

LIÇÕES DE

TERESA
PEDROSO
DE LIMA

ÁL
G
E
B
R
A
L
I
N
E
A
R

2.^a EDIÇÃO

IMPRESA DA
UNIVERSIDADE
DE COIMBRA

COIMBRA
UNIVERSITY
PRESS

(Página deixada propositadamente em branco)



E N S I N O



EDIÇÃO

Imprensa da Universidade de Coimbra
Email: imprensa@uc.pt
URL: http://www.uc.pt/imprensa_uc
Vendas online: <http://livrariadaimprensa.uc.pt>

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Imprensa da Universidade de Coimbra

CONCEÇÃO GRÁFICA

António Barros

INFOGRAFIA DA CAPA

Carlos Costa

EXECUÇÃO GRÁFICA

NSG - Novas Soluções Gráficas, S.A.

ISBN

978-989-26-0854-9

ISBN DIGITAL

978-989-26-0855-6

DOI

<http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-0855-6>

DEPÓSITO LEGAL

380245/14

LIÇÕES DE

ÁL

TERESA
PEDROSO
DE LIMA

G E

B R A

L I N E A R

2.^a EDIÇÃO

IMPRESA DA
UNIVERSIDADE
DE COIMBRA

COIMBRA
UNIVERSITY
PRESS

Ao António
Ao Luís e à Joana

ÍNDICE

| | |
|--|------|
| AGRADECIMENTOS | vii |
| PREFÁCIO | ix |
| PALAVRAS INICIAIS | xiii |
| | |
| CAPÍTULO I • MATRIZES | |
| | |
| I.1 – Conceito de vetor. Operações com vetores e algumas propriedades: adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar. Combinação linear de um conjunto de vetores. | 1 |
| I.2 - Produtos com vetores e normas: vetores ortogonais; conjunto ortogonal de vetores; conjunto ortonormal de vetores. | 17 |
| I.3 - Conceito de matriz. Matrizes especiais: matriz linha, matriz coluna, matriz triangular, matriz diagonal, matriz escalar, matriz identidade; matriz transposta, matriz ortogonal. | 29 |
| I.4 - Operações com matrizes e algumas propriedades: adição de matrizes, multiplicação de uma matriz por um escalar e multiplicação de matrizes. | 39 |
| I.5 - Matrizes fracionadas: conceito de submatriz, adição e multiplicação de matrizes fracionadas. Espaço coluna de uma matriz. Matrizes Elementares e Matriz de Permutação. | 59 |
| I.6 – Inversão de matrizes. | 71 |
| | |
| CAPÍTULO II • SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES | |
| | |
| II.1 – Sistemas de equações algébricas lineares – breve revisão dos métodos gráfico, de substituição e de adição ordenada a partir de um exemplo. | 79 |
| II.2 – Resolução e discussão de sistemas de equações algébricas lineares. Condensação de matrizes. Característica de uma matriz. Algoritmo de Gauss. | 89 |
| II.3 – Sistemas homogêneos. Conjunto solução de um sistema homogêneo. Espaço nulo ou núcleo de uma matriz. Dependência e independência linear de filas paralelas de uma matriz. | 123 |
| II.4 – Aplicação do estudo de sistemas de equações lineares na inversão de matrizes. | 137 |

CAPÍTULO III • DETERMINANTES

| | |
|--|-----|
| III.1 – Introdução da noção de determinante. Determinante de primeira ordem e determinante de segunda ordem: definição e propriedades. | 145 |
| III. 2 – Determinante de ordem n: definição e propriedades. Cálculo do determinante de uma matriz à custa do determinante de uma matriz triangular obtida por eliminação de Gauss. | 153 |
| III.3 - Aplicações dos determinantes no cálculo da matriz inversa e na resolução de sistemas de equações lineares (regra de Cramer). | 187 |

CAPÍTULO IV • VALORES PRÓPRIOS E VETORES PRÓPRIOS

DE UMA MATRIZ QUADRADA

| | |
|--|-----|
| IV.1 – Conceito de valor próprio e vetor próprio de uma matriz quadrada. | 201 |
| IV.2 – Polinómio característico de uma matriz quadrada. | 207 |
| IV.3 – Espaço próprio, multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de um valor próprio. | 213 |
| IV.4 – Diagonalização de matrizes. | 223 |
| IV.5 – Matrizes simétricas e matrizes anti-simétricas. Diagonalização de matrizes simétricas. Espectro e decomposição espectral de uma matriz simétrica. | 237 |

| | |
|------------------------|-----|
| PALAVRAS FINAIS | 255 |
|------------------------|-----|

| | |
|---------------------|-----|
| BIBLIOGRAFIA | 257 |
|---------------------|-----|

AGRADECIMENTOS

Várias pessoas tiveram um papel importante na produção deste manual:

- os meus colegas e os meus alunos da Faculdade/Universidade que, ao longo de mais de três décadas, influenciam a minha forma de estar como professora de Matemática;
- o Prof. Doutor José Vitória que me deu o gosto de escrever o Prefácio e cujas sugestões melhoraram a redação do texto;
- e, finalmente, a equipa da Imprensa da Universidade de Coimbra que apoiou e incentivou a execução da obra.

(Página deixada propositadamente em branco)

PREFÁCIO

Ensinar e estudar álgebra linear – nos primeiros anos do Ensino Superior – continua, parece, a ser uma tarefa árdua.

A precedente afirmação fundamenta-se em factos de dois tipos: as queixas dos ensinantes/ autores e dos estudantes/ leitores; e os vários estudos que têm vindo a lume sobre o “problema da álgebra linear”, com relevância, ao que conhecemos, para autores franceses e americanos.

O queixume tem: um nó – o carácter abstrato dos temas abordados; e um horizonte – a (aparente) falta de aplicação dos conceitos.

Pois bem!

Quanto à abstração: continua a haver dois trilhos essenciais – uns autores partem do conceito de espaço vetorial; outros amaciam o caminho, apoiando-se na teoria das matrizes. A abstração estará sempre lá, e ainda bem!

Quanto às aplicações: muito se tem escrito, em textos didáticos, sobre a vasta gama de aplicações da álgebra linear – sobretudo devido à larga difusão dos computadores amigáveis – razão por que não é difícil convencer o estudante/leitor da utilidade prática deste assunto.

E o texto que temos em mãos?

Dirige-se, essencialmente, a estudantes do 1º ciclo de estudos em Economia e Gestão. É, porém, texto adaptável para estudantes de qualquer ramo do conhecimento que seja cliente da álgebra linear: ciências duras ou ciências moles; ciências exatas ou naturais; ciências humanas ou sociais.

A autora – com prática longa, diversificada, diferenciada, refletida – resistiu a duas tentações: a do egoísmo disciplinar (não pondo todo o peso na sua disciplina em detrimento de outras); e a da inovação a todo o custo.

De facto, o texto em apreço: é modesto na sua ambição – texto de apoio a estudantes que (passe a redundância...) vão às aulas; está escrito em

linguagem simples, rigorosa, densa e, mesmo, tensa; é pouco retórico e as notações são adequadas e não suscitam confusão.

Para quê mais um livro de álgebra linear e, ainda por cima, em língua portuguesa?

Esta pergunta ocorrerá a muita gente: ensinantes, avaliadores de diversos painéis... e, mesmo, estudantes.

Aberto este livro, encontramos um texto: breve, bem elaborado, bem estruturado e escrito em bom Português.

Pensando nos principais destinatários e olhando pormenorizadamente para o conteúdo, concluímos que estas Lições de Álgebra Linear têm futuro.

Destinando-se a alunos do primeiro ciclo de Economia e Gestão, está entendido por que se trata de texto curto, rigoroso mas não presunçoso.

Alunos que vão às aulas! Se vão às aulas, que necessidade há para este texto?

A aula dá ao estudante o ambiente: para a motivação, para participar na construção dos conceitos, para pressentir a aplicação, para medir a tensão entre o rigor e a intuição.

Ter um texto destes à disposição permite ao estudante várias coisas: estar disponível para usufruir das aulas em toda a plenitude, sem a preocupação de registar informação; antecipar a ida à aula ou tentar suprir a lacuna, se lá não foi; ter tempo, noutra espaço, para meditar sobre a matéria que lhe é proposta; e medir forças com um texto que, apesar da escrita densa e tensa – como já dissemos – encaminha, pacientemente, o leitor em passos seguros e sem atalhos enganadores.

Escolhidos os principais destinatários, o conteúdo, adequadamente, centra-se nas ferramentas que são as matrizes e os determinantes – com a finalidade de tratar dos sistemas de equações algébricas lineares e, de caminho, estudar o problema dos valores próprios.

No delicado tema dos valores próprios e vetores próprios vai-se longe, a ponto de se incidir sobre os espaços próprios e fazer uma incursão pela decomposição espectral duma matriz.

Ao longo do texto, há numerosos exemplos e exercícios, alguns dos quais, pelo simples facto da sua formulação, indiciam a larga experiência docente da autora.

Este é um texto para os alunos se iniciarem na Álgebra Linear. Ficam estes estudantes matematicamente maduros, mesmo que, com aturado esforço, consigam dominar os conceitos aqui apresentados? É claro que não! Nem com este texto, nem com nenhum outro.

O que é um estudante maduro? É alguém que, no fim dum ciclo, mais ou menos demorado, de estudos, seja capaz de: manejar a verruma da intuição, empunhar a enxó do rigor, afilar a ponta analítica, tecer a rede sintética, amolar o gume crítico, abrir o dique da iniciativa, exercitar o músculo organizativo, rodar a dobadoira da perseverança.

Para que um aluno devesse um estudante sazonado, não há livro de texto que baste! Há que dar vida a um texto, isto é, há que acrescentar: o professor – profissionalmente lúcido e civicamente empenhado; a escola – aberta e culta; e o próprio estudante – que tem que trabalhar. Trabalhar no sentido seguinte: no dever que tem de aproveitar o direito ao acesso ao abstrato, de não desperdiçar a concedida oportunidade da prática da abstração.

Vale a pena fazer tal esforço.

Coimbra, Abril de 2010

José Vitória

Professor Catedrático de Matemática Aposentado

Universidade de Coimbra

(Página deixada propositadamente em branco)

PALAVRAS INICIAIS

Como tornar a Álgebra Linear acessível aos alunos?

Como inculcar-lhes o gosto por este ramo da matemática? Como desafiá-los, através do domínio de conceitos e técnicas específicas, a desenvolver o raciocínio lógico, a intuição, a imaginação, a iniciativa, a criatividade, a capacidade crítica e a autonomia intelectual?

À medida que a experiência se acumula, a nossa motivação torna-se cada vez mais clara: a resposta, essa, permanece um desafio.

Todos os anos, na unidade curricular de Álgebra Linear do 1º ciclo de Economia, deparamo-nos com a mesma dificuldade. Quando passamos da rotina dos cálculos na resolução de sistemas de equações lineares e operações com matrizes para a abordagem de ideias e conceitos como valor próprio e vetor próprio de uma matriz (ou, ainda, espaço próprio e diagonalização de uma matriz), gera-se uma autêntica barreira entre nós e os que nos ouvem. A verdade é que a compreensão destes tópicos requer mais trabalho, persistência e concentração da parte dos alunos, independentemente do nosso esforço e empenho. Por isso, embora se espere que estejamos a incentivar a autonomia intelectual dos nossos estudantes, as mais das vezes limitamo-nos a treinar a sua capacidade de reproduzir informação e/ou efetuar cálculos sem rumo.

Sabendo que, enquanto matemáticos, estudamos Matemática a partir de um estímulo – que pode ser uma conferência, uma aula, um livro ou simplesmente uma ideia que nos ocorre – que nos incentiva a elaborar exemplos, fazer conjecturas, resolver problemas e demonstrar teoremas, como podemos, afinal, ajudar os nossos alunos (não-matemáticos) a estudar Matemática, em particular Álgebra Linear?

Tal como referimos, a resposta escapa-nos ainda. Todavia, a experiência alertou-nos para as seguintes questões:

- Porque é que os matemáticos têm tanta dificuldade em se fazer compreender?
- Porque é que as pessoas que têm má relação com a Matemática culpam quase sempre os seus professores?
- Porque é que grande parte dos nossos alunos se queixa da linguagem codificada/cifrada usada nos livros de textos e pelos professores?

Uma das principais razões prende-se com o facto de as nossas aulas não serem frequentadas por matemáticos, mas sim por estudantes que não têm a mínima intenção em tornar-se futuros matemáticos. Talvez por isso uma definição abstrata lhes desperte menor atenção!

Não pondo, de forma alguma, em causa a importância da abstração e generalização no desenvolvimento desta disciplina, certo é que, neste âmbito, temos em vista, mais do que abordar a sua criação, falar de comunicação da Matemática.

Por isso, com este texto não pretendemos publicar outro (mais um ...) manual de Álgebra Linear, mas sim criar um instrumento de apoio para cursos que visem iniciar os estudantes no estudo desta disciplina.

Trata-se de um texto, breve e auto contido, preferencialmente dirigido a alunos que frequentem o 1º Ciclo em Economia ou Gestão. Por assim ser, ao escrevê-lo tentámos observar algumas regras que nos parecem fundamentais:

- (i) Utilizar, apenas, a terminologia necessária, reconhecendo que nem todos pensam como um matemático;
- (ii) Evitar confundir abordagem coerente e rigorosa com estudo exaustivo e completo, e, nesse sentido, substituir algumas das demonstrações mais exigentes por exemplos esclarecedores;
- (iii) Assumir que os estudantes/leitores podem não estar familiarizados com o nosso vocabulário e que as palavras que utilizamos muitas vezes não significam o mesmo para os outros do que para nós.

As dificuldades com o vocabulário são terrivelmente inibidoras, embora não sejam, apenas, característica da Matemática. O que torna frustrante as conversas de um leigo com um economista, um jurista ou um físico são dificuldades semelhantes. Muitos destes profissionais insistem numa linguagem técnica extremamente apurada, com a justificação de que “é muito mais precisa”. Não discordando desta última afirmação, parece-nos importante contrapor que a terminologia sofisticada só é clara quando são necessárias distinções muito finas e rigorosas e que, de um modo geral, num curso introdutório a sua utilização se torna inútil e até nociva.

Mas, se é verdade que em Matemática não se pode avançar muito sem recorrer a símbolos, também é certo que não nos podemos deixar fascinar pelo simbolismo a ponto de nos afastarmos do nosso objetivo inicial. Ou seja, não devemos esquecer que a nossa audiência (sejam ouvintes ou leitores) está menos familiarizada com certo tipo de terminologia do que nós próprios. Assim, e a título de exemplo, na maior parte das vezes, não é aconselhável dizer «Seja v um elemento do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ » em vez de «Seja v um vetor do plano». Além disso, se não vamos utilizar \mathbb{R}^2 como um espaço vetorial, mas apenas as propriedades dos seus elementos enquanto pares ordenados, chamar a atenção, de quem nos ouve ou lê, em determinado contexto, para a estrutura de espaço vetorial pode ser irrelevante e, até mesmo, roçar o puro espalhafato.

Deste modo, parece-nos desaconselhável criar novos símbolos ou, sem justificação, alterar os que são de uso corrente. Por outro lado, se o par $(1, \sqrt{3})$ pode representar um ponto do plano, um vetor de comprimento 2, uma matriz coluna do tipo 2×1 ou um elemento do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, devemos admitir todas as diferentes utilizações e explicá-las cuidadosamente. Porque este é um dos aspetos mais fascinantes da Álgebra Linear: associar uma enorme simplicidade teórica a um poder absoluto nas aplicações.

Todavia, trata-se de uma disciplina em que o domínio das técnicas, se dissociado da compreensão das ideias e dos conceitos, de nada vale.

Assim, é com efetiva apreensão que continuamos a constatar que a maioria dos estudantes que ingressam na universidade receberam uma educação matemática, reduzida à mera manipulação de números e símbolos, na qual foram obrigados a repetir, exaustivamente, coleções de exercícios análogos e pouco estimulantes.

É neste sentido que nos empenhamos em sensibilizar os estudantes para a importância do papel que a Matemática desempenha na compreensão das questões sociais e (não menos importante) alertá-los para o uso, não uso, mau uso e abuso que dela se faz constantemente.

Com este objetivo, esperamos que, também com estas lições, consigamos:

- esclarecer os nossos alunos de que embora, em algumas circunstâncias, a Matemática possa complicar e intimidar, ela é indispensável na decisão da escolha dos números, das relações ou associações que são fiáveis;
- e, simultaneamente, fazê-los sentir que o seu afastamento nos pode colocar em grande desvantagem quando nos dispomos a refletir sobre a multiplicidade de questões que surgem no nosso quotidiano.

Esta é, do nosso ponto de vista, a melhor forma de os preparar para um futuro que se adivinha incerto e exigente.

Coimbra, 27 de janeiro de 2010

Esgotada a primeira edição, este manual evolui para o presente livro que contém breves atualizações, também mais alguns exercícios que procuram melhor ajudar os alunos.

Coimbra, 30 de junho de 2014

Teresa Pedroso de Lima

CAPÍTULO I • MATRIZES

I.1 – Conceito de vetor. Operações com vetores e algumas propriedades: adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar. Combinação linear de um conjunto de vetores

Vamos falar de «vetores» enquanto elementos do plano ordinário

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2): x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\},$$

do espaço ordinário

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3): x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\},$$

e, de um modo geral, do conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\};^i$$

e, ainda, de «escalares» que, no nosso contexto, são números reaisⁱⁱ.

Começamos pela seguinte

Questão I.1.1.

O que é um vetor?

ⁱ Repare-se que podemos definir \mathbb{R}^2 como o conjunto dos pares ordenados de números reais, \mathbb{R}^3 como o conjunto dos ternos ordenados de números reais e, finalmente, \mathbb{R}^n como o conjunto das sequências ordenadas de números reais.

ⁱⁱ Exceto no Capítulo IV, onde os escalares podem ser valores próprios de uma matriz, e, como tal, raízes de uma equação polinomial.

Exercício I.1.2.

Recordando o que estudou anteriormente, e depois de ter lido o texto seguinte, responda à Questão I.1.1.

«Vetor – Designa-se por vetor o conjunto infinito de todos os segmentos de reta orientados, equipolentes entre si, ou seja, o conjunto infinito de todos os segmentos de reta orientados que possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Na prática, para representar um vetor, tomamos apenas um dos infinitos segmentos orientados que o compõe. (...)

Durante muito tempo o segmento de reta orientado foi designado por vetor aplicado e o vetor atual de vetor livre. Na Matemática, a designação de vetor aplicado caiu em desuso mas, na Física, ainda se aplica tal designação e, por vezes, simplificada para vetor, o que faz com que neste caso se tenha de considerar também um ponto de aplicação para caracterizar este "vetor".

Muitas grandezas como, por exemplo, a força que atua sobre um corpo, a velocidade de um determinado objeto em movimento ou a posição de um outro relativamente a um ponto fixo são representadas por vetores (no sentido da designação de Física), dado que (...) não podem ser totalmente definidas por um simples valor numérico. Com efeito, se quisermos indicar a posição de um objeto relativamente a um dado ponto não basta dizer que aquele se encontra a uma distância determinada deste. É, também, necessário saber em que direção e, dentro dessa direção, em que sentido ele se encontra.»ⁱⁱⁱ

E se se perguntar a um matemático o que é um “vetor”, qual será a resposta? Muito provavelmente será: “É um elemento de um espaço vetorial.”

ⁱⁱⁱ *vetor*. In Infopédia [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2014. [Consult. 2014-05-21]. Disponível na www: <URL: [http://www.infopedia.pt/\\$vetor](http://www.infopedia.pt/$vetor)>.

Ora esta informação só é útil para um grupo restrito de pessoas que utilizam a mesma linguagem científica. Pois, o diálogo acima iniciado teria – quase de certeza – um desfecho análogo ao que seguir se descreve:



20
14



20
14

Os objetivos que delineámos para estas Lições de Álgebra Linear não se alcançam, seguramente, com diálogos deste género.

Façamos, pois, um esforço para os evitar!

Neste manual vamos definir vetor de um modo mais abrangente do que o utilizado no Ensino Secundário. Assim, recapitulemos algumas ideias e conceitos.

Como sabemos, $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2): x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ pode representar o conjunto de todos os pontos do plano onde, previamente, definimos um sistema de eixos coordenados ortogonais e monométricos de origem $O(0,0)$.

Consideremos, agora, o par ordenado $x = (x_1, x_2)$ onde x_1 e x_2 são números reais. Associamos a x um segmento de reta orientado \overrightarrow{OP} com origem no ponto $O(0,0)$ e extremidade no ponto $P(x_1, x_2)$.

Note-se que

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (x_1, x_2) - (0,0).$$

Reciprocamente, podemos associar a um segmento de reta orientado \overrightarrow{OP} ^{*iv*} o par ordenado $x = (x_1, x_2)$.

Isto é,

$$x = \underbrace{(x_1, x_2)}_{\text{par ordenado}} \leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{OP}}_{\text{vetor}} \leftrightarrow \underbrace{P(x_1, x_2)}_{\text{ponto do plano}} .$$

Assim, – dado que a cada vetor livre (representante de uma classe de equivalência de segmentos orientados de igual comprimento, direção e sentido) podemos associar um segmento de reta orientado com origem em $O(0,0)$ e a cada segmento de reta orientado com origem em $O(0,0)$ podemos associar um vetor livre – estabelecemos a seguinte correspondência biunívoca

^{*iv*} Com origem no ponto $O(0,0)$ e extremidade no ponto $P(x_1, x_2)$.

$$\overrightarrow{OP} \leftrightarrow x = (x_1, x_2).$$

Isto é, confundimos propositalmente pares ordenados, segmentos orientados com origem em $O(0,0)$, vetores e pontos do plano.

Note-se que o comprimento e a direção de um vetor (do plano \mathbb{R}^2) são o comprimento e a direção de qualquer segmento de reta orientado que lhe esteja associado.

Deste modo passaremos a definir um vetor x (do plano \mathbb{R}^2) como um par ordenado (x_1, x_2) , em que os números reais x_1 e x_2 são chamados coordenadas do referido vetor x e escrevemos $x = (x_1, x_2)$.^v

Generalizando,

Definição I.1.3. [vetor]

Chamamos vetor a uma sequência ordenada de números reais.

Mais concretamente, se \mathbb{R} é o conjunto dos números reais, e,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\},^{vi}$$

então dizemos que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é um vetor de \mathbb{R}^n .

Assim, representamos o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pelo n-uplo^{vii} (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Todavia, também o designamos, algumas vezes, por uma coluna.

^v Dado que a cada vetor (do plano \mathbb{R}^2) podemos fazer associar, de modo único, um ponto de \mathbb{R}^2 .

^{vi} Recorde-se o conceito de produto cartesiano de conjuntos, $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

^{vii} O que quer dizer sequência ordenada de n elementos.

Neste caso a coluna $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ representa o vetor x .^{viii}

Deste modo, podemos escrever

$$x \underset{\text{notação}}{\equiv} (x_1, x_2, \dots, x_n) \underset{\text{notação}}{\equiv} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

No que se segue chamaremos aos n números reais x_1, x_2, \dots, x_n coordenadas do vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemplos I.1.4.

a) $(1, 2)$, $\begin{bmatrix} 0.1 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$, $(\frac{21}{3}, \frac{21}{3})$, $(0, 0)$ e $\begin{bmatrix} \pi \\ 9 \end{bmatrix}$ são elementos de \mathbb{R}^2 .

Recorde-se que $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ e, conseqüentemente, qualquer par ordenado de números reais é um vetor de \mathbb{R}^2 .

b) Analogamente,

$(1, 2, 0)$, $\begin{bmatrix} 0.1 \\ \sqrt{7} \\ 3.2 \end{bmatrix}$, $(\frac{21}{3}, \frac{21}{3}, \frac{21}{3})$, $(0, 0, 0)$ e $\begin{bmatrix} \pi \\ 9 \\ \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$ são vetores de \mathbb{R}^3 .

Saliente-se, mais uma vez, que qualquer terno ordenado de números reais é um vetor de \mathbb{R}^3 e que, por exemplo,

$$(1, 2, 0) \underset{\text{notação}}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

^{viii} Quando optamos por uma letra, nesta circunstância, x , escolhemos, geralmente, entre as últimas do alfabeto.

Definição I.1.5. [Igualdade de vetores]

Dizemos que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – dois vetores de \mathbb{R}^n – são iguais se e só se verifica que $x_i = y_i$, para todo o $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo I.1.6.

Os vetores $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ são iguais. No entanto se $w = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

então $u \neq w$. (Porquê?)

Definição I.1.7. [Vetor nulo]

Chamamos vetor nulo ao n-uplo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se e só se

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Exemplos I.1.8

$(0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ são vetores nulos.

Recordemos, agora, as operações básicas para vetores do plano (a adição e a multiplicação escalar).

Em anos anteriores, constatámos que se v é um vetor, $2v$ é um vetor com a mesma direção, o mesmo sentido e com o dobro do comprimento.

Por outro lado, na adição de vetores utilizamos a Regra do Triângulo ou a Regra do Paralelogramo.

Definição I.1.9.

Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ dois vetores do plano \mathbb{R}^2 . A soma dos vetores u e v é o vetor $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ que se designa por $u + v$.

Seja $u = (u_1, u_2)$ um vetor do plano \mathbb{R}^2 e α um número real.

O produto do vetor u pelo número α é o vetor $(\alpha u_1, \alpha u_2)$ que se designa, usualmente, por αu .

Generalizamos, facilmente, estas operações para vetores de \mathbb{R}^n .

Definição I.1.10. [Adição em \mathbb{R}^n]

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dois vetores de \mathbb{R}^n . Dizemos que o vetor $x + y$, resultado da operação

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\rightarrow x + y, \end{aligned}$$

é a soma de x com y , e definimos $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

Mais concretamente, se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, tem-se

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{por definição}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Definição I.1.11. [Multiplicação escalar em \mathbb{R}^n]

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um vetor de \mathbb{R}^n e α um número real^{ix}. Definimos multiplicação escalar em \mathbb{R}^n como se segue

$$\begin{aligned} \bullet: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, x) &\rightarrow \alpha \bullet x \end{aligned}$$

Neste caso, o resultado da operação é, também, um vetor de \mathbb{R}^n . Mais concretamente, o produto do vetor x pelo número real α é o vetor

$$\alpha \bullet x \stackrel{\text{notação}}{\cong} \alpha x \stackrel{\text{por definição}}{\cong} (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Exercícios I.1.12.

1. Sejam $x = (1, 2, 3)$ e $y = (-1, 0, -5)$ dois vetores de \mathbb{R}^3 .

Calcule:

a) $u = x + y$ e $v = x - y$;

b) $w = 5x + 3y$ e $z = 2x - y$;

c) $p = \sqrt{2}x - \frac{3}{7}y$.

2. Sabendo que $a + b = (3, 1)$ e $a - b = (1, 3)$, determine as coordenadas dos vetores $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$.

Descreva geometricamente a resolução por si escolhida.

^{ix} Recorde-se que, neste manual, designamos os números (reais) por escalares.

Observação I.1.13.

Na alínea 1.b) do exercício anterior constatamos que, para determinar os vetores $w = 5x + 3y$ e $z = 2x - y$, temos que combinar as duas operações anteriores – a adição e a multiplicação escalar em \mathbb{R}^3 .

Os vetores assim obtidos – $w = 5x + 3y$ e $z = 2x - y$ – dizem-se combinações lineares dos vetores iniciais

$$x = (1, 2, 3) \text{ e } y = (-1, 0, -5).$$

Verificamos, também, que a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um número (escalar) satisfazem as seguintes

Propriedades I.1.14.

1. A adição de vetores é associativa, isto é, para quaisquer u, v e w :

$$u + (v + w) = (u + v) + w.$$

2. A adição de vetores é comutativa, isto é, para quaisquer u e v :

$$u + v = v + u.$$

3. Existe um único vetor de comprimento igual a zero, o vetor nulo que se designa, usualmente, por $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

Além disso, para todo o vetor u :

$$u + 0 = 0 + u = u.$$

4. Para cada vetor u , existe um e um só vetor $(-1)u = -u$, tal que:

$$u + (-u) = (-u) + u = 0.$$

5. Para todo o vetor u e todos os números reais α e β ,

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u).$$

6. Para qualquer vetor u ,

$$1u = u,$$

sendo 1 o elemento neutro da multiplicação em \mathbb{R} .

7. Para qualquer vetor u e quaisquer números reais α e β ,

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$$

8. Para todos os vetores u e v e todo o número real α ,

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

Definimos, de seguida, combinação linear de um conjunto de vetores.

Definição I.1.15. [Combinação linear de um conjunto de vetores]

Seja $p \geq 1$.

Consideremos p vetores de \mathbb{R}^n , v_1, v_2, \dots, v_p , e p escalares, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

Nestas condições, dizemos que o vetor

$$\begin{bmatrix} v \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{bmatrix} v_p \end{bmatrix}$$

é uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_p .

Exercícios I.1.16.

1. Sejam $u = (3, 7)$ e $v = (-1, 1)$ dois vetores de \mathbb{R}^2 .

a) Determine as coordenadas das combinações lineares dos vetores u e v a seguir indicadas:

$$w = u + 3v,$$

$$y = -2u + 4v,$$

$$z = \alpha u + \beta v,$$

onde α e β são números reais.

b) Indique dois números, θ_1 e θ_2 , de modo que $\theta_1 u + \theta_2 v = (5, 5)$.

2. Calcule as coordenadas dos vetores $-x - y$, $x + y + z$ e $2x + 2y + z$, sendo

$$x = (1, 2, 3), y = (-3, 1, -2) \text{ e } z = (2, -3, -1).$$

3. Verifique que se $x = (x_1, x_2, x_3)$ é uma combinação linear dos vetores $u = (5, -2, -3)$ e $v = (-1, 0, 1)$ então a soma das suas coordenadas é igual a zero, isto é, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

4. Seja $[ABCD]$ um paralelogramo do qual apenas se conhecem três dos seus vértices, nomeadamente, $(1,1)$, $(4,2)$ e $(1,3)$.

a) Que pontos do plano \mathbb{R}^2 podem ser escolhidos para quarto vértice? Faça um esboço geométrico das possibilidades encontradas.

b) Resolva o problema anterior para o caso em que os três vértices conhecidos são $(1, -2)$, $(0,0)$ e $(4,2)$.

5. No plano XOY represente as nove combinações lineares a seguir indicadas

$$\alpha(5, 2) + \beta(0, 1), \text{ para } \alpha = 0,1,2 \text{ e } \beta = 0,1,2.$$

6. Dados dois vetores $x = (1, 2, 3)$ e $y = (-1, 0, -5)$ de \mathbb{R}^3 , verifique se:

a) $u = (2, 6, 6)$ é uma combinação linear de x e y ;

b) $v = (-9, -2, 5)$ é uma combinação linear de x e y .

7) Sejam $u = (-4, 0, \frac{1}{4})$ e $v = (-|\theta + 1|, 0, \gamma^2)$, onde $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$, dois vetores de \mathbb{R}^3 .

a) Determine um vetor $w = (w_1, w_2, w_3)$ com a mesma direção que u mas com sentido contrário ao de u .

b) Calcule $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$ de modo que $u = v$.

c) Faça $\theta = \gamma = 0$. Verifique se $y = (-1, 0, 1)$ é uma combinação linear dos vetores u e v .

8) Considere os vetores de \mathbb{R}^3

$$u_1 = (2, 3, 6), u_2 = (1, 1, 2) \text{ e } u_3 = (10, 1, 2).$$

a) Calcule as combinações lineares dos vetores u_1, u_2 e u_3 a seguir indicadas:

a1) $u_1 - 7u_2$;

a2) $u_1 + u_2 - 3u_3$.

b) Verifique se o vetor u_3 é uma combinação linear de u_1 e u_2 .

c) O vetor nulo é combinação linear de u_1 e u_2 ? E de u_1, u_2 e u_3 ? Justifique a sua resposta.

9. Calcule $u \in \mathbb{R}^4$ de modo que

$$\sqrt{2}u - u = u + (2u - u_0) + u + 4u_0,$$

sendo $u_0 = (1, -2, 6, \pi)$.

(Página deixada propositadamente em branco)

I.2 - Produtos com vetores e normas: vetores ortogonais; conjunto ortogonal de vetores; conjunto ortonormal de vetores

Vamos definir, agora, produto interno de dois vetores de \mathbb{R}^n , bem como norma euclidiana (ou comprimento euclidiano) de um vetor.

Definição I.2.1. [Produto interno em \mathbb{R}^n]

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que o resultado da operação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

é o produto interno^{xix} do vetor x pelo vetor y . Mais concretamente, note-se que se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ então

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

Observação com exemplos I.2.2.

1. No caso particular de \mathbb{R}^2 temos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ e, conseqüentemente,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Deste modo, se $u = (\frac{14}{3}, \frac{1}{6})$ e $v = (1, 8)$ então

$$\langle u, v \rangle = (\frac{14}{3})(1) + (\frac{1}{6})(8) = 6.$$

^{xix} Alguns autores também utilizam a designação “produto escalar”.

2. Em \mathbb{R}^3 temos $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ pelo que

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Neste caso, verificamos que se $u = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0\right)$ e $v = (1, 0, 8)$ então

$$\langle u, v \rangle = \left(\frac{1}{3}\right)(1) + \left(\frac{1}{6}\right)(0) + (0)(8) = \frac{1}{3}.$$

Também constatamos que

$$\langle u, u \rangle = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + (0)(0) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

e

$$\langle v, v \rangle = (1)(1) + (0)(0) + (8)(8) = 65.$$

Definição I.2.3. [Vetores ortogonais]

Dois vetores, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, dizem-se ortogonais em \mathbb{R}^n se e só se o seu produto interno é nulo, isto é, se e só se $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemplos I.2.4.

1. Seja $x = (1, 2)$ e $y = (-2, 1)$. Então

$$\langle x, y \rangle = (1)(-2) + (2)(1) = 0$$

e podemos garantir que os vetores $x = (1, 2)$ e $y = (-2, 1)$ são ortogonais.

2. Sejam, agora, $x = (2, -3, 1)$, $y = (1, 1, 1)$ e $z = (4, 3, 2)$.

Verificamos que

$$\langle x, y \rangle = (2)(1) + (-3)(1) + (1)(1) = 0,$$

$$\langle 2x, y \rangle = (4)(1) + (-6)(1) + (2)(1) = 0,$$

$$\langle x, (-3)y \rangle = (2)(-3) + (-3)(-3) + (1)(-3) = 0,$$

$$\langle y, x \rangle = (1)(2) + (1)(-3) + (1)(1) = 0$$

e

$$\langle (-3)y, 2x \rangle = (-3)(4) + (-3)(-6) + (-3)(2) = 0.$$

Todavia

$$\langle x, z \rangle = (2)(4) + (-3)(3) + (1)(2) = 1$$

e

$$\langle y, z \rangle = (1)(4) + (1)(3) + (1)(2) = 9.$$

Além disso

$$\langle 2x, z \rangle = (4)(4) + (-6)(3) + (2)(2) = 2 = 2\langle x, z \rangle,$$

$$\langle x, (-\frac{1}{2})z \rangle = (2)(-2) + (-3)(-\frac{3}{2}) + (1)(-1) = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\langle x, z \rangle,$$

$$\langle y, (-\frac{1}{2})z \rangle = (1)(-2) + (1)(-\frac{3}{2}) + (1)(-1) = -\frac{9}{2} = -\frac{1}{2}\langle y, z \rangle,$$

$$\langle (-3)y, (-\frac{1}{2})z \rangle = \frac{27}{2} = (-3)(-\frac{1}{2})\langle y, z \rangle$$

e

$$\langle x + y, z \rangle = (3)(4) + (-2)(3) + (2)(2) = 10 = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Neste caso dizemos que:

(i) os vetores $x = (2, -3, 1)$ e $y = (1, 1, 1)$ são ortogonais;

(ii) o vetor $2x = (4, -6, 2)$, múltiplo escalar do vetor x , também é ortogonal a $y = (1, 1, 1)$;

(iii) o vetor $x = (2, -3, 1)$ é ortogonal ao múltiplo escalar do vetor y , definido por $(-3)y = (-3, -3, -3)$;

(iv) os vetores $2x = (4, -6, 2)$ e $(-3)y = (-3, -3, -3)$ são ortogonais;

(v) os vetores $x = (2, -3, 1)$ e $z = (4, 3, 2)$ não são ortogonais;

(vi) os vetores $y = (1, 1, 1)$ e $z = (4, 3, 2)$ não são ortogonais;

(vii) os vetores $x + y = (3, -2, 2)$ e $z = (4, 3, 2)$ não são ortogonais.

Exercícios I.2.5.

1. Mostre que:

a) O vetor nulo $(0, 0)$ é ortogonal a todos os vetores de \mathbb{R}^2 ;

b) O vetor nulo $(0, 0, 0)$ é ortogonal a todos os vetores de \mathbb{R}^3 ;

c) Os vetores $(4, -10)$ e $(5, 2)$ são ortogonais em \mathbb{R}^2 ;

(iv) Os vetores $(7, 3, -10)$ e $(1, 1, 1)$ são ortogonais em \mathbb{R}^3 ;

b) Determine dois vetores de \mathbb{R}^5 , com coordenadas não nulas, que sejam ortogonais.

Definição I.2.6. [Conjunto ortogonal de vetores]

Sejam v_1, v_2, \dots, v_p vetores de \mathbb{R}^n .

Dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ é um conjunto ortogonal de vetores de \mathbb{R}^n se e só se

$$\begin{cases} \langle v_i, v_j \rangle = 0, & \text{sempre que } i \neq j \\ \langle v_i, v_i \rangle > 0 \end{cases}.$$

Exemplo I.2.7.

O conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde

$$v_1 = (-1, 1, 0, 0), v_2 = (-1, -1, 2, 0),$$

$$v_3 = (-1, -1, -1, 3) \text{ e } v_4 = (1, 1, 1, 1),$$

é um conjunto ortogonal de \mathbb{R}^4 uma vez que

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_4 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, v_4 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle = 0.$$

Exercícios I.2.8.

1. O conjunto $\{(0, 0, 0)\}$ é um conjunto ortogonal de \mathbb{R}^3 ?
2. Seja $u = (4, 0, -4)$ um vetor de \mathbb{R}^3 . Determine um vetor não nulo, $w = (w_1, w_2, w_3)$, que seja ortogonal a u , e que, além disso, se escreva como combinação linear dos vetores $(-1, 1, 0)$ e $(1, 2, -3)$.
3. Verifique se o vetor $u = (-2, 3, 1)$ é uma combinação linear dos vetores $x = (1, 2, 3)$ e $y = (-3, 1, -2)$.
4. Indique um vetor $w = (w_1, w_2, w_3)$, não nulo e ortogonal a $u = (-2, 3, 1)$, que seja uma combinação linear dos vetores $x = (1, 2, 3)$ e $y = (-3, 1, -2)$.

Associado à noção de produto interno surge o conceito de comprimento de um vetor.

Definição I.2.9. [Comprimento euclidiano^{xx} em \mathbb{R}^n]

Dado $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dizemos que o número real

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

é o comprimento euclidiano (ou norma euclidiana) do vetor x .

Exemplos I.2.10. [Comprimento euclidiano em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3]

a) Em \mathbb{R}^2 , se $x = (1, 2)$ e $y = (1, -1)$ então

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \|y\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

b) Em \mathbb{R}^3 , dados os vetores

$$x = (-2, -3, -1), y = (-1, 0, -1) \quad \text{e} \quad z = (-4, -3, 0),$$

temos, sucessivamente,

$$\|x\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14},$$

$$\|y\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\|z\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Verificamos que

$$\|(-5)y\| = \|(5, 0, 5)\| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 5\|y\|,$$

^{xx} Ou norma euclidiana.

e, também que $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)x$ e $\left(\frac{1}{5}\right)z$ são vetores unitários (isto é, têm norma igual a 1), visto que $\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)x\right\| = \frac{1}{\sqrt{14}}\|x\|$ e $\left\|\left(\frac{1}{5}\right)z\right\| = \frac{1}{5}\|z\|$.

Além disso, constatamos que

$$\|x + z\| < \|x\| + \|z\|,$$

uma vez que

$$\|x + z\| = \|(-6, -6, -1)\| = \underbrace{\sqrt{73}}_{\approx 8.5} \text{ e } \|x\| + \|z\| = \underbrace{\sqrt{14}}_{\approx 3.7} + 5 \approx 8.7.$$

Exercício I.2.11.

Considere três vetores de \mathbb{R}^4 $u = (-1, -1, 1, 1)$, $v = (1, 1, 5, -3)$ e $w = (1, 1, 1, 1)$.

Verifique que:

- a) $\langle u, u \rangle > 0$;
- b) $\langle w, w \rangle \neq 0$;
- c) $\langle u, v \rangle = 0$;
- d) $\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$;
- e) $\|6w\| = 6\|w\|$;
- f) $\|-w\| = \|w\|$;
- g) $\langle u, w \rangle < \|u\|\|w\|$;
- h) $\|u + v\| < \|u\| + \|v\|$;
- i) $\|u + w\| < \|u\| + \|w\|$.

Exercício I.2.12.

Prove que se x , y e z são vetores arbitrários de \mathbb{R}^n e α e β quaisquer dois números reais então:

- a) $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- b) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- d) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Resolução (algumas sugestões).

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nas alíneas a) e b) note que

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Nas alíneas c) e d) utilize as propriedades das operações com números reais.

Exercício I.2.13.

Mostre que se $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, para $v \in \mathbb{R}^n$, então:

- a) $\|v\| \geq 0$;
- b) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
- c) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$;
- d) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade triangular).

Resolução (algumas sugestões).

d) Sejam $u \neq 0$, $v \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Verificamos que

$$\|\alpha u + v\|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \langle \alpha u + v, \alpha u + v \rangle \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 \langle u, u \rangle + 2\alpha \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \geq 0.$$

Então

$$(2\langle u, v \rangle)^2 - 4\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle.$$

Deste modo, concluímos que $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Definição I.2.14. [Conjunto ortonormal de vetores]

Sejam v_1, v_2, \dots, v_p vetores de \mathbb{R}^n .

Dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ é um conjunto ortonormal se e só se é um conjunto ortogonal de vetores unitários (isto é, de norma 1).

De outra forma:

$\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ é dito um conjunto ortonormal de vetores se e só se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}, \text{ sendo } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Exemplo I.2.15.

O conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde

$$v_1 = (-1, 1, 0, 0), v_2 = (-1, -1, 2, 0),$$

$$v_3 = (-1, -1, -1, 3) \text{ e } v_4 = (1, 1, 1, 1),$$

não é um conjunto ortonormal de \mathbb{R}^4 .

Note que $\|v_1\| = \sqrt{2}$, $\|v_2\| = \sqrt{6}$, $\|v_3\| = \sqrt{12}$ e $\|v_4\| = 2$.

No entanto, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto ortogonal de \mathbb{R}^4 .

Observação I.2.16.

Dado qualquer conjunto ortogonal de vetores não nulos, $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, podemos formar um conjunto ortonormal, $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$, definindo

$$u_i = \left(\frac{1}{\|v_i\|}\right) v_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, p.$$

Exemplo I.2.17.

O conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, onde

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1, 1, 0, 0), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)(-1, -1, 2, 0),$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(-1, -1, -1, 3) \text{ e } u_4 = \left(\frac{1}{2}\right)(1, 1, 1, 1)$$

é um conjunto ortonormal de \mathbb{R}^4 .

Exercício I.2.18.

Considere os vetores

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 2, 1) \text{ e } v_3 = (0, 1, -2),$$

assim como os vetores

$$u_1 = (1, 0, 0), u_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ e } u_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right).$$

Podemos afirmar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto ortogonal? E ortonormal?

E quanto ao conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$, o que podemos concluir?

Exercício I.2.19.

Considere, em \mathbb{R}^3 , os vetores

$$u = (1, 2, 1), v = (1, 0, -1) \text{ e } w = (2, 1, 0).$$

Determine:

a) um vetor não nulo, $z = (z_1, z_2, z_3)$, ortogonal a w , que seja uma combinação linear dos vetores u e v .

b) um vetor $y = (y_1, y_2, y_3)$ de modo que $\left\{ \left(\frac{1}{\|u\|} \right) u, \left(\frac{1}{\|v\|} \right) v, y \right\}$ seja um conjunto ortonormal.

Exercícios I.2.20.

1. Sejam

$$u = (0, p + 2, -1), v = (1, 1, -p - 1)$$

$$w = (p + 2, 0, -1) \text{ e } z = (p - 1, 2, 1)$$

quatro vetores de \mathbb{R}^3 e p um número real.

Determine para que valores de $p \in \mathbb{R}$ se verifica que:

- a) $u = w$;
- b) $u + v + w = (0, 0, 0)$;
- c) $\|u\| = 1$;
- d) $\{u, v, z\}$ é um conjunto ortogonal;
- e) $u = 2v - w$.

2. Considere, em \mathbb{R}^4 , os vetores

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que:

a-1) o vetor x_3 é uma combinação linear dos vetores x_1 e x_2 ;

a-2) o vetor x_4 não é uma combinação linear dos vetores x_2 e x_3 ;

a-3) o vetor x_4 é ortogonal ao vetor $-3x_2 + x_3$;

b) Seja $y_4 = \alpha x_4$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine α de modo que $\|y_4\| = 1$.

Exercícios I.2.21.

Considere, em \mathbb{R}^3 , o vetor $v = (-\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$.

a) Seja $z = \delta v$, onde $\delta \in \mathbb{R}$. Determine δ de modo que $\|z\| = 1$.

b) Construa um conjunto ortogonal de três vetores não nulos que inclua o vetor $v = (-\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$.

I.3 - Conceito de matriz. Matrizes especiais: matriz linha, matriz coluna, matriz triangular, matriz diagonal, matriz escalar, matriz identidade; matriz transposta, matriz ortogonal.

Generalizamos, de seguida, o conceito de vetor enquanto sequência ordenada de números reais. Assim, vamos estudar tabelas^{xxiii} de números reais dispostos em linhas e em colunas que designaremos por matrizes.

Definição I.3.1.

Sejam m e n dois números inteiros positivos.

Chamamos matriz de números reais ou matriz real a todo o quadro de dupla entrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Numa representação simplificada, é vulgar escrever-se, em vez do quadro acima descrito, $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Os elementos da matriz são números reais que, de um modo geral, serão designados por escalares.

O tamanho (ou dimensão) de uma matriz é dado por dois números inteiros positivos que indicam, respetivamente, o número de linhas e o

^{xxiii} Quadros de dupla entrada.

número de colunas. Deste modo, uma matriz cujo número de linhas é m e de colunas é n é dita uma matriz $m \times n$ ou uma matriz do tipo m por n , ou ainda do tipo (m, n) .

No que se segue representamos por L_i a linha que numa matriz ocupa a posição i a contar do topo, e, por C_j a coluna que ocupa a posição j a contar da esquerda.^{xxiv}

Notações I.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}, \text{ ou } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \text{ ou, ainda, } A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Chamamos a a_{ij} elemento genérico de A .

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é dita rectangular se $m \neq n$; no caso contrário, quando $m = n$, dizemos que A é quadrada.

Em particular, se A tem apenas uma linha e uma coluna, escrevemos

$$A = [a]_{1 \times 1} \stackrel{\text{notação}}{=} a.$$

Exemplos I.3.3.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo $(2,3)$, ou matriz 2×3 ;

^{xxiv} Em alguns casos também denotamos por A_i e A_j , respetivamente, a linha i e a coluna j da matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

2. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo (5,1), ou matriz 5×1 , ou, ainda, matriz

coluna;

3. $[0 \ 5 \ 0 \ -1]$ é uma matriz do tipo (1,4) ou matriz 1×4 , ou, ainda, matriz linha;

4. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \pi & 0.2 & -1 \\ 11 & -3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo (3,3) ou matriz 3×3 , ou,

ainda, matriz quadrada de ordem 3;

5. $[3] = 3$ é uma matriz do tipo (1,1) ou matriz 1×1 , ou, ainda, matriz quadrada de ordem 1.

Definição I.3.4. [Igualdade de matrizes]

Dizemos que duas matrizes, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, do mesmo tipo, são iguais se e só se têm iguais elementos homólogos, isto é, se e só se

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n.$$

Exemplos e Exercícios I.3.5.

1. Verificamos que $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^3 & 3^2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Observamos que $\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$, no entanto, constatamos que $\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 2-2 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Sejam as matrizes reais e retangulares

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Justifique que $A \neq B$, $A \neq C$ e $A = D$.

4. Determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 7\beta - \alpha \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Calcule $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{bmatrix} -5 & -14 & 0 \\ |\theta - 1| & 2 & 1 \\ 7 & \gamma^2 & |\theta - 1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & \gamma^2 - 9\gamma & 0 \\ |\theta + 1| & 2 & 1 \\ 7 & 9\gamma - 14 & |1 + \theta| \end{bmatrix}.$$

Definição I.3.6. [Diagonal principal, diagonal secundária e traço de uma matriz quadrada]

A diagonal principal duma matriz quadrada, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, é constituída pelos elementos principais, isto é, pelos elementos a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, m$ (de índices iguais).

Designamos a soma dos elementos principais de A por traço de A e escrevemos

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

A diagonal secundária^{xxv} de $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é constituída pelos elementos a_{ij} , tais que $i + j = n + 1$.

Os elementos a_{ij} e a_{ji} dizem-se simétricos ou opostos.

Exemplos I.3.7.

1. Consideremos a matriz identidade de ordem 3, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Verificamos que 1, 1 e 1 são os seus elementos principais e, ainda, que $tr(I_3) = 3$;

2. Os elementos principais da matriz quadrada $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 11 & -3 & 7 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

são 3, 2, 7, 1 e 2 e o seu traço é igual a 15;

3. A diagonal secundária da matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 11 & -3 & 7 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

é constituída pelos elementos 1, 1, 7, 4 e 0.

Além disso, o simétrico do elemento 11, situado na posição (3,1), é o elemento 1 situado na posição (1,3).

^{xxv} Também designada por segunda diagonal de A .

Definição I.3.8. [Tipos de matrizes]

1. Matriz nula – matriz cujos elementos são iguais a $0 \in \mathbb{R}$.

Uma matriz nula, do tipo $m \times n$, representa-se por $0_{m \times n}$ ou, em alguns casos, apenas por 0 .

Exemplos: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 5}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$, $[0]_{1 \times 1}$ e $[0 \ 0 \ 0 \ 0]_{1 \times 4}$.

2. Matriz linha – matriz do tipo $1 \times n$.

Exemplo: $[1^0 \ 6 \ 0 \ \sqrt{225} \ -4 \ 2^3]_{1 \times 6}$.

3. Matriz coluna – matriz do tipo $m \times 1$.

Usualmente chamamos vetor coluna ou simplesmente vetor a uma matriz coluna.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$.

4. Matriz triangular – matriz quadrada em que são nulos os elementos situados para um dos lados da diagonal principal.

Consideramos dois tipos: matriz triangular superior (quando abaixo da diagonal principal só se encontram zeros) e matriz triangular inferior (quando acima da diagonal principal só se encontram zeros).

Exemplos: Sejam $A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 11 & -3 & \mathbf{7} & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$.

Dizemos que A é uma matriz triangular superior e que B é triangular inferior.

5. Matriz diagonal – matriz quadrada cujos elementos não diagonais (ou não principais) são nulos.

Isto é, a matriz A diz-se diagonal se for tal que $A = [\delta_{ij}a_{ij}]_{n \times n}$, onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker definido por $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

Escreve-se:

$$\text{diag}(A) = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplos: $\text{diag}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{diag}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$\text{diag}(5, \sqrt{3}, 2, 4) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

6. Matriz escalar – matriz diagonal cujos elementos principais são iguais.

Exemplos: $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Matriz identidade – matriz escalar cujos elementos significativos (isto é, elementos não nulos) são iguais a $1 \in \mathbb{R}$.

Escreve-se:

$$I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Matriz transposta de $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ – matriz que se obtém de A trocando linhas por colunas, isto é, $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0.2 \\ 11 & -3 \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 0 & 0.2 & -3 \end{bmatrix}$ e,

consequentemente,

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 0 & 0.2 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0.2 \\ 11 & -3 \end{bmatrix} = A.$$

9. Matriz ortogonal – matriz cujas colunas constituem um conjunto ortonormal de vetores.

Exemplos: As matrizes $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}$ e

$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ são ortogonais.

Exercícios I.3.9.

1. Usando uma matriz genérica, $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$, mostre que

$$A^{TT} = (A^T)^T = A.$$

2. Construa uma matriz, não nula, que:

a) seja simultaneamente triangular inferior e triangular superior;

b) coincida com a sua transposta;

c) seja escalar e cujo traço seja igual a $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

3. Podemos afirmar que:

a) «Toda a matriz nula é diagonal»? Justifique.

b) «A transposta de uma matriz nula é ela própria»? Justifique.

4 Calcule, se possível, quatro números reais $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}$ - de modo que:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 3x_{11} + 4x_{21} & 3x_{12} + 4x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ -2x_{11} - 4x_{21} & -2x_{12} - 4x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Mostre que $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.

6. Prove que $\text{tr}(I_n) = n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n .

7. Seja $A = [a_{ij}]_{7 \times 7}$ uma matriz escalar. Prove que:

a) $A = A^T$;

b) $\text{tr}(A) = 7a_{11}$.

c) A é ortogonal se e só se $|a_{44}| = 1$.

(Página deixada propositadamente em branco)

I.4 - Operações com matrizes e algumas propriedades: adição de matrizes, multiplicação de uma matriz por um escalar e multiplicação de matrizes.

Analisamos, agora, algumas operações com matrizes e suas propriedades. Constataremos que a adição de matrizes, a multiplicação de uma matriz por um escalar e a multiplicação de matrizes podem ser combinadas de diversos modos e, ainda, que estas operações satisfazem algumas das regras das operações básicas com números reais.

Definição I.4.1. [Adição de matrizes]

Dadas duas matrizes, do mesmo tipo, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, chamamos soma de A e B à matriz $C = A + B$, em que $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, sendo $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo I.4.2.

Sejam $A = \begin{bmatrix} -11 & 0.9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 10 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Verificamos que

(i) $A + B = \begin{bmatrix} -1 & -0.1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$;

(ii) Não é possível definir a soma $A^T + B$;

(ii) $A^T + B^T = \begin{bmatrix} -1 & -0.1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Note-se que só podemos adicionar matrizes do mesmo tipo e os elementos da matriz soma obtêm-se adicionando os elementos homólogos das matrizes parcelas.

Exercício I.4.3. [Propriedades da adição de matrizes]

Sejam $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Prove que a adição de matrizes possui as seguintes propriedades:

1. $A + B = B + A$ (comutatividade);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associatividade);
3. Existe uma matriz – a matriz nula $0_{m \times n} = \mathbf{0}$ – tal que:

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A \text{ (existência de elemento neutro);}$$

4. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$;
5. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Definição I.4.4. [Multiplicação de uma matriz por um escalar]

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, o produto da matriz A pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é obtido multiplicando por λ cada um dos elementos de A , isto é,

$$\lambda \cdot A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}.$$

Exemplos I.4.5

$$\text{a) } 5 \cdot \begin{bmatrix} -11 & 0.9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5)(-11) & (5)(0.9) & (5)(5) \\ (5)(4) & (5)(2) & (5)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 & 4.5 & 25 \\ 20 & 10 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) Se } A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } 3 \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & 27 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } (-1) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício I.4.6. [Propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar]

Sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Prove que a multiplicação de uma matriz por um escalar possui as seguintes propriedades:

1. Para cada A existe $-A = (-1) \cdot A$ tal que $A + (-A) = \mathbf{0}_{m \times n}$;
2. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;
3. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;
4. $\lambda(\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$;
5. $1 \cdot A = A$.
6. $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$;
7. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Notação I.4.7.

Considere a soma

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Podemos indicar esta soma, de forma mais abreviada, recorrendo à noção de somatório que utiliza a letra maiúscula grega Σ (sigma), do seguinte modo

$$\sum_{k=1}^5 a_k.$$

Exemplos I.4.8.

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = \sum_{i=1}^6 2i$;

$$b) 7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = \sum_{j=0}^4 7^j;$$

$$c) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k;$$

$$d) a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + \dots + a_{i_{29}} = \sum_{j=1}^{29} a_{ij};$$

$$e) a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_{31} b_{31} = \sum_{k=1}^{31} a_k b_k;$$

$$f) \underbrace{u_{11} v_{11}}_{k=1} + \underbrace{u_{12} v_{21}}_{k=2} + \underbrace{u_{13} v_{31}}_{k=3} + \dots + \underbrace{u_{1n} v_{n1}}_{k=n} = \sum_{k=1}^n u_{1k} v_{k1};$$

$$g) \underbrace{a_{i_1} b_{1j}}_{k=1} + \underbrace{a_{i_2} b_{2j}}_{k=2} + \underbrace{a_{i_3} b_{3j}}_{k=3} + \dots + \underbrace{a_{i_n} b_{nj}}_{k=n} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Definição I.4.9. [Multiplicação de uma matriz linha por uma matriz coluna (ou vetor)]

Dada uma matriz linha

$$U = [u_{1j}]_{1 \times n} = [u_{11} \quad u_{12} \quad \dots \quad u_{1n}]_{1 \times n}$$

e um vetor coluna

$$V = [v_{i1}]_{n \times 1} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

o produto $U \times V$ é uma matriz do tipo 1×1 , $W = [w]_{1 \times 1}$, cujo único elemento é dado por

$$w = u_{11} v_{11} + u_{12} v_{21} + u_{13} v_{31} + \dots + u_{1n} v_{n1} = \sum_{k=1}^n u_{1k} v_{k1}.$$

Exemplos I.4.10.

a) Seja $U = [1 \ 2 \ 3]_{1 \times 3}$ e $V = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$.

Então $U \times V = [(1)(-4) + (2)(-5) + (3)(-6)]_{1 \times 1} = [-32]_{1 \times 1} = -32$.

b) Se $A = [-2 \ 1 \ 4 \ 5]$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, então

$A \times B = (-2)(1) + (1)(2) + (4)(5) + (5)(0) = -2 + 2 + 20 + 0 = 20$.

c) Note-se que o primeiro membro da equação

$$2x - 3y + 7z + 3t = 4$$

se pode escrever como o produto da matriz linha

$$[2 \ -3 \ 7 \ 3] \text{ (matriz dos coeficientes)}$$

pela matriz coluna (ou vetor)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \text{ (vetor das incógnitas),}$$

isto é,

$$2x - 3y + 7z + 3t = 4 \Leftrightarrow [2 \ -3 \ 7 \ 3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 4.$$

(d) Verificamos, também, que se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ então

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = x^T y.$$

Exercícios I.4.11.

Calcule $A \times B$, sendo:

a) $A = [-0.1 \ 2 \ -3]$ e $B = [-0.01 \ 0.2 \ 3 \times 10^{-3}]^T$;

b) $A = [-\frac{1}{3} \ \sqrt{2}]$ e $B = [-6 \ \sqrt{8}]^T$;

c) $A = [1 \ 0 \ 0]$ e $B = [1 \ 3 \ 9]^T$;

d) $A = [0 \ 1 \ 0]$ e $B = [1 \ 3 \ 9]^T$;

e) $A = [0 \ 0 \ 1]$ e $B = [1 \ 3 \ 9]^T$;

f) $A = [1 \ 1 \ 1]$ e $B = [1 \ 3 \ 9]^T$.

Exercício I.4.12.

Suponha que, no final deste semestre, um grupo de cinco alunos que frequentou a disciplina de Álgebra Linear – em regime de avaliação mista^{xxix} – obteve as classificações indicadas na tabela seguinte.

| | 1º Teste | 2º Teste | 3º Teste | Exame Final |
|---------|----------|----------|----------|-------------|
| Aluno A | 13 | 10 | 15 | 16 |
| Aluno B | 14 | 17 | 4 | 14 |
| Aluno C | 16 | 19 | 18 | 18 |
| Aluno D | 12 | 16 | 9 | 6 |
| Aluno E | 13 | 7 | 11 | 8 |

Tabela 1

^{xxix} Nota final = 60% média de três testes escritos intermédios + 40% exame final.

Tem aprovação na disciplina de Álgebra Linear quem obtiver classificação igual ou superior a 8 (oito) valores no exame final e, ainda, atingir classificação igual ou superior a 10 (dez) valores na nota final.

Mostre que as notas finais dos alunos em causa podem ser calculadas como, a seguir, se indica.

De acordo com as regras de avaliação de Álgebra Linear (Licenciatura em Economia), discuta o caso do Aluno D.

$$(i) \text{ Nota final do Aluno A: } [13 \quad 10 \quad 15 \quad 16] \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 14 \rightarrow 14;$$

$$(ii) \text{ Nota final do Aluno B: } [14 \quad 17 \quad 4 \quad 14] \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 12.6 \rightarrow 13;$$

$$(iii) \text{ Nota final do Aluno C: } [16 \quad 19 \quad 18 \quad 18] \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 17.8 \rightarrow 18;$$

$$(iv) \text{ Nota final do Aluno D: } [12 \quad 16 \quad 9 \quad 6] \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 9.8 \rightarrow \text{NA}^{xxx}$$

$$(v) \text{ Nota final do Aluno E: } [13 \quad 7 \quad 12 \quad 8] \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 9.6 \rightarrow 10$$

Repare-se que podemos construir uma matriz que compile os dados da Tabela 1. Deste modo, chamamos matriz das classificações intermédias a

^{xxx} NA – Não aprovado

$$\mathcal{M}_{CI} = \begin{bmatrix} 13 & 10 & 15 & 16 \\ 14 & 17 & 4 & 14 \\ 16 & 19 & 18 & 18 \\ 12 & 16 & 9 & 6 \\ 13 & 7 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

e, ainda, coluna das ponderações a

$$\mathcal{C}_P = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

Verificamos que podemos sintetizar os cálculos descritos em (i)-(v), do seguinte modo

$$\begin{bmatrix} 13 & 10 & 15 & 16 \\ 14 & 17 & 4 & 14 \\ 16 & 19 & 18 & 18 \\ 12 & 16 & 9 & 6 \\ 13 & 7 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.0 \\ 12.6 \\ 17.8 \\ 9.8 \\ 9.6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 18 \\ NA \\ 10 \end{bmatrix},$$

isto é, constatamos que o produto de uma matriz do tipo 5×4 por um vetor do tipo 4×1 é igual a um vetor do tipo 5×1 .

Formalizamos

Definição I.4.13. [Multiplicação de uma matriz por uma matriz coluna (ou vetor)]

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e um vetor coluna $V = [v_{k1}]_{n \times 1}$, o produto $A \times V$ é o vetor coluna, do tipo $m \times 1$, $Z = [z_{i1}]_{m \times 1}$, cuja componente i -ésima é dada por

$$z_{i1} = a_{i1}v_{11} + a_{i2}v_{21} + \dots + a_{in}v_{n1} = \sum_{k=1}^n a_{ik}v_{k1}.$$

Como vimos, vetores coluna são matrizes de um certo tipo, isto é, são matrizes com uma única coluna. É, portanto, de esperar que o produto de uma matriz por um vetor seja generalizado para produtos de duas matrizes.

Consideremos agora, os dois produtos seguintes, onde o primeiro fator é comum:

$$(i) \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\textcircled{1}] \text{ (linha} \times \text{coluna)},$$

$$\text{onde } \textcircled{1} = (2)(x) + (3)(y) = 2x + 3y$$

e

$$(ii) \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [\textcircled{2}] \text{ (linha} \times \text{coluna)},$$

$$\text{onde } \textcircled{2} = (2)(a) + (3)(b) = 2a + 3b,$$

ou, de modo equivalente,

$$(iii) \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & a \\ y & b \end{bmatrix} = [\textcircled{1} \quad \textcircled{2}] \text{ (linha} \times \text{matriz)},$$

$$\text{onde } \begin{cases} \textcircled{1} = (2)(x) + (3)(y) = 2x + 3y \\ \textcircled{2} = (2)(a) + (3)(b) = 2a + 3b. \end{cases}$$

Analogamente, quando temos o segundo fator comum, verificamos que

$$(iv) \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\textcircled{1}] \text{ (linha} \times \text{coluna)},$$

$$\text{onde } \textcircled{1} = (2)(x) + (3)(y) = 2x + 3y,$$

$$(v) \begin{bmatrix} -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\textcircled{3}] \text{ (linha} \times \text{coluna)},$$

$$\text{onde } \textcircled{3} = (-5)(x) + (6)(y) = -5x + 6y,$$

ou, de forma compactada,

$$(vi) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{3} \end{bmatrix} \text{ (matriz} \times \text{coluna),}$$

$$\text{onde } \begin{cases} \textcircled{1} = (2)(x) + (3)(y) = 2x + 3y \\ \textcircled{3} = (-5)(x) + (6)(y) = -5x + 6y. \end{cases}$$

Examinemos, agora, o seguinte caso

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & a \\ y & b \end{bmatrix} \text{ (matriz} \times \text{matriz).}$$

Repare-se que

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \textcircled{3} & \textcircled{4} \end{bmatrix},$$

onde

- na posição (1,1) da matriz produto temos o elemento $\textcircled{1}$ que resulta do produto da linha 1, $[2 \ 3]$, pela coluna 1, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$;
- na posição (1,2) da matriz produto temos o elemento $\textcircled{2}$ que resulta do produto da linha 1, $[2 \ 3]$, pela coluna 2, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$;
- na posição (2,1) da matriz produto temos o elemento $\textcircled{3}$ que resulta do produto da linha 2, $[-5 \ 6]$, pela coluna 1, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$;
- na posição (2,2) da matriz produto temos o elemento $\textcircled{4}$ que resulta do produto da linha 2, $[-5 \ 6]$, pela coluna 2, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Exemplos e Exercícios I.4.14.

1. Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ -29 & 64 \end{bmatrix}$.

2. Se pretendemos multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, do tipo 3×3 :

a) pela matriz $B = \begin{bmatrix} x & a \\ y & b \\ z & c \end{bmatrix}$, do tipo 3×2 ^{xxvi}, definimos o produto

$A \times B$ como uma matriz de duas colunas, em que cada coluna se obtém multiplicando a matriz A pelo vetor constituído pela correspondente coluna de B . Assim,

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & a \\ y & b \\ z & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{1^{\text{a}} \text{ coluna}} & \vdots & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{2^{\text{a}} \text{ coluna}} \end{bmatrix} =,$$

$$= \begin{bmatrix} x + 3y - z & \vdots & a + 3b - c \\ 3x + 4y - 4z & \vdots & 3a + 4b - 4c \\ 3x + 6y + 2z & \vdots & 3a + 6b + 2c \end{bmatrix}.$$

b) pela matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, do tipo 3×2 , definimos

$$A \times C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1)(1) + (3)(0) + (-1)(-3) & \vdots & (1)(2) + (3)(-1) + (-1)(5) \\ (3)(1) + (4)(0) + (-4)(-3) & \vdots & (3)(2) + (4)(-1) + (-4)(5) \\ (3)(1) + (6)(0) + (2)(-3) & \vdots & (3)(2) + (6)(-1) + (2)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \dots \\ \dots & -18 \\ -3 & \dots \end{bmatrix}.$$

^{xxvi} Isto é, B tem duas colunas.

3. Determine $P \times Q$, sendo $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt[3]{-8} \\ -3 & \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}$.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ duas matrizes reais.

Calcule:

a) a matriz $A^T A$;

b) a matriz $X \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ tal que $\frac{1}{2}(B^T + \sqrt{2} A) - 3X = 0_{3 \times 2}$.

5. Determine $M = (C + I_2)(C - 3I_2)$, sendo $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Consideramos, agora, o produto de duas matrizes em que o número de colunas do primeiro fator é igual ao número de linhas do segundo fator.

Definição I.4.15 [Multiplicação de matrizes]

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ dizemos que a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ é o produto de A por B – por esta ordem –, isto é, $C = A \times B$, se e só se

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj},$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Observação I.4.16. [Possibilidade de se efetuar a multiplicação de matrizes]

(i) Só é possível efetuar a multiplicação de duas matrizes A e B – por esta ordem – quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B .

Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_{1*}} \\ \vdots \\ \boxed{A_{i*}} \\ \vdots \\ \boxed{A_{m*}} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \boxed{B_{*1}} \\ \dots \\ \boxed{B_{*j}} \\ \dots \\ \boxed{B_{*n}} \end{bmatrix},$$

onde $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ representam as linhas de A , enquanto $B_{*1}, B_{*2}, \dots, B_{*n}$ representam as colunas de B , então $C = A \times B = [c_{ij}]_{m \times n}$, e

$$c_{ij} = \left[\underbrace{A_{i*}}_{\text{linha } i \text{ de } A} \right] \cdot \underbrace{\left[B_{*j} \right]}_{\text{coluna } j \text{ de } B}.$$

(ii) Note-se que:

- Cada elemento de $A \times B$ é o produto de uma linha de A por uma coluna de B ;
- Cada coluna de $A \times B$ é o produto da matriz A por uma coluna de B ;
- Cada linha de $A \times B$ é o produto de uma linha de A pela matriz B .

Exercício I.4.17. [Propriedades da multiplicação de matrizes]

Prove que, para quaisquer três matrizes A, B, C (de ordem conveniente) e qualquer escalar λ , se verifica:

- (i) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (associatividade);
- (ii) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributividade);
- (iii) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (distributividade);
- (iv) $\lambda \times (A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$ (associatividade mista).

Exercício I.4.18. [Propriedades da multiplicação de matrizes]

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, 0_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ - \\ - \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B \mid I_2].$$

Calcule:

- a) $A \times B$ e $B \times A$ e verifique que $A \times B \neq B \times A$;
- b) $A \times I_2$ e $I_2 \times A$ e verifique que $A \times I_2 = I_2 \times A = A$;
- c) $A \times 0_{2 \times 2}$ e $0_{2 \times 2} \times A$ e verifique que $A \times 0_{2 \times 2} = 0_{2 \times 2} \times A = 0_{2 \times 2}$;
- d) $A \times E$ e verifique que $A \times E = 0_{2 \times 2}$, sendo A e E matrizes não nulas;
- e) $A \times B$ e $A \times C$ e verifique que $A \times B = A \times C$, sendo $B \neq C$;

f) $M \times N$ e verifique que $M \times N = \left[\begin{array}{c|c} A \times B & A \times I_2 \\ \hline - - - & - - - \\ 0_{2 \times 2} \times B & 0_{2 \times 2} \times I_2 \end{array} \right];$

g) $N \times M$ e verifique que $N \times M = [B \times A];$

h) $M + N^T$ e $A + B^T$ e verifique que $M + N^T = \begin{bmatrix} A + B^T \\ - - - \\ I_2 \end{bmatrix}.$

Exercício I.4.19. [Propriedades da multiplicação de matrizes]

Sejam matrizes A e B duas matrizes de ordem conveniente.

Prove que:

a) a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, não é verdade que se verifique $A \times B = B \times A$, mesmo quando é possível efectuar os dois produtos;

b) pode ter-se $A \times B = 0$ sem que A ou B sem matrizes nulas, ou seja, na multiplicação de matrizes existem divisores de zero;

c) a matriz identidade é o elemento neutro para a multiplicação de matrizes, ou, de modo equivalente,

$$A \times I = I \times A = A \quad \text{e} \quad B \times I = I \times B = B,$$

onde $I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1).$

d) na multiplicação de matrizes, a lei do corte não é válida, ou seja, sendo A uma matriz não nula e X, Y duas matrizes de ordem conveniente, a igualdade $A \times X = A \times Y$ não permite concluir que $X = Y$.^{xxxii}

^{xxxii} A partir de agora, e de um modo geral, escrevemos AB para designar o produto $A \times B$.

Exercício I.4.20.

Em cada uma das alíneas seguintes, dê exemplos de matrizes reais de ordem dois que satisfaçam a propriedade indicada:

a) $A^2 = -I_2$;

b) $B^2 = 0_{2 \times 2}$ com $B \neq 0_{2 \times 2}$;

c) $CD = -DC$ com $DC \neq 0_{2 \times 2}$;

d) $EF = 0_{2 \times 2}$ sendo os elementos de E e F todos diferentes de zero;

e) $AS = SD$ sendo D uma matriz diagonal.

Exercícios I.4.21.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ uma matriz diagonal de elementos principais não nulos.

a) Calcule DA . Descreva o efeito da multiplicação, à esquerda, de uma matriz real qualquer de tipo 3×3 , pela matriz diagonal D .

b) Calcule AD . Descreva o efeito da multiplicação, à direita, de uma matriz real qualquer de tipo 3×3 , pela matriz diagonal D .

c) Determine E tal que $ED = DE = I_3$.

2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule LA , LB e AB ;

b) Verifique que o produto de duas matrizes triangulares inferiores com elementos principais iguais a 1 ainda é uma matriz triangular inferior com elementos principais iguais a 1;

c) Determine $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $ML = LM = I_3$.

3. Considere $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule UC , UF e CF ;

b) Verifique que o produto de duas matrizes triangulares superiores com elementos principais iguais a 1 ainda é uma matriz triangular superior com elementos principais iguais a 1;

c) Determine $N \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $NU = UN = I_3$.

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & m & n \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $L - I_3$, $(L - I_3)^2$ e LD ;

b) Determine dois números $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $A = (LD)U$;

c) Defina a matriz $G \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, triangular inferior, com 1's na diagonal principal, que satisfaz a condição $LG = I_3$.

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Calcule $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tais que $Au = \lambda_1 u$, $Av = \lambda_2 v$ e $Aw = \lambda_3 w$.

6. Considere as duas matrizes quadradas, de ordem 2,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $C = AB$ e $C^2 = (AB)^2 = (AB)(AB)$;

b) O que pode dizer sobre os elementos da matriz $C^{21} = (AB)^{21}$?

7. Sejam $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ duas matrizes. Calcule:

a) $M^2 = M \times M$;

b) $M^3 = M^2 \times M = M \times M \times M$;

c) $M^p = \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{p \text{ vezes}}$, sendo p um número natural;

d) $N^2 = N \times N$;

e) $N^3 = N^2 \times N = N \times N \times N$;

f) $N^q = \underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{q \text{ vezes}}$, sendo q um número natural.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Calcule:

a) os produtos $A^2 = AA$ e $A^3 = AAA$;

b) a matriz $-A^3 + 3A^2 + A - 3I$.

9. Seja A e B duas matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = BA$.

Prove que:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

10. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calcule os produtos A^2 , A^3 e A^n , sendo n um inteiro positivo;

b) Verifique se $A + A^2 + \cdots + A^n = nA^{\frac{n+1}{2}}$, para todo n inteiro positivo e ímpar.

(Página deixada propositadamente em branco)

I.5 - Matrizes fracionadas: conceito de submatriz, adição e multiplicação de matrizes fracionadas. Espaço coluna de uma matriz. Matrizes Elementares e Matriz de Permutação.

A análise de subconjuntos dos elementos de uma matriz, que iremos designar por submatrizes (ou blocos) pode revelar-se extremamente útil quando, nomeadamente, queremos evidenciar algumas das suas propriedades ou simplificar cálculos que a envolvam.

Em particular, quando as dimensões das matrizes ultrapassam a memória disponível num computador pondo em causa a execução ou eficiência de determinadas operações, a decomposição em blocos da matriz pode permitir que, nos algoritmos em causa, se utilizem matrizes de menor dimensão.

Constataremos, de seguida, que nem todas as matrizes constituídas por elementos de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são submatrizes de A .

Definição I.5.1.

Consideremos uma matriz real A do tipo $m \times n$ e dois números inteiros positivos r e s tais que $r \leq m$ e $s \leq n$. Chamamos submatriz de A do tipo $r \times s$ a toda a matriz formada por elementos comuns a r linhas e s colunas de A (situadas nas posições correspondentes em A).

Deste modo, quando suprimimos $m - r$ linhas e $n - s$ colunas de A obtemos uma matriz A' do tipo $r \times s$ que é uma submatriz de A .

Quando decomponemos uma matriz A em submatrizes dizemos que A é uma matriz fracionada ou uma matriz de blocos.

Exemplos I.5.2.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$.

Se eliminarmos, em A , as 2ª, 4ª e 5ª linhas bem como a 1ª coluna obtemos a submatriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Todavia a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ não é uma submatriz de A . Porquê?

Em particular, cada linha (e cada coluna) de A é uma submatriz.

2. Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ então as matrizes

$$L_1 = [1 \ 2 \ 3 \ 6] \in \mathbb{R}^{1 \times 4} \text{ e } L_2 = [4 \ 5 \ 6 \ 15] \in \mathbb{R}^{1 \times 4}.$$

são submatrizes de B , assim como as matrizes

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, C_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, C_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \text{ e } C_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

3. Seja $M = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. A matriz $M' = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é

uma submatriz de ordem 3 de M , obtida da matriz inicial por supressão da 2ª linha e da 3ª coluna.

Exercícios I.5.3.

Descreva as matrizes fracionadas indicando todos os seus elementos:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} I_2 & \vdots & 0_{2 \times 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{2 \times 2} & \vdots & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \text{ onde } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } M = \begin{bmatrix} M_{11} & \vdots & M_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{21} & \vdots & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}, \text{ onde}$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{21} = [11 \quad 13] \text{ e } M_{22} = [\sqrt{5} \quad 0.1].$$

$$\text{c) } C = [C_1 \quad \vdots \quad C_2 \quad \vdots \quad C_3 \quad \vdots \quad C_4] \in \mathbb{R}^{2 \times 4}, \text{ onde}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, C_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, C_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \text{ e } C_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

Observação I.5.4.

Nas ocasiões em que se torna vantajoso fazer a partição (ou fracionamento) de uma matriz em blocos (submatrizes) é importante ter em conta que as operações sobre matrizes fracionadas são efetuadas segundo as mesmas regras formais que utilizamos no caso em que temos números reais em vez de blocos.

Todavia, a multiplicação de matrizes fracionadas (ou multiplicação por blocos) implica algumas precauções. Sabemos que para se fazer a multiplicação de duas matrizes A e B basta que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B .

No entanto, para a multiplicação por blocos, também é necessário, além disso, que o fracionamento em blocos seja tal que a partição das colunas de A combine com a partição das linhas de B , isto é, seja de tal modo que as dimensões dos blocos sejam compatíveis para efeitos do produto.

Exemplo I.5.5.

Sejam A e B duas matrizes do mesmo tipo e fracionadas exatamente do mesmo modo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 2 & 2 \\ 0 & -1 & \vdots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ -3 & 4 & \vdots & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & \vdots & 5 & 5 \\ 7 & 8 & \vdots & 5 & 6 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 10 & 3 & \vdots & 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{21} & \vdots & B_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Verificamos que

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 7 & \vdots & 7 & 7 \\ 7 & 7 & \vdots & 7 & 7 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 7 & 7 & \vdots & 7 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5A - 2B &= 5 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5A_{11} - 2B_{11} & 5A_{12} - 2B_{12} \\ 5A_{21} - 2B_{21} & 5A_{22} - 2B_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}. \end{aligned}$$

Exemplo I.5.6.

Consideremos as matrizes

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

e

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ - & - & - \\ 10 & 3 & 2 \\ 11 & 7 & 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ - & - \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

Pretendemos calcular $A \times B$.

Repare-se que o “separador” vertical no fator da esquerda, a matriz A , corresponde a um “separador” horizontal no fator da direita, a matriz B .

Deste modo

$$\begin{aligned} A \times B &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ - & - \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ - & - \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ - & - \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{cc|cc} [6 & 8] & + & [42 & 20] \\ [7 & 8] & + & [42 & 20] \\ \hline [0 & 0] & + & [-9 & 1] \end{array} \right] \parallel \left[\begin{array}{c|c} [5] & + & [12] \\ [5] & + & [12] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} [48 & 28] & \parallel & [17] \\ [49 & 28] & \parallel & [17] \\ \hline [-9 & 1] & \parallel & [0] \end{array} \right] = \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} 48 & 28 & \parallel & 17 \\ 49 & 28 & \parallel & 17 \\ \hline -9 & 1 & \parallel & 0 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Exercícios I.5.7.

Utilizando a multiplicação por blocos, calcule $A \times B$, sabendo que:

$$1. A = [A_{11} \quad A_{12}] = \left[\begin{array}{cc|cc} \sqrt{2} & 1 & 3 & \\ 0 & \frac{1}{5} & 6 & \end{array} \right] \text{ e } B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ 5 & 5 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$2. A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \text{ e } B = A;$$

$$3. A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ e } B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ 2 & \vdots & 1 \\ - & - & - \\ 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix};$$

$$4. A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ - & - & - & - & - \\ -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \vdots & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$5. A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] e$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right].$$

Exemplo I.5.8. [Espaço-Coluna de uma matriz]

Consideremos uma matriz

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underbrace{A_1}_{1^{\text{a}} \text{ coluna de } A} & \underbrace{A_2}_{2^{\text{a}} \text{ coluna de } A} & \underbrace{A_3}_{3^{\text{a}} \text{ coluna de } A} & \underbrace{A_4}_{4^{\text{a}} \text{ coluna de } A} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$$

onde $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $A_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ e

$$\text{um vetor-coluna } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ - \\ x_2 \\ - \\ x_3 \\ - \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Utilizando a multiplicação por blocos, calculamos

$$\begin{aligned}
 y = Ax &= [A_{.1} \mid A_{.2} \mid A_{.3} \mid A_{.4}] \begin{bmatrix} x_1 \\ - \\ x_2 \\ - \\ x_3 \\ - \\ x_4 \end{bmatrix} = \\
 &= [A_{.1}][x_1] + [A_{.2}][x_2] + [A_{.3}][x_3] + [A_{.4}][x_4] = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [x_1] + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} [x_2] + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} [x_3] + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} [x_4] = \\
 &= \underbrace{x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\text{combinação linear das colunas de } A}.
 \end{aligned}$$

Assim, sempre que $x \in \mathbb{R}^4$, temos que $y = Ax \in \mathbb{R}^2$ é uma combinação linear das “colunas” da matriz A .

Deste modo definimos o conjunto

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4 \right\}$$

e chamamos a $\mathcal{R}(A)$ – conjunto de todas combinações lineares das colunas de A – espaço das colunas ou espaço-coluna da matriz A .

Exercícios I.5.9.

1. Verifique se o vetor $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertence ao espaço-coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Determine dois vetores

$$v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ e } w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4$$

de modo que $v \in \mathcal{R}(B)$ e $w \notin \mathcal{R}(B)$, sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Defina o conjunto de todos os pares ordenados que se podem escrever como combinação linear das colunas da matriz A ;

b) Determine o espaço coluna da matriz;

(b.i) transposta de A ;

(b.ii) AA^T .

Terminamos esta secção com a definição de matriz elementar e matriz de permutação.

Definição I.5.10. [Matriz de permutação ou matriz elementar do tipo 1]

Chamamos matriz elementar do tipo 1, e denotamos por E_{ij} , a toda a matriz quadrada que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, trocando a linha i com a linha j .

Exemplos I.5.11.

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes de permutação (ou matrizes elementares do tipo 1), visto que

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{com a linha 2}]{\text{troca da linha 1}} E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{com a linha 2}]{\text{troca da linha 1}} E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{com a linha 3}]{\text{troca da linha 1}} E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição I.5.12. [Matriz Elementar do tipo 2]

Chamamos matriz elementar do tipo 2, e denotamos por $E_i(\alpha)$, a toda a matriz quadrada que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, multiplicando a linha i por um número $\alpha \neq 0$.

Exemplos I.5.13.

$$E_2(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, E_1\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_3(\sqrt{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \text{ são}$$

matrizes elementares do tipo 2, dado que

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{linha 2 por } (-7)]{\text{multiplicação da}} E_2(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{linha 1 por } (\frac{1}{3})]{\text{multiplicação da}} E_1(\frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{linha 3 por } (\sqrt{5})]{\text{multiplicação da}} E_3(\sqrt{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Definição I.5.14. [Matriz Elementar do tipo 3]

Chamamos matriz elementar do tipo 3, e denotamos por $E_{ij}(\alpha)$, a toda a matriz quadrada que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, substituindo a linha i pela que dela se obtém subtraindo-lhe a linha j , previamente multiplicada pelo número $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplos I.5.15.

$$E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}, E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_{31}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ são}$$

matrizes elementares do tipo 3.

Note-se que

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{linha 1 previamente multiplicada por } (7)]{\text{substituição da linha 2 pela que dela se obtém subtraindo-lhe a}} E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{substituição da linha 2 pela que} \\ \text{dela se obtém subtraindo-lhe a} \\ \text{linha 1 previamente multiplicada por (7)}}} E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{substituição da linha 3 pela que} \\ \text{dela se obtém subtraindo-lhe a} \\ \text{linha 1 previamente multiplicada por (-1)}}} E_{31}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios I.5.16.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $E_{23}A$ e $(E_{31}(-2))(E_{23})A$.

2. Determine $U = (E_{32}(-3))(E_{31}(-1))(E_{21}(2))B$, sendo $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Sejam $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mostre que:

a) $I_3 = e_1 e_1^T + e_2 e_2^T + e_3 e_3^T$;

b) se $E_{32}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ então $E_{32}(-5) = I_3 - (5)e_3 e_2^T$.

I.6 - Inversão de matrizes

Nesta secção utilizamos, apenas, matrizes quadradas.

Apresentaremos a noção de matriz inversa e verificaremos que nem todas as matrizes (quadradas) têm inversa.

Definição I.6.1.

Dada uma matriz A , quadrada de ordem n – ou do tipo $n \times n$ – chama-se matriz inversa de A à matriz B (se existir), quadrada, de ordem n , tal que

$$AB = BA = I_n,$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem n .

Notação I.6.2.

Quando existe a matriz inversa de A , esta designa-se por A^{-1} .

Temos, assim, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Exercícios resolvidos I.6.3.

Calcule, usando a definição, a inversa da matriz:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix};$

$$2. B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

1. Começamos por procurar uma matriz X tal que $AX = I_n$.

Seja $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$. Temos, no nosso caso, sucessivamente

$$\begin{aligned} AX = I_n &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_{11} + 3x_{21} & 2x_{12} + 3x_{22} \\ -3x_{11} - 4x_{21} & -3x_{12} - 4x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ 2x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -3x_{11} - 4x_{21} = 0 \\ -3x_{12} - 4x_{22} = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Repare-se que, à primeira vista, parece-nos que esta questão passa pela resolução de um sistema de 4 equações e 4 incógnitas $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$.

Todavia, um olhar mais atento, permite-nos perceber que o sistema inicial é equivalente a 2 sistemas de 2 equações e 2 incógnitas, isto é,

$$\begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ 2x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -3x_{11} - 4x_{21} = 0 \\ -3x_{12} - 4x_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ -3x_{11} - 4x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -3x_{12} - 4x_{22} = 1. \end{cases}$$

Por outro lado, e atendendo às propriedades da multiplicação de matrizes, também podemos escrever

$$AX = I_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Assim, tudo se resume a resolver dois sistemas de 2 equações e 2 incógnitas.

Optaremos pelo método da adição ordenada.

Deste modo, obtemos

$$\begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ -3x_{11} - 4x_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_{11} + 9x_{21} = 3 \\ -6x_{11} - 8x_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_{11} + 9x_{21} = 3 \\ x_{21} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -4 \\ x_{21} = 3 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -3x_{12} - 4x_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_{12} + 9x_{22} = 0 \\ -6x_{12} - 8x_{22} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_{12} + 9x_{22} = 0 \\ x_{22} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{12} = -3 \\ x_{22} = 2, \end{cases}$$

ou seja, $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Uma vez que $XA = I_n$, podemos concluir que X é a inversa de A .

2. Neste caso, pretendemos resolver a equação matricial $BX = I_n$, sendo

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

Ora

$$BX = I_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \\ 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1 \\ 2x_{11} + 2x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 1. \end{cases}$$

Assim somos conduzidos a um sistema impossível, uma vez que

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1 \\ 2x_{11} + 2x_{21} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_{12} + x_{22} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -2x_{11} - 2x_{21} = -2 \\ 2x_{11} + 2x_{21} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x_{12} - 2x_{22} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -2x_{11} - 2x_{21} = -2 \\ \boxed{0 = -2} \end{cases} \\ \begin{cases} -2x_{12} - 2x_{22} = 0 \\ \boxed{0 = 1} \end{cases} \end{cases}$$

Logo não existe inversa de B .

Exercícios I.6.4.

Sejam $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ e $C = [c_{ij}]_{n \times n}$. Prove que:

- Se A admite matriz inversa, ela é única.
- Se A e B são duas matrizes invertíveis então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Utilizando a alínea anterior, determine $(ABC)^{-1}$ em função das matrizes inversas A^{-1} , B^{-1} e C^{-1} .

Observação I.6.5.

É importante salientar que a inversa de uma matriz

- pode não existir;
- se existir, é única.

Exercícios I.6.6.

1. Calcule, se possível, as inversas das matrizes:

$$\text{a) } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix};$$

$$\text{d) } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{e) } C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\text{f) } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{g) } E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{h) } E_2(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, E_1\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_3(\sqrt{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix};$$

$$\text{i) } E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}, E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sejam

$$E_1(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, E_{21}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_{12}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule as inversas para cada uma das quatro matrizes elementares apresentadas;

b) Sabendo que $A = (E_1(2))(E_{21}(3))(E_{12}(-3))(E_2(\frac{1}{2}))$ determine A^{-1} usando as inversas da alínea anterior.

Exercícios I.6.7.

1. Seja $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ uma matriz diagonal de elementos principais

não nulos.

a) Calcule a inversa da matriz D , isto é, D^{-1} ;

b) Verifique que a inversa de uma matriz diagonal de elementos principais não nulos ainda é uma matriz diagonal de elementos principais não nulos.

2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule as inversas das matrizes A , B e L , isto é, A^{-1} , B^{-1} e L^{-1} ;

b) Verifique que a inversa de uma matriz triangular inferior com elementos principais iguais a 1 ainda é uma matriz triangular inferior com elementos principais iguais a 1.

3. Considere $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule as inversas das matrizes C , F e U , isto é, C^{-1} , F^{-1} e U^{-1} ;

b) Verifique que a inversa de uma matriz triangular superior com elementos principais iguais a 1 ainda é uma matriz triangular superior com elementos principais iguais a 1.

4. Construa uma matriz $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que:

a) $M \neq I_3$ e $M^{-1} = M$;

b) $M \neq I_3$ e $M^{-1} = M^T$.

5. Mostre que se $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ então $BB^T = B^T B = I_2$.

O que pode concluir sobre a inversa da matriz B ?

6. Seja $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. Verifique que $T^{-1} = T$.

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$;

b) Calcule a inversa da matriz utilizando a igualdade da alínea anterior.

8. Suponha que M é uma matriz quadrada de ordem 4, tal que $M^3 = 0$.

a) Calcule $(I_4 - M)(I_4 + M + M^2)$;

b) Verifique que a matriz $I_4 - M$ tem inversa, sendo

$$(I_4 - M)^{-1} = I_4 + M + M^2.$$

CAPÍTULO II • SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

II.1 – Sistemas de equações algébricas lineares – breve revisão dos métodos gráfico, de substituição e de adição ordenada a partir de um exemplo.

Muitos dos problemas que surgem nas mais diversas áreas da ciência e da indústria utilizam equações lineares não só na pesquisa de soluções mas também na procura de respostas aproximadas por intermédio de aproximações lineares adequadas.

Com o objetivo de recordar conceitos fundamentais na resolução e discussão de sistemas de equações lineares, começamos este capítulo com um exemplo.

Exemplo II.1.1.

Um inspetor da Polícia recebe a seguinte informação: «No mercado negro dos produtos roubados venderam-se dois candelabros de prata e um jarrão mandarim por 1500€ euros».

Embora o informador fosse de máxima confiança desconhece o preço de mercado de cada um dos objetos.

Sendo necessário completar aquela informação para continuar com o trabalho de investigação em curso o inspetor convocou três dos seus agentes tendo-os incumbido de averiguar os preços em questão.

Os investigadores (António, Bernardo e Carolina) optaram por trabalhar de forma isolada e, ciosos do resultado das respetivas pesquisas, não o confrontaram com o dos outros colegas.

Assim, António descobriu que seis candelabros e três jarrões mandarim foram vendidos por 5600€. Por seu lado, Bernardo concluiu que quatro candelabros e dois jarrões mandarim foram comprados por 3000€. Finalmente Carolina assegura que três candelabros e dois jarrões mandarim foram vendidos por 2475€.

Só uma destas informações se revelou útil. Porquê?

Resolução:

Comecemos por designar por c o preço de um candelabro e por j o preço de um jarrão mandarim.

Desta forma, podemos descrever a primeira informação com a seguinte equação

$$2c + 1j = 1500€.$$

Completando esta informação com a do António – descrita pela equação $6c + 3j = 5600€$ – construímos o seguinte sistema de equações lineares

$$(I) \begin{cases} 2c + 1j = 1500\text{€} \\ 6c + 3j = 5600\text{€} \end{cases}$$

Vamos resolvê-lo por adição ordenada:

$$(-3) \begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ 6c + 3j = 5600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6c - 3j = -4500 \\ \underline{6c + 3j = 5600} \\ 0 = 1100. \end{cases}$$

Verificamos que

- (I) é um sistema impossível;
- As informações em causa não são compatíveis;
- A informação do António está errada.

Logo, se a primeira informação é fiável, os dados fornecidos pelo António estão, seguramente, errados.

Considerando, agora, o resultado da pesquisa do segundo investigador, Bernardo, – descrito pela equação $4c + 2j = 3000\text{€}$ – e, combinando-o com a informação inicial, obtemos

$$(II) \begin{cases} 2c + 1j = 1500\text{€} \\ 4c + 2j = 3000\text{€} \end{cases}$$

Resolvemos este novo sistema de equações por adição ordenada:

$$(-2) \begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ 4c + 2j = 3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4c - 2j = -3000 \\ \underline{4c + 2j = 3000} \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Concluimos, assim, que

- (II) é um sistema possível e indeterminado;
- As informações em causa são compatíveis;
- A informação do Bernardo é redundante.

Ou seja, os dados conseguidos por Bernardo são equivalentes aos do informador, não acrescentando, portanto, nada ao desenrolar da investigação.

O que se sabe é que se um jarrão mandarim custa α euros – sendo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (*porquê?*) – então um candelabro custa $750 - \frac{1}{2}\alpha$ euros. Porquê?

Deste modo, podemos escrever:

$$\begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ j = \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 1500 - j \\ j = \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 750 - \frac{1}{2}\alpha \\ j = \alpha \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Nestas condições dizemos que o sistema tem uma infinidade de soluções do tipo

$$(c, j) = \left(750 - \frac{1}{2}\alpha, \alpha \right), \text{ para } \alpha \in]0, 1500[.$$

Finalmente verificamos que a conjunção da primeira informação com o resultado da investigação conduzida pela investigadora Carolina – descrito pela equação $3c + 2j = 2475\text{€}$ – permite-nos escrever o seguinte sistema de equações lineares

$$(III) \begin{cases} 2c + 1j = 1500\text{€} \\ 3c + 2j = 2475\text{€} \end{cases}$$

que também resolvemos pelo método da adição ordenada:

$$(-3/2) \begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ 3c + 2j = 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3c - \frac{3}{2}j = -2250 \\ \underline{3c + 2j = 2475} \end{cases} \\ \frac{1}{2}j = 225 \Rightarrow j = 450.$$

Constatamos que

- (III) é um sistema possível e determinado;
- As informações em causa são compatíveis;
- A informação da Carolina é relevante.

Neste caso, dizemos o sistema tem uma única solução

$$(c, j) = (525, 450),$$

visto que

$$\begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ j = 450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 1500 - 450 \\ j = 450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1050}{2} = 525 \\ j = 450. \end{cases}$$

Concluimos, assim, que a informação obtida pela Carolina foi a única que nos permitiu determinar o preço dos objetos referidos.

Repare-se que, com este exemplo, recordámos os conceitos de: sistema possível, sistema impossível, sistema indeterminado, sistema determinado e solução de um sistema.

Exercício II.1.2

Uma fábrica produz quatro tipos de bombons de chocolate, *A*, *B*, *C* e *D*. Utiliza cacau, leite, café e frutos secos como principais ingredientes.

A produção de 1000 bombons do tipo *A* requer a utilização de 6 unidades de cacau, 2 unidades de leite, 1 de café e 1 de frutos secos. Na confeção dos bombons do tipo *B* são necessárias de 5 unidades de cacau, 2 de leite, 3 de café e 1 de frutos secos, enquanto os bombons do tipo *C* exigem 5 unidades de cacau, 4 de leite, 2 de café e 2 de frutos secos. Finalmente o fabrico dos bombons do tipo *D* pressupõe o uso de 4 unidades de cacau, 4 de leite e 2 de frutos secos.

Semanalmente a empresa dispõe de 370 unidades de cacau, 240 unidades de leite, 120 de café e 120 de frutos secos.

a) Verifique que se a fábrica pretender esgotar o stock semanal de cacau, leite, café e frutos secos então é necessário que produza igual número de bombons de tipo *B* e *D*.

b) Para garantir a produção de 17000 bombons do tipo *A*, numa semana e esgotar todos os ingredientes, que quantidade de bombons de tipo *B*, *C* e *D* deve a fábrica produzir?

c) A fábrica em questão tem capacidade para assegurar a produção semanal de 40000 bombons do tipo *D*? Justifique a sua resposta.

Resposta:

b) Neste caso a fábrica deve produzir semanalmente 7000 bombons do tipo *B* e *D* e 41000 do tipo *C*.

c) A fábrica não tem capacidade para assegurar a produção referida.

Observação II.1.3. – Sistemas com duas incógnitas

No estudo de sistemas de equações lineares com duas incógnitas, do tipo

$$(\Sigma) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \dots \dots \\ a_mx + b_my = c_m \end{cases}, m \in \mathbb{N},$$

podemos destacar três métodos:

- (i) método gráfico;
- (ii) método de substituição;
- (iii) método da adição ordenada.

Os exercícios, que se seguem, têm como objetivo a revisão dos processos acima elencados.

Exercícios II.1.4. – Sistemas com duas incógnitas

(a) Num mesmo referencial faça o esboço gráfico das seguintes curvas:

(a.1) $r: 4x - 2y = -10$ e $s: 2x + y = 6$;

(a.2) $r: 2x - y = 1$, $s: 2x - y = 0$ e $t: 2x - y = -3$;

(a.3) $r: 4x + 5y = 20$ e $s: 4x - 5y = 20$;

(a.4) $r: 3y + 4x = 12$ e $s: 4y - 3x = 12$;

(a.5) $r: 2x + 3y = 5$ e $s: 2x - 3y = 5$;

$$(a.6) p: y = 0 \text{ e } q: x = -1;$$

$$(a.7) r: 2x - y = 4 \text{ e } s: 2x + y = 4;$$

$$(a.8) p: x = -2, q: y = -3.5, s: y = 4 \text{ e } t: x = 0;$$

$$(a.9) r: y - x = 9, s: y + x = 0 \text{ e } t: 5y + 7x = 0;$$

$$(a.10) r: y = x, s: -x + y = 2 \text{ e } t: -x + y + 3 = 0;$$

$$(a.11) r: y = -2x, s: 2x + y = 3 \text{ e } t: 2x + y + 2 = 0.$$

(b) Tendo em conta o estudo efetuado na alínea anterior classifique os seguintes sistemas quanto às soluções:

$$(b.1) \begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ 2x + y = 6 \end{cases};$$

$$(b.2) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

$$(b.3) \begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 4x - 5y = 20 \end{cases};$$

$$(b.4) \begin{cases} 3y + 4x = 12 \\ 4y - 3x = 12 \end{cases};$$

$$(b.5) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases};$$

$$(b.6) \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases};$$

$$(b.7) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases};$$

$$(b.8) \begin{cases} x = -2 \\ y = -3.5 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases};$$

$$(b.9) \begin{cases} y - x = 0 \\ y + x = 0 \\ 5y + 7x = 0 \end{cases};$$

$$(b.10) \begin{cases} y = x \\ -x + y = 2 \\ -x + y + 3 = 0 \end{cases};$$

$$(b.11) \begin{cases} y = -2x \\ 2x + y = 3 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}.$$

(c) Utilizando o método de substituição resolva, quando possível, os sistemas:

$$(c.1) \begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ 2x + y = 6 \end{cases};$$

$$(c.2) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

$$(c.3) \begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 4x - 5y = 20 \end{cases};$$

$$(c.4) \begin{cases} 3y + 4x = 12 \\ 4y - 3x = 12 \end{cases};$$

$$(c.5) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases};$$

$$(c.6) \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases};$$

$$(c.7) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases};$$

$$(c.8) \begin{cases} x = -2 \\ y = -3.5 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases};$$

$$(c.9) \begin{cases} y - x = 0 \\ y + x = 0 \\ 5y + 7x = 0 \end{cases};$$

$$(c.10) \begin{cases} y = x \\ -x + y = 2 \\ -x + y + 3 = 0 \end{cases};$$

$$(c.11) \begin{cases} y = -2x \\ 2x + y = 3 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}.$$

(d) Utilizando o método da adição ordenada determine o conjunto solução dos sistemas:

$$(d.1) \begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ 2x + y = 6 \end{cases};$$

$$(d.2) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

$$(d.3) \begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 4x - 5y = 20 \end{cases};$$

$$(d.4) \begin{cases} 3y + 4x = 12 \\ 4y - 3x = 12 \end{cases};$$

$$(d.5) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases};$$

$$(d.6) \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases};$$

$$(d.7) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases};$$

$$(d.8) \begin{cases} x = -2 \\ y = -3.5 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases};$$

$$(d.9) \begin{cases} y - x = 0 \\ y + x = 0 \\ 5y + 7x = 0 \end{cases};$$

$$(d.10) \begin{cases} y = x \\ -x + y = 2 \\ -x + y + 3 = 0 \end{cases};$$

$$(d.11) \begin{cases} y = -2x \\ 2x + y = 3 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}.$$

II.2 – Resolução e discussão de sistemas de equações algébricas lineares. Condensação de matrizes. Característica de uma matriz. Algoritmo de Gauss.

Recapitulemos, agora, alguns conceitos importantes da teoria dos sistemas lineares.

Definição II.2.1. [Equação Linear]

Uma equação algébrica linear nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde a_1, a_2, \dots, a_n e b são números. Chamamos a b segundo membro ou termo independente da equação.

Exemplo II.2.2.

$x + y - z + t = 5$ é uma equação linear nas incógnitas x, y, z e t .

Definição II.2.3. [Sistema de Equações Lineares]

Um sistema de equações algébricas lineares é uma coleção finita de equações lineares (nas mesmas incógnitas) consideradas em conjunto.

Um sistema de m equações e n incógnitas pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

onde os $m \times n$ coeficientes a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) e os termos independentes b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) são números dados.

Se os termos independentes b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) são nulos, dizemos que o sistema é homogêneo.

Exemplo II.2.4.

a) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 4 \end{cases}$ é um sistema de 3 equações e 3 incógnitas;

b) $\begin{cases} m + bn - s + 3t = 0 \\ am - 30n + s - t = 0 \end{cases}$ é um sistema homogêneo de 2 equações.

Neste caso temos 4 incógnitas, m, n, s e t ;

c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ z + 4w = -1 \\ x + y = 7 \\ -z + 3w = 10 \end{cases}$ é um sistema de 4 equações e 4 incógnitas.

Definição II.2.5. [Solução de um Sistema de Equações Lineares]

Uma solução de um sistema de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n , é uma sequência ordenada $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de números tais que as substituições $x_j = \xi_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) transformam todas as equações do sistema em identidades.

Exemplo II.2.6.

a) O par (2,1) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$, visto que, fazendo $x = 2$ e $y = 1$, obtemos

$$\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2(2) + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

b) Os ternos ordenados (0, 0, 0) e (4, -3, 1) são soluções do sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$, porque

$$\begin{cases} 0 + 0 - 0 = 0 \\ 2(0) + 3(0) + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - 3 - 1 = 0 \\ 2(4) + 3(-3) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Contudo, o terno (0, 1, 1) não é solução do sistema anterior já que

$$\begin{cases} 0 + 1 - 1 = 0 \\ 2(0) + 3(1) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 4 = 0 \end{cases}$$

Definição II.2.7. [Classificação de Sistemas de Equações Lineares quanto às soluções]

Um sistema de equações lineares que tenha pelo menos uma solução é dito possível (determinado se tiver uma, indeterminado se tiver mais do que uma).

Um sistema de equações que não tenha nenhuma solução é dito impossível.

Exemplos II.2.8.

a) Verificamos que o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ é possível e determinado,

tendo em conta que

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 2x + (5 - x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = -2 \end{cases};$$

b) O sistema $(\Sigma) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ é possível e indeterminado visto que

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 2x + 2(5 - x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 10 = 10 \end{cases}.$$

Deste modo, podemos concluir que todos os pares do tipo

$$(x, y) = (5 - \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}, \text{ são soluções deste sistema.}$$

Ou, ainda, que

$$S = \{(5 - \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\},$$

é o conjunto solução de (Σ) .

c) Uma vez que

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 2x + 2(5 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ \underline{10 = 0!!} \end{cases}, \\ &\text{\textit{condição impossível}} \end{aligned}$$

podemos afirmar que o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ é impossível.

Definição II.2.9. [Discussão e Resolução de um Sistema de Equações Lineares]

Discutir um sistema de equações lineares é averiguar em que casos tal sistema é possível (isto é, tem solução) ou impossível (isto é, não tem solução).

Resolver um sistema de equações lineares consiste em calcular todas as suas soluções.

Exemplos II.2.10.

a) O sistema

$$(I) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

é possível e determinado, visto que o par $(-2,7)$ é a única solução de (I).

$$\text{Note-se que } (I) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + (3 - 2x) = 1 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases}.$$

b) O sistema

$$(II) \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

é homogéneo. Como tal, é sempre possível. Repare-se que $(0,0)$ é solução de (II).

Além disso, (II) é determinado, pois

$$(II) \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + x = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

o que nos permite afirmar que $(0,0)$ é solução única.

c) O sistema

$$(III) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ -6x - 2y = -2 \end{cases}$$

é possível e indeterminado.

$$\text{Note-se que } \begin{cases} 3(0) + 1 = 1 \\ -6(0) - 2(1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ -2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{mas também } \begin{cases} 3(1) + (-2) = 1 \\ -6(1) - 2(-2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ -2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{e, ainda, } \begin{cases} 3(-2) + 7 = 1 \\ -6(-2) - 2(7) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ -2 = -2 \end{cases}, \text{ etc.}$$

De um modo geral, podemos concluir que

$$\mathbf{S} = \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\beta, \beta \right), \beta \in \mathbb{R} \right\} \text{ é o conjunto solução de (III).}$$

d) O sistema (IV) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$ é impossível, uma vez que

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ 6x + 2(1 - 3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ 2 = 0 \end{cases}$$

e $2 = 0$ é uma condição impossível.

Definição II.2.11. [Sistemas de Equações Lineares Equivalentes]

Dois sistemas de equações lineares com o mesmo número de equações e o mesmo número de incógnitas dizem-se equivalentes se têm exatamente as mesmas soluções.

Exemplos II.2.12.

a) Os sistemas $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -9 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ são equivalentes.

Verificamos que o par $(-2,7)$ é a única solução destes sistemas.

b) Os sistemas $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -9 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -9 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ não são equivalentes.

Porquê?

c) Os sistemas

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -9 \end{cases}, \begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - b = -9 \end{cases}, \begin{cases} 3m + n = 1 \\ m - n = -9 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 3\theta + \eta = 1 \\ \theta - \eta = -9 \end{cases}$$

são equivalentes. Porquê?

Suponhamos, agora, que pretendemos resolver (i.e., calcular todas as soluções de) os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -9 \end{cases}, \begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - b = -9 \end{cases}, \begin{cases} 3m + n = 1 \\ m - n = -9 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 3\theta + \eta = 1 \\ \theta - \eta = -9 \end{cases}.$$

Isto é, pretendemos obter os valores dos pares ordenados (x, y) , (a, b) , (m, n) e (θ, η) .

Dado que são sistemas equivalentes basta-nos determinar uma das sequências referidas: (x, y) , (a, b) , (m, n) ou (θ, η) .

Tratando-se de sistemas com o mesmo conjunto solução qual é a informação essencial (à resolução, claro!) que contém?

São, necessariamente, os coeficientes das incógnitas e os termos independentes.

Repare-se, ainda, que estes elementos podem ser dispostos numa matriz na forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ para os coeficientes das incógnitas,}$$

e numa coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}, \text{ para os termos independentes.}$$

Ou de forma compacta $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -9 \end{bmatrix}$.

Deste modo, surge a “notação matricial” para os sistemas de equações lineares.

No primeiro caso temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Procedendo de forma análoga para os restantes, escrevemos:

Sistema de equações

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - b = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3m + n = 1 \\ m - n = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\theta + \eta = 1 \\ \theta - \eta = -9 \end{cases}$$

Notação matricial

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Exercícios II.2.13.

1. Utilizando o método de substituição (ascendente) determine todas as soluções dos sistemas.

Preencha, ainda, os espaços em branco.

$$a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix};$$

(Note-se que, neste caso, pretendemos determinar todos os pares de números reais (x, y) que satisfazem as duas equações anteriores)

$$b) x + 2y = 5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix};$$

(Também, neste caso, pretendemos determinar todos os pares de números reais (x, y) que satisfazem a equação anterior)

$$c) \begin{cases} x + 6y + 4z = -1 \\ y + 2z = \frac{-10}{3} \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \frac{-10}{3} \\ \cdots \end{bmatrix};$$

(Agora queremos obter todos os ternos de números reais (x, y, z) que satisfazem as três equações anteriores)

$$d) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - 2z = 5 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix};$$

(Aqui o objetivo é descobrir todos os ternos de números reais (x, y, z) que satisfazem as três equações anteriores)

$$e) \begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ 7y - 5z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \dots \end{bmatrix};$$

(Neste caso, estamos interessados em determinar todos os ternos de números reais (x, y, z) que satisfazem as duas equações anteriores)

$$f) \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \dots \end{bmatrix};$$

(Também, neste caso, queremos calcular todos os ternos de números reais (x, y, z) que satisfazem as duas equações anteriores)

$$g) \begin{cases} x + 2y - z + w = 6 \\ y + 3z + 2w = 2 \\ z - w = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dots & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix};$$

(Neste exemplo pretendemos obter todos os 4-uplos de números reais (x, y, z, w) que satisfazem as três equações anteriores)

$$h) \begin{cases} x - 3y + 2z - w = 0 \\ y + 3z + w = -2 \\ z + 2w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dots & -3 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix};$$

(Finalmente, neste sistema, queremos calcular todos os 4-uplos de números reais (x, y, z, w) que satisfazem as três equações anteriores)

2. Os sistemas (1.a) e (1.b) têm soluções comuns? Quais?
E os sistemas (1.d) e (1.f)?

3. O terno $\left(1, \frac{-7}{4}, \frac{1}{4}\right)$ é solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}?$$

Justifique a sua resposta.

4. Indique:

a) um sistema de 4 equações cujo conjunto solução seja igual ao conjunto solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix};$$

b) dois sistemas equivalentes ao sistema anterior.

De seguida, vamos descrever um método – que designaremos por método de eliminação de Gauss – que nos vai permitir substituir um sistema por um outro equivalente mas mais fácil de resolver.

As operações elementares – que iremos apresentar no próximo exemplo – desempenham um papel fundamental neste contexto.

Exemplo II.2.14.

Consideremos o seguinte sistema

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 7. \\ 3x + 6y + 2z = -3 \end{cases}$$

Temos como objetivo transformar (Σ_1) num sistema “triangular” equivalente, isto é, num sistema do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \quad a_{22}y + a_{23}z = b_2. \\ \quad \quad a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Para o efeito, utilizamos as operações:

\mathcal{O}_1 - Troca entre si de duas equações;

\mathcal{O}_2 - Multiplicação de uma equação por um número diferente de zero;

\mathcal{O}_3 - Substituição de uma equação pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto de outra equação por um número^{xix}.

Assim, note-se que se substituirmos:

(i) a 2^a equação,

$$3x + 4y - 4z = 7,$$

que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 1^a equação,

$$x + 3y - z = 1,$$

por (3), passamos a considerar $-5y - z = 4$ como 2^a equação

e, ainda,

(ii) a 3^a equação,

$$3x + 6y + 2z = -3,$$

pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 1^a equação,

^{xix} Tal como as anteriores, esta operação elementar já foi utilizada no método de adição ordenada. A utilização da expressão «... subtraindo-lhe o produto de outra equação por um número» em vez de «... adicionando-lhe o produto de outra equação por um número» tem a ver com as particularidades da factorização LU de uma matriz. Embora este tópico não seja aqui abordado, a sua importância no contexto da Álgebra Linear foi decisiva na escolha da notação.

$$x + 3y - z = 1,$$

por (3) obtemos $-3y + 5z = -6$ como substituta da 3ª equação.

Surge, assim, um sistema equivalente ao inicial

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ -5y - z = 4 \\ -3y + 5z = -6 \end{cases}.$$

Se, de seguida,

(iii) multiplicarmos a 2ª equação por $\left(-\frac{1}{5}\right)$, temos

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ -3y + 5z = -6 \end{cases}.$$

E se, finalmente,

(iv) substituirmos a 3ª equação,

$$-3y + 5z = -6,$$

pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 2ª equação,

$$y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5},$$

por (-3) , conseguimos um outro sistema, também equivalente a (Σ_1) ,

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases}$$

Sistematizando os passos anteriores, onde utilizámos as operações \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 , e \mathcal{O}_3 , atrás elencadas, concluimos que

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 7 \\ 3x + 6y + 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ -5y - z = 4 \\ -3y + 5z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ -3y + 5z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases}$$

Recorrendo, agora, ao método de substituição (ascendente) constatamos que

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y + z \\ y = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5}z \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y + z \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

o que nos permite afirmar que o conjunto \mathcal{S} das soluções de (Σ_1) é dado por

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \right\}.$$

Desta forma, concluímos dizendo que o sistema

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 7 \\ 3x + 6y + 2z = -3 \end{cases}$$

é possível e determinado.^{xx}

^{xx} Possível, porque tem solução; determinado, porque tem uma só solução.

Vamos “codificar” a resolução anterior da seguinte forma

(i) Em vez do sistema

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 7 \\ 3x + 6y + 2z = -3 \end{cases}$$

Isto é, vamos substituir

a 1ª equação $x + 3y - z = 1$

a 2ª equação $3x + 4y - 4z = 7$

e a 3ª equação $3x + 6y + 2z = -3$

(ii) Em vez das operações

\mathcal{O}_1 - Troca entre si de duas equações,

\mathcal{O}_2 - Multiplicação de uma equação por um número diferente de zero,

\mathcal{O}_3 - Substituição de uma equação pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto de outra equação por um número.

vamos considerar a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{array} \right].$$

pela 1ª linha $[1 \ 3 \ -1 \ 1]$;

pela 2ª linha $[3 \ 4 \ -4 \ 7]$;

pela 3ª linha $[3 \ 6 \ 2 \ -3]$.

vamos considerar a operações

\mathcal{O}_1 - Troca entre si de duas linhas,

\mathcal{O}_2 - Multiplicação de uma linha por um número diferente de zero,

\mathcal{O}_3 - Substituição de uma linha pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto de outra linha por um número.

Utilizando esta “nova linguagem”, retomamos a resolução do Exemplo II.2.14.

Exemplo II.2.15.

O sistema

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 7 \\ 3x + 6y + 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}}_{\text{notação matricial}}$$

pode ser descrito pela matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{array} \right].$$

Assim, vamos

(i) substituir a 2ª linha pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 1ª linha por (3), e, ainda, a 3ª linha pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 1ª linha por (3), isto é,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - (3)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 - (3)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array} \right];$$

(ii) e, de seguida, multiplicar a 2ª linha por $(-\frac{1}{5})$, ou seja,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{(-\frac{1}{5})L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array} \right];$$

(iii) e, finalmente, substituir a 3ª linha pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 2ª linha por (-3), mais concretamente,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 - (-3)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{28}{5} & -\frac{42}{5} \end{array} \right].$$

Deste modo, verificamos que o percurso

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 - (3)L_1 \\ L_3 - (3)L_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{5}\right)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 - (-3)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{28}{5} & -\frac{42}{5} \end{array} \right]$$

nos permite concluir que

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 7 \\ 3x + 6y + 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ -5y + z = 4 \\ -3y + 5z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ -3y + 5z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases}.$$

Note-se que a matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{28}{5} & -\frac{42}{5} \end{array} \right]$ descreve o sistema

“triangular”

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases}.$$

Tal como anteriormente, finalizamos a resolução do sistema recorrendo ao método de substituição (ascendente)

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y + z \\ y = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{3}{2}\right) \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Método de Eliminação de Gauss II.2.16.

Vamos, de seguida, passar à descrição do Método de Eliminação de Gauss.

Comecemos por um exemplo. Pretendemos resolver o sistema

$$(\Sigma_2) \begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -x - 3y + z + 2t = 3 \\ x - y + 4z + t = 1 \\ 2x - 3y + 7z + 3t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_b \Leftrightarrow AX = b,$$

isto é, vamos utilizar o método de eliminação de Gauss para obter todas as sequências de quatro números reais, (x, y, z, t) , que satisfazem as quatro equações do sistema (Σ_2) .

Verificámos anteriormente que a informação essencial à resolução é constituída pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes que podem ser dispostos em forma de matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ para os coeficientes das incógnitas}$$

$$\text{e } b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ para os termos independentes.}$$

Ou, de forma compacta, na matriz completa ou ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{array} \right].$$

Resolvemos o sistema inicial pelo método de adição ordenada e, em simultâneo, traduzi-lo-emos em termos das matrizes acima referidas.

Resolução por Adição Ordenada

Matriz Ampliada

$$(\Sigma_2) \begin{cases} x + 2y + 0z - t = -1 \\ -x - 3y + z + 2t = 3 \\ x - y + 4z + t = 1 \\ 2x - 3y + 7z + 3t = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

Início da "Fase Descendente"

Início da "Fase Descendente"

1º passo:

1º passo:

(i) subtrair à 2ª equação a 1ª multiplicada por (-1) ;

(i) subtrair à 2ª linha a 1ª multiplicada por (-1) ;

(ii) subtrair à 3ª equação a 1ª equação;

(ii) subtrair à 3ª linha a 1ª linha;

(iii) subtrair à 4ª equação a 1ª multiplicada por (2) .

(iii) subtrair à 4ª linha a 1ª multiplicada por (2) .

$$\begin{cases} x + 2y + 0z - t = -1 \\ -y + z + t = 2 \\ -3y + 4z + 2t = 2 \\ -7y + 7z + 5t = 6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 5 & 6 \end{array} \right]$$

2º passo:

(i) subtrair à 3ª equação a 2ª multiplicada por (3);

(ii) subtrair à 4ª equação a 2ª multiplicada por (7).

2º passo:

(i) subtrair à 3ª linha a 2ª multiplicada por (3);

(ii) subtrair à 4ª linha a 2ª multiplicada por (7).

$$\begin{cases} x + 2y + 0z - t = -1 \\ -y + z + t = 2 \\ z - t = -4 \\ -2t = -8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{array} \right]$$

Iniciemos, agora, a "Fase Ascendente".

Usando o método de substituição obtemos:

- a partir da 4ª equação, $t = 4$;
- a partir da 3ª equação, $z = 0$;
- a partir da 2ª equação, $y = 2$;
- a partir da 1ª equação, $x = -1$.

Deste modo a solução do sistema (Σ_2) é dada por

$$(x, y, z, t) = (-1, 2, 0, 4).$$

É simples verificar que este método se pode aplicar a qualquer sistema de m equações lineares com n incógnitas.

Assim, de um modo geral:

(i) usamos o 1º coeficiente da 1ª equação (1º pivot ou 1º redutor) para eliminar todos os coeficientes abaixo dele;

(ii) usamos o 2º coeficiente da 2ª equação (2º pivot ou 2º redutor) para eliminar todos os coeficientes abaixo dele;

... ... e continuamos (sempre que possível) do mesmo modo.

Terminada a “fase descendente”, aplicamos o método de substituição – “fase ascendente”.

Formalizemos, agora, alguns conceitos:

Definição II.2.17. [Operações elementares]

Designamos por operações elementares sobre linhas (sobre colunas) as seguintes transformações efetuadas numa matriz:

Θ_1 - Troca entre si de duas linhas (colunas) paralelas;

Θ_2 - Multiplicação de uma linha (coluna) por um escalar diferente de zero;

Θ_3 - Substituição de uma linha (coluna) pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto de outra linha (coluna) por um escalar.

Estas operações que se executam sobre as linhas (colunas) de uma matriz, constituem a base de um processo que se designa, usualmente,

por condensação da matriz e que, como vimos, é utilizado na “fase descendente” do método de eliminação de Gauss.

No que se segue, e na discussão e resolução de sistemas de equações algébricas lineares, usaremos, essencialmente, operações elementares sobre linhas:

- L_i/L_j : troca, entre si, das linhas i e j ;
- $L_i - \alpha L_j, i \neq j$: substituição da linha i pela que dela se obtém subtraindo-lhe a linha j multiplicada por α ;
- αL_i : multiplicação da linha i por um número $\alpha \neq 0$.

Todavia, em alguns casos, também recorreremos a um tipo de operações elementares sobre colunas:

- C_i/C_j : troca, entre si, das colunas i e j .

Deste modo, para resolver um sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss, começamos por efetuar operações elementares sobre a matriz ampliada (ou matriz completa) do sistema, até obtermos uma matriz do tipo

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4r} & \cdots & a_{4n} & b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{array} \right],$$

onde $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$,

que designamos por matriz condensada.

De seguida, escrevemos o sistema que corresponde à referida matriz condensada^{xxi} e terminamos a resolução usando o método de substituição.

Definição II.2.18. [Matriz condensada e característica de uma matriz]

Dizemos que uma matriz está condensada se estiver numa das seguintes formas:

$$(i) \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1r} & & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2r} & & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3r} & & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4r} & & b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & & b_r \end{array} \right],$$

onde $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$;

$$(ii) \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4r} & \cdots & a_{4n} & b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \end{array} \right],$$

onde $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$;

$$(iii) \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4r} & \cdots & a_{4n} & b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{array} \right],$$

onde $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

^{xxi} Este sistema é equivalente ao inicial.

Aos elementos não nulos $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$, chamamos redutores (ou pivots).

Os pivots são sempre números diferentes de zero que são usados para criar zeros na coluna correspondente.

Para transformar uma matriz numa matriz condensada recorreremos à utilização de operações elementares com o objetivo de criar zeros em todas as posições abaixo dos pivots

Ao número de pivots obtidos no final da condensação de uma matriz A chamamos característica da matriz A , sendo as seguintes notações as mais usuais $car(A)$, $c(A)$, $rank(A)$, $r(A)$, ou, simplesmente, r .

Observação II.2.19.

Quando é que o processo anterior – método de eliminação de Gauss – não pode ser utilizado?

Surgem dificuldades quando um elemento que se pretende utilizar como pivot é zero.

Por vezes, quando isso acontece, a dificuldade de aplicação do método pode ser ultrapassada trocando a equação em que esse elemento se anula por uma das outras equações.

Pode, porém, acontecer que a troca de equações não resolva a dificuldade, porque o sistema não tem solução ou tem uma infinidade de soluções.

Analisemos os seguintes exemplos.

Exemplos II.2.20.

(a) Pretendemos resolver o sistema

$$(\Sigma_3) \begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -x - 3y + z + 2t = 3 \\ x - y + 3z + t = 1 \\ 2x - 3y + 7z + 3t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_b$$

por intermédio do método de eliminação de Gauss.

Note-se que

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 - (-1)L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - (2)L_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_3 - (3)L_2 \\ L_4 - (7)L_2 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

Surge um “zero” na posição (3,3).

Como podemos continuar?

Neste caso torna-se necessário trocar a terceira coluna com a quarta.

No entanto, ao fazê-lo estamos trocar a coluna dos coeficientes da variável z com a coluna dos coeficientes da variável t.

Assim obtemos

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & t & z & \\ \hline 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{array} \xrightarrow[\text{elementares}]{\text{operações}} \begin{array}{cccc|c} x & y & t & z & \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -8 \end{array}.$$

Prosseguindo, temos

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & t & z & \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -8 \end{array} \xrightarrow{L_4 - (2)L_3} \begin{array}{cccc|c} x & y & t & z & \\ \hline \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

No final da eliminação de Gauss constatamos que:

- $c(A) = 3$;
- $\boxed{1}$, $\boxed{-1}$ e $\boxed{-1}$ são elementos redutores ou pivots;
- existe uma equação sem pivot;
- existe uma coluna sem pivot;
- as incógnitas x , y e t correspondem a colunas com pivot;
- a incógnita z corresponde a uma coluna sem pivot.

Podemos afirmar que o sistema é possível visto que a equação sem pivot é uma condição universal, $0 = 0$.

Deste modo, no sentido de procurar o conjunto solução de (Σ_3) , dividimos as incógnitas em duas classes:

- incógnitas principais (as que no final da eliminação de Gauss correspondem a colunas com pivot);
- incógnitas livres (as que no final da eliminação de Gauss correspondem a colunas sem pivot);^{xxvii}

Neste caso dizemos que x , y e t são incógnitas principais e z é uma incógnita livre.

Uma vez que a matriz condensada atrás obtida descreve o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -y + t + z = 2 \\ -t = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

concluimos que

$$\begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -y + t + z = 2 \\ -t = -4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -y + t = 2 - z \\ -t = -4 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ t = 4 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Deste modo, dizemos que o sistema (Σ_3) é possível e indeterminado^{xxviii} e que o seu conjunto \mathcal{S} de soluções é dado por

$$\mathcal{S} = \{(-1 - 2\alpha, 2 + \alpha, \alpha, 4), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

^{xxvii} Que passaremos para o segundo membro na qualidade de parâmetros, isto é, podem assumir qualquer valor real.

^{xxviii} Possível, porque tem solução; indeterminado, porque não tem uma solução única; tem uma infinidade de soluções.

(b) Consideremos, agora,

$$(\Sigma_4) \begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -x - 3y + z + 2t = 3 \\ x - y + 3z + t = 1 \\ 2x - 3y + 7z + 3t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar o conjunto solução de (Σ_4) por intermédio do método de eliminação de Gauss.

Repare-se que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 - (-1)L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - (2)L_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_3 - (3)L_2 \\ L_4 - (7)L_2 \end{matrix}}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ \dots & 0 & 0 & \boxed{0} & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Também, neste caso, surge um “zero” na posição (3,3). Por troca de colunas obtemos

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} & \xrightarrow{C_3/C_4} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -7 \end{bmatrix} & & \end{array}$$

Recorrendo a mais uma operação elementar, concluímos a condensação da matriz ampliada, do seguinte modo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{L_4 - (2)L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

No final da eliminação de Gauss verificamos que:

- $c(A) = 3$;
- $\boxed{1}$, $\boxed{-1}$ e $\boxed{-1}$ são elementos redutores ou pivots;
- existe uma equação sem pivot;
- existe uma coluna sem pivot.

Podemos afirmar que o sistema inicial é impossível visto que a equação sem pivot é uma condição impossível, $0 = 1$.

Note-se que (Σ_4) é equivalente ao sistema, isto é,

$$(\Sigma_4) \begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -x - 3y + z + 2t = 3 \\ x - y + 3z + t = 1 \\ 2x - 3y + 7z + 3t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -y + t + z = 2 \\ -t = -4 \\ \underline{0 = 1} \\ \text{condição} \\ \text{impossível} \end{cases}.$$

Deste modo, dizemos que o conjunto solução é o conjunto vazio, ou seja, $\mathcal{S} = \{ \}$, e, tal como referimos anteriormente, classificamos (Σ_4) como sistema impossível.

Salientamos que a possibilidade ou impossibilidade de um sistema de equações lineares está intimamente relacionada com o número e tipo de equações sem pivot no final da eliminação de Gauss.

Definimos, ainda, grau de indeterminação de um sistema.

Definição II.2.21.

Chamamos grau de indeterminação de um sistema de equações lineares possível e indeterminado ao número de incógnitas livres desse sistema. Além disso, se o sistema tem apenas uma incógnita livre dizemos que é simplesmente indeterminado, se tem duas incógnitas livres classificamo-lo como duplamente indeterminado (ou indeterminado de grau 2) e assim sucessivamente.

Exercícios II.2.22.

1. Resolva os sistemas indicando, em cada caso, o conjunto solução:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ x - 2y - 3z = -7; \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + 2z + t = 7 \\ x - 2y - 3z + 2t = -7; \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ x - 2y - 3z = -7 \\ x - y + z = 0; \\ 2x - y + 6z = 7 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ x - 2y - 3z = -7 \\ x - y + z = 0; \\ 2x - y + 6z = 12 \end{cases}$$

2. Utilizando o método de eliminação de Gauss, determine o conjunto solução para cada um dos seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 3x + 3y - z = 6; \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2u - 3v + w = 1 \\ 3u - 2v + w = 0; \\ 5u - 5v + 2w = 10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -10b - 4c + d = 1 \\ a + 4b - c + d = 2 \\ 3a + 2b + c + 2d = 5; \\ a - 6b + 3c = 1 \end{cases}$$

3. Determine para que valores $k \in \mathbb{R}$ o sistema que se segue

$$\begin{cases} u + 2v - 3w = 4 \\ -3u + v - 5w = -2 \\ 4u + v + (k^2 - 14)w = k + 2 \end{cases}$$

- a) é impossível;
 b) é possível e determinado;
 c) é possível e indeterminado.

4. Resolva os seguintes sistemas, utilizando o método de eliminação de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2; \\ 4x - y - z = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y - z = 2; \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0; \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0; \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0; \\ 3x + 4y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x - 2y + 3z + t = 10 \\ x + y - z = 1 \\ 3x + z - t = 12 \end{cases};$$

$$\text{g) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1; \\ x + 3y + z = 1; \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11; \\ 2x + 5y - 4z = 13; \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y + 7z = 5; \\ 2x + 5y + 11z = 0; \\ -x - 2y - 4z = 5 \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} 4x - 2y - 3z = 1 \\ x + 3y + z = 2; \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} 2x + y + 4z - 3t = 2 \\ x - y - z - 3t = 7; \\ x + 2y + 5z = -5 \end{cases} \quad l) \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 2z - x = 1 \\ 2y + x + 3z = 6 \\ z = 0 \end{cases}$$

5. Discuta, para todos os valores reais de k , os seguintes sistemas:

$$a) \begin{cases} x + ky + z = k \\ x - y + kz = 0; \\ x - ky + z = k \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + ky + z = 0 \\ kx + y + kz = 1; \\ x + ky = k \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 2; \\ x + ky + z = 3 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + ky + kz = 0 \\ kx + k^2y + kz = k; \\ 2kx + k^2y + 2z = k + 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} (k-1)x - ky - z = -1 \\ -x + ky = 0; \\ 2z = k \end{cases} \quad f) \begin{cases} -x + ky = -k \\ -ky + kz = 2; \\ x - kz = -1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 3x + y - 2z + 4t = -2 \\ 6x + 2y + kz + 8t = k. \\ ky = 1 \end{cases}$$

6. Discuta para todos os valores reais de α e β o sistema

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 3y + z = \alpha \\ x + y + 2z = 2\beta \end{cases}$$

e resolva-o no caso em que $\alpha = 6$ e $\beta = 2$.

Soluções:

1. a) $\mathbf{S} = \{(2, 3, 1)\}$;

1. b) $\mathbf{S} = \left\{ \left(2 - \frac{12}{7}\gamma, 3 - \frac{11}{7}\gamma, 1 + \frac{8}{7}\gamma, \gamma \right), \gamma \in \mathbb{R} \right\}$;

1. c) $\mathbf{S} = \{(2, 3, 1)\}$;

1. d) $\mathbf{S} = \{ \}$.

2. a) $\mathbf{S} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -3 \right) \right\}$;

2. b) $\mathbf{S} = \{ \}$;

2. c) $\mathbf{S} = \left\{ \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}\beta, 0, \frac{1}{4}\beta - \frac{1}{4}, \beta \right), \beta \in \mathbb{R} \right\}$

3. a) $k = -4$;

3. b) $k \notin \{-4, 4\}$;

3. c) $k = 4$.

4. a) $\mathbf{S} = \left\{ \left(\frac{8}{5}, \frac{3}{20}, -\frac{3}{4} \right) \right\}$;

4. b) $\mathbf{S} = \{ \}$;

4. c) $\mathbf{S} = \{(0, 0, 0)\}$;

4. d) $\mathbf{S} = \{(-\alpha, 0, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$;

4. e) $\mathbf{S} = \{ \}$;

4. f) $\mathbf{S} = \left\{ \left(4 - \frac{1}{3}\alpha, -3 + \frac{4}{3}\alpha, \alpha, 0 \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$;

4. g) $\mathbf{S} = \{ \}$;

4. h) $\mathbf{S} = \{(x, y, z) = (1, 3, 1)\}$;

4. i) $\mathbf{S} = \{ \}$;

4. j) $\mathbf{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$;

4. k) $S = \{(3 - \alpha + 2\beta, -4 - 2\alpha - \beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;

4. l) $S = \{ \}$.

5. a) Se $k = 0$ então o sistema é possível e indeterminado; se $k = 1$ então o sistema é impossível; se $k \notin \{0, 1\}$ então o sistema é possível e determinado;

5. b) Se $k \neq -1 \wedge k \neq 1$ então o sistema é possível e determinado; se $k = -1 \vee k = 1$ então o sistema é impossível;

5. c) O sistema é impossível para qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$;

5. d) Se $k = 0$ então o sistema é possível e indeterminado; se $k = 1$ então o sistema é impossível; se $k \neq 0 \wedge k \neq 1$ então o sistema é possível e determinado;

5. e) Se $k = 2$ então o sistema é possível e indeterminado; se $k = 0$ então o sistema é impossível; se $k \notin \{0, 2\}$ então o sistema é possível e determinado;

5. f) Se $k = 1$ então o sistema é possível e indeterminado; se $k \neq 1$ então o sistema é impossível;

5. g) Se $k = 0$ então o sistema é impossível; se $k = -4$ então o sistema é possível e duplamente indeterminado; se $k \notin \{-4, 0\}$ então o sistema é possível e simplesmente indeterminado.

6. Se $\alpha = 2\beta + 2$ então o sistema é possível e indeterminado; se $\alpha \neq 2\beta + 2$ então o sistema é impossível. Se $\alpha = 6$ e $\beta = 2$ então $S = \left\{ \left(2 - \frac{5}{3}\gamma, 2 - \frac{1}{3}\gamma, \gamma \right), \gamma \in \mathbb{R} \right\}$.

II.3 – Sistemas homogêneos. Conjunto solução de um sistema homogêneo. Espaço nulo ou núcleo de uma matriz. Dependência e independência linear de filas paralelas de uma matriz.

Como referimos anteriormente, chamamos homogêneo ao sistema

$$Ax = 0, \text{ onde } A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Estes sistemas têm propriedades interessantes. Em, particular, são sempre possíveis. Além disso, a partir das soluções de $Ax = 0$, podemos construir o conjunto solução de qualquer sistema do tipo

$$Ax = b, \text{ onde } b \in \mathbb{R}^m,$$

conhecendo apenas uma das suas soluções particulares.

Nesta secção associaremos o estudo destes sistemas aos conceitos de espaço nulo de uma matriz e de dependência e independência linear de filas paralelas de uma matriz.

Comecemos por alguns

Exercícios com resolução II.3.1.

Resolva os seguintes sistemas

$$\text{a) } (\Sigma_1) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } (\Sigma_2) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$c) (\Sigma_3) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$d) (\Sigma_4) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$e) (\Sigma_5) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$f) (\Sigma_6) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$g) (\Sigma_7) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$h) (\Sigma_8) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

a) (Σ_1) é um sistema homogêneo com três equações, $m = 3$, e três incógnitas, $n = 3$.

Verificamos que a sequência nula $(0, 0, 0)$ é solução do sistema, pois fazendo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$ obtemos

$$\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ -0 + 0 = 0 \\ -0 + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Logo podemos garantir que o sistema é possível.

Além disso, constatamos que

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 - (-1)L_1]{L_2 - (-1)L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

E verificamos que, no final da eliminação de Gauss:

- $c(A) = 2$;
- $\boxed{1}$ e $\boxed{1}$ são elementos redutores ou pivots;
- as incógnitas x_1 e x_2 correspondem a colunas com pivot, pelo que se dizem incógnitas principais;
- a incógnita x_3 corresponde a uma coluna sem pivot, sendo, por isso, uma incógnita livre.

Assim, temos

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Deste modo concluímos que o conjunto solução é formado por uma infinidade de sequências ordenadas, mais concretamente,

$$\mathcal{S}_{\Sigma_1} = \{(-\alpha, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1, -1, 1), \alpha \in \mathbb{R}\},$$

e, conseqüentemente, dizemos que o sistema (Σ_1) é possível e indeterminado.

b) Neste caso, temos um sistema homogêneo com quatro equações, $m = 4$, e três incógnitas, $n = 3$.

A sequência nula $(0, 0, 0)$ também é solução do sistema (Σ_2) . Por outro lado,

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - (-1)L_1]{L_2 - (-1)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3/L_4]{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos afirmar que, no final da eliminação de Gauss:

- $c(A) = 3$;
- $\boxed{1}$, $\boxed{1}$ e $\boxed{1}$ são elementos redutores ou pivots;
- as incógnitas x_1 , x_2 e x_3 correspondem a colunas com pivot, pelo que todas as incógnitas são principais.

Logo

$$(\Sigma_2) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

donde $\mathbf{S}_{\Sigma_2} = \{(0, 0, 0)\}$, e concluímos que (Σ_2) é um sistema homogêneo determinado.

c) Relativamente a (Σ_3) , observamos que $m = 2 < n = 3$ e

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - (-1)L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta forma verificamos que

- $c(A) = 2$;
- $\boxed{1}$ e $\boxed{1}$ são elementos redutores ou pivots;
- as incógnitas x_1 e x_2 correspondem a colunas com pivot, pelo que são incógnitas principais;
- a incógnita x_3 é livre, pois corresponde a uma coluna sem pivot.

Logo

$$(\Sigma_3) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e, conseqüentemente,

$$\mathbf{S}_{\Sigma_3} = \{(-\alpha, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1, -1, 1), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$
^{xxix}

Dizemos que (Σ_3) é um sistema homogéneo indeterminado.

d) Uma vez que, para (Σ_4) , temos $m = n = 3$ e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 - (-1)L_1 \\ L_3 - (-1)L_1}]{\quad} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \end{array} \right],$$

podemos afirmar que (Σ_4) é um sistema homogéneo determinado, uma vez que $c(A) = n = 3$ e, conseqüentemente,

$$\mathbf{S}_{\Sigma_4} = \{(0, 0, 0)\}.$$
^{xxx}

^{xxix} Note que $\mathbf{S}_{\Sigma_1} = \mathbf{S}_{\Sigma_3}$. Podemos afirmar que os sistemas homogéneos (Σ_1) e (Σ_3) são equivalentes? Porquê?

e) (Σ_5) não é um sistema homogêneo. Tem três equações e três incógnitas.

Verificamos que

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 - (-1)L_1]{L_2 - (-1)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 - L_2]{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim, temos que x_1 e x_2 são incógnitas principais, enquanto x_3 é uma incógnita livre. Embora $c(A) = 2 < m$, podemos afirmar que o sistema é possível visto que a equação sem pivot é uma condição universal, $0 = 0$.

Deste modo concluímos que

$$(\Sigma_5) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \alpha \\ x_2 = 2 - \alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

o que nos permite definir o conjunto solução

$$\mathbf{S}_{\Sigma_5} = \{(1 - \alpha, 2 - \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Consequentemente, dizemos que o sistema (Σ_5) é possível e indeterminado.

f) (Σ_6) também é um sistema não homogêneo. Tem quatro equações e três incógnitas, logo $m = 4 < n = 3$. Por outro lado, temos que

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_4 - (-1)L_1]{L_2 - (-1)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3/L_4]{L_3 - L_2, L_4 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 & 0 & 0 & -1} \end{array} \right]$$

^{xxx} Note que $\mathbf{S}_{\Sigma_2} = \mathbf{S}_{\Sigma_4}$. Podemos afirmar que os sistemas homogêneos (Σ_2) e (Σ_4) são equivalentes. Porquê?

Neste caso verificamos que existe uma equação sem pivot definida por uma condição impossível, $0 = -1$. Assim, podemos afirmar que (Σ_6) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = 0 \\ \boxed{0 = -1} \end{cases}$$

o que nos permite concluir que (Σ_6) é um sistema impossível.

g) Estamos perante um sistema não homogéneo em que $m = 2 < n = 3$. Neste caso, observamos que

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - (-1)L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

peço que podemos afirmar que $c(A) = 2 = m < n$ e concluir que o sistema (Σ_4) é possível (não existem equações sem pivot) e indeterminado, dado que existe uma incógnita livre, x_3 .

As incógnitas x_1 e x_2 são principais pois correspondem a colunas com pivot.

Assim

$$(\Sigma_7) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \gamma \\ x_2 = 2 - \gamma \\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\Sigma_7} &= \{(1 - \gamma, 2 - \gamma, \gamma), \gamma \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(1, 2, 0) + \gamma(-1, -1, 1), \gamma \in \mathbb{R}\}.^{xxxvi} \end{aligned}$$

^{xxxvi} Podemos afirmar que $\mathbf{S}_{\Sigma_5} = \mathbf{S}_{\Sigma_7}$? E que $\mathbf{S}_{\Sigma_3} = \mathbf{S}_{\Sigma_7}$? Porquê?

h) Uma vez que, para (Σ_8) , temos $m = n = 3$ e, além disso,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 - (-1)L_1 \\ L_3 - (-1)L_1}]{\quad} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \end{array} \right],$$

podemos garantir que $c(A) = 3$. Deste modo, não existem equações sem pivot e todas as incógnitas são principais e podemos escrever

$$(\Sigma_8) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

Finalizamos, afirmando que (Σ_8) é um sistema possível determinado com o seguinte conjunto solução

$$\mathbf{S}_{\Sigma_8} = \{(0, 1, 1)\}.$$

Exercícios II.3.2

1. Sabendo que o sistema não homogéneo $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, é possível e determinado, defina, justificando a sua resposta, o conjunto solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

2. Seja $Ax = 0$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, um sistema homogéneo com m equações e n incógnitas.

Verifique que o conjunto solução deste sistema satisfaz as duas propriedades seguintes:

a) «Se $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ são soluções de $Ax = 0$ então $w = u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$ também é solução de $Ax = 0$.»

b) «Se α é um número real e $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ é uma solução de $Ax = 0$ então $z = \alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$ também é solução de $Ax = 0$.»

Exercícios II.3.3.

1. Tendo em conta os exercícios anteriores analise a veracidade das seguintes afirmações:

a) Um sistema homogéneo é sempre possível;

b) Se um sistema homogéneo tem uma solução não nula então é indeterminado;

c) Se num sistema homogéneo o número de incógnitas é superior ao número de equações então o sistema é indeterminado.

d) Se num sistema homogéneo o número de incógnitas é inferior ou igual ao número de equações então o sistema é determinado.

2. Considere o sistema homogéneo $Ax = 0$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $c(A)$ designa a característica da matriz A . Complete:

a) Se $m = n$ então $Ax = 0$ é um sistema _____;

b) Se $c(A) = m = n$ então $Ax = 0$ é um sistema _____;

c) Se $c(A) < m = n$ então $Ax = 0$ é um sistema _____;

d) Se $m < n$ então $Ax = 0$ é um sistema _____;

e) Se $c(A) = n < m$ então $Ax = 0$ é um sistema _____.

3. Considere o sistema não homogêneo $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $c(A)$ designa a característica da matriz A . Complete:

a) Se $m = n$ então $Ax = b$ é um sistema _____;

b) Se $c(A) = m = n$ então $Ax = b$ é um sistema _____;

c) Se $c(A) < m = n$ então $Ax = b$ é um sistema _____;

d) Se $m < n$ então $Ax = b$ é um sistema _____;

e) Se $n < m$ então $Ax = b$ é um sistema _____;

f) Se $c(A) = m < n$ então $Ax = b$ é um sistema _____;

g) Se $c(A) = n < m$ então $Ax = b$ é um sistema _____.

4. Prove que o sistema homogêneo $Ax = 0$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, nunca é impossível.

5. Sabendo que a característica de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é igual ou inferior a $\min\{m, n\}$, classifique o sistema homogêneo $Ax = 0$ quanto ao número de soluções.

6. Seja $A = 0_{3 \times 3}$. Defina o conjunto solução do sistema homogêneo $Ax = 0$.

Definimos, de seguida, núcleo ou espaço nulo de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Trata-se de um conjunto de vetores – sequências ordenadas de números reais – que, como veremos, está intimamente relacionado com as soluções de um sistema homogêneo.

Definição II.3.4.

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Chamamos núcleo ou espaço nulo da matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ao conjunto de todos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a equação $Ax = 0$.

Assim

$$\text{núcleo de } A \underset{\text{notação}}{=} \mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\},$$

e podemos garantir que o espaço nulo de A , $\mathcal{N}(A)$, contém sempre, pelo menos, um elemento, a sequência nula $(0, 0, \dots, 0)$.

Exercícios II.3.5.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Determine o espaço nulo de A , isto é, $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

2. Sabendo que $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, determine os núcleos das matrizes

$B - 3I_3$ e $B + I_3$;

3. Verifique que os elementos do espaço nulo da matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

são múltiplos escalares do vetor $(0, 1, -1)$.

4. Seja dada a matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Mostre que núcleo de $M + 4I_3$ coincide com o conjunto das combinações lineares dos vectores $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, -1)$.

Podemos associar dois conceitos importantes da Álgebra Linear – a dependência e independência linear de filas paralelas de uma matriz – à discussão de um sistema homogéneo.

Definição II.3.6.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

(i) Se $m = n$, isto é, se A é uma matriz quadrada, dizemos que as filas paralelas (linhas ou colunas) de A são linearmente dependentes se o sistema homogéneo

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é indeterminado.}$$

Caso contrário, isto é, quando o sistema anterior for determinado, dizemos que as filas paralelas (linhas ou colunas) de A são linearmente independentes.

(ii) Se $m \neq n$, isto é, se A é uma matriz retangular, dizemos que:

(ii-a) as colunas de A são linearmente dependentes se o sistema homogéneo

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é indeterminado.}$$

Caso contrário, isto é, quando o sistema anterior for determinado, dizemos que as colunas de A são linearmente independentes.

(ii-b) as linhas de A são linearmente dependentes se o sistema homogéneo

$$A^T y = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é indeterminado.}$$

Caso contrário, isto é, quando o sistema anterior for determinado, dizemos que as linhas de A são linearmente independentes.

Exercícios II.3.7.

1. Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Resolva o sistema $Mx = 0$;

- b) Defina o conjunto solução do sistema homogéneo $M^T z = 0$;
- c) Indique a característica da matriz M . As linhas de M são linearmente independentes? E as colunas?
- d) Calcule a matriz $N = MM^T$ e determine, caso exista, a inversa da matriz N .

2. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Prove que «A matriz A é invertível» é equivalente às afirmações seguintes:

- (a-i) A característica de A é igual a n ;
- (a-ii) As colunas de A são linearmente independentes;
- (a-iii) As linhas de A são linearmente independentes;
- (a-iv) O sistema homogéneo $Ax = 0$ é determinado, i.e., a solução nula é única;
- (a-v) O sistema não-homogéneo $Ax = b$ é determinado, i.e., tem uma única solução $x = A^{-1}b$;
- (a-vi) $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, \dots, 0)\}$.

b) E se a afirmação inicial for « A não tem inversa»?

II.4 – Aplicação do estudo de sistemas de equações lineares na inversão de matrizes.

No Capítulo I, secção I.6, definimos inversa de uma matriz quadrada e verificámos que nem toda a matriz admite inversa e, ainda, que se uma matriz tem inversa, ela é única.

Vamos, de seguida, analisar este tópico utilizando a eliminação de Gauss e o conceito de matriz não singular.

Definição II.4.1. [Matriz não singular]

Dizemos que uma matriz quadrada é não singular se, no final do método de eliminação de Gauss (onde foram apenas utilizadas operações elementares sobre linhas do tipo Θ_1 , Θ_2 e Θ_3), é transformada numa matriz triangular superior cujos elementos principais são não nulos.

Caso contrário, a matriz diz-se singular.

Exemplos II.4.2.

Considere duas matrizes quadradas de ordem três,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é não singular visto que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = U_A,$$

sendo U_A uma matriz triangular cujos elementos principais são não nulos. Além disso, resolvendo a equação $AX = I_3$, verificamos que A tem inversa,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, a matriz B é singular dado que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} \dots & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_B,$$

onde a matriz U_B obtida tem (dois) elementos nulos na diagonal principal, que não podem ser removidos por troca de linhas. Neste caso, constatamos que a equação $BX = I_3$ é impossível, ou seja, a matriz B não tem inversa.

Vamos agora enunciar (sem demonstração) uma condição necessária e suficiente para a existência de inversa de uma matriz:

Proposição II.4.3. [Condição necessária e suficiente para a existência de inversa de uma matriz]

A matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é invertível se e só se A é não singular.

Uma vez que a determinação da inversa de uma matriz está associada à resolução de um sistema de equações algébricas lineares, vamos recorrer à eliminação de Gauss e à definição de inversa de uma matriz para resolver o seguinte

Problema II.4.4.

Seja dada a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Pretendemos calcular uma matriz $X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $AX = I_n$.

Admitimos que A é uma matriz de terceira ordem.

Deste modo procuramos uma matriz X , do tipo 3×3 , que satisfaça a equação

$$\left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tendo em conta as propriedades da multiplicação de matrizes, podemos escrever:

$$\left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Transformamos, assim, a equação inicial em três sistemas de equações lineares com três equações e três incógnitas.

Repare-se que, em todos eles, a matriz dos coeficientes é a mesma, sendo as matrizes ampliadas as seguintes

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right] \text{ e } \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right].$$

Uma vez que, na resolução de cada sistema, temos de condensar a matriz A por que não dispor os cálculos de modo a efetuar uma só vez a condensação de A ?

É o que vamos fazer:

(i) Construimos a matriz ampliada

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{c|ccc} A & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right];$$

(ii) Usando operações elementares (apenas sobre linhas) vamos tentar passar da matriz $[A|I_3]$ à matriz $[I_3|B]$.

(iii) Se se puder formar a matriz $[I_3|B]$, a inversa de A existe, e, então B será a matriz inversa procurada, A^{-1} .

Em resumo:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{c|ccc} A & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{por linhas}]{\text{operações elementares}}$$

$$\xrightarrow{\dots} [I_3 | A^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right] A^{-1}$$

De um modo geral, podemos concluir, se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não singular, então

$$[A | I_n] \xrightarrow[\text{por linhas}]{\text{operações elementares}} [I_n | A^{-1}].$$

Exemplos II.4.5.

1. No sentido de determinar a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, temos sucessivamente

$$\begin{aligned} [A | I_2] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - (-1)L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\left(\frac{1}{5}\right)L_2} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 - (2)L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Deste modo, obtemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

2. Quando tentamos calcular a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$

deparamo-nos com o seguinte impasse

$$[B | I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Exercícios II.4.6.

1. Calcule, se possível, a inversa das seguintes matrizes:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\text{d) } D = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

2. Determine a inversa das seguintes matrizes:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{d) } D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{e) } E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Usando a inversa da matriz A do exercício 2.a), resolva o sistema

$$\begin{cases} -x + 4z = 11 \\ x - y - 9z = -28 \\ 4x + 5y = 14 \end{cases}$$

4. Recorrendo ao conceito de inversa de uma matriz, determine a matriz X que satisfaz a relação

$$AXB = C,$$

$$\text{em que } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

5. Seja $M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Calcule a inversa da matriz M .

b) Usando, se possível, a matriz M^{-1} obtida na alínea anterior, resolva o sistema

$$\begin{cases} 3y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 2. \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

a) Verifique que S é uma matriz ortogonal;

b) Calcule os produtos $S^T S$, AS e $S^T AS$;

c) Determine a matriz inversa de A ;

d) Indique a matriz inversa de S .

7. Considere três matrizes quadradas de ordem três definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de modo que $A = LU$;

b) Determine os produtos $w^T A$ e AX ,

$$\text{sendo } w = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

c) Determine a matriz inversa de A ;

d) Verifique que $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

CAPÍTULO III • DETERMINANTES

III.1 – Introdução da noção de determinante. Determinante de primeira ordem e determinante de segunda ordem: definição e propriedades.

Introduzimos a noção de determinante a partir da noção de função de matriz quadrada. Mostramos que, apesar de não desempenhar, presentemente, o papel central no estudo da Álgebra Linear que lhe era atribuído algumas décadas atrás, este conceito tem, ainda, aplicações interessantes. Nomeadamente, o determinante permite obter fórmulas explícitas para a inversa de uma matriz bem como para a solução de um sistema de equações lineares (regra de Cramer), podendo, também ser utilizado no cálculo de valores próprios de uma matriz.

Começemos com matrizes quadradas de 1ª ordem.

Definição III.1.1. [Determinante de 1ª ordem]

Seja $A = [a_{11}] \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ então

$$\text{determinante de } A \underset{\text{notação}}{\equiv} \det A \underset{\text{notação}}{\equiv} \det[a_{11}] \underset{\text{notação}}{\equiv} |A| \underset{\text{notação}}{\equiv} |a_{11}| \underset{\text{definição}}{\equiv} a_{11}.$$

Consideremos, agora, matrizes quadradas de 2ª ordem.

Definição III.1.2. [Determinante de 2ª ordem]

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Estabelecemos que

$$\begin{aligned} \text{determinante de } A &\stackrel{\text{notação}}{=} \det A \stackrel{\text{notação}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \stackrel{\text{notação}}{=} \\ &= |A| \stackrel{\text{notação}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{\text{definição}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Repare-se que – em ambos os casos (1ª e 2ª ordem) – definimos uma função determinante

(i) de 1ª ordem:

$$\det: \mathbb{R}^{1 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } \det A = a_{11}, \text{ sendo } A = [a_{11}] \in \mathbb{R}^{1 \times 1};$$

(ii) de 2ª ordem:

$$\det: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\text{sendo } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Note-se, ainda, que – no nosso contexto – o valor da função determinante é sempre um número real.

Exemplo III.1.3.

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$.

Então $\det A = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$,

$$\det B = (3)(10) - (-4)(7) = 30 - (-28) = 58,$$

e

$$\det C = (3)(14) - (7)(6) = 42 - 42 = 0.$$

Exercício III.1.4. [Propriedades da função determinante de 2ª ordem]

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Prove que:

P.1. O valor do determinante de A é igual ao valor do determinante da matriz transposta de A , isto é, $\det A = \det A^T$.

Sugestão: Verificamos que

$$\det A^T = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

P.2. O valor do determinante de uma matriz triangular A é igual ao produtos dos elementos da diagonal principal de A .

Sugestão: Consideremos, neste caso, $c = 0$, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

Deste modo,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = (a)(d) - (b)(0) = ad.^{xxvii}$$

P.3. Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tem uma linha (coluna) de zeros, então $\det A = 0$.

Sugestão: Constatamos que

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (a)(0) - (b)(0) = 0.$$

P.4. Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tem (as) duas linhas (colunas) iguais então $\det A = 0$.

Sugestão: Provamos que

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = (a)(b) - (b)(a) = 0.$$

P.5. Seja $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Então $\det I_2 = 1$.

Sugestão: Basta verificar que

$$\det I_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (1)(1) - (0)(0) = 1.$$

^{xxvii} Tendo em conta P.1, basta verificar esta propriedade para matrizes triangulares superiores. Porquê?

P.6. Como função de cada linha (coluna), o determinante de 2ª ordem é uma função linear.^{xxviii}

Sugestão: Constatamos, por exemplo, que

$$\det \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{bmatrix} = (a+e)(d) - (b+f)(c) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} e & f \\ c & d \end{bmatrix}$$

e

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} = (a)(\lambda d) - (b)(\lambda c) = \lambda \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

P.7. O valor do determinante de A não se altera quando substituímos uma linha (coluna) pela que dela se obtém subtraindo-lhe um múltiplo escalar de(a) outra.

Sugestão: Tenhamos em conta que

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a-\lambda c & b-\lambda d \\ c & d \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} \lambda c & \lambda d \\ c & d \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \underbrace{\det \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix}}_{=0}. \end{aligned}$$

P.8. O valor do determinante de A muda de sinal quando trocamos – entre si – (as) duas linhas (colunas).

Sugestão: De acordo com as propriedades anteriores podemos afirmar que

^{xxviii} Seja $f: A \rightarrow B$ uma função real de variável real. f é linear se e só se $f(a+b) = f(a) + f(b)$ e $f(ka) = kf(a)$.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ a & b \end{bmatrix} =$$

$$\stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} -\det \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$

P.9. O valor do determinante de A é nulo se e só se as suas linhas são linearmente dependentes.

Sugestão: Recorde que, por definição, as duas linhas de A são linearmente dependentes se e só se o sistema homogêneo $Ax = 0$ é indeterminado, bem como as propriedades anteriores **P.3** e **P.6**.

P.10. Seja $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\det(\alpha A) = \alpha^2 \det A$.

Sugestão: Verifique que

$$\det(\alpha A) = \det \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \alpha \det \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \alpha^2 \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Exercícios III.1.5.

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix};$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix};$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix};$

$$e) E = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix};$$

$$f) F = \begin{bmatrix} |\theta + 1| & 1 \\ 1 & |\theta - 1| \end{bmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$$

2. Recorde a definição de matrizes elementares (Secção 1.5) e considere $E_{ik}, E_i(\alpha), E_{ik}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Prove que $\det E_{ik} = -1$, $\det E_i(\alpha) = \alpha$ e $\det E_{ik}(\alpha) = 1$.

3. Construa uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que:

a) $a_{ij} > 0$, para $i, j \in \{1, 2\}$, e $\det A = 0$;

b) $a_{ij} < 0$, para $i, j \in \{1, 2\}$, e $\det A = 3$.

(Página deixada propositadamente em branco)

**III.2. – Determinante de ordem n: definição e propriedades.
Cálculo do determinante de uma matriz à custa do determinante de
uma matriz triangular obtida por eliminação de Gauss.**

Analisamos, agora, o caso das matrizes de ordem 3. Definimos determinante de 3ª ordem utilizando a noção de determinante de 2ª ordem.

Definição III.2.1. [Determinante de 3ª ordem]

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

e $A_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a matriz que obtemos de A suprimindo-lhe a linha i e a coluna j .

Definimos

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} \det A_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3} \det A_{i3} =$$

$$= \sum_{j=1}^3 a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

(Desenvolvimento segundo a linha i).

Exercício (resolvido) III.2.2.

Verifique que o número que obtemos para o valor do determinante de A é sempre o mesmo, independentemente da escolha da linha:

(i) Desenvolvimento segundo a linha 1:

$$\begin{aligned}
 \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= a_{11}(-1)^{1+1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\det A_{11}} + a_{12}(-1)^{1+2} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\det A_{12}} + a_{13}(-1)^{1+3} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\det A_{13}} = \\
 &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.
 \end{aligned}$$

(ii) Desenvolvimento segundo a linha 2:

$$\begin{aligned}
 \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= a_{21}(-1)^{2+1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\det A_{21}} + a_{22}(-1)^{2+2} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\det A_{22}} + a_{23}(-1)^{2+3} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\det A_{23}} = \\
 &= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = \\
 &= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}.
 \end{aligned}$$

(iii) Desenvolvimento segundo a linha 3:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= a_{31}(-1)^{3+1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{\det A_{31}} + a_{32}(-1)^{3+2} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}_{\det A_{32}} + a_{33}(-1)^{3+3} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\det A_{33}} = \\
&= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\
&= a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}.
\end{aligned}$$

De acordo com o exercício anterior constatamos que o valor do determinante de 3ª ordem é obtido por adição de seis parcelas, em que cada parcela é um produto de três fatores.

Dizemos que os produtos

$$a_{11}a_{22}a_{33}, a_{11}a_{23}a_{32}, a_{12}a_{21}a_{33}, a_{12}a_{23}a_{31}, a_{13}a_{21}a_{32} \text{ e } a_{13}a_{22}a_{31}$$

são termos da matriz A .

Exercício III.2.3.

$$\text{Sejam } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule:

a) $\det A$ e $\det B$;

b) $\det AB$;

c) $\det(A + B)$;

d) $\det A^{-1}$ e $\det B^{-1}$;

e) $\det(AB)^{-1}$.

2. Verifique que:

a) $\det(A + B) \neq \det A + \det B$;

b) $\det AB = (\det A)(\det B)$;

c) $\det A = \det A^T$ e $\det B = \det B^T$;

d) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$;

e) $\det(AB)^{-1} = \det(B^{-1}A^{-1})$.

Resolução:

1. a)

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (1)(-1) \dots \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \dots \dots \dots + \\ + (-3)(-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} \dots & 4 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots \dots \dots + \dots \dots \dots = 35;$$

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = (\dots)(-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 2 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = 30.$$

1. b)

$$\det AB = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -4 & 20 & -5 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \\ = (25)(-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \dots \dots$$

1. c)

$$\det(A+B) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \dots.$$

1. d)

$$\det A^{-1} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \det\begin{bmatrix} \dots & \dots & \frac{12}{35} \\ 0 & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{1}{7} & \dots \end{bmatrix} = \dots,$$

$$\det B^{-1} = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \det\begin{bmatrix} \dots & \dots & -\frac{1}{6} \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \dots.$$

Observação III.2.4.

Suponhamos que pretendemos calcular o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 10 \\ 0.3 & 0 & \sqrt{5} \\ 2.41 & 0.1 & \frac{32}{6} \end{bmatrix}.$$

Podemos obter o valor do determinante de M utilizando o desenvolvimento segundo uma das colunas^{xxxv}

Vamos verificar que sim, ou seja, vamos provar que o valor de determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser obtido por intermédio do desenvolvimento segundo qualquer uma das suas colunas.

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

^{xxxvi} Neste caso interessa-nos desenvolver segundo a coluna 2.

Calculamos, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } \det A &= \det \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \\
 &= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) } \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\
 &= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}.
 \end{aligned}$$

Que podemos concluir?

Podemos afirmar que, para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} \det A_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3} \det A_{i3} = \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}. \end{aligned}$$

(Desenvolvimento segundo a linha i)

ou, de modo equivalente,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{1j}(-1)^{1+j} \det A_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j} \det A_{2j} + a_{3j}(-1)^{3+j} \det A_{3j} = \\ &= \sum_{i=1}^3 a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}. \end{aligned}$$

(Desenvolvimento segundo a coluna j)

De seguida, vamos provar que o valor do determinante de A coincide com o valor do determinante da sua transposta.

Proposição III.2.5.

Seja $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Então $\det A = \det A^T$.

Demonstração:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$. Deste modo

$$\det A^T = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \stackrel{\equiv}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \stackrel{\equiv}{=} \det A$$

desenvolvendo segundo a linha 1

$$\begin{aligned}
&= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \\
&= a_{11}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ 22 & a_{23} \end{vmatrix} = \det A.
\end{aligned}$$

Exercícios III.2.6.

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que:

$$\text{a) } \det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (5)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{b) } \det B = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = (2)(5)(3).$$

2. Prove que as propriedades enunciadas para determinantes de 2ª ordem (ver III.1.4.) se mantêm válidas para determinantes de 3ª ordem.

$$\text{3. Sejam } M = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 \\ -3 & 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Utilizando as propriedades referidas na alínea anterior, mostre que:

$$\begin{aligned} \text{a) } \det M &= \det \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 33 \end{bmatrix} = \\ &= -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} = -(1)(2)(33) = -66; \end{aligned}$$

$$\text{b) } \det N = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0;$$

$$\text{c) } \det P = \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 \\ -3 & 5 & -9 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} = -6.$$

4. Mostre que $\det \begin{bmatrix} 3179 & \sqrt{3} & 411 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{5}{7} & -2 \end{bmatrix} = (\dots)(-1)^{1+1}(-3).$

5. Sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$, justifique os seguintes cálculos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & \dots \\ 0 & \dots & c^2 - a^2 \end{bmatrix} = (\dots) \det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & \dots & c^2 - a^2 \end{bmatrix} = \\ &= (\dots)(c-a) \det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & \dots \end{bmatrix} = (\dots)(c-a)(c-\dots). \end{aligned}$$

Exercícios III.2.7.

1. Seja $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $|C - kI_3| = 0$.

2. Mostre que $|A - kI_3| = (3 - k)^2(-3 - k)$, sendo $k \in \mathbb{R}$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) o determinante da matriz B ;

b) $p \in \mathbb{R}$ tal que $|B - \lambda I_3| = -\lambda(\lambda + p)(\lambda - 2p)$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcule o determinante da matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

b) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Utilizando as propriedades dos determinantes prove que:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & -5 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ -5 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 & -2 - \lambda \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ -5 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)^2(8 - \lambda). \end{aligned}$$

5. Sejam duas matrizes quadradas de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Consideremos, ainda, dois tipos de matrizes elementares:

$E_{ik} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, por troca da linha i pela linha k

e

$E_{ik}(\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz quadrada que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, substituindo a linha i pela que dela se obtém subtraindo-lhe a linha k , previamente multiplicada pelo número $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calcule os produtos DA , AD , $E_{12}A$, $E_{12}E_{23}A$ e $E_{21}(4)A$.

b) Determine o valor dos determinantes $\det(DA)$, $\det(AD)$, $\det(E_{12})$, $\det(E_{23})$ e $\det[E_{21}(4)A]$

c) Verifique que:

c.1) $\det(E_{23}A) = (\det E_{23})(\det A) = -\det A$;

c.2) $\det(E_{12}E_{23}A) = (\det E_{12})(\det E_{23})(\det A) = \det A$;

c.3) $\det(E_{12}E_{12}E_{23}A) = (\det E_{12})(\det E_{12})(\det E_{23})(\det A) = -\det A$;

c.4) $\det[E_{21}(4)A] = \det A$;

d) Prove que:

d.1) $\det E_{ik} = -1$.

d.2) $\det E_{ik}(\alpha) = 1$.

d.3) $\det(E_{ik}A) = (\det E_{ik})(\det A) = -\det A$;

d.4) $\det[E_{ik}(\alpha)A] = [\det E_{ik}(\alpha)](\det A) = \det A$.

6. Considere a matriz $V = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $\det V$ através da condensação da matriz V ;

b) Obtenha o determinante da matriz $B = -2V^{-1}$, sem calcular os elementos da matriz B .

Vamos definir determinante de ordem $n > 1$, supondo conhecido o determinante de ordem $n - 1$.

Definição III.2.8. [Determinante de ordem n]

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ a matriz que obtemos de A suprimindo-lhe a linha 1 e a coluna 1.

Definimos

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} \det A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} \det A_{12} + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n} \det A_{1n} =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j} \det A_{1j}.$$

(Desenvolvimento segundo a linha 1).

No seguinte resultado, que apresentamos sem demonstração, garantimos que o número que obtemos para o valor do determinante de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não depende da escolha da linha.

Trata-se de uma generalização do que verificámos, no Exemplo III.2.2., para matrizes de ordem 3.

Proposição III.2.9.

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $n \geq 2$.

O valor do determinante de A pode ser obtido por intermédio do desenvolvimento segundo qualquer linha de A , isto é,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} \det A_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det A_{in} = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}, \end{aligned}$$

onde $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ representa a matriz que obtemos de A suprimindo-lhe a linha i e a coluna j .

Elencamos, de seguida e apenas com sugestões para demonstração, algumas propriedades:

Proposição III.2.10. [Propriedades da função determinante]

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

P.1. O valor do determinante de A é igual ao valor do determinante da matriz transposta de A , isto é, $\det A = \det A^T$.

Sugestão: Podemos provar este resultado por indução em n .

Sabemos que se verifica para $n = 1$, já que se A é uma matriz de ordem 1 então $A = A^T$. Admitimos, ainda, que a afirmação se verifica para matrizes de ordem p e vamos mostrar que também é válida para matrizes de ordem $p + 1$.

Assim, se $A \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$ então, escolhendo o desenvolvimento segundo a linha 1, podemos escrever

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} \det \underbrace{A_{11}}_{p \times p} + a_{12}(-1)^{1+2} \det \underbrace{A_{12}}_{p \times p} + \dots \\ \dots + a_{1(p+1)}(-1)^{1+(p+1)} \det =$$

$$\stackrel{\text{por hipótese de indução}}{=} a_{11}(-1)^{1+1} \det A_{11}^T + a_{12}(-1)^{1+2} \det A_{12}^T + \dots$$

$$\dots + a_{1(p+1)}(-1)^{1+(p+1)} \det A_{1(p+1)}^T \stackrel{\text{porquê?}}{=} \det A^T.$$

P.2. O valor do determinante de uma matriz triangular A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de A

Sugestão: Tenhamos em conta o Exercício III.2.19, alínea 2).

P.3. Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem uma linha (coluna) de zeros então $\det A = 0$.

Sugestão: Basta-nos calcular o determinante por intermédio do desenvolvimento segundo a linha (coluna) de zeros.

P.4. Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem duas linhas iguais então $\det A = 0$.

Sugestão: Podemos provar este resultado por indução em n . Sabemos que se verifica para $n = 2$ (ver Exercício III.1.4), admitimos que a afirmação se verifica para matrizes de ordem p e vamos mostrar que também é válida para matrizes de ordem $p + 1$.

Assim, seja $A \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$ uma matriz com duas linhas iguais, a linha i e a linha k . Utilizamos uma linha s , sendo $s \neq i$ e $s \neq k$, para calcular o seu determinante. Obtemos

$$\det A = a_{s1}(-1)^{s+1} \underbrace{\det A_{s1}}_{=0} + a_{p2}(-1)^{s+2} \underbrace{\det A_{s2}}_{=0} + \dots \\ \dots + a_{s(p+1)}(-1)^{i+(p+1)} \underbrace{\det A_{s(p+1)}}_{=0} = 0.$$

P.5. Sejam $I_n, E_{ik}, E_i(\alpha), E_{ik}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então podemos afirmar que

$$\det I_n = \det E_{ik}(\alpha) = 1, \det E_{ik} = -1 \text{ e } \det E_i(\alpha) = \alpha.$$

Sugestão: Recordemos o conceito de matrizes elementares (definidas na Secção I.5).

P.6. Seja $E_{ik} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então

$$\det(E_{ik}A) = (\det E_{ik})(\det A) = -\det A,$$

ou seja, o valor do determinante de A muda de sinal quando trocamos – entre si – duas linhas.

Sugestão: Podemos utilizar o método de indução.

P.7. Seja $E_{ik}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então

$$\det[E_{ik}(\alpha)A] = [\det E_{ik}(\alpha)](\det A) = \det A,$$

ou seja, o valor do determinante de A não se altera quando substituímos uma linha pela que dela se obtém subtraindo-lhe um múltiplo escalar de outra.

Sugestão: Verificamos que a matriz $E_{ik}(\alpha)$ é a matriz que se obtém de A por substituição da linha i pela que dela se obtém subtraindo-lhe a linha k multiplicada pelo escalar α .^{xxxvii} Calculamos $\det[E_{ik}(\alpha)A]$ utilizando o desenvolvimento segundo a sua linha i . Obtemos

$$\begin{aligned} \det[E_{ik}(\alpha)A] &= (a_{i1} + \alpha a_{k1})(-1)^{i+1} \det A_{i1} + (a_{i2} + \alpha a_{k2})(-1)^{i+2} \det A_{i2} + \dots \\ &\quad \dots + (a_{in} + \alpha a_{kn})(-1)^{i+n} \det A_{in} = \det A + \\ &\quad + \alpha \left[\underbrace{a_{k1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + a_{k2}(-1)^{i+2} \det A_{i2} + \dots + a_{kn}(-1)^{i+n} \det A_{in}}_{=0^{\text{xxxviii}}} \right] = \det A. \end{aligned}$$

P.8. Como função de cada linha, o determinante de ordem n é uma função linear.

Sugestão: Queremos provar que se $E_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então

$$\det[E_i(\alpha)A] = [\det E_i(\alpha)](\det A) = \alpha \det A;$$

^{xxxvii} Ou adicionando-lhe a linha k multiplicada pelo escalar $(-\alpha)$

^{xxxviii} Trata-se do determinante de uma matriz que tem duas linhas iguais.

e, além disso, que

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \mathbf{a}_{i1} + \mathbf{b}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} + \mathbf{b}_{i2} & \dots & \dots & \mathbf{a}_{in} + \mathbf{b}_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \mathbf{a}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} & \dots & \dots & \mathbf{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \mathbf{b}_{i1} & \mathbf{b}_{i2} & \dots & \dots & \mathbf{b}_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

P.9. O valor do determinante de A é nulo se e só se as suas linhas são linearmente dependentes.

Sugestão: Sabemos que, por definição, as filas paralelas (linhas ou colunas) da matriz A são linearmente dependentes se o sistema homogéneo $Ax = 0$ é indeterminado, pelo que empregamos as propriedades P.3 e P.7.

P.10. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

Sugestão: Começamos por verificar que $\alpha A = E_1(\alpha)E_2(\alpha) \cdots E_n(\alpha)A$ e, depois, aplicamos a propriedade P.8.

Observação III.2.11.

Tendo em conta a propriedade P.1 (isto é, que $\det A = \det A^T$) anterior, podemos afirmar que o determinante de uma matriz A , quadrada de ordem n , pode ser calculado recorrendo ao desenvolvimento segundo qualquer uma das suas filas (linha ou coluna), ou seja,

$$\det A = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}}_{\text{desenvolvimento segundo a linha } i} = \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}}_{\text{desenvolvimento segundo a coluna } j}.$$

Definição III.2.12. [Termo de uma matriz]

Chamamos termo de uma matriz quadrada de ordem n a qualquer produto de n elementos da matriz, desde que nele entrem, como factores, um e um só elemento de cada linha e de cada coluna.

Exercício III.2.13.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$. Complete:

- (i) $(a_{11})(a_{22})(a_{33})(a_{44})(a_{\dots 5})$ é termo da matriz A ;
- (ii) $(a_{11})(a_{22})(a_{33})(a_{44})(a_{\dots 5})$ não é termo da matriz A ;
- (iii) $(a_{11})(a_{22})(a_{33})(a_{44})(a_{\dots 5})$ é termo da matriz A ;
- (iv) $(a_{15})(a_{22})(\dots \dots \dots)(\dots \dots \dots)(\dots \dots \dots)$ é termo da matriz A .

(v) $(\dots)(\dots)(\dots)(\dots)(\dots)$ não é termo da matriz A .

Definição III.2.14. [Complemento algébrico de um elemento de uma matriz]

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Chamamos complemento algébrico – ou cofator – do elemento a_{ij} da matriz A ao número

$$(-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

sendo $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ a matriz que obtemos de A suprimindo a linha i e a coluna j .

Exemplos III.2.15.

a) Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. Então

$(-1)^{1+1} \det[-1]$ é o complemento algébrico do elemento $b_{11} = 1$;

$(-1)^{1+2} \det[5]$ é o complemento algébrico do elemento $b_{12} = 3$;

$(-1)^{2+1} \det[\dots]$ é o complemento algébrico do elemento $b_{21} = 5$;

$(-1)^{\dots+\dots} \det[\dots]$ é o complemento algébrico do elemento $b_{22} = -1$.

b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Então

$(-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \dots$ é o complemento algébrico ou cofator do elemento $a_{11} = 1$;

$(-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \dots$ é o cofator do elemento $a_{12} = -1$;

$(-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \dots$ é o cofator do elemento $a_{13} = \dots$;

$(-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} \dots & 2 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots$ é o cofator do elemento $a_{21} = \dots$;

$(-1)^{\dots+\dots} \det \begin{bmatrix} 1 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots$ é o cofator do elemento $a_{22} = \dots$;

$(-1)^{\dots+\dots} \det \begin{bmatrix} \dots & -1 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots$ é o cofator do elemento $a_{23} = \dots$;

$(-1)^{\dots+\dots} \det \begin{bmatrix} -1 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots$ é o cofator do elemento $a_{31} = \dots$;

$(-1)^{\dots+\dots} \det \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots$ é o cofator do elemento $a_{32} = \dots$;

$(-1)^{\dots+\dots} \det \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots$ é o cofator do elemento $a_{33} = \dots$.

Observação III.2.16.

Acabámos de constatar que para qualquer matriz quadrada de ordem n , $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o (valor do) determinante de A é igual à soma algébrica dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos respetivos complementos algébricos, isto é,

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left[\underbrace{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}_{\substack{\text{complemento alg\u00e9brico} \\ \text{ou cofator de } a_{ij}}} \right].$$

Por outro lado, importa referir que o valor do complemento alg\u00e9brico $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ n\u00e3o depende do elemento a_{ij} .

Apresentamos, de seguida, um resultado que envolve os cofatores (ou complementos alg\u00e9bricos) de uma matriz.

Proposi\u00e7\u00e3o III.2.17.

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. \u00c9 nula a soma alg\u00e9brica dos produtos dos elementos de uma fila pelos complementos alg\u00e9bricos dos elementos hom\u00f3logos de outra fila paralela, isto \u00e9,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{k+j} \det A_{kj} = 0, \text{ se } j \neq k, \text{ e,}$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+k} \det A_{ik} = 0, \text{ se } i \neq k.$$

Demonstra\u00e7\u00e3o:

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \neq k$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz que se obt\u00e9m de A substituindo a linha k pela linha i , isto \u00e9, $b_{ij} = b_{kj} = a_{ij}$, para $j = 1, 2, \dots, n$.

Ent\u00e3o $\det B = 0$ visto que, por constru\u00e7\u00e3o, B tem duas linhas iguais.

Calculemos, agora, o determinante da matriz B utilizando o desenvolvimento segundo a linha k .

Obtemos

$$0 = \det B = \sum_{j=1}^n b_{kj}(-1)^{k+j} \det B_{kj} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{k+j} \det A_{kj}.$$

Exemplo III.2.18.

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Na matriz A calculemos a soma algébrica dos produtos dos elementos da linha 1, $[1 \ -1 \ 2]$, pelos complementos algébricos da linha 2, $[2 \ 4 \ 2]$. Obtemos

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1)(-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{complemento algébrico do elemento } a_{21}=1} + \underbrace{(-1)(-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{complemento algébrico do elemento } a_{22}=4} + \underbrace{(2)(-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{complemento algébrico do elemento } a_{23}=2} = \\ & = (-1)(-4 - 2) + (-1)(4 - 2) + (-2)[1 - (-1)] = 6 - 2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Exercícios III.2.19.

1. Calcule:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & -1 & 12 \\ -1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{b) } \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

$$c) \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 10 \end{vmatrix};$$

$$e) \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix};$$

$$f) \det \begin{bmatrix} 1 & a & b & b \\ a & 1 & b & b \\ b & b & 1 & a \\ b & b & a & 1 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ duas matrizes triangulares, inferior e superior, respectivamente, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Calcule $\det A$ e $\det B$.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > a$. Verifique que

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$$

é uma função quadrática e indique, caso existam, os zeros de f .

Exercício III.2.20.

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando as propriedades da função determinante de ordem n [Proposição III.2.9.], verifique, sem fazer cálculos, que $\det A = 0$ e $\det B = 0$.

Exercício III.2.21.

1. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Prove que:

a) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$;

b) Se A é não singular, então $\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

2. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que:

a) $\begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}$;

b) $\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}$;

c) As propriedades (1.a) e (1.b) continuam válidas para $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Nesta secção, apresentamos, ainda, a seguinte

Definição III.2.22. [Matriz dos cofatores; matriz adjunta]

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Chamamos matriz dos cofatores de A (ou matriz dos complementos algébricos de A) à matriz quadrada de ordem n que se obtém de A substituindo cada elemento pelo respectivo complemento algébrico, isto é,

$$\text{cof}A = [(-1)^{i+j} \det A_{ij}]_{n \times n}.$$

Além disso, a matriz adjunta de A é a transposta da matriz dos cofatores de A , ou seja,

$$\text{adj}A = (\text{cof}A)^T.$$

Exemplos III.2.23.

a) Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. Então

$$\text{cof}B = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det[-1] & (-1)^{1+2} \det[5] \\ (-1)^{2+1} \det[3] & (-1)^{2+2} \det[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \text{adj}B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Então

$$\text{cof}A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

logo

$$\text{cof}A = \begin{bmatrix} 14 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \text{adj}A = \begin{bmatrix} 14 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 14 & 6 & -10 \\ -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Verificamos, também, que

$$\begin{aligned} B(\text{adj}B) &= (\text{adj}B)B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix} = \underbrace{-16}_{\det B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (\det B)I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\text{adj}A) &= (\text{adj}A)A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 6 & -10 \\ -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{16}_{\det A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\det A)I_3. \end{aligned}$$

Será coincidência?

Isto é, podemos afirmar que $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = (\det A)I_n$, para qualquer matriz A de ordem n ?

Analisaremos esta questão na secção seguinte.

Atendendo, mais uma vez, às propriedades apresentadas no Proposição III.2.9. podemos demonstrar o resultado seguinte.

Proposição III.2.24.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(i) O determinante de A é igual ao determinante da matriz triangular superior que se obtém de A , através de operações elementares sobre linhas do tipo Θ_3 , ou ao seu simétrico, conforme o número de trocas no processo é par ou ímpar.

(ii) Se na eliminação de Gauss usarmos apenas operações sobre linhas do tipo Θ_3 , o valor do determinante de A é zero se a matriz tem menos de n pivots^{xxxiv}, ou, por outro lado, se A tem n pivots^{xxxv}, é igual ao produto dos pivots.

Observação III.2.25.

A partir desta proposição podemos simplificar o cálculo de determinantes, dado que – como verificámos anteriormente – toda a matriz quadrada pode ser transformada numa matriz triangular através de operações elementares.

^{xxxiv} Isto é, se a matriz A é singular

^{xxxv} Ou seja, isto é, se A é não-singular

Assim é possível convertermos o problema do cálculo do determinante de uma matriz quadrada qualquer, no do cálculo do determinante de uma matriz triangular.

No entanto nem sempre este processo é o mais adequado para, nomeadamente, matrizes do tipo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 2000 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$N = \begin{bmatrix} \sqrt{0.0169} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (0.0032)^{-1} & 0.1 & 0 & 3 \times 10^{-5} & 0 \\ 0.06 & 0 & 1 & 222 & 0 \\ 0 & 112,34 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

como veremos no Exercício III.2.28.

Exemplo III.2.26.

Utilizando a eliminação de Gauss, pretendemos calcular o determinante da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{16} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = (1)(1)(-1)(-16)(2) = 32.$$

Exercícios III.2.27.

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Condense A e $[A|b]$;
- Indique o determinante de A ;
- Determine a característica das matrizes A e $[A|b]$;
- A matriz A é invertível? Justifique.
- Resolva o sistema $Ax = 0$;
- Qual dos seguintes conjuntos

$$\{(8 - 2\alpha, 1 - \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}, \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 0, 1 \right\}, \{ \}$$

e $\{(6 + 2\beta, \beta, \gamma), \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

é solução do sistema $Ax = b$?

2. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Comente as seguintes afirmações:

- a) «Se o $\det A = 0$ então o sistema $Ax = 0$ é indeterminado»;
- b) «Se o sistema $Ax = 0$ tem uma solução não nula então $\det A = 0$ »;
- c) «Se o sistema $Ax = b$ é impossível então $\det A = 0$ ».

Exercícios III.2.28.

Calcule os seguintes determinantes

$$1. \det M = \det \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 2000 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0 \end{bmatrix};$$

$$2. \det N = \det \begin{bmatrix} \sqrt{0.0169} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (0.0032)^{-1} & 0.1 & 0 & 3 \times 10^{-5} & 0 \\ 0.06 & 0 & 1 & 222 & 0 \\ 0 & 112,34 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

$$1. \det M = (0.05)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{vmatrix} = -(0.05)[(0)(0.7) - (0.2)(0.1)] = 10^{-3};$$

$$2. \det N = 100(-1)^{4+5} \det \begin{bmatrix} \sqrt{0.0169} & 0 & 0 & 0 \\ (0.0032)^{-1} & 0.1 & 0 & 3 \times 10^{-5} \\ 0.06 & 0 & 1 & 222 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= -100(-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} \sqrt{0.0169} & 0 & 0 \\ (0.0032)^{-1} & 0.1 & 3 \times 10^{-5} \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= -100\sqrt{0.0169}(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 0.1 & 3 \times 10^{-5} \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = -13(0.7 - 0.00012) = 9.09844.$$

Exercícios III.2.29.

1. Recorrendo a operações elementares calcule

$$\begin{aligned} \text{a) } \det\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ \dots & 0 & 7 & \dots \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (\dots)(-1)^{\dots} \det\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \dots; \end{aligned}$$

$$\text{b) } \det\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ 9 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (-3)(-1)^{\dots} \det\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots;$$

$$\text{c) } \det\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & \dots & 3 & 0 \end{bmatrix} = \dots;$$

$$\text{d) } \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = (2)(-1)^{\dots} \det\begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 9 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots$$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que $|A - kI_3| = (-4 - k)^2(-1 - k)$, $k \in \mathbb{R}$;

b) Determine para que valores de $k \in \mathbb{R}$ se tem $|A - kI_3| = 0$.

3. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 12 + x^2 \\ 1 & -7x & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

4. Considere a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Utilizando as propriedades dos determinantes, mostre que:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -2 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= -4 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

(b) Calcule o determinante da matriz $\frac{1}{2}A$;

5. Construa uma matriz real $Q = [q_{ij}]_{2 \times 2}$ tal que

$$q_{11} = 0.6, Q^{-1} = Q^T \text{ e } \det Q = 1.$$

6. Sejam $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ e $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$. Prove que:

a) $\det(I - AB) = \det(I - BA)$;

b) $(I - AB)^{-1}A = A(I - BA)^{-1}$.

Sugestão:

Na alínea a) verifique que

$$\det \left(\begin{bmatrix} I_p & A \\ B & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & -A \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} I_p & -A \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & A \\ B & I_q \end{bmatrix} \right).$$

7. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n . Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Fundamente a sua resposta para cada caso.

a) Se $\det A = 0$ então a matriz A tem duas linhas iguais;

b) $\det(-A) = -\det A$;

c) $\det\left(\frac{1}{2}A\right) = 2^{-n}\det A$;

d) Se $\det A = \det B$ então $A = B$;

e) $\det(A^T + B) = \det(A + B^T)$;

f) Se os elementos principais de A são nulos então $\det A = 0$;

g) $\det(I_n - A) = 1 - \det A$.

(Página deixada propositadamente em branco)

III.3 - Aplicações dos determinantes no cálculo da matriz inversa e na resolução de sistemas de equações lineares (regra de Cramer).

Retomamos a definição de matriz adjunta.

Atendendo à Definição III.2.22. e à Proposição III.2.17. prova-se que

Proposição III.3.1.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $n \geq 2$. Então

$$(i) A(adjA) = (adjA)A = (detA)I_n;$$

$$(ii) A^{-1} = \left(\frac{1}{detA}\right)adjA, \text{ se } detA \neq 0.$$

Demonstração:

(i) Seja $M = A(adjA)$. Então

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{i1}(-1)^{j+1}detA_{j1} + a_{i2}(-1)^{j+2}detA_{j2} + \dots + a_{in}(-1)^{j+n}detA_{jn}, & \text{se } i \neq j \\ a_{i1}(-1)^{i+1}detA_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}detA_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}detA_{in}, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Deste modo, tendo em conta as Proposições III.2.9 e III.2.17, podemos concluir que

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ detA, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Procedemos de modo análogo para o produto $(adjA)A$.

(ii) Note-se que se $A(adjA) = (adjA)A = (detA)I_n$ e $detA \neq 0$ então

$$A\left[\left(\frac{1}{\det A}\right)\text{adj}A\right] = \left[\left(\frac{1}{\det A}\right)\text{adj}A\right]A = I_n,$$

o que nos permite concluir, pela definição de matriz inversa, que

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right)\text{adj}A.$$

Exemplos III.3.2.

1. Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ então $\det B = -16$ e

$$B^{-1} = \left(\frac{1}{\det B}\right)\text{adj}B = \left(\frac{1}{-16}\right)\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

Verifique o resultado calculando os produtos BB^{-1} e $B^{-1}B$.

2. Por outro lado, se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ então

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = (1)(-1)^2 \det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 16,$$

e, conseqüentemente,

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right)\text{adj}A = \left(\frac{1}{16}\right)\begin{bmatrix} 14 & 6 & -10 \\ -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Confirme o resultado calculando AA^{-1} e $A^{-1}A$.

Observação III.3.3.

Repare, ainda, que este método – em contraste com o que acontece quando recorremos à eliminação de Gauss – nos permite calcular um elemento (ou mais) da matriz inversa independentemente dos restantes.

Por exemplo,

elemento na posição (1,3) de A^{-1} = elemento na posição (1,3) de $\left(\frac{1}{\det A}\right) \text{adj}A =$

$$= \left(\frac{1}{\det A}\right) [\text{elemento na posição (3,1) de } \text{cof}A] =$$
$$\frac{1}{\frac{1}{16}}$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right) \text{complemento algébrico de } a_{31} =$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right) \left[(-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right] = \left(\frac{1}{16}\right) (-2 - 8) = -\frac{5}{8}.$$

Exercícios III.3.4.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que $\left(-\frac{2}{7}\right)$ é o elemento na posição (3,3) de A^{-1} .

b) Calcule a inversa da matriz A .

2. Sejam $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -11 & -9 & 4 \\ 2 & 26 & -19 \\ 16 & 7 & -18 \end{bmatrix}$.

- a) Verifique que $\det B = -67$;
- b) Indique o elemento na posição (2,1) de B^{-1} ;
- c) Calcule a matriz CB ;
- d) Determine a inversa da matriz B .

Admitindo, agora, que a matriz A é não singular, vamos apresentar a regra de Cramer, recorrendo à noção de determinante e respectivas propriedades.

Isto é, vamos obter uma fórmula para a solução de um sistema de equações lineares $Ax = b$ expressa em termos das matrizes A e b .

Começamos por analisar o caso de ordem dois.

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, matriz não singular, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$.

Consequentemente,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Definimos $D = \det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $D[x_1] = \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}$ e

$$D[x_2] = \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}.$$

Repare-se que:

(i) $D \neq 0$ é o determinante da matriz A ;

(ii) $D[x_1]$ é o determinante da matriz que se obtém de A substituindo a 1ª coluna, $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$;

(ii) $D[x_2]$ é o determinante da matriz que se obtém de A substituindo a 2ª coluna, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Verificamos que

$$\begin{aligned} x_1 D &= x_1 \det A = x_1 \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} x_1 a_{11} & a_{12} \\ x_1 a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \\ &\stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} & a_{12} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} = D[x_1], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\underbrace{x_1}_{\substack{1^\text{ª} \text{ incógnita} \\ \text{real}}} \underbrace{D}_{\substack{\text{número} \\ \text{real}}} = \underbrace{D[x_1]}_{\substack{\text{número} \\ \text{real}}} \Leftrightarrow x_1 = \frac{D[x_1]}{D}.$$

Do mesmo modo concluímos que

$$\begin{aligned} x_2 D &= x_2 \det A = x_2 \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11} & x_2 a_{12} \\ a_{21} & x_2 a_{22} \end{bmatrix} = \\ &\stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11} & x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ a_{21} & x_1 a_{21} + x_2 a_{22} \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix} = D[x_2]. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \underbrace{x_2}_{\substack{2^{\text{a}} \text{ inc\u00f3gnita} \\ \text{real}}} \underbrace{D}_{\substack{\text{n\u00famero} \\ \text{real}}} = \underbrace{D[x_2]}_{\substack{\text{n\u00famero} \\ \text{real}}} \Leftrightarrow x_2 = \frac{D[x_2]}{D}.$$

Exerc\u00edcios III.3.5.

Resolva – utilizando quando poss\u00edvel a regra anterior – os seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = -50 \\ 2x_1 + x_2 = -7 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 16 \\ -6x_1 + 4x_2 = -32 \end{cases}.$$

Resolu\u00e7\u00e3o:

a) Neste caso temos

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = -50 \\ 2x_1 + x_2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 7 \end{bmatrix},$$

isto \u00e9, $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ \u00e9 a matriz dos coeficientes, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ \u00e9 a coluna das inc\u00f3gnitas e $\begin{bmatrix} -50 \\ 7 \end{bmatrix}$ \u00e9 a coluna dos termos independentes.

Deste modo

$$D = \det A = \det \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (7)(1) - (-5)(2) = 7 + 10 = 17,$$

$$D[x_1] = \det \begin{bmatrix} -50 & -5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = (-50)(1) - (-5)(-7) = -50 - 35 = -85,$$

e, finalmente,

$$D[x_2] = \det \begin{bmatrix} 7 & -50 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = (7)(-7) - (-50)(2) = -49 + 100 = 51.$$

Logo

$$x_1 = \frac{D[x_1]}{D} = \frac{-85}{17} = -5 \text{ e } x_2 = \frac{D[x_2]}{D} = \frac{51}{17} = 3$$

o que nos permite concluir que $\mathcal{S} = \{(-5, 3)\}$ é o conjunto solução do sistema dado.

b) Verificamos que

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 16 \\ -6x_1 + 4x_2 = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -32 \end{bmatrix},$$

isto é, $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é a coluna das incógnitas e $\begin{bmatrix} 16 \\ -32 \end{bmatrix}$ é a coluna dos termos independentes.

Todavia $D = \det A = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = (3)(4) - (-2)(-6) = 0$, o que nos impede de utilizar o método acima descrito.

Note-se, no entanto, que podemos recorrer à eliminação de Gauss.

Assim,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 16 \\ -6 & 4 & -32 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - (-2)L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 16 \\ -6x_1 + 4x_2 = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 16 \\ x_2 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{16}{3} + \frac{2}{3}\beta \\ x_2 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases},$$

peço que $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{16}{3} + \frac{2}{3}\beta, \beta \right), \beta \in \mathbb{R} \right\}$ é o conjunto solução do sistema inicial.

Analisemos, agora, o caso de ordem 3.

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

$$\text{com } \det A \neq 0, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \text{ e}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Definimos

(i) $D = \det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, determinante da matriz dos coeficientes;

(ii) $D[x_1] = \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, determinante da matriz que se obtém de A

substituindo a primeira coluna, $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos

independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$;

(iii) $D[x_2] = \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$, determinante da matriz que se obtém de

A substituindo a segunda coluna, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos

independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$;

(iv) $D[x_3] = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$, determinante da matriz que se obtém de

A substituindo a terceira coluna, $\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos

independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Também, neste caso, verificamos que

$$\begin{aligned} x_1 D &= x_1 \det A = x_1 \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} x_1 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_1 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_1 a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \\ &\stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ x_1 a_{31} + x_2 a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\text{porquê?}}{=} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = D[x_1], \end{aligned}$$

ou seja,

$$x_1 D = D[x_1] \Leftrightarrow x_1 = \frac{D[x_1]}{D}.$$

Analogamente, concluímos que

$$x_2 D = D[x_2] \Leftrightarrow x_2 = \frac{D[x_2]}{D}$$

e

$$x_3 D = D[x_3] \Leftrightarrow x_3 = \frac{D[x_3]}{D}.$$

Exercícios III.3.6.

Resolva – utilizando quando possível a regra anterior – os seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3. \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolução:

a) Uma vez que

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} = -54, \quad D[x_1] = \det \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 7 & -2 & 5 \end{bmatrix} = -27,$$

$$D[x_2] = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} = -54 \text{ e } D[x_3] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix} = -81,$$

concluimos que

$$x_1 = \frac{D[x_1]}{D} = \frac{-27}{-54} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{D[x_2]}{D} = \frac{-54}{-54} = 1 \text{ e } x_3 = \frac{D[x_3]}{D} = \frac{-81}{-54} = \frac{3}{2}.$$

Assim $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right) \right\}$ é o conjunto solução do sistema dado.

b) Neste caso obtemos $D = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 20$,

$$D[x_1] = 0, D[x_2] = 0 \text{ e } D[x_3] = 0 \text{ (porquê?)},$$

o que nos permite afirmar que $\mathbf{S} = \{(0, 0, 0)\}$ é o conjunto solução do sistema dado.

c) Repare-se que

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 20, D[x_1] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 32,$$

$$D[x_2] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix} = 3 \text{ e } D[x_3] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix} = -15,$$

e, consequentemente,

$$x_1 = \frac{D[x_1]}{D} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}, x_2 = \frac{D[x_2]}{D} = \frac{3}{20} \text{ e } x_3 = \frac{D[x_3]}{D} = \frac{-15}{20} = -\frac{3}{4},$$

ou seja, $\mathbf{S} = \left\{ \left(\frac{8}{5}, \frac{3}{20}, -\frac{3}{4} \right) \right\}$.

d) $\mathbf{S} = \left\{ \left(\frac{11}{67}, -\frac{2}{67}, -\frac{16}{67} \right) \right\}$.

Enunciamos, agora, sem demonstração, a Regra de Cramer no caso geral:

Proposição III.3.7.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular.

Então, o sistema

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

é possível e determinado, sendo

$$x_i = \frac{D[x_i]}{D}, i = 1, 2, \dots, n,$$

onde D é o determinante da matriz A (matriz dos coeficientes do sistema) e $D[x_i]$ o determinante da matriz que se obtém de A , substituindo a coluna i pela coluna b dos termos independentes.

Exercícios III.3.8.

1. Seja $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Calcule, indicando o método que utilizou:

- a) uma das linhas da matriz inversa de B ;
- b) uma das colunas da matriz inversa de B ;
- c) o elemento na posição $(2,3)$ da matriz inversa de B .

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

a) Calcule o determinante da matriz A pela definição;

b) Condense a matriz B e calcule o seu determinante;

c) Determine o valor do elemento (1,2) da matriz inversa de B ;

d) Considere o sistema $Bx = c$, onde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ Determine o valor de x_1

utilizando a regra de Cramer.

3. Resolva – utilizando, quando possível e oportuno, a Regra de Cramer – os seguintes sistemas:

a)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - z = 0; \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2; \\ x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -x + 2z = 2; \\ 3x + y + 3z = -2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2; \\ 3x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2; \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 4z = 0; \\ x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} -4x + y - 3z = 7 \\ x - 2y + z = 1. \\ -2x - 3y - z = 9 \end{cases}$$

4. Considere o sistema
$$\begin{cases} 2x + k_1y - z = 1 \\ -x + 2k_2y + 3z = 0, \text{ onde } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}. \\ x - 5k_3y + 3z = -1 \end{cases}$$

Sabendo que o determinante da matriz dos coeficientes é 2, determine o valor da incógnita y .

5. Seja $B = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 4 & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 4 \end{bmatrix}$ e $C = [B : 0_{3 \times 1}]$.

Indique o conjunto solução de cada um dos sistemas:

(c-i) $Bx = 0$;

(c-ii) $C^T y = 0$.

6. Considere o sistema

$$\begin{cases} -x + y + 2z + 2w = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 6x + 2y = 1 \\ z - w = 1 \end{cases}$$

a) Escreva o sistema na forma matricial ($Au = b$).

b) Designe por A a matriz dos coeficientes do sistema anterior.

b.1) Calcule o determinante de A ;

b.2) Determine o valor de x utilizando a regra de Cramer.

CAPÍTULO IV • VALORES PRÓPRIOS E VETORES PRÓPRIOS DE UMA MATRIZ QUADRADA

IV.1 – Conceito de valor próprio e vetor próprio de uma matriz quadrada.

No que se segue, iniciamos o estudo dos valores próprios e vetores próprios de uma matriz quadrada, abordando, no final da secção, a diagonalização de matrizes utilizando os conceitos de multiplicidade algébrica e geométrica de um valor próprio.

Definição IV.1.1.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O vetor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é um vetor próprio de A se e só se

$$Ax = \lambda x$$

sendo λ um escalar^{xxxiv}.

Neste caso, λ diz-se um valor próprio da matriz A associado ao vetor próprio x .

Exemplos IV.1.2.

a) Se $A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, então

^{xxxiv} Que, neste capítulo, pode ser um número complexo (ver alínea 2.b) do Exercício IV.5.4). Todavia, no que se segue, escolhemos, apenas, matrizes com valores próprios reais.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x$$

e podemos concluir que

$$Ax = 1x, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}^2$$

Neste caso, podemos afirmar que todos os vetores $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ são vetores próprios de A associados ao valor próprio 1.

Todavia, esta situação não é usual!

b) Seja $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Consideremos, também, dois vetores $u = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ verificamos que

$$Au = 1u \text{ e } Av = \frac{1}{2}v.$$

Deste modo, dizemos que u e v são vetores próprios da matriz A e, ainda, que os números 1 e $\frac{1}{2}$ são valores próprios de A , ou seja, afirmamos que

- (i) u é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 1; e
- (ii) v é um vetor próprio de A associado ao valor próprio $\frac{1}{2}$.

Por outro lado, verificamos que

$$A^2u = A(Au) = A(1u) = Au = 1u, \text{ isto é, } A^2u = 1u,$$

e

$$A^2v = A(Av) = A\left(\frac{1}{2}v\right) = \frac{1}{2}(Av) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 v = \frac{1}{4}v, \text{ isto é, } A^2v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 v.$$

O que podemos concluir?

Constatamos que

(i) 1 é valor próprio de A^2 associado ao vetor próprio u ;

(ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ é valor próprio de A^2 associado ao vetor próprio v .

Surge, então, a seguinte questão:

O que se passa quando analisamos A^3, A^4, A^5, \dots ?

3) Consideremos, finalmente, a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e os vetores

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verificamos, agora, que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Bu = (-2)u;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Bv = (-2)v;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Bw = 7w;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, o vetor } Bz \text{ não é um}$$

múltiplo escalar de z .

Deste modo, podemos afirmar que:

- (i) u é um vetor próprio de B associado ao valor próprio -2 ;
- (ii) v é outro vetor próprio de B associado ao valor próprio -2 ;
- (iii) w é um vetor próprio de B associado ao valor próprio 7 ;
- (iii) z não é um vetor próprio de B .

Retomando a igualdade

$$Ax = \lambda x,$$

e recordando que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (escalar), sendo x um vetor próprio de A , associado ao valor próprio λ , escrevemos

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} A \\ \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} A \\ \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{c} A \\ \end{array} \right] - \lambda \left[\begin{array}{c} I_n \\ \end{array} \right] \right) \begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, constatamos que x é um vetor próprio de A , associado ao valor próprio λ , se e só se

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ e } x \in \mathcal{N}(A - \lambda I_n),^{xxxv}$$

^{xxxv} Ver definição de espaço nulo ou núcleo de uma matriz (secção II.3).

ou seja, de modo equivalente, se e só se

$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é solução do sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)z = 0$.

Observação IV.1.3.

Relativamente ao sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)z = 0$ recordemos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) o sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)z = 0$ é indeterminado;
- (ii) a matriz $A - \lambda I_n$ não é invertível;
- (iii) a característica de $A - \lambda I_n$ é inferior a n ;
- (iv) a matriz $A - \lambda I_n$ é singular;
- (v) as colunas de $A - \lambda I_n$ são linearmente dependentes;
- (vi) as linhas de $A - \lambda I_n$ são linearmente dependentes;
- (vii) o determinante de $A - \lambda I_n$ é igual a zero.

(Página deixada propositadamente em branco)

IV.2 – Polinómio característico de uma matriz quadrada.

Consideremos, de seguida, o

Problema IV.2.1.

Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que exista um vetor, não nulo,

$$u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3,$$

tal que

$$Au = \lambda u, \text{ sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Uma vez que

$$Au = \lambda u \Leftrightarrow Au - \lambda u = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)u = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1 - \lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

podemos enunciar o Problema IV.2.1. doutra forma.

Problema IV.2.2.

Quando é que o sistema homogéneo $(A - \lambda I_3)u = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tem soluções não nulas?

Tendo em conta o que estudámos anteriormente sobre a discussão e resolução de sistemas de equações lineares, podemos dizer que este sistema tem soluções não nulas se e só se a matriz $A - \lambda I_3$ é singular, ou seja, se e só se

$$\det(A - \lambda I_3) = 0.$$

Assim, podemos formular o problema anterior do seguinte modo

Problema IV.2.3.

Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

Então, uma vez que

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1 - \lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1)(-1)^{1+3}[(6)(-2) - (-1 - \lambda)(-1)] +$$

$$+(-1 - \lambda)(-1)^{3+3}[(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - (2)(6)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + \lambda - 12) \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -4 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 3,$$

podemos afirmar que se

$$\lambda \in \{-4, 0, 3\}$$

então existe um vetor não nulo $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $Au = \lambda u$.

Designamos $p(\lambda) = (-1)^3\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda$ polinómio característico e $(-1)^3\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0$ equação característica ^{xxxxvi} da matriz A .

Note-se que $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ e que

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0$$

Aos escalares $\lambda \in \mathbb{R}$, que são soluções do Problema IV.2.1., chamamos valores próprios (ou valores característicos) da matriz A .

Os vetores, não nulos $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, soluções do sistema homogéneo $(A - \lambda I_3)u = 0$, dizem-se vetores próprios (ou vetores característicos) de A associados ao valor próprio λ .

Neste caso, temos vetores próprios associados, respetivamente, aos valores próprios $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 3$.

Consideremos $\lambda_1 = -4$. Atendendo a que

$$(A - \lambda_1 I_3)u = 0 \Leftrightarrow (A + 4I_3)u = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

constatamos que os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = -4$ são todos os vetores da forma

$$u = (u_1, u_2, u_3) = \alpha(-1, 2, 1), \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

^{xxxxvi} Trata-se de uma equação polinomial. Consequentemente, pode ter raízes reais e complexas, embora, como referimos anteriormente, só abordemos casos com raízes reais.

Ao conjunto

$$E(\lambda_1) = E(-4) = \{u \in \mathbb{R}^3: u = \alpha(-1, 2, 1), \alpha \in \mathbb{R}\},$$

chamamos espaço próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_1 = -4$.

Seja, agora, $\lambda_2 = 0$.

Dado que

$$(A - \lambda_2 I_3)v = 0 \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} \\ -\frac{6}{13} \\ 1 \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

podemos garantir que os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 0$ são todos os vetores da forma

$$v = (v_1, v_2, v_3) = \beta \left(-\frac{1}{13}, -\frac{6}{13}, 1 \right), \text{ onde } \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Neste caso, o espaço próprio de A , associado ao valor próprio $\lambda_2 = 0$, é o conjunto

$$E(\lambda_2) = E(0) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3: v = \beta \left(-\frac{1}{13}, -\frac{6}{13}, 1 \right), \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

Por outro lado, se $\lambda_3 = 3$, temos

$$(A - \lambda_3 I_3)w = 0 \Leftrightarrow (A - 3I_3)w = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

o que implica que:

(i) todos os vetores da forma

$$w = (w_1, w_2, w_3) = \gamma \left(-1, -\frac{3}{2}, 1 \right), \text{ onde } \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

são vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_3 = 3$;

(ii) o conjunto

$$E(\lambda_3) = E(3) = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : w = \gamma \left(-1, -\frac{3}{2}, 1 \right), \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

é o espaço próprio de A , associado ao valor próprio $\lambda_3 = 3$.

Repare-se, finalmente, que

$$p(\lambda) = (-1)^3 \lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda + \underbrace{0}_{\det A}$$

é um polinómio de grau $n = 3$ ^{xxxvii} em que o coeficiente do termo de grau 3 é $(-1)^n = (-1)^3$ e o termo independente é $\det A = 0$.

Deste modo podemos afirmar que uma matriz quadrada de ordem 3 tem 3 valores próprios que podem ser distintos ou não.

Curiosamente também verificamos que

$$\text{tr}A = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + (-1) + (-1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4 + 0 + 3,$$

e

^{xxxvii} Sendo $n = 3$ a ordem da matriz A .

$$\det(A) = 0 = (\lambda_1)(\lambda_2)(\lambda_3) = (-4)(0)(3).$$

Será coincidência?

Ou seja, podemos garantir que a soma dos valores próprios de uma matriz coincide com o seu traço?

E, também, que o valor do determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus valores próprios?

Além disso, é importante reter que

$$(i) E(\lambda_i) = \{\text{vetores próprios de } A \text{ associados ao valor próprio } \lambda_i\} \cup \{(0,0,0)\},$$
$$i = 1,2,3;$$

$$(ii) E(\lambda_i) = \{\text{conjunto das soluções do sistema homogéneo } (A - \lambda_i I_3)u = 0\},$$
$$i = 1,2,3;$$

$$(iii) E(\lambda_i) = \mathcal{N}(A - \lambda_i I_3), \quad i = 1,2,3.$$

IV.3 – Espaço próprio, multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de um valor próprio.

Formalizemos, agora, a definição de valor próprio, vetor próprio e espaço próprio para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definição IV.3.1. [Valor próprio e vetor próprio de uma matriz quadrada]

Seja A uma matriz quadrada de ordem n .

Dizemos que um escalar λ é valor próprio de A se existe um vetor, não nulo, $u \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$Au = \lambda u.$$

Todo o vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^n$, que satisfaz a equação anterior, é dito um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ .

Dado um valor próprio λ de A , chamamos espaço próprio de A associado ao valor próprio λ ao conjunto

$$E(\lambda) = \{u \in \mathbb{R}^n : Au = \lambda u\}.$$

Finalmente, dizemos que $\det(A - \lambda I_n) = 0$ é a equação característica da matriz A e que $\det(A - \lambda I_n)$ é o polinómio característico de A , e, conseqüentemente, os valores próprios da matriz A são as raízes da equação característica de A .

Note-se, ainda, que

(i) $E(\lambda) = \{u \in \mathbb{R}^n: (A - \lambda I_n)u = 0\} = \mathcal{N}(A - \lambda I_n)$;

(ii) λ é um valor próprio de A se e só se o núcleo da matriz $A - \lambda I_n$ contém vetores não nulos, isto é, se e só se $\mathcal{N}(A - \lambda I_n) \neq \{(0, 0, \dots, 0)\}$, ou, de modo equivalente,

λ é um valor próprio de A se e só se $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

(iii) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ é um polinómio em λ , de grau n , a que chamamos polinómio característico de A , sendo $(-1)^n$ o coeficiente do termo de grau n e $p(0) = \det A$ o termo constante.

(iv) Designamos a diferença entre a ordem de A e a característica de $A - \lambda I_n$ por multiplicidade geométrica do valor próprio λ e adoptamos a notação $m.g.(\lambda)$; enquanto chamamos multiplicidade algébrica de λ , referindo-a como $m.a.(\lambda)$, à multiplicidade de λ como raiz da equação característica de A .

Listamos, de seguida, algumas das propriedades dos valores próprios de uma matriz:

Proposição IV.3.2.

(i) Duas matrizes semelhantes^{xlii} têm o mesmo polinómio característico.

(ii) A soma dos valores próprios de uma matriz é igual ao traço^{xliii} dessa matriz.

^{xlii} Dizemos que $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são semelhantes se e só se existe uma matriz $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, não singular, tal que $B = S^{-1}AS$.

- (iii) Uma matriz é singular se e só se tem um valor próprio nulo.
- (iv) Os valores próprios de uma matriz triangular (superior ou inferior) são os elementos da diagonal principal.
- (v) Seja A uma matriz quadrada, de ordem n , invertível. Se λ é valor próprio de A então λ^{-1} é valor próprio de A^{-1} .
- (vi) Seja A uma matriz quadrada, de ordem n , tal que $A = A^{-1}$. Se λ é valor próprio de A então $\lambda \in \{-1, 1\}$.
- (vii) Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se λ é valor próprio de A então $\alpha\lambda$ é valor próprio de αA .
- (viii) Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Se λ é valor próprio de A então λ é valor próprio da matriz A^T , transposta de A .
- (ix) O produto dos valores próprios de uma matriz é igual ao seu determinante.
- Por outras palavras,
- Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios de A , matriz quadrada de ordem n , então $\det A = (\lambda_1)(\lambda_2) \cdots (\lambda_n)$.

Exercício IV.3.3.

Demonstre as propriedades apresentadas na Proposição IV.3.2.

xliii O traço de uma matriz quadrada é a soma dos seus elementos diagonais.

Exercício (resolvido) IV.3.4.

Determine os valores próprios (indicando as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas) e os vetores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Resolução:

Como vimos anteriormente, dizemos que um escalar λ é valor próprio de A se existe um vetor, não-nulo, $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $Au = \lambda u$, e, ainda, que todo o vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^3$, que satisfaz a equação $Au = \lambda u$, é dito um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ .

Também verificámos que os valores próprios de A são as raízes da equação característica de A .

Assim, começaremos por calcular todas as raízes λ da equação

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -4 - \lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 5 & 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \lambda)(-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -2 \\ 5 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 0 \vee \lambda - 1 = 0 \vee \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 1.$$

Dizemos que

$$\lambda_1 = -2 \text{ (raiz simples)} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 \text{ (raiz dupla)}$$

são valores próprios da matriz A , sendo $m.a.(\lambda_1) = m.a.(-2) = 1$ e $m.a.(\lambda_2) = m.a.(1) = 2$.

Quanto às multiplicidades geométricas, e uma vez que

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

podemos concluir que

$$m.g.(\lambda_1) = m.g.(-2) = \text{ordem de } A - c(A + 2I_3) = 3 - 2 = 1$$

e

$$m.g.(\lambda_2) = m.g.(1) = \text{ordem de } A - c(A - I_3) = 3 - 2 = 1.$$

Repare-se, também, que:

(i) o grau de $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2$, polinómio característico da matriz A , coincide com a ordem da matriz dada, isto é,

$$\text{grau de } p(\lambda) = \text{ordem de } A;$$

(ii) o produto dos valores próprios de A , $(-2)(1)(1)$, coincide com o determinante de A , ou seja,

$$(-2)(1)(1) = \det A = p(0) = -2;$$

(iii) a soma dos valores próprios de A , $(-2) + (1) + (1)$, é igual ao seu traço, visto que

$$(-2) + (1) + (1) = \operatorname{tr} A = (-4) + (1) + (3).$$

De seguida, procuramos os vetores próprios de A , isto é,

(i) todos os vetores não nulos $u \in \mathbb{R}^3$ que satisfaçam a equação $Au = (-2)u$;

assim como,

(ii) todos os vetores não nulos $v \in \mathbb{R}^3$ que satisfaçam a equação $Av = (1)v$.

Como podemos calcular os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = -2$?

Determinando as soluções não nulas do sistema homogêneo

$$(A - \lambda_1 I_3)u = 0.$$

Ora

$$(A - \lambda_1 I_3)u = 0 \Leftrightarrow (A + 2I_3)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Logo, os vetores próprios, associados ao valor próprio $\lambda_1 = -2$, são todos os vetores da forma

$$u = \alpha(-1, 0, 1), \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

e o espaço próprio correspondente é o conjunto

$$E(\lambda_1) = E(-2) = \{u \in \mathbb{R}^3: u = \alpha(-1, 0, 1), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

E relativamente aos vetores próprios de A , associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$?

Como devemos proceder?

Pesquisando todas as soluções não nulas do sistema homogéneo

$$(A - \lambda_2 I_3)v = 0.$$

Neste caso, observamos que

$$(A - \lambda_2 I_3)v = 0 \Leftrightarrow (A - I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e concluímos que os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são todos os vetores da forma

$$v = \beta \left(-\frac{2}{5}, 0, 1\right), \text{ onde } \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

sendo o espaço próprio correspondente o conjunto

$$E(\lambda_2) = E(1) = \left\{v \in \mathbb{R}^3: v = \beta \left(-\frac{2}{5}, 0, 1\right), \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercícios IV.3.5.

1. Verifique que, embora sendo de ordem três, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

tem, apenas, dois valores próprios distintos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, e, além disso, que

$$E(0) = \{u \in \mathbb{R}^3: u = \alpha(1, 0, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

e

$$E(2) = \{v \in \mathbb{R}^3: v = \beta(1, 0, -1) + \theta(0, 1, 0), \beta, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

2. Mostre que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

tem 3 valores próprios distintos $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 7$.

Compare, ainda, o valor do traço de B com a soma dos seus valores próprios, assim como o valor do determinante de B com o produto dos seus valores próprios.

3. Prove que a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

tem um único valor próprio, $\lambda_1 = 8$, que é uma raiz tripla da equação $|C - \lambda I_3| = 0$.

Mostre, ainda, que

$$m.a.(\lambda_1) = m.a.(8) = 3, \quad m.g.(\lambda_1) = m.g.(8) = 1$$

e

$$E(8) = \{w \in \mathbb{R}^3: w = \gamma(1, 0, 0), \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Finalmente, verifique que, neste caso, podemos afirmar que os vetores próprios da matriz C , todos eles associados ao valor próprio $\lambda_1 = 8$, são múltiplos escalares do vetor $(1, 0, 0)$.

4. Seja $M = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Determine uma matriz $S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, invertível, tal que

$$MS = SD, \text{ sendo } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(Página deixada propositadamente em branco)

IV.4 – Diagonalização de matrizes.

Retomamos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

da alínea 1) dos Exercícios IV.3.5, cujos espaços próprios são os seguintes

$$E(0) = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = \alpha(1, 0, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

e

$$E(2) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = \beta(1, 0, -1) + \theta(0, 1, 0), \beta, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Escolhemos três vetores próprios da matriz A ,

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in E(0), \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in E(2) \quad \text{e} \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in E(2).$$

Note-se que

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{0}_{\substack{\text{valor} \\ \text{próprio}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0u,$$

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_{\substack{\text{valor} \\ \text{próprio}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2v,$$

$$Aw = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_{\substack{\text{valor} \\ \text{próprio}}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2w,$$

ou, de forma compactada,

$$\left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \boxed{u} \\ \boxed{v} \\ \boxed{w} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ u \\ 2v \\ 2w \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \underbrace{\left[\begin{array}{c} \boxed{u} \\ \boxed{v} \\ \boxed{w} \end{array} \right]}_S = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \boxed{u} \\ \boxed{v} \\ \boxed{w} \end{array} \right]}_S \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]}_{\Lambda_A}.$$

Além disso, observamos que

$$\det S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

pelo que existe

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

o que nos permite escrever

$$AS = S\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = S^{-1}S\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = I_3\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda_A \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} S^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} S \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \Lambda_A \end{array} \right].$$

Neste caso, dizemos que $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é diagonalizável visto que a matriz A é semelhante a uma matriz diagonal Λ_A , isto é,

$$S^{-1}AS = \Lambda_A = \text{diag}(0, 2, 2).$$

Sistematizemos algumas considerações sobre a diagonalização da matriz anterior:

(i) Seja $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Verificamos que A é diagonalizável se e só se tem três vetores próprios u, v, w , tais que

$$S = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{bmatrix} \text{ é invertível,}$$

isto é,

tais que as colunas $\begin{bmatrix} | \\ u \\ | \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} | \\ w \\ | \end{bmatrix}$ de S são linearmente independentes.

Nestas condições,

$$AS = S\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda_A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

(ii) Constatemos que se $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tem três valores próprios distintos, isto é, se os valores próprios de A são raízes simples da sua equação característica, então A é diagonalizável.

Observações IV.4.1.

Generalizando, dizemos que uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável – ou, de modo equivalente, é semelhante a uma matriz diagonal – se e só se tem n vetores próprios, v_1, v_2, \dots, v_n , associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tais que a matriz

$$S = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ é invertível.}$$

Neste caso

$$AS = S\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda_A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Prova-se que:

(i) Nem todas as matrizes são diagonalizáveis;

(ii) Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem n valores próprios, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, distintos, então A é diagonalizável.

(iii) Se λ é um valor próprio de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então

$$m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda).$$

Surge, assim, a seguinte questão:

Em que condições existem n vetores próprios, v_1, v_2, \dots, v_n , associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que a matriz

$$S = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ é invertível?}$$

A resposta está relacionada com as multiplicidades algébricas e geométricas dos valores próprios da matriz e é dada, sem demonstração, na seguinte

Proposição IV.4.2.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $p \leq n$ valores próprios distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável – ou seja, é semelhante a uma matriz diagonal – se e só se $m.g.(\lambda_i) = m.a.(\lambda_i)$, para $i = 1, 2, \dots, p$.

Exercícios IV.4.3.

1. Seja $C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Verifique que não é possível construir uma matriz $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, invertível, tal que

$$S^{-1}CS = \Lambda_C = \text{diag}(8, 8, 8).$$

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

a) Calcule os valores próprios de A .

b) Determine $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de modo que $BA = 6I_3$. Verifique, justificando a sua resposta, que B é a matriz adjunta de A .

c) Sendo $p(\lambda) = -\lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3$ o polinómio característico da matriz A , determine a relação existente entre os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, o determinante de A , o traço de A e o traço da matriz adjunta de A .

3. Seja B uma matriz, quadrada, real, de ordem 3, tal que

$$\left[\begin{array}{c} B \\ \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c} B \\ \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } \left[\begin{array}{c} B \\ \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Indique os valores próprios de B . Justifique.

b) Determine, caso exista, uma matriz diagonal semelhante a B . Justifique.

c) Defina uma matriz B nas condições do enunciado.

4. Seja $B = \begin{bmatrix} 20 & -1 & 1 \\ 1 & 20 & -1 \\ -1 & 1 & 20 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $d = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$.

a) Resolva o sistema $Bx = d$. (*Sugestão: Utilize a Regra de Cramer*)

b) Determine um dos valores próprios de B , bem um vetor próprio que lhe esteja associado.

c) Determine $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de modo que $CB = 8060I_3$.

5. Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, singular, que satisfaz as seguintes condições:

$$Av = (-2)v \text{ para } v = (0, 1, 0),$$

$$Aw = (-1)w \text{ para } w = (0, 0, 1).$$

a) Determine dois dos valores próprios de A .

b) Averigue para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + (\alpha - 1)\lambda^2 + \alpha\lambda.$$

é o polinómio característico de A .

c) Sabendo que $Au = 0$ para $u = (1, 2, -1)$, determine uma matriz S tal que $S^{-1}AS$ seja uma matriz diagonal. Justifique.

d) Construa uma matriz A nas condições do enunciado.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e os vetores $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ e

$v = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \gamma \end{bmatrix}$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Verifique que a matriz A tem um valor próprio, λ_1 , que é um número racional, enquanto os outros dois, λ_2 e λ_3 , são números irracionais.

b) Determine $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de modo que se verifiquem simultaneamente as condições seguintes:

- v é vetor próprio de A associado ao valor próprio racional λ_1 .
- u, v, w constituem as colunas de uma matriz não singular, sendo $w = (0, 0, 1)$.

c) Calcule a matriz $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de modo que $AB = -4I_3$, sendo I_3 a matriz identidade de ordem 3.

Problemas finais IV.4.4.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que:

a.1) $|A - kI_3| = (3 - k)^2(-3 - k)$, $k \in \mathbb{R}$;

a.2) $\frac{1}{9}$ é o elemento na posição (1,1) da matriz inversa de A .

b) Resolva os sistemas:

b.1) $(A + 3I_3)u = 0$;

b.2) $(A - 3I_3)v = 0$.

c) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas.

d) Determine o espaço próprio de A associado ao valor próprio:

d.1) $\lambda_1 = -3$;

d.2) $\lambda_2 = 3$.

e) Defina $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $S^{-1}AS = \text{diag}(3, -3, 3)$.

f) É possível escolher $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $T^TAT = \text{diag}(3, -3, 3)$?

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tais que $Au = \lambda_1 u$, $Av = \lambda_2 v$ e $Aw = \lambda_3 w$.

b) Resolva os sistemas:

b.1) $(A - 10I_3)y = 0$;

b.2) $Az = 0$.

c) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas.

d) Encontre algum $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $S^{-1}AS = \text{diag}(-10, 0, 10)$.

e) É possível escolher $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $T^T A T = \text{diag}(-10, 0, 10)$?

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Calcule:

a.1) $k \in \mathbb{R}$ tal que $|A - \lambda I_3| = -\lambda(\lambda + k)(\lambda - 2k)$;

a.2) o determinante da matriz A ;

a.3) uu^T , sendo $u^T = \left[\frac{2}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \right]$;

a.4) Av , sendo $v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

b) Resolva os sistemas:

b.1) $(A - 4I_3)x = 0$;

b.2) $Ay = 0$.

c) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas.

d) Encontre algum $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $S^T A S = \text{diag}(-2, 0, 4)$.

4. Seja $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$.

a) Resolva os sistemas:

a.1) $Bu = 0$;

a.2) $(B - I_4)v = 0$.

b) Calcule:

b.1) o produto Bw ;

b.2) os valores próprios de B .

b.3) Indique $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $S^{-1} B S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

5. Suponha que $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaz a condição $\det(B + I_n) \neq 0$. Justificando cuidadosamente a sua resposta, prove que se $\rho \in \mathbb{R}$ é valor próprio de B então $\frac{1}{1+\rho}$ é valor próprio de $(B + I_n)^{-1}$.

6. Seja $M \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ uma matriz tal que $\det(M - \lambda I_5) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^3$.
 Determine, justificando a sua resposta:

- a) $\text{tr}(M^T)$;
- b) $\det(M)$;
- c) $\det(M^T)$;
- d) $\det(M - 2I_5)$.

7. Seja $M \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ uma matriz singular tal que

$$\det(M - \lambda I_5) = -(\lambda - ?)^3(\lambda - 3)(\lambda - 7).$$

Determine, justificando a sua resposta:

- a) os valores próprios de M ;
- b) $\text{tr}(M^T)$;
- c) $\det(M - 7I_5)$;
- d) $\det\left(\frac{1}{5}M\right)$.

8. Sejam $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & k_1 \\ 3 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$.

a) Recorrendo à regra de Cramer, determine o valor da incógnita x_3 no sistema $Ax = b$.

b) Discuta para todos os valores reais de k_1 e k_2 o sistema homogêneo $(A - 3I_3)y = 0$.

c) Determine dois elementos da terceira linha da matriz inversa da matriz A .

Faça, agora, $k_1 = k_2 = -1$.

d) Utilizando a eliminação de Gauss, resolva o sistema $Ax = b$.

e) Calcule os valores próprios da matriz A , indicando as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

f) A matriz A é diagonalizável? Justifique.

g) Utilizando a definição de valor próprio e vetor próprio, prove que a matriz A e a matriz adjunta de A , $adj(A)$, têm os mesmos vetores próprios e calcule os valores próprios e o determinante da matriz $adj(A)$.

9. Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}B$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Defina matriz ortogonal e verifique se T é ortogonal.

b) Seja $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Determine $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ de modo que a matriz $S = TD$ seja ortogonal.

c) Calcule o determinante e o traço da matriz A .

d) Utilizando o método de eliminação de Gauss, classifique o sistema $Cy = 0$, onde $C = A - I_3$ e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, e determine o seu conjunto solução, indicando a característica da matriz do sistema, bem como as incógnitas principais e as incógnitas livres (caso existam).

e) Obtenha dois elementos da terceira coluna da matriz inversa de A .

f) Admitindo que $A = I_3 - 2uu^T$, onde $u \in \mathbb{R}^3$, identifique o vetor unitário $u = (u_1, u_2, u_3)$ que satisfaz a condição referida.

g) Verifique se $w = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ é vetor próprio de A e, em caso afirmativo, indique o valor próprio que lhe está associado.

h) Calcule os valores próprios de A , assim como as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas. (*Sugestão: tenha em conta as questões anteriores*)

i) Determine dois vetores, não nulos, ortogonais pertencentes ao espaço próprio associado ao valor próprio positivo de A .

j) A matriz T diagonaliza a matriz B ? Justifique a sua resposta.

(Página deixada propositadamente em branco)

IV.5 - Matrizes simétricas e matrizes antisimétricas. Diagonalização de matrizes simétricas. Espectro e decomposição espectral de uma matriz simétrica.

Verificámos, anteriormente, que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável se e só se é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se e só se existem uma matriz invertível S e uma matriz diagonal D tais que $S^{-1}AS = D$.

Além disso, constatámos que nem todas as matrizes quadradas são diagonalizáveis, e, vamos, ainda, comprovar que uma matriz real não tem necessariamente valores próprios reais. Todavia esta situação simplifica-se significativamente quando estudamos matrizes simétricas.

Definição IV.5.1.

Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- (i) é simétrica se $A = A^T$;
- (ii) é anti-simétrica se $A = -A^T$.

Exemplo IV.5.2.

A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica e anti-simétrica;

As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2 & -36 & 0 \\ -36 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ são simétricas mas não são anti-simétricas;

As matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & (-2)^3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -7 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

são anti-simétricas mas não são simétricas;

As matrizes $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ não são simétricas

nem anti-simétricas.

Exercícios IV.5.3. [Propriedades das matrizes simétricas]

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Prove que se $k \in \mathbb{N}$ então a matriz A^k é simétrica.

2. Mostre que se $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ então:

a) $B^T B$ é simétrica;

b) $\frac{1}{2}(B + B^T)$ é simétrica.

Exercícios IV.5.4. [Propriedades das matrizes anti-simétricas]

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz anti-simétrica. Prove que:

a) $\text{tr}(A) = 0$;

b) se n é ímpar então $\det A = 0$;

c) se k é ímpar então A^k é anti-simétrica;

d) se k é par então A^k é simétrica;

e) $M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica de ordem $2n$.

2. Considere $B = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que B é anti-simétrica;

b) Calcule os valores próprios de B .

3. Mostre que:

a) se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é anti-simétrica e $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ então a matriz $B^T A B$ também é anti-simétrica;

b) se $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ então $\frac{1}{2}(B - B^T)$ é anti-simétrica.

De seguida, analisamos, apenas, o caso das matrizes simétricas.

Assim, começamos com alguns exemplos e exercícios onde verificaremos que os valores próprios destas matrizes são números reais. Além disso, teremos oportunidade de constatar que toda a matriz simétrica é diagonalizável.

Exemplos e Exercícios IV.5.5.

1. Para mostrar que a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável basta ter em conta que $\lambda_1 = 7$ é o único valor próprio da matriz A e que, além disso,

$$m.a.(7) = 2 > m.g.(7) = 1,$$

uma vez que $|A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow (7 - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 7 \vee \lambda = 7$ e, que, por outro lado, $(\text{ordem de } A) - c(A - \lambda I_2) = 1$.

2. Pretendemos, agora, verificar se a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ é

diagonalizável.

Note-se que $|A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow (5 - \lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 50)$.

Logo

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee \lambda = 5 \vee \lambda = 10. \text{ }^{xlvi}$$

Constatamos, também, que

$$E(5) = \{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 2, 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

sendo $m. a. (5) = m. g. (5) = 2$, e

$$E(10) = \{\gamma(0, 1, -2), \quad \gamma \in \mathbb{R}\}$$

pelo que $m. a. (10) = m. g. (10) = 1$.^{xlvi}

Se escolhermos os vetores próprios

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 2, 1) \text{ e } v_3 = (0, 1, -2)$$

e construímos a matriz

$$S = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

verificamos que S é invertível sendo

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}.$$

Deste modo, obtemos

^{xlvi} $\lambda_1 = 5$ é uma raiz dupla e $\lambda_2 = 10$ é uma raiz simples.

^{xlvi} Recorde a definição de multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de um valor próprio.

$$S^{-1}AS = \Lambda_A,$$

onde

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Note-se que os vetores v_1, v_2, v_3 satisfazem as condições

$$v_1^T v_2 = 0, v_1^T v_3 = 0 \text{ e } v_2^T v_3 = 0,$$

isto é, são ortogonais dois a dois, pelo que dizemos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto ortogonal.^{xlviii}

Por outro lado, podemos, em vez dos vetores v_1, v_2, v_3 , considerar os vetores próprios

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (1, 0, 0), u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ e } u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right),$$

que, além de serem ortogonais, dois a dois, são unitários, pelo que constituem um conjunto ortonormal.^{xlix}

Se definirmos

$$T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

^{xlviii} Se $v_i^T v_i > 0$ e $v_i^T v_j = 0$, sempre que $i \neq j$, dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ é um conjunto ortogonal de vetores.

^{xlix} $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ é dito um conjunto ortonormal se é um conjunto ortogonal de vetores unitários (isto é, de norma 1).

verificamos que T é uma matriz que satisfaz a condição

$$T^{-1} = T^T,$$

ou de modo equivalente, que T é uma matriz ortogonal.^l

Consequentemente podemos afirmar que

$$T^T A T = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

e dizemos que a matriz A é ortogonalmente diagonalizável.

3. Seja $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que:

a) $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ são vetores próprios de C associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.

b) $\{u_1, u_2\}$ é um conjunto ortonormal;

c) a matriz C é ortogonalmente diagonalizável.

4. Mostre que se $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é simétrica então os seus valores próprios são números reais.

^l $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz ortogonal se e só se as suas colunas constituem um conjunto ortonormal. Prova-se que se $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz ortogonal então $Q^T Q = I_n$.

O resultado seguinte explica-nos a razão pela qual o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ do Exemplo IV.5.5. é ortogonal.

Proposição IV.5.6.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica de espectro

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$
^{li}

Se v_i e v_j são vetores próprios de A associados, respectivamente, aos valores próprios distintos λ_i e λ_j então $v_i^T v_j = 0$, para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstração:

Seja $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Escolhemos dois valores próprios distintos, λ_i e λ_j , um vetor próprio v_i associado a λ_i e um vetor próprio v_j associado a λ_j . Pretendemos provar que $v_i^T v_j = 0$.

Assim consideremos

$$\begin{aligned} \lambda_i(v_i^T v_j) &= (\lambda_i v_i)^T v_j = (A v_i)^T v_j = (v_i^T A^T) v_j = v_i^T A^T v_j = \\ &= v_i^T (A v_j) = v_i^T (\lambda_j v_j) = \lambda_j v_i^T v_j. \end{aligned}$$

Ora, por hipótese, $\lambda_i \neq \lambda_j$, logo

$$\lambda_i(v_i^T v_j) = \lambda_j v_i^T v_j \Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j)(v_i^T v_j) = 0 \Leftrightarrow v_i^T v_j = 0.$$

^{li} Ao conjunto dos valores próprios de A , $\sigma(A)$, chamamos espectro de A . Repare-se que $\sigma(A)$ pode ter elementos repetidos, pelo que $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ é um multi-conjunto, uma estrutura similar à de um conjunto mas com a diferença de os seus elementos não terem que ser forçosamente distintos.

Este resultado, bem como os dois exemplos anteriores, chamam a nossa atenção para uma forma de diagonalização especial que apresentamos na seguinte

Definição IV.5.7.

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diz-se ortogonalmente diagonalizável se e só se existirem uma matriz ortogonal $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz diagonal $\Lambda_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $S^T A S = \Lambda_A$.

Provamos, sem dificuldade, que se uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é ortogonalmente diagonalizável então é simétrica.

Com efeito, se A é uma matriz ortogonalmente diagonalizável então podemos escrever

$$S^T A S = \Lambda_A \Leftrightarrow A = S \Lambda_A S^T.$$

E, conseqüentemente,

$$A^T = (S \Lambda_A S^T)^T = (S^T)^T (\Lambda_A)^T S^T = S \Lambda_A S^T = A.$$

O resultado que se segue é mais forte e muito importante neste contexto. Todavia a sua demonstração é bastante mais complicada pelo que será omitida.

Proposição IV.5.8.

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é ortogonalmente diagonalizável se e só se é uma matriz simétrica.

Exercícios IV.5.9.

1. Verifique se a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ é ortogonalmente diagonalizável.

Resposta:

Uma vez que $B = B^T$ podemos concluir que^{lii} B é ortogonalmente diagonalizável.

De facto, temos

$$\sigma(B) = \{-2, 1, 4\},$$

e, ainda,

$$E(-2) = \{\alpha(1, -1, -2), \alpha \in \mathbb{R}\},$$

$$E(1) = \{\beta(1, -1, 1), \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{e } E(4) = \{\gamma(1, 1, 0), \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Consequentemente, $S^T B S = \Lambda_B$, ou seja,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}}_{S^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}}_S = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\Lambda_B}.$$

2. Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diz-se normal se $MM^T = M^T M$. Mostre que se M é uma matriz simétrica então M é normal.

E se M for antisimétrica, o que pode concluir?

^{lii} Tendo em conta a Proposição IV.5.8.

De seguida, apresentamos uma forma de representar uma matriz simétrica por intermédio dos seus valores e vetores próprios.

Proposição IV.5.10. [Decomposição espectral de uma matriz simétrica]

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica tal que:

(i) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são valores próprios, não necessariamente distintos, de A e u_1, u_2, \dots, u_n , de S são vetores próprios de A associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;

(ii) $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é um conjunto ortogonal constituído por vetores unitários;

(iii) $A = SDS^T$ onde u_1, u_2, \dots, u_n são as colunas de S .

Então

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

Esta representação chama-se decomposição espectral de A .

Exemplos IV.5.11.

Retomando o Exemplo IV.5.5. e o Exercício IV.5.9., verificamos que:

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ pode ser decomposta do seguinte modo

$$A = (5) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (5) \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + (10) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

2. A matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ admite a seguinte decomposição espectral

$$B = (-2) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} + (4) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Problemas finais IV.5.12

1. Mostre que

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (7)u_1u_1^T + (7)u_2u_2^T + (-2)u_3u_3^T,$$

sendo $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2. Seja $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ uma matriz tal que

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = (4) \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Prove que B é simétrica.

3. Seja $u = (1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$. Prove que:

a) $M = uu^T$ é simétrica. Faça a sua decomposição espectral.

b) $N = I_3 - \left(\frac{2}{u^T u}\right)uu^T$ é uma matriz simétrica e ortogonal.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $k \in \mathbb{R}$ tal que $|A - \lambda I_3| = -\lambda(\lambda + k)(\lambda - 2k)$;

b) Resolva os sistemas:

b.1) $(A - 6I_3)x = 0$;

b.2) $Ay = 0$;

b.3) $(A + 3I_3)z = 0$.

c) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas.

d) Determine um conjunto ortogonal de vetores unitários constituído por vetores próprios de A .

e) Indique $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $S^T A S = \text{diag}(-3, 0, 6)$.

5. Considere, em \mathbb{R}^4 , os vetores

$v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 0, -1)$

Mostre que:

a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é um conjunto ortogonal;

b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é um conjunto ortonormal;

c) se $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \left(\frac{v_2^T u_1}{u_1^T u_1}\right)u_1$ e $u_3 = v_3 - \left(\frac{v_3^T u_1}{u_1^T u_1}\right)u_1 - \left(\frac{v_3^T u_2}{u_2^T u_2}\right)u_2$

então $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto ortogonal.

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Prove que

$$\begin{aligned} |A - kI_4| &= \det \begin{bmatrix} 2-k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-k \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} 5-k & 5-k & 5-k & 5-k \\ 1 & 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-k \end{bmatrix} = (5-k) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-k \end{bmatrix} = \\ &= (5-k) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{bmatrix} = (5-k)(1-k)^3. \end{aligned}$$

b) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

c) Resolva os sistemas homogêneos

c.1) $(A - I_4)x = 0$;

c.2) $(A - 5I_4)y = 0$.

d) Determine o espaço próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda_2 = 5$.

e) Verifique que o conjunto

$$\{\alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(-1, 0, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 0, 1), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

coincide com o espaço próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1$.

f) Mostre que $\{u_1, u_2, u_3\}$, onde

$u_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$ e $u_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$, é um conjunto ortogonal formado por vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$.

g) Indique $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $S^T A S = \text{diag}(1, 1, 1, 5)$.

h) Considere os vetores

$$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, 0\right),$$

$$w_3 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-3}{2\sqrt{3}}\right) \text{ e } w_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Determine $M = w_1 w_1^T + w_2 w_2^T + w_3 w_3^T + 5 w_4 w_4^T$.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Indique, justificando a sua resposta:

a) e utilizando o método de eliminação de Gauss, o conjunto solução de cada um dos sistemas:

a.1) $Ax = b$;

a.2) $(A - 9I_3)y = 0$.

b) $\theta \in \mathbb{R}$ de modo que $A^2 + \theta I_3 = 10A$.

c) a matriz inversa de A .

d) os valores próprios de A , indicando as respectivas multiplicidades algébricas.

e) o espaço próprio associado ao menor valor próprio de A .

f) um conjunto ortonormal constituído por três vetores próprios de A .

g) a decomposição espectral de A .

8. Construa uma matriz $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tal que $Cv = v$ e $Cw = 5w$, sendo $v = (-2, 1)$ e $w = (2, 1)$.

9. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ duas matrizes reais de

ordem 3.

a) Indique o conjunto solução do sistema $(A + I_3)z = 0$.

b) Calcule a matriz inversa da matriz A .

c) Verifique que $C = B^T B = 2I_3 - A$.

d) Sabendo que $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ são dois valores próprios da matriz A , o que pode concluir acerca dos valores próprios da matriz $C = B^T B$? Justifique.

e) Determine $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sabendo que $S^T A S = \Lambda_A$, onde Λ_A é uma matriz diagonal.

10. Seja M uma matriz quadrada de ordem 3 que satisfaz as seguintes condições:

- i) M é simétrica;
- ii) $N(M) = \{\gamma(1, 1, 1), \gamma \in \mathbb{R}\}$, sendo $N(M)$ o núcleo da matriz M ;
- iii) $Mu = -3u$, onde $u = (1, 0, -1)$;
- iv) $Mv = 15v$, onde $v = (1, -2, 1)$.

a) Indique os valores próprios da matriz M .

b) Determine um conjunto ortonormal constituído por três vetores próprios de M .

c) Construa a matriz M que satisfaz as quatro condições anteriores.
(Sugestão: tenha em conta as alíneas anteriores)

11. Seja M uma matriz simétrica, quadrada de ordem 3, que satisfaz as seguintes condições:

- i) $tr(M) = 0$, onde $tr(M)$ representa o traço da matriz M ;
- ii) $Mu = 2u$, onde $u = (1, 1, 1)$;
- iii) $Mv = -v$, onde $v = (2, -2, 0)$;
- iv) $M^{-1}w = -w$, onde $w = (-1, 0, 1)$.

- a) Indique os valores próprios da matriz M .
- b) Determine um conjunto ortonormal constituído por três vetores próprios de M .
- c) Construa a matriz M que satisfaz as quatro condições anteriores.
(Sugestão: tenha em conta as alíneas anteriores)
- d) Utilizando a decomposição espectral de uma matriz simétrica, e justificando devidamente a sua resposta, construa a matriz inversa de M .

12. Considere as matrizes $S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

- a) Defina matriz ortogonal e verifique se S é ortogonal.
- b) Determine $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que $S^T A S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
- c) Faça a condensação da matriz A e, de seguida, calcule o seu determinante.
- d) Obtenha o determinante da matriz $B = \frac{1}{18} \text{adj}(A)$ sem calcular os elementos de $\text{adj}(A)$.
- e) Calcule dois elementos da terceira coluna da matriz inversa de A .
- f) Utilizando o método de eliminação de Gauss, classifique o sistema $Cy = 0$, onde $C = A + 3I_3$ e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, e determine o seu conjunto solução, indicando a característica da matriz do sistema, bem como as incógnitas principais e as incógnitas livres (caso existam).

g) Verifique se $u = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ é vetor próprio de A e, em caso afirmativo, indique o valor próprio que lhe está associado.

h) Calcule os valores próprios de A , assim como as respetivas multiplicidades algébricas e geométricas. (*Sugestão: tenha em conta as questões anteriores*)

i) Determine dois vetores ortogonais pertencentes ao espaço próprio associado ao menor valor próprio de A .

j) Faça a decomposição espectral da matriz A .

13. Seja $B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ tal que $\det(BB^T) \neq 0$ e $C = B^T(BB^T)^{-1}B$.

Justificando cuidadosamente a sua resposta, prove que:

a) $C = C^T$; b) $C^2 = C$; c) $(I_3 - 2C)^{-1} = I_3 - 2C$.

14. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n , tais que $AB = BA$. Prove que:

a) Se v é um vetor próprio de B tal que $v \notin \mathcal{N}(A)$ então Av também é um vetor próprio de B ;

b) Se $Bv = \lambda v$ e $m.g.(\lambda) = 1$ então v é também vetor próprio de A .

PALAVRAS FINAIS

Se da leitura deste texto, acompanhada de outras sessões de trabalho individuais e conjuntas (incluindo as aulas, obviamente!), resultar:

- um contributo para a formação dos nossos alunos, não enquanto simples técnicos, mas sim como indivíduos cultos, pessoas com boa preparação de base e elevada autonomia intelectual;
- o desencadear de medidas que fomentem o seu desenvolvimento pessoal nas suas múltiplas exigências e não apenas as de um treino para a profissão;
- e, finalmente, lhes inculcar o gosto/despertar o interesse pela Matemática;

então teremos alcançado o nosso propósito inicial.

(Página deixada propositadamente em branco)

BIBLIOGRAFIA

Indicamos, por ordem alfabética, alguns livros de texto que consideramos adequados para quem inicia e queira aprofundar o estudo da Álgebra Linear.

Kolman, Bernard. Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1987.

Lay, David C. Álgebra Linear e suas Aplicações. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1999.

Leon, Steven J. Álgebra Linear com Aplicações. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1999.

Santana, Ana Paula e João Filipe Queiró. Introdução à Álgebra Linear. Lisboa: Gradiva, 2010.

Strang, Gilbert. Introduction to Linear Algebra. Massachusetts: Wellesley-Cambridge Press, 1998.

Vitória, José e Teresa Pedroso de Lima. Álgebra Linear. Lisboa: Universidade Aberta, 1998.

SÉRIE ENSINO
IMPrensa DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS
2014

