ERRATAS.

Pag.	*Linh.*	*Errat.*	*Emend.*
14	18	*en*	*ſen*
82	4	12*MN*K	12*MNK.FG*
83	14	*mnk*	*mn*K
85	1 e 2	$-3y$	$-3x$
86	3	gravidaoe	gravidade
89	13	$\wedge$	γ
99	23	*AHB*K	[illegible]*HBP*
130	30	Adx	$-Adx$
138	1	ſobre fundo	ſobre o fundo
151	20	mais a agua	mais agua
156	12	Xdt	Xdx
160	12	213	313
163	7	$H =$	$= H$
170	11	Q^2	G^2
179	19	$D:D$	$D:D'$
185	11	OK.2FO	OQ.2FO
194	37	$\sqrt{2}, \sqrt{3}$	$\sqrt{1,889}$ e $\sqrt{2,778}$
222	30	xy	Xx
ibid.	30 e 34	yXY	xXR
256	21	RA	RH
298	14	$\frac{\cos m^2}{\cos p^2}$	$\frac{\cos m^3}{\cos p^2}$
302	17	$2 \cos q \operatorname{sen} q$	$2 \cos q \operatorname{sen} q^2$
307	10	dM	$dM =$

TRATADO
DE
HYDRODYNAMICA
POR
M. BOSSUT

DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS de París, Examinador dos Ingenheiros &c. &c.

TRADUZIDO E ABBREVIADO
do Francez.

COIMBRA:
NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

1775

M.DCC.LXXV.

Por Ordem de Sua Mageftade, e com Privilegio Real.

PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço ſaber aos que eſte Alvará virem: Que Havendo eu Ordenado pelos Eſtatutos Noviſſimos, com que Reſtaurei, e Mandei de novo fundar a Univerſidade de Coimbra, que os Eſtudos das Sciencias Mathematicas conſtituiſſem nella huma indiſpenſavel Faculdade: E ſendo ao meſmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil ſetecentos ſetenta e dous abollir, e caſſar os Titulos Nono, e Decimo dos Eſtatutos do Collegio Real de Nobres; pelos quais os referidos Eſtudos deviaõ tambem ſer enſinados no ſobredito Collegio; para que ſó, e unicamente foſſem promovidos, e cultivados na dita Univerſidade, em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vaſſallos: Por quanto pela ſobredita Abolliçaõ ficáraõ os referidos Eſtudos proprios, e privativos da Univerſidade; e veio a ceſſar o fim do Privilegio excluſivo, que para a impreſſaõ dos Livros Claſſicos Havia concedido pela outra Carta de Ley, e Doaçaõ perpetua feita ao dito Collegio em doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco; naquella parte, que he reſpectiva aos Livros Mathematicos: Hey por bem transferir para ra a ſobredita Univerſidade de Coimbra o meſmo Privilegio excluſivo para a impreſſaõ dos Livros de Euclides, Archimedes, e outros Claſſicos das Sciencias Mathematicas; aſſim, e da maneira que na ſobredita Doaçaõ Eu o havia concedido ao referido Collegio: Revogando, como Revogo, a eſte fim a meſma Doaçaõ naquella parte, que na generalidade della ſo he comprehenſiva das impreſſoens dos ditos Livros, ou de outros, que hajaõ de ſervir aos ſobreditos Eſtudos Mathematicos, e pelos quais ſe devaõ enſinar na meſma Univerſidade de Coimbra.

Pelo que: Mando ao Marquez de Pombal, do Meu Conſelho de Eſtado, e Meu Lugar-Tenente na Fundaçaõ da Univerſidade de Coimbra; á Real Meſa Cenſoria; Meſa do Deſembargo do Paço; Regedor da Caſa da Supplicaçaõ; Conſelhos da Minha Real Fazenda; e dos Meus Dominios Ultra-marinos; Meſa da Conſciencia, e Ordens; Governador da Relaçaõ, e Caſa do Porto; Senado da Camara, e bem aſſim a todos os Deſembargadores, Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Juſtiças, e mais Peſſoas deſtes Meus Reinos, e Dominios, a quem o conhecimento deſte Alvará deva pertencer, que o cumpraõ, e guardem, e façaõ cumprir, e guar-

dar-

dar sem duvida, ou embargo algum; qualquer que elle seja, naõ obstante a sobredita Carta, Ley, e Doaçaõ perpetua de doze de Outubro de mil setecentos sessenta e sinco, que tenho revogado ao sobredito fim na parte, que só respeita ás sobreditas impressoens; ficando para tudo o mais em seu vigor, e inteira validade. E este valerá como se passasse pela Chancellaria, posto que por ella naõ ha de passar; e o seu effeito haja de durar hum, e muitos annos; naõ obstantes as Ordenaçoens em contrario, as quais Hey por derogadas para este effeito sómente. Dado no Palacio de Nossa Senhora da Ajuda em deseseis de Dezembro de mil setecentos setenta e tres.

REY.

Marquez de Pombal.

ALvará, porque Vossa Magestade pelos motivos nelle expressos: He servido transferir para a Universidade de Coimbra o Privilegio exclusivo para as impressoens dos Livros Classicos dos Estudos Mathematicos; havendo cessado

cessado o fim, com que antes fora Concedido, e Doado ao Collegio Real de Nobres; na fórma assima declarada.

Para Vossa Magestade ver.

Joaõ Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

Cumpra-se, e registe-se. Nossa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

Marquez Visitador.

No Livro de Providencia Litteraria desta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino fica registado este Alvará. Nossa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

Joaõ Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá.

TABOA

TABOA

Das materias que se contêm neste Tratado.

HYDROSTATICA

CAPITULO I.

CAPITULO II.

Theo-

CAPITULO III.

HYDRAUe conseguintemente $N = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$ de hum pé cubico $= 493 \frac{5}{7}$ pollegadas cubicas.

148 Se aumentarmos, ou diminuirmos huma quantidade ao volume N mergulhado no fluido, será necessario para conservar o equilibrio, que ajuntemos ou tiremos ao pezo total do corpo hum pezo q de maneira, que tenhamos $PM \pm q = pN \pm pn$, ou $q = pn$. Donde se vê, que o pezo additivo, ou subtractivo deve ser igual ao pezo do volume n do fluido, que o corpo ha de deslocar de mais ou de menos, do que no primeiro estado.

149 Esta força, com que os fluidos sustém os corpos boyantes, he hum meio de grande utilidade para tirar grandes pezos do fundo dos rios, e do mar. Toma-se hum batel de grande volume, que se faz mergulhar, carregando-o quanto he possivel. Neste estado se prende fortemente ao pezo, que se quer levantar; e entaõ sendo descarregado, o esforço vertical do fluido o faz subir, e com elle o pezo pertendido, com huma força que no primeiro instante he igual ao pezo de que o batel houver sido descarregado.

150 Suppondo agora, que o corpo M he especificamente mais grave que o fluido, e sendo Q o pezo que he necessario applicar ao braço de huma balança para o sustentar, depois de ser inteiramente mergulhado no fluido; está claro, que restando-lhe entaõ o pezo $PM - pM$, devemos ter $Q = PM - pM$, ou $PM - Q = pM$, ou $P(PM - Q) = PpM$, donde se tira $P : p :: PM : PM - Q$. Logo *a gravidade especifica do corpo he para a do fluido, como o pezo absoluto do corpo para o pezo que perde dentro do fluido.*

Assim, conhecendo a gravidade especifica do corpo, he facil de conhecer a do fluido, e reciprocamente. Mas deve notar-se, que pezando hum corpo no ar contra outro mergulhado em hum fluido, o primeiro parece mais leve do que he na realidade, porque tambem perde no ar alguma parte do seu pezo. Esta he muito pequena, e ordinariamente se póde desprezar sem erro sensivel. Querendo porem toda a exacçaõ possivel, far-se-ha a operaçaõ tração no recipiente da maquina pneumatica, ou calcular-se-ha o pezo de hum volume de ar igual ao do corpo, e se ajuntará ao pezo observado do mesmo corpo.

151 Quando he dada a gravidade especifica do fluido, immediatamente se pode conhecer o volume do solido pela equação $pM = PM - Q$, que dá $M = \frac{PM - Q}{p}$. Se o pezo do corpo he, por exemplo, de 20 libr. e na agua de 10 libr. teremos $PM = 20$, $Q = 10$, e $M = \frac{20 - 10}{70}$ $= \frac{1}{7}$ de hum pé cubico. Conhecido o volume do corpo, e o seu pezo absoluto, facilmente se deduzirá a sua gravidade especifica, supondo sempre que he homogeneo, e que não tem cavidades interiores.

152 Se o mesmo solido M se mergulhar totalmente em outro fluido, que tenha a gravidade especifica p', e se para o sustentar for necessario o pezo Q', teremos as duas equações $Q = PM - pM$, $Q' = PM - p'M$, as quais dão $p(PM - Q') = p'(PM - Q)$, e conseguintemente $p : p' :: PM - Q : PM - Q'$. Logo *as gravidades especificas de dous fluidos são entre si, como os pezos que nelles perde hum mesmo corpo especificamente mais grave que qualquer delles.*

153 Se no mesmo fluido, cuja gravidade especifica he p, se mergulharem dous solidos que tenhão os volumes M, M', e as gravidades especificas P, P', e se inteiramente mergulhados conservarem os pezos Q, Q'; teremos $Q = PM - pM$, e $Q' = P'M' - pM'$. Donde se tira $M : M' :: PM - Q : P'M' - Q'$, isto he, *os volumes dos corpos são na razão dos pezos que perdem no mesmo fluido.*

154 Daqui se póde resolver o problema, que o Rey Hieron propoz a Archimedes, sobre a coroa de ouro, em que havia suspeitas de ter o Ourives metido huma quantidade de prata. Seja C o pezo absoluto da coroa, e K o pezo que perde na agua, x a quantidade de prata que contém, e conseguintemente $C - x$ a quantidade de ouro. Supponhamos que hum volume dado M de ouro perde na agua o pezo P, e que hum volume dado de prata m perde o pezo p; e acharemos que o volume

me de ouro $C-x$ deverá perder o pezo $\frac{P(C-x)}{M}$, e o volume de prata x o pezo $\frac{px}{m}$ (n. 153.). Logo teremos $\frac{P(C-x)}{M}+\frac{px}{m}=K$, e conseguintemente será

$$x=\frac{m(MK-PC)}{Mp-mP}.$$

155 Ainda que as analogias, que havemos mostrado (n. 150. e 152.), saõ os meios mais exactos para achar as gravidades especificas dos fluidos, com tudo na pratica se usa muitas vezes de hum instrumento, que chamaõ *areometro*, ou *péza-licor*, por ser a operaçaõ mais simples. A forma deste instrumento he arbitraria; com tanto que divida facilmente o fluido quando se mergulha nelle, e que se mantenha em huma situaçaõ vertical. O de Fahrenheit tem estas propriedades.

He este composto de hum tubo cylindrico comprido CD (Fig. 49.), e de duas bolas ocas A, B; na mais baixa e mais pequena B se lança mercurio, ou qualquer materia pezada, que sirva de *lastro* ao instrumento, e lhe dê estabilidade; e a outra maior A, sempre metida no fluido, serve de levantar o centro de gravidade da parte do areometro mergulhada no fluido, e desse modo lhe augmenta a estabilidade. Este instrumento póde mostrar as gravidades especificas dos fluidos, ou fazendo-o sempre mergulhar a huma mesma profundidade, por meio de pezos com que se carréga; ou conservando-o sempre com o mesmo pezo, e deixando-o mergulhar livremente a differentes profundidades. Examinemos brevemente ambos os casos.

Supponhamos, que o areometro se mergulha até o ponto M em dous fluidos differentes. Sejaõ P, e $P\pm q$ os pezos absolutos que para isso deve ter, p e p' as gravidades especificas dos fluidos, e M o volume da parte constante do areometro $MABN$; e teremos $P=pM$, e $P\pm q=p'M$ (n. 145.). Logo $p'=\frac{p(P\pm q)}{P}$.

Querendo porém que o areometro conserve sempre o mesmo pezo, sejaõ K e M os pontos até onde elle se mergu-

mergulha, e reprefentando o feu pezo conftante por P, os volumes $KABH$ e $MABN$ por M e M', e as gravidades efpecificas dos fluidos por p e p'; teremos $P = pM$, e $P = p'M'$. Logo $p' = \frac{pM}{M'}$.

Sendo o areometro de huma figura regular, e conhecida, podem determinar-fe os volumes M e M' pelas regras da Geometria; mas a forma do inftrumento naõ permitte ufar-fe defte meio com exactidaõ. O melhor he graduallo experimentalmente, mettendo-o com differentes pezos confecutivos em hum fluido de gravidade efpecifica conhecida, e determinando affim os volumes correfpondentes, que elle mergulha no fluido (n. 147.).

Agora paffemos ao exame particular da fituaçaõ, que deve tomar huma figura boyante fobre hum fluido, para fatisfazer ás condições do equilibrio; objecto util em muitas occafiões, e fobre tudo na Architectura naval.

156 Probl. I. *Achar a fituaçaõ de equilibrio de hum triangulo homogeneo ESG fobre o fluido MN, fuppondo que naõ tem mais que hum angulo* S *mergulhado nelle* (Fig. 50.).

Tirem-fe as rectas SP, SQ do angulo S para os pontos P e Q no meio das bafes EG, MN dos dous triangulos ESG, MSN, e nellas tomem-fe as partes $SR = \frac{2}{3}SP$, e $SO = \frac{2}{3}SQ$, que determinaõ os centros de gravidade dos dous triangulos. Conduzaõ-fe as rectas RO, PQ, que feraõ parallelas entre fi, e perpendiculares a MN, porque RO deve fer vertical. Do ponto P tiremfe PA, PD perpendiculares aos lados SE, SG produzidos fe for neceffario, e conduzaõ-fe as rectas PM, PN que feraõ iguais, por fer $QM = QN$, e PQ perpendicular a MN.

Ifto pofto, feja $SE = a$, $SG = b$, $SP = c$, o angulo $PSE = m$, $PSG = n$, $SM = x$, $SN = y$, a gravidade efpecifica do triangulo $= p$, e a do fluido $= p'$. Porque os dous triangulos ESG, MSN, que tem o angulo commum S, faõ entre fi como os productos $SE \times SG$, $SM \times SN$, pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $pab = p'xy$.

E

E porque os triangulos rectangulos PAS, PDS daõ $PA = c\,ſen\,m$, $SA = c\,coſ\,m$, $PD = c\,ſen\,n$, $SD = c\,coſ\,n$, e por conſeguinte $AM = c\,coſ\,m - x$, $DN = c\,coſ\,n - y$, teremos $PM^2 = (c\,ſen\,m)^2 + (c\,coſ\,m - x)^2$, e $PN^2 = (c\,ſen\,n)^2 + (c\,coſ\,n - y)^2$. Logo pela ſegunda condiçaõ do equilibrio teremos $(c\,ſen\,m)^2 + (c\,coſ\,m - x)^2 = (c\,ſen\,n)^2 + (c\,coſ\,n - y)^2$, ou $xx - 2cx\,coſ\,m = yy - 2cy\,coſ\,n$. E ſubſtituindo o valor de $y = \frac{pab}{p'x}$, reſultará a equaçaõ

4.

$$x^4 - 2cx^3\,coſ\,m + \frac{2cpabx\,coſ\,n}{p'} - \frac{p^2a^2b^2}{p'^2} = 0,$$

cujas raizes combinadas com a equaçaõ $y = \frac{pab}{p'x}$ daráõ a conhecer as differentes poſições do triangulo, que admittem equilibrio.

157 Pela regra de Deſcartes ſe ſabe, que em huma equaçaõ, cujas raizes ſaõ reais, ha tantas poſitivas quantas ſaõ as mudanças dos ſinais + e −, e tantas negativas quantas vezes ſe achaõ conſecutivos dous ſinais +, ou dous ſinais −. Por quanto pois falta na noſſa equaçaõ o termo que deveria ter x^2, he facil de ver que ſe todas as ſuas raizes ſaõ reais, deveráõ ſer neceſſariamente tres poſitivas, e huma negativa. A negativa naõ póde ſervir, porque naõ ſuppomos que MS ſeja produzida alem do ponto S. As poſitivas moſtraõ tres poſições reais de equilibrio, com tanto que ſeja $x < a$, e $y < b$.

158 Para darmos huma applicaçaõ mais ſimples da noſſa equaçaõ geral, ſupponhamos que he iſoſceles o triangulo ESG. Neſte caſo temos $a = b$, $n = m$, e a equaçaõ ſerá

$$x^4 - 2cx^3\,coſ\,m + \frac{2cpa^2x\,coſ\,m}{p'} - \frac{p^2a^4}{p'^2} = 0,$$

a qual ſe reſolve em duas do ſegundo gráo

$$x^2 - \frac{a^2p}{p'} = 0,$$

$$x^2 - 2cx\,coſ\,m + \frac{a^2p}{p'} = 0.$$

A primeira destas dá $x = \pm a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, ou simplesmente $x = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, porque a raiz negativa he inutil. E porque temos neste caso $y = \frac{pa^2}{p'x}$, será tambem $y = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$; logo $y = x$, e conseguintemente he tambem isosceles o triangulo MSN, ou (que vem a ser o mesmo) a base do triangulo proposto he parallela á superficie do fluido em huma das situações de equilibrio.

A segunda dá $x = c\cos m \pm \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$, e substituindo este valor na equaçaõ $y = \frac{pa^2}{p'x}$, teremos

$$y = \frac{pa^2}{p'\left(c\cos m \pm \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}\right)} =$$

$c\cos m \mp \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$; e este segundo caso dará as duas combinações seguintes

$$\begin{cases} x = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \\ y = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \\ y = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}, \end{cases}$$

as quais mostraõ duas situações novas de equilibrio, quando os valores de x e y saõ reais, e cada hum delles menor que a. Para que estas duas condições tenhaõ lugar, he necessario 1°, que seja $\frac{a^2 p}{p'} < (c\cos m)^2$, ou $\frac{p}{p'} <$

$\frac{(c\cos m)^2}{a^2}$. 2°, que ſeja $a > c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$, ou $\frac{p}{p'} > \frac{2ac\cos m - aa}{aa}$.

Se o triangulo propoſto for por exemplo equilateral, teremos $c\cos m = \frac{3}{4} a$; e o triangulo, além da ſituaçaõ de equilibrio indicada pela primeira equaçaõ, poderá ter outras duas, com tanto que ſeja $\frac{p}{p'} < \frac{9}{16}$, e $\frac{p}{p'} > \frac{8}{16}$, iſto he, com tanto que o valor de $\frac{p}{p'}$ ſeja comprehendido entre os limites das fracções $\frac{9}{16}$ e $\frac{8}{16}$.

159 PROBL. II. *Achar a ſituaçaõ de equilibrio de hum triangulo homogeneo SEG ſobre o fluido MN, ſuppondo que os dous angulos E, G eſtaõ metidos nelle* (Fig. 51.).

A ſoluçaõ do problema precedente póde accommodarſe a eſte, imaginando a Fig. 50 virada de baixo para cima; mas para maior clareza, daremos a ſoluçaõ directamente. Para iſſo advertiremos, que os tres centros de gravidade do triangulo *SEG*, do trapezio *MNGE*, e do triangulo *SMN* eſtaõ ſempre na meſma linha recta: mas para haver equilibrio he neceſſario que o centro de gravidade do triangulo *SEG* e o da parte mergulhada *MNGE* eſtejaõ em huma meſma vertical; logo os centros de gravidade dos dous triangulos *SEG*, *SMN* eſtaráõ tambem na meſma vertical.

Feita pois a conſtrucçaõ, como no Problema antecedente, igualmente teremos $PM = PN$, e fazendo $SE = a$, $SG = b$, $SP = c$, $PSE = m$, $PSG = n$, $SM = x$, $SN = y$, a gravidade eſpecifica do triangulo $= p$, e a do fluido $= p'$; teremos $SEG : SMN : SE \times SG : SM \times SN$, e conſeguintemente $SEG - SMN$, ou $EMNG : SEG :: SE \times SG - SM \times SN : SE \times SG$; donde ſe tira $EMNG$

$$= \frac{SEG(SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG} = \frac{SEG(ab - xy)}{ab}.$$

Logo, pela primeira condiçaõ do equilibrio, teremos $pab = p'(ab - xy)$.

Pela

Pela segunda, acharemos justamente como no problema antecedente $xx - 2cx\cos m = yy - 2cy\cos n$; e eliminando y por meio da equaçaõ precedente, teremos finalmente

$$x^4 - 2cx^3\cos m + \frac{2c(p'-p)abx\cos n}{p'} - \frac{(p'-p)^2 a^2 b^2}{p'^2} = 0,$$

sobre cujas raizes faremos as mesmas reflexões; e combinando-as com a equaçaõ $pab = p'(ab - xy)$, determinaremos as differentes situações, em que he possivel o equilibrio.

160 Se o triangulo for isosceles, a equaçaõ precedente se resolverá em duas do segundo gráo, a saber

$$x^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p} = 0$$

$$x^2 - 2cx\cos m + \frac{a^2(p'-p)}{p'} = 0,$$

a primeira das quais dá $x = a\sqrt{\frac{p'-p}{p'}}$, e $y = a\sqrt{\frac{p'-p}{p'}}$; mostrando que o triangulo tem huma situaçaõ de equilibrio, quando a base EG está horizontal. E a segunda dá estas duas combinações

$$\begin{cases} x = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \end{cases},$$

as quais representaõ outras duas posições de equilibrio, com tanto que seja $\frac{p}{p'} > \frac{a^2 - (c\cos m)^2}{a^2}$, e $\frac{p}{p'} < \frac{2a^2 - 2ac\cos m}{a^2}$. Por exemplo, se o triangulo for equilatero, e conseguintemente $c\cos m = \frac{3}{4}a$; haverá tres situações de equili-

 brio,

brio, todas as vezes que o valor de $\frac{p}{p'}$ se achar entre os limites de $\frac{7}{16}$ e $\frac{8}{16}$.

161 PROBL. III. *Achar a situaçaõ de equilibrio de hum rectangulo homogeneo BHSK, supponde que naõ tem mais que hum angulo S mergulhado no fluido* (Fig. 52.).

Conduzindo do ponto S para o meio de MN a recta SQ, e tomando $SO = \frac{2}{3} SQ$, será O o centro de gravidade do triangulo MSN. E porque o centro de gravidade do rectangulo está na intersecçaõ R das diagonais BS, HK, a recta RO deverá ser vertical, ou perpendicular a MN. Tome-se $RP = \frac{1}{2} SR$, e conduza-se PQ que será parallela a RO, e conseguintemente perpendicular ao meio de MN, donde se segue que saõ iguais as rectas PM, PN. Em fim do ponto P tirem-se as rectas PA, PD perpendiculares a SH, SK respectivamente.

Isto posto, seja $SH = a$, $SK = b$, $SM = x$, $SN = y$, o pezo especifico do rectangulo $= p$, o do fluido $= p'$; e pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $pab = \frac{p'xy}{2}$.

E porque $SP = \frac{3}{4} SB$, teremos $PA = \frac{3}{4} b$, $SA = \frac{3}{4} a$, $PD = \frac{3}{4} a$, $SD = \frac{3}{4} b$, $PM^2 = \frac{9b^2}{16} + \left(\frac{3}{4} a - x\right)^2$, e $PN^2 = \frac{9a^2}{16} + \left(\frac{3}{4} b - y\right)^2$. Logo, pela segunda condiçaõ do equilibrio, teremos $xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}$. Comparando esta equaçaõ com a precedente, e eliminando y, acharemos finalmente a equaçaõ

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pab^2x}{p'} - \frac{4p^2a^2b^2}{p'^2} = 0,$$

por meio da qual se determinaráõ as differentes situa-

çoes

tura $E = N$. Assim, sendo TQ a altura proporcional á resistencia, que cada ponto da agua em N encontra na agua inferior, o fluxo em N se fará do mesmo modo que no vaso QG por huma abertura $H = N$. Do mesmo modo se vê, que em P correrá da mesma maneira que no vaso SK por hum orificio $L = P$, sendo a altura $SH = VQ$.

Isto posto, fazendo $AI = b$, $DF = x$, $GH = y$, $KL = z$, a quantidade de agua que no tempo t passa por cada hum dos orificios $= Q$, teremos $Q = 2tM\sqrt{ax} = 2tN\sqrt{ay} = 2tP\sqrt{az}$, e $x + y + z = b$. Donde se tira, como no Problema I,

$$x = \frac{N^2 P^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$y = \frac{M^2 P^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$z = \frac{M^2 N^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$Q = \frac{2tP . MN . \sqrt{ab}}{\sqrt{(M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2)}};$$

e do mesmo modo se procederia, havendo mais diaphragmas.

260 Quando a ultima abertura P he muito pequena em comparaçaõ das outras, teremos sensivelmente $x = \frac{P^2 . b}{M^2}$, $y = \frac{P^2 . b}{N^2}$, $z = b$, $Q = 2tP\sqrt{ab}$. Donde se vé, que o desaguamento em P he como se naõ houvesse diaphragmas; e assim deve ser, porque a figura do vaso he indifferente, quando a abertura por onde sahe o fluido he infinitamente pequena a respeito de todas as amplitudes horizontais do mesmo vaso.

261 Pelo contrario, se as aberturas M, N forem muito pequenas em comparaçaõ de P, teremos sensivelmente $z = \frac{M^2 N^2 . b}{M^2 P^2 + N^2 P^2}$, $Q = \frac{2tMN\sqrt{ab}}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$; e conseguintemente a velocidade, e producto do orificio seraõ muito menores. Donde se vê, quanto saõ prejudiciais á altura, e pro-

producto das fontes de repuxo os obstaculos, que frequentemente se formaõ nos canos; e quanto he necessario na construcçaõ das bombas aumentar os diametros das valvulas, quanto for possivel, a respeito dos orificios por onde ellas devem desaguar.

262 Se os tres orificios forem iguais, teremos $x = y = z = \frac{1}{3} b$, e $Q = \frac{2 t P \sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$. Donde se vê, que o producto do orificio P será para o que daria naõ havendo diaphragmas como 1 para $\sqrt{3}$. Em geral, sendo dados os orificios M, N póde o terceiro P fazer-se tal, que o producto delle seja para o que daria naõ havendo diaphragmas como 1 para qualquer numero n. Para satisfazer a esta condiçaõ, teremos $\frac{n \cdot MN}{\sqrt{(M^2 N^2 + M^2 P^2 + N^2 P^2)}} = 1$; donde se tira $P = \frac{MN\sqrt{(nn-1)}}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$; e quando as aberturas M, N saõ iguais, $P = M\sqrt{\frac{nn-1}{2}}$.

Estas, e muitas outras applicaçoens, que facilmente se podem fazer, igualmente convem ás formulas do Prroblema I.

263 He de advertir, que a soluçaõ naõ terá lugar, quando o fluido naõ formar huma massa continua no interior do vaso. E posto que a pressaõ do ar que obra de baixo para cima em P, e de cima para baixo na superficie AD, se oppoem á cessaçaõ de continuidade; póde com tudo succeder que esta se effeitue em certos casos. Por exemplo: Se a abertura P, ainda que pequena, for muito maior que as outras duas, póde succeder que sendo consideravel a altura ZI do repartimento inferior, a pressaõ que delle resulta sobre o orificio P seja maior do que convinha, para que a agua que passa por N em virtude da pressaõ da agua superior, e da adherencia com a inferior que procura arrastalla comsigo, possa supprir a que sahe por P. Nesse caso formar-se-ha hum vazio $XYTZ$, que se irá enchendo do ar que traz comsigo a agua que cahe do orificio N; e o fluido sahirá por P, como se o vaso $IXYV$ fosse independente, e entretido constantemente cheio na altura IX. O mesmo póde succeder nos repartimentos superiores.

264

264 PROBL. IV. *Passando o licor do vaso AC, cheio constantemente até AB, pelo orificio M para o vaso lateral CG, donde sómente póde sahir por duas pequenas aberturas N, P; achar as velocidades em M, N, P, e as quantidades de fluido que por estas aberturas passaõ em hum tempo dado* (Fig. 83.).

Supponhamos que o licor em M encontra da parte da agua do vaso CG huma reacçaõ representada por MH: e facilmente veremos, que conduzindo as horizontais NV, HK, seraõ as velocidades em M, N, P devidas ás alturas DH, HV, HC. Assim fazendo $DC = b$, $DV = b$, $DH = x$, e representando por Q, Q', Q'' as quantidades de agua que no tempo t passaõ por M, N, P, teremos $Q = 2tM\sqrt{ax}$, $Q' = 2tN\sqrt{[a(b-x)]}$, $Q'' = 2tP\sqrt{[a(b-x)]}$, e $Q' + Q'' = Q$. Estas equaçoens daõ

$$M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(b-x)},$$

que se reduz a huma equaçaõ do segundo gráo, da qual se tirará o valor de x; e conhecendo x, acharemos os valores de HV, HC, Q, Q', Q''.

265 As alturas HV, HC devidas ás velocidades em N, P saõ evidentemente as das columnas, que comprimiriaõ perpendicularmente as paredes do vaso CG nos mesmos lugares, se os orificios N, P subitamente se tapassem. Assim, quando sahe o licor por N, P, será a pressaõ de huma parte X tomada em hum lugar dado representada por $X . HC$. Por exemplo: Supponhamos P infinitamente pequeno, ou $P = 0$; e a equaçaõ geral $M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(b-x)}$ se reduzirá a $M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)}$, e dará $x = \frac{N^2 b}{M^2 + N^2}$. Por conseguinte teremos $CH = b - x = \frac{M^2 b + N^2(b-b)}{M^2 + N^2}$, e a pressaõ de $X = \frac{X[M^2 b + N^2(b-b)]}{M^2 + N^2}$.

Do mesmo modo se determinará a pressaõ em qualquer outro lugar do mesmo vaso CG, e do outro BD: bem entendido, que esta determinaçaõ suppoem que as aberturas M, N, P saõ muito pequenas, e que as aguas estaõ como estagnantes em ambos os vasos. Quando as abertu-

ras

ras forem consideraveis, usaremos do Problema seguinte.

266 PROBL. V. *Determinar a pressaõ, que hum licor exercita contra as paredes de hum vaso, quando corre pelo interior delle* (Fig. 73.).

Suppondo a hypothese, a construcçaõ, e as denominações do nº 236, a velocidade com que cada camada deveria tender a mover-se, para haver equilibrio, he $g\,dt - dv$, e conseguintemente a força correspondente $g - \frac{dv}{dt}$. Donde se vê, que as camadas se comprimem com as forças $g - \frac{dv}{dt}$ do mesmo modo que as camadas de hum fluido em quietaçaõ se comprimem em virtude da gravidade. Logo na profundidade $EH = x$, a pressaõ de cada hum dos pontos da camada $TVut$ he representada por $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$; e esta força he a que se communica perpendicularmente aos elementos das paredes Tt, Vu. Porém $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g \cdot EH - \int \frac{dx\,dv}{dt}$; e substituindo por dv o seu valor $\frac{K(y\,du - u\,dy)}{yy}$, temos $\int \frac{dx\,dv}{dt} = \frac{K\,du}{dt}\int \frac{dx}{y} - \frac{Ku\,y\,dx}{dt}\int \frac{dy}{y^3}$; expressaõ, na qual a area representada por $\int \frac{dx}{y}$ que chamaremos Q, deve ser a que corresponde a EH, e $\int \frac{dy}{y^3}$ deve desvanecer quando $y = AB$, e tomar o seu valor completo quando $y = TV = H$. Logo, metendo por $y\,dx$ o seu valor $M \cdot Ee$, acharemos para a profundidade EH o valor da pressaõ $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g \cdot EH - \frac{KQ\,du}{dt} - \frac{Ku \cdot Ee \cdot (H^2 - M^2)}{2\,dt \cdot H^2 M^2}$, no qual se substituiráõ os valores de u e dt em cada caso.

267 Se

267 Se o valor da pressaõ em qualquer lugar do vaso sahir negativo, he final de que o fluido cessará de ser continuo, e se dividirá em partes. Eisaqui huma experiencia de M. Daniel Bernoulli, que o mostra aos olhos (Fig. 84.).

No fundo de hum vaso cylindrico *A F* está applicado hum tubo conico *D H*, guarnecido de hum pequeno tubo lateral *l*, no qual encaixa a extremidade de hum canudo curvo *l m n*, que tem a outra extremidade mergulhada no vaso de agua *M*. He *C A* de 46 linhas, *E l* de 4, *l H* de 33 e meia, *l m n* de 66, e a secçaõ do tubo conico em *l* he para o orificio *G H* como 10 para 16. Tapando o orificio *G H*, e enchendo constantemente de agua o vaso *A F*, esta corre pelo canudo *l m n* para o vaso *M*. Entaõ destapando *G H*, a agua do vaso *M* sobe pelo canudo *n m l*, e vem desaguar por *G H*, até elle se esgotar; e se abrirmos somente huma parte do orificio *G H*, poderemos fazer que a agua suba ou desça por *n m l* a nosso arbitrio. Quando ella sobe, he porque a pressaõ no tubo conico em *l* se faz negativa, e conseguintemente a pressaõ da atmosfera sobre a superficie do vaso obriga a agua delle a subir. A mesma pressaõ embaraça neste caso a separaçaõ das partes do fluido.

268. Pelos mesmos principios se póde determinar a força necessaria para sustentar hum vaso, que lança agua por qualquer orificio *p q* (Fig. 73.). Porque esta força he igual á soma dos productos de cada camada multiplicada pela força, em virtude da qual estaria em equilibrio, pela mesma rasaõ que a força necessaria para sustentar hum fluido grave em quietaçaõ he igual á soma dos productos de cada camada multiplicada pela gravidade. Logo a força procurada será representada por $\int y\,dx\left(g-\frac{dv}{dt}\right)=$ $\int gy\,dx-\int\frac{y\,dx\,dv}{dt}$. A primeira parte he o pezo do mesmo fluido, e a segunda se acha sem difficuldade pelo que temos dito.

269 Probl. VI. *Sendo o vaso A D constantemente cheio de agua até A B, e movido verticalmente por meio do pezo R applicado a huma corda naõ pezada, que passa pelas roldanas fixas M, N; determinar a pressaõ que o fluido exerci-*

ta

ta sobre fundo , e conseguintemente a quantidade que desaguará pelo pequeno orificio p q (Fig. 85.).

Seja P a massa total do vaso e do fluido , e G o seu centro de gravidade ; e supponhamos , que havendo de correr os corpos R, P em hum instante os espaços iguaes Rt, Gx em virtude da gravidade , pela acçaõ reciproca que tem entre si descrevem os espaços tambem iguaes Rr, Gy. Assim consta da Mechanica , que fazendo a gravidade natural $Rt = g$, e $Gy = p$, teremos $R(g-p) = P(g+p)$; donde se tira $p = \frac{g(R-P)}{R+P}$, e os dous corpos se moveráõ com movimento uniformemente accelerado. E porque a força, que obra sobre cada particula da massa P de baixo para cima, he $g+p = \frac{2gR}{R+P}$; está claro, que imprimindo-se hum movimento igual e contrario no systema de todas as particulas , deveria ficar em equilibrio. Neste caso pois, em virtude da força $\frac{2gR}{R+P}$ que obra verticalmente de cima para baixo sobre cada particula do fluido , deve resultar em cada ponto do fundo CD huma pressaõ que he para a pressaõ que experimentaria , se o fluido fosse unicamente sujeito á acçaõ da gravidade , como $\frac{2gR}{R+P}$ para g, ou como $2R$ para $R+P$. Mas a pressaõ sobre a area pq em virtude da gravidade he $p'.pq.bq$, sendo p' o pezo especifico do fluido. Logo na hypothese do nosso problema será a pressaõ da mesma area $= p'.pq.bq.\frac{2R}{R+P}$; e sahindo o fluido por pq, a sua velocidade será devida á altura $\frac{2R.bq}{R+P}$. Assim , para determinar a quantidade de fluido que deve sahir no tempo t, naõ he necessario mais que usar da formula do nº 233 , na qual substituiremos $\frac{2R'.b}{R+P}$ em lugar de de b, conſervando as mais denominações; e teremos $Q = 2tK\sqrt{\frac{2abR}{R+P}}$.

270 Pela equaçaõ $p = \frac{g(R-P)}{R+P}$ ſe vê 1°, que ſendo $R = P$, teremos $p = 0$, $\frac{2R}{R+P} = 1$. Entaõ o vaſo eſtará em quietaçaõ, e deſaguará como no nº 233. O meſmo ſuccederia, ſe o vaſo ſe moveſſe verticalmente com movimento uniforme.

2°, Sendo $R = 0$, teremos $\frac{2R}{R+P} = 0$. Neſte caſo deſvanece a preſſaõ, e o fluido naõ ſahirá por pq, como he por outra parte evidente; porque entaõ todos os pontos do fluido deſceráõ em virtude da gravidade natural com a meſma velocidade.

3°, Sendo P infinitamente pequeno em comparaçaõ de R, teremos $\frac{2R}{P+R} = 2$, e $Q = 2tK\sqrt{2ab}$, ſendo neſte caſo o producto do orificio para o que daria, ſe eſtiveſſe em quietaçaõ, como $\sqrt{2}$ para 1.

4°, Sendo $P > R$, o pezo P deſcerá, e R ſubirá. Neſte caſo, para determinar o movimento deve tomar-ſe p negativo. Mas a velocidade em pq ſerá, como no primeiro, devida á altura $\frac{2R.bq}{R+P}$, e a quantidade de agua que ſahe pelo orificio ſerá ſempre determinada pela equaçaõ $Q = 2tK\sqrt{\frac{2abR}{R+P}}$.

271 Probl. VII. *Suppondo que o vaſo AC (Fig. 86.) ſe move pelo plano horizontal DQ em virtude da acçaõ do pezo R: achar a preſſaõ que o fluido nelle incluido exercita em qualquer elemento da parede T t, e a velocidade com que ſabiria por elle.*

Seja P a ſoma das maſſas do vaſo e do fluido, $Rt = g$ o eſpaço que R andaria livremente em hum inſtante, $Rr = Cc = p$ o eſpaço que andaõ effectivamente os dous corpos P, R; e teremos $R(g-p) = Pp$, ou p =

$= \frac{gR}{R+P}$. Logo cada particula do fluido he sollicitada na direcçaõ DQ por huma força $\frac{gR}{R+P}$; e por conseguinte, se huma força igual e contraria se imprimisse no systema, ficaria este em quietaçaõ. Neste ultimo caso, cada particula he sujeita á acçaõ de duas forças, huma vertical g, e a outra horizontal $\frac{gR}{R+P}$, cuja resultante he $g . \frac{\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}}{R+P}$. Assim, para haver equilibrio, he necessario que a superficie do fluido seja perpendicular a esta resultante (n. 32.); e porque ella he sempre constante em quantidade e direcçaõ, a superficie do fluido será hum plano inclinado OM tal, que conduzindo a horizontal OE para avertical ME, tenhamos $\frac{OM}{OE} = \frac{\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}}{R+P}$.

Isto posto, se de qualquer ponto T das paredes do vaso se tirar TZ perpendicular a OM, está claro que a pressaõ do elemento Tt será para a que elle experimentaria na profundidade TZ em hum vaso posto em quietaçaõ, como $\frac{g\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}}{R+P}$ he para g, ou como $\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}$ para $R + P$. Logo será a pressaõ no nosso caso $= Tt . TZ . \frac{\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}}{R+P}$; e conhecida esta, facil he determinar a altura devida a velocidade com que o fluido sahiria pelo orificio Tt, e a quantidade que deitaria em hum tempo dado, supposto que por huma affusaõ lateral se conservava sempre com huma quantidade constante de fluido.

Se o movimento do pezo R cessar, ou se vier a ser uniforme, a superficie do fluido naõ continuará na posiçaõ inclinada, mas por-se-ha horizontal. Porque entaõ temos $p = 0$, e as particulas naõ seraõ sollicitadas, senaõ pela força unica da propria gravidade.

272 Probl. VIII. *Determinar o effeito da fricçaõ no producto da agua, que daõ quaisquer vasos constantemente cheios por quaisquer orificios pequenos.*

Seja o orificio circular e horizontal $ABDE$ (Fig. 87.); e este supponha-se dividido em huma infinidade de circumferencias concentricas $abde$, $mnop$ &c. He evidente, que pela adherencia que tem as particulas humas com as outras, a fricçaõ em $ABDE$ se deve fazer sentir em todas as particulas que sahem ao mesmo tempo. Assim, construindo sobre AC como eixo huma curva $NgqK$, cujas ordenadas AN, ag, mq, CK representem as velocidades em A, a, m, C, a area della representará a soma das velocidades, e será proporcional ao producto effectivo do orificio.

Fazendo pois $CA = r$, $Cm = x$, a altura devida á velocidade $mq = X$, a quantidade de licor que no tempo t dá o orificio $= Q$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, a rasaõ da circumferencia ao diametro $= c$; teremos evidentemente (n. 233.) a equaçaõ $Q = 2t\sqrt{a}.\int 2cx\,dx\sqrt{X}$, integral que deve tomar-se entre os limites $x = 0$, $x = r$.

273 Supponhamos, por exemplo, que $NgqK$ he huma linha recta (o que naõ póde estar longe da verdade, sendo o orificio muito pequeno); e seja H a altura devida á velocidade central CK, e b devida á lateral AN. Conduzindo NR parallela a AC, os dous triangulos semelhantes NRK, e Nfq daraõ $fq = \frac{Nf.RK}{NR} = \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{r}$, e $mq = \sqrt{X} = \sqrt{b} + \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{r} = \frac{x\sqrt{b}+(r-x)\sqrt{H}}{r}$. Logo

$$\int x\,dx\sqrt{X} = \int\left(\frac{x^2dx\sqrt{b}+(rx\,dx-x^2dx)\sqrt{H}}{r}\right) = \frac{x^3(\sqrt{b}-\sqrt{H})}{3r} + \frac{x^2\sqrt{H}}{2}$$; e fazendo $x = r$, teremos finalmente

$$Q = \frac{2tcr^2(\sqrt{aH}+2\sqrt{ab})}{3}.$$

274 Para

Comprimentos do conductor	Productos do orificio lateral debaixo da altura de 1 pé	Productos do mesmo orificio debaixo da altura de 2 pés
Pés	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
30	171	240
60	186	256
90	190	261
120	191	264
150	193	265
180	194	266

Observámos tambem, que tapando a extremidade do conductor debaixo da altura de 1 pé sahiaõ pelo orificio lateral 196 pollegadas cubicas de agua; e debaixo da altura de 2 pés, 274.

411 Agora, em virtude da supposiçaõ precedente (n. 409.), representando d o diametro pelo qual a agua se julga sahir na extremidade do tubo, e D o diametro verdadeiro do mesmo tubo, corregido somente em quanto á contracçaõ ordinaria da veia; está claro, que será o producto na extremidade do tubo alterado pela fricçaõ para o que teria lugar naõ havendo fricçaõ, como d^2 para D^2. Assim, pelo que acima temos visto (n. 377. 378.), na origem do tubo quando a reserva está em hum pé de altura, será $\frac{d^2}{D^2} = 1$, ou $d = D$, a 30 pés da reserva $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2778}{6330}$, a 60 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1957}{6330}$, a 90 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1587}{6330}$; a 120 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1351}{6330}$, a 150 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1178}{6330}$, e a 180 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1052}{6330}$. Do mesmo modo, quando a reserva está em 2 pés de altura, será na origem do tubo $\frac{d^2}{D^2} =$ 1,

1, ou $d = D$, a 30 pés de comprimento $\frac{d^2}{D^2} = \frac{4066}{8939}$, a 60 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2888}{8939}$, a 90 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2352}{8939}$, a 120 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2011}{8939}$, a 150 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1762}{8939}$, e a 180 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1583}{8939}$.

412 Isto posto, na formula $q = \frac{Q}{D^2} \sqrt{(D^4 - d^4)}$ (n. 405.), ou $q = Q\sqrt{\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}$, quando a altura da reserva he de 1 pé temos $Q = 196$; e quando a altura he de 2 pés, $Q = 274$. Substituindo pois os valores de $\frac{d^2}{D^2}$ que acabamos de determinar em ambos os casos, acharemos os productos do orificio lateral, como se mostraõ na Taboa seguinte, os quais saõ taõ concordes com os observados, que naõ he possivel esperar mais exactidaõ em semelhantes indagações.

Comprimentos do conductor	Productos do orificio lateral debaixo de 1 pé de altura	Productos do mesmo orifico debaixo de 2 pés de altura
Pés	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
30	176	244
60	186	259
90	190	264
120	191	267
150	192	268
180	193	269

413 Daqui se segue hum meio simples de determinar o producto de hum tubo longo horizontal pelo producto de hum orificio lateral. Seja x a rasaõ entre o producto effectivo do tubo e o que daria naõ havendo fricçaõ; isto he, $x = \frac{d^2}{D^2}$; e a formula $q = Q\sqrt{\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}$ se reduzirá

zirá a $q = Q\sqrt{(1 - xx)}$, donde ſe tira $x = \sqrt{(1 - \frac{q^2}{Q^2})}$.

Supponhamos, por exemplo, que o conductor tem 2 pollegadas de diametro, e que a reſerva tem 3 pés de altura acima do eixo delle; que em qualquer ponto das paredes do meſmo tubo ſe abrio hum orificio lateral de 6 linhas de diametro, e que eſte dá 1000 pollegadas cubicas de agua por minuto, correndo a agua pelo conductor. Se a extremidade do conductor eſtiveſſe tapada, acharemos, que o meſmo orificio lateral deveria produzir 1178 pollegadas cubicas em hum minuto (n. 302.). Aſſim temos $Q = 1178$, $q = 1000$; e conſeguintemente ſerá $x = 0,5289$. Porém o conductor deveria dar pela ſua extremidade, ſe naõ foſſe a fricçaõ, 24504 pollegadas cubicas por minuto (n. 301. 302.). Logo ſerá o producto effectivo $= 24504 \times 0,5289 = 12952$ pollegadas cubicas.

Tudo iſto he applicavel aos tubos inclinados rectilineos, ou curvilineos, quando ſe póde julgar que a fricçaõ diminue conſideravelmente o orificio da ſahida. Mas he neceſſario advertir, que o orificio lateral deve abrir-ſe bem perpendicularmente á parede do tubo; porque naõ ſendo aſſim, o producto delle naõ ſeria ſómente effeito da preſſaõ do fluido contra as paredes do tubo, mas tambem do movimento do meſmo fluido ao longo do conductor, como he facil de entender reparando na abertura lateral *M* do conductor *AMB* (Fig. 122.).

CAPITULO V.

Do movimento das aguas conduzidas por quaiſquer canais.

414 Os canais, de que agora tratamos, ſaõ abertos pela parte ſuperior, e daõ á ſuperficie da agua a liberdade de ſe levantar, ou abaixar dentro delles. Em virtude deſta liberdade póde o fluido tirar do ſeu proprio pezo huma velocidade, que ſe combina com a que lhe reſta do impulſo inicial; e a fricçaõ naõ póde ſeguir exactamente as meſmas leis, que nos tubos conductores, em que a agua he comprimida de todos

os lados. Muito he o que se tem escrito sobre esta materia, na qual primeiro exporemos as nossas indagações, e depois referiremos os meios principais, que diversos Autores tem proposto, para medir a velocidade das aguas correntes.

Experiencias, e reflexões sobre a velocidade da agua em canais rectangulares.

415 QUando hum fluido passa de huma reserva para hum canal por huma abertura que naõ he muito grande, cada molecula tende a mover-se ao primeiro instante com a velocidade devida á altura da reserva; e se fosse hum corpo solitario e livremente movel pelo canal, conservaria esta velocidade inicial ao longo delle, e além disso adquiriria outra pela acçaõ da gravidade, no caso de ser o canal inclinado. Mas a cada instante sahe pela abertura huma massa de moleculas, que obraõ humas contra as outras, e alteraõ os seus movimentos reciprocos. A veia he sujeita á contracçaõ, á fricçaõ, e á resistencia do ar. Todas estas causas influem sobre a velocidade, a qual he difficil de se determinar exactamente, quando o canal he de figura irregular, como abaixo se verá.

416 Para chegarmos pois a resultados simples, e facilmente comparaveis com a theorica, observámos o movimento da agua por hum canal rectangular *EF* de 105 pés de comprido, e aberto por cima (Fig. 123.), cujo fundo era de 5 pollegadas, e a altura de 8 até 9. Este canal estava applicado á face vertical *BC* da reserva *ADCB*, na qual se tinha praticado huma abertura *EC* na direcçaõ das paredes do canal, guarnecida de huma adufa rectangular de cobre, a qual se levantava e abaixava conforme era preciso. Deste modo, o orificio por onde sahia a agua para o canal era hum rectangulo, que tinha constantemente a base horizontal de 5 pollegadas ao livel do fundo da reserva, e a altura maior ou menor, conforme se levantava mais ou menos a adufa.

Dividindo o canal em 5 partes de 21 pés cada huma, procuramos examinar a velocidade da agua por meio de pequenos fragmentos de cortiça; mas logo conhecemos

O

mos a insufficiencia deste methodo, ao menos quando o canal estava situado horizontalmente. Porque entaõ a agua se entumece á medida que vai caminhando; e lançando o pequeno corpo fluctuante para hum e outro lado, naõ o deixa seguir direitamente o fio da corrente. Recorremos ao meio de lançar na agua materias coloradas, como sangue, carvaõ pilado &c; mas tambem o achámos defeituoso, porque a agua dissolvia facilmente estas materias, e assim havia incerteza na chegada dellas a qualquer ponto das divisões. Em fim reduzimonos a observar os tempos, que gastava a agua em chegar a cada huma das divisões, desde o instante em que se levantava a adufa; e para isso em cada hum dos ditos pontos collocamos huns molinetes pequenos, summamente moveis, que indicavaõ pelo seu movimento a chegada instantanea da agua. He verdade, que deste modo achámos somente a primeira velocidade da agua no canal, e que depois de ser a corrente perfeitamente estabelecida deve a velocidade ser maior. Mas ambas tem entre si huma rasaõ constante, ao menos sensivelmente, como veremos depois em muitos casos, em que huma e outra se podem determinar pela experiencia. Assim, sendo determinada esta rasaõ, pela primeira velocidade se poderá conhecer a velocidade permanente.

Por este meio pois, estando o canal horizontal achámos os resultados seguintes, nos quais a *elevaçaõ da adufa de meia pollegada, ou de huma pollegada* quer dizer que o orificio era hum rectangulo de 5 pollegadas de base, e de meia ou huma pollegada de altura; e o sinal + ou − adiante dos segundos indica que no numero delles falta ou abunda huma pequena parte da unidade.

Altu-

Altura constante da agua acima do fundo da reserva em pés e pollegadas	Elevaçaõ da adufa de meia pollegada		Elevaçaõ da adufa de huma pollegada	
	Segundos	*Numero dos pés corridos*	*Segundos*	*Numero dos pés corridos*
3 8	3 +	21	3 −	21
	9 +	42	6 +	42
	17 +	63	11 +	63
	27 +	84	18 +	84
	38 +	105	26	105
7 8	3 −	21	2 +	21
	7	42	5	42
	13 −	63	9	63
	20 −	84	14	84
	28 +	105	20	105
11 8	2	21	2	21
	5 −	42	4	42
	10 −	63	7	63
	16 −	84	11	84
	23 +	105	16 +	105

417 Se diminuirmos cada hum dos termos destas experiencias do que se segue immediatamente, acharemos que em todas ellas os espaços consecutivos de 21 pés cada hum, saõ corridos em tempos, que formaõ sensivelmente huma progressaõ arithmetica. Assim póde facilmente continuar-se a serie, e determinar-se, ao menos proximamente, o tempo que a agua gastaria em correr qualquer numero de pés, se o canal fosse produzido em cada hum dos casos.

418 Para conhecermos o effeito da fricçaõ, calcularemos a velocidade que deveria ter lugar, prescindindo da mesma fricçaõ. O fluido ao sahir do orificio rectangular padece huma contracçaõ, e depois seguindo o fundo e as paredes do canal torna-se a dilatar sensivelmente quanto se tinha contrahido. E porque no mesmo tempo passa igual quantidade de agua pela secçaõ da veia contrahida e por qualquer secçaõ do canal, as velocidades correspondentes nes-

 tes

tes dous lugares seráõ na rasaõ de 8 para 5 proximamente. Assim designando por H a altura da reserva, que he a devida á velocidade no ponto da contracçaõ, e por h a altura devida á velocidade da corrente no resto do canal, teremos $\sqrt{H} : \sqrt{h} :: 8 : 5$, e $\sqrt{h} = \frac{5\sqrt{H}}{8}$.

419 Como hum grave cahe em 1 segundo da altura de 15 pés; e adquire huma velocidade, com a qual andaria uniformemente 30 pés no mesmo tempo, se designarmos por E o espaço corrido uniformemente por qualquer movel no tempo t com huma velocidade devida á altura h, será $t : 1'' :: \frac{E}{\sqrt{h}} : \frac{30}{\sqrt{15}}$, e $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15h}}$. Supondo pois, que E he o espaço corrido pelo fluido no canal, e metendo por $\sqrt{h}$ o seu valor $\frac{5\sqrt{H}}{8}$, teremos $t = 1'' \times \frac{4E}{5\sqrt{15H}}$.

420 Da formula geral $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15h}}$ se tira $h = \frac{E^2}{60\,t^2}$. Donde se vê, que se hum espaço E contado em pés for corrido uniformemente em hum tempo t contado em segundos, a altura devida á velocidade do movel será representada por $\frac{E^2}{60\,t^2}$.

421 Buscando pois pela formula do nº 419 o tempo que a agua deveria gastar em correr todo o canal, se naõ encontrasse resistencia, acharemos para a altura da reserva de 3 pés e 8 pollegadas $t = 11'', 33$; para a altura de 7 pés e 8 pollegadas, $t = 7'', 83$; e para a altura de 11 pés e 8 pollegadas, $t = 6'', 35$. Donde se vê, que a resistencia produz hum effeito muito consideravel, o qual se deve attribuir quasi todo á fricçaõ, porque o ar influe nisso muito pouco. Pelas mesmas experiencias se vê, que estando a adufa mais levantada he menor o effeito da fricçaõ, porque entaõ a maior massa tem mais força que a mais pequena para vencer os obstaculos, sendo ambas animadas de velocidades iguais.

422 Igualmente se manifesta por cada huma das experiencias, que a velocidade diminue á medida que a agua se aparta da reserva; e este movimento tem algumas particularidades, que merecem ser observadas. Quando se levanta a adufa, a agua sahe primeiramente pela direcçaõ do canal; mas como no caminho encontra obstaculos, começa a entumecer-se, e a superficie toma a fórma *EMG* (Fig. 124.). Entaõ do ponto mais elevado *M* começa a cahir em virtude da gravidade, e parte della torna para a banda da reserva pela direcçaõ *MN*, formando-se na parte *CM* do canal duas correntes contrarias, huma da agua inferior pela direcçaõ *CF*, e a outra da superior pela direcçaõ *MN*. Esta he muito sensivel no principio, e termina-se no ponto *N* distante do orificio 12 pés com pouca differença. Ao depois diminue pouco a pouco, ainda que subsistindo sempre; e a superficie acaba tomando a fórma *ERG*, em que o ponto *R* he o mais elevado acima do fundo. A agua que chega a cada instante a *NO* fére continuamente a massa *NOFG*, e mistura-se com ella, a qual renovando-se successivamente conserva a mesma figura permanente a que se reduzio. Estas correntes saõ hum exemplo sensivel das que devem formar-se nos rios, e no mar, quando a agua he retardada por alguns obstaculos.

423 He de notar que o desaguamento do orificio naõ he retardado pela agua do canal, porque esta tendo a liberdade de escapar ou de se elevar, naõ póde oppór á que vem atraz della se naõ huma resistencia infinitamente pequena. Isto he evidente, mas sem embargo fizemos a experiencia; e achamos, que em hum tempo dado se recebia na extremidade *F* a mesma quantidade de agua, que dava no mesmo tempo o orificio *EC* quando se tinha tirado o canal. Donde se vê, que ha huma differença muito grande entre o movimento da agua por hum canal, e por hum conductor fechado de todos os lados.

424 Os canais declives, sendo a velocidade inicial a mesma, saõ corridos pela agua em menos tempo que os horizontais, porque a gravidade acceléra entaõ o movimento. As experiencias seguintes mostraráõ a lei das velocidades nesse caso. Por *declividade* do canal entendemos a distancia de huma das suas extremidades á linha horizontal que passa pela outra.

Sen

Sendo a adufa elevada $\frac{1}{2}$ pollegada.

Altura constante da reserva acima do fundo em pés e pollegadas.	Declividade de 3 pollegadas.		Declividade de 6 pollegadas.	
	Segundos.	*Pés corridos.*	*Segundos.*	*Pés corridos.*
3 8	6 + 18 + 34 +	35 70 105	6 18 − 31 +	35 70 105
7 8	4 + 14 + 26	35 70 105	4 + 14 25 +	35 70 105
11 8	4 11 + 22	35 70 105	3, 5 11, 5 21	35 70 105

Sendo a adufa elevada 1 pollegada

Altura constante da agua acima do fundo da reserva em pés e pollegadas.	Declividade de 6 pollegadas.		Declividade de 2 pés	
	Segundos.	*Pés corridos.*	*Segundos.*	*Pés corridos.*
3 8	5 − 13 − 23 −	35 70 105	4, 5 10, 5 17, 5	35 70 105
7 8	4 − 9 + 19 −	35 70 105	4 − 9 − 15 −	35 70 105
11 8	3 8 15	35 70 105	2 + 7 13	35 70 104

Fig. 147.

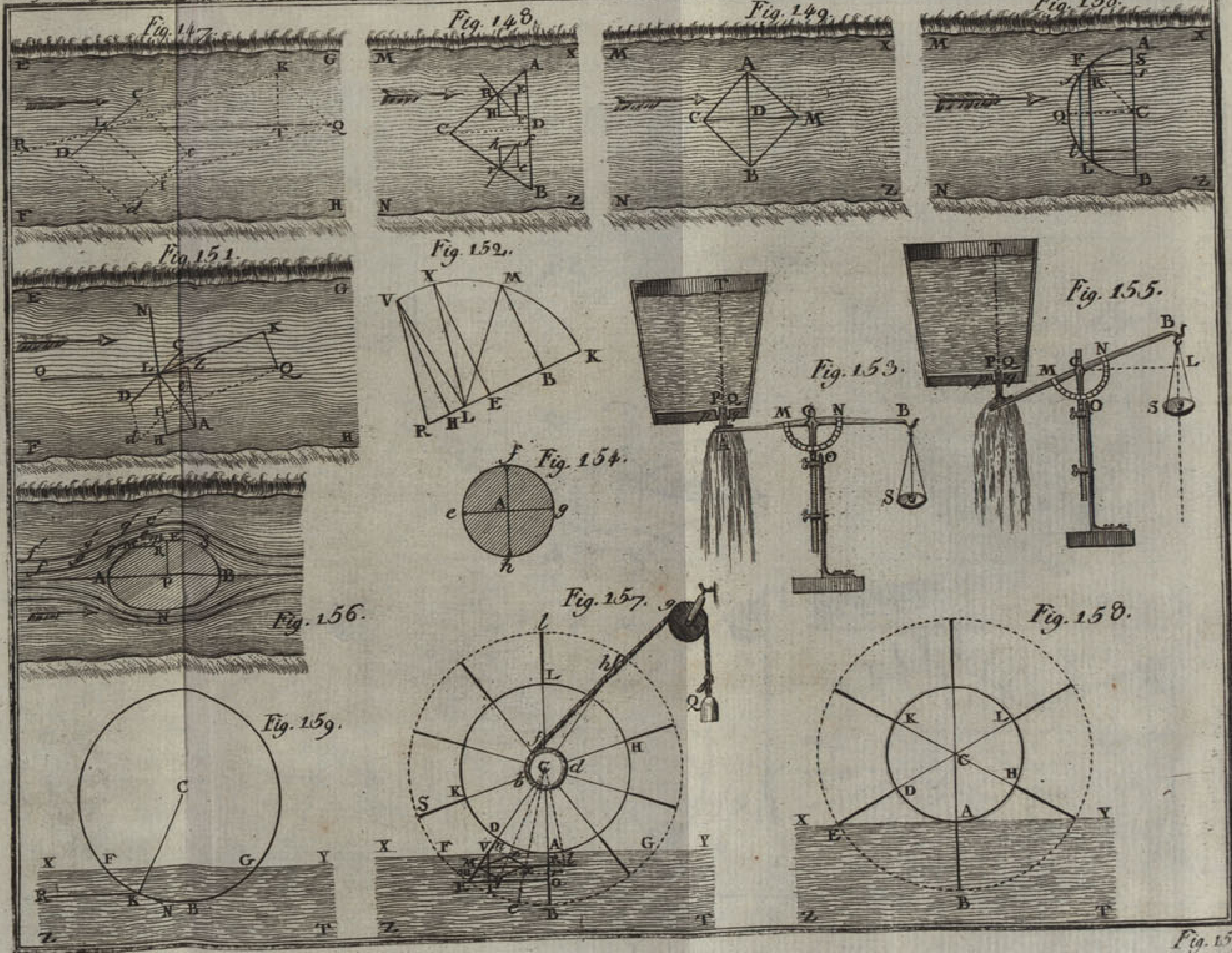

Fig. 159.

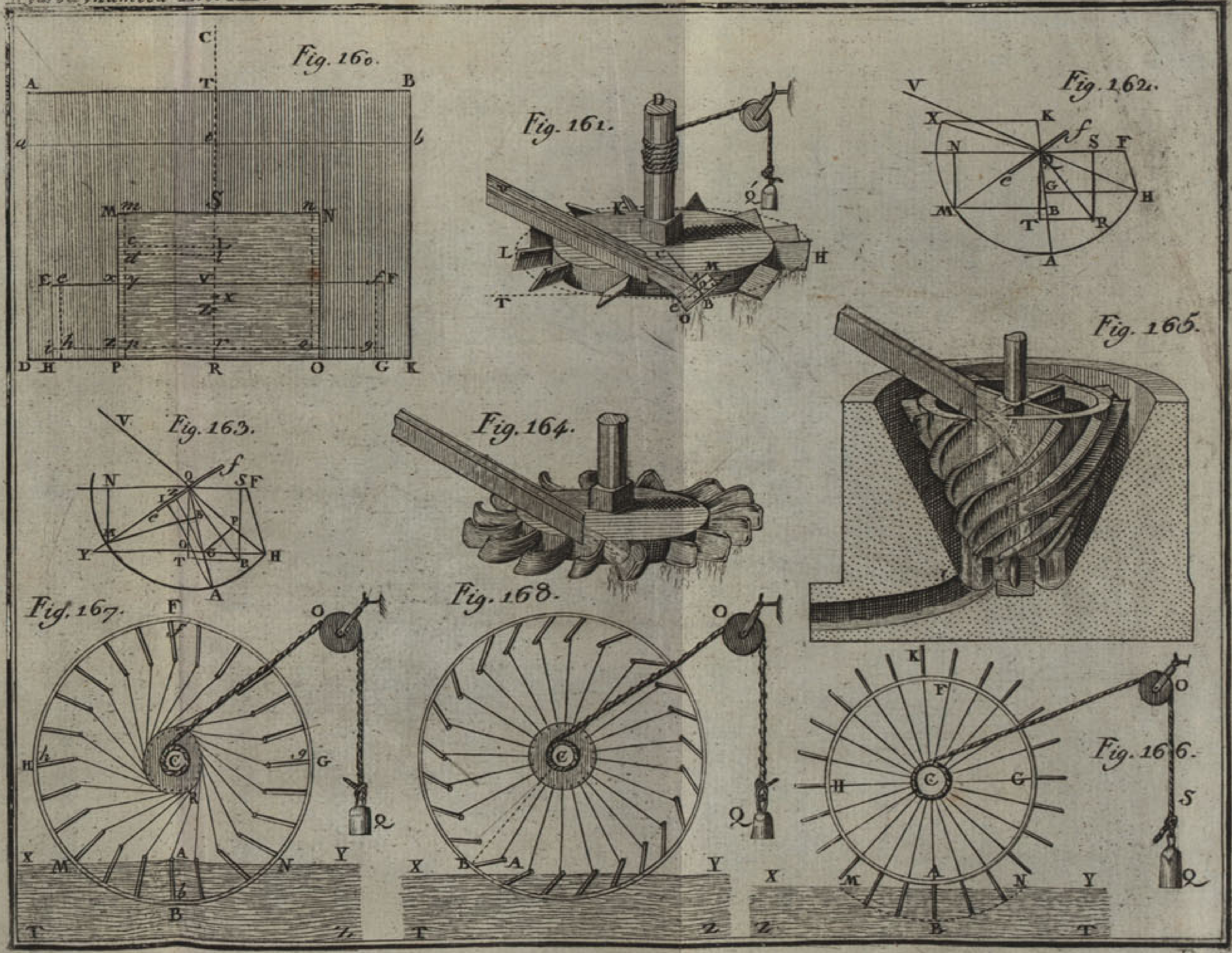
Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.

Fig. 169

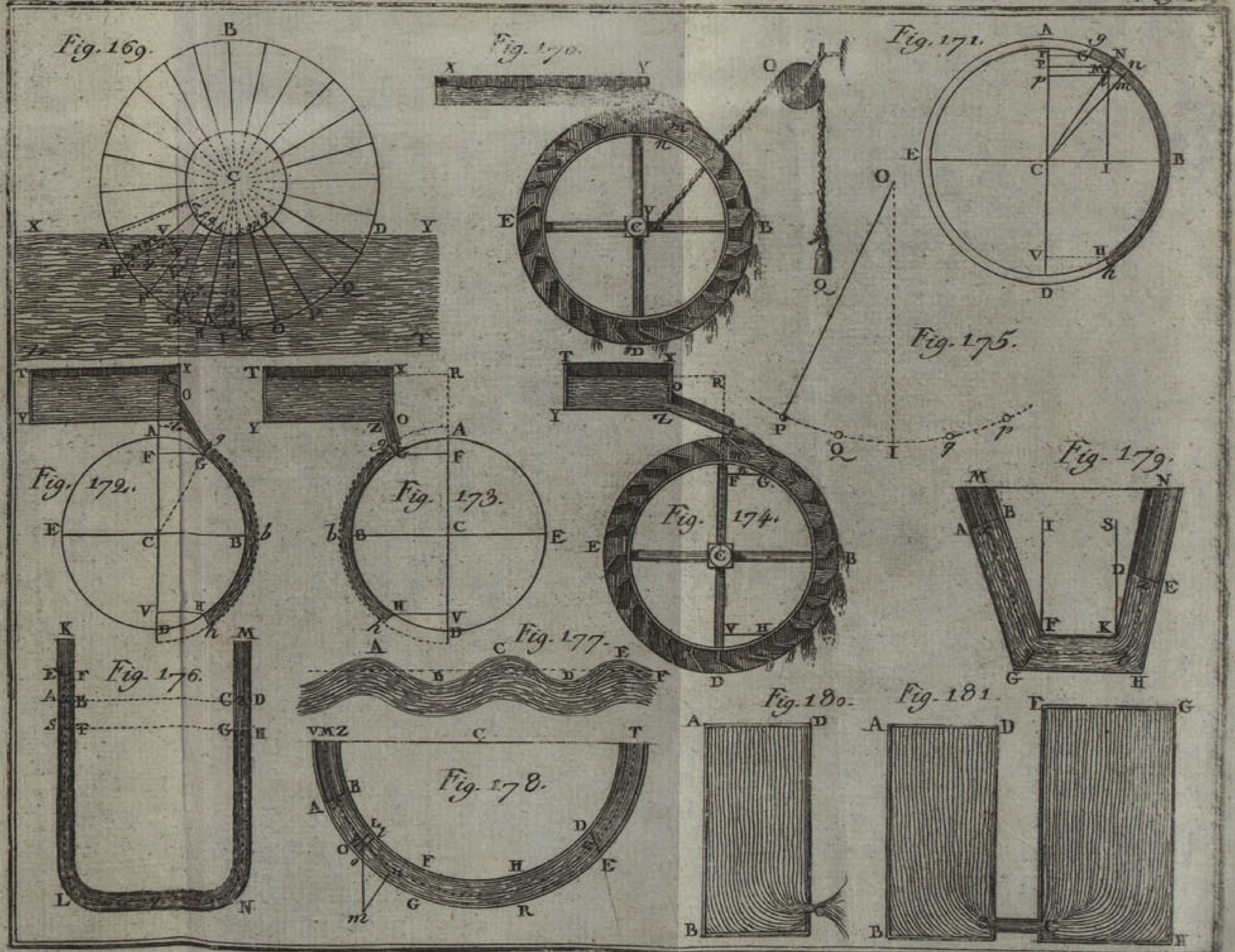

Fig. 181