quad \text{VII.12}$$

que significa que a força que se exerce sobre uma carga eléctrica quando colocada num ponto de um campo eléctrico é proporcional ao valor da carga. A relação entre a força e a carga tem um valor constante para um mesmo ponto, qualquer que seja a carga, como aliás já tínhamos visto na Eq. VII.2. Esse valor constante é a intensidade  $\vec{E}$  do campo do ponto considerado.

Notemos que a intensidade do campo eléctrico não é uma simples força, mas sim uma força por unidade de carga

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2}$$

### VII.1.6 - Unidade de campo eléctrico

No S. I. a unidade de campo eléctrico define-se como a intensidade de um campo eléctrico que exerce a força de 1 newton sobre a carga de 1 coulomb.

### VII.1.7 - Campo de distribuições de cargas

Quando se tem uma distribuição de cargas  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_m$  o campo eléctrico produzido por esta distribuição num ponto  $P$  é:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_1^m \frac{q_j}{r_j^2} \frac{\vec{r}_j}{r_j} = \sum_1^m \vec{E}_i \quad \text{VII.13}$$

em que  $\vec{r}_i$  é o vector que aponta da carga ao ponto  $P$ .

Generalizemos estas noções para distribuições contínuas de carga. Uma distribuição desta natureza é caracterizada por uma função densidade.

Tratando-se de uma distribuição espacial de carga num volume  $V$ , consideremos um elemento de volume  $\Delta V$  envolvendo um ponto  $P(x, y, z)$  do domínio  $V$ .



Supondo que em  $\Delta V$  existe a carga  $\Delta q$ , a densidade espacial de carga  $\rho(x, y, z)$  no ponto  $P(x, y, z)$  define-se como sendo

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (\text{C m}^{-3}) \quad \text{VII.14}$$

Tratando-se de uma distribuição superficial de carga (camada eléctrica sem espessura) podemos definir a densidade superficial de carga

$$\sigma(x, y) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (\text{C m}^{-2}) \quad \text{VII.15}$$

em que  $\Delta s$  é um elemento de superfície centrado em  $P(x, y)$ .

De um modo idêntico para uma distribuição linear de carga

$$\lambda(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta x} = \frac{dq}{dx} \quad (\text{C m}^{-2}) \quad \text{VII.16}$$

em que  $\Delta x$  é um elemento de comprimento centrado em  $P(x)$ .

O campo eléctrico produzido por uma distribuição espacial de carga, contida num volume  $V$  e definida pela função  $\rho(x, y, z)$  num ponto  $A(x', y', z')$ , exterior à distribuição, obtém-se somando todos os campos elementares

$$d\vec{E} = \frac{\rho(x, y, z) dV}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{VII.17}$$

produzidos no ponto  $A(x', y', z')$  pela carga  $\rho(x, y, z)dV$  contida no elemento do volume  $dV$

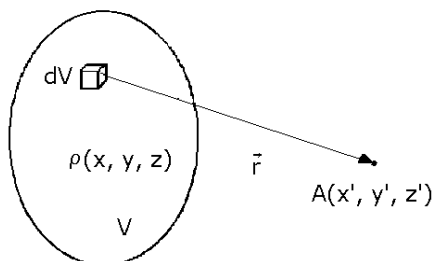


Fig.VII.1 – Campo eléctrico produzido pelo elemento de carga  $\rho dV$  no ponto  $A(x', y', z')$ .

$\vec{r}$  é o vector dirigido do elemento ao ponto **A** e de módulo  $r$ .

A soma dos campos elementares obtém-se a partir de uma integração que nos dá o campo resultante, ou seja,

$$\vec{E}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x, y, z)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dV \quad \text{VII.18}$$

Podemos facilmente demonstrar-se que se  $\rho(x, y, z)$  é finito, o valor do integral da Eq. VII.18 é finito para todos os pontos do espaço, incluindo aqueles dentro da própria distribuição de cargas.

### VII.1.8 - Linhas de campo de um campo eléctrico

É por vezes útil caracterizar o campo eléctrico, numa região do espaço, pelas linhas de campo (também chamadas linhas de forças). Estas são tangentes, em todos os seus pontos, à direcção do campo eléctrico; estão orientadas no sentido deste e, em qualquer ponto do campo, o número de linhas de força por unidade de área, que atravessa uma pequena superfície colocada no ponto normalmente ao campo, é proporcional à intensidade do campo.

Fica, portanto, o campo eléctrico caracterizado em direcção, sentido e grandeza. Para se representar a intensidade do campo eléctrico quantitativamente, convencionou-se que a densidade de 1 linha de força/m<sup>2</sup> corresponde a uma intensidade de 1 newton/coulomb.

Nas Figs. VII.2, VII.3 e VII.4 podem observar-se alguns casos de campo eléctrico representado por linhas de campo.

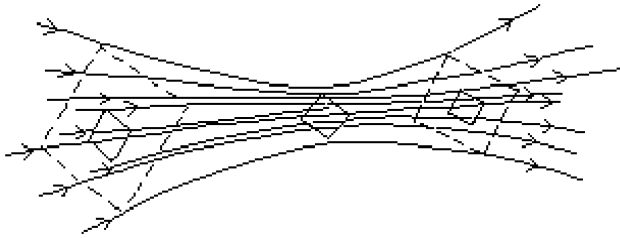


Fig. VII.2 - Linhas de um campo eléctrico. Maior densidade de linhas de campo, maior intensidade de campo eléctrico.

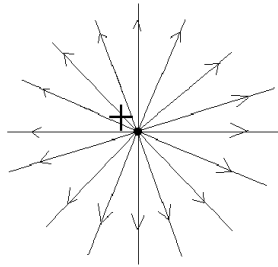


Fig. VII.3 - Linhas de campo de uma carga pontual positiva.

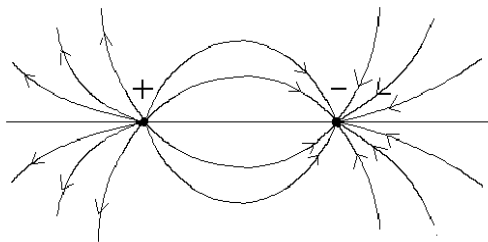


Fig. VII.4 - Linhas de campo de um par de cargas de sinal oposto.

Quando uma carga  $q_1$  é colocada num ponto do espaço, cria um campo eléctrico. As propriedades do espaço são modificadas, pois a carga  $q_1$  produz uma perturbação que se propaga a todos os pontos do seu campo,

---

com a velocidade da luz. O campo eléctrico num ponto é uma propriedade do próprio ponto, resultante daquela acção.

### VII.1.9 - Trabalho e potencial num campo eléctrico

O trabalho elementar por unidade de carga realizado pelo campo de uma carga  $q$  num deslocamento muito pequeno  $d\vec{r}$ , onde  $\vec{E}$  se pode supor constante, é dado por

$$d\tau = \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \hat{r} ds \quad \text{VII.19}$$

$d\tau$  é pois o trabalho realizado pelo campo para deslocar a unidade positiva de carga de  $dr$  à distância  $r$

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr \end{aligned} \quad \text{VII.20}$$

pois que

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$$

O trabalho realizado pelo campo para o deslocamento da carga positiva unitária de  $A$  a  $B$  é

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{AB} d\tau = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned} \quad \text{VII.21}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_A} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_B} \quad \text{VII.2}$$

O trabalho  $\tau$  só depende das distâncias de  $A$  e  $B$  à carga  $q$ , é pois independente do percurso usado para o deslocamento de  $A$  a  $B$ . Quando isto sucede, podemos dizer que o campo que se está a estudar deriva de um poten-

cial.

Para um ponto qualquer à distância  $r$  da carga  $q$  podemos escrever a função:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C^{te} \quad \text{VII.23}$$

A expressão VII.22 fica satisfeita, se considerarmos a função  $V$  para os pontos  $A$  e  $B$  e subtraírmos. Estamos assim a definir uma função, cujo valor só depende da posição no campo eléctrico produzido por  $q$ . É uma função potencial. Se na Eq. VII.23 fizermos a  $C^{te} = 0$ , a função  $V$  é nula para  $r = \infty$ . A origem dos potenciais será no infinito. A expressão para o valor da função potencial ou simplesmente potencial no ponto  $A$  distância  $r$  de  $q$  é:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{VII.24}$$

e representa o trabalho realizado pelo vector campo, para levar a unidade de carga positiva de um ponto à distância  $r$  até infinito.

A expressão que exprime a diferença de potencial entre os pontos  $A$  e  $B$  é

$$\tau_{AB} = V_A - V_B = V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{VII.25}$$

O potencial é uma função escalar.

Quando se tem uma distribuição de cargas pontuais  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_m$  é também possível definir uma função potencial em qualquer ponto do campo criado pela distribuição. O trabalho que o campo resultante produz para deslocar a carga  $+1$  entre dois pontos, é a soma dos trabalhos dos campos componentes.

A função potencial num ponto do campo é dada por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad \text{VII.26}$$

Se se tratar de uma distribuição contínua de carga, caracterizada por uma densidade espacial  $\rho$  limitada ao domínio  $D$ , o potencial num ponto  $P$  à

distância  $r$  do elemento de volume  $dV$  onde se encontra a carga  $\rho dV$  é

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \frac{\rho}{r} dV \quad \text{VII.27}$$

Se na definição de diferença de potencial entre dois pontos, atendermos à expressão usada

$$\tau_{AB} = \int_{AB} d\tau = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

podemos escrever

$$\tau_{AB} = \int_{AB} d\tau = \tau_B - \tau_A$$

por definição de integral definido, representando  $\tau_B$  e  $\tau_A$  os trabalhos por unidade de carga realizados pelo vector  $\vec{E}$  até aos pontos  $B$  e  $A$ , respectivamente. Como definimos que

$$\tau_{AB} = V_A - V_B$$

segue-se que

$$\int_{AB} d\tau = - \int_{AB} dV \quad \text{VII.28}$$

786

ou seja, que

$$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

ou

$$\vec{E} = - \frac{dV}{d\vec{r}} \quad \text{VII.29}$$

Para uma só dimensão podemos escrever

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

ou seja, o campo eléctrico é igual a menos gradiente do potencial (variação de  $V$  com a distância  $x$ ).

No caso de dois pratos paralelos a potenciais  $+V_2$  e  $-V_1$ , que representamos na figura a seguir, podemos saber a intensidade do campo (trata-se de um campo eléctrico uniforme) pela inclinação da recta em b) ou pela densidade das linhas de campo em a).

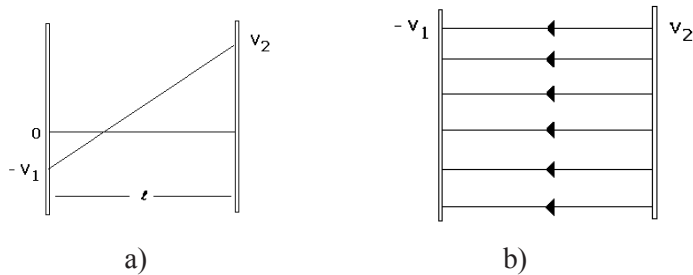


Fig. VII.5 - a) Variação do potencial eléctrico ao longo de  $l$ . b) Linhas do campo eléctrico uniforme de intensidade  $E = \frac{V_2 + V_1}{l}$ .

### VII.1.10 - Algumas considerações

Já sabemos que uma superfície equipotencial é aquela que é lugar geométrico de pontos ao mesmo potencial.

Tendo presente a definição de diferença de potencial entre dois pontos, escolhamos dois pontos **A** e **B** de uma curva assente numa superfície equipotencial. Quaisquer que sejam **A** e **B**, terá que ser  $\tau_{AB} = 0$ , pois que sendo a superfície equipotencial é  $V_A = V_B$ . Para isto se verificar terá de ser o vector campo eléctrico normal em todos os pontos à superfície equipotencial.

---

### VII.1.11 - Corpos condutores

Um facto básico que permite classificar os materiais sob o ponto de vista do seu comportamento num campo eléctrico é a maior ou menor facilidade com que as cargas eléctricas se movem no seu interior. Existe uma grande variedade de possibilidades mas, nos extremos, situam-se alguns condutores perfeitos que praticamente permitem a movimentação das cargas sem qualquer oposição e no outro dieléctricos perfeitos que impedem quase por completo o movimento das cargas.

À temperatura ordinária não há nenhum material que seja condutor perfeito ou dieléctrico perfeito, mas certos materiais em determinadas condições aproximam-se suficientemente daqueles estados para poderem ser considerados como tal.

Num sólido os electrões mais externos dos átomos influenciam-se mutuamente, de tal modo que os níveis de energia se sobrepõem originando bandas de energia para esses electrões. Assim, os electrões de valência que participam nas ligações interatómicas estão situados na banda de valência. Um electrão de valência pode, no entanto, receber energia e passar a um estado energético após abandonar a ligação, em que se possa deslocar livremente no material sem pertencer a nenhum átomo em particular. São estes electrões livres que conferem as propriedades de condução ao sólido. São os electrões de condução. O conjunto de todos os níveis de energia dos electrões de condução constitui a banda de condução.

Existe uma banda proibida de energia a separar a banda de valência da banda de condução. Num isolador, a banda proibida corresponde a um intervalo de energia bastante maior do que a energia térmica média dos electrões à temperatura ambiente.

Num isolador não há praticamente electrões de condução à temperatura ambiente.

Nos semicondutores a banda proibida de energia é menor do que no caso anterior, de modo que à temperatura ambiente existem electrões na banda de condução que tornam o material um razoável condutor. Contudo, à temperatura do zero absoluto, um semiconductor é um isolador perfeito.

Num condutor, um metal, por exemplo, há sobreposição das duas bandas. O material é portanto condutor a qualquer temperatura.

Estudemos algumas propriedades dos condutores.

---



Quando um condutor está no estado neutro, em qualquer volume do condutor há tantas cargas positivas como negativas. Na presença de um campo eléctrico, as cargas deslocam-se. Se existe equilíbrio nas cargas de um condutor, ou seja, se estas se mantêm nas suas posições é porque não há qualquer campo eléctrico a exercer-se sobre elas. Então a condição de equilíbrio é:

$$\vec{E} = 0 \quad \text{VII.30}$$

em todos os pontos da massa interior do condutor.

Se  $\vec{E} = 0$  é necessariamente  $\tau_{AB} = V_A - V_B = 0$ , pois o trabalho por unidade de carga realizado por um campo eléctrico nulo é sempre nulo, quaisquer que sejam **A** e **B** na massa do condutor.

A condição  $\vec{E} = 0$  implica portanto

$$V = \text{Const.} \quad \text{VII.31}$$

A distribuição da carga no condutor em equilíbrio é tal que **V** é o mesmo em todos os pontos. Chama-se a **V** o potencial do condutor.

Quanto à superfície do condutor, se este está carregado, existe campo eléctrico que terá de ser normal à superfície.

O condutor não poderia estar em equilíbrio se o campo à superfície tivesse uma componente tangencial, pois esta faria deslocar as cargas à superfície.

### VII.2.1 - Corrente eléctrica

De um modo geral corrente eléctrica é um deslocamento de cargas. Uma corrente eléctrica resulta da acção de um campo eléctrico.

1) *Sentido da corrente* - Por convenção, o sentido da corrente é o sentido do deslocamento das cargas positivas, ou o sentido contrário ao deslocamento das cargas negativas.

Num fio metálico a corrente eléctrica é devida ao deslocamento de electrões. A corrente tem pois o sentido contrário ao deslocamento real das cargas.

2) *Intensidade da corrente eléctrica*- Se através da secção **S** de um condutor metálico passar até ao instante **t**<sub>1</sub> a carga **q**<sub>1</sub> e até ao instante **t**<sub>2</sub> a

carga  $q_2$ , chama-se intensidade média da corrente através do condutor, no intervalo de tempo  $t_2 - t_1$ , à relação:

$$I_m = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \text{VII.32}$$

Para o caso de um condutor metálico, as cargas  $q_1$  e  $q_2$  são a diferença entre o número total de cargas negativas que passam através de  $S$  num sentido e as que passam em sentido contrário até aos instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

A intensidade da corrente no instante  $t$  é o limite para que tende a Eq. VII.32 quando  $t_2$  tende para  $t_1$  (ou seja  $\Delta t \rightarrow 0$ )

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad \text{VII.33}$$

Fixemos um sentido arbitrário para a corrente. Se durante o intervalo de tempo elementar  $dt$  passar mais carga positiva através de  $S$  no sentido arbitrado do que no sentido inverso, (ou mais carga carga negativa em sentido contrário ao arbitrado do que no sentido arbitrado), então a corrente terá um valor positivo, ou seja,

$$I = \frac{dq}{dt} > 0$$

Para a situação contrária à anterior terá  $I$  valor negativo.

### VII.2.2 - Densidade de corrente eléctrica

Se a corrente  $I$  se distribui uniformemente através da secção de um condutor de área  $S$ , pode definir-se uma densidade média de corrente  $J$ , pela relação

$$J_m = \frac{I}{S} \quad \text{VII.34}$$

Considerando o caso de não haver uma distribuição uniforme da corrente em  $S$ , podemos definir a densidade de corrente num ponto  $P$  da superfície  $S$ . Supondo que  $P$  se encontra no centro do elemento de área  $dS$  e que

$dI$  é a corrente elementar que lhe corresponde, definimos densidade de corrente em  $\mathbf{P}$  por:

$$J = \frac{dI}{dS} \quad \text{VII.35}$$

ou

$$dI = J \, dS \quad \text{VII.36}$$

A corrente total  $I$  que atravessa a secção  $S$  será:

$$I = \int_S dI = \int_S J \, dS$$

No sistema internacional, a densidade de corrente exprime-se em amperes/m<sup>2</sup>.

Quando se tem uma corrente eléctrica, é possível atribuir num dado instante um vector velocidade a cada carga móvel. O corpo do condutor é um campo de velocidades.

Define-se linha de corrente como sendo uma linha que é em cada um dos seus pontos tangente a um vector velocidade.

### VII.2.3 - Lei de Ohm aplicada a condutores filiformes

Um condutor diz-se filiforme quando o diâmetro da sua secção normal for desprezível em relação ao comprimento. Nestas condições, todos os pontos da secção normal se encontram em situação idêntica quanto à corrente eléctrica, podendo dizer-se que o fio representa a própria trajectória das cargas e, por isso mesmo, uma linha de corrente.

A lei de Ohm para os condutores filiformes estabelece que a distância de potencial entre dois pontos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  de um condutor filiforme é proporcional à intensidade da corrente através do fio. A constante de proporcionalidade é por definição a resistência do condutor entre os pontos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Supõe-se para estabelecer esta proporcionalidade que a temperatura do condutor é mantida constante.

Designando por  $\mathbf{R}$  a resistência do fio entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , podemos exprimir a lei de Ohm através da equação

$$V_A - V_B = \pm R I$$

VII.37

O sinal (+) corresponde à situação do sentido arbitrado para a corrente coincidir com o sentido da circulação, ou seja, de **A** para **B**.

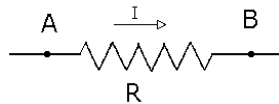


Fig. VII.6 - Resistência percorrida por uma corrente de intensidade  $I$  com sentido positivo arbitrado.

Quando o sentido arbitrado para a corrente for contrário ao sentido da circulação, teremos de por o sinal menos no segundo membro.

Verifica-se que num condutor filiforme a resistência é proporcional ao comprimento do fio  $\ell$ , e inversamente proporcional à secção recta do fio  $S$ , ou seja,

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

VII.38

onde  $\rho$  é uma constante de proporcionalidade característica do material que se chama resistividade.

A unidade do S.I. para a resistência é o ohm que se define como a resistência de um condutor que é percorrido pela corrente de 1 ampere, quando a diferença de potencial nos seus extremos é de 1 volt.

#### VII.2.4 - Efeito de Joule. Lei de Joule

A libertação de calor devido à passagem de corrente eléctrica é chamada de efeito de Joule. Pode observar-se o efeito de Joule, quer em condutores metálicos, quer em electrólitos.

A quantidade de calor libertada por efeito de Joule num condutor filiforme pode estudar-se fazendo passar o fio através de um calorímetro e observando a elevação da temperatura. Podíamos, deste modo, verificar a lei de Joule que nos diz que a energia libertada num condutor de  $R$  ohms de resistência, atravessado durante  $t$  segundos por uma corrente de  $I$  amperes é

---

de  $W$  (joules), sendo

$$W = R I^2 t = \frac{V^2}{R} t \quad \text{VII.39}$$

$$= V I t \quad \text{VII.39}$$

A potência libertada é:

$$P = R I^2 \quad \text{VII.40}$$

Sendo  $P$  em watts para as mesmas condições da Eq. VII.39. Pode exprimir-se a Eq. VII.39 em calorías, obtendo-se a quantidade de calor libertado no intervalo de tempo  $\Delta t$

$$Q = 0,24 R I^2 \Delta t$$

### VII.2.5 - Existência de campo electromotor

Para se ter deslocamento de cargas, basta ligar por um fio condutor dois condutores a potenciais diferentes. A corrente assim obtida tende a anular-se, o que sucederá quando os condutores estiverem ambos ao mesmo potencial.

Para se obter uma corrente contínua, terá que haver um mecanismo que mantenha constante a diferença de potencial (d.d.p.) entre os pólos do gerador.

Consideremos um gerador com uma resistência em série, formando um circuito fechado (Fig. VII.7).

Tanto fora como dentro do gerador o campo eléctrico aponta no sentido dos potenciais decrescentes, ou seja, do pólo positivo para o negativo. Se não houvesse outro campo a actuar, produzir-se-ia uma concentração de cargas positivas no pólo negativo do gerador, até se atingir a igualdade dos potenciais dos dois pólos.

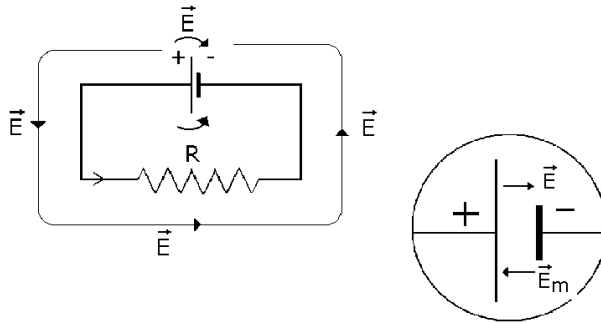


Fig. VII.7 – Campo eléctrico e campo electromotor.

Existe no gerador, além do campo eléctrico  $\vec{E}$ , um campo electromotor  $\vec{E}_m$ , que é uma característica do gerador e que aponta do pólo negativo para o positivo. No interior do gerador, as cargas deslocam-se sob a acção da resultante dos dois campos  $\vec{E}$  e  $\vec{E}_m$  (electromotor).

O trabalho realizado pelo vector campo electromotor no transporte da unidade de carga positiva, desde o pólo negativo até ao pólo positivo do gerador é, por definição, a força electromotriz do gerador.

$$E = \int_{-+} \vec{E}_m d\vec{r} \tag{VII.41}$$

A força electromotriz (f.e.m) tem as dimensões de uma d.d.p. porque o campo electromotor tem as dimensões de um campo eléctrico. A f.e.m exprime-se portanto em volts no S.I.

No interior do gerador é, como vimos, a resultante  $\vec{E} + \vec{E}_m$ , o campo responsável pelo deslocamento das cargas. Calculemos o trabalho daquela resultante no interior do gerador desde o pólo negativo ao positivo

$$\begin{aligned} \int_{-+} (\vec{E} + \vec{E}_m) d\vec{r} &= \int_{-+} \vec{E} d\vec{r} + \int_{-+} \vec{E}_m d\vec{r} \\ &= (V_- - V_+) + \varepsilon \end{aligned} \tag{VII.42}$$

A quantidade dentro do parêntesis não nos suscita qualquer dúvida, pois resulta da própria definição de d.d.p. entre dois pontos. Quanto a  $E$  resulta da própria definição de f.e.m.

Se

$$\vec{E} + \vec{E}_m = 0$$

ou seja, se os campos eléctrico e electromotor se anulam, não haverá deslocamento de cargas. Nestas condições, a expressão VII.42 fica

$$(V_- - V_+) + E = 0$$

ou seja,

$$E = V_+ - V_- \tag{VII.43}$$

que permite concluir que a f.e.m de um gerador é igual à d.d.p. entre os seus polos positivo e negativo, quando não passa corrente através dele.

Consideremos agora um gerador de f.e.m.  $\epsilon$  em série com uma resistência  $R$



Fig. VII.8 - Série constituída por resistência e gerador.

Calculemos a diferença de portencial entre **A** e **C**. Arbitremos um sentido para a corrente. Podemos escrever:

$$V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C)$$

Podemos escrever

$$V_A - V_C = R i$$

Considerando que estamos a dirigir-nos de **A** para **B** e o nosso sentido

de circulação coincide com o sentido arbitrado para a corrente. Deste modo, atribuímos o sinal + à corrente  $i$ . Se estivermos a circular em sentido contrário à corrente arbitrada, devíamos entrar com  $-i$  na expressão de  $V_A - V_B$ .

Para calcularmos  $V_B - V_C$  consideremos o trabalho do campo no interior do gerador

$$\begin{aligned} V_B - V_C &= \int_{+}^{-} \vec{E} \, d\vec{r} - \int_{+}^{-} \vec{E}_m \, d\vec{r} \\ &= i r_i - \varepsilon \end{aligned} \quad \text{VII.44}$$

O trabalho por unidade de carga do vector  $\vec{E}$  desde o pólo + ao pólo - do gerador é igual à queda de tensão produzida na resistência interior do gerador,  $r_i$ . Então,

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= R i + r_i i - \varepsilon \\ &= i (R + r_i) - \varepsilon \end{aligned} \quad \text{VII.45}$$

Expressão que é conhecida por lei de Ohm generalizada.

Convém não esquecermos que para chegarmos à Eq. VII.45 adoptamos as seguintes convenções de sinais:

$i$  precedido do sinal + se o sentido arbitrado para  $i$  coincide com o sentido da circulação ou precedido do sinal - no caso contrário.

E precedido do sinal + se o sentido da circulação encontra primeiro o pólo negativo do gerador ou precedido do sinal - no caso contrário.

Se na Eq. VII.45 é  $A = C$ , ou seja, o ponto A coincide com C é  $V_A - V_C = 0$  e o  $\varepsilon = i (R + r_i)$ . Esta equação aplica-se ao circuito da Fig. VII.8.

### VII.2.6 - Leis de Kirchoff

*Primeira lei ou lei dos nodos* - É uma consequência do princípio da conservação da carga e podemos anunciá-la: a soma das correntes que se dirigem para o nodo é igual à soma das correntes que se afastam.



Na prática, não se conhecem em geral os sentidos reais das correntes mas arbitram-se sentidos para as correntes dos ramos que contribuem para o nodo. No final, após solução do problema, aquelas correntes que tiverem sentidos mal atribuídos aparecem com o sinal menos.

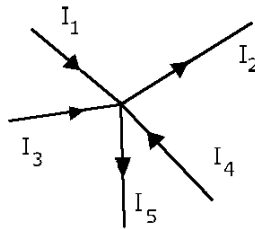


Fig. VII.9 – Nodo onde se encontram 5 correntes.

A partir da Fig. VII.9 vem

$$I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5 \quad \text{VII.46}$$

*Segunda lei ou lei da malhas* - Se na Eq. VII.45 tivéssemos considerado não um único ramo mas diversos, com diferentes correntes e geradores, o raciocínio não se alterava, pois calculavam-se as diferenças de potencial do mesmo modo que para a Eq. VII.45.

A única diferença é que íamos obter um número maior de produtos  $(r + R')$   $i$  e de termos  $\varepsilon$ . Seria então

$$V_A - V_C = \sum_{j=1}^n i_j (R'_j + r_j) - \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$$

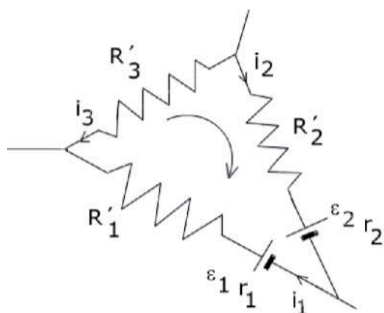


Fig. VII.10 - Malha com os sentidos das correntes e o sentido da circulação.

Considerando que  $R_j = R'_j + r_j$  é

$$V_A - V_C = \sum_{j=1}^n i_j R_j - \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \quad \text{VII.47}$$

Se fizermos  $A = C$  ficamos com uma malha fechada que pode ser, por exemplo, A Eq. VII.47 pode escrever-se

$$\sum_{j=1}^n i_j R_j - \sum_{j=1}^n \varepsilon_j = 0$$

que traduz a lei das malhas, ou seja, a soma algébrica dos produtos  $R_i$  em todos os ramos é igual à soma algébrica das f.e.m. dos geradores.

Mantendo a convenção de sinais já referida e supondo que arbitrávamos as correntes, como se vê na figura, e circulávamos da esquerda para a direita teríamos:

$$\begin{aligned} I_1 (R'_1 + r_1) - i_3 R'_3 + i_2 (R'_2 + r_2) \\ = - \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \end{aligned}$$

### VII.2.7 - Condensadores

Num condutor existem cargas móveis que se podem deslocar de um ponto para o outro no condutor. Já sabemos que essas cargas são electrões num condutor metálico.

Quando um campo actua sobre as cargas de um condutor, estas deslocam-se sob a acção de uma força  $\vec{F} = q \vec{E}$  que actua sobre a carga  $q$ .

O movimento das cargas de um condutor não é totalmente livre. Há colisões entre as cargas móveis e os iões de rede do condutor, que resultam na libertação de energia calorífica. As cargas de um condutor não podem abandoná-lo através da superfície devido a forças atractivas.

Torna-se evidente que a condição de equilíbrio que estudámos para o caso de um condutor isolado e que no fundo se traduzia por  $\vec{E} = 0$  no interior do condutor e  $\vec{E}$  normal à superfície do condutor, terá que se manter quando o condutor se encontra não isolado mas sujeito à acção de um campo exterior  $\vec{E}_e$ .

As cargas livres do condutor ficarão sujeitas a uma força. Que processo irá ocorrer para se restabelecer o equilíbrio das cargas, ou seja, para que estas não sofram deslocamento? Terá que ser o campo resultante no interior do condutor  $\vec{E}_t = 0$ . Sendo  $\vec{E}_t = 0$  no interior do condutor, as cargas terão de se encontrar à superfície. Estas vão dispor-se na superfície do condutor, de modo que a sua distribuição resulte na produção de um campo eléctrico no interior do condutor que somado com  $\vec{E}_e$  dê uma resultante nula.

À superfície o campo resultante terá que ser normal. Deverá haver pontos de superfície do condutor com carga positiva e outros com carga negativa.

Toda a carga de um condutor em equilíbrio se encontra distribuída na sua superfície externa, embora essa distribuição não seja necessariamente uniforme. Verifica-se que:

1) Se num estado de equilíbrio um condutor contém uma carga que permite definir uma função densidade superficial de carga  $\sigma(x,y)$  em cada ponto da superfície essa função é característica do estado e é única.

2) A relação entre os valores de  $\sigma(x,y)$  em dois pontos quaisquer **A** e **B** da superfície do condutor é independente da carga total.

3) A sobreposição de vários estados de equilíbrio num mesmo condutor conduzem a um novo estado de equilíbrio. Já vimos que todos os

pontos de um condutor se encontram ao mesmo potencial, o potencial do condutor.

Consideremos um condutor único e afastado de outros condutores. Suponhamos que tem a carga  $Q$  que lhe confere o potencial  $V$ .

Existe uma relação constante entre  $Q$  e  $V$  para o mesmo condutor que se designa de capacidade do condutor, ou seja,

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{VII.48}$$

Esta relação é influenciada pela presença de outros condutores.

Consideramos agora um condutor oco carregado. Pode demonstrar-se que toda a carga se situa na superfície externa, sendo a carga da superfície interna nula em todos os pontos. Esta situação mantém-se mesmo que haja no interior do condutor, na sua cavidade, outro condutor descarregado.

Contudo, se um condutor tem uma cavidade e no seu interior existe um condutor (2) com carga  $q$  sobre a superfície interior do condutor exterior (1) encontra-se distribuída a carga  $-q$ . Se a carga total de (1) é  $Q$ , isso significa que na superfície externa de (1) existe a carga  $Q+q$ .

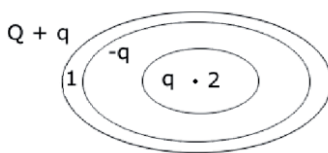


Fig. VII.11 – Distribuição da carga quando o condutor 1 envolve o condutor 2.

Por influência do condutor (2) aparecem cargas negativas em igual número às cargas positivas de (2) na superfície interna do condutor (1). Há influência total.

Reparemos que no interior do condutor (1) a carga total é nula. Esta situação mantém-se, qualquer que seja a carga existente na superfície externa de (1), ou seja, a soma das cargas existentes em (2) e na superfície interna de (1) é sempre zero. Concretamente podemos dizer que, se temos dois condutores de forma que um envolva completamente o outro, as cargas e os poten-

ciais e portanto a diferença de potencial entre os dois condutores não se modifica, não obstante variarmos a carga de superfície externa. As cargas das superfícies em influência são iguais e de sinal contrário. Existe uma relação constante entre o valor da carga e a diferença de potencial entre as superfícies, ou seja,

$$C = \frac{q}{V_2 - V_1} \quad \text{VII.49}$$

onde  $V_2$  e  $V_1$  são os valores do potencial de (2) e (1).

Um conjunto de dois condutores nas condições indicadas constitui um condensador. Este nome resulta da sua capacidade ser muito maior do que a soma das capacidades dos condutores que o constituem.

Entre os diversos tipos de condensador tem especial importância para nós o condensador plano, constituído como o nome indica por dois condutores planos dispostos paralelamente. Quando a área das placas de um condensador plano se pode considerar infinita, o campo eléctrico entre essas placas é constante. A diferença de potencial existente entre as placas é igual ao produto da intensidade do campo pelo afastamento das placas.

$$V_{AB} = \int_{AB} E \, dr = e E$$

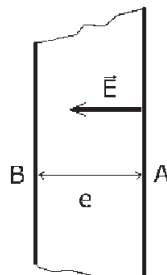


Fig. VII.12 – Sendo  $\vec{E}$  a intensidade do campo eléctrico no dieléctrico de espessura  $e$ , situado entre as placas **A** e **B** do condensador a diferença de potencial entre estas é  $V_{AB} = e E$ .

Sendo  $S$  a área do condensador,  $e$  a distância entre as placas e  $\epsilon$  a constante dieléctrica do meio entre as placas (Fig. VII.12), a capacidade do condensador plano no S.I. é dada por

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S\sigma}{V} = \frac{S\epsilon}{e} \quad \text{VII.50}$$

Esta expressão resulta do valor do campo eléctrico ser dado por  $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ , onde  $\sigma$  é a densidade superficial de carga nas placas, ou seja,  $\sigma = \frac{Q}{S}$ .

Unidade de capacidade - A partir da definição de capacidade de um condutor isolado  $C = Q/V$ , podemos definir a unidade internacional de capacidade, como sendo a capacidade de um condutor isolado que possui a carga de 1 Coulomb quando o seu potencial é de 1 volt. Esta unidade chama-se Farad.

$$C = \frac{S\epsilon}{e} \quad \int_{AB} \frac{\sigma}{\epsilon} dr = \frac{\sigma}{\epsilon} e$$

### VII.2.8 - Carga e descarga de um condensador através de uma resistência

Suponhamos que temos um condensador de capacidade  $C$  em série com uma resistência  $R$  e um gerador de f.e.m.  $\epsilon$  formando um circuito que pode ser fechado pelo interruptor  $M$ . Suponhamos também que o condensador está descarregado para  $t = 0$ , instante em que se fecha o circuito

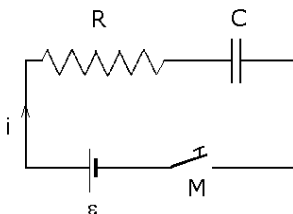


Fig. VII.13 – Circuito de carga do condensador  $C$  através da resistência  $R$ .

A equação deste circuito é:

$$R i + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

onde  $i$  e  $q$  são os valores instantâneos da corrente através do circuito e da carga do condensador.

Como  $i = \frac{dq}{dt}$ , a equação anterior pode escrever-se:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon \quad \text{VII.51}$$

A solução desta equação é:

$$q = q_{\infty} (1 - e^{-t/RC}) \quad \text{VII.52}$$

onde  $e$  é a base dos logaritmos naturais. O valor  $q_{\infty}$  é a carga do condensador para  $t = \infty$ . Facilmente se vê que a carga máxima do condensador será obtida quando a d.d.p. entre as armaduras do condensador for exactamente  $\varepsilon$ , ou seja, então  $q_{\infty} = C\varepsilon$ . A Eq. VII.52 pode escrever-se

$$q = C\varepsilon (1 - e^{-t/RC}) \quad \text{VII.53}$$

A corrente através do circuito pode obter-se por derivação da Eq. VII.53, o que nos dá

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

ou

$$i = i_0 e^{-t/RC} \quad \text{VII.54}$$

As representações gráficas destas funções são, para a carga:

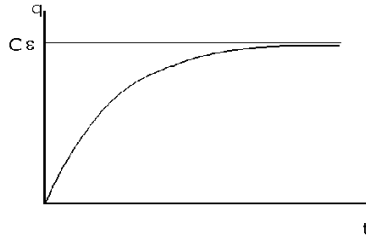


Fig. VII.14 – Variação da carga do condensador após ligação do interruptor na Fig. VII.13.

e para a corrente

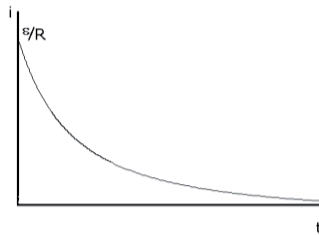


Fig. VII.15 – Variação com o tempo da corrente através do circuito da Fig. VII.13, após a ligação do interruptor.

A função da Eq. VII.54 é uma exponencial decrescente; a função da Eq. VII.53 é uma função crescente, que corresponde a uma constante subtraída de uma exponencial.

804

Como a tensão através do condensador é  $V_c = \frac{q}{C}$ , podemos a partir da Eq. VII.53 escrever

$$V_c = \epsilon (1 - e^{-t/RC}) \quad \text{VII.55}$$

Como era de esperar a d.d.p. entre as armaduras do condensador tende para  $\epsilon$ .

Como o expoente de  $e$  tem de ser um valor sem dimensões, o produto  $RC$  tem as dimensões de um tempo. É a constante de tempo do circuito.



Admitamos agora que, uma vez o condensador carregado com a carga máxima  $q_{\infty}$  se abre o interruptor **M** e se retira o gerador. Obtém-se o circuito que representamos a seguir.

Suponhamos agora que se fecha o circuito através do interruptor **M**. O condensador irá descarregar-se através de **R**, produzindo uma corrente  $i'$  de sentido contrário a  $i$ . A variação desta corrente com o tempo é

$$i' = -i = i_0' e^{-t/RC} \quad \text{VII.56}$$

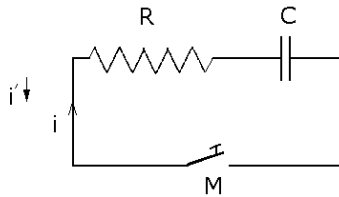


Fig. VII.16 - Circuito de descarga do condensador **C** através da resistência **R**.

A tensão entre as armaduras do condensador varia segundo

$$V_c = \varepsilon e^{-t/RC} \quad \text{VII.57}$$

A carga do condensador tem por valor

$$q = C \varepsilon e^{-t/RC} \quad \text{VII.58}$$

Admitindo que se deixa de correr um período de tempo igual a  $RC$ , observamos que, por exemplo, a Eq. VII.57 se transforma em

$$\begin{aligned} V_c &= \varepsilon \frac{1}{e} \\ &= 0,37 \varepsilon \end{aligned}$$

Podemos pois dizer que a constante de tempo do circuito é o tempo  $\tau = RC$  para o qual a tensão no condensador se reduz a 37% do seu valor inicial.

### VII.3 - Corrente alterna

Uma corrente através de um condutor é contínua quando é constante a quantidade de carga que atravessa qualquer secção do condutor por unidade de tempo, ou seja,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C^{te}.$$

Há contudo correntes em que a relação  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  não se mantém constante.

Essas correntes são chamadas correntes variáveis.

Existem correntes variáveis para as quais qualquer dos valores que a corrente toma, se volta a repetir passado um intervalo de tempo que se mantém constante. Tais correntes chamam-se periódicas. Correntes periódicas alternadas são aquelas em que os valores são alternadamente positivos e negativos e a periodicidade se mantém. Correntes sinusoidais são correntes alternadas nas quais é possível exprimir-se a intensidade em função do tempo por meio de uma função seno ou coseno. Aliás, demonstra-se que, qualquer que seja a corrente periódica que se considere é sempre possível decompô-la numa soma constituída por um termo constante e um conjunto de termos sinusoidais com frequências múltiplas de um certo valor, ou seja,

$$i(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\omega} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\omega} b_n \sin n\omega t \quad \text{VII.59}$$

onde  $a_0 =$  constante, sendo  $a_n$  e  $b_n$  são constantes para cada valor de  $n$ .

A pulsação ou frequência angular é  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , sendo  $T$  o período da função sinusoidal quando  $n = 1$ . Este processo de decomposição de uma corrente periódica, seja ela qual for, numa soma de correntes sinusoidais, chama-se decomposição em série de Fourier.

Para  $n = 1$  obtêm-se os termos correspondentes à frequência fundamental e para  $n > 1$  obtêm-se os harmónicos.

A decomposição em série de Fourier tem grande interesse pois, sabendo-se as propriedades das correntes ou, de um modo geral das funções sinusoidais, podem estudar-se quaisquer outras correntes ou funções periódicas.

No organismo ocorrem fenómenos eléctricos que são periódicos e o seu estudo é por vezes facilitado quando se consegue a sua decomposição em termos sinusoidais.

### VII.3.1 - O modelo vectorial da corrente alterna

Quando se tem uma diferença de potencial sinusoidal, a que vulgarmente se chama tensão alterna, a sua expressão é, de modo idêntico ao referido para as correntes alternas,

$$v(t) = V \sin \omega t \quad \text{VII.60}$$

$v(t)$  é o valor instantâneo da tensão no instante  $t$ ,  $V$  é o valor máximo ou amplitude da tensão,  $\omega = 2\pi/T$  é a pulsação ou frequência angular e  $T$  é o período da função sinusoidal.

O produto  $\omega t$  é a fase da função sinusoidal.

Quando  $\omega t = \pi/2$  é  $v(t) = V$ , ou seja, a tensão atinge o seu valor máximo.

Para  $\omega t = \pi$  é  $v(t) = 0$  e para  $\omega t = \frac{3\pi}{2}$  é  $v(t) = -V$ .

Os valores de  $v(t)$  podem também ser obtidos considerando um vector de grandeza  $V$  a rodar no sentido directo em torno do seu ponto de aplicação, situado na origem de um sistema de eixos, com velocidade angular  $\omega$  e em que para cada instante o valor da função  $v(t)$  é dado pela projecção do vector no eixo dos  $yy$ .

Deste modo, para  $t = 0$  o vector  $V$  coincide com o eixo dos  $xx$ , como se verifica a partir da Eq. VII.60.

Na origem dos tempos a fase é nula neste caso. Pode suceder porém que para  $t = 0$  o vector  $V$  faça um ângulo  $\alpha_v$  com o eixo dos  $xx$ .

A tensão  $v(t)$  é então

$$v(t) = V \sin (\omega t + \alpha_v)$$

onde  $\alpha_v$  é a fase na origem.

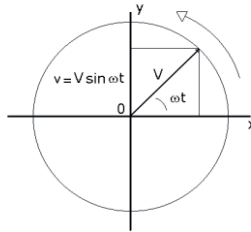


Fig. VII.17 -  $v(t)$  é dado, em cada instante, pela projecção de um vector de grandeza  $V$  (a amplitude da função sinusoidal) a rodar no sentido directo em torno da origem de um sistema de eixos, com velocidade angular  $\omega$ .

Seja  $i(t) = I \sin \omega t$  a intensidade da corrente que atravessa a resistência  $R$ .

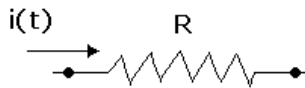


Fig. VII.18 - Pode aplicar-se a lei de Ohm, em cada instante, quando uma corrente sinusoidal atravessa a resistência  $R$ .

A diferença de potencial entre os extremos da resistência é para cada instante, pela lei de ohm:

$$v(t) = RI \sin \omega t$$

ou

$$v(t) = V \sin \omega t$$

com

$$V = RI$$

VII.61

A tensão e a corrente através de uma resistência estão, como se observa, comparando  $i(t)$  e  $v(t)$ , em fase.

Consideremos agora uma bobine intercalada num circuito percorrido por uma corrente  $i(t) = I \sin \omega t$

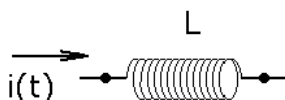


Fig.VII.19 – Representação da indutância.

Quando num circuito há uma variação do fluxo do campo magnético (o que sucede, por exemplo, quando se aplica a uma bobine uma corrente variável), produz-se uma força electromotriz de indução. Esta força electromotriz induzida é dada pela expressão:

$$e_i = - \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{VII.62}$$

onde  $\phi$  é o fluxo do campo magnético  $\mathbf{B}$  (criado por exemplo pela corrente variável que percorre o próprio circuito), e é dado pela expressão

$$\phi = B S \cos\alpha$$

onde  $\mathbf{B}$  é a intensidade do campo magnético,  $S$  a área do circuito e  $\alpha$  o ângulo que a direcção de  $\mathbf{B}$  faz com a normal a  $S$ .

A variação do fluxo do campo magnético produz correntes de indução, ou seja, origina-se uma f.e.m de indução. Quando se trata do caso de variações do fluxo do campo magnético produzido pela própria corrente que percorre o circuito, tem-se o fenómeno de auto-indução que nos interessa analisar de momento. O campo magnético criado por uma corrente é proporcional à intensidade da corrente. Deste modo, também o fluxo do campo magnético criado por uma corrente é proporcional à intensidade da corrente. Assim, considerando variações do fluxo e variações da corrente do circuito por unidade de tempo, temos, considerando a Eq. VII.62

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = - L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad \text{VII.63}$$

A justificação das finais é dada pela lei de Lenz: quando através de um circuito há uma variação do fluxo  $\phi$  é induzida nesse circuito uma cor-

rente, cujo campo magnético por ela criado se opõe à variação do campo que lhe deu origem.

Comparando as Eqs. VII.63 com VII.62 temos

$$e_i = L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

ou no limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$

$$e_i = L \frac{di}{dt} \quad \text{VII.64}$$

A constante de proporcionalidade  $L$  é característica da bobine e chama-se indutância. A unidade de indutância é o henry, no S.I.. O henry é a indutância de uma bobine para a qual a variação de corrente de 1 ampere por segundo produz a f.e.m de indução de 1 volt.

Conhecendo-se  $L$  e a expressão da intensidade da corrente que percorre a bobine, pode calcular-se a d.d.p. entre os seus extremos, ou seja, a f.e.m. produzida pela auto-indução.

Voltemos ao caso inicialmente posto da bobine de indutância  $L$  ser percorrida pela intensidade de corrente de valor

$$i(t) = I \sin \omega t$$

Da Eq. VII.64 será

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{d}{dt} [i(t)] \\ &= L \frac{d}{dt} (I \sin \omega t) \\ &= \omega L I \cos \omega t \end{aligned}$$

ou fazendo

$$V_L = \omega L I$$

$$v_L(t) = V_L \cos \omega t \quad \text{VII.65}$$

Retomemos o círculo trigonométrico com vectores de grandeza  $I$  e  $V$  a rodar com velocidade angular  $\omega$  e consideremos as funções  $i(t)$  e  $v(t)$  dadas pelas projecções daqueles vectores nos eixos dos  $yy$ . Se atendermos a que

$$i(t) = I \sin \omega t$$

e

$$v_L(t) = V_L \cos \omega t$$

$$= \omega L I \sin (\omega t + \pi/2)$$

VII.66

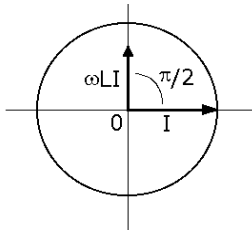


Fig. VII.20 - A tensão através da bobine tem amplitude  $\omega LI$  e está adiantada de  $\pi/2$  em relação à intensidade da corrente que a percorre.

Verifica-se que, em qualquer instante, a tensão através da bobine está adiantada de  $\pi/2$  em relação à intensidade da corrente que a percorre.

Suponhamos agora que se aplica uma tensão alternada  $v(t) = V \sin \omega t$  a um condensador de capacidade  $C$ . No primeiro quarto de período acumular-se-á carga positiva numa das placas do condensador. Esta carga irá depois através do circuito acumular-se no outro prato. Isto equivale a dizer que uma corrente alterna percorre o circuito exterior ao condensador. Sendo  $v(t)$  a tensão aplicada à variação da carga do condensador

$$i(t) = \frac{d}{dt} [q(t)] = C \frac{d[v(t)]}{dt}$$

mas

$$\frac{d[v(t)]}{dt} = \omega V \cos \omega t$$

donde

$$i(t) = \omega CV \cos \omega t = \omega CV \sin (\omega t + \pi/2)$$

e fazendo

$$\omega CV = I$$

Temos

$$i(t) = I \sin(\omega t + \pi/2) \quad \text{VII.67}$$

Procedendo de forma semelhante ao caso da bobine e atendendo agora a que

$$v(t) = V \sin \omega t$$

e

$$i(t) = I \sin(\omega t + \pi/2)$$

concluimos que a tensão entre as placas de um condensador está atrasada de  $\pi/2$  em relação à intensidade ou seja (Fig.VII.21).

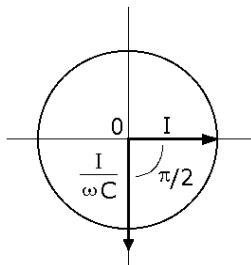


Fig. VII.21 - A tensão entre as placas de um condensador está atrasada de  $\pi/2$  em relação à intensidade da corrente que a percorre e tem amplitude  $\frac{I}{\omega C}$ .

Na Fig. VII.21 considerou-se  $i(t)$  com fase nula na origem para ser mais fácil a comparação com o caso da bobine. Considerou-se também a amplitude da tensão  $V$  em função de  $I$ . A relação  $I = \omega CV$  dá imediatamente

$$V = \frac{I}{\omega C}$$

de modo semelhante a  $V = \omega LI$  para o caso da bobine. Estas duas últimas expressões têm analogias com a equação  $V = RI$  para a corrente através de



uma resistência. As quantidades  $\frac{1}{\omega C}$  e  $\omega L$  são análogas a **R** no sentido de representarem igualmente a oposição de um componente do circuito à passagem da corrente e têm as mesmas dimensões que **R**.

Os valores  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  e  $X_L = \omega L$  são as reatâncias capacitiva e indutiva, respectivamente.

Visto  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  a reatância capacitiva diminui com o aumento da frequência, pelo que um condensador é facilmente atravessado por correntes com frequência elevada, enquanto que para corrente contínua ( $\omega=0$ ), a reatância é infinita e a corrente não passará.

Para a bobine, a reatância indutiva  $X_L = \omega L$  aumenta com a frequência, como seria de esperar, pois uma corrente de alta frequência apresenta variações mais rápidas. Para a corrente contínua a bobine não representa qualquer reatância pois  $X_L = 0$ .

Se tivermos um circuito constituído por um gerador de corrente alterna em série com um condensador e uma resistência, como se observa na Fig. VII.22, o gerador apresenta entre os seus pólos a tensão  $v = V \sin \omega t$ .

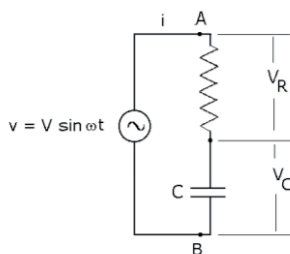


Fig. VII.22 - Circuito RC com gerador de tensão alterna.

A corrente através do circuito, ou seja, passando na resistência e condensador, é

$$i = I \sin (\omega t + \alpha_i)$$

Notemos que a tensão do gerador tem fase na origem nula, daí o atribuímos a fase  $\alpha_i$  à corrente **i**.

Podemos usar o diagrama vectorial para adicionar as tensões alternadas através dos componentes **R** e **C** e determinar a tensão total entre os pontos **V<sub>C</sub>** e **V<sub>R</sub>** as amplitudes das tensões através de **C** e **R**. No diagrama vectorial temos:

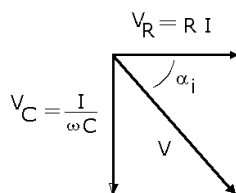


Fig. VII.23 - A diferença de potencial entre **A** e **B**, obtém-se projectando em cada instante o vector  $\vec{V}$ , sobre o eixo dos **yy**.

A diferença de potencial nos terminais de resistência está em fase com a intensidade da corrente e é igual ao produto **RI**. A diferença de potencial entre as placas do condensador está atrasada de  $\pi/2$  em relação à intensidade da corrente que é a mesma, neste caso, que atravessa a resistência. O nódulo do vector, ou seja, a amplitude de **V<sub>C</sub>** é igual a  $\frac{I}{\omega C}$ , como vimos anteriormente. Somando os dois vectores, a resultante é o vector  $\vec{V}$  que, sendo a soma das tensões alternas através de **R** e **C**, é a diferença de potencial entre **A** e **B**, ou seja, entre os pólos do gerador.

Na fig. VII.23 vemos que a corrente do circuito está adiantada de  $\alpha_i$  em relação à tensão do gerador. Assim a partir da fig. VII.23 temos

$$\begin{aligned}
 V &= \sqrt{V_R^2 + V_C^2} \\
 &= \sqrt{R^2 I^2 + I^2/\omega^2 C^2} \\
 &= I \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}
 \end{aligned}
 \tag{VII.68}$$

Fazendo

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

vem

$$V = Z I$$

VII.69

$Z$  representa a relação entre os valores máximos de  $v$  e  $i$  aplicados no circuito e chama-se impedância do circuito. A impedância inclui o efeito da resistência e do condensador, simultaneamente, no circuito. Se no circuito existir além destas componentes uma bobina, a impedância também incluirá o efeito da sua indutância.

Consideremos um circuito  $R, L, C$ , mostrado na fig. VII.25.

Considerando o circuito da Fig. VII.24 o diagrama vectorial toma o aspecto mostrado na fig. VII.25.

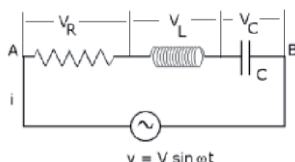


Fig. VII.24 - Circuito RLC com gerador de tensão alterna.

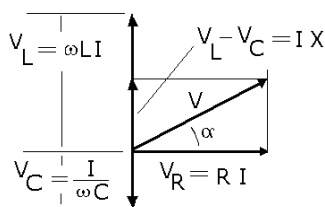


Fig. VII.25 - Diagrama vectorial indicando os vectores  $V_L, V_C, V_R$  e  $V$ .

A resultante dos vectores  $V_L, V_C$  e  $V_R$  é obtida somando primeiro  $V_L$  e  $V_C$ , cuja resultante dá  $I(\omega L - \frac{1}{\omega C})$  ou  $IX$ , se fizermos  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  e a resultante total dá:

$$V = I \sqrt{R^2 + X^2}$$

VII.70

A impedância do circuito é agora

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad \text{VII.71}$$

$X$  é a reatância total do circuito e é a diferença entre a reatância indutiva  $X_L = \omega L$  e capacitiva  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ , ou seja,  $X = X_L - X_C$ .

O valor  $Z$  obtido é unicamente o módulo da impedância. Em rigor, a impedância tem de ser definida por uma grandeza e um ângulo. O ângulo é a diferença entre as fases da tensão e intensidade num dado instante. A grandeza ou módulo é o valor  $Z$  acima calculado.

A representação das tensões através das componentes do circuito por meio de vectores facilita a análise do sistema, mas tem interesse observar-se a representação gráfica das sinusóides correspondentes.

Na figura seguinte podemos observar a correspondência entre as duas representações.

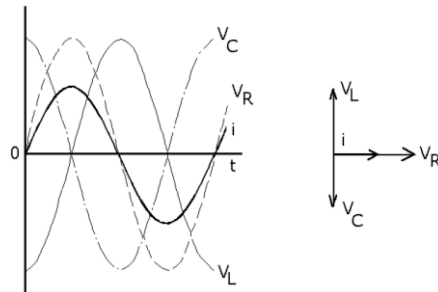


Fig. VII.26 - Representação gráfica das funções  $i$ ,  $v$ ,  $v_R$ ,  $v_C$  e  $v_L$ , com o correspondente diagrama vectorial.

A intensidade eficaz de uma corrente alterna, (num circuito com resistência e sem condensador) é a intensidade da corrente contínua que nas mesmas condições (no mesmo tempo e no mesmo circuito) produz a libertação da mesma quantidade de calor.

A intensidade eficaz de uma corrente alterna de valor máximo  $I$  é:

$$I_{ef} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad \text{VII.72}$$

Do mesmo modo, a tensão eficaz de uma tensão de valor máximo  $V$  é:

$$V_{\text{ef}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad \text{VII.73}$$

O módulo  $Z$  da impedância pode ser expresso em termos dos valores eficazes da corrente e tensão, pois

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{\sqrt{2} V_{\text{ef}}}{\sqrt{2} I_{\text{ef}}} = \frac{V_{\text{ef}}}{I_{\text{ef}}} \quad \text{VII.74}$$

Voltando à expressão de  $Z$  para o circuito RLC (Eq. VII.71), facilmente observamos que haverá sempre uma frequência angular  $\omega$  para a qual  $Z = R$ . Corresponde isto a ter a reatância total nula, ou seja,

$$\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0$$

ou seja,

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Esta frequência corresponde à ressonância do circuito. Para esta frequência  $Z$  tem um valor mínimo, pelo que a intensidade  $I$  será máxima no circuito.

Para valores de  $\omega$  superiores a  $\omega_r$  o termo  $\omega L = X_L$  será superior a

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

A frequência de ressonância do circuito é:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad \text{VII.75}$$

Observando a Fig. VII.26, concluímos que na ressonância, ou seja, quando  $X_L = X_C$  é  $\alpha = 0$ . Portanto, a diferença de fase entre a corrente no circuito e a tensão total aplicada é zero.

---

**VII.3.2 - Potência num circuito de corrente alterna**

A potência fornecida num dado instante a um circuito percorrido por uma corrente alterna de valor instantâneo  $i(t)$ , sendo  $v(t)$  a tensão instantânea aplicada, é

$$p(t) = v(t)i(t) \quad \text{VII.76}$$

Quando o circuito alimentado é constituído unicamente por uma resistência, a corrente e a tensão estão sempre em fase, sendo o seu produto sempre positivo. Isto significa que há transformação de energia eléctrica em calor que abandona o circuito.

A potência média fornecida a um circuito exterior de impedância  $Z$ , durante um intervalo de tempo suficientemente grande, tem de ser calculada a partir de uma soma de produtos  $v(t)i(t)$  obtidos para intervalos de tempo muito pequenos.

Devemos lembrar-nos que além da variação com o tempo, poderá haver diferença de fase entre aquelas variáveis, de modo que o produto será umas vezes positivo, outras, negativo. Teremos que efectuar uma integração. Vamos fazer essa integração só para o intervalo de um período. Nos períodos que seguem vai repetir-se exactamente o ocorrido nesse período. Então,

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt \quad \text{VII.77}$$

que não é mais do que o integral da potência instantânea para o intervalo de um período.

Suponhamos que  $v(t)$  e  $i(t)$  são funções seno e que existe uma diferença de fase  $\phi$  entre elas. Podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{T} \int_0^T V \sin(\omega t + \phi) I \sin \omega t dt \\ &= \frac{VI}{2T} \left[ \int_0^T \cos \phi dt - \int_0^T \cos(2\omega t + \phi) dt \right] \end{aligned}$$


---

O integral da potência instantânea é o integral da soma de uma constante com uma função sinusoidal, pois que sendo:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a-b) - \cos (a+b)]$$

é

$$\sin (\omega t + \phi) \sin \omega t = \cos \phi - \cos (2\omega t + \phi)$$

O valor do segundo integral dentro do parêntesis é nulo, visto tratar-se da área subentendida por uma sinusóide durante o intervalo de tempo correspondente a dois períodos. O primeiro integral é o integral de uma constante, sendo o seu valor, para o intervalo de um período,  $T \cos \phi$ . Então,

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{VI}{2T} T \cos \phi \\ &= \frac{VI}{2} \cos \phi \end{aligned} \qquad \text{VII.78}$$

Podemos ver graficamente o significado destas operações na Fig. VII.27.

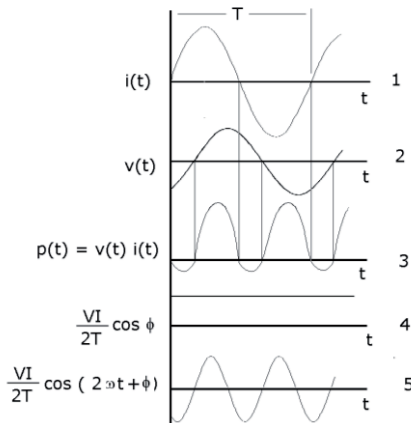


Fig. VII.27 - Representação gráfica de  $i(t)$ ,  $v(t)$ ,  $p(t)$ ,  $\bar{p}$  e  $\frac{VI}{2T} \cos (2\omega t + \phi)$ .

O valor de  $p(t)$  para cada instante é obtido a partir do produto  $v(t) i(t)$  para o instante considerado. Este produto 3) é umas vezes positivo outras negativo, consoante  $v(t)$  e  $i(t)$  têm o mesmo ou sinais contrários. A função  $p(t)$  ou potência instantânea é uma função sinusoidal deslocada em relação ao eixo das abcissas e com frequência angular dupla de  $v(t)$  e  $i(t)$ .

A função 3) da Fig. VII.27 ou potência instantânea pode obter-se subtraindo a função 5) da função 4), como se demonstrou analiticamente atrás.

A área compreendida entre uma curva e o eixo dos  $xx$  é o integral da função, cuja representação gráfica é a referida curva para o intervalo de um período. Os integrais das funções 1) e 2) são nulos porque as áreas negativas são iguais às áreas positivas.

Na função 3) a parte positiva de área é superior à parte negativa. A área positiva na curva 3) corresponde à potência cedida pelo gerador à impedância do circuito. A parte negativa da área, situada abaixo do eixo dos  $xx$ , corresponde à potência cedida pela impedância ao gerador.

A quantidade de energia cedida ao circuito pelo gerador depende do ângulo  $\phi$ , ou seja, da diferença de fase entre  $v(t)$  e  $i(t)$ .

No caso da diferença de fase ser  $\pi/2$ , vejamos quais as conclusões que tirámos do que dissemos até agora.

Da expressão deduzida para  $\bar{p}$  concluímos que  $\bar{p} = 0$ , para  $\phi = \pi/2$  ou  $-\pi/2$ . O primeiro caso corresponde ao caso da impedância ser uma indutância pura. Consideremos a representação gráfica de  $v(t)$ ,  $i(t)$  e  $p(t)$

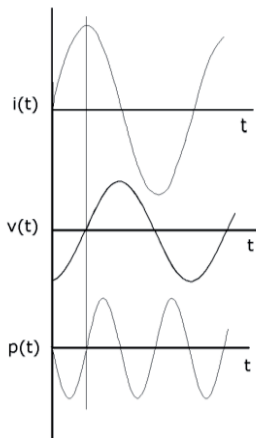


Fig. VII.28 - Gráfico de  $v(t)$ ,  $i(t)$  e  $p(t)$  para o caso de uma indutância pura.



$v(t)$  está adiantado de  $\pi/2$  em relação a  $i(t)$ .

A potência  $p(t)$  é uma função sinusoidal em relação ao eixo dos tempos e com frequência angular dupla de  $i(t)$ . Para o caso da impedância ser um condensador chegaríamos a uma conclusão idêntica.

Tanto uma indutância como um condensador são capazes de restituir à fonte a energia que esta lhes fornece durante um período. O condensador armazena energia no campo eléctrico existente entre as suas placas e a indutância no campo magnético criado.

Quando a impedância é uma resistência, tensão e intensidade estão em fase.

Como se pode observar na Fig. VII.29, a potência terá o valor médio máximo possível. Além disso, não é devolvida qualquer energia ao gerador, como se conclui por não haver parte negativa na curva.

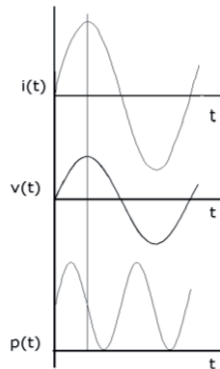


Fig. VII.29 - Gráfico de  $v(t)$ ,  $i(t)$  e  $p(t)$  para o caso de uma resistência pura.

Como  $\phi = 0$  para o caso da resistência, a potência média libertada é

$$\bar{p} = \frac{VI}{2}$$

ou, como  $V = RI$

$$\bar{p} = \frac{R I^2}{2}$$

A intensidade de uma corrente contínua que libertaria a mesma potência na resistência  $R$  será

$$I_{ef} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

pois

$$\bar{p} = R \left( \frac{I}{\sqrt{2}} \right)^2 = R I_{ef}^2$$

A expressão geral para a potência média libertada no circuito Eq. VII.78 pode pois escrever-se

$$\bar{p} = V_{ef} I_{ef} \cos \varnothing \quad \text{VII.79}$$

#### VII.4 – Diatermia com correntes eléctricas / Electrocoagulação

Diatermia com correntes eléctricas<sup>2</sup> é o processo que consiste em fazer passar correntes eléctricas através dos tecidos, com desenvolvimento de calor por efeito de Joule, nas resistências dos tecidos. Estas resistências são devidas, sobretudo, a tecido adiposo e muscular. A resistividade do tecido adiposo é superior à do tecido muscular.

Quando o calor produzido não perturba a estrutura celular, porque se mantém dentro dos limites fisiológicos, a diatermia diz-se médica. Neste caso, o calor gerado destina-se a produzir um aumento da circulação local, ou diminuir as dores, nas doenças reumática e artrítica. Se o calor libertado se destina a produzir destruição local dos tecidos, a diatermia é cirúrgica.

A aplicação de correntes alternadas em diatermia tem vantagens sobre a aplicação da corrente contínua. As correntes contínuas originam fenómenos electrolíticos, com aparecimento de produtos com possível acção indesejável sobre os tecidos e, quando elevadas, induzem despolarização com contracções musculares que podem ser perigosas se atingirem o músculo cardíaco. As correntes alternas de frequência suficientemente elevada, não produzem electrólise nem despolarização

<sup>2</sup> - Para além da utilização de corrente eléctrica, a diatermia pode ser efectuada utilizando microondas e ultrassons.

Uma aplicação importante da passagem da corrente alternada no organismo é a electrocoagulação.

A electrocoagulação é a coagulação dos tecidos orgânicos devida ao calor libertado, pela passagem de uma corrente eléctrica alterna, de baixa tensão e elevada frequência. O gerador de corrente é ligado ao corpo por dois terminais: o eléctrodo inactivo, de área apreciável, em contacto íntimo com a pele, e o eléctrodo activo, de reduzidas dimensões, que, quando próximo dos tecidos, faz passar um arco eléctrico que desenvolve calor elevado para provocar a coagulação e cortar estruturas celulares. A temperatura do eléctrodo activo pode atingir 1000 °C. A extensão e profundidade da coagulação dependem essencialmente da densidade da corrente eléctrica, regulável no gerador e elevada junto do eléctrodo activo, bem como do tempo de actuação. A electrocoagulação é útil em cirurgia geral como meio fácil de realizar a hemostase de pequenos vasos e destruir porções de tecido de extensão apreciável, tais como tumores, sem derramamento de sangue. A frequência utilizada nesta técnica é muito elevada, possibilitando a passagem de corrente sem activação dos músculos.

### VII.5 - Dipolos eléctricos

Dipolo eléctrico é um conjunto de duas cargas eléctricas pontuais de igual valor, mas de sinal contrário e situadas a uma distância **a** muito pequena. Ignoraremos as acções recíprocas entre estas cargas bem como as forças que as mantêm à distância constante **a**.

O ponto médio do segmento de comprimento **a** é o centro **O** do dipolo e a recta que contém as cargas é o eixo do dipolo. O sentido positivo do eixo é o que aponta do centro do dipolo para a carga positiva. Quando se considera um ponto **P** do campo do dipolo, a recta que une o centro **O** com o ponto **P** é a linha de captação e o ângulo formado pela linha de captação com a parte positiva do eixo do dipolo é o ângulo de captação.

Por definição, o momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$  do dipolo, é um vector assente sobre o eixo do dipolo, dirigido da carga negativa para a positiva e cuja grandeza é o produto do valor da carga pela distância **a**, ou seja,

$$|\vec{p}| = q a$$

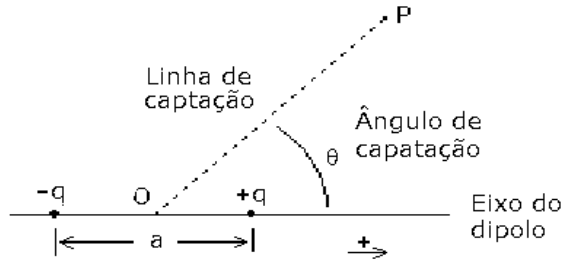


Fig.VII.30 - Dipolo eléctrico. Eixo do dipolo. Linha e ângulo de captação.

A unidade de momento dipolar eléctrico no S.I. é o Coulomb metro (C m). Por vezes é utilizada outra unidade o debye que equivale a  $(1/3) \times 10^{-29}$  C m.

### VII.5.1 - Potencial criado por um dipolo eléctrico num ponto P

As acções produzidas num ponto **P** do campo de um dipolo são a sobreposição das acções que, individualmente, cada uma das cargas cria no mesmo ponto.

Os potenciais criados pelas cargas **+q** e **-q** no ponto são, respectivamente:

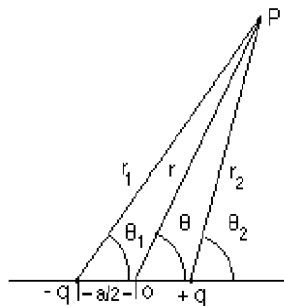


Fig. VII.31 - Distâncias e ângulos com interesse no cálculo do potencial.

$$V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r_1} \quad \text{VII.81}$$

e

$$V_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2} \quad \text{VII.82}$$

O potencial total será

$$V = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad \text{VII.83}$$

Supondo que o ponto **P** é tal que:

$$r \gg a$$

tem-se como aproximação,

$$\theta \simeq \theta_1 \simeq \theta_2 \quad \text{VII.84}$$

então

$$r_1 = r + \frac{a}{2} \cos \theta$$

e

$$r_2 = r - \frac{a}{2} \cos \theta \quad \text{VII.85}$$

Substituindo estes valores na equação de **V**, vem

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r - \frac{a}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2} \cos \theta} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{a q \cos \theta}{r^2 - \frac{a^2}{4} \cos^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad \text{VII.86}$$

Como  $r \gg a$  é também  $r^2 \gg \frac{a^2}{4} \cos^2 \theta$ , pelo que

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq \cos\theta}{r^2}$$

Como  $aq = |\vec{p}| = p$  vem:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} \quad \text{VII.87}$$

Podemos dizer então que:

- 1) O potencial criado por um dipolo eléctrico num ponto, aumenta com o aumento do módulo do momento dipolar eléctrico do dipolo.
- 2) Para um dado dipolo e para pontos de uma mesma linha de captação, o potencial varia inversamente com o quadrado da distância.
- 3) Para um dado dipolo e para uma dada distância, o potencial criado pelo dipolo varia de  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2}$  a  $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2}$  quando  $\theta$  varia de 0 a  $180^\circ$
- 4) O potencial é nulo nos pontos de um plano perpendicular ao eixo do dipolo e passando pelo centro do dipolo. Este plano equipotencial de potencial zero separa duas regiões de potenciais opostos.

Na Fig. I.38 podem ver-se as linhas equipotenciais para um dipolo eléctrico no plano da figura. O vector intensidade do campo eléctrico é normal, em cada ponto, às linhas equipotenciais.

A componente do campo eléctrico segundo uma dada direcção  $xx$  pode obter-se usando a Eq. VII.88: a intensidade do campo, segundo uma dada direcção, é o gradiente do potencial segundo essa direcção vezes -1

826

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{VII.88}$$

Considerando um sistema de dois eixos com origem no centro do dipolo e tendo como  $xx$  o eixo do dipolo, com a mesma orientação e eixo dos  $yy$  normal e positivo no 1º quadrante é

$$\cos \theta = x / (x^2+y^2)^{1/2}$$

Usando as Eqs. VII.87 e VII.88 obtemos para componentes do campo eléctrico produzido por um dipolo num ponto **P** de coordenadas (x,y) ou (r,θ)

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \left[ \frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxy}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$

O módulo **E** da intensidade do campo eléctrico, à distância **r** do centro do dipolo e para o ângulo de captação **θ**, pode obter-se a partir das componentes acima calculadas

$$E = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2}$$

ou, em alternativa, derivando em ordem a **r** a expressão de **V** (Eq. VII.87), com **θ** constante

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^3} \tag{VII.89}$$

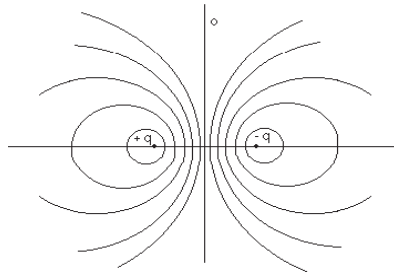


Fig. VII.32 - Linhas equipotenciais no campo de um dipolo. Neste caso, para a direita da linha do potencial zero os potenciais são negativos.

O valor médio do módulo da intensidade do campo produzido à distância **r** por um dipolo de momento **p** é

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3} \quad \text{VII.90}$$

Na Fig. VII.32 podem ver-se as linhas equipotenciais para um dipolo eléctrico, no plano da figura. Neste caso, para a direita da linha do potencial zero os potenciais são negativos.

O potencial no ponto  $\mathbf{P}$  pode ser escrito de forma diferente da Eq. VII.87. Se considerarmos o vector  $\vec{\mathbf{r}}$ , vector posição do ponto  $\mathbf{P}$  a partir do centro do dipolo, podemos escrever

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{r^3} \quad \text{VII.91}$$

onde o ponto entre os vectores significa produto escalar. Se utilizarmos a igualdade  $\vec{\mathbf{r}} = r \hat{\mathbf{u}}$ , onde  $\hat{\mathbf{u}}$  é o vector unitário com a direcção e sentido de  $\vec{\mathbf{r}}$ , vem

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{r^2} \quad \text{VII.92}$$

Se considerarmos dois pontos  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  com vectores posição  $\vec{\mathbf{r}}_1$  e  $\vec{\mathbf{r}}_2$ , sob a acção do mesmo dipolo a diferença de potencial entre os dois pontos é

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2)}{r^3} \quad \text{VII.93}$$

Ou, da definição de vector unitário com as direcções de  $\vec{\mathbf{r}}_1$  e  $\vec{\mathbf{r}}_2$ ,

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot (\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_2)}{r^2} \quad \text{VII.94}$$

O vector  $\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2$  é o vector com origem em  $\mathbf{P}_2$  e a terminar em  $\mathbf{P}_1$  que podemos designar por  $\vec{\mathbf{r}}_{12}$ . Então a Eq. VII.92

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}_{12}}{r^3} \quad \text{VII.94}$$



VII.5.2 - Acção de campos eléctricos sobre dipolos

Consideremos um dipolo eléctrico de momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$  situado num campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ , Fig. VII.33 - a).

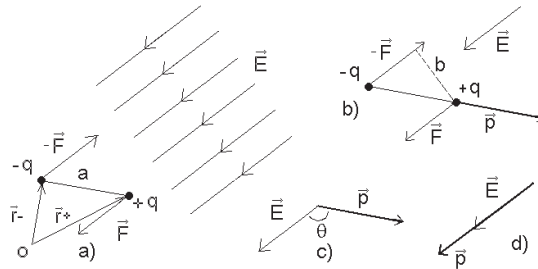


Fig. VII.33 - Dipolo eléctrico num campo eléctrico uniforme. a) Binário  $\vec{F}$ ,  $-\vec{F}$  a actuar sobre o binário. b) Momento dipolar do dipolo. c) Orientação do momento dipolar e campo eléctrico antes do equilíbrio. d) Orientação do momento dipolar e campo eléctrico depois do equilíbrio. O momento  $\vec{G}$   $\square\square$  é normal à figura e aponta para dentro do papel.

As forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  que se exercem respectivamente sobre as cargas  $q$  e  $-q$ , são iguais em módulo, têm a mesma direcção e são opostas, constituindo um binário que tende a fazer alinhar o eixo do binário segundo a direcção das linhas de campo, Fig. VII.33-b). O momento  $\vec{\Gamma}$  deste binário em relação a um ponto qualquer  $O$  é um vector normal ao plano das duas forças, que aponta para o lado do plano onde as forças produzem rotação no sentido directo e de módulo  $bqE$ , com  $b$  a distância entre as linhas de acção das duas forças Fig. VII.33 - c) e d). De facto, representando por  $\times$  o produto vectorial vem

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \vec{r}_- \times (-\vec{F}) + \vec{r}_+ \times \vec{F} \\ &= \vec{r}_- \times (-q \vec{E}) + \vec{r}_+ \times q \vec{E} \\ &= (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) q \times \vec{E} \\ &= \vec{p} \times \vec{E} \end{aligned}$$

Ou seja, sob a acção de um campo eléctrico um dipolo eléctrico é sujeito a um binário  $\vec{\Gamma}$  cujo momento é dado pelo produto vectorial  $\vec{p} \times \vec{E}$ . O módulo do momento  $\vec{\Gamma}$  é  $aqE \sin \theta = bqE$  pois,  $\sin \theta = b$ .

A acção do binário vai conduzir ao alinhamento de  $\vec{p}$  com  $\vec{E}$ . Ocorrido este alinhamento ( $\theta = 0$ ) o momento do binário anula-se ( $\vec{\Gamma} = 0$ ), ficando o sistema em equilíbrio.

Chamando a  $V_-$  e  $V_+$  respectivamente os potenciais eléctricos nos pontos onde as cargas  $-q$  e  $+q$  se encontram, a energia potencial eléctrica do dipolo é

$$W_p = qV_+ - qV_- = q(V_+ - V_-)$$

Por definição temos que

$$V_+ - V_- = - \int_{-q}^{+q} \vec{E} \cdot \hat{t} \, dl = - \vec{E} \cdot \hat{t}$$

onde  $\int_{-q}^{+q}$  significa o trajecto desde a carga negativa à positiva,  $\hat{t}$  é o vector unitário sobre  $\mathbf{a}$  apontando de  $-q$  a  $+q$  e  $\cdot$  significa produto escalar. Então

$$W_{pp} = -q \vec{E} \cdot \hat{t} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{VII.97}$$

No equilíbrio, quando  $\theta = 0$ , a energia potencial do sistema é mínima (valor negativo de maior módulo do produto escalar).

Supondo que o campo eléctrico é produzido por um dipolo de momento dipolar  $\mathbf{p}_2$  e tem o valor médio dado pela Eq. VII.90, a energia potencial eléctrica mínima de um segundo dipolo de momento  $\mathbf{p}_1$ , situado neste campo, é, entrando com a Eq. VII.97

$$W_1 = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}{r^3} \tag{VII.98}$$

## VII.6 - Dipolos moleculares

No que respeita à génese e distribuição da carga eléctrica nas moléculas existem três tipos de dipolos que são descritos nos números seguintes.

### VII.6.1 - Dipolos permanentes

São muito importantes e existem em moléculas ditas polares, com assimetrias estruturais como, por exemplo, a molécula de água. Os pares electrónicos das duas ligações O–H, de uma molécula de água, são muito mais atraídas pelo átomo de oxigénio do que pelos átomos de hidrogénio (maior electronegatividade do oxigénio)<sup>3</sup>. Originam-se, deste modo, dois dipolos permanentes cujos efeitos se somam, comportando-se como um dipolo único, cujo momento dipolar é a soma vectorial dos momentos dos dois pares electrónicos. Este momento resultante pode ser calculado e tem um papel importante pois os diferentes dipolos ligam-se uns aos outros por ligações electroestáticas. Esta ligação que ocorre entre moléculas polares e o hidrogénio (ligado ao F, O ou N) é relativamente forte no caso das moléculas de água e chama-se ligação hidrogénio ou ponte de Hidrogénio. As ligações hidrogénio são responsáveis por muitas das propriedades da água e encontram-se em numerosas macromoléculas biológicas tais como nas ligações adenina-timina e guanina-citosina da molécula de ADN.

A força a actuar entre os dipolos tende a alinhá-los sendo este efeito contrariado pelas forças associadas à agitação térmica. Quando se trata de uma população de dipolos moleculares sob a acção de um campo eléctrico, a agitação térmica faz com que, num dado instante, muitas moléculas não apresentem os seus momentos dipolares alinhados com a direcção do campo, ocorrendo uma distribuição nas energias potenciais dos dipolos. Supondo uma situação de equilíbrio à temperatura  $T$ , a relação entre o número dos dipolos para os quais existe uma diferença  $\Delta W$  entre as suas energias potenciais, é dada pela equação de Boltzmann

$$n_1/n_2 = \exp (-\Delta W/KT) \quad \text{VII.99}$$

A diferença entre as energias potenciais de um dipolo com a orientação  $\theta$  ou alinhado com o campo é obtida considerando a Eq. VII.97 para  $\theta$  e para  $\theta = 0$ , ou seja

$$\Delta W = pE (1 - \cos \theta)$$

---

<sup>3</sup>- Para elementos biológicos a ordem decrescente de electronegatividade é: F, O, N, Cl, Br, I, S, C, P,...H

Então

$$n_0/n_\theta = \exp\{-[pE(1 - \cos \theta)/KT]\} \quad \text{VII.100}$$

Utilizando a Eq. VII.100 é possível obter a energia média das interacções sobre os dipolos sujeitos a um campo **E**. Sendo  $pE \ll KT$  tem-se

$$W = -\frac{p^2 E^2}{3 KT}$$

Se **E**<sub>2</sub> é o campo eléctrico produzido por um dipolo de momento dipolar **p**<sub>2</sub>, a energia média da interacção com um dipolo de momento **p**<sub>1</sub> (Eq. VII.98) é

$$W_1 \approx -\frac{2}{3} \frac{p_1^2 p_2^2}{KT (4\pi\epsilon_0)^2 r^6} \quad \text{VII.101}$$

que é a equação geral para a interacção molecular dipolo-dipolo.

A energia de ligação **W** entre dois dipolos permanentes é da ordem de 2 a 10 KJ/mole e é dada, aproximadamente pela Eq. VII.101 com **r** distância entre os centros dos dipolos e **p**<sub>1</sub> e **p**<sub>2</sub> os seus momentos dipolares eléctricos.

A energia da interacção ião-dipolo permanente é a Eq. IV.87 multiplicada pela carga do ião. Num dado meio depende, portanto, da carga do ião, do momento dipolar da molécula e da distância do centro do ião ao centro do dipolo. Esta interacção é da ordem de 1 a 5 KJ/mole e tem importância na solubilidade de substâncias iónicas em solventes polares (por exemplo, um sal em água) e na solvatação de iões.

## VII.6.2 - Dipolos induzidos

Uma estrutura estável, electricamente neutra e desprovida de momento dipolar, quando sujeita ao campo eléctrico de um dipolo permanente, ou de uma carga eléctrica, pode sofrer uma modificação na repartição espacial dos seus electrões, transformando-se, ela própria, num dipolo (dipolo induzido).

O momento dipolar eléctrico do dipolo induzido ( $\vec{p}$ ) depende do valor do campo eléctrico a actuar ( $\vec{E}$ ) e da maior ou menor facilidade com que os electrões se deslocam na molécula, ou seja, da sua polarisabilidade  $\alpha$ ,

verificando-se que

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

Entre um dipolo permanente e um dipolo induzido, supostos à distância  $r$ , num meio de constante dieléctrica  $\epsilon$ , exercem-se acções electrostáticas (forças de Debye) cuja energia de ligação, da ordem de grandeza de 1 a 5 KJ/mole, é expressa, aproximadamente, por

$$W \approx - \frac{2 p_1^2 \alpha^2}{16 \epsilon \pi^2 r^6} \quad \text{VII.102}$$

com  $p_1$  o momento dipolar eléctrico do dipolo permanente e  $\alpha$  a polarisabilidade do dipolo induzido. Estas ligações têm interesse para distâncias muito pequenas e não são influenciadas pela térmica.

A energia de ligação da interacção ião-dipolo induzido é dada pela Eq. VII.103

$$W \approx - \frac{q^2 \alpha}{8 \pi \epsilon^2 a^4} \quad \text{VII.103}$$

Com  $q$  a carga do ião e  $\alpha$  a polarisabilidade do dipolo induzido.

### VII.6.3 - Dipolos instantâneos

Numa estrutura molecular globalmente neutra, não sujeita à acção de campos eléctricos, existem electrões que oscilam em torno de posições de equilíbrio, sendo a simetria da sua carga electrónica considerada unicamente em termos médios. Estes electrões encontram-se, de facto, em movimento, produzindo deslocamentos de carga que originam dipolos instantâneos. Entre dipolos instantâneos originam-se forças de um terceiro tipo, chamadas de forças de London (ou de dispersão), que são atractivas, direccionais, exercem-se a muito pequenas distâncias e são de carácter electrodinâmico. A energia destas ligações é dada aproximadamente pela expressão

$$W \approx \frac{f(I) \alpha^2}{16 \epsilon_0 \pi^2 r^6} \quad \text{VII.104}$$

com  $f(\mathbf{I})$  é uma função dos potenciais de ionização das duas moléculas,  $\alpha$  a polarisabilidade e  $r$  a distância entre os centros dos dipolos.

As ligações estabelecidas entre dipolos induzidos e instantâneos são chamadas de ligações de Van der Waals ou ligações de Van der Waals–London. Não incluem, portanto, os dipolos permanentes, que estão associadas às ligações hidrogénio.

As energias associadas às ligações de Van der Waals variam de algumas à dezena de quilocalorias por mole, ou seja, energias individuais de fracções do eV<sup>4</sup>.

As forças de Van der Waals diminuem rapidamente com a distância, são orientadas no espaço e dependem fortemente de factores físicos locais como temperatura e constante dieléctrica. As moléculas polares ou polarizáveis tendem a agrupar-se ligando-se umas às outras. Inversamente as moléculas não polares ou pouco polarizáveis tendem, como as moléculas dos lípidos, a não ficar em contacto com as regiões polares dum meio e agrupar-se entre si. Este reagrupamento dá origem a uma ligação chamada hidrofóbica.

Nos líquidos puros podem coexistir os três tipos de dipolo ou só ocorrerem dipolos instantâneos como sucede nas grandes estruturas moleculares orgânicas apolares (Quadro nº VII.1)

Quadro nº VII.1 – Percentagem de ocorrência dos três tipos de dipolo em alguns líquidos.

	<b>Dipolo instantâneo</b>	<b>Dipolo induzido</b>	<b>Ligação hidrogénio</b>
Água (H <sub>2</sub> O)	7 %	42 %	51 %
CH <sub>3</sub> COOH	43 %	14 %	43 %
R-(CH) <sub>n</sub> CH <sub>2</sub>	100 %	0 %	0 %

No contexto das interacções entre moléculas interessa referir as forças de repulsão de Born. Quando duas moléculas se aproximam e não é possível

<sup>4</sup> Para 1 Kcal/mole = 4,184×10<sup>3</sup> J/mole, vem 4,184×10<sup>3</sup>/6,023×10<sup>23</sup> = 0,7×10<sup>-20</sup> J/ligação. Como 1 eV = 1,6 ×10<sup>-19</sup> J é 0,7×10<sup>-20</sup>/1,6×10<sup>-19</sup> = 0,044 eV/ligação.

ocorrerem ligações covalentes, surgem forças de repulsão importantes designadas de forças de Born. Estas forças decrescem rapidamente com o aumento da distância entre as moléculas e provêm da repulsão dos electrões vizinhos por sobreposição das nuvens electrónicas. Nas macromoléculas organizadas, tais tipos de forças intervêm constantemente e são chamadas de repulsões esteéricas, devido à dependência da organização tridimensional dos grupos. No total, o conjunto das forças atractivas e repulsivas (não esquecer que  $F = -dU/dx$ ) referidas, somam-se e pode estudar-se a evolução global da energia ou da força a actuar entre as duas moléculas em função da distância, como vimos no início do Cap. III

#### VII.6.4 – Polarização dos dieléctricos

Já vimos que quando certas substâncias, não metálicas, são sujeitas à acção de campos eléctricos as suas moléculas se tornam dipolos, por indução eléctrica, situação que só ocorre enquanto o campo actuar. Este fenómeno designa-se de polarização e as substâncias referidas são os dieléctricos que se usam, por exemplo, para separar os pratos de um condensador.

Na Fig.VII.34 pode observar-se a acção do campo eléctrico num dieléctrico. Só à superfície é que se manifesta a existência de carga eléctrica pois, no interior do dieléctrico cargas de sinais opostos estão dispostas de modo a compensarem-se. O ruído térmico e as interacções moleculares opõem-se à acção do campo eléctrico levando a que o alinhamento das moléculas não seja perfeito nem completamente estável.

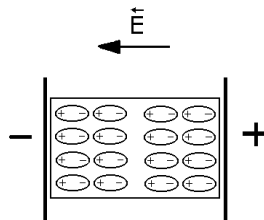


Fig. VII.34 - Acção do campo eléctrico sobre os dieléctricos. Só à superfície é que se manifesta a existência de carga eléctrica.

## VII.7 – Eléctrodos

Quando se pretendem adquirir sinais bioeléctricos, numa experiência ou numa medição com finalidades de diagnóstico, é necessário estabelecer contacto com a superfície, ou meio, onde estes são gerados. A função dos eléctrodos é possibilitar a transferência de carga (iões e electrões) nas reacções electrofisiológicas e electroquímicas, permitindo o estabelecimento de correntes e a sua medição. Os eléctrodos podem ser de diversos tipos quer na sua constituição, quer na forma e características.

O estabelecimento do contacto dos eléctrodos com soluções, ou meios biológicos, origina diferenças de potencial nas interfaces e pode dar lugar a reacções químicas com repercussão nas medidas que se pretendem efectuar. A utilização de eléctrodos apropriados numa experiência é, assim, decisiva.

Vamos analisar algumas situações com interesse para a compreensão do papel dos eléctrodos nas medições em electrofisiologia.

### VII.7.1 - Potenciais metal-solução

Verifica-se que são gerados potenciais eléctricos nas superfícies metálicas quando se têm peças de metal em contacto com água, ou soluções. Num metal existe sempre um equilíbrio, entre iões metálicos e átomos do elemento, que corresponde a transições electrónicas entre níveis das bandas de energia. Quando se coloca um eléctrodo de **Zn** em água, iões **Zn<sup>++</sup>** passam para a solução por difusão, devido à grande diferença de concentração (ou de potencial químico). A difusão de iões torna o metal negativo em relação à solução e dá origem a um campo eléctrico que se opõe à difusão e tende a estabelecer um equilíbrio entre as concentrações de **Zn<sup>++</sup>** no metal e em solução. Os iões **Zn<sup>++</sup>** situam-se muito próximo do eléctrodo, devido à acção simultânea da difusão e campo eléctrico. É assim gerada uma dupla camada eléctrica, junto à superfície do metal, que dá origem a uma diferença de potencial que se opõe à saída de mais **Zn<sup>++</sup>**.

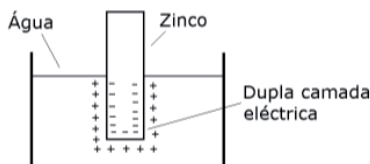
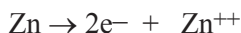


Fig. VII.35 – É gerada uma dupla camada eléctrica à superfície do **Zn** que origina uma diferença de potencial que se opõe à saída de **Zn<sup>++</sup>**.



Quimicamente o processo pode traduzir-se por



VII.105

Quando se tem **Zn** em contacto com a água a concentração dos iões **Zn<sup>++</sup>** em solução é muito pequena e sujeita a grandes flutuações, pelo que o potencial obtido é muito instável e difícil de avaliar.

Se colocarmos uma barra de um metal numa solução de iões do próprio metal, por exemplo **Zn**, numa solução de **ZnSO<sub>4</sub>**, tudo se passa como se ocorresse uma troca entre o eléctrodo e a solução. Iões da solução passam para o eléctrodo, transformando-se em átomos neutros e átomos neutros do eléctrodo passam para a solução transformando-se em iões.

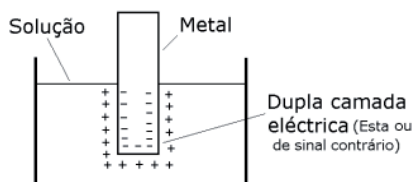


Fig. VII.36 – É criada uma dupla camada eléctrica, que pode ter a carga positiva no metal ou na solução.

Este processo tende para um equilíbrio com geração de uma dupla camada eléctrica à superfície do **Zn** no qual ocorre uma diferença de potencial, neste caso estável, a que se chama potencial de eléctrodo. No caso do **Zn** o eléctrodo fica negativo em relação à solução.

Se, neste caso, aumentarmos a diferença de potencial do eléctrodo em relação à solução, por uma acção externa, aumenta a difusão de iões para a solução e a sua concentração iónica, até ser atingida um novo equilíbrio.

De um modo geral, com eléctrodos metálicos mergulhados em solução, verifica-se a criação de uma dupla camada eléctrica e de uma diferença de potencial, que pode ser positiva ou negativa, entre o metal e a solução. Esta diferença de potencial depende:

- 1 – da natureza do metal
- 2 – da concentração da solução
- 3 – da temperatura

Numa perspectiva mais rigorosa podemos dizer que as duplas camadas surgem devido à diferença de potencial químico do metal no eléctrodo e na solução. No metal, à temperatura da experiência, os iões têm potencial químico  $\mu_M$ , determinado pelas características do próprio metal. Na solução, têm potencial químico  $\mu_S$  dado por

$$\mu_S = \mu_0 + RT \ln a_M^+ \quad \text{VII.106}$$

onde  $a_M^+$  é a actividade dos iões  $M^+$  na solução e  $\mu_0$  é uma constante que depende da temperatura e pressão escolhidas para as condições padrão.

Os potenciais químicos  $\mu_M$  e  $\mu_S$  são, em geral, diferentes pelo que vão ser originadas forças de difusão e deslocamentos de iões. Estes deslocamentos originam diferenças de potencial eléctrico que geram força eléctrica contrária à de difusão, até ser atingido um equilíbrio. Daqui resulta que:

Se  $\mu_M > \mu_S$  – os iões vão do metal para a solução (o metal fica negativo)

Se  $\mu_S > \mu_M$  – os iões vão da solução para o metal (o metal fica positivo)

Ocorre pois a formação de uma dupla camada eléctrica que origina uma diferença de potencial entre o eléctrodo e a solução. No equilíbrio, para serem transferidos  $dn$  moles de iões do metal para a solução, o trabalho realizado é:

$$\Delta W_1 = dn (\mu_S - \mu_M) \quad \text{VII.107}$$

Se a diferença de potencial eléctrico metal-solução é  $V$ , ou seja,  $V = V_M - V_S$ , a variação de energia potencial eléctrica que vão sofrer os  $dn$  moles do ião, que supomos de valência  $Z_i$  é

$$\begin{aligned} \Delta W_2 &= dn (V_M - V_S) Z_i F \\ &= V Z_i F dn \end{aligned} \quad \text{VII.108}$$

Se ocorrer equilíbrio, a transferência ocorre sem dispêndio de energia, então:

$$\Delta W_1 + \Delta W_2 = 0$$

ou

$$\mu_S - \mu_M = V Z_i F$$

donde usando a Eq. VII.106, vem

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu_S - \mu_M}{Z_i F} = \frac{\mu_o + RT \ln a_{M^+} - \mu_M}{Z_i F} = \frac{\mu_o - \mu_M}{Z_i F} + \frac{RT}{Z_i F} \ln a_{M^+} \\ &= V_o + \frac{RT}{Z_i F} \ln a_{M^+} \end{aligned} \quad \text{VII.109}$$

com

$$V_o = \frac{\mu_o - \mu_M}{Z_i F}.$$

Para um dado metal, a diferença de potencial metal-solução, só depende da temperatura e da actividade dos iões do metal na solução. Da Eq. VII.109 conclui-se ainda que aumentando a concentração iónica (ou a actividade) da solução aumenta o potencial  $V$ .

Na equação

$$V = V_o + \frac{RT}{Z_i F} \ln a_{M^+} \quad \text{se } a_{M^+} = 1 \quad \text{vem}$$

$$V = V_o$$

Então, se  $a_{M^+} = 1$  é  $V = V_o$ , que é o potencial normal de eléctrodo (potencial do eléctrodo quando o ião em solução tem actividade unitária).

A medição directa de  $V_o$  não é possível, em termos práticos. Ter-se-ia de colocar outro eléctrodo na solução criando-se uma nova diferença de potencial metal-eléctrodo. No mínimo têm de medir-se duas diferenças de potencial de eléctrodo.

As medidas são obtidas em termos relativos e tomadas em referência ao eléctrodo de hidrogénio gasoso à pressão atmosférica e para uma solução convencionalizado como tendo potencial normal nulo (ou seja, com actividade unitária em iões  $H^+$ ).

Na lista que se segue estão alguns potenciais normais em Volt

K/ $K^+$	- 2,92
Na/ $Na^+$	- 2,71
Zn/ $Zn^{++}$	- 0,76
Fe/ $Fe^{++}$	- 0,44

---

$H_2/ H^+$	0 (a qualquer temperatura)
$Cu/ Cu^{++}$	0,34
$Ag/ Ag^+$	0,8

Concluimos que o zinco tem maior tendência a libertar os seus iões  $Zn^{++}$  para a solução que o cobre.

Uma aplicação do que referimos, que se baseia nas diferenças de potencial metal-solução, são as pilhas electrolíticas

### VII.7.2 – Pilhas com eléctrodos de metais diferentes

Coloquemos duas barras, uma de **Zn** e outra de **Cu**, numa solução diluída de  $KCl$ . O polo positivo da pilha é o **Cu** (maior potencial normal) e o negativo o **Zn**. A d.d.p. em circuito aberto entre os dois eléctrodos, (f.e.m. da pilha), supondo actividades muito próximas para os dois iões, é  $\varepsilon = 0,34 - (-0,76) = 1,1$  V.

Analiseemos o que se passa nos dois eléctrodos, se estabelecermos um circuito externo com uma certa resistência, Fig. VII.37. No eléctrodo de zinco, iões  $Zn^{++}$  passam para a solução e, no eléctrodo de cobre, iões  $Cu^{++}$  são transferidos da solução para o eléctrodo, passando a cobre metálico.

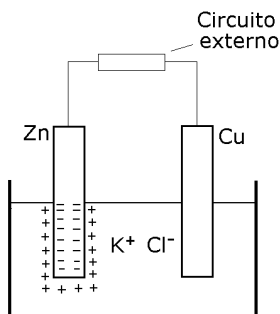


Fig. VII.37 - Pilha com eléctrodos de metais diferentes.



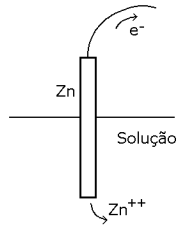


Fig. VII.38 - Eléctrodo de zinco. Iões  $Zn^{++}$  passam para a solução e electrões são transferidos para o eléctrodo de cobre através do circuito exterior.

No eléctrodo de cobre, iões  $Cu^{++}$  provenientes da solução combinam-se com electrões fornecidos pelo eléctrodo de **Zn**, através do fio condutor e passam a cobre metálico

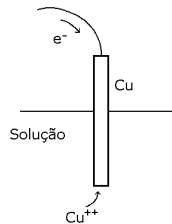
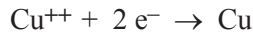
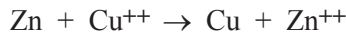


Fig. VII.39 - Eléctrodo de cobre. Iões  $Cu^{++}$  provenientes da solução tendem a passar a cobre metálico.

A partir do eléctrodo de **Zn** difundem iões para a solução. O eléctrodo de **Cu** mantém-se intacto.

A reacção que traduz o processo, no seu total, é



Observa-se que o processo tende a fazer diminuir  $[Cu^{++}]$  e aumentar  $[Zn^{++}]$  com progressivo decréscimo da diferença de potencial entre os eléctrodos até completa anulação.

### VII.7.3 – Pilhas de concentração

Consideremos dois recipientes, separados por uma membrana porosa e contendo soluções com concentrações diferentes dum mesmo sal, tendo mergulhados eléctrodos do metal que corresponde ao catião das soluções.

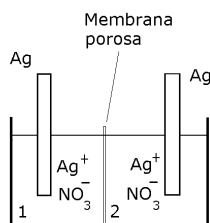


Fig. VII.40 - Pilha de concentração.

A comunicação entre as soluções pode ser uma membrana porosa como na Fig. VII.40 ou um tubo capilar ou uma ponte de um material poroso impregnado com  $\text{HNO}_3$ .

Se, nas condições da Fig. VII.40, as concentrações do sal são diferentes nos dois recipientes, mede-se uma diferença de potencial entre os eléctrodos. A explicação desta diferença de potencial não é difícil. A diferença de potencial metal-solução para o eléctrodo 1, é

$$V_1 = V_o + \frac{RT}{Z_i F} \ln [\text{Ag}^+]_1 \quad \text{VII.110}$$

Para o eléctrodo 2, é

$$V_2 = V_o + \frac{RT}{Z_i F} \ln [\text{Ag}^+]_2 \quad \text{VII.111}$$

Subtraíndo as Eqs. VII.110 e VII.111 obtém-se

$$V = V_1 - V_2 = \frac{RT}{Z_i F} \ln \frac{[\text{Ag}^+]_1}{[\text{Ag}^+]_2} \quad \text{VII.112}$$

ou, em rigor, considerando as actividades correspondentes e sendo  $Z_i = 1$

$$V = \frac{RT}{F} \ln \frac{a_1}{a_2} \quad \text{VII.113}$$

Esta diferença de potencial depende da temperatura e resulta dos contactos metal-solução, ou melhor, da diferença de potencial químico do  $\text{Ag}^+$ , nas duas soluções.  $V$  é um potencial de concentração.

### VII.7.4 –Eléctrodos de Ag /AgCl

Consideremos agora eléctrodos de metal (Ag) em contacto com uma solução saturada de um sal do metal, muito pouco solúvel (AgCl), com um electrólito do ião comum (Cl<sup>-</sup>)



Com constante de reacção

$$K = \frac{[\text{Ag}^+][\text{Cl}^-]}{[\text{Ag Cl}]_{\text{Sólido}}} \quad \text{VII.116}$$

O produto de solubilidade do AgCl é muito pequeno

$$S = [\text{Ag}^+][\text{Cl}^-] = 10^{-10} \quad \text{mole}^2 \text{L}^{-2} \quad \text{VII.117}$$

Sendo AgCl tão pouco solúvel, basta uma ínfima quantidade de iões para ocorrer saturação.

A diferença de potencial metal-solução é

$$V_{\text{elect}} - V_{\text{Sol}} = V_{\text{Ago}} + \frac{RT}{F} \ln [\text{Ag}^+]$$

Ou, usando o log da Eq. VII.117

$$V_{\text{elect}} - V_{\text{Sol}} = V_{\text{Ago}} + \frac{RT}{F} \ln S - \frac{RT}{F} \ln [\text{Cl}^-]$$

ou 
$$V_{\text{elect}} - V_{\text{Sol}} = V_{\text{AgCl}_0} - \frac{RT}{F} \ln [\text{Cl}^-] \quad \text{VII.118}$$

O valor  $V_{\text{AgCl}_0} = V_{\text{Ago}} + \frac{RT}{F} \ln S$  depende da **T**, da natureza do metal e do sal de Ag utilizado.

Para uma temperatura constante o potencial de eléctrodo só depende da [Cl<sup>-</sup>] que é possível manter-se constante. De notar que a Eq. VII.118 aplica-se a um eléctrodo único.

### VII.7.5 – Medição dos potenciais de repouso nas células

Consideremos o esquema da Fig. VII.41. O depósito 2 representa o ambiente intracelular separado do depósito 1, o meio extracelular, pela membrana celular. Este dispositivo não permite, contudo, medir o potencial de repouso das células, como demonstramos a seguir.

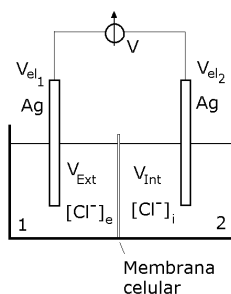


Fig. VII.41 - Esquema da medição dos potenciais de repouso nas células. O depósito 2 representa o ambiente intracelular separado do depósito 1, o meio extracelular, pela membrana celular.

A diferença de potencial entre os eléctrodos é

$$V_{el2} - V_{el1} = (V_{el2} - V_{int}) + (V_{int} - V_{ext}) - (V_{el1} - V_{ext})$$

Mas,

$$V_{int} - V_{ext} = \frac{RT}{F} \ln \frac{[Cl^-]_{int}}{[Cl^-]_{ext}}$$

Tem-se então

$$V_{el2} - V_{el1} = (V_{AgClO} - \frac{RT}{F} \ln [Cl^-]_{int}) +$$

$$+ \frac{RT}{F} \ln \frac{[Cl^-]_{int}}{[Cl^-]_{ext}} - (V_{AgClO} - \frac{RT}{F} \ln [Cl^-]_{ext}) = 0 \quad \text{VII.119}$$

que não é o resultado pretendido.

A medida dos potenciais de membrana necessita que os já referidos eléctrodos de Ag/AgCl sejam colocados numa solução concentrada, próxima da saturação, em geral 3M, de KCl (Fig. VII.42).



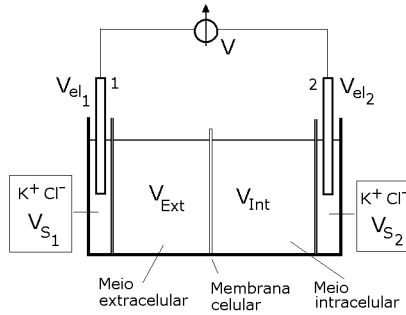


Fig. VII.42 – Esquema de um sistema de medição dos potenciais celulares.

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
 V_{el2} - V_{el1} &= (V_{el2} - V_{S1}) + (V_{S2} - V_{int}) + \\
 &+ (V_{int} - V_{ext}) + (V_{S1} - V_{ext}) - (V_{el1} - V_{S1}) \quad \text{ou} \\
 V_{el2} - V_{el1} &= V_{int} - V_{ext}
 \end{aligned}$$

VII.120

que é o potencial de membrana que se pretendia medir.

O eléctrodo intracelular terá de ter dimensões muito pequenas, (diâmetro  $<10^{-6}$  m), pelo que a sua impedância é muito elevada obrigando a utilizar voltímetros de elevada impedância. Nestas condições o arranjo da Fig. VII.42 transforma-se no esquema da Fig. VII.43

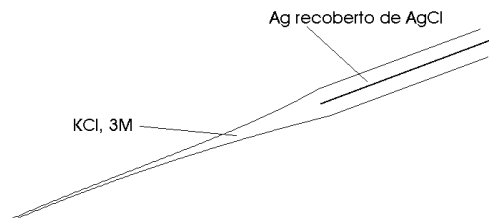


Fig. VII.43 – Eléctrodo de Ag /AgCl utilizado nas medições de potenciais celulares.

### VII.7.6 – Classificação dos eléctrodos

A observação dos fenómenos descritos acima levou a serem considerados três tipos de eléctrodos:

#### Primeiro tipo

São constituídos por um elemento (em geral um metal) em contacto com uma solução dos seus iões. Ocorre uma reacção de equilíbrio do tipo



Estudámos em VII.6.1 os processos mais importantes deste caso. O eléctrodo normal de hidrogénio é deste tipo.

#### Segundo tipo

São constituídos por um metal em contacto com uma solução contendo:

- Um sal, pouco solúvel e saturado, desse metal.
- Um electrólito com um ião comum.

Exemplos deste tipo de eléctrodos são

- Ag, Ag Cl / K Cl                      - Eléctrodo de cloreto de prata
- Hg, Hg<sub>2</sub> Cl<sub>2</sub> / K Cl                  - Eléctrodo de calomelanos

O primeiro caso já foi estudado em VII.6.4

#### Terceiro tipo

São constituídos por metais “inertes”, que trocam dificilmente iões, postos em contacto com soluções contendo as formas oxidada e reduzida dum outro elemento. Por exemplo:

Eléctrodos de Pt em contacto com solução de Fe<sup>++</sup> e Fe<sup>+++</sup>

Neste caso, ocorrem duas reacções de equilíbrio (Eqs. VII.122 e VII.123)



ou seja, passam electrões do eléctrodo para a solução onde vai ocorrer redução de  $\text{Fe}^{+++}$



Da Eq. VII.124 temos

$$E = E_o^1 - \frac{RT}{F} \ln [e^-]$$

$E_o^1$  é um valor constante. Mas, da Eq. VII.123

$$\frac{[e^-][\text{Fe}^{+++}]}{[\text{Fe}^{++}]} = K$$

e

$$E = E_o + \frac{RT}{F} \ln \frac{[\text{Fe}^{+++}]}{[\text{Fe}^{++}]}$$

$E_o$  é o potencial normal de oxidação-redução, não depende da natureza do metal e representa o valor do potencial de eléctrodo quando as formas oxidadas e reduzidas têm a mesma concentração.

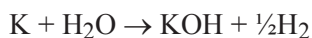
### VII.7.7 - Comportamento dos eléctrodos durante a passagem da corrente. Polarização

Os iões descarregam-se nos eléctrodos podendo ocorrer reacções secundárias com efeitos indesejáveis para as medições.

Por exemplo: dois eléctrodos de **Pt** em solução de **K I**

No ânodo descarrega-se o  $\Gamma^-$  obtendo-se **I<sub>2</sub>**

No cátodo descarrega-se o **K<sup>+</sup>** originando **K** que reage com a **H<sub>2</sub>O**



Os produtos que se depositam ou se libertam nos eléctrodos podem alterar as diferenças de potencial existentes entre eléctrodos e soluções. Este fenómeno que resulta da passagem de corrente entre os eléctrodos e a solução é a polarização dos eléctrodos.

### Característica corrente-potencial de eléctrodo

O comportamento dos eléctrodos pode ser analisado através de curvas de potencial de eléctrodo *vs.* intensidade da corrente, sendo de distinguir dois comportamentos distintos:

a) *Os eléctrodos equilibram com a solução*

Consideremos as curvas  $I(V)$  da Fig. VII.43 para dois exemplos:

**Curva 1** - Eléctrodos de **Zn** em solução de  $ZnCl_2$  e **curva 2** - um eléctrodo de **Ag** outro de **Zn**, mergulhados numa solução de  $ZnCl_2$  saturada de **Ag Cl**.

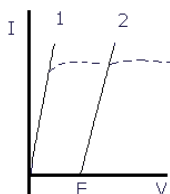


Fig. VII.43 – 1 - Curva  $I(V)$  para eléctrodos de Zn em solução de  $ZnCl_2$ . 2 – Dois eléctrodos um de **Ag** outro de **Zn**, mergulhados numa solução de  $ZnCl_2$  saturada de **Ag Cl**. A tracejado o efeito da polarização de concentração.

As curvas das Figs. VII.43 apresentam ambas (na parte a cheio) uma grande inclinação, significando que grandes variações de corrente ( $I$ ) originam pequenas variações do potencial de eléctrodo ( $V$ ). No segundo exemplo um eléctrodo é do 1º tipo (Zn) e o outro do 2º tipo (Ag). No primeiro caso, para  $I = 0$  é  $V = 0$ , no segundo a corrente é nula para  $V \leq E$ .

Nestas condições a corrente iónica e a descarga dos iões não produzem alterações quer na natureza dos eléctrodos, quer na solução mantendo-se uma diferença de potencial praticamente constante, mesmo para correntes elevadas. São os chamados eléctrodos impolarizáveis.

Contudo, nestes eléctrodos pode ocorrer um efeito, chamado de polarização de concentração, que é representado pela parte a tracejado das curvas 1 e 2. Na vizinhança dos eléctrodos, em particular com eléctrodos de

pequena área, a intensidade da corrente dos electrólitos pode baixar a concentrações dos iões até, praticamente, produzir a sua anulação. Isto cria uma corrente de difusão, por exemplo de catiões, para o cátodo. Aqui a corrente ficará aproximadamente constante e independente de  $V$ .

*b) Pelo menos um dos eléctrodos não entra em equilíbrio com a solução*

Consideremos o caso de dois eléctrodos de platina–platinada em HCl. Para haver corrente é necessário aplicar uma tensão  $V > E_0$ , (Fig. VII.44). O sistema pode gerar uma força contra electromotriz de polarização até ao valor  $E_0$ .

A polarização deve-se a  $H_2$  e  $Cl_2$  adsorvidos nos eléctrodos que alteram a energia livre do contacto metal-solução.

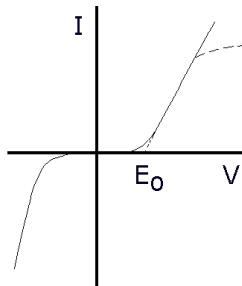


Fig. VII.44 – Curva  $I(V)$  para o caso de eléctrodos polarizáveis.

Nestes eléctrodos o efeito de polarização de concentração também pode ocorrer.

## Apêndices

### VII.8 - Ângulo sólido

A noção de ângulo sólido está associada ao espaço limitado por uma superfície cónica. Por definição, a medida  $\Omega$  de um ângulo sólido de um cone com vértice em  $O$ , é a área interceptada por esse cone numa esfera de raio unitário e centro em  $O$ .

Então:

$$\Omega = S$$

quando

$$R = 1.$$

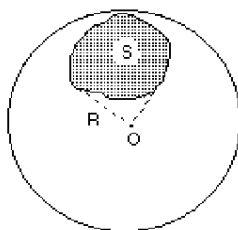


Fig. VII.34 - A medida em esterradianos do ângulo sólido definido pelo cone de vértice em **O** e limitando a área **S** sobre um esfera de raio **R** e centro em **O** é  $S/R^2$ .

Se considerarmos uma outra esfera de centro em **O** e raio **R**, qualquer, o mesmo cone vai intersectar a área **S'** nesta esfera. Evidentemente que:

$$\Omega = \frac{S'}{R^2} \tag{VII.124}$$

O ângulo sólido  $\Omega$  é dado em esteroradianos. Um esteroradiano corresponde ao ângulo sólido, cujo cone define na esfera uma área igual à de um quadrado com lado igual ao raio.

Um cone de revolução com semi-ângulo  $\theta$  e vértice no centro de uma esfera de raio **R**, define um ângulo sólido que subentende na esfera uma calote, cuja área permite calcular a medida do ângulo sólido em esterradianos. A área da calote pode ser calculada utilizando um teorema que diz que a área da calote que o cone define numa esfera de raio **R** é igual à área lateral de um tronco de cilindro, tangente à esfera e coaxial com o cone, com altura limitada pelos planos perpendiculares ao eixo do cone que enquadram a calote esférica, Fig. VII.34.

Então:

$$S = 2 \pi R^2 (1 - \cos \theta) \tag{VII.125}$$

ou seja

$$\Omega = 2 \pi (1 - \cos \theta) \tag{VII.126}$$

Quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  vem  $\Omega = 2\pi$  esterorad

ou seja, o ângulo sólido de um cone que limita meia esfera vale  $2\pi$  esterradianos.

Para  $\theta = \pi$ , ângulo sólido de um cone que limita toda a esfera, vem, como seria de esperar,  $\Omega = 4\pi$  esterradianos.

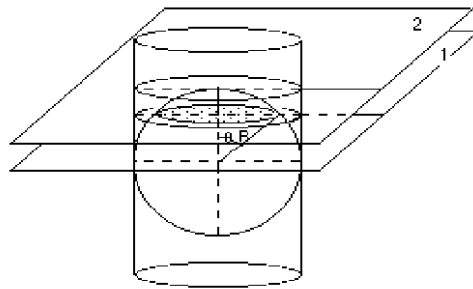


Fig. VII.35 - A área definida entre os planos 1 e 2 no cilindro (área lateral) e na esfera são iguais. Os planos são normais ao eixo do cilindro onde está inscrita a esfera.

### VII.8.1 - Ângulo sólido de um cone elementar

Consideremos uma superfície elementar  $dS$  qualquer e o cone com vértice em  $O$  que assenta em  $dS$ . Seja  $dS_1$  um elemento de superfície esférica com centro em  $O$  e raio  $R$ , limitado pelo mesmo cone e passando pelo centro de  $dS$ .

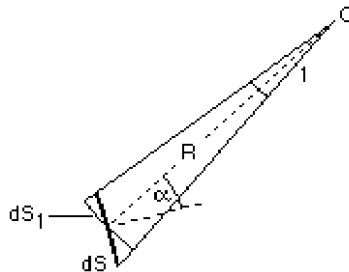


Fig. VII.36 - Definição de ângulo sólido de um cone elementar.

---

A medida do ângulo sólido elementar, em esterradianos, correspondente a  $d\mathbf{S}$ , é

$$d\Omega = \frac{dS_1}{R^2} \quad \text{VII.127}$$

Sendo  $\alpha$  o ângulo entre as normais às superfícies  $d\mathbf{S}$  e  $d\mathbf{S}_1$ , e se estas superfícies forem muito pequenas, podemos escrever

$$dS_1 = dS \cos \alpha \quad \text{VII.128}$$

donde

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{R^2} \quad \text{VII.129}$$

que é a medida do ângulo sólido elementar, assente no elemento de superfície de área  $d\mathbf{S}$ .



## **BIBLIOGRAFIA**

- Bellman R. (1983) *Mathematical methods in Medicine. Series in modern applied Mathematics, vol.1.* World Scientific Publishing Co. Singapore.
- Benedek GB and Villars FMH (1974) *Physics with illustrative examples from medicine and biology. Vol. 1 Mechanics.* Addison Wesley Pub. Comp.
- Bénézech C, Llory J, Mathieu-Daudé P et Callis A. (1973) *Physique et Biophysique (P.C.E.M.) Vol.1.* Masson, Paris.
- Bergethon PR. (1998) *The physical basis of biochemistry: The foundations of molecular biophysics.* Springer-Verlag.
- Bertrand A., Ducassou D, Healy JC et Robert J, (1979) *Abrégé de Biophysique, Tome I, Ed. Masson, pp. 151-157.*
- Bertrandias JP et Bertrandias F. (1997) *Mathematiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé.* Presse Univ. de Grenoble.
- Bouyssy A, Davier M et Gatty B. (1987) *Physique pour les sciences de la vie. Vols. I, II et III.* DIA Université, Éditions Belin, Paris.
- Breuer H (1975). *Physics for life students,* Prentice-Hall, Inc.
- Brown BH, Smallwood RH, Barber DC, Lawford PV and Hose DR (1999) *Medical Physics and Biomedical Engineering,* Institute of Physics Publishing.
- Burton, TA ed. (1981) *Mathematical Biology: A Conference on Theoretical Aspects of Molecular Science.* New York: Pergamon Press.
- Bushong SC. (1981) *Radiologic Science. Workbook and Laboratory Manual*  
The C.V. Mosby Company
- Caro CG, Pedley TJ, Schroter RC, Seed WA. (1978). *The mechanics of the circulation.* Oxford:Oxford University Press;;493-508.
- Cember H. (1992) *Introduction to health physics 2<sup>nd</sup> Ed.*Mc Graw Hill, Inc Health Professions Division.

- Cromer AH. (1982) Física para las ciencias de la vida 2ª ed. Editorial Reverté. Barcelona
- De Lima, JJP (1979) Biophysical aspects of membrane permeability. In The blood retinal barrier.NATO Advanced Study Institute Series. Ed. Vaz JC. Plenum Press.
- De Lima, JJP (1998)- "Radioisotopes in Medicine" - European Journal of Physics, Vol. 19, no. 6, pp. 485-497.
- De Lima, JJP. (1995) Física dos métodos de imagem com raios X. Edições Asa.Porto.
- De Lima, JJP. (1999) Introdução à mecânica e a outros temas em Medicina Dentária. Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Dowsett DJ, Kenny PA and Johnston RE. (1998) The physics of diagnostic imaging. Chapman & Hall Medical London,.
- Delorme G. et Tessier J.P. (1978) Manuel d'Électroradiologie-Tome I, pp 41- 46 Masson. Ed Paris.
- Duncan G. (1990) Physics in the life sciences.2<sup>nd</sup> Ed. Blackwell Scientific publications, Oxford.
- Dutreix J, Desgrez A, Bok B et Chevalier C. (1973) Physique et Biophysique (P.C.E.M.) Vol.4. Masson, Paris.
- Ferreira HG and Marshall WM (1985) The biophysical basis of excitability.Cambridge University Press.
- Gougerot L. (1973) Physique et Biophysique (P.C.E.M.) Vol.2. Masson, Paris.
- Gremy F. (1984 ) Biophysique. Flammarion
- Gremy, F et Pagés JC. (1966) Éléments de Biophysique et de physique Médicale. Éditions médicales Flammarion.
- Gross NA. (1997) Revolution in medical imaging. Business week, July 21; Digirad (<http://www.digirad.com/>), 1998.

- Hendee WR & Ritenour R. (1992) Medical Imaging Physics, Mosby Year Book, Inc.
- Hobbie RK (1988) Intermediate Physics for Medicine and Biology, J Wiley & Sons 2nd Ed.
- Houston AS. (1981) Signal processing, practical aspects of medical imaging. Moores BM, Parker RP and Pullan BR Eds. John Wiley & Sons Ltd..
- Hoppensteadt, FC and Peskin CS. (1992) Mathematics in Medicine and the Life Sciences. Textes in applied mathematics. Springer Verlag, New York.
- Howland, JL. and Grobe Jr., CA. (1972) A Mathematical Approach to Biology. Lexington, Massachusetts: D. C. Heath and Company.
- Ibeas JG. (1975) Introducion a la Fisica e Biofisica. Editorial Alhambra S.A.
- Kiefer J. (1990). Biological Radiation effects. Springer Verlag Ed.
- Metcalf HJ (1981) Topics in Classical Biophysics. Prentice Hall, Inc.
- McAmish TF. Ed. (1986) Physics in Medicine and Biology - Encyclopedia, Vols I and II. Pergamon Press.
- McNeil AR. (1968) Animal Mechanics, Sidgwick & Jackson, London.
- Moreira JA (1971) Física Básica. Fundação Calouste Gulbenkian.
- Mow VC and Hayes WC (1976). Basic Orthopedic Biomechanics. 2<sup>nd</sup> Ed. Lippincott-Raven Publ.
- McNeil Alexander R (1968) Animal Mechanics, Sidgwick & Jackson, London.
- Rescigno A, Lambrecht RM and Duncan CC. Stochastic modelling of physiologic processes with radiotracers and positron emisson tomography. *Proc Int Conf on Applications of physics to Medicine & Biology* 303-318 Albery G, Bajzer Z and Baxa P Eds. World Scientific. 1982.
- Richardson IW and Neergaard EB (1972) Physics for Biology and Medicine. Wiley-Interscience. John Wiley & Sons.

- Salgueiro L e Ferreira JG (1991) Introdução à Biofísica. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Sampson CB. (1990) Textbook of radiopharmacy. Theory and Practice. Gordon and Breach Science Publishers.
- Shapiro J. (1990) Radiation Protection, 3rd Ed. Harvard Univ Press.
- Sprawls P. (1982 ) The Physical Principles of Diagnostic Radiology. Univ. Park Press Ed.
- Von Schulthess GK and Hennig J Eds. (1997) Functional imaging. Lippincott-Raven Philadelphia.
- Waters G. (1981) X-ray production in Physical aspects of Medical Imaging, Moores BM, Parker RP and Pullan BR Eds. John Wiley & Sons pg 229.

## ÍNDICE DE ASSUNTOS

- absorção X,  $\beta$  e  $\gamma$  - 607, 610, 612  
acção directa - 691  
aceleração - 241, 316  
aceleração centrípeta - 317  
aceleração tangencial - 317  
actividade acumulada - 684, 719  
ADP - 95  
afinidade electrónica - 554  
alvéolo pulmonar - 187, 212  
amortecimento - 347, 531  
amortecimento crítico - 349  
ampola de raios X - 567  
análise de Fourier - 509, 806  
ângulo de captação - 99, 823  
ângulo sólido - 849  
aniquilação de matéria - 591  
ansa de Henle - 146  
antineutrino - 595  
assoc. paralelo (R, Z hidro.) - 427, 512  
assoc. série (R hidro.) - 427  
ATP - 94  
atrito entre sólidos - 291  
axónio - 71-81  
axoplasma - 93  
**Becquerel (Bq)** - 604  
binários - 248, 266  
bombas hidrodinâmicas - 507, 522  
cabo coaxial - 92  
camada lipídica (mono e bi) - 71  
camada líquida (alvéolo) - 212  
camadas electrónicas - 549  
camadas monomoleculares - 401  
campo eléctrico - 779  
campo electromotor - 793  
canais iónicos - 84, 91, 113  
capacidade de difusão - 224  
capacidade da membrana - 168  
capilaridade entre lâminas - 396  
capilares isolados - 397  
cápsula de Bowman - 146  
captura electrónica - 597  
carga do condensador - 800  
cateteres (med. pressão) - 477  
caudal laminar (estab.) - 488  
células de Schwann - 83  
centro de massa - 304  
centro massa ( c. humano) - 309

- dens. de corrente elect.- 790  
dens. de corrente molec. - 15  
derivações bipolares - 135  
derivações precordiais - 131  
derivações unipolares -136  
descarga do condensador - 802  
despolarização - 90-97, 103-104,  
107-110, 121-138  
desvios às leis dos gases - 180  
diálise - 154  
difusão de Rayl.-Thomson – 611  
difusão facilitada - 84, 6  
difusão por troca - 84, 161  
difusão monodireccional - 16  
dipolo eléctrico - 99  
dipolo fictício - 106  
dipolo induzido - 713, 832  
dipolo instantâneo - 833  
dipolo molecular - 829  
dipolo permanente - 830  
dispersão de Rutherford - 607  
distância interatómica - 372  
distânc. intermolecular - 373, 374  
dose absorvida - 672  
dose efectiva - 681  
dose equivalente - 681  
dose exposição - 672-674  
dose integral - 672  
dose limiar - 675, 694  
dupla camada eléctrica - 99
- efeito de Auger - 609  
efeito de Bremsstrahlung - 570, 607  
efeito de Compton - 610-612, 614  
efeito de Poisson - 320
- efeito de prod. pares - 611, 614  
efeito fotoeléctrico - 609, 613  
efeito hemostático - 470  
efeitos genético da radiação - 676-678  
efeitos biológicos radiações - 626, 673, 674,  
679, 681, 692  
eficiência das válvulas - 527  
elastância - 325, 515  
elasticidade - 319-322, 329  
elastina - 332, 461-463  
electrocardiografia - 126  
eléctrodos - 836, 846  
electronutralidade - 40, 65  
electrostática - 775  
embolos gasosos - 477  
emissão fotões  $\gamma$  - 588, 594  
emissão  $\alpha$  - 592  
emissão  $\beta^-$  e  $\beta^+$  - 589-593  
energia adesão – 402  
energia cinética - 411  
energia de coesão – 398  
energia pot. de pressão - 413  
energia de superfície - 382  
energia efectiva (raios X) - 573  
energia pot. gravitacional - 412  
energia interna - 729  
energia ligação (núcleo) - 555, 566, 569,  
570  
energia livre - 720  
entalpia - 716  
entropia - 719  
enzimas (cinética) - 730  
equação da continuidade - 405  
equação de Boyle - 169  
equação de gases perfeitos - 175

- equação de Gibbs-Donnan - 64  
equação de Gibbs-Helmholtz - 384  
equação de Goldman - 75, 80, 81, 112  
equação de Kedem-Katch. - 35  
eq. de Michaelis-Ment. - 751-753  
eq. de Nernst - 65, 73  
eq. de Nernst-Planck - 43, 74  
eq. de Nern.-Planck (integ.) - 163  
eq. de Newton (viscos.) - 407  
equação de Van der Waals - 184  
eq. de Van't Hoff (electr.) - 53  
equação de Van't Hoff - 30, 52  
equilíbrio de Donnan - 70  
equilíbrio - 68, 73, 247  
equilíbrio, condições - 249  
equivalente de dose - 682  
esfigmomanómetro - 481  
esforço - 319  
esforço na coluna vert. - 361  
espalhamento - 401, 404  
espectro de energia  $\beta$  - 594  
espectro de raios X - 580, 575-576  
espectro solar - 704  
estabilidade nuclear - 577  
estrangulam. vasos - 414, 483, 499, 501  
excitação atómica - 572, 587, 593
- fagocitose - 613  
Faraday - 39  
fenómenos bioeléctricos - 71  
fenómeno de Starling - 60  
fenómenos de superfície - 382  
fenómenos de transporte - 13  
feixe de His - 127  
fibra nervosa - 89, 92
- filtragem (raios X) - 577  
fluidos - 371  
fluidos de Maxwell - 342  
formação de gotas - 445  
fluxómetro electromagnético - 497  
fluxómetro ultrassónico - 496  
forças de atrito (ou fricção) - 292  
forças de difusão - 21  
forças de Van der Waals - 834  
forças elásticas (pulmão) - 200  
forças internas - 249  
forças não elásticas - 203  
forças nucleares - 579  
Fosfolípidos - 81, 215  
Fotosíntese - 746  
fórmula de Poiseuille - 422  
fórmula de Laplace - 389, 444  
fórmula de Douane e Hunt - 573  
fracção de volume - 25  
freeze-drying - 47  
frequência respiratória - 209
- glomérulo - 64, 145-147, 151  
gotas, formação - 445  
gradiente de concentração - 16  
gradiente de pot. eléctrico - 31, 42, 44, 52, 75, 787, 826  
gradiente de pressão - 33, 52, 450  
gradiente de velocidade - 432-434, 488  
gráfico N/Z - 588 grau de ionização - 53
- hemodiálise - 154  
hemólise - 59  
histerese - 212, 217, 332, 335, 337, 339

- impedância - 332, 503, 512, 815  
interacção part.  $\beta$  - 607-608  
impulsão - 381  
inertância - 516  
indutância - 519, 540, 810, 815, 820  
inibição - 758-764  
inibição competitiva - 758  
inibição não competitiva - 758  
impedância hidrodinâmica - 522  
ionização - 555, 571, 606-611, 629,  
671-679  
isomeria nuclear - 599  
isotérmicas (Boyle) - 173
- lei de Avogadro - 177  
leis de Bergonié-Tribon.- 680  
lei de Boyle - 172  
lei de Charles -174  
lei de Coulomb - 776  
lei de Dalton - 187  
lei da desint. radioactiva - 600  
lei de Fick (1ª) - 16  
lei de Fick (2ª) - 20, 155-158  
lei de Graham - 185  
lei de Henry -191  
lei da gravitação - 249  
lei de Hooke - 318-320, 324-332  
lei de Joule - 792  
lei de Jurin - 394  
lei de Kirchoff – 796  
leis de Newton (mec.) - 241  
lei de Ohm - 426, 504, 791, 796, 808  
lei de Stokes - 485  
lei de Tate - 446  
lei da Termod. (1.ª) - 728
- lei da Termod. (2.ª) - 738  
lei da Termod. (3.ª) - 743  
leis de Raoult - 46  
LET - 606  
ligação covalente - 373, 557  
ligação iónica - 373, 556  
ligação metálica - 567  
limiar (efeitos da rad.) - 675  
linha de captação - 99, 824  
linha de corrente - 435  
linhas de campo - 782  
linhas equipotenciais - 827  
líquido de Pascal - 331  
líquido não newtoniano - 433  
líquido newtoniano - 434  
luz solar (Física) - 703
- macroíões** - 67  
materiais, classif. reológica - 329  
materiais elásticos (energia) - 325, 455  
materialização de energia - 611  
medição pressão - 480, 493  
membrana celular - 82  
membrana homogénea - 21  
membrana porosa - 24  
membrana semiperm. - 35, 50, 54  
mesão - 581  
miocárdio - 127-131, 421, 519  
microeléctrodos - 71, 845  
mielina - 85-93  
mobilidade eléctrica - 40  
mobilidade molecular - 37  
modelo da memb. de Donnan - 64  
modelo do campo eléct. cons.- 74  
modelo mec. da respir. - 233



- modelo do corpo livre - 279  
modelos fis. da deformação - 339  
modelos nucleares - 586  
módulo de Young - 319  
mód. de compressibilidade - 322  
módulo de rigidez - 375  
mole - 547  
momento de binário - 267  
momento força rel. ponto - 250  
momento força rel. eixo - 263  
momento dipolar eléctrico - 823  
movimento de um ponto - 313  
movimento harmónico - 343
- n**ão especificidade rad. - 676  
Neergard - 213  
nefrónio - 144  
neutrino - 596  
nodo AV – 127, 132  
nós de Ranvier - 85  
nucleão - 548  
núm. quânt. azimutal - 550  
núm. quânt. magnético - 550  
núm. quânt. principal - 549  
núm. quânt. spin - 550  
número de Avogadro - 547  
número de massa - 547  
número de Reynolds - 438  
números quânticos - 550
- o**nda despolarização - 89, 520  
onda pulsatória (aorta) - 533  
oscilações harmónicas - 344  
oscilações forçadas - 350  
osmose - 50  
osmolaridade - 57  
osmometria - 54
- p**erfil parabólico - 409  
perfusão - 624, 637, 646  
período biológico - 682  
período efectivo - 683  
período físico - 602  
período refractário - 92  
permeabilidade - 23, 25, 28, 31  
pilha de concentração - 841  
pilhas electrolíticas - 840  
pinocitose - 623  
plano principal - 389  
plasmólise - 59  
poise - 407  
polarização dieléctricos - 835  
polígono de forças - 244  
polimorfismo - 674  
ponto crioscópico - 49  
ponto ebulioscópico - 49  
ponto triplo - 46  
potência caudal laminar - 424  
potência em corr. alterna - 818  
potência da dupla camada - 100  
potencial de acção - 71, 84, 87-97  
potencial do dipolo elec. - 824  
potencial de Donnan - 68  
potencial de eléctrodo - 843  
potencial eléctrico - 838  
potencial electroquímico - 44  
potencial ionização - 555  
potencial metal-solução - 836  
potencial químico - 31-35  
preenchimento camadas - 554

- pressão líquidos - 376-380  
pressão crítica colaps.- 465  
pressão hidrostática - 376, 420  
pressão intratorácica -200-207, 237  
pressão oncótica - 56  
pressão osmótica - 30, 32, 51  
pressão trans-alveolar - 214  
pressão transmural - 465, 505  
pressão transpulmonar - 204  
pressões no pulmão - 194, 200, 233  
princ. da transmissibilidade - 248  
princ. iguald. acção reacção - 241  
princípio da Arquimedes - 381  
princípio da hidrostática - 378  
princípio da incerteza - 550  
princípio da inércia - 241  
processo reversível - 733  
produto escalar - 260  
produto triplo composto - 262  
produto vectorial - 253  
propriedades coligativas - 45  
pulsatilidade dos vasos - 524
- quadro periódico** - 555  
**Q** (factor de qualidade) - 680  
quantidade de movim. - 299
- radiação U.V.** - 705-710, 716  
radioactividade - 587  
raio principal - 389  
raio de equilibrio (vasos) - 468  
raio do núcleo - 577  
raios X - 569  
reacções endergónicas - 741  
receptores - 82, 84, 96, 623, 626
- regra do paralelogramo - 243  
resistência eléctrica - 791  
resistência hidrodinâmica - 426  
resistência periférica total - 428  
radiação de Bremsstrahlung - 563  
reacções exergónicas - 741  
reacções fotofísicas - 746  
regime caudal laminar - 487-499  
regime caudal turbulento - 438  
rendimento muscular - 367  
reobase - 89  
repolarização - 109, 128, 132  
resistividade - 94, 167, 792  
ressonância - 350, 563, 566, 817  
rigidez - 375
- série de Taylor** - 155  
sinapse - 86, 96  
sist. de forças equivalentes - 268  
sólido de Voigt - 333  
sólido indeformável - 248  
sólidos de Euclides - 329  
sólidos de Hooke - 330  
solubilidade dos gases - 191  
solução hipertónica - 58  
solução hipotónica - 58  
solução isotónica - 58  
soma de binários - 269  
soma de vectores - 243  
subcamadas elect. - 550-551  
substância tenso-activa - 386  
surfactante - 215
- tabela periódica** - 555  
temperatura absoluta -174

- temp. congelação - 45, 48, 54  
temperatura ebulição - 45, 49  
tempo de latência - 674  
tensão circunferencial - 455, 459, 462  
tensão contacto sol.-líq. - 402  
tensão de vapor - 45, 56  
tensão na aorta - 452  
tensão na córnea - 454  
tensão superficial - 382  
tensão tangencial (corte) - 319, 331, 374,  
408, 410, 431, 489  
teorema de Bernoulli - 420  
teorema de Varignon - 256  
teoria cinético-molecular - 179  
teoria de Hodgkin e Huxley - 122  
teoria do alvo - 692  
Teste de Queckensted - 485  
tonometria - 56  
trabalho cardíaco - 473  
trabalho da contr. muscular - 365  
trabalho da respiração - 209-212  
trabalho do rim - 151  
trabalho nas artic. sinoviais - 298  
trabalho osmótico - 154  
traçador - 616  
traçadores isotópicos - 614-623  
transf. linear energia (LET) - 606  
transportadores - 94, 168  
triângulo de Einthoven - 133  
triângulo de forças - 243  
trocas distribuídas - 139  
tubo capilar - 383  
tubo colapsável ideal - 229  
tubo de corrente - 415  
tubo de Venturi - 419  
tubos contornados - 146-147  
turgência - 59  
ultrafiltração - 63-64, 145, 151  
ultravioletas, ver U.V.  
unidade massa atómica (u) - 586  
valência - 38, 556-557  
vasos elásticos - 455  
vectocardiograma - 130  
vector cardíaco - 129  
vector unitário - 260  
veloc. de encurt. muscular - 367  
velocidade - 314  
velocidade de deformação - 331  
velocidade de desintegração - 598  
veloc. de dose absorvida - 672  
veloc. de dose exposição - 672  
vida média - 604  
viscoelasticidade - 342  
viscosidade - 406  
viscosidade cinemática - 407  
viscos. do sangue - 421, 429, 436-437,  
443  
voltage clamp - 115  
volume parcial molar - 29  
**Windkessel** - 531

(Página deixada propositadamente em branco)

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO .....	5
------------------	---

### Capítulo I

#### I - Conceitos Gerais sobre Biofísica de Membranas

I.1 - Fenómenos de Transporte .....	13
I.1.1 – Introdução .....	13
.2 - Transporte de moléculas e iões .....	14
.3 - Corrente molecular através de membranas homogéneas .....	21
.4 - Corrente molecular através de membranas porosas .....	24
.5 - Outra perspectiva sobre o comportamento das membranas .....	26
.6 - Corrente de soluto com corrente de água .....	29
.7 - As forças de difusão .....	31
.8 - Corrente de água e pressão osmótica .....	32
.9 - Obtenção da 1ª Lei de Fick a partir de $F_D$ .....	36
.10 - Corrente e potencial eléctricos devidos à difusão de iões .....	38
.11 - Relação entre mobilidade molecular e eléctrica .....	40
.12 - Densidade de corrente eléctrica iónica em campos eléctricos .....	41
.13 - Equação de Nernst-Planck .....	43
.14 - Potencial electroquímico .....	44
.15 - Propriedades coligativas .....	45
.16 - Osmose .....	50
.17 - Equação de Van't Hoff para electrólitos .....	52
.18 - Medição da pressão osmótica .....	54
.19 - Aplicações .....	56
.20 - Fenómeno de Starling .....	60
.21 – Ultrafiltração .....	63
.22 - Equação de Gibbs-Donnan. Equilíbrio e potencial de Donnan .....	64
I.2 - Fenómenos bioeléctricos .....	71
I.2.1 - Potenciais de repouso nas membranas .....	71
.2 - Modelo do campo eléctrico constante .....	74
.3 - Breves notas sobre a estrutura e função das membranas celulares .....	81
.4 - Potencial de acção .....	84
.5 - Sinapses .....	96
.6 - Receptores .....	97

.7 - Membranas carregadas electricamente .....	99
.8 - Dupla camada eléctrica .....	99
.9 - Potencial criado por uma dupla camada num ponto P exterior.....	101
.10 - Potencial criado por fibras durante o período de despolarização .....	103
.11 - Medidas com perfusão do axónio. Curvas de potencial de acção.....	110
.12 - Modelos eléctricos da membrana.....	112
.13 - Experiências com o método do "voltage clamp" .....	115
.14 - Características eléctricas do axónio.....	122
<b>I.3 - Aplicações</b>	
<b>I.3.1 - Electrocardiografia.....</b>	<b>126</b>
.2 - Troca de calor por contracorrente nos membros superiores. Trocas distribuídas.....	139
.3 - O nefrónio .....	144
.4 - Transporte de Na <sup>+</sup> e H <sub>2</sub> O ao longo dos tubos renais.....	148
.5 - Trabalho do rim na excreção de uma mole .....	151

## APÊNDICES

I.4.1 - Segunda equação de Fick .....	155
.2 - Consequências da 2ª Lei de Fick .....	156
.3 - Difusão facilitada .....	158
.4 - Difusão por troca .....	161
.5 - Integração da equação de Nernst-Planck .....	163
.6 - Modelo eléctrico da propagação dos impulsos no axónio .....	166

## Capítulo II

### II - Gases

II.1 - Introdução .....	171
II.2 - Lei de Boyle.....	172
II.3 - Lei de Charles .....	174
II.4 - Lei de Avogadro .....	177
.1 - Significado da constante R .....	178
II.5 - A teoria cinético-molecular dos gases.....	179
II.6 - Desvios às leis dos gases.....	180
II.7 - A equação de Van der Waals .....	184
II.8 - Difusão dos gases.....	185
II.9 - Lei de Dalton das pressões parciais .....	187
II.10 - Solubilidade dos gases nos líquidos.....	191
II.11 - Lei de Henry.....	191
II.12 - Elementos de física do aparelho respiratório .....	194
II.13 - As trocas e o transporte de gases no organismo.....	197
II.14 - Forças e pressões actuando no tórax e pulmões.....	200
.1 - Forças elásticas .....	202
.2 - Forças não elásticas.....	207
.3 - Frequência respiratória e energia dispendida na respiração.....	209
II.15 - Física do alvéolo pulmonar.....	212
II.16 - Capacidade de difusão de um gás .....	224

II.17 - Difusão através da parede de um capilar pulmonar .....	226
II.18 - Tubo colapsável ideal.....	229
II.19 - Difusão dos gases nas vias respiratórias .....	232
II.20 – Modelo mecânico avançado do transporte gasoso na respiração .....	233

### Capítulo III

#### III - Conceitos elementares de mecânica e biomecânica

III.1 - Conceitos elementares de mecânica .....	241
.1 - 1ª Lei de Newton.....	241
.2 - 2ª Lei de Newton.....	241
.3 - 3ª Lei de Newton.....	243
.4 - Regra do paralelogramo para a adição de forças .....	243
.5 - Princípio da transmissibilidade .....	248
.6 - Lei de Newton da gravitação .....	249
III.2 - Momento de uma força em relação a um ponto .....	250
III.3 - Produto vectorial.....	253
.1 - Representação do momento por produto vectorial .....	254
III.4 - Produto vectorial e momento em termos de componentes rectangulares.....	258
III.5 - Produto escalar .....	260
III.6 - Produto triplo composto .....	262
III.7 - Momento de uma força em relação a um eixo.....	263
III.8 – Binários.....	266
.1 - Sistemas de forças equivalentes.....	268
.2 - Soma de binários.....	269
.3 - Representação de binários por vectores.....	271
III.9 - Substituição de uma força aplicada num ponto de um sólido rígido por uma força igual, aplicada noutro ponto, mais um binário .....	272
III.10 - Redução de qualquer sistema de forças aplicadas num sólido indeformável a uma força e a um binário .....	272
III.11 - Equilíbrio .....	273
III.12 - Atrito entre sólidos.....	291
III.13 - Fundamentos de dinâmica do ponto e de sistemas de pontos.....	299
.1 - Momento linear (ou quantidade de movimento) de um sistema de pontos materiais .....	299
.2 - Momento cinético .....	302
III.14 - Centro de massa de um sistema de pontos materiais.....	304
.1 - Centro de massa de um corpo plano homogéneo com a forma de um triângulo rectângulo OAB de área S. ....	306
.2 - Centro de massa de corpos homogéneos com a forma de um triângulo equilátero ou isósceles .....	308
.3 - Centro de massa do corpo humano. ....	309
III.15 - Momento de inércia .....	311
.1 - Movimento de um ponto em relação a um sistema de referência .....	312
.2 - Movimento de um ponto conhecida a trajectória.....	313
III.16 – Deformações .....	318
.1 - Deformações elásticas nos sólidos.....	318

.2 - Deformação relativa (strain) .....	325
.3 - Deformação diferencial .....	326
.4 - Tipos de deformação .....	327
.5 - Reacção à supressão instantânea da tensão .....	328
III.17 - Classificação reológica dos materiais .....	329
.1 - Sólidos indeformáveis (Sólidos de Euclides) .....	329
.2 - Sólidos dotados de elasticidade linear (Sólidos de Hooke) .....	329
.3 - Corpos plásticos .....	330
.4 - Corpos viscosos .....	331
a) Caso ideal .....	331
b) Líquidos viscosos .....	331
.5 - Corpos viscoelásticos .....	332
.1 - Sólidos de Voigt .....	332
a) Curvas de fluência .....	333
b) Curvas de relaxação .....	334
c) Curvas de tensão-deformação .....	335
.2 - Fluidos de Maxwell .....	335
a) Curva de fluência .....	335
b) Curva de relaxação .....	336
c) Curva tensão-deformação .....	337
.3 - Corpos plastoviscoelásticos (corpos de Bingham) .....	337
a) Curvas de fluência .....	338
b) Curva tensão-velocidade de deformação .....	339
III.18 - Modelos físicos da deformação .....	339
.1 - Elasticidade .....	339
.2 - Viscoelasticidade .....	342
.3 - Modelo físico do Corpo de Bingham .....	343
III.19 - Movimentos harmónicos .....	343
.1 - Oscilações harmónicas .....	344
.2 - Amortecimento .....	347
.3 - Oscilações forçadas. Ressonância .....	350
III.20 - Os movimentos do corpo humano .....	352
.1 - Esforço na coluna vertebral .....	361
III.21 - Músculos .....	365
.1 - Trabalho produzido pela contracção muscular .....	366

## Capítulo IV

### IV - Biofísica dos Fluidos

IV.1 - Propriedades dos fluidos .....	371
.1 - Introdução .....	371
.2 - A agregação da matéria .....	371
IV.2 - Revisão de conhecimentos de hidrostática .....	376
.1 - Pressão no interior de um líquido .....	376
.2 - Princípio fundamental da hidrostática .....	378
.3 - Princípio de Arquimedes .....	381
IV.3 - Fenómenos de superfície .....	382



.1 - Tensão superficial de um líquido .....	382
.2 - Tensão superficial de soluções aquosas. Substâncias tensio-activas.....	386
.3 - Interfaces líquido-ar curvas. Fórmula de Laplace.....	387
.4 - Tubos capilares.....	393
.5 - Capilaridade entre lâminas.....	396
.6 - Capilares isolados .....	397
IV.4 - Interfaces entre líquidos.....	398
.1 - Energia de coesão.....	398
.2 - Superfície de separação entre dois líquidos não miscíveis .....	399
.3 - Superfície de separação entre líquidos e sólidos.....	402
IV.5 - Fundamentos de dinâmica de fluidos.....	405
.1 - Viscosidade .....	405
.2 - Caudal em regime laminar através de tubos cilíndricos .....	409
.3 - Energia mecânica dos líquidos. Líquidos ideais .....	411
.4 - Energia cinética.....	411
.5 - Energia potencial gravitacional.....	412
.6 - Energia potencial devida à pressão .....	413
IV.6.1 - Conservação da massa .....	414
.2 - Equação da continuidade .....	415
.3 - Conservação da energia .....	418
.4 - Teorema de Bernoulli.....	420
.5 - Fórmula de Poiseuille .....	422
.6 - Resistência hemodinâmica de labirintos vasculares complexos.....	429
.7 - Viscosidade e tensão tangencial no regime laminar. Caso do sangue.....	431
.8 - Alterações do regime do caudal dos líquidos .....	437
IV.7 - Aplicações da fórmula de Laplace .....	444
.1 - Desequilíbrio entre duas gotas do mesmo líquido mas de raios diferentes ..	444
.2 - Formação de gotas .....	445
.3 - Mecanismo das embolias capilares gasosas.....	447
.4 - Generalização da fórmula de Laplace para o caso de paredes elásticas espessas .....	449
.5 - Tensões nas paredes da crossa da aorta e do coração .....	451
.6 - Tensão na córnea.....	454
.7 - Biomecânica dos vasos elásticos .....	455
IV.8 - Complacência de um vaso elástico .....	466
.1 - Complacências vasculares sistémicas equivalentes arterial e venosa.....	468
IV.9 - Aspectos físicos da circulação sanguínea .....	469
.1 - Trabalho cardíaco.....	473
.2 - Utilização de cateteres na medição directa da pressão.....	477
.3 - O esfigmomanómetro.....	481
.4 - Colchão de água.....	484
.5 - Teste de Queckensted.....	485
.6 - Lei de Stokes.....	485
.7 - Pressão do soro num sistema .....	487
.8 - Perfis dos caudais no transporte dos gases na respiração .....	488
.9 - Equilíbrio num tubo elástico.....	490

.10 - Energia armazenada nos materiais elásticos .....	492
.11 - Medição da pressão intravascular através da deformação de membranas.....	493
.12 - Medição do caudal sanguíneo .....	495
.13 - Variação da pressão em tubos por acção de estrangulamentos .....	498
.1 - Variação da pressão por acção de estrangulamentos em sistemas em paralelo .....	503
.14 - Impedância dos vasos sanguíneos.....	503
Apêndices	
.15 - Complacência de um vaso elástico .....	513
.16 - Inertância de um líquido .....	516
.17 - Regime transitório.....	518
.18 - Os acontecimentos do ciclo cardíaco .....	519
.19 - As bombas possíveis dos sistemas hidrodinâmicos .....	522
.20 - A pulsatilidade nos vasos sanguíneos .....	524
.21 - Dedução da fórmula de Poiseuille .....	526
.22 - Área efectiva da válvula aórtica.....	527
.23 - Teoria das medidas com "strain gauges" .....	528
.24 - Modelos da circulação sanguínea em vasos elásticos.....	531
.25 - Propagação de uma onda pulsatória nos vasos sanguíneos. O pulso .....	533
.26 - A conservação da quantidade de movimento e a circulação pulmonar humana.....	541
.27 - A fonação e os princípios da aerodinâmica.....	542

## Capítulo V

### Princípios básicos de física atómica, física da radiologia, física e medicina nucleares, física das radiações ionizantes e física da luz solar

V.1 - Conceitos sobre as estruturas atómica e molecular .....	547
V.1.1 - Considerações gerais .....	547
.2 - Preenchimento das camadas .....	554
V.2 - Estrutura electrónica e química dos elementos .....	555
V.2.1 - Posição na tabela periódica .....	555
.2 - Ligação iónica .....	556
.3 - Ligação covalente .....	557
.4 - Covalência dativa.....	559
.5 - Ligação metálica .....	567
.6 - Ligações fracas.....	568
V.3 - Princípios básicos de física da radiologia .....	568
.1 - Generalidades .....	568
V.4 - Princípios básicos de Física Nuclear.....	577
V.4.1 - Núcleo .....	577
.2 - Defeito de massa .....	583
.3 - Unidade de massa atómica.....	586
.4 - Modelos nucleares .....	586
.5 - Radioactividade.....	587
.6 - Espectros de energia das partículas $\beta$ .....	594

.7 - Emissores $\beta$ puros .....	596
.8 - Captura K ou captura de um electrão.....	597
.9 - Conversão interna .....	599
.10 - Isomeria nuclear.....	599
V.5.1 - Lei da desintegração radioactiva .....	600
.2 - Período de um radionuclídeo .....	602
.3 - Vida média .....	604
.4 - Unidade de velocidade de desintegração .....	604
V.6.1 - Interação das radiações com a matéria.....	605
.2- Partículas carregadas.....	606
.3 - Ionização.....	606
.4 - Interação das partículas $\beta$ com o núcleo .....	607
.5 - Interação com os electrões orbitais dos átomos do absorvente.....	608
.6 - Interação da radiação $\gamma$ com a matéria.....	609
V.7 - Utilização dos radioisótopos em biomedicina.....	614
.1 - Como fontes de radiação.....	616
.2 - Como traçadores .....	616
.3 - Esquema geral do método dos traçadores.....	620
V.8 - Localização compartimental e mecanismos de transporte .....	620
.1 - Trocas iónicas.....	622
.2 - Fagocitose e pinocitose.....	623
.3 - Retenção nos capilares.....	624
.4 - Incorporação metabólica.....	624
.5 - Deposição e transporte de aerossóis .....	625
.6 - Radiofármacos gasosos.....	626
.7 - Receptores .....	626
.8 - Mecanismos imunológicos.....	627
V.9 - Radioisótopos in vivo e in vitro .....	627
.1 - Câmara de raios gama e $Tc^{99m}$ .....	628
.2 - Outros radionuclídeos com aplicação clínica.....	631
.3 - Progressos nas imagens da medicina nuclear .....	633
.4 - Aplicações dos radioisótopos em diagnóstico.....	635
.5 - Aplicações terapêuticas dos radioisótopos.....	640
V.10 - Análise compartimental.....	642
.1 - Modelos de um único compartimento.....	644
.2 - Modelos de dois compartimentos .....	647
a). Sistema aberto de dois compartimentos em série.....	647
b). Sistema mamilar aberto de dois compartimentos.....	648
.3 - Clarificação.....	650
V.11 - Traçadores, volumes e caudais em sistemas de distribuição .....	650
.1 - Função de resposta de um cateter .....	656
.2 - O princípio de Stewart-Hamilton.....	658
.3 - Cálculo de volumes.....	659
.4 - Sistemas de distribuição em série e o integral de convolução .....	661
.5 - Formas diferentes de injeção.....	664
.6 - Determinação do caudal.....	666

.7 - Regeneração da função frequência dos tempos de trânsito por desconvolução.....	667
.8 - Sistemas de distribuição em paralelo.....	669
V.12 - Aspectos químicos e biológicos da acção das radiações.....	670
V.13 - Grandezas e unidades usadas em dosimetria das radiações.....	671
V.14 - Efeitos biológicos das radiações.....	673
V.15 - Características fundamentais dos efeitos biológicos das radiações.....	674
V.16 - Utilização terapêutica dos radionuclídeos.....	678
V.17 - Doses em órgãos resultantes de irradiação por partículas $\beta$ .....	682
.1 - Decaimento e eliminação biológica.....	682
.2 - Actividade acumulada $\bar{A}$ .....	684
.3 - Fixação instantânea sem excreção.....	685
.4 - Fixação instantânea e excreção biológica.....	686
.5 - Fixação não instantânea.....	687
.6 - Energia libertada num órgão pela emissão $\beta$ .....	689
.7 - Sobrevivência celular sob radiação ionizante.....	690
.8 - Efeitos não dirigidos, complementares da acção directa da radiação ionizante, para baixas doses.....	700
V.18 - Física da radiação solar.....	702
<b>Apêndices</b>	
V.19.1 - Energética da emissão de partículas $\beta$ e da captura electrónica.....	718
.2 - Cálculo da dosimetria interna pelo método da fracção absorvida.....	719
.3 - Datação com $C^{14}$ .....	723

## Capítulo VI

### Bioenergética

VI.1 - Introdução.....	727
VI.2 - Sistemas termodinâmicos.....	727
VI.3 - 1ª Lei de Termodinâmica.....	728
VI.4 - Processo reversível.....	733
VI.5 - Trabalho máximo num processo isotérmico.....	734
VI.6 - 2ª Lei da Termodinâmica.....	738
VI.7 - 3ª Lei da Termodinâmica.....	743
VI.8 - Luz solar em bioenergética.....	745
VI.9 - Elementos sobre cinética de enzimas.....	748
.1 - Catálise e energia de activação.....	748
.2 - Conceitos básicos.....	750
.3 - Tratamento para o estado estacionário.....	753
.4 - Inibição.....	758
.5 - Inibição competitiva.....	758
.6 - Inibição não competitiva.....	762
.7 - Cálculo do $K_I$ .....	764
.8 - Gráfico da relação da velocidade de reacção em função de $[I]$ .....	769
.9 - Significado molecular da inibição.....	771

## Capítulo VII

### Bases da electricidade

VII.1 - Electrostática	
.1 - Introdução	775
.2 - Quantidade de electricidade ou carga eléctrica	775
.3 - Lei de Coulomb	776
.4 - Unidades	778
.5 - Definição de campo eléctrico	779
.6 - Unidade de campo eléctrico	780
.7 - Campo de distribuições de cargas	780
.8 - Linhas de campo de um campo eléctrico	782
.9 - Trabalho e potencial num campo eléctrico	784
.10 - Algumas considerações	787
.11 - Corpos condutores	788
VII.2.1 - Corrente eléctrica	789
.2 - Densidade de corrente eléctrica	790
.3 - Lei de Ohm aplicada a condutores filiformes	791
.4 - Efeito de Joule. Lei de Joule	792
.5 - Existência de campo electromotor	793
.6 - Leis de Kirchoff	796
.7 - Condensadores	799
.8 - Carga e descarga de um condensador através de uma resistência	802
VII.3 - Corrente alterna	806
.1 - O modelo vectorial da corrente alterna	807
.2 - Potência num circuito de corrente alterna	818
VII.4 - Diatermia com correntes eléctricas / Electrocoagulação	822
VII.5 - Dipolos eléctricos	823
.1 - Potencial criado por um dipolo eléctrico num ponto P	824
.2 - Acção de campos eléctricos sobre dipolos	828
VII.6 - Dipolos moleculares	829
.1 - Dipolos permanentes	830
.2 - Dipolos induzidos	832
.3 - Dipolos instantâneos	833
.4 - Polarização dos dieléctricos	835
VII.7 - Eléctrodos	836
.1 - Potenciais metal-solução	836
.2 - Pilhas com eléctrodos de metais diferentes	840
.3 - Pilhas de concentração	841
.4 - Eléctrodos de Ag/AgCl	843
.5 - Medição dos potenciais de repouso nas células	844
.6 - Classificação dos eléctrodos	846
.7 - Comportamento dos eléctrodos durante a passagem da corrente. Polarização	847
VII.8 - Ângulo sólido	849
.1 - Ângulo sólido de um cone elementar	851
Bibliografia	853

SÉRIE ENSINO  
IMPrensa DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
COIMBRA UNIVERSITY PRESS  
2014

