

I n t r o d u ç ã o à

M e c â n i c a

e a o u t r o s t e m a s e m

M e d i c i n a

D e n t á r i a

J. J. PEDROSO DE LIMA



Coimbra • Imprensa da Universidade

**Coordenação editorial**  
Imprensa da Universidade de Coimbra

**Concepção gráfica**  
António Barros

**Paginação**  
António Resende

**Execução gráfica**  
Gráfica de Coimbra, Lda  
Palheira - Assafarge  
3006 Coimbra Codex

**ISBN**  
972-98225-2-2

**Depósito Legal**  
147938/00

## S U M Á R I O

INTRODUÇÃO .....	5
------------------	---

### CAPÍTULO I

#### CONCEITOS ELEMENTARES DE MECÂNICA

1 - Conceitos elementares .....	11
1.1 - 1ª Lei de Newton .....	11
1.2 - 2ª Lei de Newton .....	11
1.3 - 3ª Lei de Newton .....	12
1.4 - Regra do paralelogramo para a adição de forças .....	13
1.5 - Princípio da transmissibilidade.....	18
1.6 - Lei de Newton da gravitação .....	19
2 - Momento de uma força em relação a um ponto .....	21
3 - Produto vectorial .....	23
3.1 - Representação do momento por produto vectorial.....	24
4 - Produto vectorial e momento em termos de componentes rectangulares.....	28
5 - Produto escalar .....	30
6 - Produto triplo composto.....	32
7 - Momento de uma força em relação a um eixo .....	34
8 - Binários .....	36
9 - Sistemas de forças equivalentes .....	39
10 - Soma de binários .....	40

## S U M Á R I O

11 - Representação de binários por vectores .....	41
12 - Substituição de uma força aplicada num ponto de um sólido rígido por uma força igual, aplicada noutra ponto, mais um binário .....	42
13 - Redução de qualquer sistema de forças aplicada num sólido indeformável a uma força e a um binário .....	42
14 - Equilíbrio .....	43
15 - Atrito entre sólidos .....	54
16 - Fundamentos de dinâmica do ponto e de sistemas de pontos .....	59
16.1 - Momento linear (ou quantidade de movimento) de um sistema de pontos materiais .....	59
16.2 - Momento cinético .....	63
16.3 - Centro de massa de um sistema de pontos materiais .....	64
16.4 - Centro de massa de um corpo plano homogéneo com a forma de um triângulo rectângulo OAB de área S .....	67
17 - Centro de massa de corpos homogéneos com a forma de um triângulo equilátero ou isósceles .....	69
18 - Momento de inércia .....	71

### ANEXO ao Cap. I

1 - Movimento de um ponto em relação a um sistema de referência .....	72
2 - Movimento de um ponto conhecida a trajectória .....	73

## CAPÍTULO II

II

### ESTADOS DE AGREGAÇÃO E PROPRIEDADES DA MATÉRIA

1 - Os estados de agregação .....	81
2 - Condução eléctrica nos sólidos .....	88
3 - A mobilidade das cargas eléctricas e a lei de Ohm .....	89
4 - Noções qualitativas sobre a teoria das bandas dos cristais .....	92

## SUMÁRIO

5 - Propriedades dos fluidos .....	96
5.1 - Viscosidade .....	96
5.2 - Fluidos não Newtonianos sem histerese .....	100
5.3 - Fluidos não newtonianos com histerese .....	102
5.4 - Viscosidade do sangue.....	102
5.5 - Tensão superficial de um líquido .....	104
5.6 - Superfícies curvas nas interfaces líquido-ar .....	108
5.7 - Energia de coesão de um líquido .....	113
5.8 - Superfície de separação entre dois líquidos não miscíveis e entre líquidos e sólidos.....	114
5.9 - Tubos capilares .....	120
5.10 - Capilaridade entre lâminas .....	122
5.11 - Capilares isolados .....	124
5.12 - Generalização da Fórmula de Laplace para o caso de paredes elásticas espessas .....	126
5.13 - Tensões na parede da crossa da aorta .....	127
6 - Deformações elásticas .....	131
7 - Deformação por flexão .....	138
8 - Deformação por torção .....	142
9 - Energia armazenada nos materiais elásticos .....	144
10 - Materiais compostos .....	145
11 - Forças interiores e exteriores .....	147
12 - Deformações .....	150
12.1 - Deformação relativa (strain) .....	150
12.2 - Deformação diferencial .....	151
13 - Tipos de deformação .....	152
14 - Reacção à supressão instantânea da tensão .....	153
15 - Classificação reológica dos materiais .....	154
15.1 - Sólidos indeformáveis (Sólidos de Euclides).....	154
15.2 - Sólidos dotados de elasticidade linear (sólidos de Hooke).....	154
15.3 - Corpos plásticos .....	155
15.4 - Corpos viscosos .....	155

## S U M Á R I O

15.5 - Corpos viscoelásticos .....	155
15.5.1 - Sólidos de Voigt .....	157
15.5.2 - Fluidos de Maxwell .....	160
16 - Corpos plasto-visco-elásticos (corpos de Bingham) .....	163
17 - Modelos físicos da deformação .....	164
17.1 - Elasticidade .....	164
17.2 - Viscoelasticidade .....	167
17.3 - Modelo físico do corpo Bingham .....	168
18 - Dureza .....	168
19 - Fadiga .....	169

## CAPÍTULO III

### MECÂNICA DENTÁRIA

1 - Introdução .....	173
2 - Efeitos de forças externas sobre corpos rígidos .....	174
3 - Produção de movimentos nos dentes. Centro de resistência. Centro de rotação. Relação M/F .....	176
3.1 - Efeitos de forças sobre corpos rígidos sujeitos .....	187
4 - Equilíbrio .....	189
5 - A estrutura dos dentes .....	193
6 - A forma dos dentes .....	195
7 - Forças dentárias. Superfície e pressões oclusais .....	196
8 - Mastigação .....	201
9 - Análises de esforço/deformação das estruturas dentárias .....	202
9.1 - Métodos analíticos e numéricos .....	203
9.2 - Análise dos elementos finitos .....	209
9.3 - Métodos experimentais .....	210
9.4 - Transdutores de tensão .....	211
9.5 - Métodos fotoelásticos .....	211
10 - Periodonto e ação muscular .....	218

## CAPÍTULO IV

## RAIOS X DENTÁRIOS – ASPECTOS FÍSICOS E TÉCNICOS

1 - Generalidades .....	225
2 - Interacção dos raios X com a matéria .....	234
2.1 - Radiações ionizantes.....	234
3 - Ionização .....	237
3.1 - Efeito fotoeléctrico .....	237
3.2 - Efeito Compton .....	239
3.3 - Dispersão de Rayleigh-Thomson .....	240
3.4 - Efeito de produção de pares .....	240
3.5 - Absorção da radiação X pela matéria .....	241
4 - Efeitos químicos e biológicos das radiações ionizantes .....	244
4.1 - Grandezas e unidades usadas em dosimetria das radiações.....	244
4.2 - Aspectos químicos e biológicos da acção das radiações ionizantes.....	247
5 - Fenómenos físico-químicos elementares durante a irradiação do material biológico .....	248
a) - Dissociação espontânea.....	248
b) - Transferência de carga .....	249
c) - Reacção com iões negativos .....	250
d) - Reacção com moléculas .....	251
6 - Excitação .....	251
7 - Modos de acção elementares .....	253
a) - Acção directa .....	253
b) - Acção indirecta .....	256
8 - Efeitos biológicos das radiações .....	259
a) - Características fundamentais dos efeitos biológicos das radiações.....	262
b) - Utilização terapêutica dos radionuclídeos .....	266

## S U M Á R I O

9 - Raios X dentário .....	267
a) - Radiografia intraoral .....	268
b) - Radiografia panorâmica.....	269
10 - Radiologia digital em Medicina Dentária .....	272
11 - Dosimetria por termoluminescência.....	278
12 - Dosimetria fotográfica .....	282
 BIBLIOGRAFIA.....	 285
 ÍNDICE ALFABÉTICO.....	 287

## INTRODUÇÃO

Nos primeiros anos, após a criação do Departamento de Medicina Dentária da Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra, a Cadeira de Biofísica era ministrada simultaneamente, aos alunos das Licenciaturas em Medicina e Medicina Dentária.

A não existência, naquela cadeira, de mecânica e física de materiais, bem como de outros assuntos com interesse para a Medicina Dentária, levou, por proposta do autor ao Conselho Científico da Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra e com o apoio do Departamento de Medicina Dentária, em 1994, à criação de um programa próprio destinado à Cadeira de Biofísica da Licenciatura em Medicina Dentária, versando os interesses específicos deste curso.

Com a reestruturação do Curso de Medicina em 1995, as Cadeiras de Biofísica e Biomatemática foram integradas numa única cadeira anual, a Cadeira de Biofísica e Biomatemática.

Na sua versão inicial, o presente trabalho pretendia ser uma colecção de apontamentos destinados, especificamente, à componente de Biofísica da cadeira de Biofísica/Biomatemática da licenciatura em Medicina Dentária da Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra. Mais tarde, pensámos em dar um novo cunho a esta obra, de tal modo que ela pudesse ser de interesse para os médicos dentistas, de um modo geral. Tal mudança resultou das grandes dificuldades que sentimos na obtenção de elementos de mecânica dentária, com rigor físico e, em particular, numa perspectiva pedagógica. Salvo algumas excepções, nas referências que encontramos, a falta de precisão, quer na explicação e aplicação dos fenómenos físicos, quer na própria terminologia utilizada, era flagrante.

## INTRODUÇÃO

Há um pressuposto de potencial utilidade para os médicos dentistas nos conhecimentos que aqui apresentamos. Partimos da suposição que o conhecimento com base científica causal é mais sólido do que o conhecimento factual, baseado no reconhecimento dos efeitos ou meramente na intuição. Supõe-se que o futuro profissional tem mais armas para actuar e para evoluir na sua preparação, se for capaz de raciocinar baseado em conhecimentos de mecânica e física de materiais.

Pensamos que constitui um avanço importante mudar a posição do futuro médico dentista, de simples observador, a participante no acto de pensar o processo biológico com as suas próprias leis. Ou seja, cria-se uma convivência do especialista com a própria especialidade que, de contrário, nunca seria tão total.

Devemos, no entanto, confessar que não temos a prova científica, estatística, do reflexo prático, em termos de melhoria do acto médico, que a adição destes conhecimentos irá produzir.

Temos unicamente uma evidência vivida, resultante da observação e contacto científico com médicos que aceitam e cultivam esta atitude. O reconhecimento, de um modo geral, de grande qualidade nestes médicos é um facto que fomos verificando. Acreditamos também, no que se refere aos alunos, que uma cadeira com estas características pode ser muito útil num curso onde haja preocupações duma preparação básica sólida.

Poderá ser polémica a questão de ser o primeiro ano a altura ideal no curso para entrar na física de fenómenos que, com grande probabilidade, na maioria dos casos, não foram ainda abordados nas cadeiras médicas. Na perspectiva dos fenómenos talvez não seja, mas na perspectiva da física, acreditamos que sim. À medida que se afastam dos conhecimentos básicos do curso secundário, mais difícil é para os alunos do curso de medicina dentária estudar ciências das designadas exactas. Quem já ensinou biofísica no curso de medicina, e também em mestrados das especialidades médicas, facilmente entende este ponto.

Contudo, uma vez mais, não baseio estas afirmações em estudos comparativos de resultados, após uma análise exaustiva das possíveis alternativas. É que nós, os das ciências exactas, não podemos vir para as

ciências médicas defender o interesse das primeiras e começar logo por argumentar sem qualquer base científica.

Factos objectivos são que, com maior ou menor ênfase, a biomecânica é reconhecida como tendo importância na informação e formação dos futuros médicos dentistas em muitas faculdades de medicina dentária e é, em geral, ministrada no início do curso ou na formação preparatória.

Em termos gerais, a biofísica assenta no dogma de que a matéria viva e os seus mecanismos obedecem a leis físicas idênticas às que foram verificadas no estudo da matéria inanimada e dos fenómenos com ela relacionados.

Muitos dos mecanismos físicos e fisico-químicos da vida, altamente complexos, foram explicados pelas leis que referimos e outros sê-lo-ão, por certo, no futuro, aumentando a riqueza da ciência e, potencialmente, a capacidade de intervenção da medicina.

Parece não ser irrealista acreditar-se que os conhecimentos da física poderão ser úteis em medicina dentária: *a)* na explicação de múltiplos fenómenos, associados à estrutura e às funções do sistema estomatognático, quer a nível macroscópico, quer microscópico, *b)* na aplicação e desenvolvimento de metodologias físicas de apoio em diagnóstico e terapêutica, *c)* no reforço da capacidade de associação e raciocínio, como instrumento para a criação de ligações causa-efeito, durante a prática da medicina e *d)* no aumento da capacidade de assimilação da informação contida na literatura especializada da Medicina Dentária.

O presente trabalho é constituído por quatro capítulos. No primeiro (Conceitos elementares de mecânica) são revistos alguns conceitos fundamentais de mecânica. As bases do cálculo vectorial são igualmente abordadas. São apresentados alguns exemplos gerais de aplicação. No segundo capítulo (Agregação e propriedades da matéria) são estudados aspectos da estrutura dos materiais, em particular dos sólidos, e consideradas as propriedades físicas com maior interesse, ou aplicabilidade, na área da medicina dentária. É dado relevo às propriedades elásticas e viscoelásticas e estudado o comportamento dos materiais sujeitos a esforço. No terceiro capítulo (Mecânica dentária) analisam-se alguns aspectos da mecânica dentária normal e apresentam-se exemplos de

## INTRODUÇÃO

aplicação. Abordam-se ainda os métodos de estudo das propriedades mecânicas e dos esforços, utilizados em medicina dentária. O capítulo quarto justifica a parte de "outros temas" no título desta obra. Neste capítulo são estudadas os processos que levam à produção dos raios X para uso clínico e as suas propriedades. É considerada a interacção dos raios X com a matéria. São consideradas as técnicas de utilização dos raios X em medicina dentária e analisadas numa perspectiva técnica. São tecidas algumas considerações sobre a radiologia digital sem filme, e a revolução que irá produzir na medicina dentária. Referem-se as suas potencialidades e os aspectos técnicos mais actuais. Alguns aspectos da acção das radiações ionizantes sobre a matéria viva, a protecção pessoal e a minimização dos riscos dos pacientes em radiologia dentária encerram este capítulo.

Esta obra foi revista na sua componente física, e no pormenor, pelos Profs. Doutores Adriano José R. Pedroso de Lima, João Luís M. Pedroso de Lima e Maria Isabel L. Pedroso de Lima; os dois primeiros da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e a terceira da Escola Superior Agrária de Coimbra.

A componente médica foi revista pelo Prof. Doutor A. A. Faria Gomes e pelo Dr. F. Jorge Mendes do Departamento de Medicina Dentária da Faculdade de Medicina de Coimbra. A todos agradeço reconhecidamente o apoio prestado.

Ao Senhor Brig. Eng. António Luís Pedroso de Lima agradeço as preciosas considerações críticas que fez ao trabalho.

À minha família e, em particular a minha mulher, para quem este livro trouxe também algum sacrifício, as minhas homenagens e os meus agradecimentos.

## CAPÍTULO • I

### CONCEITOS ELEMENTARES DE MECÂNICA



(Página deixada propositadamente em branco)

## 1 - Conceitos elementares

O estudo da Mecânica usa os conceitos básicos de espaço, massa e tempo e assenta em seis princípios, obtidos através da evidência experimental, que aceitaremos como válidos. Estes princípios, que vamos considerar em seguida, são as três leis fundamentais de Newton, a regra do paralelogramo para a adição de forças, o princípio da transmissibilidade e a lei de Newton da gravitação.

### 1.1 - 1ª Lei de Newton

*Um ponto material mantém-se em repouso ou em movimento rectilíneo e uniforme até que uma força modifique estas condições (Princípio da Inércia).*

Na realidade o Princípio da Inércia concretiza o nosso conceito de força. A primeira sensação de força é dada pelo esforço muscular. Sabe-se que para pôr um corpo em movimento, é necessário exercer um esforço sobre ele e que o movimento resultante terá uma orientação e amplitude que depende do esforço. A noção de força como grandeza vectorial é, assim, também intuitiva.

Resulta do Princípio da Inércia que um ponto material, sobre o qual não está aplicada qualquer força ou conjunto de forças com resultante não nula, terá, necessariamente, aceleração nula. Mas, se ao ponto material se aplicar uma força, ele adquire aceleração pois a velocidade do seu movimento de translação variará em módulo e/ou em direcção.

### 1.2 - 2ª Lei de Newton

*Uma força isolada ou fazendo parte de um sistema de forças aplicado a um ponto material comunica-lhe uma aceleração na direcção e sentido da força e de módulo proporcional ao módulo da força.*

Se num ponto material está aplicada a força  $\vec{F}$  e for  $\vec{j}$  a aceleração adquirida pelo ponto, devido à acção da força, verifica-se que

$$\vec{F} = m \vec{j} \qquad 1.1$$

A grandeza  $m$  que depende somente do ponto material considerado é um escalar, um número real positivo a que se chama massa (de inércia) do ponto material. O produto de um escalar por um vector é um vector com módulo igual ao módulo do escalar vezes a intensidade do vector. A direcção do vector produto é a do vector factor, o sentido o mesmo se o escalar for positivo, e contrário na outra alternativa.

Deste principio resulta que se várias forças actuam simultaneamente sobre um ponto material de massa  $m$  cada uma delas actua como se estivesse isolada<sup>1</sup>. À força  $\vec{F}_1$  corresponderá a aceleração  $\vec{j}_1$ , à força  $\vec{F}_2$  corresponderá a aceleração  $\vec{j}_2$ , etc., tal que

$$\vec{F}_1 = m \vec{j}_1, \quad \vec{F}_2 = m \vec{j}_2, \quad \vec{F}_3 = m \vec{j}_3, \dots$$

O ponto material adquire a aceleração

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3 + \dots = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \frac{\vec{F}_3}{m} + \dots = \frac{1}{m} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots)$$

ou seja,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = m \vec{j} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = m \vec{j}$$

onde  $\vec{F}$  é a resultante das forças aplicadas sobre o ponto material.

Isto quer dizer que o movimento do ponto material é o mesmo que teria se sobre ele só estivesse aplicada a resultante das forças.

### 1.3 - 3ª Lei de Newton

12

*As acções mútuas de dois pontos materiais quaisquer são iguais e directamente opostas (Principio da Igualdade de Acção e Reacção).*

<sup>1</sup> Ponto material é um corpo cujas dimensões são desprezáveis à escala do fenómeno em estudo e para o qual se podem considerar todas as forças a actuar no mesmo ponto de aplicação.

## 1.4 - Regra do paralelogramo para a adição de forças

*Duas forças actuando simultaneamente num ponto material podem ser substituídas por uma única força (força resultante) que é o vector com aplicação no ponto e de módulo igual à diagonal do paralelogramo obtido com as forças consideradas (ver Fig. 1.1).*

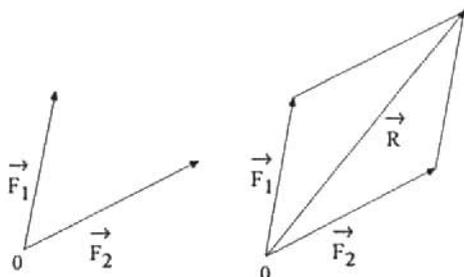


Fig. 1.1 - As forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  aplicadas simultaneamente no ponto O podem ser substituídas pela resultante  $\vec{R}$  obtida pela regra do paralelogramo.

Uma alternativa à regra do paralelogramo é a regra do triângulo de forças. Como os lados de um paralelogramo são iguais dois a dois a soma dos vectores da Fig. 1.1 pode obter-se aplicando  $\vec{F}_2$  no extremo de  $\vec{F}_1$  e considerando como soma o vector  $\vec{R}$  que une o ponto de aplicação de  $\vec{F}_1$  com o extremo de  $\vec{F}_2$  (Fig. 1.2). O mesmo resultado é obtido considerando os lados inferiores do paralelogramo da Fig. 1.1, ou seja, aplicando  $\vec{F}_1$  no extremo de  $\vec{F}_2$  e considerando como soma o vector  $\vec{R}$ . A propriedade comutativa da adição de vectores é assim verificada já que  $\vec{F}_2 + \vec{F}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  (Fig. 1.2).

Esta regra pode ser generalizada à soma de um número qualquer  $n$  de vectores. Procede-se de modo idêntico ao do caso dos dois vectores, ou seja, aplica-se  $\vec{F}_i$  no extremo de  $\vec{F}_{i-1}$  e considera-se, como soma, o vector  $\vec{R}$  que une o ponto de aplicação de  $\vec{F}_1$  com o extremo de  $\vec{F}_n$ , obtendo-se assim um polígono de forças ( $i$  é uma variável corrente, que pode ter qualquer valor inteiro de 1 a  $n$ ).

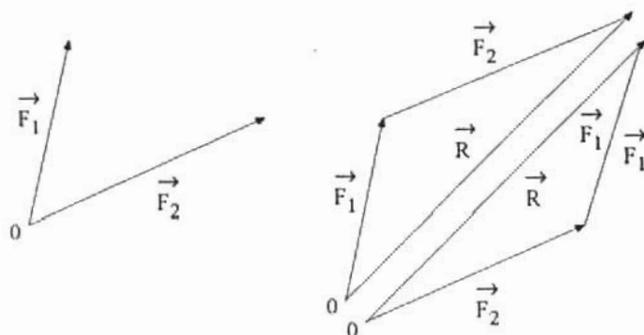


Fig. 1.2 - A resultante  $\vec{R}$  das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  aplicadas simultaneamente no ponto  $O$  pode ser obtida pela regra do triângulo de forças. Considera-se como soma o vector que une o ponto de aplicação de uma das forças com o extremo da outra, depois de aplicada esta no extremo da primeira.

A Fig.1.3 considera a aplicação da regra do polígono de forças a um caso com  $n=4$ .

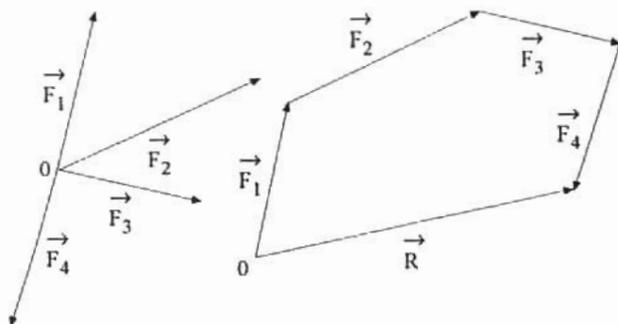


Fig. 1.3 - A resultante  $\vec{R}$  das forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  aplicadas simultaneamente no ponto  $O$  pode ser obtida pela regra do polígono de forças. Considera-se como soma o vector com origem em  $O$  e que fecha o polígono depois de aplicadas as forças sucessivamente no extremo das anteriores.

A generalização da regra do polígono de forças para as três dimensões, ou seja, para uma distribuição não plana de forças, é imediata.

Da regra do paralelogramo resulta que qualquer força, actuando sobre um ponto material, pode ser decomposta em componentes segundo duas direcções. Nas Figs. 1.1 e 1.2 o vector  $\vec{R}$  pode ser decomposto nas componentes  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  ou projecções de  $\vec{R}$ , segundo as direcções das respectivas linhas de acção.

O problema da decomposição de uma força em componentes pode ser posto conhecendo as direcções das linhas de acção, como vimos, ou supondo conhecida uma das componentes. A regra do triângulo torna a solução deste caso óbvia.

De grande importância é a decomposição de um vector em componentes rectangulares, ou seja, segundo direcções perpendiculares entre si, que se supõe constituírem um sistema de eixos rectangulares orientados. Na Fig. 1.4-a) podem observar-se as componentes vectoriais rectangulares,  $\vec{F}_x$  e  $\vec{F}_y$ , da força  $\vec{F}$  do primeiro quadrante, no plano, obedecendo à relação  $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ . Os eixos coordenados podem ser traduzidos por vectores unitários ou versores, vectores de módulo unitário, com a direcção dos eixos e o sentido positivo crescente, respectivamente  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  para abcissas e ordenadas (Fig. 1.4-b). Designando as coordenadas do extremo do vector  $\vec{F}$ , por  $F_x$  e  $F_y$  podemos escrever para as suas componentes vectoriais ( Fig. 1.4-c):

$$\vec{F}_x = F_x \hat{i} \quad \text{e} \quad \vec{F}_y = F_y \hat{j} \quad 1.2$$

donde

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad 1.3$$

Os escalares  $F_x$  e  $F_y$  são as componentes escalares do vector  $\vec{F}$  que podem ser positivas, negativas ou nulas.

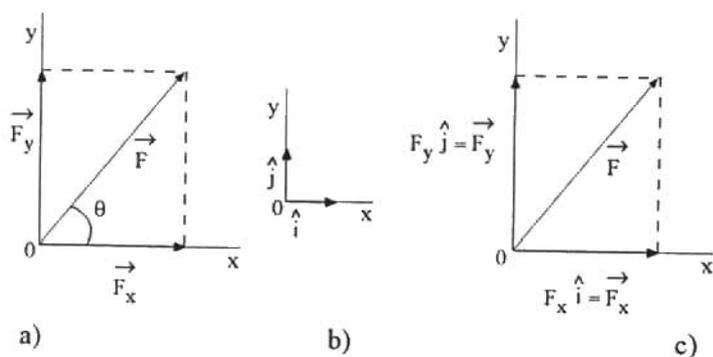


Fig. 1.4 - A força  $\vec{F}$  é decomposta em componentes vectoriais rectangulares  $\vec{F}_x$  e  $\vec{F}_y$  aplicadas no ponto O, utilizando a regra do paralelogramo. Considerando os vectores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  segundo os eixos, podem ser usadas as componentes escalares  $F_x$  e  $F_y$  de  $\vec{F}$ .

As relações seguintes são facilmente retiradas da Fig. 1.4.

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad F_y = F_x \operatorname{tg} \theta \quad 1.4$$

e

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad 1.5$$

Consideremos um sistema de  $n$  forças,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$  aplicadas num ponto material situado em O, origem de um sistema de eixos rectangulares. As componentes vectoriais dos mesmos vectores segundo os eixos referidos são:

$$\vec{F}_{1x} = F_{1x} \hat{i} \quad \vec{F}_{1y} = F_{1y} \hat{j}$$

$$\vec{F}_{2x} = F_{2x} \hat{i} \quad \vec{F}_{2y} = F_{2y} \hat{j}$$

.....

$$\vec{F}_{ix} = F_{ix} \hat{i} \quad \vec{F}_{iy} = F_{iy} \hat{j}$$

.....

$$\vec{F}_{nx} = F_{nx} \hat{i} \quad \vec{F}_{ny} = F_{ny} \hat{j}$$

A resultante das forças aplicadas em  $\mathbf{0}$  é:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n$$

Substituindo as forças pelas suas componentes vectoriais, vem:

$$\vec{F} = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{ix} + \vec{F}_{iy} + \dots + \vec{F}_{nx} + \vec{F}_{ny}$$

Entrando com as componentes escalares, temos:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_{1x} \hat{i} + F_{1y} \hat{j} + F_{2x} \hat{i} + F_{2y} \hat{j} + \dots \\ &+ F_{ix} \hat{i} + F_{iy} \hat{j} + \dots + F_{nx} \hat{i} + F_{ny} \hat{j} \end{aligned}$$

Pondo em evidência os vectores unitários segundo os eixos

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{ix} + \dots + F_{nx}) \hat{i} + (F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{iy} + \dots + F_{ny}) \hat{j} \\ &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \end{aligned} \quad 1.6$$

Conclui-se que as componentes escalares  $F_x$  e  $F_y$  da resultante  $\vec{F}$  de um sistema de forças actuando num ponto são as somas algébricas das correspondentes componentes escalares das forças do sistema.

Em termos práticos, conhecendo as componentes escalares das forças do sistema calcula-se  $F_x$  e  $F_y$  através da Eq. 1.6. O módulo da resultante,  $|\vec{F}|$  e a sua inclinação em relação ao eixo do XX obtém-se directamente através das Eqs. 1.4 e 1.5.

### 1.5 - Princípio da transmissibilidade

*A situação de movimento ou de equilíbrio de um corpo indeformável não é alterada se uma força actuando num dos seus pontos for deslocada, ao longo da sua linha de acção, para outro ponto do corpo.*

Consideremos um sólido indeformável ou rígido<sup>2</sup>, representado na Fig. 1.5, e actuado pela força  $\vec{F}$ , aplicada no ponto A.

Se aplicarmos no ponto B do sistema duas forças iguais e directamente opostas nada alteramos no sistema. Consideremos o caso das forças  $\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}_1$  aplicadas em B, serem colineares com  $\vec{F}$  e possuírem módulos iguais ao módulo de  $\vec{F}$ .

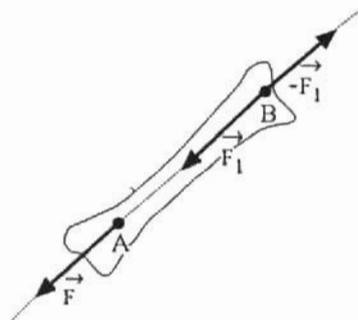


Fig. 1.5 - Sólido indeformável actuado por um sistema de forças colineares de resultante  $\vec{F}$ .

Sendo o sólido indeformável, a força  $\vec{F}$  é anulada pela força  $-\vec{F}_1$  pelo que a força  $\vec{F}_1$  substitui em tudo a força  $\vec{F}$ . Esta conclusão prevalece para qualquer ponto B do sólido, desde que este se encontre na linha de acção de  $\vec{F}$ . Ou seja, o efeito de uma força sobre o sólido indeformável é independente do ponto da linha de acção onde esta actua. Esta associação da força à linha de acção, no caso da força actuando sobre um sólido inde-

<sup>2</sup> Sólido indeformável ou rígido é aquele em que as distâncias entre quaisquer dois pontos se mantêm constantes.

formável, é muito importante. Quando, por exemplo, actuam duas forças de igual módulo mas de sentidos contrários sobre um sólido indeformável, este só estará em equilíbrio se as duas forças tiverem uma linha de acção comum.

Consideremos duas forças paralelas iguais mas de sentidos contrários, aplicadas a um sólido indeformável. Embora a resultante das forças seja nula, o sólido não estará em equilíbrio pois ficará sujeito a um movimento de rotação. Um par de forças nestas condições constitui um binário.

### 1.6 - Lei de Newton da gravitação

*Dois pontos materiais de massas  $m_1$  e  $m_2$  atraem-se mutuamente com forças, iguais e opostas, com intensidade proporcional ao valor das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. As forças têm a direcção da linha que une os dois pontos.*

A expressão da intensidade das forças pode escrever-se

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad 1.7$$

onde  $r$  é a distância entre os pontos e  $G$  uma constante conhecida por constante de gravitação.

Nos problemas que iremos considerar, as condições de equilíbrio irão estar presentes com frequência. Um ponto material diz-se em equilíbrio quando as forças aplicadas sobre ele não lhe comunicam qualquer aceleração. Conclui-se, portanto, que para um ponto material estar em equilíbrio é condição (necessária e suficiente) que a resultante das forças sobre ele aplicadas seja nula.

Para o caso de um sistema material, constituído por um conjunto de pontos, podemos dizer que tal sistema estará em equilíbrio quando todos os seus pontos materiais estiverem em equilíbrio, ou seja, a soma das forças aplicadas em cada ponto seja nula. Um sólido é um conjunto de pontos tão próximos que podemos considerá-lo como um meio contínuo.

Há que distinguir dois tipos distintos de forças a actuar num sólido:

- a) As forças externas que representam acções sobre o sólido provenientes do exterior.
- b) As forças internas que são responsáveis pela estrutura do sólido e resultam da interacção entre as suas partículas constituintes ou entre as partes que, ligadas entre si, formam o sólido.

Quando se consideram as acções de forças *externas* sobre sólidos há que distinguir efeitos externos e internos:

- Os efeitos externos sobre o sólido traduzem-se pela alteração da velocidade;
- Os efeitos internos traduzem-se pelo aparecimento de *esforços*, que podem originar deformação.

Num sólido indeformável os efeitos internos são desprezáveis.

Quando se estudam os efeitos externos das forças sobre sólidos indeformáveis é por vezes possível substituir as forças distribuídas a actuar sobre uma superfície ou volume por uma força única a actuar num só ponto. É o caso das forças distribuídas a actuar na cabeça do fémur de um individuo em pé, que podem ser substituídas por uma só força  $\vec{F}$ , Fig. 1.6.

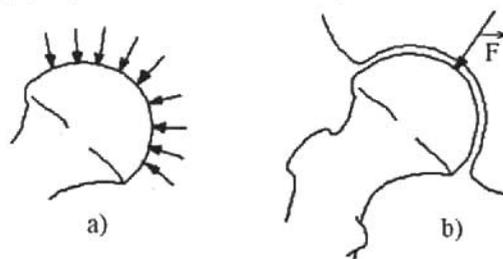


Fig. 1.6 - a) Forças distribuídas a actuar na cabeça do fémur de um individuo em pé e b) a força  $\vec{F}$  equivalente.

Isto deve-se à simetria do sistema de forças com as linhas de acção praticamente convergentes num ponto. Outro exemplo de um sistema de forças nestas condições ocorre no côndilo da mandíbula, na articulação temporo-mandibular.

## 2 - Momento de uma força em relação a um ponto

Antes de prosseguirmos com as condições de equilíbrio para os sólidos, recordemos a noção de momento de uma força em relação a um ponto, que está associada aos movimentos de rotação produzidos por forças sobre sólidos. Esta noção tem interesse em Biologia pois numerosas são as situações onde a força muscular é usada para fazer rodar ossos em torno de pontos fixos.

Na mandíbula de um animal (réptil primitivo) representado na Fig. 1.7, um músculo exercia a força  $\vec{F}$  que fazia rodar o osso em torno da articulação A, com o sentido indicado pela seta curva, apertando os dentes contra o alimento com uma força  $-\vec{P}$ .

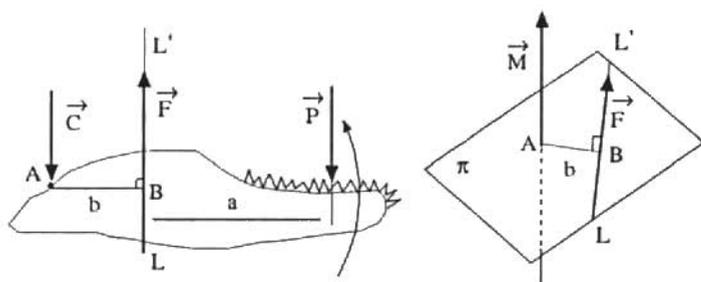


Fig. 1.7 - Definição de momento  $\vec{M}$  da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto A.

O momento de uma força em relação ao ponto é uma grandeza vectorial que mede o efeito rotativo da força em torno do ponto. O momento da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto A é o vector  $\vec{M}$ , cuja grandeza é igual ao produto do módulo da força por  $b$ , distância na perpendicular do ponto à linha de acção da força,  $LL'$ .

A direcção do vector momento  $\vec{M}$  é perpendicular ao plano  $\pi$ , que contém a força  $\vec{F}$  e o ponto A.

O sentido do vector momento é o que aponta para o lado do plano  $\pi$ , em que um observador vê a força  $\vec{F}$  produzir rotação, em torno de A, em sentido directo.

O vector momento,  $\vec{M}$ , considera-se aplicado no ponto A.

Torna-se claro que quanto maior for o valor de  $\vec{F}$ , maior será a acção trituradora da mandíbula. O vector  $\vec{C}$  é a força que os ossos da face exercem sobre a mandíbula na charneira A e  $\vec{P}$  é a força que o alimento exerce sobre a mandíbula.

O equilíbrio de forças é dado pela equação

$$\vec{C} + \vec{P} + \vec{F} = 0$$

O equilíbrio de momentos, considerados em relação à charneira A é dado pela equação

$$P(a + b) = Fb$$

donde

$$F = P(a/b + 1)$$

pelo que o músculo terá de ser muito forte. Considerando os momentos em relação ao ponto B, ponto de aplicação de  $\vec{F}$ , vem

$$Cb = Pa$$

ou

$$C = Pa/b$$

indicando uma reacção considerável na charneira durante a mastigação.

Na Fig. 1.8 podemos ver outra mandíbula de réptil fóssil, posterior na escala de evolução ao da Fig. 1.7, este já com a contribuição de dois músculos, originando as forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , responsáveis pelo movimento de rotação da mandíbula em torno do ponto A. Considerando isoladamente a acção destas forças, o vector momento resultante da sua acção,  $\vec{M}_R$ , é a soma dos momentos de cada uma das forças, em relação a A.

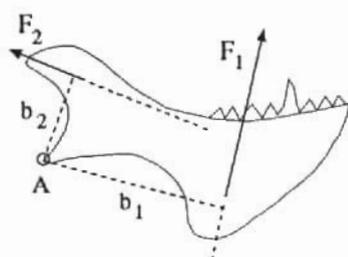


Fig. 1.8 - O momento resultante, em relação ao ponto A, das duas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , é perpendicular ao plano da figura, aponta para este lado do papel e tem módulo  $F_1 b_1 + F_2 b_2$ .

Os momentos das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  em relação a A são vectores perpendiculares ao plano da figura, apontam para este lado do papel e são aplicados em A. As duas forças produzem efeitos de rotação com o mesmo sentido em torno de A. O vector  $\vec{M}_R$  tem como módulo:

$$|\vec{M}_R| = F_1 b_1 + F_2 b_2$$

### 3 - Produto vectorial

O produto vectorial, Fig. 1.9, de dois vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  concorrentes (cujas linhas de acção se cruzam) num ponto A é um vector  $\vec{V}$  que:

- 1° — É perpendicular ao plano  $\pi$  definido por  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ ;
- 2° — Tem por módulo o produto  $rF\sin\theta$ , (com r e F os módulos dos vectores factores e  $\theta$  o ângulo ( $< 180^\circ$ ) entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ ) e
- 3° — O sentido do vector produto é o que aponta para o lado do plano  $\pi$  em que um observador vê o vector  $\vec{r}$  descrever o ângulo  $\theta$  sobre  $\vec{F}$  em sentido directo. Este produto exprime-se pela equação

$$\vec{V} = \vec{r} \times \vec{F}$$

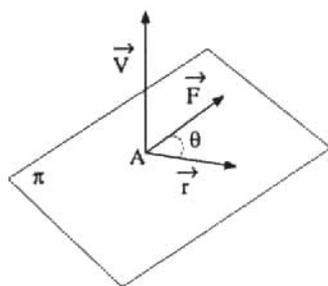


Fig. 1.9 - Definição de produto vectorial  $\vec{V}$  de dois vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ .

Algumas propriedades do produto vectorial são imediatas:

- Se dois vectores têm a mesma direcção ( $\theta = 0$  ou  $180^\circ$ ) o seu produto vectorial é nulo.
- O produto vectorial tem por módulo a área do paralelogramo de lados  $r$  e  $F$  (igual à do rectângulo de lados  $r \sin \theta$  e  $F$ ).
- A propriedade comutativa não se verifica no produto vectorial.

De facto

$$\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r} \quad 1.9$$

- Pode provar-se, quanto às outras propriedades do produto, que a propriedade distributiva é verificada, mas não a associativa, ou seja

$$\vec{F} \times (\vec{V} + \vec{S}) = \vec{F} \times \vec{V} + \vec{F} \times \vec{S} \quad 1.10$$

e

$$(\vec{F} \times \vec{V}) \times \vec{S} \neq \vec{F} \times (\vec{V} \times \vec{S}) \quad 1.11$$

### 3.1 - Representação do momento por produto vectorial

O momento  $\vec{M}$  de uma força em relação a um ponto pode ser expresso utilizando o produto vectorial.

Consideremos a força  $\vec{F}$ , da Fig. 1.10, suposta a actuar no ponto C de um sólido rígido. O momento de  $\vec{F}$  em relação ao ponto A, ponto fixo do sólido, pode obter-se utilizando o produto vectorial do vector posição  $\vec{r}$  com  $\vec{F}$ . O vector  $\vec{r}$  define a posição de C em relação a A. Então

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

e

$$|\vec{M}| = rF \sin\theta = bF$$

A linha de acção de  $\vec{M}$  representa o eixo em torno do qual o sólido, se tivesse o ponto A fixo, rodaria sob a acção de  $\vec{F}$ .

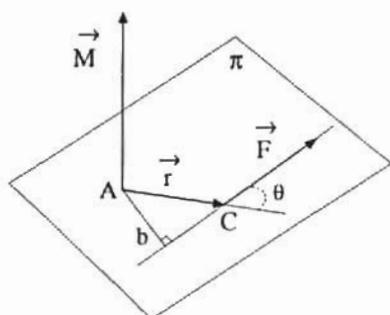


Fig. 1.10 - O momento de  $\vec{F}$  em relação ao ponto A pode obter-se utilizando o produto vectorial do vector posição  $\vec{r}$  com  $\vec{F}$ .

O produto vectorial permite assim definir o momento de uma força de um modo mais prático e imediato do que a utilizada anteriormente.

A propriedade distributiva do produto vectorial pode ser utilizada para determinar o momento da resultante de várias forças  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \dots$  concorrentes num ponto C.

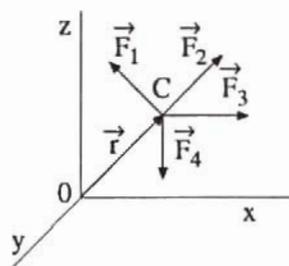


Fig. 1.11 - Forças concorrentes aplicadas no ponto C.

De facto

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \vec{r} \times \vec{F}_4 \dots \quad 1.12$$

que significa que o momento em relação a um ponto da resultante de um sistema de forças concorrentes é igual à soma dos momentos das forças do sistema em relação ao mesmo ponto. Esta propriedade é conhecida por teorema de Varignon.

Na Fig. 1.11 considerámos uma situação tridimensional, ou seja, não condicionámos as forças a situarem-se num único plano. A decomposição de um vector em componentes vectoriais pode ser estendida ao caso dos três eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Consideremos a força  $\vec{F}$  aplicada em  $\theta$  (Fig. 1.12). A força  $\vec{F}$  define planos com cada um dos eixos coordenados e, nesses planos, surgem ângulos entre o vector e os mesmos eixos, respectivamente  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ .

As relações que fornecem as componentes escalares de  $\vec{F}$ , em relação aos três eixos, são, assim, óbvias (Fig. 1.12)

$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$

1.13

Os cosenos dos ângulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$  são os cosenos directores da direcção orientada, definida pelo vector  $\vec{F}$ . Por outro lado, considerando o triângulo com catetos  $F_z$  e  $F_{xy}$  (Figs. 1.12 e 1.13), podemos escrever

$$F^2 = F_{xy}^2 + F_z^2$$

E, para qualquer dos triângulos no plano XOY, temos

$$F_{xy}^2 = F_x^2 + F_y^2$$

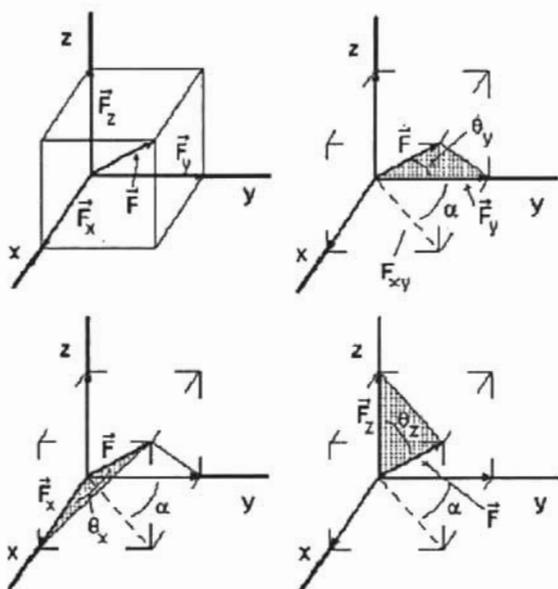


Fig. 1.12 - Projecção da força  $\vec{F}$  sobre os três eixos coordenados.

peço que, eliminando  $F_{xy}^2$  entre as duas equações

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

Na Fig. 1.13 observamos que é possível aplicar a regra do polígono de forças às componentes vectoriais de  $\vec{F}$  obtendo

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \\ &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}\end{aligned}\tag{1.15}$$

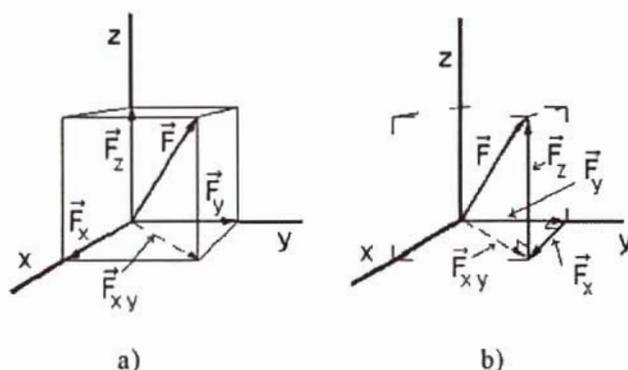


Fig. 1.13 - a) Projecção de  $\vec{F}$  no plano XOY.

b) Regra do polígono de forças aplicada às componentes vectoriais de  $\vec{F}$ .

#### 4 - Produto vectorial e momento em termos de componentes rectangulares

28

Considerem-se dois vectores  $\vec{V}$  e  $\vec{F}$ , e calculemos o seu produto vectorial em termos das suas componentes vectoriais num sistema de eixos coordenados xyz.

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{V} \times \vec{F} = [V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}] \times [F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}] \\ &= P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}\end{aligned}$$

No referencial cartesiano aqui usado, os eixos coordenados são orientados, de modo aos vectores unitários  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  formarem uma tríade positiva ou directa, como temos vindo a adoptar,

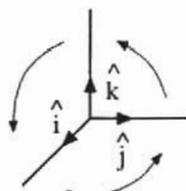


Fig. 1.14 - Os produtos vectoriais dos vectores unitários, segundo os eixos de uma tríade positiva.

Numa tríade positiva (Fig. 1.14), cada um dos três vectores unitários  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  transforma-se no seguinte por rotação de  $90^\circ$  em sentido directo em torno do terceiro, ou seja, por exemplo, rodando de  $90^\circ$ , em sentido directo,  $\hat{i}$  em torno de  $\hat{k}$ , obtém-se  $\hat{j}$ .

Verificamos que:

$$\begin{array}{lll} \hat{i} \times \hat{i} = 0 & \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} & \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{j} = 0 & \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} & \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{k} = 0 & \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} & \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \end{array}$$

então, desenvolvendo a equação inicial obtém-se:

$$\vec{P} = \vec{V} \times \vec{F} = [V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}] \times [F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}] = [P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}]$$

com

$$\begin{array}{l} P_x = V_y F_z - V_z F_y \\ P_y = V_z F_x - V_x F_z \\ P_z = V_x F_y - V_y F_x \end{array} \quad 1.16$$

Retomemos a expressão do momento de uma força em relação a um ponto, tomado como origem das coordenadas e consideremos as componentes rectangulares dos vectores envolvidos.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = [x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}] \times [F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}] = [M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}]$$

$$M_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

Provaremos que estas componentes medem a tendência que a força  $\vec{F}$  tem de imprimir rotação, segundo as direcções dos eixos dos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

## 5 - Produto escalar

Produto escalar entre dois vectores, fazendo entre si um ângulo  $\theta$  ( $\leq 180^\circ$ ), é um escalar dado pela equação:

$$\vec{V} \cdot \vec{F} = p = V F \cos \theta \quad 1.17$$

Considerando as componentes dos vectores  $\vec{V}$  e  $\vec{F}$  segundo os eixos, vem

$$\begin{aligned} p &= [V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}] \cdot [F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}] \\ &= V_x F_x + V_y F_y + V_z F_z \end{aligned} \quad 1.18$$

já que

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

O produto escalar de um vector por um vector unitário, segundo uma dada direcção, representa a componente escalar do vector, segundo essa direcção; de facto, para os eixos coordenados vêm:

$$\vec{V} \cdot \hat{i} = V \cos \theta_x = V_x$$

$$\vec{V} \cdot \hat{j} = V \cos \theta_y = V_y$$

$$\vec{V} \cdot \hat{k} = V \cos \theta_z = V_z$$

De um modo geral, para um eixo orientado qualquer, definido pelo vector unitário  $\hat{i}$ , temos  $\vec{V} \cdot \hat{i} = V \cos \theta_i$ , sendo  $\theta_i$  o ângulo que  $\vec{V}$  faz com  $\hat{i}$ .

O produto escalar goza da propriedade comutativa, como deriva da própria definição

$$\vec{V} \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad 1.19$$

A propriedade distributiva do produto escalar

$$\vec{V} \cdot (\vec{F} + \vec{P}) = \vec{V} \cdot \vec{F} + \vec{V} \cdot \vec{P} \quad 1.20$$

demonstra-se facilmente. Suponhamos que  $\vec{V}$  coincide com o eixo dos  $y$  e que  $\vec{Q} = \vec{F} + \vec{P}$ .

Então a Eq. 1.20 é:

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot (\vec{F} + \vec{P}) &= V F_y + V P_y \\ &= V (F_y + P_y) = V Q_y \end{aligned} \quad 1.21$$

o que prova a Eq. 1.20.

A propriedade associativa não existe, pois não faz sentido escrever  $\vec{V} \cdot (\vec{F} \cdot \vec{P})$  já que o primeiro produto não é produto escalar, mas o produto de um vector por um escalar.

### 6 - Produto triplo composto

O produto triplo composto de três vectores  $\vec{V}$ ,  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$  é a expressão escalar definida por

$$\vec{V} \cdot (\vec{F} \times \vec{P}) \quad 1.22$$

que não é mais do que o produto escalar entre o vector  $\vec{V}$  e o vector produto vectorial entre  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$  (Fig. 1.15).

O produto triplo composto é, em módulo, igual ao volume de um paralelepípedo que tem por lados os 3 vectores do produto. Como se vê na Fig. 1.16, o paralelepípedo tem o volume

$$V \cos \phi (F P \sin \theta) \quad 1.23$$

que iguala o módulo do produto triplo composto.

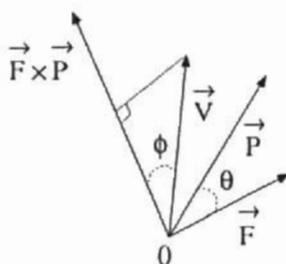


Fig. 1.15 - O produto triplo composto de três vectores  $\vec{V}$ ,  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$  é o produto escalar entre os vectores  $\vec{V}$  e  $\vec{F} \times \vec{P}$ .

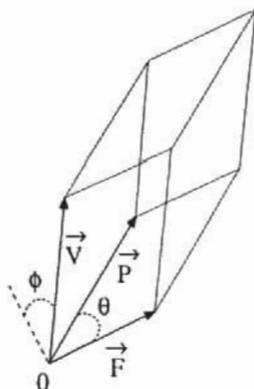


Fig. 1.16 - O produto triplo composto é, em módulo, igual ao volume de um paralelepípedo que tem por lados os 3 vectores do produto.

O produto triplo composto é positivo se  $\vec{V}$  e  $(\vec{F} \times \vec{P})$  apontam para o mesmo lado do plano definido pelos vectores  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$ , ou seja, se  $\vec{V}$ ,  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$  formarem uma triade positiva (triade da mão direita) e negativo na situação contrária, que corresponde à rotação que leva  $\vec{F}$  a coincidir com  $\vec{P}$  ser vista em sentido contrário ao directo quando vista do lado do plano para que aponta  $\vec{V}$ .

Uma importante propriedade do produto triplo composto é ser nulo sempre que os três vectores intervenientes são coplanares. O produto triplo composto pode ser expresso através das componentes dos vectores intervenientes (Eqs. 1.16 e 1.18).

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot (\vec{F} \times \vec{P}) &= V_x (F_y P_z - F_z P_y) + \\ &+ V_y (F_z P_x - F_x P_z) + \\ &+ V_z (F_x P_y - F_y P_x) \end{aligned}$$

7 - Momento de uma força em relação a um eixo

Por definição, momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo E, orientado pelo vector unitário  $\hat{\lambda}$ , é um vector na direcção do eixo, cuja componente sobre o eixo é o escalar  $M_e$ , projecção sobre o eixo do momento da força em relação a qualquer ponto do eixo (Fig. 1.17). Assim, o escalar  $M_e$  vem dado por

$$M_e = \hat{\lambda} \cdot \vec{M}_o = \hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \quad 1.24$$

e o vector momento será

$$\vec{M}_e = M_e \hat{\lambda} = (\hat{\lambda} \cdot \vec{M}_o) \hat{\lambda} = [\hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})] \hat{\lambda}$$

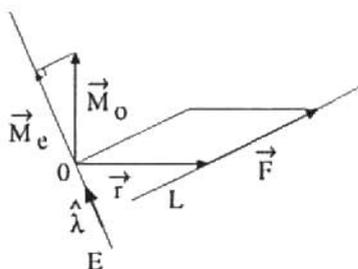


Fig. 1.17 - Momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo E orientado pelo vector unitário  $\hat{\lambda}$ ; o escalar  $M_e$ , é a projecção sobre o eixo do momento da força em relação a um ponto do eixo.

O módulo do momento de uma força em relação a um eixo é traduzido por um produto triplo composto (Eq. 1.24) de  $\hat{\lambda}$  e  $\vec{r} \times \vec{F}$ . O momento  $\vec{M}_o$  da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto O do eixo E pode ser escrito como:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

ou considerando a decomposição dos vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  (Fig. 1.18)

$$\vec{M}_o = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

O significado físico do momento de uma força em relação a um eixo torna-se mais evidente se decomposermos o vector  $\vec{F}$  em duas componentes  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , a primeira num eixo L paralelo ao eixo E e a segunda num plano,  $\pi$ , normal ao eixo E e contendo a origem da força (Fig. 1.18). Este plano corta o eixo E no ponto A.

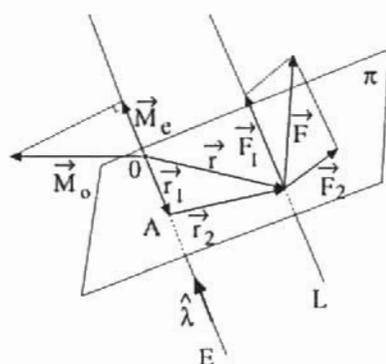


Fig. 1.18 - Decomposição do vector  $\vec{F}$  em duas componentes  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , a primeira no eixo L paralelo ao eixo E e a segunda no plano  $\pi$  normal a E.

O momento de  $\vec{F}$  em relação ao eixo, vem

$$\begin{aligned} M_e &= \hat{\lambda} \cdot [(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)] \\ &= \hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + \hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_2) + \hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_1) + \hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) \quad 1.25 \end{aligned}$$

As três primeiras parcelas da soma são produtos triplos compostos em que os três vectores intervenientes, aplicados num ponto, são compla-

nares, sendo portanto, nulas. O produto vectorial  $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1$  mede a tendência de rotação do corpo rígido sob a acção da força  $\vec{F}_1$ , em torno do ponto A.

O escalar  $M_e$  mede a tendência do corpo rígido sob a acção da força  $\vec{F}_2$  rodar em torno do eixo E.

O produto triplo composto

$$\hat{\lambda} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2)$$

é um escalar positivo se os vectores  $\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$  e  $\hat{\lambda}$ , que são vectores normais a  $\pi$ , tiverem o mesmo sentido.

A força  $\vec{F}_1$  não contribui para o movimento de rotação em torno de E, visto ser paralela a este eixo. Então o momento da força  $\vec{F}_2$ , em relação a um eixo, mede a tendência da força produzir rotação em torno do eixo.

Os momentos de  $\vec{F}$  em relação aos eixos de um sistema de coordenadas são as componentes, segundo os eixos, do momento da força em relação à origem de coordenadas. Já vimos que estas componentes são

$$M_x = yF_z - zF_y \quad 1.26$$

$$M_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

## 8 - Binários

Consideremos um sólido indeformável, sobre o qual actuam simultaneamente duas forças de igual intensidade, que actuam em linhas de acção paralelas e têm sentidos contrários, ou seja, constituindo um binário (Fig. 1.19-a e 1.19-b).

O momento do binário em relação ao ponto  $O$ , ou seja, o momento resultante das forças que o constituem em relação a esse ponto é, para os dois casos a) e b):

$$\vec{M}_R = \vec{r}_B \times (-\vec{F}) + \vec{r}_C \times \vec{F} = (\vec{r}_C - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad 1.27$$

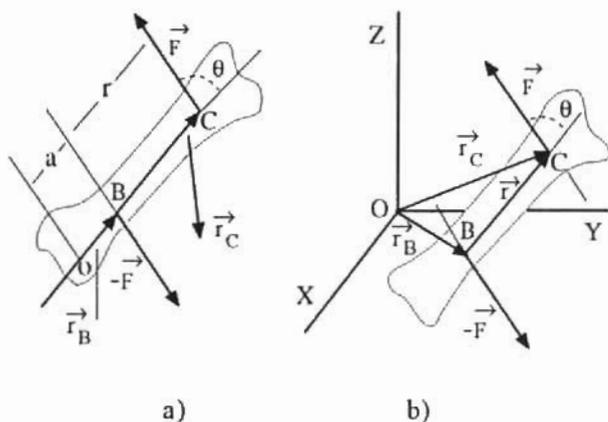


Fig. 1.19 - Momento de um binário aplicado a um sólido indeformável, em relação ao ponto  $O$ .  
 No caso a) o ponto  $O$  situa-se na linha que une os pontos de aplicação das forças.  
 O caso b) é geral.

Na Fig. 1.19 a) os vectores posição  $\vec{r}_B$  e  $\vec{r}_C$  têm por módulo  $a$  e  $(a + r)$  respectivamente.

Qualquer que seja o ponto  $O$  em relação ao qual se determine o momento, a soma dos momentos das forças consideradas é um vector perpendicular ao plano que contém os dois vectores  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  (que podemos supor o plano do papel) e de módulo

$$|\vec{M}_R| = F r \sin \theta \quad 1.28$$

O vector momento resultante aponta para o nosso lado do papel, sentido que considerámos positivo. Por não depender da posição do ponto  $O$ , em relação ao qual é calculado, o vector momento de um binário é um vector livre, enquanto que, por exemplo, o momento de uma força em relação a um ponto é um vector aplicado.

Dois binários com momentos iguais e opostos não exercem qualquer efeito sobre um sólido rígido. Este par de binários equivale a um par de forças iguais e opostas. De facto, consideremos os dois binários  $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$  com as forças a actuarem respectivamente segundo as linhas de acção  $L_1$  e  $L'_1$  e  $L_2$  e  $L'_2$  (Fig. 1.20). Calculemos as resultantes das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  e de  $-\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}_2$  nos pontos de concorrência  $A$  e  $B$  das suas linhas de acção.

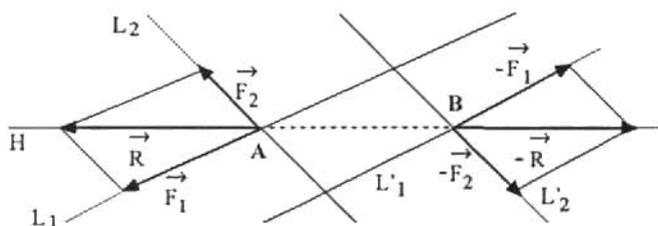


Fig. 1.20 - Dois binários com momentos iguais e opostos são equivalentes a um par de forças iguais e opostas.

As resultantes  $\vec{R}$  e  $-\vec{R}$  terão de ser vectores do mesmo módulo, mesma direcção e sentidos opostos. O momento da resultante  $-\vec{R}$  em relação ao ponto  $A$  tem que ser nulo, pois o momento total é nulo, pelo que  $-\vec{R}$  assenta em  $H$ .

Conclusão idêntica podemos obter para o momento de  $\vec{R}$  em relação a  $B$ . Portanto,  $\vec{R}$  e  $-\vec{R}$  terão de estar na mesma linha de acção, o que demonstra o que se pretendia.

## 9 - Sistemas de forças equivalentes

Dois sistemas de forças são equivalentes se têm o mesmo efeito sobre um sólido indeformável, sendo possível transformar um no outro utilizando as operações elementares que conhecemos.

Vamos provar que dois binários com o mesmo momento são equivalentes. Consideremos dois binários  $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$  com o mesmo momento e nos quais as forças actuam respectivamente segundo as linhas de acção  $L_1$  e  $L'_1$  e  $L_2$  e  $L'_2$  (Fig. 1.21).

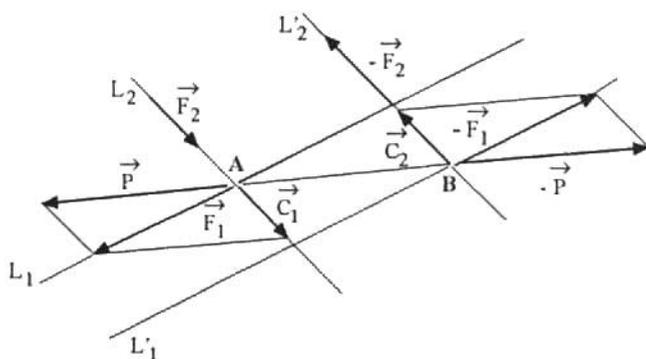


Fig. 1.21 - Dois binários com momentos iguais são equivalentes.

Determinemos as componentes vectoriais das forças  $\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}_1$ , nos pontos de concorrência **A** e **B**, respectivamente, segundo as direcções das linhas  $L_2$  e  $\overline{AB}$  e  $L'_2$  e  $\overline{AB}$ . As forças  $\vec{P}$  e  $-\vec{P}$  segundo  $\overline{AB}$  são iguais e opostas, visto serem projecções, segundo a mesma direcção, de forças iguais e opostas, o mesmo sucedendo com as forças  $\vec{C}_1$  e  $\vec{C}_2$ . As primeiras forças situam-se na mesma linha de acção anulando-se. As segundas constituem um binário, cujo momento terá de igualar o momento do binário  $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$ . Obviamente o binário constituído pelas forças  $\vec{C}_1$  e  $\vec{C}_2$  é igual ao constituído pelas forças  $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$  o que prova o pretendido.

### 10 - Soma de binários

Consideremos dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  que se interceptam segundo a linha  $\overline{AB}$  (Fig. 1.22).

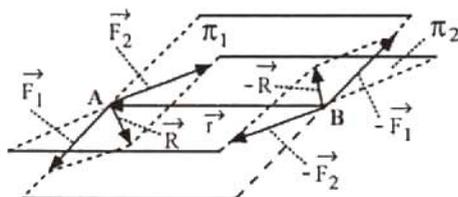


Fig. 1.22 - Soma de dois binários.

Suponhamos que qualquer binário  $\vec{M}_1$  actuando em  $\pi_1$  é equivalente ao binário  $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$  com as forças aplicadas em **A** e **B**, e normais a  $\overline{AB}$ . Do mesmo modo, qualquer binário com momento  $\vec{M}_2$  actuando em  $\pi_2$  é redutível ao binário  $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$  igualmente com as forças aplicadas em **A** e **B** normais a  $\overline{AB}$ .

As resultantes de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  e  $-\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}_2$ , respectivamente,  $\vec{R}$  e  $-\vec{R}$  formam, por sua vez, um binário. O momento deste binário é o momento de  $\vec{R}$  em relação a **B**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

Pelo teorema de Varignon vem

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{aligned} \tag{1.29}$$

A soma de dois binários de momentos  $\vec{M}_1$  e  $\vec{M}_2$  é um binário com momento  $\vec{M}$  soma vectorial de  $\vec{M}_1$  e  $\vec{M}_2$ .

## 11 - Representação de binários por vectores

Binários com o mesmo momento, e situados no mesmo plano, ou em planos paralelos são equivalentes. Nestas condições, o efeito do binário sobre um sólido indeformável fica caracterizado pela direcção e intensidade do correspondente vector momento. Por outro lado, a soma de dois binários é um binário, cujo momento é a soma dos momentos respectivos. Sendo assim, os binários obedecem às leis de adição de vectores e podem ser traduzidos pelos seus vectores momento, pelo que os representaremos por vectores (vectores binários) mas, para não serem confundidos com os vectores força, com uma pequena seta circular, como se vê na Fig. 1.23.

Um binário pode ser representado de formas diversas. Pelas forças, Fig. 1.23 (1), pelo momento normal ao plano do binário, Fig. 1.23 (2), pelo momento aplicado na origem dos sistemas de eixos, Fig. 1.23 (3) e pelos momentos em relação aos eixos, Fig. 1.23 (4).

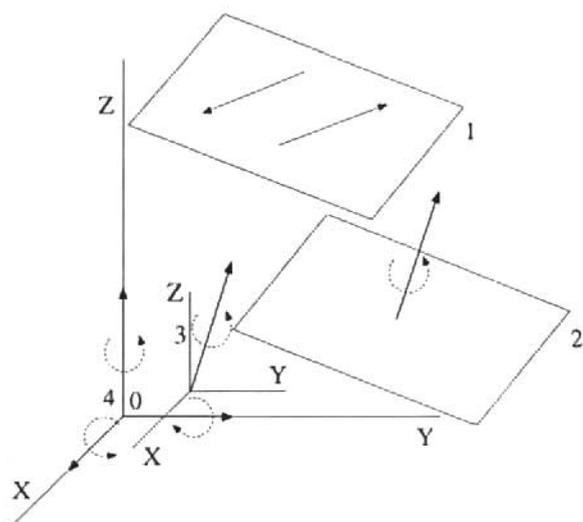


Fig. 1.23 - Formas de representar um binário. Pelas forças (1), pelo momento normal ao plano do binário (2), pelo momento aplicado na origem dos sistemas de eixos (3) e pelos momentos em relação aos eixos (4).

**12 - Substituição de uma força aplicada num ponto de um sólido rígido por uma força igual, aplicada noutro ponto, mais um binário**

Suponhamos que a força  $\vec{F}$  aplicada no ponto **A** de um sólido indeformável se pretende aplicada noutro ponto **O** sem modificar, contudo, a sua acção sobre o sólido (Fig. 1.24). Podemos considerar um par de forças iguais e opostas, aplicadas no ponto **O**, com intensidade igual a  $|\vec{F}|$  e assentes numa linha de acção paralela à força  $\vec{F}$ . Este par de forças não exerce qualquer acção sobre o sólido. A força  $\vec{F}$  aplicada em **A** e  $-\vec{F}$  aplicada em **O** constituem um binário de momento  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , normal ao plano do binário e a apontar para o lado do plano em que se vê  $\vec{r}$  a rodar sobre  $\vec{F}$  segundo um ângulo menor do que  $180^\circ$ .

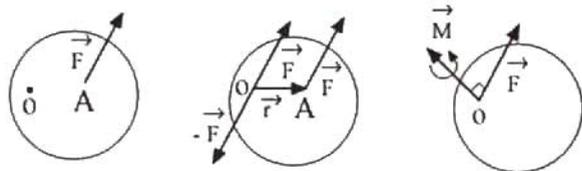


Fig. 1.24 - Substituição de uma força aplicada num ponto de um sólido rígido por uma força igual, aplicada noutro ponto, mais um binário.

Podemos considerar o momento  $\vec{M}$  aplicado em **O** juntamente com a força  $\vec{F}$ . Este par força-binário aplicado em **O** é equivalente à força  $\vec{F}$  aplicada em **A**.

**13 - Redução de qualquer sistema de forças aplicadas num sólido indeformável a uma força e a um binário**

Consideremos um sistema de forças  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$ , não necessariamente concorrentes, aplicadas num sólido rígido e suponhamos que interessa reduzir este sistema a acções aplicadas no ponto **C** (Fig. 1.25).

Substituamos, uma a uma, as forças, pelas força e binário equivalentes, aplicados no ponto  $C$ . Considerando as resultantes das forças e dos momentos aplicados em  $C$ , ficamos com um par força-vector binário equivalente ao sistema de forças inicial, ou seja, que traduz inteiramente a sua acção sobre o sólido.

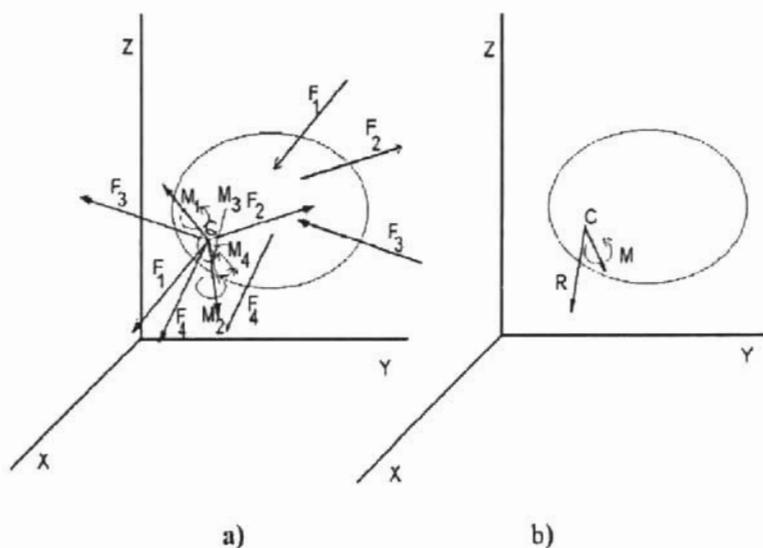


Fig. 1.25 - Substituição de um sistema de forças aplicadas num sólido rígido por uma força e um binário aplicados num ponto  $C$  do sólido. a) Substituição das forças  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$ , por forças iguais e pelos vectores binários com momentos iguais aos momentos destas forças em relação a  $C$ , aplicados neste ponto. b) Resultante das forças e dos vectores binários em  $C$ .

## 14 - Equilíbrio

Já sabemos que quando um corpo se encontra em repouso ou se desloca em movimento uniforme e retilíneo se diz estar em equilíbrio. A força total actuante em tal corpo é nula. Na prática, há sempre um certo número de forças a actuar nos corpos. Há o peso do corpo, que é uma

força vertical actuando de cima para baixo e produzida pela atracção gravitacional existente entre o corpo e a terra e, no caso simples do corpo, assente num plano horizontal, há também a força de reacção,  $\vec{R}$ , do plano sobre o corpo, actuando verticalmente de baixo para cima. Esta reacção tem de estar presente, pois de contrário nada se opunha a que o corpo passasse através do plano que poderia ser, por exemplo, o tampo de uma mesa.

Pode facilmente provar-se que, no equilíbrio, a intensidade da força de reacção é igual ao peso do corpo e são coincidentes as linhas de acção das duas forças. Com o peso e a reacção iguais mas com linhas de acção não coincidentes não ocorreria equilíbrio, pois tem-se um binário a actuar sobre o corpo. Com a linha de acção comum, mas forças com intensidades diferentes, ocorreria movimento com o sentido da resultante.

Já nos referimos a uma condição geral que terá de ser satisfeita para um corpo se encontrar em equilíbrio, ou seja, a obrigatoriedade de ter todos os seus pontos em equilíbrio. Em sentido geral, se um sistema está em equilíbrio é porque a resultante das forças externas e internas aplicadas em cada um dos seus pontos é nula. Nestas condições, a resultante das forças aplicadas e o momento resultante são nulos em relação a qualquer um dos seus pontos. Contudo, interessa-nos principalmente saber quais as condições que, na prática, devem ser satisfeitas pelas forças que estão externamente a actuar sobre o corpo para este se encontrar em equilíbrio. A primeira destas condições é que a resultante das forças aplicadas sobre o corpo seja nula. Se as forças se encontram todas num plano, esta condição pode também ser enunciada em relação às componentes das forças, segundo duas direcções perpendiculares situadas no referido plano. Para haver equilíbrio, a soma dessas componentes terá de ser nula segundo cada um dos eixos.

44

A segunda condição que terá de ser satisfeita, e limitando-nos ainda ao caso das forças se encontrarem todas num plano, é que a soma dos momentos de todas as forças em relação a um ponto qualquer do plano seja zero.

No caso mais geral, para que um sólido esteja em equilíbrio em relação a um sistema de eixos, é condição necessária e suficiente que sejam nulas as somas das projecções, sobre os três eixos, das forças exteriores que

actuan no sistema e que seja nula a soma dos momentos das mesmas forças em relação aos eixos. (Nestas condições gerais, considera-se um sistema de três eixos X,Y,Z e momentos em relação aos eixos, cuja definição relembramos: momento de uma força em relação a um eixo é o momento da projecção da força sobre um plano normal ao eixo em relação ao ponto intersecção do plano com o eixo).

Vejam agora algumas situações práticas de equilíbrio com interesse em biologia. É, por exemplo, comum encontrar corpos em equilíbrio sob a acção de três forças. Em tal caso, do que se disse atrás, deprende-se que as linhas de acção têm de passar por um ponto comum, além da resultante das três forças ser nula. Esta simples conclusão pode ser útil quando se pretende saber quais os músculos usados pelos animais em determinadas operações. Na Fig. 1.26 podemos ver a mandíbula de um carnívoro.

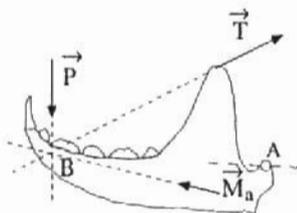


Fig. 1.26 - Forças a actuar na mandíbula de um carnívoro quando o animal come carne: a acção do músculo temporal  $\vec{T}$ , a do masseter  $\vec{M}_a$  e a força de reacção da carne sobre a mandíbula  $\vec{P}$ , perpendicular a esta.

A força  $-\vec{P}$  é exercida pelos dentes sobre a carne quando o animal corta esta. A força  $\vec{P}$  é uma força de reacção a actuar sobre a mandíbula, segundo a normal, e que resulta da carne ser apertada contra o último. Dois músculos, o temporal e o masseter, opõem-se a  $\vec{P}$ , de modo a criar-se o equilíbrio. A acção do músculo temporal está representada pela força  $\vec{T}$  e a do masseter por  $\vec{M}_a$ . Na situação de equilíbrio  $\vec{T} + \vec{M}_a = -\vec{P}$ . Esta igualdade traduz o equilíbrio translacional (ou das forças). O equilíbrio rotacional (ou dos momentos) é garantido pelo cruzamento das linhas de acção num ponto.

Está a supor-se que ocorre equilíbrio sem força de reacção na charneira **A**. Despreza-se a pequena força de reacção que, na prática, poderá ocorrer segundo a direcção  $\overline{AB}$  e a apontar para **B**. A existência desta reacção, que tende a deslocar a mandíbula, impõe uma limitação à força exercida sobre o alimento. No caso do réptil primitivo da Fig. 1.7, a articulação teria de ser extremamente sólida para suportar a enorme reacção exercida.

Nos carnívoros, em geral, o valor máximo da intensidade de  $\vec{T}$  é cerca de duas vezes a da intensidade da força  $\vec{M}_a$  e as linhas de acção destas forças cruzam-se em **B**, na parte anterior da mandíbula, onde irá ocorrer a máxima força, necessária para os animais cortarem a carne ou segurarem as presas.

Se o músculo masseter for cortado e só o músculo temporal actuar, como se mostra na Fig. 1.27, terá de considerar-se a força  $\vec{R}$ , reacção da articulação sobre a mandíbula, a actuar na charneira **A**, para ocorrer o equilíbrio.

Contrariamente à resultante das acções do masseter e do músculo temporal, a resultante  $\vec{F}$  das forças  $\vec{R}$  e  $\vec{T}$  não é normal à mandíbula. A força  $\vec{F}$  tem uma componente normal  $-\vec{P}$  e uma componente tangencial  $\vec{V}$  que actua sobre a mandíbula, puxando-o para fora e que poderá deslocá-lo. Na situação normal, pequena ou nenhuma reacção ocorre na articulação, o que resulta da existência dos dois feixes musculares a actuar.

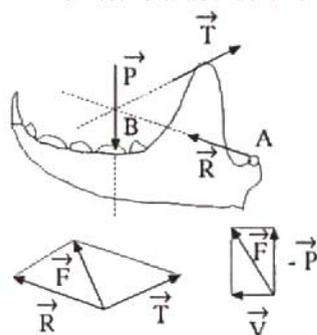


Fig. 1.27 - Forças a actuar na mandíbula de um carnívoro com o masseter seccionado quando o animal come carne: a acção do músculo temporal  $\vec{T}$ , a reacção sobre o fulcro  $\vec{R}$  e  $\vec{P}$  a força de reacção da carne sobre a mandíbula.

Num herbívoro típico, a intensidade máxima da força  $\vec{T}$  é cerca de 12% da intensidade da força  $\vec{M}_a$ , que aqui representa a soma das acções dos músculos masséter e pterigoide lateral. Nestes animais, a contribuição do músculo pterigoide lateral na trituração dos alimentos é muito importante, pois origina os deslocamentos laterais. No cavalo, a massa deste músculo é cerca de três vezes superior à do músculo temporal e cerca de metade da do masseter. Supondo não ocorrer qualquer força na charneira, poderá perguntar-se onde é maior a força exercida sobre os vegetais - na parte posterior ou na parte anterior do maxilar. Como  $\vec{T}$  é pequeno, a orientação de  $\vec{M}_a$  deve ser próxima do vertical, ficando o sistema de forças como se vê na Fig. 1.28. Neste caso, a máxima força ocorre nos dentes molares, que estão adaptados à trituração dos vegetais.

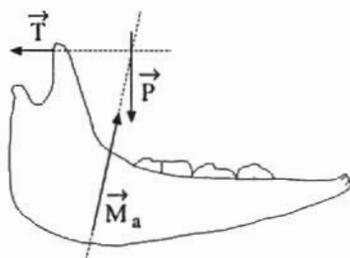


Fig. 1.28 - Forças a actuar na mandíbula de um herbívoro quando este tritura vegetais.

No caso do homem, as forças mais importantes a actuar na mandíbula durante a mastigação, estão indicadas na Fig. 1.29.

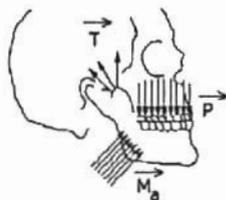


Fig. 1.29 - Forças a actuar na mandíbula do homem durante a mastigação.

As forças  $\vec{T}$  correspondem à acção do temporal, as forças  $\vec{M}_a$  à acção conjugada do masseter e pterigoides lateral e medial e  $\vec{P}$  à reacção do alimento sobre os dentes da mandíbula. O músculo pterigoide medial, e também o pterigoide lateral, actuam como elevadores puxando a mandíbula para trás, posicionando a cabeça do côndilo. O primeiro é também responsável pelos movimentos bordejantes, de deslizamento e de deslocamento lateral.

A acção dos diferentes músculos é controlada pelo sistema nervoso que determina a acção conjunta. Se cada um dos sistemas de forças da Fig. 1.29 for substituído por uma força equivalente  $\vec{T}_E$ ,  $\vec{M}_E$  e  $\vec{P}_E$  as condições de equilíbrio referidas para o caso anterior devem prevalecer para estas forças.

Consideremos outro caso de aplicação das condições de equilíbrio que estudámos. Suponhamos que se pretende saber qual a força e o momento que actuam na secção A do antebraço indicada na Fig. 1.30, numa situação de equilíbrio, quando a mão suporta um peso de 10 kg; a secção A pode corresponder ao local de uma fractura ou de um reimplante, interessando conhecer o esforço a que irá ser sujeito em dadas condições típicas.

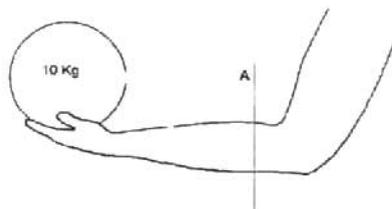


Fig. 1.30 - Pretende saber-se qual a força e o momento que actuam na secção A do antebraço indicada na figura.

Para se estudarem os problemas de estática, consideram-se os objectos ou conjuntos de objectos em análise independentes do sistema a que pertencem, ou seja, consideram-se como corpos livres onde estão a actuar somente as forças responsáveis pelo equilíbrio. Para se efectuar este tipo de estudo é necessário entrar com todas as forças externas a actuar sobre o corpo. Estas são o peso, as acções que são directamente aplicadas sobre

o corpo, para se obterem determinados efeitos, e as reacções dos suportes a que o corpo se encontra ligado. O peso é a resultante das acções da gravidade sobre todas as partículas constituintes do sólido, aplicada no centro de gravidade. As reacções podem ser de diversos tipos. Tratando-se de um problema redutível a duas dimensões as reacções podem ser equivalentes a uma força com direcção conhecida (por exemplo, um corpo assente sobre uma superfície lisa), a uma força com direcção desconhecida (por exemplo, um corpo assente sobre uma superfície rugosa), ou a uma força e um binário ambos desconhecidos (suporte fixo). Estas últimas reacções envolvem três quantidades desconhecidas, também chamadas de graus de liberdade: as duas componentes da força e o binário. Numa primeira aproximação, um dente no seu alvéolo encontra-se nesta situação. No modelo do corpo livre ou das forças aplicadas, para o caso proposto, só interessam as forças a actuar no segmento do antebraço indicado na Fig.1.31.

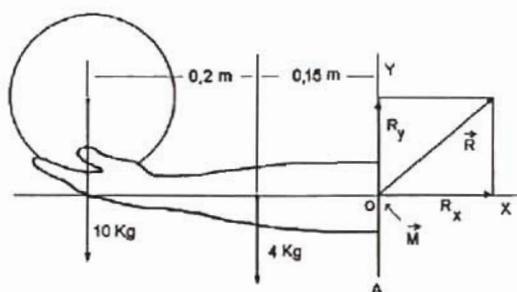


Fig. 1.31 - Modelo do corpo livre para a porção do antebraço limitado pelo plano A.

Consideram-se todas as forças assentes no plano do papel. O equilíbrio só poderá ocorrer devido às acções sobre a secção A. Estas acções podem sempre ser traduzidas por uma força  $\vec{R}$ , situada no plano do papel, e um vector binário  $\vec{M}$  normal a este, aplicado no ponto O. A força  $\vec{R}$  é a ligação ao resto do antebraço, cuja orientação desconhecemos e representamos com uma direcção arbitrária. O vector binário  $\vec{M}$  traduz a acção de rotação que as forças em jogo produzem na secção do antebraço.

A força de 4 Kg é o peso do segmento de antebraço limitado pelo plano A, aplicada no correspondente centro de gravidade. As distâncias indicadas são dados do problema. A força  $\vec{R}$  é desconhecida, assim como o momento  $\vec{M}$ .

Considerando as componentes das forças segundo o sistema de eixos XOY, as condições que estudámos para o equilíbrio dão-nos

$$\Sigma F_x = 0 \quad 1.30$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad 1.31$$

ou seja, a resultante das componentes das forças aplicadas segundo cada um dos eixos é nula no equilíbrio e, para o caso dos momentos

$$\Sigma \vec{M} = 0 \quad 1.32$$

ou seja, o momento resultante das forças aplicadas, em relação a um ponto, é nulo no equilíbrio. Então, no equilíbrio temos

$$R_x = 0 \quad 1.33$$

$$R_y = 10 + 4 = 14 \text{ Kg} = 137,2 \text{ N} \quad 1.34$$

Para os momentos em relação ao ponto O temos

$$10 \times 0,35 + 4 \times 0,15 + R \times 0 + M = 0$$

donde

$$M = -4,1 \text{ Kg m} = -40,18 \text{ N m} \quad 1.35$$

Como o sentido positivo que considerámos para os momentos é o da perpendicular ao plano do papel, apontando para nós, o vector  $\vec{M}$  aponta para dentro do papel.

Uma aplicação do conceito de equilíbrio à medicina dentária é o cálculo do momento de manutenção da oclusão passiva. Pretende saber-se qual é o momento que tem de ser compensado pelas forças musculares para manter oclusão passiva, isto é, oclusão sem resistência interposta entre os dentes.

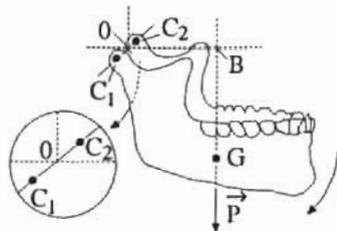


Fig. 1.32 - Acção isolada do peso  $\vec{P}$  da mandíbula. À esquerda detalhe do eixo  $C_1C_2$

Sem a contribuição de qualquer acção muscular, a mandíbula tende a rodar para baixo, em torno do eixo de rotação que une as duas articulações temporomandibulares (ATM) ( $C_1$  e  $C_2$ ), sob a acção do peso  $\vec{P}$  da mandíbula e tecidos. O peso considera-se a actuar no centro de gravidade  $G$  da mandíbula, situado num ponto médio entre os molares. Considerando o momento do peso  $\vec{P}$  em relação ao ponto médio  $O$  do eixo,  $C_1C_2$  temos um vector com a direcção de  $C_1C_2$  a apontar de  $C_1$  para  $C_2$  e de intensidade

$$|M_o| = P \cdot \overline{OB} \quad 1.36$$

O momento do peso  $\vec{P}$  em relação ao eixo  $C_1C_2$  é o próprio vector  $\vec{M}_o$ , visto  $\vec{M}_o$  ter a direcção do eixo. Este momento terá de ser compensado por acção muscular para que a boca seja conservada fechada com os dentes ligeiramente afastados ou unidos em oclusão passiva.

Na oclusão passiva, sem qualquer resistência a exercer-se entre os dentes, o feixe ventral do temporal é o mais efectivo na rotação e o feixe dorsal na translação. O masseter e o pterigoide medial também participam na rotação. O feixe dorsal do temporal contribui sobretudo com força de translação.

Uma análise detalhada das forças e momentos aplicados na mandíbula humana, durante a mastigação, pode ser obtida utilizando o modelo do corpo livre. A acção muscular, ou seja, a contracção dos músculos pode traduzir-se por um vector força ao qual associamos uma grandeza, uma direcção, um sentido e um ponto de aplicação.

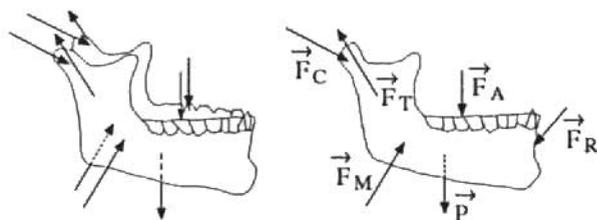


Fig. 1.33 - Forças aplicadas na mandíbula humana, durante a mastigação. Modelo do corpo livre aplicado a toda a mandíbula e a metade desta.

Vamos considerar o modelo do corpo livre aplicado à metade direita da mandíbula com a intenção de calcular a intensidade e orientação da força a actuar no cõndilo da mandíbula, para uma dada força de mastigação. É evidente que se parte do princípio que estando a mandíbula em equilíbrio qualquer parte do mesmo também estará. Consideremos a Fig. 1.33 onde, de um modo simplificado, o problema é traduzido por um diagrama mecânico das forças aplicadas. As forças  $\vec{F}_T$  correspondem à acção resultante das fibras do músculo temporal direito, as forças  $\vec{F}_M$  à acção conjugada das fibras dos músculos masseter e pterigoide direito,  $\vec{F}_A$  à reacção do alimento sobre os dentes da metade direita da mandíbula,  $\vec{F}_C$  à acção sobre o cõndilo direito da mandíbula e  $\vec{P}$  ao peso de metade da mandíbula. As coordenadas dos pontos de aplicação destas forças são respectivamente  $(x_T, y_T)$ ,  $(x_M, y_M)$ ,  $(x_A, y_A)$ ,  $(x_C=0, y_C=0)$  e  $(x_P, y_P)$ . Os correspondentes ângulos com a direcção positiva dos XX são  $\theta_T$ ,  $\theta_M$ ,  $3\pi/2$ ,  $(\pi+\theta_C)$  e  $3\pi/2$ , (Fig. 1.34).

As condições de equilíbrio do sistema implicam que a soma de todas as forças aplicadas sobre a metade direita da mandíbula e a soma dos momentos dessas forças em relação a um ponto do plano, devam ser nulos.

Todas as forças representadas encontram-se no plano do papel e podemos considerar as suas componentes num sistema de eixos coordenados XOY. A condição de que a força total seja nula traz-nos para as componentes X e Y as equações:

$$X: F_C \cos(\pi + \theta_C) + F_T \cos \theta_T + F_M \cos \theta_M = 0 \quad 1.37$$

$$Y: F_C \sin(\pi + \theta_C) + F_T \sin \theta_T + F_M \sin \theta_M - F_A - P = 0 \quad 1.38$$

A condição dos momentos, considerando a origem das coordenadas como origem dos momentos e o sentido positivo da normal à figura aquele que aponta para nós, pode traduzir-se pelas componentes escalares segundo esta direcção:

$$M: b_T F_T + b_M F_M - x_A F_A - x_P P = 0 \quad 1.39$$

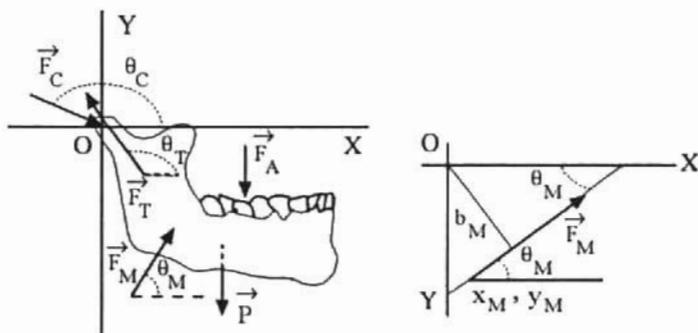


Fig. 1.34 - Forças aplicadas sobre a metade direita da mandíbula humana. Supondo equilíbrio, a soma de todas as forças aplicadas sobre o objecto e a soma dos momentos dessas forças em relação a um ponto do plano deve ser nula.

Para calcular os valores de  $b_T$  e  $b_M$  considere-se o pormenor à direita, na Fig. 1.34, que se refere a  $b_M$ . A recta que passa pelo ponto  $(x_M, y_M)$  com inclinação  $\text{tg } \theta_M$  intersecta o eixo dos XX no ponto de abscissa

$$x_d = \frac{x_M \text{tg} \theta_M - y_M}{\text{tg} \theta_M}$$

então

$$b_M = x_d \sin \theta_M \quad 1.40$$

Igual procedimento levaria ao cálculo de  $b_T$ .

Supõe-se, neste problema, que são conhecidos  $\theta_T$  e  $\theta_M$  bem como as linhas de acção de  $F_T$  e  $F_M$  e, conseqüentemente,  $b_T$  e  $b_M$  e, ainda, os valores de  $x_P$ ,  $y_P$  e  $P$ . Finalmente  $F_A$  e  $x_A$ ,  $y_A$  são dados do problema. As incógnitas são pois  $F_M$ ,  $F_T$ ,  $F_C$  e  $\theta_C$ .

## 15 - Atrito entre sólidos

Quando dois corpos se encontram em contacto, as irregularidades que sempre existem nas suas superfícies e alguma interacção molecular, originam forças que resistem ao movimento (Fig. 1.35-b). As leis do atrito podem entender-se através de uma experiência simples. Se um prisma de peso  $\vec{W}$  é colocado sobre uma superfície horizontal plana as forças a actuar sobre o sólido são o seu peso e a reacção da superfície  $\vec{N}$  que tem de ser vertical e oposta ao peso, visto haver equilíbrio. A reacção normal  $\vec{N}$  da superfície a actuar sobre o prisma é igual à que ocorreria no mesmo problema sem atrito.

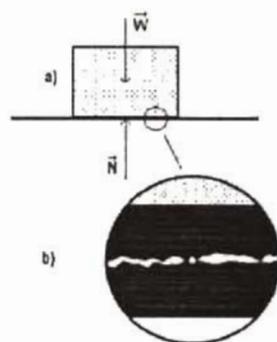


Fig. 1.35 - a) Reacção  $\vec{N}$  do apoio sobre um corpo de peso  $\vec{W}$ . b) Ampliação da zona de contacto entre as duas superfícies.

Se uma força horizontal  $\vec{S}$  é aplicada ao corpo verifica-se que este se mantém imóvel, enquanto o módulo da força não ultrapassar um dado valor limite  $\vec{S}_m$ . Gera-se, entre as duas superfícies, uma força estática de atrito  $\vec{F}$ , igual e oposta a  $\vec{S}$ , até que o referido valor seja atingido e para o qual  $\vec{F} = \vec{F}_m$ .

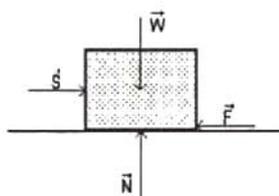


Fig. 1.36 - Força estática de atrito  $\vec{F}$ , oposta a  $\vec{S}$ .

Para valores superiores a  $\vec{S}_m$  a força de atrito não consegue manter equilíbrio, deslocando-se o prisma sobre o plano. Contudo, mal ocorra movimento relativo entre as duas superfícies, a força de atrito passa do valor  $\vec{F}_m$  para um valor menor,  $\vec{F}_c$ , como se observa na Fig. 1.37. Esta força  $\vec{F}_c$  é chamada de força de atrito cinético. Verifica-se então que, mal o corpo é posto em movimento, a força de fricção oposta à força  $\vec{S}$  diminui.

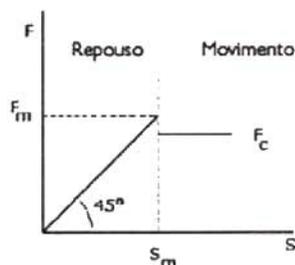


Fig. 1.37 - Módulo da força de atrito  $\vec{F}$  em função de S. Mal o sólido inicia o seu movimento a força de atrito passa do valor  $\vec{F}_m$  para  $\vec{F}_c$ .

Verifica-se que o valor máximo da força estática de atrito é proporcional ao valor da reacção normal da superfície, ou seja,

$$F_m = \mu_e N \quad 1.41$$

onde a constante  $\mu_e$  é o coeficiente de atrito estático.

Também se verifica experimentalmente que

$$F_c = \mu_c N \quad 1.42$$

sendo a constante  $\mu_c$  o coeficiente de atrito cinético. É evidente que  $\mu_e > \mu_c$ .

Os coeficientes  $\mu_e$  e  $\mu_c$  dependem da natureza das superfícies em contacto, quadro 1.1, mas são independentes da área de contacto.

Quadro 1.1 - Coeficientes de atrito de alguns materiais.

Pares de materiais	Coef. de atrito (seco)	Coef. de atrito (húmido)
Amálgama/porcelana	0,06 - 0,12	0,07 - 0,15
Acrílico/acrílico	0,21	0,37
Acrílico/porcelana	0,23	0,30
Porcelana/porcelana	0,14	0,51
Liga-Ouro/acrílico	0,6 - 0,8	

Se a força  $\vec{S}$  for oblíqua em relação à superfície, a soma da sua componente vertical com o peso do corpo determinam a reacção normal e a componente horizontal de  $\vec{S}$  determina a força de atrito (Fig. 1.38). Podem considerar-se os seguintes casos:

$F = S_x$	$F < \mu_e N$	$N = S_y + W$	Equilíbrio
$F_m = S_x$	$F_m = \mu_e N$	$N = S_y + W$	Situação limite
$F_c < S_x$	$F_c = \mu_c N$	$N = S_y + W$	Movimento

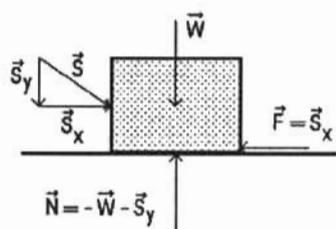


Fig. 1.38 - Representação das forças a actuar, quando a força  $\vec{S}$ , oblíqua, é aplicada ao corpo e ocorre equilíbrio.

Podem substituir-se as forças  $\vec{N}$  e  $\vec{F}$  pela sua resultante  $\vec{R}$  (Fig.1.39). Desde que a força  $\vec{S}$  tenha uma componente  $\vec{S}_x$  não nula o ângulo  $\phi$  é maior do que zero. Se a componente  $\vec{S}_x$  é aumentada até ao limite, após o qual a massa começa a deslocar-se, o ângulo  $\phi$  atinge o seu valor máximo  $\phi_c$  (ângulo de atrito estático). Pode escrever-se

$$\operatorname{tg} \phi_c = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_c N}{N} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \phi_c = \mu_c \quad 1.43$$

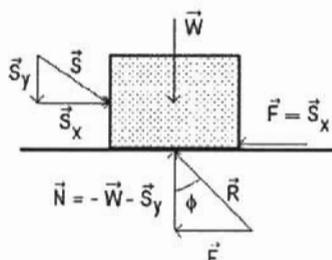


Fig. 1.39 - Representação das forças a actuar quando a força  $\vec{S}$ , oblíqua, é aplicada ao corpo, onde se evidencia o ângulo  $\phi$  que a força  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}$  faz com a normal à superfície.

Se a intensidade da componente  $\vec{S}_x$  da força aplicada ultrapassa o valor  $F_m$  produz-se o deslocamento da massa e a força de atrito baixa para  $F_c$ . A resultante  $\vec{R}$  faz, nestas condições, o ângulo  $\phi_c$  (ângulo de atrito cinético) com a vertical. Tem-se agora

$$\operatorname{tg} \phi_c = \frac{F_c}{N} = \frac{\mu_c N}{N} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \phi_c = \mu_c \quad 1.44$$

Podemos interpretar a acção das forças de atrito se considerarmos a componente do peso numa direcção paralela ao plano em que o corpo se apoia, para diversas inclinações do plano (Fig. 1.40). Na situação mais simples de um corpo em equilíbrio apoiado numa superfície horizontal, Fig. 1.40-a), apenas duas forças iguais e directamente opostas, o peso  $\vec{W}$  e a reacção normal do plano  $\vec{N}$ , actuam no corpo.

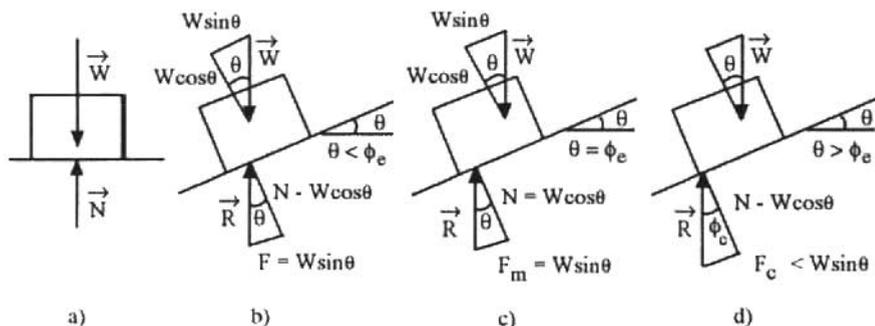


Fig. 1.40 - Situações estáticas a), b) e c) e dinâmica d) quando se tem o paralelogramo assente sobre planos com diferentes inclinações.

Para uma pequena inclinação, Fig. 1.40-b), o equilíbrio do corpo é garantido pela força de atrito estático  $F = W \sin \theta$  que equilibra a componente do peso  $W \sin \theta$  na direcção do plano; situação semelhante verifica-se até que se atinge a condição limite para a qual  $\theta = \phi_e = \operatorname{arctg} \mu_e$ , Fig. 1.40-c), em que a força de atrito estático atinge o valor máximo, para as superfícies em contacto. Para valores de  $\theta > \phi_e$ , Fig. 1.40-d), o corpo escorrega sobre o plano em movimento acelerado, pois a componente do peso na direcção do plano excede a força de atrito cinético que se opõe ao movimento, i.e.,

$$W \sin \phi > F_c$$

Convém referir que, por uma questão de simplificação das figuras, os pontos de aplicação dos vectores não se encontram representados na posição correcta; assim, o vector  $\vec{W}$ , peso do corpo, é um vector aplicado no centro de massa do corpo, a reacção normal  $\vec{N}$  e a força de atrito  $\vec{F}$  são aplicados na superfície de contacto corpo/plano, e o ponto de aplicação da força exterior  $S$  deve entender-se situado na superfície lateral do corpo.

Em ortodôncia, ramo da medicina dentária que trata da correcção das posições defeituosas dos dentes, acidentais ou congénitas, são induzidos movimentos dentários para redução dos espaços anormais entre dentes. Estes movimentos são obtidos utilizando dois conceitos mecânicos distintos. O primeiro tipo, utiliza a reacção elástica de fios metálicos, ligados aos dentes, constituindo arcos fechados, numa técnica chamada de segmentos ou secções. Os dentes deslocam-se sob acções fracas com relação momento/força controlada.

No segundo tipo ocorre o deslocamento de suportes ao longo de fios, ou o deslizamento de fios através de suportes ou de tubos. Um dos factores mais importantes na diferenciação destas metodologias está na participação das forças de fricção que ocorre no segundo caso. As forças aplicadas nesta técnica são parcialmente compensadas pelas forças de fricção sendo a diferença utilizada para produzir os movimentos dentários.

## 16 – Fundamentos de dinâmica do ponto e de sistemas de pontos

### 16.1 - Momento linear ( ou quantidade de movimento) de um sistema de pontos materiais

Um corpo pode considerar-se um conjunto discreto de partículas de massa individual  $m_i$ . Nesta perspectiva a massa  $M$  do corpo é a soma de todas as partículas que o constituem.

$$\sum_{i=1}^n m_i = M$$

1.45

Por sua vez, o peso do corpo  $\vec{W}$  é a soma vectorial dos vectores peso  $\vec{w}_i$  correspondentes a cada partícula

$$\sum_1^n \vec{w}_i = \vec{W} \quad 1.46$$

A Eq. 1.46 pode obter-se a partir da Eq. 1.45 multiplicando ambos os seus membros pelo vector  $\vec{g}$ , aceleração da gravidade e recordando a segunda lei de Newton, ou seja,

$$\sum_1^n m_i \vec{g} = M \vec{g}$$

equação equivalente a 1.46.

Estes vectores são praticamente paralelos e a sua soma, o peso do corpo, obtém-se somando escalarmente as intensidades, como se depreende em baixo

$$\sum_1^n w_i = W \quad 1.47$$

A resultante dos pesos do conjunto de partículas que constituem um corpo é um vector força, que traduz o efeito da gravidade sobre o corpo. Não ficaremos, contudo, inteiramente esclarecidos sobre esta força sem sabermos onde é aplicada. Este ponto é o centro de gravidade, ou de massa, do corpo. Implicitamente, já utilizámos este conceito quando analisámos problemas de equilíbrio. Considerou-se sempre o peso aplicado no centro de gravidade do corpo, que supusemos conhecido.

Se considerarmos o corpo um sistema contínuo caracterizado pela função  $\rho(x,y,z)$  (massa volúmica) e considerando o domínio  $D$ , abrangido pelo sólido, dividido em pequenos elementos finitos de volume  $\Delta\tau_i$ , de massa específica média  $\bar{\rho}_i$ , a massa do sólido é, aproximadamente:

$$M = \sum_D \bar{\rho}_i \Delta\tau_i \quad 1.48$$

onde  $\bar{\rho}$  é a massa específica média no elemento de volume  $\Delta\tau$ .

O valor exacto é o limite do somatório da Eq. 1.48 quando  $\Delta\tau$  tende para zero, ou seja,

$$M = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_D \rho(x, y, z) \Delta\tau = \int_D \rho(x, y, z) dt \quad 1.49$$

Passámos a ter a soma das massas de um grande número de elementos infinitesimais de volume  $d\tau$ , em torno de pontos  $A(x, y, z)$  onde a massa específica é  $\rho(x, y, z)$ .

Consideremos um corpo constituído por  $n$  partículas de massa  $m_i$  e que sobre cada partícula actua uma força externa  $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$  sendo  $\vec{a}_i$  a aceleração da partícula. Supondo que a partícula  $i$  se desloca com velocidade  $\vec{v}_i$  o seu momento linear será  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ , como  $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$  podemos escrever

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad 1.50$$

ou seja, a força externa a actuar sobre cada uma das partículas que formam o corpo é igual à derivada em ordem ao tempo do momento linear dessa partícula.

Vem para a resultante de todas as forças externas a actuar

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_i = \sum_1^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad 1.51$$

onde

$$\vec{P} = \sum_1^n \vec{p}_i.$$

Conclui-se da Eq. 1.51 que a resultante das forças exteriores a actuar no corpo é igual à derivada em ordem ao tempo do momento linear do sistema. A resultante das forças interiores é nula, não contribuindo para a variação do momento linear.

Considerando as projecções escalares dos vectores em estudo segundo um eixo orientado, por exemplo, o eixo dos ZZ temos:

$$R_z = \frac{dP_z}{dt} \quad 1.52$$

$R_z$  e  $P_z$  são as projecções de  $\vec{R}$  e  $\vec{P}$  sobre o eixo dos ZZ e são valores algébricos. Da Eq. 1.52 conclui-se que a derivada em ordem ao tempo da projecção sobre um eixo do vector momento linear de um sistema de pontos materiais, é igual à projecção sobre o mesmo eixo da resultante das forças externas a actuar no sistema.

Se  $\vec{P} = \text{Const.}$  há conservação do momento linear e será

$$\vec{R} = 0 \quad 1.53$$

A resultante das forças exteriores é nula. Isto sucede nos sistemas isolados, isto é, sistemas sobre os quais não actuam forças exteriores. Assim, como para o ponto material isolado, esta expressão diz-nos que o movimento do sistema de pontos é rectilíneo e uniforme (princípio da inércia). Contudo, agora a expressão diz-nos mais pois podemos ter os mais variados movimentos dentro do sistema.

Podemos considerar alguns exemplos. Quando uma espingarda dispara, o momento linear inicial do sistema espingarda + bala é zero. Se não actuarem forças exteriores, após o disparo o momento linear do sistema continuará a ser nulo. Sendo  $m$  e  $\vec{V}$  a massa e velocidade da bala e  $M$  e  $\vec{v}$  a massa e velocidade da espingarda, teremos sempre

$$\vec{P} = m \vec{V} + M \vec{v}$$

em que  $M\vec{v}$  corresponde à reacção ou coice da espingarda.

## 16.2 - Momento cinético

Por definição, momento cinético é o momento do vector momento linear. O momento cinético da partícula  $i$  de um corpo que se move com o momento linear  $\vec{p}_i$ , em relação a um dado ponto  $O$  é

$$\vec{\Omega}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad 1.54$$

onde  $\vec{r}_i$  é o vector posição da partícula em relação a um ponto arbitrário tomado como origem de um sistema de eixos.

Admitindo que a regra para a derivação do produto vectorial de duas funções vectoriais é idêntica à do simples produto de duas funções escalares, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Omega}_i}{dt} &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \vec{v}_i \times m\vec{v}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \vec{r}_i \times \vec{F}_i \end{aligned} \quad 1.55$$

onde  $\vec{F}_i$  é a resultante das forças a actuar no ponto. Conclui-se que a derivada do momento cinético da partícula  $i$  em relação a um dado ponto  $O$  é igual ao momento das forças aplicadas no ponto em relação a  $O$ .

Considerando o somatório dos momentos cinéticos de todas as partículas constituintes do corpo

$$\vec{\Omega} = \sum_1^n \vec{\Omega}_i \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \sum_1^n \frac{d\vec{\Omega}_i}{dt} \quad \overline{63}$$

por outro lado

$$\vec{M} = \sum_1^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

é o momento resultante das forças exteriores a actuarem em todas as partículas constituintes do corpo, em relação ao ponto  $O$ .

Considerando o somatório de ambos os membros da Eq. 1.55, temos

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{M} \quad 1.56$$

A derivada em ordem ao tempo do momento cinético total dum sistema de pontos materiais, em relação a um dado ponto, é igual ao momento resultante das forças exteriores em relação ao mesmo ponto.

Consideremos um eixo orientado ( $ZZ$ ) e as projecções sobre esse eixo dos vectores derivadas dos momentos cinéticos das partículas em relação a um ponto do eixo

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = M_z \quad 1.57$$

A derivada em ordem ao tempo da componente do momento cinético total de um sistema de pontos materiais segundo um dado eixo é igual ao momento resultante das forças exteriores em relação ao eixo.

### 16.3 - Centro de massa de um sistema de pontos materiais

Centro de massa de um sistema de pontos materiais é um ponto  $G$  tal que

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad 1.58$$

em que  $\vec{r}_G$  e  $\vec{r}_i$  são os vectores posição do centro de massa e da partícula de ordem  $i$  em relação a um ponto arbitrário origem de um sistema de eixos e  $M = \sum m_i$  é a massa do sistema (Fig. 1.41).

Considerando as componentes escalares do vector posição do centro de massa,  $\vec{r}_G$ , segundo os três eixos, temos

$$r_{G,X} = \frac{\sum m_i r_{i,x}}{M}, \quad r_{G,Y} = \frac{\sum m_i r_{i,y}}{M} \quad \text{e} \quad r_{G,Z} = \frac{\sum m_i r_{i,z}}{M} \quad 1.59$$

Os centros de massa de objectos simétricos e de densidade uniforme são os seus centros geométricos.

Voltando à Eq. 1.58 e como  $\sum_1^n m_i = M$  podemos escrever:

$$\sum m_i \vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i .$$

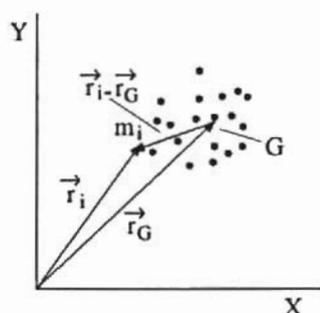


Fig. 1.41 - Vector posição  $(\vec{r}_i - \vec{r}_G)$  da massa  $m_i$  em relação ao centro de massa G.

donde

$$\sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G) = 0 \quad 1.60$$

O somatório dos produtos das massas das partículas pelos vectores posição das partículas em relação ao centro de massa do sistema é nulo.

Derivando a Eq. 1.58 em ordem ao tempo, obtemos

$$\vec{v}_G = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

O primeiro membro é a velocidade  $\vec{v}_G$  do centro de massa e o numerador do segundo membro é o momento linear total do sistema  $\vec{P}$ , então

$$M \vec{v}_G = \vec{P} \quad 1.61$$

O momento linear do sistema é o momento linear do centro de massa supondo lá concentrada toda a sua massa.

Derivando ambos os membros desta igualdade vem

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

ou

$$M \vec{a}_G = \vec{R} \quad 1.62$$

onde  $\vec{a}_G$  é a aceleração do centro de massa e  $\vec{R}$  a resultante das forças externas a actuar. Esta equação é formalmente idêntica à equação fundamental da dinâmica e diz que o centro de massa de um sistema se move como se fosse um ponto material onde estivesse concentrada toda a massa do sistema e onde estivessem aplicadas todas as forças exteriores que actuam no sistema. O movimento do centro de massa é independente da acção das forças interiores.

Uma outra propriedade do centro de gravidade tem a ver com o momento em relação a um ponto. Consideremos a Eq. 1.46,  $\sum_1^n \vec{w}_i = \vec{W}$  referente aos pesos das partículas constituintes de um sistema material e calculemos o momento resultante dos momentos destes pesos em relação a uma origem  $O$ . Obtemos

$$\sum_1^n \vec{r}_i \times \vec{w}_i = \sum_1^n \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \quad 1.63$$

com  $\vec{g}$  o vector aceleração da gravidade.

Consideremos agora a Eq. 1.58, multiplicada por  $M$ ,

$$M \vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i \quad 1.64$$

e multipliquemos vectorialmente ambos os membros da equação por  $\vec{g}$ .

Vem

$$M \vec{r}_G \times \vec{g} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}$$

ou seja

$$\vec{r}_G \times \vec{W} = \sum \vec{r}_i \times \vec{w}_i$$

O momento resultante em relação a um ponto dos pesos de um conjunto de partículas é o momento, em relação ao mesmo ponto, do peso total do sistema concentrado no centro de gravidade.

#### 16.4 - Centro de massa de um corpo plano homogêneo com a forma de um triângulo rectângulo OAB de área $S$ .

Consideremos o triângulo OAB dividido em  $n$  elementos de área  $dS_i = y dx$  e massa  $dm_i = \sigma dS_i$ , para o elemento de área com abcissa entre  $x_i$  e  $x_i+dx$ , onde  $\sigma$  é a densidade superficial (massa/cm<sup>2</sup>), Fig. 1.42.

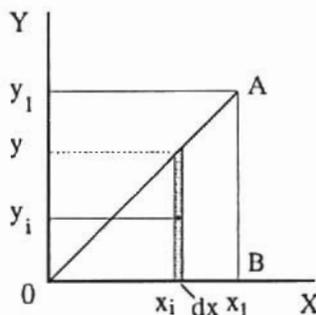


Fig. 1.42 - Cálculo do centro de massa do triângulo OAB. A área subentendida pelo lado OA e o eixo dos XX é dividida em rectângulos de área  $y dx$ .

Então, as coordenadas do centro de massa são:

$$x_G = \frac{\sum dm_i x_i}{M} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{\sum dm_i y_i}{M},$$

ou

$$x_G = \frac{\sum \sigma x_i dS_i}{S\sigma} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{\sum \sigma y_i dS_i}{S\sigma},$$

ou ainda

$$x_G = \frac{\sum x_i dS_i}{S} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{\sum y_i dS_i}{S} \quad 1.65$$

No limite, quando  $dx \rightarrow 0$ , e atendendo a que  $dS_i = y dx$ , os últimos somatórios transformam-se em

$$x_G = \frac{\int_0^{x_1} xy dx}{S} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{\int_0^{y_1} \frac{y^2}{2} dx}{S} \quad 1.66$$

Notar que a ordenada do elemento é  $y_i = y/2$ .

Como  $S = \frac{x_1 y_1}{2}$  e a equação da recta que contém a hipotenusa do triângulo é  $y = \frac{y_1}{x_1} x$ , a primeira das Eqs. 1.66 pode escrever-se

$$x_G = \frac{y_1}{x_1} \int_0^{x_1} x^2 dx = \frac{y_1}{x_1} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{x_1} = \frac{y_1}{3} x_1^2$$

donde

$$x_G = 2 \frac{x_1}{3}$$

para a componente segundo o eixo dos YY e considerando que  $dx = \frac{x_1}{y_1} dy$

$$\frac{x_1 y_1}{2} y_G = \int_0^{y_1} \frac{x_1 y}{y_1} \frac{y}{2} dy = \frac{x_1}{2y_1} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{y_1} = \frac{x_1}{2y_1} \frac{y_1^3}{3}$$

donde

$$y_G = \frac{y_1}{3}$$

A localização do centro de massa é então como se vê na Fig. 1.43.

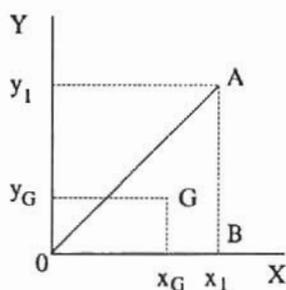


Fig. 1.43 - Posição do centro de massa no triângulo rectângulo OAB.

### 17 - Centro de massa de corpos homogêneos com a forma de um triângulo equilátero ou isósceles

O centro de massa de um corpo homogêneo com a forma de um triângulo equilátero ou isósceles pode obter-se facilmente decompondo-o em dois triângulos rectângulos iguais, calculando os correspondentes centros de massa ( $G_1$  e  $G_2$ ), considerando aí concentrada a massa ( $m/2$ ) do respectivo triângulo e calculando o centro de massa ( $G$ ) para este sistema de dois pontos (Fig. 1.44).

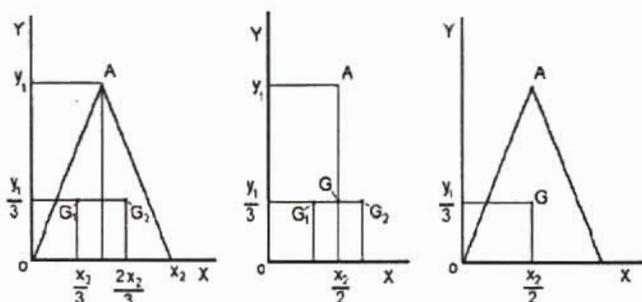


Fig. 1.44 - Determinação do centro de massa de um triângulo isósceles por decomposição em dois triângulos retângulos.

O centro de massa do triângulo isósceles é o centro de massa do sistema de dois pontos  $G_1$  e  $G_2$  cujas coordenadas já aprendemos a calcular e cuja localização é  $G_1(x_2/3, y_1/3)$  e  $G_2(2x_2/3, y_1/3)$ . Então,

$$G_x = [m/2 \times (x_2/3) + m/2 \times (2x_2/3)] / m = x_2/2$$

$$G_y = [m/2 \times (y_1/3) + m/2 \times (y_1/3)] / m = y_1/3$$

Para o caso do corpo ter a forma de um triângulo escaleno (Fig. 1.45).

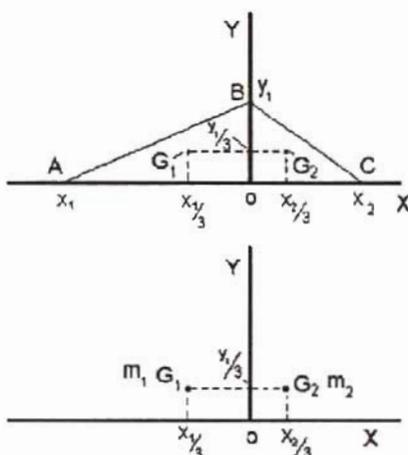


Fig. 1.45 - Caso do corpo ter a forma de um triângulo escaleno.

$$G_x = [m_1 \times (-x_1/3) + m_2 \times (x_2/3)] / m$$

$$G_y = [m_1 \times (y_1/3) + m_2 \times (y_1/3)] / m = y_1/3$$

Como  $m_1/m_2 = x_1/x_2 = 1/k$  a primeira das equações pode transformar-se em

$$G_x = (m_1 \times (-x_1/3) + k m_1 \times k \times x_1/3) / m$$

$$= m_1 x_1 (k^2 - 1) / 3m$$

## 18 - Momento de inércia

A posição dum sólido que se move em torno dum eixo fixo, é determinada pelo ângulo diedro  $\theta$ , que fazem entre si dois planos que passam pelo dito eixo, um dos quais é fixo e o outro se encontra ligado invariavelmente ao sólido móvel. O problema do movimento de rotação do sólido em torno do eixo, resolve-se pela simples aplicação do teorema do momento cinético, Eq. 1.57:

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = \mathcal{M}_z$$

Este teorema fornece-nos uma relação escalar em que entra o ângulo  $\theta$  e a partir da qual se pode determinar a equação do movimento.

Uma noção que interessa neste estudo é a noção de momento de inércia dum sistema em relação a um eixo. É definido pela equação

$$I = \sum m_k \rho_k^2$$

em que  $m_k$  é a massa do ponto material  $A_k$  e  $\rho_k$  a distância de  $A_k$  ao eixo, com  $k = 1, 2, 3, \dots$

O momento de inércia  $I$  caracteriza a maneira como a massa do sólido está distribuída em relação ao eixo.

O mesmo sólido tem momentos de inércia diferentes em relação a eixos diferentes.

## ANEXO ao Cap. I

## 1 - Movimento de um ponto em relação a um sistema de referência

O movimento de um ponto **P** em relação a um dado sistema de eixos pode ser definido por uma mudança contínua da posição de **P** relativamente ao sistema.

Em cada instante a posição de **P** é determinada pelas suas coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  pelo que a igualdade  $P = P(t)$  (equação do movimento) é equivalente a

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

A posição do ponto **P** pode também ser determinada pelo seu vector posição ou seja o vector que une a origem das coordenadas com o ponto e aponta para este.

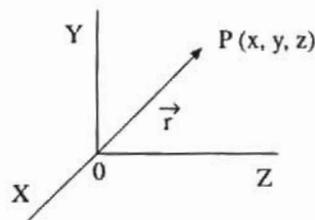


Fig. 1.46 - Vector posição  $\vec{r}(t)$  do ponto **P** num sistema de eixos XYZ.

A equação do movimento pode escrever-se na forma  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ficando o movimento inteiramente definido. Conhecendo o vector  $\vec{r}(t)$  em cada instante conhece-se a lei do movimento e a trajectória.

Podemos referir-nos não a  $\vec{r}(t)$  mas às suas componentes num sistema de eixos XYZ, ou seja

$$\vec{r}(t) = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

O conjunto de igualdades  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$  é equivalente a  $\vec{r}(t)$ .

## 2. Movimento de um ponto conhecida a trajectória

O movimento de um ponto sobre uma trajectória conhecida pode ser caracterizado fixando sobre a trajectória um ponto  $P_0$  que se toma como origem dos arcos  $s$ . Teremos para definir a posição do ponto as funções  $P = P(s)$  ou  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  e

$$x = x(s)$$

$$y = y(s)$$

$$z = z(s)$$

Estas relações traduzem somente a parte geométrica do movimento. A lei do movimento, que caracteriza a sua parte cinemática e define, instante a instante, a posição do ponto sobre a trajectória é dada pela função  $s = s(t)$ , Fig. 1.47.

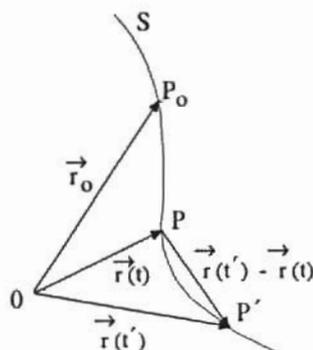


Fig. 1.47 - Trajectória do ponto  $P$  e vectores posição para três instantes  $0$ ,  $t$  e  $t'$ .

Sejam  $P$  e  $P'$  duas posições ocupadas por um ponto móvel respectivamente nos instantes  $t$  e  $t'$ .

A expressão

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t}$$

dá-nos a velocidade vectorial média  $\vec{v}_m$  no intervalo de tempo  $t' - t$ . A velocidade vectorial média  $\vec{v}_m$  dá o espaço percorrido sobre a corda no intervalo de tempo  $t' - t$ . O vector  $\vec{v}_m$  tem a direcção e sentido do vector  $\vec{r}(t') - \vec{r}(t)$  e é  $t' - t$  vezes mais pequeno.

O limite da relação da Eq.

$$\vec{v} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

é a velocidade vectorial no instante  $t$ . É o limite para que tende a velocidade vectorial quando o intervalo de tempo em que se calcula tende para zero. A velocidade vectorial no instante  $t$  é a derivada em ordem ao tempo da função  $\vec{r}(t)$  calculada no instante  $t$ .

Sendo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

é também

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

74

A relação  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  é o limite da relação  $\frac{\vec{r}(s') - \vec{r}(s)}{s' - s}$  quando  $s' \rightarrow s$ , ou seja, a relação entre o comprimento da corda e o comprimento do arco, quando o arco tende para zero:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{s' \rightarrow s} \frac{\vec{r}(s') - \vec{r}(s)}{s' - s} = \hat{t}$$

Este limite é um vector com a direcção da tangente ao arco em P e com grandeza unitária Fig. 1.48 - a), ou seja

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{t}$$

Quando consideramos uma origem dos arcos  $P_0$  admitimos implicitamente um sentido positivo e outro negativo para os mesmos. Sendo assim, e como  $dt$  é positivo, a relação  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{t}$  tem sempre o sentido dos arcos crescentes, pois será o sentido  $PP'$  se  $ds$  for positivo e o de  $P'P$  se  $ds$  for negativo, Fig. 1.48 - b) e c). Então  $\hat{t}$  é um vector unitário tangente à trajectória e com o sentido dos arcos crescentes.

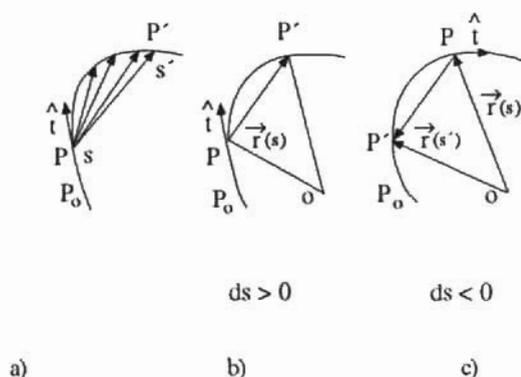


Fig. 1.48 - a) O limite da relação  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  é um vector com a direcção da tangente ao arco em P e com grandeza unitária e tem sempre o sentido dos arcos crescentes, pois será o sentido  $PP'$  se  $ds$  for positivo b) e de  $P'P$  se  $ds$  for negativo c).

Como podemos escrever

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

vem

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

ou, fazendo

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt} \text{ e } v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

onde  $v_x$  é a componente escalar de  $\vec{v}$  segundo o eixo dos XX, ou a velocidade de  $x$ , ponto que é a projecção de  $P$  sobre o eixo dos XX.

Em resumo: a velocidade  $\vec{v}$  é um vector de grandeza  $v = \frac{ds}{dt}$ , dirigido em cada ponto da trajectória segundo a direcção da tangente e no sentido do movimento.

Define-se aceleração média no intervalo  $t' - t$  como o vector

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t}$$

Ao limite

$$\vec{a} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

que é a derivada da função  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  para o valor  $t$  da variável independente, chama-se a aceleração no instante  $t$ .

Sendo

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{t}$$

vem

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \hat{t} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{t}}{dt}$$

ou

$$= \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{t}}{ds}$$

Pela fórmula de Frenet tem-se que

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{\hat{n}}{\rho}$$

com  $\hat{n}$  vector normal unitário apontado para o centro de curvatura e  $\rho$  o raio de curvatura da trajectória no ponto.

Então

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n}$$

Por outro lado a velocidade linear  $v$  e angular  $\omega$  estão relacionadas pela equação

$$v = \omega \rho$$

A aceleração pode decompor-se em duas componentes, uma com a direcção da tangente à trajectória, a *aceleração tangencial*, outra com a direcção da normal e dirigida para o centro de curvatura (pois  $v^2$  e  $\rho$  são sempre positivos), a *aceleração centripeta*.

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \omega^2 \rho \hat{n}$$

A aceleração está portanto no plano definido por  $\hat{t}$  e  $\hat{n}$ , chamado de plano osculador.

No movimento retilíneo, variado ou não, a parcela  $\frac{v^2}{\rho} \hat{n}$  terá de ser nula pois  $\frac{1}{\rho} = 0$ , já que o raio de curvatura é infinito. No movimento uniforme, retilíneo ou não, a parcela  $\frac{d^2s}{dt^2} \hat{t}$  terá de ser nula, pois como por hipótese não há variação da intensidade do vector velocidade  $\vec{v}$  será  $v$  constante e

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 0$$

## CAPÍTULO • II

ESTADOS DE AGREGAÇÃO E PROPRIEDADES DA MATÉRIA



(Página deixada propositadamente em branco)

## 1 - Os estados de agregação

A matéria encontra-se em quatro estados (ou fases): sólido, líquido, gasoso e plasma<sup>1</sup>. Em geral, para uma mesma substância, podem coexistir duas ou três fases e podem ocorrer mudanças de estado. Certas substâncias não se apresentam, ou não são estáveis, em determinadas fases. É o caso do iodo que não apresenta fase líquida estável. Muitos compostos não apresentam fase plásmica estável porque esta só ocorre a temperaturas muito altas ( $> 3000 \text{ }^\circ\text{K}$ ) e os seus constituintes moleculares se decompõem antes desta temperatura ser atingida.

Os estados de agregação da matéria resultam da competição entre a energia térmica de agitação e a energia potencial devida às forças de ligação entre átomos ou entre moléculas.

No estado gasoso predomina a energia térmica, enquanto que no estado sólido, a energia potencial, resultante das acções intermoleculares é, de longe, mais importante. No primeiro caso, as distâncias intermoleculares, são muito maiores do que as dimensões das moléculas e as interacções moleculares são fracas. Nos sólidos as interacções são fortes e as distâncias entre as moléculas são da ordem de grandeza das dimensões das próprias moléculas.

As forças responsáveis pela energia potencial de ligação entre átomos ou moléculas são as forças presentes nas chamadas ligações primárias (ligações iónicas, ligações covalentes e ligações metálicas) e nas chamadas ligações secundárias (ligações de Van der Waals e ligações hidrogénio). As ligações primárias rompem-se para temperaturas entre  $1000$  e  $5000 \text{ }^\circ\text{K}$ . As ligações secundárias desfazem-se para temperaturas entre  $100$  e  $500 \text{ }^\circ\text{K}$ .

As curvas de variação da força em função da distância interatómica (ou intermolecular) e de variação da energia potencial com a distância são do tipo que pode observar-se nas Figs. 2.1-a) e b), estando a cheio as funções resultantes.

Na Fig. 2.1-a), onde se considera a força de atracção positiva, pode concluir-se que estão presentes duas forças: uma atractiva e outra repulsiva. A última actua só para pequenas distâncias, quando os átomos se encontram muito próximos.

<sup>1</sup> Um plasma é um gás rarefeito de iões de ambos os sinais e densidade de carga nula.

A abscissa do ponto **A** é a distância a que se encontram os átomos numa estrutura estável, sem outras forças a actuar. O ponto **A**, na Fig. 2.1-a), corresponde à igualdade entre as forças internas de atracção e de repulsão.

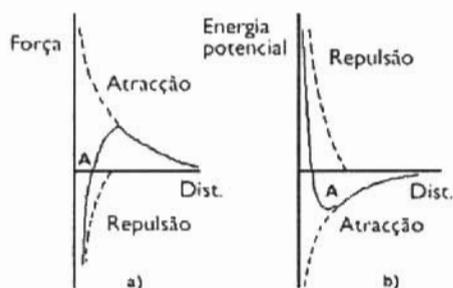


Fig. 2.1 - a) Curvas da força em função da distância interatômica (ou inter-molecular) e b) Curvas da energia potencial em função da distância interatômica. A cheio as funções resultantes.

Para a curva da energia, o ponto **A** corresponde ao mínimo da energia potencial, Fig. 2.1-b). A energia potencial negativa corresponde a atracção. A energia potencial para as ligações covalentes é descrita por uma função muito simples

$$U(r) = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n} \quad 2.1$$

onde  $r$  é a distância,  $A$  e  $B$  são constantes e  $n > m$ . A componente repulsiva  $B/r^n$  aumenta rapidamente para pequenas distâncias.

Na ligação iónica a energia potencial é dada pela equação

$$U(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{B}{r^n} \quad 2.2$$

onde  $q$  é a carga iónica e  $\epsilon_0$  a constante dielétrica do vázio.

A aplicação sobre um corpo de uma força externa vai alterar as distâncias interatômicas. Num sólido sujeito a uma força de compressão externa de intensidade  $\tau$ , a curva das forças de atracção corresponde à soma da curva da Fig. 2.2 a) com o valor  $\tau$ . A curva resultante vai tender

para o valor  $\tau$  quando a distância aumenta (Fig. 2.2-b). A distância intermolecular ( $\overline{OC}$ ) correspondente ao equilíbrio, é menor do que na ausência de forças externas ( $OA$ ) da Fig. 2.2-a).

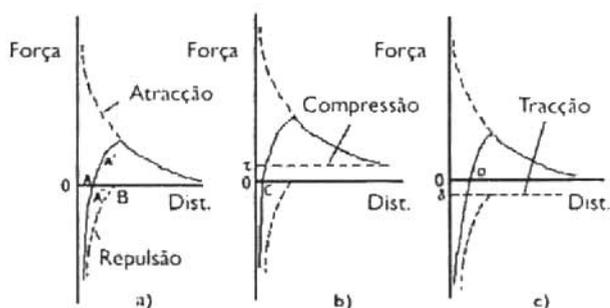


Fig. 2.2 - a) Curvas da força em função da distância interatômica (ou intermolecular) sem a ação de forças externas. b) Com força de compressão de módulo  $\tau$  a actuar. c) Com força de tracção de módulo  $\delta$  a actuar. A cheio as funções resultantes.

Pelo contrário, se uma força de tracção  $\delta$  é aplicada, a curva das forças de repulsão corresponde à soma da curva da Fig 2.2 a) com o valor  $\delta$ . As distâncias intermoleculares terão de aumentar para que ocorra o equilíbrio ( $OD$ ). Para tracções que originem distâncias intermoleculares para além da abscissa do ponto B não é já possível o equilíbrio, atingindo-se a rotura do material.

Entre  $A'$  e  $A''$  a distância intermolecular varia de modo aproximadamente linear com a força aplicada. Nesta porção aproximadamente rectilínea da curva haverá proporcionalidade entre tensões e deformações. Verifica-se a lei de Hooke e o sólido tem comportamento elástico.

É sabido que no estudo das propriedades mecânicas da matéria se concluiu da existência de três estados típicos: o sólido, o líquido e o gasoso. Há, no entanto, substâncias com estados de agregação intermédios. Podemos caracterizar os sólidos pela massa, volume e forma geométrica própria. Os líquidos pela massa e volume. Os gases pela massa. Nos líquidos as forças de coesão actuam de tal modo que, apesar da forma não ser mantida, estes não preenchem a totalidade do volume interior dos recipientes, como se verifica no caso dos gases.

Uma possibilidade de estabelecer uma divisão entre os estados de agregação da matéria é através da deformação a tensões de corte. A tensão de corte, também designada por tensão tangencial ou por tensão de arrastamento é definida pela relação  $F/S$ , quando a força  $F$  é aplicada tangencialmente a uma superfície  $S$  (ver Fig. 2.3). Tem as dimensões idênticas às da pressão (força por unidade de área) mas com a força a actuar tangencialmente. Trata-se de uma grandeza vectorial, pois a direcção da força não fica definida apenas pelo facto de ser tangente à superfície; por exemplo, no caso de  $S$  ser um determinado plano de átomos dum cristal, a direcção de  $\vec{F}$  só ficará definida quando indicada a sua orientação relativamente aos eixos cristalográficos no cristal.

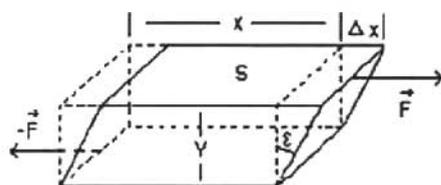


Fig. 2.3 - Deformação de um prisma sujeito a tensão de corte.

Esta situação pode imaginar-se considerando um paralelepípedo com a base fixa e sobre o qual actua uma força  $\vec{F}$  tangente à face superior. A reacção do apoio e a força constituem um binário a actuar no sólido.

Sob a acção do binário, com forças de módulo  $F$ , o sólido sofre uma deformação (deformação angular ou distorsão) que pode ser traduzida pelo desvio  $\Delta x$  ou pelo ângulo de corte  $\epsilon$ . Para valores de  $\epsilon$  suficientemente pequenos, a deformação é elástica e pode provar-se que

84

$$\frac{F}{S} = \mu \operatorname{tg} \epsilon = \mu \frac{\Delta x}{y}$$

ou

$$\frac{F}{S} = \mu \epsilon \tag{2.3}$$

onde  $\Delta x$  e  $y$  são as distâncias indicadas na Fig. 2.3.

Há pois proporcionalidade entre a tensão de corte e a deformação  $\epsilon$ , sendo o coeficiente de proporcionalidade  $\mu$ , o módulo de rigidez, ou simplesmente rigidez (ou módulo de Coulomb ou ainda módulo de corte). Esta proporcionalidade constitui a terceira lei de Hooke.

Para uma dada tensão de corte, quanto menor é a rigidez, maior é a deformação produzida, ou seja, o ângulo de corte  $\epsilon$ . Numa situação limite de um meio material ideal que não oferece qualquer resistência a tensões de corte, a rigidez é nula. Esta situação coincide com a definição de fluido ideal, um meio com módulo de rigidez nulo.

De um modo geral, um fluido ideal é um meio contínuo deformável, de rigidez nula e que flui, ou seja, sofre grandes variações de forma sob a acção de forças externas. Esta definição inclui líquidos ideais e gases ideais.

Como consequência da rigidez ser nula, conclui-se que para um fluido ideal se encontrar em repouso, é necessário que as forças tangenciais a actuar em qualquer ponto do mesmo sejam nulas. Por exemplo, se considerarmos um elemento de volume no interior de um líquido em equilíbrio, as forças actuantes sobre esse elemento, terão de ser normais à sua superfície.

Para fluidos em equilíbrio basta-nos portanto falar em pressões, grandezas escalares que representam forças a actuar normalmente sobre a unidade de superfície.

Para o caso de fluidos reais o que se disse acima é uma simples aproximação pois, como veremos, o atrito entre as moléculas do fluido (viscosidade) dá lugar ao aparecimento de reacções tangenciais. Verifica-se que só os sólidos sofrem deformações elásticas quando sujeitos a tensões de corte.

Numa fase sólida, à temperatura  $T = 0$  °K, as partículas (átomos ou moléculas) integradas na estrutura do sólido, teriam energias de translação, de vibração e de rotação nulas. Nas fases sólidas reais as partículas (átomos ou moléculas) oscilam e apresentam rotação em torno de uma posição média no espaço.

A compressibilidade nos sólidos é de cerca de  $10^{-6}/\text{atm}$ , ou seja, se um sólido com volume  $1 \text{ m}^3$  é sujeito a um aumento de pressão de  $1 \text{ atm}$  o seu volume diminui de  $10^{-6} \text{ m}^3$ , ou seja, de  $1 \text{ cm}^3$ . Para a maioria das situações os sólidos podem ser considerados incompressíveis. Outras

propriedades macroscópicas dos sólidos como dureza, elasticidade, expansão térmica, etc., são também descritas por parâmetros apropriados. Naturalmente que o entendimento do comportamento dos sólidos envolve o conhecimento da estrutura interna e de superfície dos materiais.

Nos líquidos reais, a uma dada temperatura, as partículas mudam facilmente de posição mas mantêm uma distância média constante entre elas.

A compressibilidade dos líquidos é de cerca de  $10^{-4}/\text{atm}$ , ou seja, se um líquido com volume  $1 \text{ m}^3$  é sujeito a um aumento de pressão de  $1 \text{ atm}$ , o seu volume diminui de  $10^{-4} \text{ m}^3$ , ou seja, de  $100 \text{ cm}^3$ . Outras propriedades dos líquidos são: viscosidade, tensão superficial e condutividade térmica.

Os vidros possuem propriedades muito especiais e apresentam algumas propriedades das fases líquidas. Os vidros podem considerar-se como líquidos sub-arrefecidos de viscosidade extremamente elevada. Devido a estas características, à temperatura ambiente, quando sujeitos a esforços por tempos prolongados, os vidros deformam-se. Os líquidos sub-arrefecidos mantêm desordenadas as suas moléculas abaixo da temperatura de fusão, não adquirindo a estrutura regular dos sólidos. A transparência dos vidros deve-se, aliás, à desordem da sua estrutura.

Os sólidos dividem-se em dois grandes grupos: cristalino e amorfo, conforme exista, ou não, um alto grau de ordem na disposição dos átomos constituintes. Assim, o estado amorfo puro não apresenta qualquer grau de organização dos átomos que o constituem e pode ser considerado como um líquido congelado. Este estado puro não é muito frequente na natureza e é bem representado pelo vidro.

Nos cristais existe regularidade na disposição dos átomos, de tal modo que um cristal pode ser caracterizado por uma rede tridimensional, correspondendo a cada nó um átomo ou grupo de átomos. Ao mais pequeno elemento de volume nesta rede tridimensional chamamos célula unitária, sendo o cristal constituído pela repetição sucessiva deste bloco fundamental.

Uma característica das redes cristalinas é a sua periodicidade, contida implicitamente na existência da rede cristalina; muitas propriedades dos cristais baseiam-se nesta periodicidade, sendo a difracção dos raios X um exemplo.

Os átomos num sólido não estão fixos, mas podem vibrar termicamente em torno das suas posições médias.

As mudanças de estado de agregação, podem ser observadas na Fig. 2.4.



Fig. 2:4 - As mudanças de estado.

As setas a cheio indicam os processos com calor latente negativo. As setas a tracejado os processos com calor latente positivo. Por definição, calor latente é a quantidade de calor necessária para ocorrer uma mudança de estado da unidade de massa, a temperatura constante. É medido em cal/g e representado, frequentemente, pela letra  $L$  com um índice indicador do processo,  $L_f$  - calor latente de fusão,  $L_s$  - calor latente de sublimação,  $L_v$  - calor latente de vaporização.

A água tem um calor latente de vaporização muito elevado, 596 cal/g, quando comparado com os outros líquidos, por exemplo, benzeno 94,3 cal/g e mercúrio 70,6 cal/g.

Nas transições de líquido a sólido, de gás a líquido, de gás a sólido e de plasma a gás, em que o calor latente é negativo, é libertada energia. As outras transições para ocorrerem necessitam de energia do exterior.

A situação de um material se apresentar num particular estado depende da temperatura e pressão a que se encontra

Em geral, em biologia, os sólidos não se encontram nem na forma cristalina nem na amorfa, no seu sentido rigoroso. Os sistemas são constituídos por moléculas gigantes com cadeias de átomos perfeitamente ordenados. Estas cadeias dispõem-se paralelamente entre si, mas sem uma periodicidade espacial bem definida.

## 2 - Condução eléctrica nos sólidos

Os sólidos podem ser classificados com base nas suas propriedades químicas, mecânicas, térmicas, magnéticas, etc. As forças de ligação responsáveis pela estrutura dos sólidos são factores condicionantes das suas propriedades físicas, em particular da conductividade eléctrica, condicionada fundamentalmente pelos estados possíveis para os electrões e pela sua distribuição nesses estados. Vamos considerar, inicialmente, os sólidos cristalinos, excluindo para já, do nosso estudo, materiais amorfos, tais como resinas, plásticos e polímeros.

Existem os seguintes tipos de cristais sólidos: cristais iónicos, cristais de valência, e cristais moleculares. Num cristal iónico, como o cloreto de sódio, as forças de ligação devem-se à atracção electrostática entre iões positivos e negativos. O cristal apresenta a propriedade de ter boa condução a altas temperaturas devida a deslocamento de iões (condução iónica). Em cristais onde as ligações entre os átomos são feitas à custa de ligações covalentes, cristais de valência, tais como o diamante, a conductividade é muito pequena, são cristais muito duros desprovidos praticamente de clivagem. Existem também cristais moleculares em que existem "forças de dispersão" que atraem as moléculas entre si.

Nos metais que distinguiremos dos casos anteriores ocorrem forças de ligação que resultam da existência de electrões livres que, aliás, conferem aos metais uma boa conductividade eléctrica e térmica.

Um grande número de sólidos apresenta características intermediárias aos tipos que apresentámos.

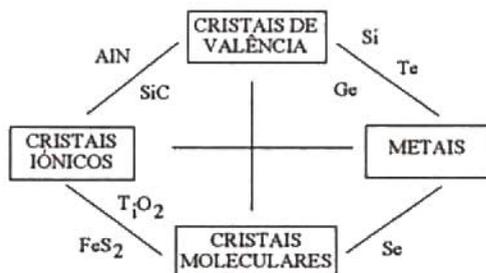


Fig. 2.5 - Estruturas de cristais e exemplos de situações intermediárias.

Por exemplo, o carburudum (SiC) e o nitriteno de Alumínio (AlN) têm propriedades intermediárias aos cristais de valência e aos cristais iónicos. O Silício (Si) e o Germânio (Ge) têm propriedades que se situam entre os cristais de valência e os metais. As pirites (FeS<sub>2</sub>) e o dióxido de titânio (TiO<sub>2</sub>) apresentam-se entre os cristais iónicos e os moleculares.

Quando se aplica um campo eléctrico a um metal origina-se uma corrente eléctrica através do material. Quando, nas mesmas condições, se aplica o campo eléctrico a um cristal iónico (AgCl<sub>2</sub>) ou a um cristal molecular (gelo por exemplo) também se observa corrente eléctrica mas, muito menor do que para o metal.

No caso do metal, os electrões de valência dos átomos que o constituem podem deslocar-se livremente na massa do metal. Os electrões são os agentes da condução da corrente e diz-se que há condução electrónica.

No caso de cloreto ou iodeto de prata fundidos, a condução ocorre por deslocamento de iões havendo condução iónica.

É costume classificarem-se os sólidos de acordo com a sua resistividade em três grupos:

Metais - resistividade entre  $10^{-4}$  e  $10^{-6} \Omega \text{ cm}$

Semicondutores - resistividade entre  $10^{-2}$  e  $10^9 \Omega \text{ cm}$

Isoladores - resistividade maior que  $10^{12} \Omega \text{ cm}$

### 3 - A mobilidade das cargas eléctricas e a lei de Ohm

Em metais tais como o sódio, prata, etc., electrões de valência movem-se quase livremente através do cristal e chamam-se electrões de condução, em oposição aos electrões das camadas interiores dos átomos. Contudo, o movimento dos electrões de condução não é perfeitamente livre, pois as colisões desses electrões com os átomos da rede cristalina não podem ser desprezadas. Realmente os electrões de condução sofrem constantemente desvios, devido à acção dos núcleos ou dos iões da rede cristalina e o seu movimento, embora orientado, apresenta semelhanças ao das moléculas de um gás que, como sabemos, apresentam um movimento estatístico.

Num metal e na ausência de um campo eléctrico aplicado, a velocidade média dos electrões de condução que, movendo-se ao acaso, atravessam um plano qualquer, é zero.

Quando um campo eléctrico  $\vec{E}$  se aplica ao sistema, os electrões de carga  $-e$  e massa  $m$  ficam sujeitos à força eléctrica  $\vec{F}$  e à aceleração

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

durante o intervalo de tempo que separa duas colisões sucessivas. Se designarmos por  $2\tau$  o tempo médio entre duas colisões sucessivas, ou seja, o tempo livre médio, a velocidade média dos electrões sob a acção do campo será

$$\vec{v}_E = \frac{1}{2} \left( \frac{eE}{m} 2\tau \right) = \frac{eE\tau}{m}$$

A velocidade média  $\vec{v}_E$  tem a direcção do campo  $\vec{E}$ . Nos metais a ordem de grandeza para o tempo livre médio  $2\tau$ , é de  $10^{-14}$  s.

Já dissemos que para os electrões de condução, a velocidade média devida à agitação térmica, ou seja,  $\vec{v}_{\text{term}}$ , é zero. Portanto, a velocidade média de deslocamento dos electrões do metal sob a acção dum campo eléctrico, considerando o movimento térmico, é

$$\vec{v} = \vec{v}_E + \vec{v}_{\text{term.}} = \frac{eE\tau}{m}$$

90 Sendo  $N$  o número de electrões de condução por  $\text{cm}^3$  no metal, então o módulo da densidade de corrente,  $\vec{J}$ , segundo a direcção do campo, é dada por

$$J = Ne\vec{v} = \frac{Ne^2E\tau}{m}$$

o produto  $Ne$  é a densidade espacial de carga.

Como, em geral,  $\tau$  é independente de  $\vec{E}$  temos  $J$  a ser proporcional a  $E$ , ou seja, obtém-se a equação que traduz a lei de Ohm.

A condutividade  $\sigma$  é, por definição, o factor de proporcionalidade entre a densidade de corrente e o campo.

$$J = \sigma E$$

Com

$$\sigma = \frac{Ne^2\tau}{m}$$

ou, fazendo

$$\mu = \frac{e\tau}{m}$$

$$\sigma = Ne\mu$$

O factor  $\mu$  é a mobilidade electrónica para o material considerado.

Então 
$$J = Ne\bar{v} = Ne\mu E$$

e

$$\mu = \frac{\bar{v}}{E}$$

2.4

A mobilidade surge como sendo a velocidade média dos electrões de condução por unidade de campo eléctrico aplicado. A densidade de carga  $Ne$  e a mobilidade são parâmetros característicos que definem propriedades eléctricas, não só dos metais como de semicondutores e isoladores. Os valores da mobilidade electrónica em alguns sólidos, à temperatura ambiente, encontram-se no quadro 2.1.

Quadro 2.1 - Mobilidade electrónica em alguns sólidos.

Sólido	Estrutura	$\mu$ ( $\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ )
Cobre	metal	35
Prata	metal	56
Cloreto de Prata	crystal iónico	50
Antraceno	crystal molecular	0,3 - 3
Germânio	semicondutor	$3,8 \times 10^3$
Diamante	crystal valência	$1,8 \times 10^3$

À temperatura  $T = 0 \text{ }^\circ\text{K}$  é impossível para um electrão escapar-se do metal porque isso requer um mínimo de energia igual a  $E_B$  e a energia

máxima dos electrões, a esta temperatura, é  $E_f$  a energia de Fermi. É necessário fornecer uma quantidade adicional mínima de energia igual a  $\phi$  para o electrão se libertar do metal. O valor  $\phi$  é chamado função trabalho do metal, e representa portanto a mínima energia que terá de ser fornecida aos electrões mais energéticos, para que, a 0 °K estes se escapem do metal. Um outro significado para  $\phi$  pode ser tratado a partir do trabalho que é necessário realizar contra a força de atracção que é originada mal o electrão abandona o metal. Realmente, a carga negativa do electrão induz uma carga positiva no metal (carga imagem) que produz uma atracção sobre o electrão. Para se escapar do metal, o electrão necessita ter uma energia mínima para vencer essa atracção; essa energia mínima é  $\phi$ .

#### 4 - Noções qualitativas sobre a teoria das bandas dos cristais

Sabemos que os electrões num átomo isolado se mantêm em níveis com energia e momento angular bem definido e determinados por condições quânticas. Na ausência de forças externas ao átomo, os estados resultantes para o electrão, constituem um conjunto de níveis discretos resultantes da aplicação quântica ao átomo. Estes valores discretos aplicam-se ao átomo isolado e a descrição de um particular estado quântico do electrão inclui a sua energia total, o valor do momento angular orbital e as componentes do momento angular orbital e de spin do electrão, segundo um eixo de referência. São, portanto, necessários 4 números para descrever o estado de cada electrão e segundo o principio de Pauli só um electrão do átomo pode ter um particular conjunto de 4 números quânticos.

92

Os níveis de energia correspondentes aos electrões do átomo isolado não são os mesmos que se encontram para os mesmos átomos num cristal. Num interior de um cristal, a energia potencial é uma função periódica da distância e o seu valor resulta da contribuição simultânea de vários átomos regularmente dispostos na estrutura do cristal.

Quando os átomos se aproximam e se organizam de modo a formar cristais verifica-se que os níveis de energia das camadas electrónicas mais

internas não são significativamente afectadas pelos átomos vizinhos. Contudo, os electrões mais externos são compartilhados por diversos átomos do cristal e os seus níveis de energia são muito modificados. Como resultado do acoplamento entre os níveis electrónicos dos átomos em estrutura periódica no cristal, os níveis de energia possíveis para os electrões externos agrupam-se em bandas de energia constituídas por níveis muito próximos, em vez dos níveis de energia bem separados, característicos dos átomos isolados.

Consideremos um cristal de, por exemplo, germânio (Ge), um semiconductor. Este elemento tem  $Z = 32$  e apresenta 4 electrões de valência; são 2 electrões *s* e 2 electrões *p*. Suponhamos que o cristal tem *N* átomos e que é possível aumentar a distância entre os átomos sem variar a estrutura do cristal. Se por este processo distanciarmos os átomos, de tal modo que a interacção entre eles seja desprezível, os níveis de energia correspondentes aos electrões para estas condições são coincidentes com os dos átomos isolados. Como existem *N* átomos no cristal, existem  $2N$  níveis *s* possíveis, que estão completamente preenchidos. A todos estes estados corresponde o mesmo valor de energia. Para a subcamada *p* existem 6 estados possíveis. No cristal imaginário, com as distâncias entre os átomos muito ampliadas, existem pois  $6N$  estados possíveis dos quais só  $2N$  estão preenchidos com electrões.

Na Fig. 2.6 pretende dar-se uma imagem do que acabamos de dizer e também do que sucede se diminuirmos as distâncias entre os átomos do cristal mantendo-lhe a estrutura.

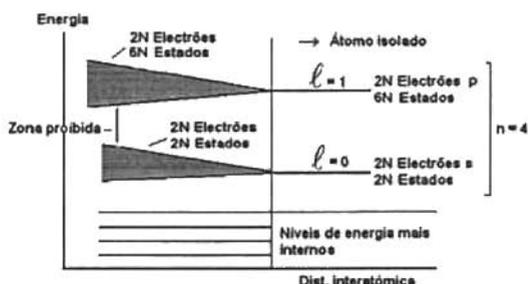


Fig. 2.6 - Transformação dos níveis de energia em bandas de energia com a diminuição da distância interatômica.

À medida que os átomos se aproximam, começam a ocorrer interações eléctricas entre eles. Devido a este acoplamento entre os átomos, as funções de onda sobrepõem-se e o cristal transforma-se num sistema que terá de obedecer ao princípio da exclusão de Pauli, ou seja, com o decréscimo da distância entre os átomos, os  $6N$  estados correspondentes a  $\ell = 1$  (electrões  $p$ ) que inicialmente tinham energias idênticas nos átomos isolados, degeneram e tornam-se distintas formando a banda que se observa.

A separação entre os níveis é pequena mas, como  $N$  é muito grande ( $=10^{23}/\text{cm}^3$ ), a largura total entre o mínimo e o máximo de energia pode ser alguns eV se as distâncias interatómicas forem suficientemente pequenas. Só  $2N$  estados da banda  $p$  (com  $6N$  possíveis) é que estão preenchidos. Por outro lado, os  $2N$  estados  $s$  ( $\ell = 0$ ), inicialmente com energia igual quando a distância interatómica era grande, degeneram de modo idêntico, originando igualmente uma banda, ou seja, um elevado número de níveis discretos de energia muito próximos. Os  $2N$  estados desta banda estão, porém, completamente preenchidos. Notemos que existe uma banda proibida entre as duas bandas que descrevemos atrás.

Para distâncias mais pequenas, próximas das distâncias reais existentes de facto entre os átomos do cristal de Ge, as bandas sobrepõem-se. Nestas circunstâncias os  $6N$  estados superiores juntam-se aos  $2N$  estados mais baixos, dando um total de  $8N$  estados, dos quais só metade, ou seja,  $2N + 2N = 4N$  se encontram ocupados por electrões. Para esta distância, cada átomo contribui com 4 electrões para a banda. Estes electrões já não se podem chamar  $s$  ou  $p$ , pois pertencem ao cristal como um todo.

Diminuindo finalmente a distância até à verdadeira distância para o caso do cristal de Ge, as bandas separam-se novamente. Na verdade, para distâncias inferiores àquela em que há sobreposição das 2 bandas, a disposição desta depende da orientação que no espaço os átomos adquirem uns em relação aos outros e ao número atómico que determina a constituição e dimensões de cada átomo. A equação de Shrodinger apresenta soluções difíceis de obter para estes casos, mas foi possível obtê-los aproximadamente para alguns cristais.

No caso do Ge, apresentado em esquema na Fig. 2.7, as bandas de valência e condução separadas por uma banda proibida podem facilmente distinguir-se.

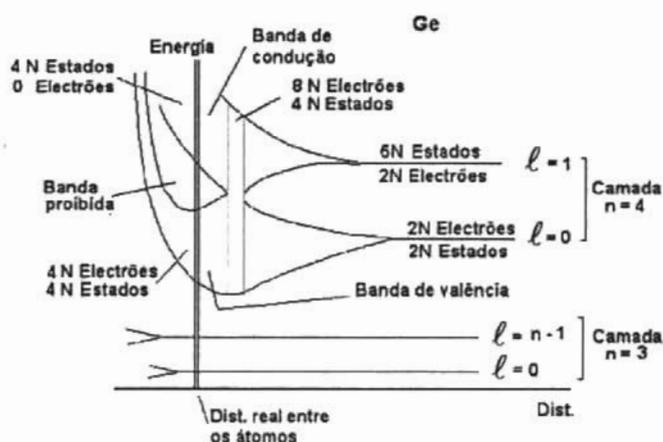


Fig. 2.7 - Evolução da disposição das bandas de energia do germânio com a diminuição da distância entre os átomos e situação para a distância real.

Para  $0\text{ }^{\circ}\text{K}$  a banda de valência contém  $4N$  estados preenchidos e a banda de condução  $4N$  estados vazios. A disposição das bandas determina as propriedades eléctricas dos sólidos.

Nos isoladores, as bandas de energia encontram-se separadas por uma zona proibida, de alguns eV, onde não há estados quânticos disponíveis. No diamante, a altura da banda proibida é de 6 eV. Quando é aplicado um campo eléctrico a um isolador os electrões não recebem energia capaz de os fazer passar da banda de valência para a de condução, onde se poderiam deslocar livremente na estrutura. Não há portanto condução da corrente eléctrica.

Um cristal, para o qual a largura da banda proibida é relativamente pequena  $\approx 1\text{ eV}$ , é chamado semiconductor; os que têm maior interesse prático são o silício e o germânio. A largura da banda proibida do primeiro é de 1,1 eV e a do segundo 0,75 eV.

A  $0\text{ }^{\circ}\text{K}$  todos os electrões se situam na banda da valência do semiconductor; este comporta-se como um isolador.

Para temperaturas mais elevadas alguns electrões adquirem energia suficiente para passarem para a banda de condução. Esse número é tanto maior, quanto maior for a energia térmica média comunicada. Havendo

electrões na banda de condução, já o semiconductor tem transportadores da corrente eléctrica, pelo que tem uma certa condutividade, embora menor que nos metais. Nos metais a estrutura das bandas não apresenta banda proibida, ou seja, a banda de valência sobrepõe-se à banda de condução. Sob a acção de um campo eléctrico os electrões podem mover-se livremente, sem as restrições da banda proibida.

## 5 - Propriedades dos fluidos

### 5.1 - Viscosidade

Uma propriedade essencial dos fluidos é tomarem a forma dos recipientes que os contêm. É da experiência corrente que a água ou o álcool, por exemplo, se podem vaziar de um reservatório para outro (e se deformam, portanto) com maior facilidade do que um óleo ou o mel. Traduz-se este facto, dizendo vulgarmente que os últimos líquidos são mais viscosos do que os primeiros. Um outro facto observado é a resistência que os líquidos apresentam ao movimento. Se agitarmos uma região de um líquido, verifica-se que a agitação se comunica às regiões vizinhas e que, após termos cessado a agitação, os movimentos tendem a desaparecer, tanto mais rapidamente quanto mais viscoso é o líquido. Este atrito interno ou viscosidade nos líquidos é devido às forças de atracção de Van der Waals, que se opõem aos movimentos relativos entre moléculas vizinhas. Um efeito semelhante ocorre com os gases em movimento mas, visto as moléculas dos gases poderem movimentar-se muito mais livremente do que as dos líquidos, o efeito é muito menos pronunciado.

Quando grandes massas líquidas se deslocam e as velocidades são pequenas, podemos imaginar o líquido como sendo constituído por uma sobreposição de camadas líquidas planas com velocidades que aumentam a partir do leito. Desprezamos os efeitos de convecção produzidos pela evaporação e por gradientes térmicos.

Devido ao atrito interior, quando uma camada líquida se desloca, exerce uma força de arrastamento sobre as camadas adjacentes.

O regime laminar para o caudal de um líquido é caracterizado, em termos físicos, pelo facto das linhas de corrente do campo de velocidades das partículas do líquido serem linhas que nunca se cruzam. Supondo uma

situação perfeitamente estacionária, podemos supor que a velocidade que, num particular instante, a partícula que se situa numa dada posição possui, é a mesma que, no mesmo ponto, qualquer outra partícula terá em qualquer instante posterior. As linhas do campo de velocidades (linhas de corrente) são linhas tangentes em cada um dos seus pontos a um vector velocidade e, no caso presente, serão linhas que nunca se encontram, paralelas no caso da largura em que se processa o escoamento do rio ser constante.

Num líquido com escoamento em regime laminar, consideremos dois elementos líquidos planos e paralelos, Fig. 2.8, de área  $\Delta S$ , distanciados de  $\Delta y$  e animados de velocidades paralelas  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ . Devido às interacções moleculares, a camada de maior velocidade tende a arrastar a de menor velocidade e esta a retardar a primeira.

A velocidade relativa entre as duas superfícies é  $\Delta v = v_1 - v_2$ , que tenderá a anular-se se forças externas não actuarem. Para se manter a velocidade relativa entre as duas superfícies, torna-se necessário exercer uma força que equilibre a força de interacção ou, se quisermos, a força de viscosidade que se exerce entre elas.

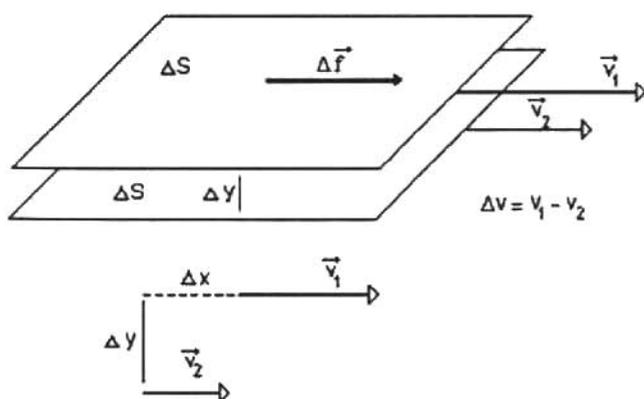


Fig. 2.8 - Dois elementos de área  $\Delta S$  distanciados de  $\Delta y$  com velocidades  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  mantidas constantes à custa da força  $\vec{\Delta f}$  tangente a um dos elementos.

Verifica-se que esta força, tangente a  $\Delta S$ , a que chamaremos  $\vec{\Delta f}$  é:

- (i) - Proporcional ao valor da área de contacto  $\Delta S$  entre as duas camadas;
- (ii) - Proporcional ao gradiente de velocidade, ou seja, a relação  $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ .

Podemos então escrever:

$$\Delta f = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \Delta S \quad 2.5$$

O coeficiente de proporcionalidade  $\eta$  é, por definição, o coeficiente de viscosidade, coeficiente de viscosidade dinâmica ou, simplesmente, viscosidade do líquido. A Eq. 2.5 é conhecida como a equação de Newton da viscosidade.

A partir da Eq. 2.5 vemos que a viscosidade de um líquido iguala a força de fricção se o gradiente de velocidade e a área forem unitários. Assim no sistema CGS que podemos definir viscosidade como sendo a força, em dynes, entre duas áreas de  $1 \text{ cm}^2$  quando o gradiente de velocidade tem valor unitário, ou seja, a velocidade relativa é de  $1 \text{ cm/s}$  e os planos estão distanciados entre si de  $1 \text{ cm}$ .

A lei de Newton só é respeitada pela maioria dos líquidos e gases simples, com caudal em regime laminar. Para certos líquidos, a expressão de  $\Delta f$  é mais complexa do que a anterior pois o coeficiente  $\eta$  é função do gradiente de velocidade, pelo que a força  $\Delta f$ , não varia linearmente com  $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ . Isto acontece, por exemplo, com as emulsões, com soluções de macromoléculas e com suspensões, quando, para qualquer dos casos, as partículas não são esféricas. Um exemplo das últimas é o sangue. Nestas condições o líquido diz-se não newtoniano e a Eq. 2.5 para diferentes pares de valores experimentais de  $\Delta f$  e  $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ , fornece valores diferentes de  $\eta$ , aqui chamada de viscosidade aparente.

Quando  $\Delta f = 1 \text{ dyne}$ ,  $\Delta S = 1 \text{ cm}^2$  e  $\frac{\Delta v}{\Delta y} = 1 \text{ s}^{-1}$  o coeficiente de viscosidade tem valor de 1 unidade CGS, o poise. A unidade do sistema

internacional é o  $\text{Nm}^{-2}\text{s}$  também chamado de poiseuille, que corresponde a 10 poise.

Em biologia costuma exprimir-se a viscosidade de um líquido em relação à viscosidade da água à mesma temperatura. O valor obtido é a viscosidade relativa do líquido.

É também usada a viscosidade cinemática, quociente de  $\eta$  pela massa específica  $\rho$

$$v = \frac{\eta}{\rho}$$

cuja unidade no SI é o  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ .

De um modo geral, a viscosidade de um líquido decresce com a temperatura, se não ocorrerem mudanças de estado ou modificações químicas. No quadro 2.2 apresentamos valores da viscosidade da água para diferentes temperaturas em graus centígrados.

Quadro 2.2 - Coeficiente de viscosidade cinemática da água em função da temperatura.

Temp. (°C)	0	20	40	60	70
$\eta$ (poises)	0,0178	0,010	0,0072	0,0047	0,0032
$\eta$ ( $\text{Nm}^{-2}\text{s}$ )	0,00178	0,001	7,2E-4	4,7E-4	3,2E-4

A equação que utilizámos para a definição de coeficiente de viscosidade  $\eta$  de um líquido pode escrever-se na forma

$$\frac{\Delta f}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad 2.6$$

O primeiro membro desta igualdade representa a força por unidade de superfície a actuar tangencialmente à mesma. Já sabemos que a grandeza assim definida é tensão de corte (tensão tangencial ou tensão de arrastamento). Podemos definir viscosidade de um líquido usando as relações anteriores. O coeficiente de viscosidade de um fluido surge, assim, como a tensão de corte por unidade de gradiente de velocidade. Fazendo

$$\frac{\Delta f}{\Delta S} = T \quad \text{e} \quad \frac{\Delta v}{\Delta y} = U$$

podemos escrever

$$T = \eta U \quad 2.7$$

Na Fig. 2.8 a deformação ocorrida no fluido, devido ao deslocamento  $\Delta x$ , considerada em relação à origem das coordenadas ( $x=0, y=0$ ) é  $\epsilon = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ . Provaremos mais tarde que o gradiente de velocidade no fluido,  $U$ , é igual à velocidade de deformação ocorrida  $d\epsilon/dt$ .

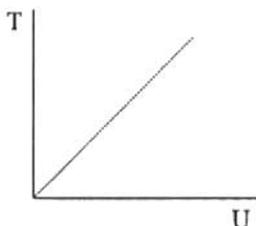


Fig. 2.9 - Função  $T(U)$  no caso de um líquido newtoniano.

Num sistema de eixos  $T(U)$  e para um líquido newtoniano a equação de Newton corresponde à equação de uma recta com inclinação  $\eta$  que passa pela origem (Fig. 2.9).

## 5.2 - Fluidos não Newtonianos sem histerese

Alguns fluidos apresentam comportamento diferente dos líquidos newtonianos, mas não mostram histerese. Num gráfico  $T(U)$  o coeficiente de viscosidade  $\eta$  é tanto maior, quanto maior for a inclinação da curva. A viscosidade aparente do fluido da curva 1 aumenta com o aumento da tensão de corte  $T$  (ou da velocidade de deformação  $U$ ) até atingir um máximo, Fig. 2.10. Neste caso, parece ocorrer uma dilatação do material com o aumento da tensão de corte. Este comportamento, chamado de dilatante, é pouco comum mas ocorre em suspensões de sólidos e soluções de proteínas e polímeros.

A viscosidade do fluido da curva 2 diminui, ou seja, aumenta a fluidez do líquido, com o aumento de  $T$  (ou da velocidade de deformação  $U$ ) até

ser atingido um valor estacionário, Fig. 2.10. Este comportamento, chamado de pseudo-plástico, é frequente em polímeros e soluções destes. Os materiais com comportamentos traduzidos pelas curvas 1 e 2 são designados por corpos de Ostwald.

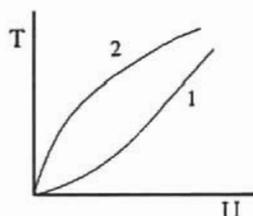


Fig. 2.10 - Corpo de Ostwald; 1- Com dilatação. 2 - pseudo - plástico.

Um tipo de comportamento que, mediante certas condições, se enquadra nos fluidos não newtonianos é o dos plásticos de Bingham (Fig. 2.11-a). Estes são materiais visco-plásticos e comportam-se como sólidos indeformáveis para tensões de corte inferiores a um dado valor  $T_0$ . Para valores superiores comportam-se como um fluido newtoniano. Este comportamento é, aproximadamente, verificado em certas suspensões, tintas e pastas.

Na Fig. 2.11-b) encontram-se os valores da viscosidade em função do gradiente de velocidade de deformação para os corpos estudados.

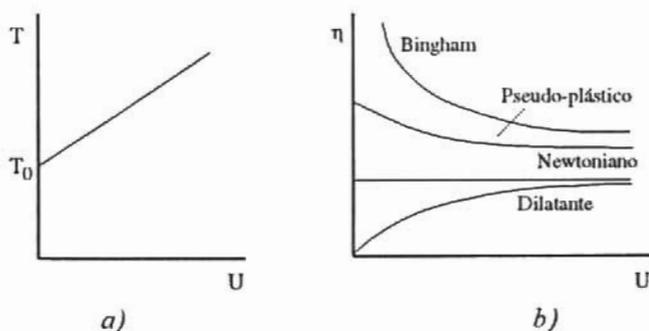


Fig. 2.11 - a) Plástico de Bingham (visco-plástico). A função  $T(U)$  é linear a partir de um dado valor de  $T$ . b) Viscosidade em função do gradiente de velocidade de deformação para os corpos estudados.

## 5.3 - Fluidos não newtonianos com histerese

Existem líquidos não newtonianos, em que a curva  $T(U)$  apresenta histerese. No caso a) da Fig. 2.12, conhecido por tixotropia, o fluido comporta-se como o corpo de Bingham, para valores decrescentes de  $U$ , mas de modo diferente quando este aumenta. Os valores iniciais da função  $T(U)$  são reproduzidos após um ciclo de variação de  $T$ . Na reopexia, Fig. 2.12-b), tal não sucede.

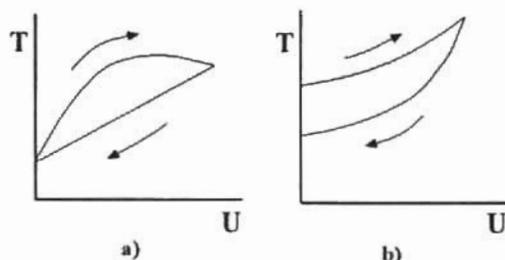


Fig. 2.12 - a) Tixotropia. b) Reopexia.

## 5.4 - Viscosidade do sangue

Já vimos que a equação que utilizámos para a definição de coeficiente de viscosidade  $\eta$  de um líquido pode escrever-se na forma

$$\frac{\Delta f}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad 2.8$$

com a direcção dos  $YY$  normal à velocidade.

O primeiro membro desta igualdade representa força por unidade de superfície a actuar tangencialmente à mesma. Já sabemos que a grandeza assim definida é a tensão de corte. A partir da Eq. 2.8 podemos definir a viscosidade de um líquido como tensão de corte por unidade de gradiente de velocidade.

A tensão de corte é directamente proporcional ao gradiente de velocidade para um líquido newtoniano, como é o caso do plasma humano ou

do soro fisiológico, o mesmo não ocorrendo para os líquidos não-newtonianos, como o sangue, Figs. 2.13 e 2.14.

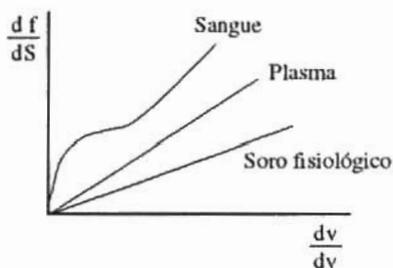


Fig. 2.13 - Tensão de corte em função do gradiente de velocidade para alguns líquidos biológicos.

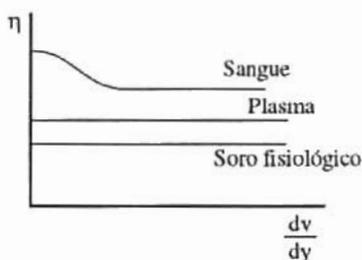


Fig. 2.14 - Viscosidade em função do gradiente de velocidade para alguns líquidos biológicos.

O sangue é uma suspensão de partículas não esféricas e deformáveis, comportando-se como um líquido não newtoniano.

Por outro lado, o diâmetro interno dos capilares pode ser menor ( $\sim 6\mu\text{m}$ ) do que o dos glóbulos vermelhos ( $\sim 8\mu\text{m}$ ), obrigando à sua deformação para ocorrer caudal sanguíneo, Fig. 2.15. A viscosidade do sangue diminui com o aumento do gradiente de velocidade, até ser atingido um valor mínimo.

A diminuição da viscosidade do sangue com o aumento do gradiente de velocidade é explicável pela Eq. 2.8. Quando o gradiente de velocidade é pequeno e, conseqüentemente, as forças tangenciais, os glóbulos vermelhos circulam nos vasos em posições praticamente arbitrárias, como se esquematiza na Fig. 2.16-a). Se o gradiente de velocidade aumenta, as

forças tangenciais obrigam os glóbulos vermelhos a alinharem a sua maior dimensão segundo a direcção das linhas de corrente, Fig. 2.16-b). O caudal do sangue é suposto em regime laminar.

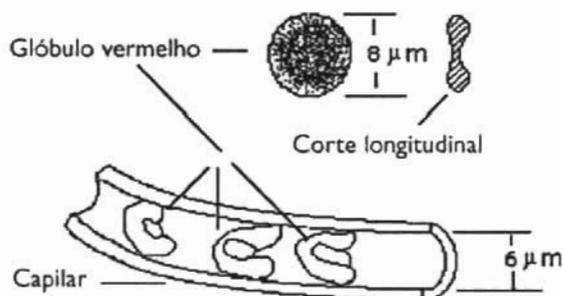


Fig. 2.15 - Deformação dos glóbulos vermelhos no seu trajecto no interior dos capilares.

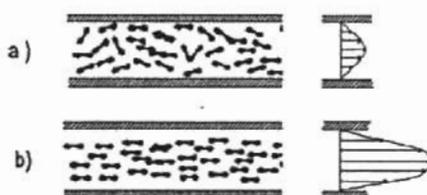


Fig. 2.16 - a) Posição dos glóbulos vermelhos para pequenos gradientes de velocidade;

b) Idem para grandes gradientes.

### 5.5 - Tensão superficial de um líquido

Consideremos uma molécula **B** do interior de um líquido, Fig. 2.17. A molécula **B** encontra-se completamente rodeada por outras moléculas que exercem forças de atracção sobre ela. O valor médio da resultante destas forças de atracção, para um intervalo de tempo que compense variações devidas à agitação térmica, é zero  $\sum \vec{f}_i = 0$ .

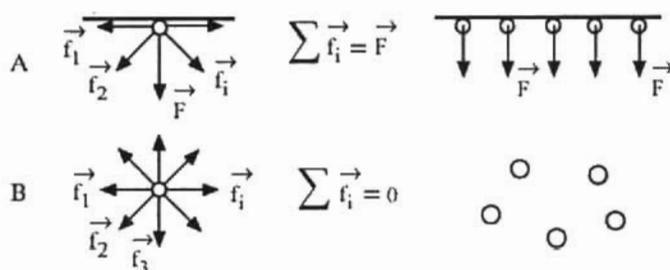


Fig. 2.17 - Forças de coesão e resultantes para as moléculas da superfície A e do interior do líquido B.

Consideremos agora uma molécula A da superfície e desprezemos a atracção das moléculas gasosas em contacto com a superfície do líquido. A resultante das forças de atracção por parte das moléculas do líquido situadas no hemiespaço abaixo de A é uma força perpendicular à superfície e dirigida para o interior. Qualquer molécula da superfície é sujeita a uma força de intensidade  $F$ , pelo que a camada molecular superficial comporta-se como uma película tensa que comprime o líquido.

É devido à tensão superficial que toda a superfície líquida tende espontaneamente a ter à superfície um número mínimo de moléculas, ou seja, a ocupar uma área mínima. Nas naves espaciais em condições de imponderabilidade massas de líquido tomam a forma esférica, à qual corresponde a área externa mínima para um dado volume.

Para transportar as moléculas do interior até à superfície do líquido, ou seja, para aumentar a sua superfície livre, torna-se necessário realizar trabalho, contra a força  $\vec{F}$ , proporcional ao número de moléculas movimentadas.

Suponhamos que para se produzir um aumento  $\Delta S$  na superfície de um líquido numa transformação isotérmica e reversível se tem que despender um trabalho  $\Delta W$ . Há proporcionalidade entre estas duas quantidades e pode escrever-se:

$$\Delta W = \sigma \Delta S \quad 2.9$$

O coeficiente  $\sigma$ , que é sempre positivo, chama-se tensão superficial do líquido. Representa a energia que é necessário despender para, nas condições referidas, aumentar a superfície livre do líquido de  $1 \text{ cm}^2$ .

As dimensões da tensão superficial são as de uma energia por unidade de área. A tensão superficial pode também encarar-se como energia potencial, por unidade de área, existente à superfície. Por outro lado, a tensão superficial, sendo o trabalho reversível, a temperatura constante, necessário para expandir de  $1 \text{ cm}^2$  a superfície líquida, é a variação de energia livre no processo. A energia potencial da superfície de um líquido de área  $S$  é  $S\sigma$ . Num sistema termodinâmico a energia livre tende, espontaneamente, para um valor mínimo. Assim, a energia livre das superfícies líquidas tende, espontaneamente a minimizar-se, o mesmo acontecendo à área superficial.

A tensão superficial é, por vezes, definida a partir da força tangencial  $\vec{F}$  que é necessário exercer-se para manter tensa uma lâmina muito fina de líquido, de largura  $\ell$ , Fig. 2.18.

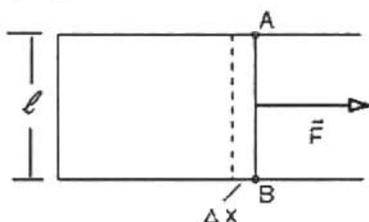


Fig. 2.18 - Força tangencial  $\vec{F}$  que é necessário exercer para manter tensa uma lâmina líquida de largura  $\ell$ .

Verifica-se que a força  $\vec{F}$  é independente da área da película, ou seja, a força tangencial que equilibra as forças associadas à superfície é independente das dimensões desta.

Supondo que a frente AB do líquido se desloca de um comprimento  $\Delta x$ , devido a um aumento muito pequeno da força  $F$ , o trabalho realizado será:

$$\Delta W = F \Delta x$$

O trabalho realizado, supondo não haver degradação de energia mecânica, deve igualar o aumento da energia de superfície. O aumento da superfície livre do líquido é  $\Delta S = 2\ell\Delta x$ , tendo em conta as duas faces da película, então

$$\Delta W = \sigma \Delta S = 2 \sigma \ell \Delta x$$

ou seja,

$$F \Delta x = 2 \sigma \ell \Delta x$$

e

$$\sigma = \frac{F}{2\ell}$$

A cada uma das faces da película corresponde a mesma força de contracção  $f$ , tangente à superfície e resultante das acções de superfície, cujo valor deverá ser  $f = \frac{F}{2}$ . Então,

$$\sigma = \frac{f}{\ell} \quad 2.10$$

Pode, portanto, definir-se tensão superficial como a força tangencial que deve exercer-se, por unidade de comprimento, para manter cada superfície da película tensa. A tensão superficial aparece, pois, como uma força por unidade de comprimento (tensão), podendo ser expressa, por exemplo, em dynes/cm. Notar que as dimensões da tensão superficial podem ser igualmente expressas em força/comprimento ou energia/área, visto a energia ter as mesmas dimensões de força $\times$ comprimento.

No geral, a tensão superficial de um líquido decresce com o aumento da temperatura.

Apresentamos no quadro 2.3 valores da tensão superficial de alguns líquidos.

Quadro 2.3 – Tensão superficial de alguns líquidos.

Substância	Tensão superficial, dynes/cm	Temperatura, °C
Água	71,97	25
Benzeno	28,88	20
Metanol	22,6	20
”	20,1	50
Mercúrio	470	20
Acetona	23,7	20
”	18,6	60
Sangue	55,5 – 61,2	37
Saliva	53	37

A água tem uma tensão superficial elevada, se compararmos com os valores do benzeno, metanol e acetona, líquidos com moléculas apolares. Os líquidos com moléculas polares têm, em geral, tensões superficiais mais elevadas devido à importância das ligações intermoleculares. No caso do mercúrio, as ligações metálicas em jogo originam um enorme valor para a tensão superficial.

### 5.6 - Superfícies curvas nas interfaces líquido-ar

A tensão superficial, quando se exerce sobre uma superfície curva, origina uma pressão a actuar na concavidade. O efeito da tensão superficial pode ser comparado, em certos aspectos, ao da tensão de uma membrana elástica curva limitando um volume. Não surpreende, assim, que a pressão no interior dum bolha de ar ou de uma esfera líquida seja superior à pressão exterior.

Para o caso de uma superfície esférica é muito fácil provar esta afirmação.

Consideremos uma pequena esfera de raio  $r$  de um líquido, cuja tensão superficial seja  $\sigma$ . Seja  $P_0$  a pressão exterior e  $P$  a pressão no interior da esfera, Fig. 2.19. Suponhamos que ocorreu uma expansão na superfície livre do líquido devido à acção de forças de pressão  $\vec{F}$  com aumento do raio de  $dr$ .

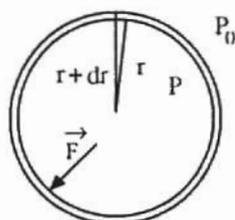


Fig. 2.19 - Esfera líquida de raio  $r$ .

O aumento de superfície externa resultante do aumento do raio é, desprezando infinitésimos de 2ª ordem,

$$dS = \pi (r + dr)^2 - \pi r^2 = 2 \pi r dr$$

A energia necessária para produzir este aumento de superfície é:

$$dW = 2 \pi \sigma r dr$$

Esta energia deve igualar o trabalho das forças de pressão  $\vec{F}$  a actuar na superfície da esfera para o deslocamento  $dr$ , ou seja,

$$dW = (P - P_0) \pi r^2 dr$$

Este trabalho tem que ser positivo, pois corresponde ao aumento da superfície, devendo, assim, as forças de pressão apontar para fora da esfera, sendo, portanto,  $P > P_0$ . Igualando as suas expressões de  $dW$ , vem:

$$P - P_0 = \frac{2 \sigma}{r} \quad 2.11$$

A diferença de pressão através da interface é directamente proporcional à tensão superficial do líquido, inversamente proporcional ao raio e actua sobre o lado côncavo da superfície.

Quando se trata de uma superfície curva qualquer a situação complica-se. Em termos gerais, a curvatura de uma superfície, num ponto, pode ser descrita em termos dos raios de curvatura máximo e mínimo das curvas obtidas pela intercepção da superfície, por planos que lhe são perpendiculares nesse ponto. Nas vizinhanças do ponto, cada uma dessas curvas pode ser aproximada por um arco de circunferência com raio de curvatura bem definido.

Para qualquer ponto da superfície, os raios de curvatura mínimo e máximo daquelas curvas encontram-se em planos que são perpendiculares entre si, além de perpendiculares à superfície. Estes planos são os planos principais e os raios de curvatura das correspondentes curvas os raios principais, Fig. 2.20-a). Os raios principais podem situar-se ambos do mesmo lado da superfície ou cada um em seu lado, Fig. 2.20.b).

Esta circunstância obriga a considerar os raios principais como quantidades algébricas. No primeiro caso, os raios principais terão o mesmo sinal e sinais contrários no segundo.

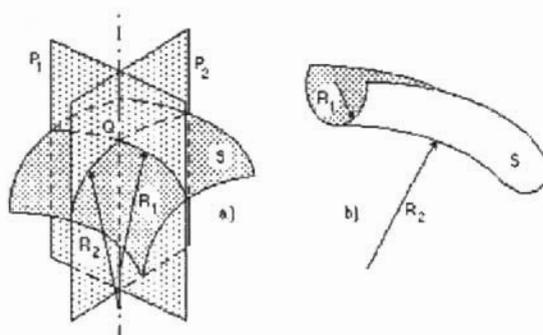


Fig. 2.20 - a) Planos e raios principais no ponto O da superfície curva S.  
b) Raios principais de sinais contrários.

Para uma situação geral, consideremos a dedução da fórmula de Laplace para uma superfície curva da interface líquido-ar. Considere-se um elemento dessa área, muito pequeno, em torno dum ponto M, Fig. 2.21. A curvatura do elemento pode ser descrita em termos dos raios de curvatura principais  $R_1$  e  $R_2$ . Evidentemente, para um elemento de superfície infinitesimal, os raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$  definem a curvatura da superfície em M.

Suponhamos que na parte inferior do elemento de área ABCD (Fig. 2.21), se encontra o líquido à pressão  $P$  e, na parte superior, ar à pressão  $P_0$ .

Imaginemos que sob a acção de forças de pressão, ocorreu uma variação na superfície do líquido produzindo um deslocamento  $dx$ , passando o elemento de superfície a ter a área  $A'B'C'D'$ .

O lado  $A'B'$  é maior que  $AB$  sendo a diferença entre estes dada por

$$s_1 \simeq dx \operatorname{tg} \theta_1 \simeq dx \sin \theta_1 \simeq dx \frac{AB}{R_1}$$

110

(Supõe-se que, sendo o elemento de área muito pequeno, assim como a variação  $dx$  do raio, a diferença  $s_1$  é infinitesimal e as curvaturas de  $A'B'$  e  $AB$  são praticamente iguais, Fig. 2.21).

A diferença entre os lados  $D'A'$  e  $DA$  vem

$$s_2 \simeq dx \operatorname{tg} \theta_2 \simeq dx \sin \theta_2 \simeq dx \frac{DA}{R_2}$$

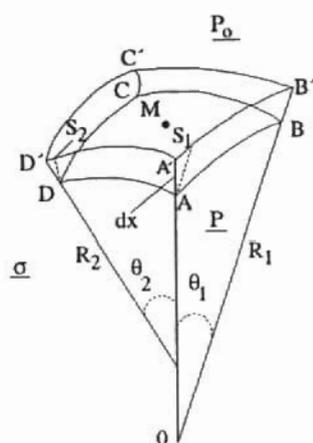


Fig. 2.21 - Elemento ABCD de uma superfície curva de um líquido de tensão superficial  $\sigma$ , sujeito a um aumento de área devido à ação de forças de pressão.

Em primeira ordem, o aumento da área do elemento de superfície resultante do deslocamento  $dx$  é:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \left( AB + \frac{AB}{R_1} dx \right) \left( DA + \frac{DA}{R_2} dx \right) - AB \times DA \\ &= AB \times DA \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dx \end{aligned}$$

O aumento da energia de superfície é

$$\Delta W = \sigma \Delta S$$

---

 111

onde  $\sigma$  é a tensão superficial do líquido.

Esta variação de energia é igualmente o trabalho realizado pelas forças de pressão no deslocamento  $dx$  da superfície, ou

$$\Delta W = (P - P_0) AB \ DA \ dx$$

como  $\Delta W$  é positivo, a força de pressão tem o mesmo sentido do deslocamento, ou seja,  $P > P_0$

então,

$$\begin{aligned}\Delta W &= (P - P_0) AB \times DA \, dx \\ &= AB \times DA \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sigma \, dx\end{aligned}$$

donde se obtém a Fórmula Geral de Laplace

$$P - P_0 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad 2.12$$

A pressão  $P$  é a pressão do lado da concavidade e é superior a  $P_0$ , pois o segundo membro da igualdade é positivo. Esta situação não depende obviamente do lado em que se encontra o líquido, mas da curvatura da superfície.

Tratando-se de uma superfície esférica,  $R_1 = R_2 = R$ , ou seja, o raio da esfera, vindo a fórmula de Laplace na forma já obtida.

$$P - P_0 = \frac{2\sigma}{R} \quad 2.13$$

Uma bola de sabão, ou seja, uma esfera de película de uma solução de sabão, apresenta duas superfícies de contacto curvas entre a solução e o ar.

Suponhamos que  $P_0$  é a pressão atmosférica,  $P_1$  é a pressão no interior da película líquida e  $P$  a pressão no ar interior da bola de sabão, Fig. 2.22.

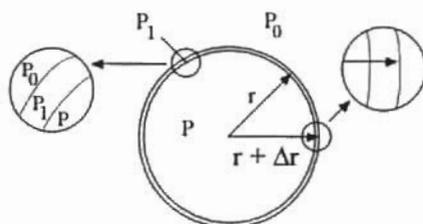


Fig. 2.22 - Bola de solução de sabão de raio interior  $r$  e exterior  $r + \Delta r$ .

Seja  $r$  o raio da superfície interior da bola de sabão e  $r+\Delta r$  o raio da superfície exterior. A diferença de pressão entre o ar interior da bola de sabão e o líquido da película é:

$$P - P_1 = \frac{2\sigma}{r}$$

A diferença de pressão entre o líquido e o ar exterior é:

$$P_1 - P_0 = \frac{2\sigma}{r+\Delta r}$$

De um modo geral, verifica-se que  $r \gg \Delta r$ , pelo que a soma das duas expressões acima conduz, numa primeira aproximação a

$$P - P_0 = \frac{4\sigma}{r} \quad 2.14$$

A aplicação da fórmula de Laplace à interface líquido-ar de um cilindro de líquido, já que o raio principal menor é o raio do próprio cilindro e o raio principal maior é infinito, conduz a:

$$P - P_0 = \frac{\sigma}{r}$$

onde  $P$  e  $P_0$  são respectivamente as pressões no interior e exterior do cilindro,  $r$  o seu raio e  $\sigma$  a tensão superficial do líquido.

### 5.7 - Energia de coesão de um líquido

Uma importante noção, intimamente ligada à de tensão superficial de um líquido, é a de energia de coesão, que se define como a energia mínima que é necessário fornecer para seccionar uma coluna líquida de  $1 \text{ cm}^2$  de secção recta. Nas condições referidas, é criada uma nova superfície livre com área de  $2 \text{ cm}^2$ . Supondo não ter havido dissipação de energia, a

energia dispendida corresponde a duas vezes a tensão superficial. Então, a energia de coesão é, no sistema CGS, igual a duas vezes a tensão superficial do líquido,

$$W_c = 2 \sigma \quad 2.15$$

A energia de coesão da água a 25 °C é 143,94 ergs.

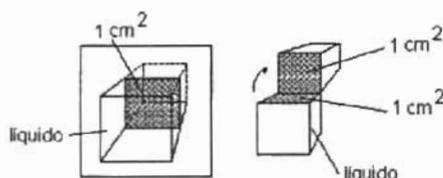


Fig. 2.23 - A energia mínima necessária para seccionar um prisma de líquido com 1 cm<sup>2</sup> de secção recta é a energia de coesão do líquido.

### 5.8 - Superfície de separação entre dois líquidos não miscíveis e entre líquidos e sólidos.

Do mesmo modo que se define energia de superfície para a superfície de separação líquido-gás, pode definir-se uma energia de superfície para a separação entre dois líquidos não miscíveis. Esta energia tem um valor diferente do característico das respectivas superfícies livres, quando em contacto com o seu vapor ou com o ar. A experiência prova que tais superfícies tendem a ocupar uma área mínima. Por exemplo, gotas de um líquido suspensas noutro líquido de igual densidade e não miscível com o primeiro (por exemplo, azeite e solução aquosa de álcool etílico), tomam a forma esférica.

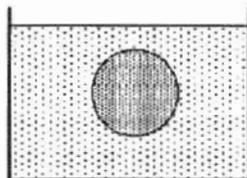


Fig. 2.24 - Porção de um líquido B no interior de um líquido A de igual massa específica e não miscível com B.

Uma área de contacto  $\Delta S$  entre dois líquidos A e B, não miscíveis, possui uma energia

$$\Delta W = \sigma_{AB} \Delta S \quad 2.16$$

onde  $\sigma_{AB}$  é a tensão de contacto entre os dois líquidos. A tensão de contacto é tanto maior quanto menos miscíveis são os líquidos.

O trabalho de adesão entre dois líquidos é a energia que é necessário fornecer para separar isotérmica e reversivelmente uma área de  $1 \text{ cm}^2$  de contacto entre os dois líquidos. Como para se fazer esta separação se cria  $1 \text{ cm}^2$  de superfície líquido-ar (superfície livre), para cada um dos líquidos, e se desfaz  $1 \text{ cm}^2$  de área de contacto entre os dois líquidos, o trabalho de adesão é:

$$W_{AB} = \sigma_A + \sigma_B - \sigma_{AB} \quad 2.17$$

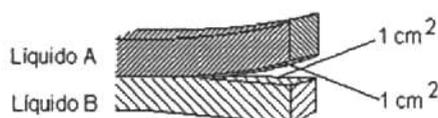


Fig. 2.25 - O trabalho de adesão entre dois líquidos é a energia que é necessário fornecer para separar isotérmica e reversivelmente uma área de  $1 \text{ cm}^2$  de contacto entre os dois líquidos.

Consideremos o caso de uma gota de azeite sobre água como se vê em corte na Fig. 2.26.

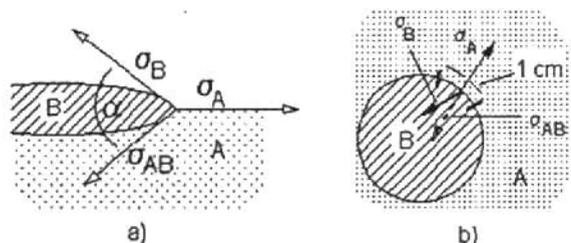


Fig. 2.26 - É útil considerarem-se as tensões superficiais e a tensão de contacto como vectores força tangentes às respectivas superfícies e que aplicadas a  $1 \text{ cm}$  de fronteira mantêm tensas estas superfícies.

a) Corte; b) Vista superior

Podemos considerar que as tensões superficiais e a tensão de contacto, quando aplicadas a 1 cm da fronteira comum às 3 fases, constituem as forças tangentes às respectivas superfícies que tendem a diminuir as áreas correspondentes.

Para haver equilíbrio em qualquer ponto torna-se necessário que a soma vectorial

$$\vec{\sigma}_A + \vec{\sigma}_B + \vec{\sigma}_{AB} = 0 \quad \text{ou seja} \quad -\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \vec{\sigma}_{AB} \quad 2.18$$

Para que esta condição de equilíbrio se verifique, a gota de azeite terá que adquirir uma forma lenticular de modo que a soma das componentes de  $\sigma_B$  e  $\sigma_{AB}$  segundo a direcção de  $\sigma_A$  iguale este vector em módulo.

No caso de  $|\sigma_A| > |\sigma_B + \sigma_{AB}|$  não é possível obter-se o equilíbrio e o líquido **B** estende-se sobre a superfície de **A** numa camada finíssima monomolecular. É o caso de certos ácidos gordos sobre a água.

Quando o ângulo  $\alpha$  (Fig. 2.27) é muito pequeno a Eq. 2.18 pode escrever-se

$$\sigma_A > \sigma_B + \sigma_{AB}$$

ou

$$\sigma_A - \sigma_B > \sigma_{AB}$$

visto neste caso  $\sigma_{AB}$  e  $\sigma_B$  terem aproximadamente a mesma direcção.

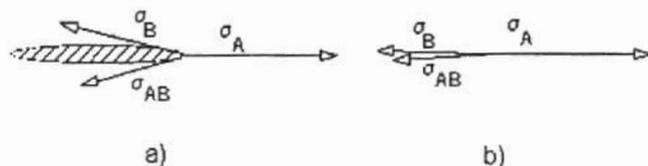


Fig. 2.27 - No caso de  $\sigma_A > \sigma_B + \sigma_{AB}$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ , a) e o líquido **B** espalha-se sobre a superfície de **A** formando uma camada monomolecular de espalhamento, b).

Quando o líquido **B** se espalha sobre **A**,  $\alpha \approx 0$  e é

$$\sigma_A > \sigma_B + \sigma_{AB}$$

Somando  $\sigma_B$  a ambos os membros da desigualdade vem

$$\sigma_A + \sigma_B - \sigma_{AB} > 2\sigma_B$$

ou

$$W_{AB} > W_B \quad 2.19$$

Então, quando ocorre a situação descrita pela Eq. 2.19, o trabalho de adesão entre os dois líquidos é maior do que o trabalho de coesão do líquido **B**.

Finalmente consideramos o caso de superfícies de contacto que envolvem sólidos. A existência de uma energia superficial nos sólidos é evidenciada pelo facto de ser necessário fornecer energia para quebrar um sólido e, mais ainda, para o pulverizar. Qualquer destas acções é obtida, vencendo as ligações que asseguram a coesão do sólido.

No caso de um sólido, a energia potencial de superfície depende do estado de polimento da superfície e de outros factores.

Pode, no entanto, definir-se a energia de superfície de um sólido como energia média que é necessário fornecer para criar sem variação de temperatura,  $1 \text{ cm}^2$  de superfície

$$\Delta W = \sigma_s \Delta S \quad 2.20$$

onde  $\sigma_s$  é a tensão de contacto do sólido com o ar.

Fala-se em energia média porque o trabalho necessário para criar  $1 \text{ cm}^2$  de superfície varia consideravelmente de experiência para experiência. Isto deve-se a que, embora à observação macroscópica as superfícies pareçam idênticas, à escala atómica ou molecular poderão ser completamente diferentes.

De modo semelhante ao que definimos para o contacto entre dois líquidos, podemos definir o trabalho de adesão de um líquido sobre um sólido, Fig. 2.28.



Fig. 2.28 - O trabalho de adesão entre um líquido e um sólido é a energia que é necessário fornecer para separar isotérmica e reversivelmente uma área de  $1 \text{ cm}^2$  de contacto entre o líquido e o sólido.

Este é o trabalho necessário para separar isotermicamente o líquido do sólido numa área de  $1 \text{ cm}^2$ . Sendo, respectivamente,  $\sigma_\ell$ ,  $\sigma_s$ , e  $\sigma_{s\ell}$ , a tensão superficial do líquido, a tensão de contacto do sólido com a ar e a tensão de contacto entre o sólido e o líquido vem

$$W_{s\ell} = \sigma_\ell + \sigma_s - \sigma_{s\ell} \quad 2.21$$

Nesta equação unicamente  $\sigma_\ell$  é conhecido; contudo, o valor da diferença  $(\sigma_s - \sigma_{s\ell})$  pode determinar-se com facilidade embora não se conheçam estes termos individualmente.

Consideremos uma gota líquida em equilíbrio sobre uma superfície sólida, lisa e horizontal. No equilíbrio temos, Fig. 2.29

$$\sigma_s = \sigma_{s\ell} + \sigma_\ell \cos \alpha$$

ou

$$\sigma_s - \sigma_{s\ell} = \sigma_\ell \cos \alpha$$

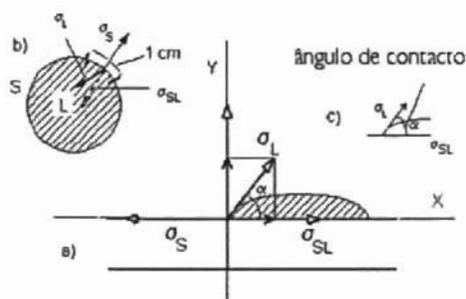


Fig. 2.29 - Equilíbrio no contacto de um líquido com um sólido.  
a) Corte; b) Vista superior; c) Ângulo de contacto

Então a Eq. 2.21 vem

$$W_{s\ell} = \sigma_{\ell} (1 + \cos\alpha) \quad 2.22$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de contacto. Desta expressão conclui-se que o trabalho de adesão aumenta quando o ângulo de contacto diminui.

Consideremos diversas situações, Fig. 2.30.

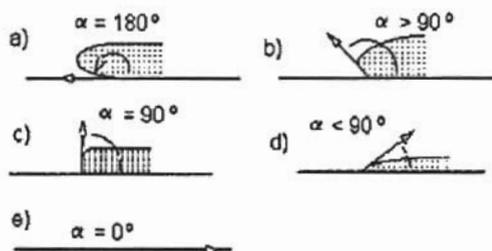


Fig. 2.30 - Casos de líquido em contacto com sólidos, para situações diversas de energias de superfície.

No caso a)  $\alpha = 180^\circ$  logo  $W_{s\ell} = 0$ . O trabalho de adesão é nulo, ou seja, o líquido não molha absolutamente nada o sólido - caso do mercúrio e vidro quando perfeitamente livres de sujidade.

No caso e)  $\alpha = 0^\circ$  logo  $W_{s\ell} = 2\sigma_{\ell} = W_{\ell}$ . O trabalho de adesão iguala o trabalho de coesão do líquido. É o caso limite para um líquido molhar o sólido. Naturalmente que, quando  $W_{s\ell} > W_{\ell}$ , o líquido molha a superfície sólida mas a Eq. 2.22 não tem sentido para este caso, visto não ocorrer equilíbrio.

No caso b) o líquido molha deficientemente o sólido, e no caso d) o líquido molha bem mas não perfeitamente o sólido.

O caso c) é a situação mais intermediária possível do molhamento. O ângulo de corte situa-se entre o não molhar total e o molhamento perfeito.

## 5.9 - Tubos capilares

Quando se mergulha um tubo de pequena secção interior (tubo capilar) num líquido que molhe o vidro, verifica-se uma elevação do líquido no tubo, como se observa na Fig. 2.31-a), até ser atingida uma posição de equilíbrio.

Uma primeira questão que pode ser levantada é a natureza das forças que actuaram sobre o líquido produzindo a sua elevação. O trabalho necessário para elevar a massa  $m$  de líquido na coluna até à altura  $h$  é

$$W = \frac{1}{2} mgh + Q$$

onde  $m$  é a massa de líquido do tubo e  $Q$  o trabalho dispendido para vencer as forças de atrito durante a elevação do líquido.

O aparecimento de  $W$  resulta da tendência espontânea da energia livre da superfície de contacto sólido-ar, no interior do tubo, em diminuir até se minimizar. A energia livre por unidade de área para a superfície de contacto sólido-líquido é menor do que para a superfície de contacto sólido-ar. A energia utilizada na elevação do líquido mais a energia dissipada, correspondem à diferença entre as energias livres para as superfícies de contacto sólido-ar e sólido-líquido.

Vejamus agora como se relaciona a altura de elevação do líquido com o raio do tubo e a tensão superficial do líquido.

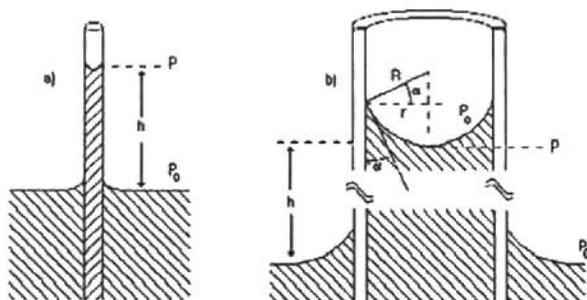


Fig. 2.31 - Fenómeno da capilaridade com um líquido que "molha" o vidro.

a) Aspecto geral; b) Pormenor.

Suponhamos que a superfície do menisco é esférica, aproximação aceitável para tubos capilares com  $r < 1$  mm. Seja  $R$  o raio do menisco e  $\alpha$  o ângulo de contacto, formado pela tangente à superfície líquida com a superfície sólida, tangente situada num plano contendo o eixo do tubo, (Fig. 2.31-b).

Nas condições referidas  $R = r/\cos\alpha$ . Para um líquido que molhe perfeitamente o tubo  $\alpha = 0$  e  $R = r$ .

Sendo o menisco uma superfície esférica, a diferença de pressão do exterior para o interior do mesmo, através da superfície, é

$$P_0 - P = \frac{2\sigma}{r}$$

No caso da Fig. 2.31-b, sendo  $h$  a altura da coluna de líquido, ou seja, o desnível entre as superfícies livres do líquido dentro e fora do capilar, vem

$$P + h \rho g = P_0 \quad \text{ou} \quad P_0 - P = h \rho g$$

donde

$$h \rho g = \frac{2\sigma}{R}$$

ou

$$h = \frac{2\sigma}{R \rho g}$$

ou, finalmente

$$h = \frac{2\sigma \cos\alpha}{r\rho g}$$

A última destas expressões mostra que a altura da coluna líquida capilar varia directamente com a tensão superficial do líquido e coseno do ângulo de contacto e inversamente com o raio do tubo e a massa específica do líquido (lei de Jurin).

No tubo capilar de raio  $r$  a pressão na parede do tubo à altura  $h_1$  numa coluna líquida de altura  $h$ , é

$$\begin{aligned}
 P_p &= P_0 - \frac{2 \sigma \cos \theta}{r} + (h - h_1) \rho g - \frac{\sigma}{r} \\
 &= P_0 - \frac{\sigma}{r} (1 + 2 \cos \theta) + (h - h_1) \rho g
 \end{aligned}$$

Quando se mergulha o tubo capilar num líquido que não molha o vidro, como por exemplo o mercúrio, o menisco é convexo e há um abaixamento do líquido no interior do tubo, Fig. 2.32.

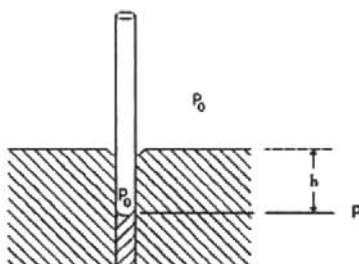


Fig. 2.32 - Abaixamento do nível e formação de menisco convexo num líquido que não molhe o vidro.

Expressões idênticas às anteriores podem deduzir-se para este caso; de facto, a pressão no interior do menisco, agora côncavo, é

$$P = P_0 + \frac{2\sigma}{R} \quad \text{ou} \quad P = P_0 + h \rho g \quad \text{e} \quad h = \frac{2 \sigma \cos \alpha}{r \rho g}$$

Sendo o ângulo  $\alpha > 90^\circ$  o valor de  $h$  é negativo em relação a uma origem na superfície do líquido.

### 5.10 - Capilaridade entre lâminas

Quando duas lâminas de vidro muito próximas se mergulham num líquido que molhe as primeiras, observa-se que o líquido se eleva entre as lâminas até ser atingida uma altura de equilíbrio; observa-se ainda a

formação de meniscos côncavos nas superfícies de separação superior e laterais (Fig. 2.33).

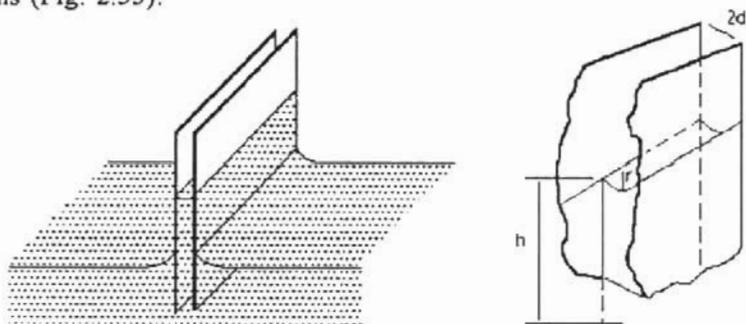


Fig. 2.33 - Fenômeno da capilaridade entre lâminas.

Raciocinando de modo idêntico ao que fizemos com o tubo capilar vem

$$h \rho g = \frac{\sigma}{r} = \frac{\sigma \cos \theta}{d}$$

e

$$h = \frac{\sigma \cos \theta}{d \rho g}$$

A velocidade do movimento de um líquido que, por acção da capilaridade, penetra num determinado espaço, é tanto maior quanto maior for a sua tensão superficial e menores a sua viscosidade e ângulo de contacto. É definido um coeficiente de penetração pela equação

$$\tau = \frac{\sigma \cos \alpha}{2 \eta}$$

onde  $\eta$  é a viscosidade do líquido.

Em medicina dentária interessa que certos adesivos possuam elevado  $\tau$  para actuarem como selantes de fissuras e fossas para preencherem rapidamente sulcos e zonas rugosas, de modo a permitirem uma boa união.

## 5.11 - Capilares isolados

Se for colocada uma pequena massa de líquido entre duas lâminas de vidro muito próximas, observa-se que esta adere às superfícies e se imobiliza, ficando como que suspensa entre as lâminas, Fig. 2.34.

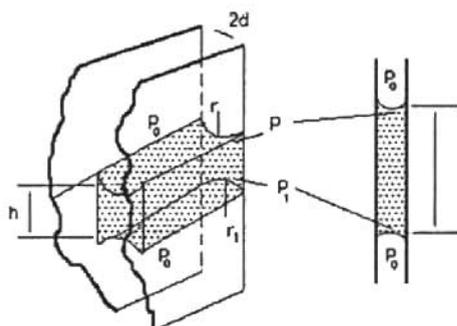


Fig. 2.34 - Formação de capilares isolados entre lâminas.

O equilíbrio no menisco superior é dado por

$$P_0 - P = \frac{\sigma}{r}$$

e no inferior é

$$P_0 - P_1 = P_0 - P - h \rho g = \frac{\sigma}{r_1}$$

donde

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{h \rho g}{\sigma}$$

Vemos que  $r$ , o raio de curvatura do menisco superior, é menor do que  $r_1$ , o raio de curvatura do menisco inferior. A pressão na fase líquida é sub-atmosférica e de valor médio

$$\frac{P_1 + P}{2} = \frac{1}{2} \left( 2 P_0 - \frac{\sigma}{r} - \frac{\sigma}{r_1} \right)$$

De um modo geral, nos capilares isolados quando o líquido molha as paredes, a pressão é sub-atmosférica. Entre os dentes existem espaços com dimensões capilares, ocorrendo a formação de capilares isolados com saliva, Fig. 2.35. A saliva penetra nestes espaços ficando aí com pressão barométrica negativa. Este facto tem consequências indesejáveis, pois existe evidência de que, para menores pressões, a velocidade de crescimento das bactérias pode aumentar até cerca de 20% do valor correspondente à pressão atmosférica.

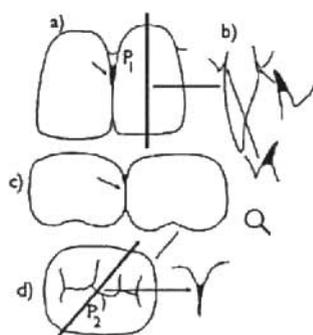


Fig. 2.35 - Algumas possibilidades de formação de capilares isolados. a) Entre os incisivos superiores. b) Entre um incisivo e a gengiva, segundo o plano  $P_1$  em a), mostrando em pormenor os capilares isolados. c) Entre molares e d) Nos espaços originados pela projecção dos cúspides, mostrando um pormenor ampliado.

Os fenómenos acima descritos não devem ser confundidos com adsorção. A adsorção é um fenómeno, pelo qual a elevada energia de superfície de um sólido é reduzida pela penetração superficial de átomos ou moléculas existentes em contacto e dispendo de mobilidade. Um exemplo típico é a adsorção de gases pelo carvão finamente dividido. A adsorção ocorre apenas à superfície enquanto que um outro fenómeno, a absorção, envolve a entrada de moléculas no interior de um corpo provenientes de uma fase exterior.

### 5.12 - Generalização da Fórmula de Laplace para o caso de paredes elásticas espessas

A fórmula de Laplace pode generalizar-se para o caso de membranas espessas elásticas curvas suportando diferenças de pressão. Sendo  $P_e$  a pressão a actuar do lado exterior da membrana e  $P_i$  a pressão interior, tem de admitir-se a existência de um gradiente de pressão na parede da membrana.

A tensão elástica na parede depende da composição desta, podendo variar de ponto para ponto. Para um tubo cilíndrico, o raio médio é

$$\bar{r} = \frac{r_e + r_i}{2}$$

onde  $r_e$  e  $r_i$  são os raios exterior e interior.

A variação da pressão no tubo, em função da distância  $r$  ao seu eixo, pode observar-se na Fig. 2.36.

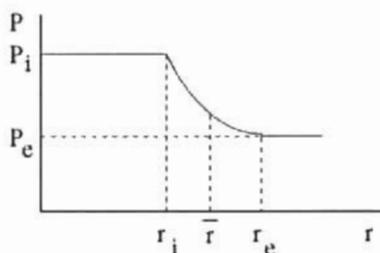


Fig. 2.36 - Variação da pressão através da parede de um vaso sanguíneo.

A fórmula de Laplace para um tubo cilíndrico de paredes elásticas espessas, quando a relação entre a espessura da parede e o raio interior do tubo,  $\frac{r_e - r_i}{r_i}$ , é suficientemente pequena, é dada, com boa aproximação,

por 
$$P = \frac{\bar{T}}{\bar{r}}$$

onde  $\bar{T}$  é a tensão média na parede.

A relação entre a espessura da parede e o raio interior do tubo é de cerca de 0,03 para o caso das veias e de 0,2 para a aorta. Nestes casos, a fórmula de Laplace é aplicável.

No caso das arteríolas, onde a relação espessura da parede/raio interior é por vezes superior à unidade, a referida fórmula já conduz a erros grosseiros.

### 5.13 - Tensões na parede da crossa da aorta

Consideremos as duas meias canas, superior e inferior, da crossa da aorta, Fig. 2.37.

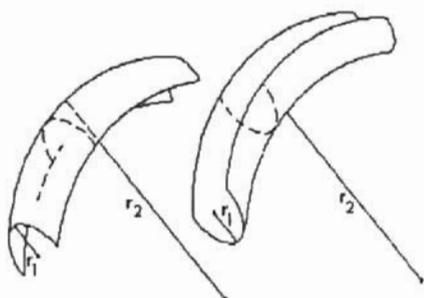


Fig. 2.37 - Meias canas superior e inferior da crossa da aorta e respectivos raios principais. Para a meia cana inferior  $r_2$  é negativo.

Os raios principais das duas meias canas, embora apresentando valores idênticos, apresentam uma diferença importante. A meia cana superior tem os dois raios de curvatura principais do mesmo lado da superfície. Na meia cana inferior os raios de curvatura encontram-se cada um em seu lado da superfície. Quando isto sucede consideram-se as curvaturas correspondentes a cada raio como sendo de sinal contrário, atribuindo-se o sinal negativo ao maior raio principal.

Seja  $P_{tm}$  o excesso de pressão do interior do vaso em relação ao exterior (pressão transmural). Aplicando a fórmula geral de Laplace, vem:

$$P_{tm} = T_s \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

para a meia cana superior e,

$$P_{tm} = T_i \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

para a meia cana inferior  $T_s$  e  $T_i$  são as tensões nas meias canas superior e inferior, respectivamente.

Igualando os factores dentro dos parêntesis, respectivamente, a  $a_s$  e  $a_i$  vem

$$P_{tm} = T_s a_s = T_i a_i$$

É evidente que  $a_s > a_i$ , pois, o primeiro é a soma de dois números e o segundo a sua diferença. Então,  $T_i > T_s$ .

Mostra este resultado que a parede inferior da crossa da aorta está sujeita a uma maior tensão do que a parte superior. A natureza tomou as suas providências quanto a este facto: a espessura da parede inferior da crossa da aorta é bastante superior à espessura da parede superior (Fig. 2.38). A maior fragilidade da parede superior origina que os aneurismas da crossa, resultantes de alterações da parede, ocorram sobretudo nesta parte do vaso.



Fig. 2.38 - Secção recta de uma crossa da aorta.

Uma dúvida, directamente relacionada com os valores da tensão na parede superior, pode surgir pelo facto de dever ocorrer um aumento de tensão nesta parede devido ao choque das partículas do líquido. Facilmente se vê que as partículas, ao entrarem na curvatura do tubo, pelo princípio da inércia, têm tendência a prosseguir em movimento rectilíneo chocando com a parte superior do tubo (Fig. 2.39).



Fig. 2.39 - Choque das partículas do líquido na parede superior da curva da aorta devido ao princípio da inércia.

Conhecendo a velocidade média do sangue na aorta ( $0,3 \text{ m/s}$ ) e a massa específica do sangue ( $1,02 \text{ g/cm}^3$ ) pode determinar-se a pressão cinética na aorta (energia cinética por unidade de volume do sangue na aorta  $\approx 0,5 \times 1,02 \times 30^2 = 459 \text{ erg} = 0,34 \text{ mm Hg}$ ). O valor obtido corresponde a cerca de  $0,34 \text{ mm}$  de mercúrio, valor insignificante ( $0,34 \%$ ) da pressão média na aorta,  $100 \text{ mm Hg}$ .

Uma outra aplicação da fórmula de Laplace a volumes limitados por paredes espessas e elásticas é aos ventrículos do coração. Facilmente se vê na Fig. 2.40 que os raios de curvatura nas paredes laterais dos ventrículos são superiores aos dos vértices.

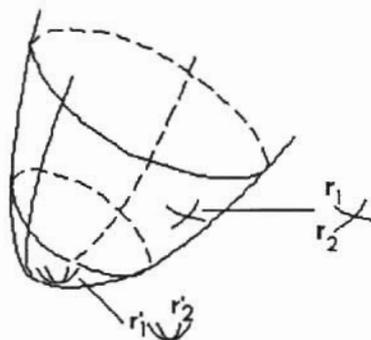


Fig. 2.40 - Raios de curvatura principais das paredes laterais do ventrículo esquerdo e vértice.

Designando por  $r_1$  e  $r_2$  e  $r'_1$  e  $r'_2$  os raios principais em dois pontos A e A', respectivamente na parede lateral e no vértice do ventrículo esquerdo, por  $\Delta P$  a diferença de pressão do ventrículo em relação ao exterior e  $T_1$  e  $T_V$  as tensões vem

$$P = T_1 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = T_V \left( \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} \right)$$

ou

$$P = T_1 a_l = T_V a_v$$

Como  $a_v > a_l$ , visto os raios principais no vértice serem menores é, necessariamente,  $T_1 > T_V$ .

Prova-se, então, que a tensão a que fica sujeita a parede lateral do ventrículo é superior à tensão no vértice. De facto, o coração está adaptado a esta situação, sendo a parede lateral do ventrículo substancialmente mais espessa que a parede do vértice (Fig. 2.41).

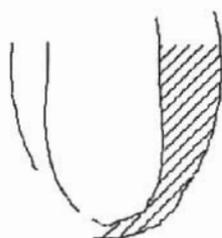


Fig. 2.41 - Espessuras da parede lateral e vértice do ventrículo esquerdo.

Um outro facto para o qual interessa chamar a atenção tem a ver com a dilatação (hipertrofia) do coração. No coração hipertrofiado, obviamente, os raios de curvatura principais aumentam. Assim, para um mesmo  $\Delta P$ , a tensão  $T$  nas paredes aumenta em relação às condições normais correspondendo, portanto, a um maior esforço de tensão no músculo cardíaco, situação indesejável.

6 - Deformações elásticas<sup>1</sup>

Uma barra sólida de secção  $S$  e comprimento  $\ell_0$ , quando sujeita à força de tracção de módulo  $F$ , sofre uma deformação que se traduz por um aumento do comprimento (e uma pequena diminuição das dimensões transversais). Quando a deformação é elástica e linear a 1ª lei de Hooke é aplicável, ou seja, verifica-se uma relação de proporcionalidade entre a relação  $\frac{F}{S}$  chamado de “tensão” ou esforço<sup>2</sup> (stress) e a deformação relativa ou alongamento unitário  $\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$  (strain), onde  $\Delta\ell$  é a variação de comprimento ( $\ell - \ell_0$ ). Assim, temos (Fig. 2.42)

$$\frac{F}{S} = E \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = E \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \quad 2.23$$

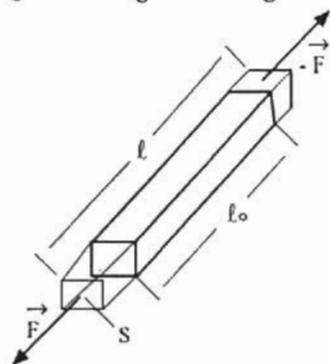


Fig. 2.42 - Tração elástica de uma barra de comprimento  $\ell_0$  sob a acção de uma força de módulo  $F$ .

<sup>1</sup> Uma deformação define-se como elástica se é reversível, ocorre simultaneamente com a acção deformadora e as relações entre esta acção e a deformação são as mesmas na fase da carga e da descarga (não ocorre histerese). Se esta relação é linear o comportamento do material é elástico linear.

<sup>2</sup> Embora a força  $F$  seja externa (acção), deve considerar-se a tensão, ou esforço, como a força interna gerada, igual e oposta à primeira (reação), por unidade de superfície.

A constante de proporcionalidade  $E$ , que tem as dimensões de  $F/S$ , é o módulo de elasticidade por tracção ou módulo de Young. O valor do módulo de Young é o inverso da deformação relativa sofrida pelo material, para uma tracção de valor unitário, ou seja, quanto maior for a deformação menor é o módulo de Young.

O valor de  $E$  para o osso é de cerca de  $10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. Para a borracha é de aproximadamente  $10^6$  N/m<sup>2</sup>. Para o aço,  $2,1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>.

Quando a força que actua é de compressão ocorre um encurtamento da barra (e um pequeno aumento das outras dimensões) (Fig. 2.43).

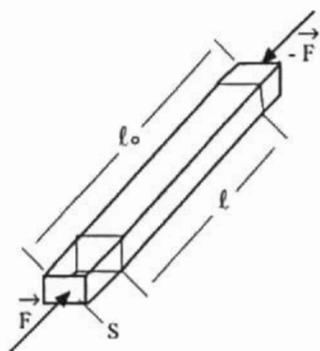


Fig. 2.43 - Compressão elástica de uma barra de comprimento  $\ell_0$  sob a acção de uma força de módulo  $F$ .

Se a deformação é elástica linear, a relação de proporcionalidade

$$\frac{F}{S} = E \frac{\ell_0 - \ell}{\ell_0} = -E \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad 2.24$$

permite definir o módulo de elasticidade por compressão que se verifica ser igual ao módulo de Young. Neste caso  $\Delta \ell$  é negativo.

Na deformação de um prisma quadrangular recto de comprimento  $\ell$ , por tracção ou compressão, a variação  $\Delta \ell$  do comprimento do corpo é acompanhada por uma variação em sentido contrário das dimensões

transversais do corpo. Pode considerar-se que o volume da barra se mantém constante durante a deformação, pelo que, Fig. 2.44,

$$\ell w h = (\ell + \Delta \ell) (w - \Delta w) (h - \Delta h)$$

na tracção e

$$\ell w h = (\ell - \Delta \ell) (w + \Delta w) (h + \Delta h)$$

na compressão.

Este facto é conhecido por efeito de Poisson.

Verifica-se que as deformações relativas em largura e altura, respectivamente  $\frac{\Delta w}{w}$  e  $\frac{\Delta h}{h}$ , são proporcionais à variação relativa do comprimento, quer se trate de tracção ou de compressão.

$$\frac{\Delta w}{w} = -\nu \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad 2.25$$

$$\frac{\Delta h}{h} = -\nu \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

onde  $\nu$  é o coeficiente ou razão de Poisson. Este coeficiente não tem dimensões, visto se tratar de uma relação entre dois números que são, afinal, as deformações relativas lateral e axial. As Eqs. 2.25 constituem a segunda lei de Hooke da elasticidade.

O módulo de Young e o coeficiente de Poisson caracterizam inteiramente as propriedades elásticas de sólidos homogêneos e isotrópicos. Nestes corpos, outros coeficientes de elasticidade podem ser definidos, mas serão sempre funções de  $E$  e  $\nu$ .

Os sólidos sofrem também deformação quando actuados por forças tangenciais. Através da relação de proporcionalidade entre a tensão de corte e o ângulo de corte, quando um sólido é sujeito à acção de um binário (Fig. 2.3), definimos a rigidez do material. A Eq. 2.3 constitui a 3ª Lei de Hooke da elasticidade.

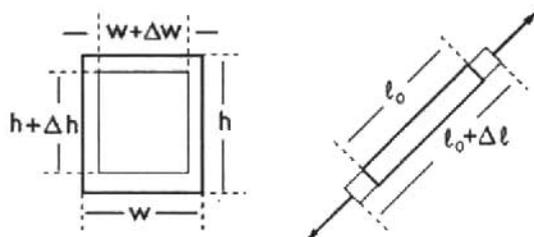
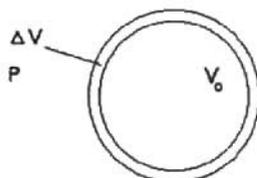


Fig. 2.44 - Deformações longitudinal e transversal numa barra elástica sujeita a tração.

Quando se considera a deformação elástica sofrida por um corpo de volume  $V_0$  quando sujeito a uma variação de pressão  $P$  ocorrendo em todos os pontos da sua superfície (Fig. 2.45), verifica-se que  $P$  é proporcional à deformação relativa  $\frac{\Delta V}{V_0}$

$$P = \epsilon \frac{\Delta V}{V_0} \quad 2.26$$

onde  $\Delta V$  é a variação de volume.

Fig. 2.45 - Variação de volume de um sólido devido a uma variação de pressão  $P$ .

onde  $\epsilon$  é o módulo volumétrico de elasticidade ou módulo de compressão. Quando a pressão se exerce com igual valor, segundo os três eixos, é chamada de pressão hidrostática ou esforço esférico.

Vê-se que, para um mesmo esforço e diferentes materiais, quanto maiores forem os valores de  $\epsilon$ , menores serão as deformações. Obviamente os módulos  $E$  e  $\epsilon$  têm uma definição que os antagoniza com o conceito vulgar de material elástico (deformável). Materiais com maiores coeficientes de elasticidade são os menos deformáveis. No conceito de rigidez, porém, já tal não sucede.

Embora fora do ambiente deste trabalho, pode enunciar-se uma lei de Hooke generalizada que considera as tensões a actuarem nos sólidos, segundo os três eixos e que contém as três leis de Hooke atrás referidas.

Consideradas as deformações numa e em três dimensões, falemos agora na deformação elástica sofrida por uma lâmina muito fina (espessura desprezável). A acção deformadora é uma força por unidade de comprimento, situada no plano da lâmina e normal ao lado em que actua, Fig. 2.46. Esta relação é, em termos físicos, uma tensão. No caso da tracção da barra, considerado anteriormente, o esforço, cujas dimensões é de força por unidade de área, é, pois, incorrectamente, chamado de tensão.

Verifica-se que a deformação relativa sofrida pelo comprimento da lâmina elástica obedece à lei de Hooke num certo intervalo de valores da tensão. Na Fig. 2.46, considera-se também o caso de uma tira com 1 cm de lado, para o qual a tensão é numericamente igual à força aplicada.

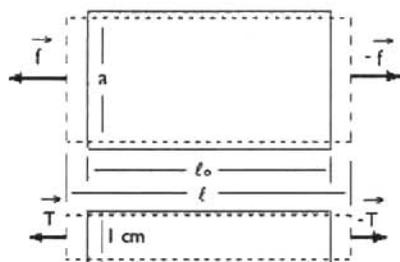


Fig. 2.46 - Deformação de tiras de material elástico. Se  $a = 1$ ,  $f = T$ , embora obviamente com unidades diferentes.

A relação de proporcionalidade entre tensão e deformação relativa, para uma lâmina, é dada pela expressão

$$T = \frac{f}{a} = E' \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = E' \frac{\ell}{\ell_0} - E' \quad 2.27$$

sendo  $E'$  a elastância do material. A elastância, caracteriza a deformação de lâminas de uma particular substância elástica sob a acção de tensões. De modo semelhante ao módulo de Young, para uma mesma acção defor-

madora, quanto maior for a elastância ( $E'$ ), menor será a deformação relativa. A representação gráfica da função  $T(\ell)$  é uma recta com coeficiente angular ( $\text{tg } \alpha$ ) igual a  $E'/\ell_0$  e interceptando o eixo dos  $XX$  na abscissa  $\ell_0$ , Fig. 2.47.

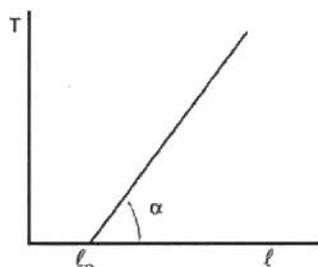


Fig. 2.47 - A representação gráfica da função  $T(\ell)$  é uma recta com coeficiente angular  $\text{tg } \alpha$ .

As forças em jogo na tira são facilmente evidenciadas, se considerarmos que esta é tão fina que possa considerar-se uma distribuição plana de moléculas. Admitindo que a tensão  $T$  está igualmente distribuída pelas moléculas da primeira linha, para existir equilíbrio terão que ser nulas as resultantes das forças a actuar sobre cada uma dessas moléculas. Assim, nas moléculas da primeira linha terão também que actuar forças iguais e opostas. Estas forças são as forças de coesão que as moléculas da segunda linha exercem sobre as primeiras. Pelo princípio da acção e reacção, as moléculas da segunda linha recebem por parte das primeiras acções iguais e opostas, estas compensadas por forças de coesão impostas pela terceira linha. A resultante das acções de coesão sobre uma fila de moléculas, produzidas por moléculas de uma linha contígua tem por módulo  $T$ .

Em qualquer secção imaginária da tira, podemos considerar duas forças iguais e opostas de valor  $T$ , Fig. 2.48. Evidentemente, o processo que descrevemos para as três primeiras linhas de moléculas aplica-se, nos mesmos moldes, para todas as moléculas da tira até se atingir a outra extremidade, onde a soma das forças a apontar para fora, de resultante  $T$  é a reacção do apoio.

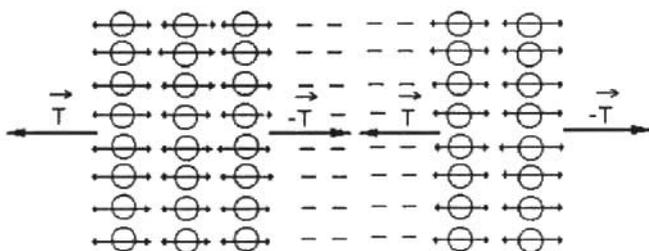


Fig. 2.48 - Forças em jogo numa tira elástica considerada uma distribuição plana de moléculas.

As propriedades elásticas dos sólidos devem-se às forças que se exercem entre os seus átomos ou moléculas constituintes que, como vimos, determinam os valores extremos das forças actuantes. Se a acção deformadora for demasiado intensa, a lei de Hooke deixará de verificar-se, ocorrendo deformação irreversível a partir do comprimento  $\ell_e$  (limite elástico), Fig. 2.49.

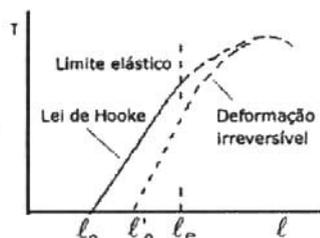


Fig. 2.49 - Deformação irreversível numa tira elástica sujeita a tracção elevada.

Dois outros tipos de deformação, para além dos já considerados, são a flexão e a torção, que podem considerar-se situações especiais dos três tipos anteriormente referidos: tracção, compressão e tensão de corte. A flexão de uma barra horizontal (Fig. 2.50), fixa numa extremidade, por aplicação, na extremidade livre, de uma força normal ao eixo da barra, a actuar, por exemplo, de cima para baixo, pode ser interpretada como deformação por tracção da metade superior da barra e por compressão da metade inferior.

A parte superior da barra fica esticada e tende a encurtar. Por seu lado, a parte inferior fica comprimida e tende a esticar. Estas forças produzem um binário em cada secção da barra.

Por sua vez, a torção, desde que o ângulo de torção seja pequeno, é equivalente a uma deformação por acção de tensões de corte. A deformação dum barra cilíndrica por torção, quando o momento das forças aplicadas tem a direcção do eixo, pode ser interpretada considerando deslocamentos laminares por acções de corte, ocorrendo entre discos normais ao eixo do cilindro.

## 7 - Deformação por flexão

Na continuação das nossas tentativas de encontrar relações entre as alterações nas dimensões dos sólidos e as forças que produzem essas alterações, consideremos agora uma barra sujeita a deformação elástica por flexão devida à acção da força  $\vec{F}$  (Fig. 2.50).

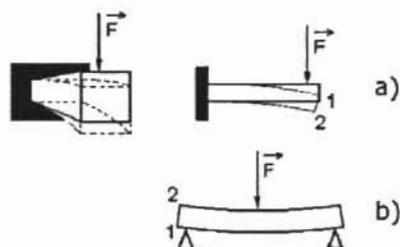


Fig. 2.50 - Deformação de uma barra por flexão. a) barra com um só ponto de apoio; b) barra com dois pontos de apoio.

No caso da flexão, interessa conhecer as deformações sofridas pelos elementos individuais da barra, bem como a flecha ou deformação vertical máxima.

Considerando a barra constituída por uma sobreposição de camadas horizontais (fibras longitudinais horizontais) sobrepostas, observa-se que as fibras das partes 1 sofrem aumento de comprimento (são sujeitas a trac-

ção) e as fibras da parte 2 encurtam (são sujeitas a compressão). Existe um plano no centro da barra que não deforma, ou seja, que não está sujeito a tensões externas, a que se chama plano neutro.

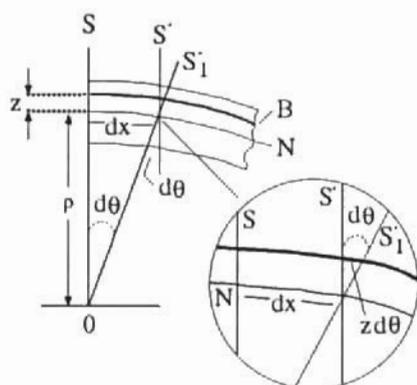


Fig. 2.51 - Esquema das ações que ocorrem durante a flexão de uma barra.

Antes da flexão são paralelos os planos S e S' formados por pontos da barra à distância dx (Fig. 2.51). Durante a flexão os pontos do plano S' deslocam-se e os planos deixam de ser paralelos. Tudo se passa como se S' tivesse rodado de  $d\theta$  em torno de um eixo normal ao papel e a passar pela intersecção de S' com o plano neutro, ficando na posição S<sub>1</sub>. A medida do arco dx, correspondente ao plano neutro N durante a flexão, é

$$dx = \rho d\theta$$

As fibras, inicialmente num plano B, à distância z acima do plano neutro, são sujeitas a tração, sendo  $zd\theta$  o seu aumento de comprimento. O comprimento inicial dx aumentou para  $dx+zd\theta$ . O aumento relativo do comprimento da fibra foi então

$$\frac{z d\theta}{dx} = \frac{zd\theta}{\rho d\theta} = \frac{z}{\rho}$$

Sendo o aumento de comprimento originado, como vimos, por forças de tracção teremos, por aplicação da Eq. 2.23:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell} = E \frac{z}{\rho}$$

Se  $dS$  é a área da secção recta da fibra e  $dF$  a força que actuou temos

$$dF = E \frac{z}{\rho} dS \quad 2.28$$

Então, na flexão, a força que tende a deformar a barra varia com a distância à fibra neutra,  $z$  (Fig. 2.52).

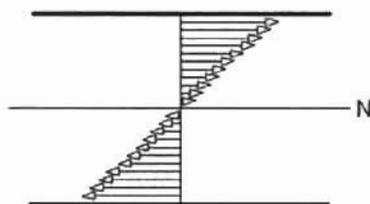


Fig. 2.52 - Distribuição das forças de flexão a actuar numa secção da barra.  
A parte inferior está sujeita a compressão.

Parece lógico considerarmos que a rotação da secção  $S'$  (Fig. 2.51) se deve a um momento flector a actuar em cada camada da barra, cujo momento para a camada à distância  $z$  é

$$dM = z dF = E \frac{z^2}{\rho} dS$$

e o momento flector total

$$M = \frac{E}{\rho} \int_S z^2 dS \quad 2.29$$

Na Eq. 2.29 o factor

$$I = \int_S z^2 dS \quad 2.30$$

é o momento de inércia geométrico que só depende da forma da barra.

O momento flector total pode, então escrever-se

$$M = \frac{E}{\rho} I$$

enquanto a curvatura (inverso do raio de curvatura  $\rho$ ) vem

$$C = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad 2.31$$

Desta equação concluímos que a deformação da barra será tanto maior, quanto maior for o momento flector e menores o módulo de Young e o momento de inércia geométrico. As duas primeiras razões são óbvias. Quanto à segunda, merece a nossa atenção. O valor de  $I$  representa o somatório de todas as distâncias possíveis ao plano neutro, elevadas ao quadrado. As pequenas distâncias contribuem muito pouco para o valor de  $I$ . Para a distribuição da massa da barra afastada do plano neutro, o valor de  $I$  é elevado e a deformação da barra vai ser reduzida. Assim, para uma determinada massa de material, um tubo resiste mais à deformação que uma barra maciça com a mesma quantidade de material.

Além dos parâmetros referentes à elasticidade, convém também especificar a resistência dos materiais em termos do esforço mínimo capaz de quebrar o material. Deste modo, pode definir-se uma tensão de rotura para forças de tracção e, de modo idêntico, para forças compressivas.

Há outras situações onde importa considerar a resistência de sistemas biológicos à flexão, ou seja, forças que provocam flexões, como por exemplo, a asa de uma ave durante o voo, sujeita à resistência do ar. Nestas situações é possível calcular-se um momento responsável pela curvatura e até possível determinar-se qual será o momento máximo que o sistema suporta, acima do qual haverá fractura.

## 8 - Deformação por torção

Consideremos uma barra cilíndrica fixa a um suporte na extremidade e sujeita, na outra extremidade, à acção de um binário com forças situadas num plano normal ao eixo da barra. O momento deste binário tem a direcção do eixo do cilindro. Um plano **P** contendo o eixo do cilindro e normal ao plano da figura apresenta, após a aplicação do binário, a forma distorcida que se observa na Fig. 2.53-a) e as geratrizes do cilindro transformam-se em linhas curvas. Devido à tensão de corte entre camadas sucessivas, ocorrem deformações. Se o ângulo de corte é pequeno, verifica-se a terceira lei de Hooke. Tensão de corte e deformação estão relacionadas pela Eq. 2.3.

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{\Delta x}{y} = \mu \varepsilon$$

O ângulo de rotação aumenta linearmente com a distância à extremidade fixa e as linhas radiais mantêm-se rectas.

Consideremos a secção dividida em pequenas coroas circulares definindo camadas cilíndricas de raios  $r$  e  $r + \Delta r$  a variar de **O** a **R** (Fig. 2.53-b). A área da coroa circular de raio interior  $r$  é  $\Delta S = 2\pi r \Delta r$ . Os anéis rodam um ângulo  $\alpha$  a que corresponde uma distância  $\alpha r$  percorrida por qualquer dos seus pontos.

A deformação de corte pode escrever-se

$$\varepsilon = \frac{\alpha r}{\ell} \quad 2.32$$

pelo que a relação  $F/S$  toma a forma

$$\frac{dF}{dS} = \mu \frac{\alpha r}{\ell}$$

A força que terá de actuar, num anel, para ocorrer a deformação  $\varepsilon$  é

$$dF = \mu \frac{\alpha r}{\ell} 2\pi r dr \quad 2.33$$

O momento desta força em relação ao eixo do cilindro é

$$dM = r \left( \mu \frac{\alpha r}{\ell} 2\pi r dr \right) = 2\pi \mu \frac{\alpha}{\ell} r^3 dr \quad 2.34$$

O momento total que é necessário exercer para originar a deformação é

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 2\pi \mu \frac{\alpha}{\ell} r^3 dr \\ &= \pi \mu \frac{\alpha}{2\ell} R^4 \end{aligned} \quad 2.35$$

A quantidade  $I_p = \frac{\pi R^4}{2}$  é o momento de inércia polar, pelo que a Eq. 2.35 toma a forma

$$M = \mu \frac{\alpha}{\ell} I_p \quad 2.36$$

Como  $I_p$  varia com  $R^4$ , se duplicarmos o raio da barra, o momento necessário para ter a torção correspondente ao ângulo  $\alpha$  aumenta de 16 vezes.

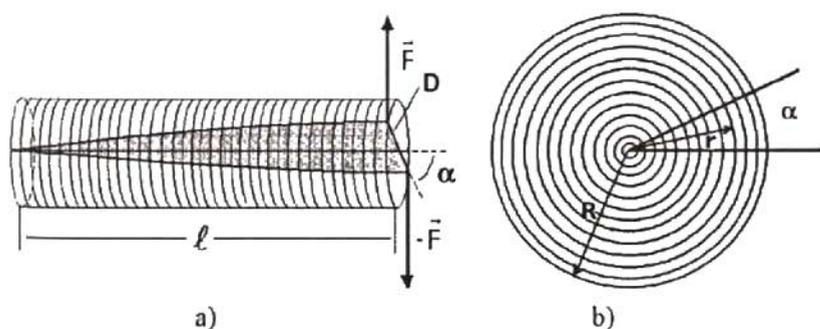


Fig. 2.53 - a) Barra cilíndrica fixa a um suporte e sujeita, na outra extremidade, à acção de um binário com forças situadas num plano normal ao eixo da barra. b) Divisão da secção em pequenas coroa circulares de raio  $r$  e largura  $\Delta r$ .

## 9 - Energia armazenada nos materiais elásticos

É necessário executar trabalho para deformar um corpo elástico. Estes corpos retomam a forma inicial após a actuação das forças que produziram o trabalho. Isto verifica-se quando a intensidade da força não ultrapassa determinado valor, a partir do qual são introduzidas alterações na estrutura do material.

O trabalho realizado na tracção de uma tira de material elástico pode ser determinado a partir da curva da força elástica de reacção da tira  $F_e$  em função do aumento de comprimento  $a$  (Fig. 2.54). Para um aumento considerável de comprimento a curva não é uma recta.

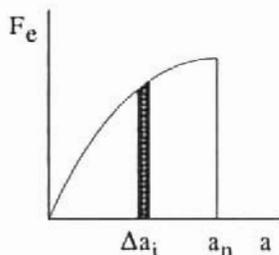


Fig. 2.54 - A área subentendida pela curva é o trabalho realizado na deformação de uma tira de material deformável.

Dividindo o aumento de comprimento  $a$ , em  $n$  pequenos intervalos de comprimento  $\Delta a_i$ , o trabalho realizado pela força elástica é, para cada intervalo,  $F_e \Delta a_i$ . O trabalho total realizado é

$$W = \sum_{i=1}^n F_e \Delta a_i$$

144

que corresponde à área total limitada pela curva.

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_e \Delta a_i = \int_0^{a_n} F_e da \quad 2.37$$

No gráfico anterior (Fig. 2.54) não se verifica a lei de Hooke, a não ser para deformações muito pequenas. Em geral, esta é a situação dos materiais elásticos dos sistemas biológicos.

Se a força de tracção deixa de actuar, o material retoma a forma inicial; contudo, os valores de  $F_e$  observados para os diferentes valores de  $a$  não coincidem com os anteriores situando-se mais abaixo. O trabalho realizado pelas forças elásticas é menor quando a tira retoma a forma inicial, sendo a diferença a área sombreada da Fig. 2.55.

Isto constitui um ciclo de histerese mecânica. A diferença entre os trabalhos executados pelas forças elásticas de 0 para A e vice versa, corresponde à energia dissipada, para vencer forças de fricção.

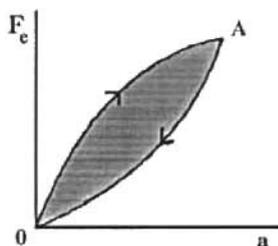


Fig. 2.55 - Ciclo de histerese mecânica.

## 10 - Materiais compostos

Um problema de grande actualidade no campo da ciência dos materiais é o dos materiais compostos. Estes têm propriedades mecânicas que superam substancialmente as propriedades individuais dos seus materiais constituintes. De um modo geral, os materiais compostos são constituídos por fibras de um elemento duro e resistente com módulo de Young muito elevado, tendo por suporte um meio mais mole e deformável com módulo de Young muito baixo. As razões teóricas que justificam as propriedades dos materiais assim obtidos são muito variadas e há ainda diversos fenómenos mal esclarecidos.

Os materiais duros e com módulo de Young elevado são em geral frágeis. O vidro, por exemplo, é pouco deformável e quebra com facilidade.

Os metais são muito deformáveis e mais resistentes a pancadas que o vidro. O módulo de Young dos metais é mais baixo que o módulo do vidro.

A razão pela qual um metal não quebra com uma pancada é que as suas moléculas podem deslizar umas em relação às outras e produzir uma nova reordenação sem romper a estrutura inicial.

O vidro não é propriamente uma estrutura frágil. O que sucede é que devido a numerosas imperfeições, sobretudo à superfície, não é possível uma reordenação das moléculas por deslizamento. Por técnicas especiais foi possível obter barras de cristal com superfície quase perfeita. Estas barras suportam pressões enormes. Contudo, se durante um ensaio com uma barra de vidro, sujeita a esforço (tração por exemplo), a superfície da barra for riscada, esta fractura explosivamente. Por outro lado, verifica-se que as peças pequenas de cristal resistem muito melhor a esforços que as grandes porque estas têm maior número de imperfeições à superfície. Na prática, os materiais compostos têm vantagem em usar pequenos cristais, com poucos defeitos, incluídos num material plástico de pequeno módulo de Young.

Por exemplo, existem materiais constituídos por fibras de quartzo em alumínio com propriedades mecânicas excepcionais, assim como fibra de vidro em resina sintética, etc. Pois bem, os ossos são talvez a versão mais antiga destes materiais. Abstraindo das células vivas e dos canais necessários para manutenção das funções vitais, a parte verdadeiramente estrutural do osso é constituída por lamelas ósseas minerais, cuja composição é fosfato mais carbonato de cálcio e magnésio, com estrutura química semelhante à da apatite, embebidas numa proteína chamada colagéneo que contribui com cerca de 25% do peso do osso. A apatite tem um módulo de Young muito elevado e confere a rigidez ao osso. O colagéneo é muito flexível (módulo de Young baixo) mas muito resistente à rotura.

Se tratarmos um osso com ácido clorídrico, o material inorgânico (apatite) dissolve-se e, embora o osso não perca a sua forma e dimensões, fica mole e flexível como uma cartilagem. Pode assim verificar-se a função de cada um dos componentes. A característica de ser pouco deformável vem da matéria mineral. Além disso, resiste a esforços e a impactos sem aparecerem fracturas, como sucederia num cristal puro de apatite, devido ao colagéneo, que não deixa propagar eventuais roturas na superfície dos cristais.

## 11 - Forças interiores e exteriores

Forças interiores são aquelas que se exercem entre partes dum mesmo sistema material (corpo sólido ou massa líquida). Podem considerar-se, por exemplo, as forças a actuarem entre superfícies imaginárias no interior ou entre partículas do sistema.

Forças exteriores são aquelas que o meio exterior exerce sobre um sistema material. As forças exteriores podem dividir-se em forças de superfície e forças de massa. As primeiras actuam sobre a superfície e as segundas sobre a massa do corpo (caso do peso e forças de inércia).

Consideremos a secção de um sólido em equilíbrio, por um plano imaginário  $\pi$ , como na Fig. 2.56, e representemos por  $\vec{\Delta F}$  a resultante das forças que um elemento de superfície  $\Delta S$  exerce sobre a outra parte do sólido, que retirámos da figura.

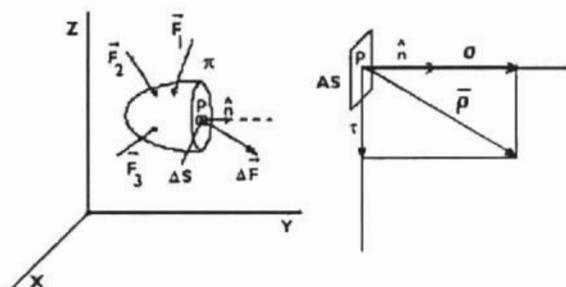


Fig. 2.56 - Tensão das forças interiores num ponto P.

Na ausência de forças externas aplicadas no sólido (Fig. 2.56), ou seja:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = 0$$

o limite

$$\vec{\rho} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta S} \quad 2.38$$

é a tensão das forças interiores no ponto P, centro do elemento  $\Delta S$ .

Se estiverem aplicadas forças externas, a Eq. 2.38 corresponde à tensão total exercida no ponto  $P$  do plano  $\pi$ , ou a força por unidade de área no ponto  $P$ .

As componentes da tensão  $\bar{p}$ , respectivamente segundo a normal e a tangente no ponto  $P$ , constituem a tensão normal e a tensão de corte (ou tangencial, ou ainda, de cisalhamento).

Num sólido, em geral, as deformações são pequenas e, neste caso, as tensões são proporcionais às deformações por elas provocadas. Para tensões elevadas esta proporcionalidade deixa de se verificar, ocorrendo grandes deformações. A tensão surge aqui como uma grandeza física que permite definir os esforços internos no corpo (ou massa de líquido), independentemente da sua forma ou dimensões.

Quando a deformação deixa de ser reversível temos uma deformação plástica ou permanente. Os problemas da deformação dos sólidos são tratados considerando vectores força actuantes e vectores que traduzem as deformações produzidas. As relações entre estes vectores são, por vezes, extremamente complexas e só podem ser satisfatoriamente descritas por meio de tensores.

Tensores são quantidades matemáticas como os números e os vectores. Um tensor relaciona vectores entre si.

Se aplicarmos uma força  $\vec{F}$  no ponto  $A$  de um sólido e este ponto se deslocar para  $A'$ , o vector deformação  $\vec{\delta}$  é o vector posição de  $A'$  em relação a  $A$ , vector que vai traduzir a deformação no ponto  $A$ .

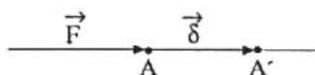


Fig. 2.57 - O vector deslocamento do ponto  $A$ ,  $\vec{\delta}$ , traduz a deformação que o sólido sofreu nesse ponto sob a acção da força  $\vec{F}$ .

No caso mais simples  $\vec{F}$  e  $\vec{\delta}$  têm a mesma direcção, como na Fig. 2.57, sendo

$$\vec{\delta} = \alpha \vec{F}.$$

Neste caso o tensor  $\alpha$  é um escalar

$$\delta_x = \alpha F_x$$

$$\delta_y = \alpha F_y$$

$$\delta_z = \alpha F_z$$

No caso mais geral,  $\vec{F}$  e  $\vec{\delta}$  não são colineares, Fig. 2.58.

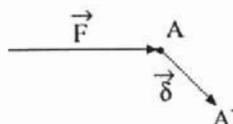


Fig. 2.58 - Caso geral da deformação produzida num ponto A de um sólido por uma força  $\vec{F}$ .

Para se traduzir a deformação, teremos de admitir que  $\vec{F}$  actua independentemente segundo cada uma das três componentes de  $\vec{\delta}$  e vem

$$\delta_x = \alpha_{11} F_x + \alpha_{12} F_y + \alpha_{13} F_z$$

$$\delta_y = \alpha_{21} F_x + \alpha_{22} F_y + \alpha_{23} F_z$$

$$\delta_z = \alpha_{31} F_x + \alpha_{32} F_y + \alpha_{33} F_z$$

Os coeficientes  $\alpha_{ij}$  (com  $i, j = 1, 2, 3$  correspondentes a  $x, y, z$ ) são, no geral, independentes entre si significando, por exemplo  $\alpha_{12}$ , a deformação segundo os  $XX$  devido à componente da força segundo os  $YY$ . No caso de ser  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}$  e os restantes parâmetros nulos, o tensor é um escalar (tensor de ordem zero).

**12 - Deformações****12.1 - Deformação relativa (strain)**

Definimos a deformação relativa de uma barra quando sujeita a forças de tracção pela relação

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

Após aplicarmos uma tracção a uma barra, cujo comprimento varia de  $\ell_0$  a  $\ell_1$ , apliquemos nova tracção com um aumento de comprimento até ao valor final  $\ell_2$ .

As sucessivas deformações produzidas serão:

$$\varepsilon_1 = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1}$$

A deformação total pode ser calculada por:

$$\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\ell_2}{\ell_0} - 1;$$

Contudo, a soma  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ , que parecia óbvio ser igual à equação anterior, dá

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} + \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1} = \frac{\ell_1}{\ell_0} + \frac{\ell_2}{\ell_1} - 2$$

Como se vê

$$\varepsilon \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad 2.39$$

O segundo membro da Eq. 2.39 só é próximo do primeiro se tivermos  $\ell_1 \approx \ell_2$ .

A deformação relativa, como a definimos, só se pode aplicar a muito pequenas deformações e de modo aproximado.

## 12.2 - Deformação diferencial

Pequenas deformações podem escrever-se na forma diferencial

$$d\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varepsilon}{d\ell} = \frac{1}{\ell} \quad 2.40$$

por integração vem

$$\varepsilon = \ln \ell + C^{\text{te}}$$

Para  $\varepsilon = 0$  é  $\ell = \ell_0$  ou  $0 = \ln \ell_0 + C^{\text{te}}$  e  $C^{\text{te}} = -\ln \ell_0$   
vem

$$\varepsilon = \ln \ell - \ln \ell_0$$

ou

$$\varepsilon = \ln (\ell / \ell_0)$$

Se tivermos duas deformações sucessivas,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , nas mesmas condições do caso anterior vem

$$\varepsilon_1 = \ln (\ell_1 / \ell_0) \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = \ln (\ell_2 / \ell_1)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \ln (\ell_1 / \ell_0) + \ln (\ell_2 / \ell_1)$$

$$= \ln [(\ell_1 / \ell_0) \times (\ell_2 / \ell_1)]$$

$$= \ln (\ell_2 / \ell_0)$$

A deformação global é então:

$$\varepsilon = \ln (\ell_2 / \ell_0) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad 2.41$$

Para pequenas deformações, a deformação diferencial total para duas tensões crescentes e sucessivas iguala a soma das deformações diferenciais parciais.

## 13 - Tipos de deformação

Relativamente à evolução no tempo da deformação quando a tensão se mantém constante, podemos distinguir dois casos:

1) A deformação  $\epsilon_0$  mantém-se constante, quando aplicada uma tensão constante  $T_0$ , Fig. 2.59.

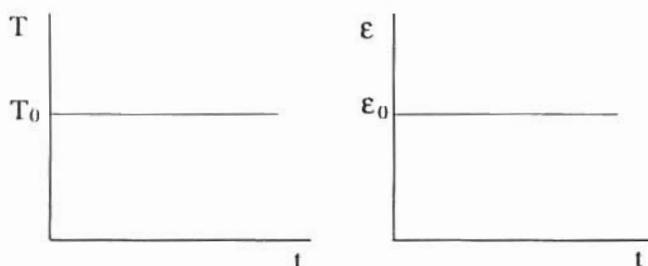


Fig. 2.59 - A deformação mantém-se constante durante a aplicação da tensão. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

2) A deformação aumenta durante a aplicação de uma tensão constante. O aumento, que pode ser linear no início, tende para um valor máximo, Fig. 2.60.

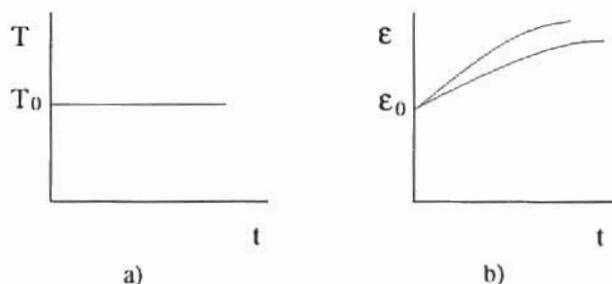


Fig. 2.60 - Durante a aplicação da tensão a deformação aumenta com o tempo até ser atingido um patamar. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

## 14 - Reacção à supressão instantânea da tensão

Após a supressão de uma tensão constante, poderão ocorrer diversos comportamentos no que respeita à deformação:

- a) A deformação é definitiva, ou seja, mantém-se constante com o valor que apresentava no instante em que cessa a aplicação da carga ( $t = t_1$ ), Fig. 2.61.

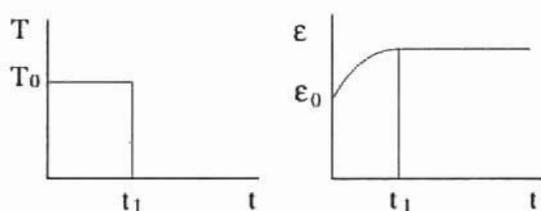


Fig. 2.61 - A deformação mantém-se após a suspensão da tensão no instante  $t_1$ . À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

- 2) A deformação diminui bruscamente até um certo valor  $\epsilon_1$ , que varia com o material, seguindo-se uma diminuição lenta da deformação (deformação residual) levando muitas vezes a uma deformação permanente  $\epsilon_p$ , Fig. 2.62.

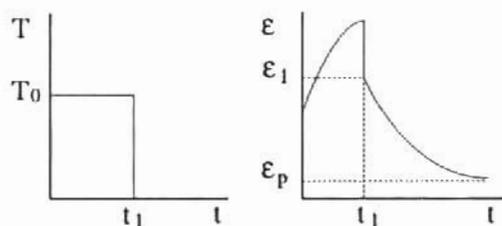


Fig. 2.62 - Após a suspensão da tensão no instante  $t_1$  a deformação diminui bruscamente, mantendo-se esta diminuição durante um período de deformação residual até ser atingido um estágio que poderá corresponder à deformação permanente. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

## 15 - Classificação reológica dos materiais

## 15.1 - Sólidos indeformáveis (Sólidos de Euclides)

Nestes sólidos teóricos nunca ocorre deformação, tem-se  $\epsilon = 0$  para qualquer  $T$ , Fig. 2.63.

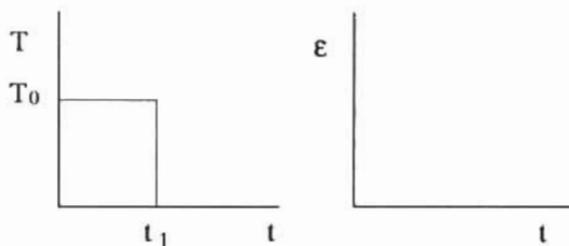


Fig. 2.63 - A tensão não produz qualquer deformação no sólido. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

## 15.2 - Sólidos dotados de elasticidade linear (Sólidos de Hooke)

Um corpo perfeitamente elástico restitui integralmente a energia que lhe foi transmitida. Sob a acção da tensão  $T_A$  ocorre a deformação  $\epsilon_A$ . Suprimindo a tensão,  $\epsilon$  volta a zero. A função  $T(\epsilon)$  é linear e unívoca, Fig. 2.64.

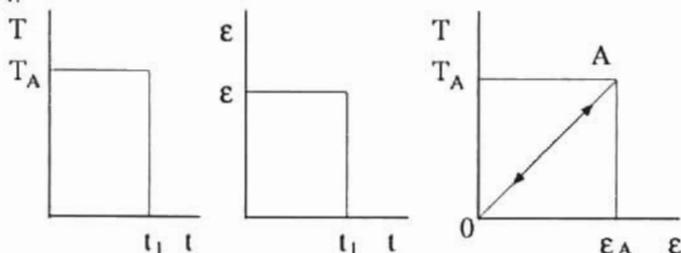


Fig. 2.64 - A tensão produz, no sólido, uma deformação proporcional ao valor da tensão. À esquerda a função  $T(t)$ . Ao meio a correspondente função  $\epsilon(t)$ . À direita a função  $T(\epsilon)$ .

## 15.3 - Corpos plásticos

Os corpos plásticos só acusam deformação a partir de um limiar de tensão  $T_c$  (Fig. 2.65). Uma vez ultrapassado esse limiar, se é suprimida a tensão, o material mantém a deformação máxima que atingiu,  $\epsilon_{\max}$ . A deformação é, portanto, irreversível só sendo alterada por acção de outras forças.

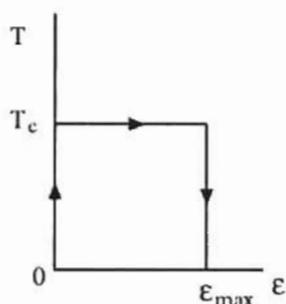


Fig. 2.65 - A tensão só produz deformação no sólido a partir de um limiar de tensão  $T_c$ .

## 15.4 - Corpos viscosos

- a) Caso ideal - líquido sem viscosidade (líquido de Pascal)

$$T = 0 \quad \text{qualquer que seja } \epsilon$$

- b) Líquidos viscosos

Podem considerar-se dois tipos de líquidos viscosos:

1. Líquidos newtonianos ou líquidos de viscosidade normal (Fig. 2.9).
2. Líquidos não newtonianos (Fig. 2.10).

Os líquidos viscosos para sofrerem deformação com uma taxa  $d\epsilon/dt$  determinada, exigem que seja aplicada uma tensão tangencial não nula.

As Figs. 2.9, 2.10 e 2.11-a) são de  $T$  em função de  $\frac{dv}{dy}$ . Para um dado valor de  $T$ , o gradiente da velocidade de deslocamento  $\frac{dv}{dy}$  das partículas no líquido representa também a velocidade de deformação do líquido, pelo que estas figuras devem também ser entendidas como a representação de  $T$  vs.  $\frac{d\varepsilon}{dt}$ .

De facto, se, sob a acção de forças tangenciais, uma partícula com coordenadas  $(x, y)$  sofre um pequeno deslocamento  $\Delta x$ , a deformação em relação à origem de coordenadas é

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Se o deslocamento  $\Delta x$  ocorreu no intervalo de tempo  $\Delta t$ , a velocidade de deformação é

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{dx}{dy} \right] = \frac{d}{dy} \left[ \frac{dx}{dt} \right] = \frac{dv}{dy}$$

como se pretendia demonstrar.

### 15.5 - Corpos viscoelásticos

Um material puramente elástico é um caso ideal. Em tal material não ocorreria transformação de energia mecânica em calorífica, durante a deformação, ocorreria só armazenamento de energia, recuperável na totalidade.

Os materiais viscoelásticos armazenam energia mas dissipam uma fracção durante a deformação. Uma parte da energia potencial, teoricamente utilizável é, assim dissipada, durante a deformação dos materiais viscoelásticos. Além disso, estes materiais, durante os ciclos de carga e descarga, mostram histerese, ou seja, as curvas tensão-deformação não apresentam o mesmo perfil durante a carga e a descarga. Nos corpos

viscoelásticos a deformação é simultaneamente função da tensão (carga) e do tempo. Recordemos que nos corpos de elasticidade linear (ou corpos de Hooke) a deformação só depende da tensão  $T$ .

### 15.5.1 - Sólidos de Voigt

Estes materiais apresentam propriedades que são, muitas vezes, designadas de elasticidade retardada.

É costume considerarem-se três tipos de curvas no estudo da viscoelasticidade: curvas de fluência (creep), curvas de relaxação e curvas de tensão-deformação.

#### a) Curvas de fluência

Fluência é a variação da deformação com o tempo, sem variação da carga. Assim, as curvas de fluência são curvas de deformação/tempo para uma tensão aplicada  $T_0$ , rectangular e de duração apropriada. Nos corpos de Voigt a tensão relaciona-se com a deformação  $\epsilon$  e com a velocidade de deformação  $\frac{d\epsilon}{dt}$ , através da Eq. 2.42

$$T(t) = E \epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad 2.42$$

onde  $E$  é o módulo de Young e  $\eta$  a viscosidade. A deformação tende para um limite  $\frac{T_0}{E}$  através de Eq. 2.43 que é o integral da Eq. 2.42.

$$\epsilon(t) = \frac{T_0}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right) \quad 2.43$$

As curvas para um impulso de tensão de valor máximo  $T_0$  são as indicadas na Fig. 2.66.

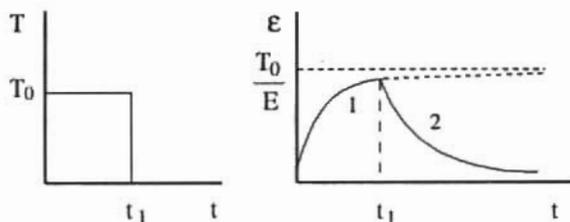


Fig. 2.66 - Curva de fluência - corpo de Voigt - À esquerda a tensão rectangular aplicada  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ . 1- deformação vs. tempo até  $t=t_1$  com  $T = T_0$  e 2 - recuperação.

A parte 1 da curva traduz a deformação durante a aplicação da tensão e corresponde à equação em baixo, que já conhecemos

$$\epsilon(t) = \frac{T_0}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right)$$

A parte 2 da curva traduz a deformação, após suspensão da aplicação da tensão (depois de  $t = t_1$ ) e é representada pela Eq. 2.44.

$$\epsilon(t) = \epsilon(t_1) e^{-\frac{E}{\eta} (t-t_1)} \quad \text{com } t > t_1 \quad 2.44$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade de Young. A deformação tende para zero com o aumento do tempo.

Nas Eqs. 2.43 e 2.44 a relação  $\frac{\eta}{E}$  é a constante de tempo do processo.

Assim, decorrido um intervalo de tempo  $\Delta t = \frac{\eta}{E}$ , após a suspensão da aplicação da tensão ( $t = t_1$ ) vem  $\epsilon = \epsilon(t_1) e^{-1}$ , ou seja, neste intervalo o material regenerou até  $e^{-1}$  da máxima deformação atingida.

### b) Curvas de relaxação

Em sentido geral, relaxação é o esforço, variável no tempo, necessário para manter uma deformação constante. Na prática chamam-se curvas de relaxação às curvas  $T(t)$  necessárias para induzir uma deformação rectangular, Fig. 2.67.

A deformação mantém um valor constante, enquanto que a tensão necessária para a manter diminui a partir de  $T_0$  tendendo para um limite  $T_L$ . Para se anular  $\epsilon$  para  $t = t_1$  tem  $T$  de tomar valores negativos tendendo depois para zero.

Nos corpos de Voigt o fenómeno da relaxação mostra a existência de memória nos sólidos viscoelásticos. A deformação num dado instante depende dos valores da tensão que anteriormente foram aplicados no sólido.

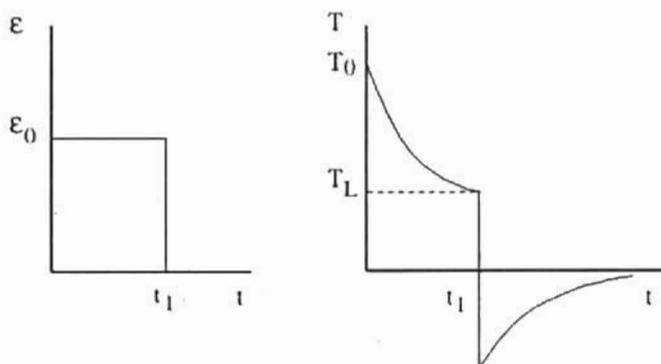


Fig. 2.67 - Para a deformação rectangular vs. tempo calcula-se a tensão vs. tempo que é necessário aplicar para a produzir. À esquerda a função  $\epsilon(t)$ . À direita a correspondente função  $T(t)$  para o corpo de Voigt.

### c) Curvas de tensão-deformação

Curvas de tensão-deformação são as curvas  $T(\epsilon)$  que podem ser obtidas a partir das curvas de relaxação, Fig. 2.68.

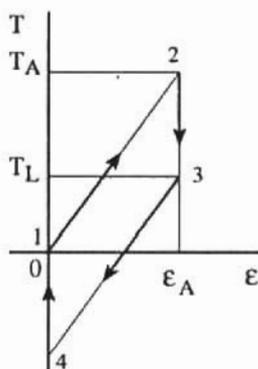


Fig. 2.68 - Curva tensão-deformação (ciclo de histerese no corpo de Voigt).

Em 1,  $T = 0$  e  $\epsilon = 0$ ; em 2,  $T = T_A$  e  $\epsilon = \epsilon_A$ . De 1 para 2  $T(\epsilon)$  cresce de forma linear desde que  $\epsilon_0$  se situe na região do comportamento elástico. De 2 para 3,  $T$  decresce de  $T_A$  a  $T_L$  e  $\epsilon = C^{te} = \epsilon_A$ . De 3 para 4,  $T(\epsilon)$  decresce de forma linear, tendo de ser  $T < 0$  para  $\epsilon$  voltar a zero. De 4 para 1,  $T$  regressa a zero com  $\epsilon = 0$ . O trajecto 1234 constitui um ciclo de histerese característico do material.

### 15.5.2 - Fluidos de Maxwell

São fluidos que apresentam um certo grau de memória nas deformações. Após aplicação do impulso de tensão e uma vez terminado este, não é restaurada a forma inicial do corpo que mantém uma deformação residual  $\epsilon_p$ . Exemplos destes fluidos são certos silicões.

#### a) Curva de fluência

Após aplicação do impulso rectangular de tensão e uma vez terminado este, não é restaurada a forma inicial do corpo que mantém uma deformação residual  $\epsilon_p$ , Fig. 2.69.

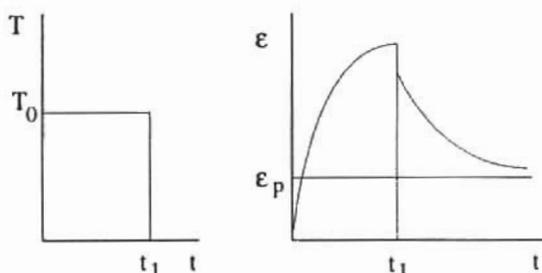


Fig. 2.69 - Após o impulso de tensão não é restaurada a forma inicial do corpo que mantém uma deformação residual  $\epsilon_p$ . À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

### b) Curva de relaxação

A deformação nestes fluidos pode considerar-se como tendo dois componentes  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . O termo  $\epsilon_1$  é proporcional à tensão e a derivada de  $\epsilon_2$  em ordem ao tempo é proporcional à tensão, ou seja:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad 2.45$$

com

$$\epsilon_1 = \frac{T}{E} \quad \text{e} \quad \frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{T}{\eta}$$

onde  $E$  é o módulo de Young e  $\eta$  o coeficiente de viscosidade.

As curvas de relaxação dos fluidos de Maxwell têm o aspecto da Fig. 2.70;

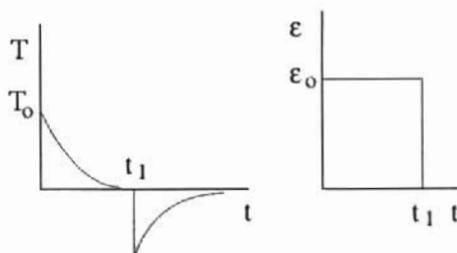


Fig. 2.70 - Impulso de tensão a aplicar para originar uma deformação rectangular  $\epsilon_p$ . À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

Derivando a Eq. 2.45 obtemos

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\eta} \quad 2.46$$

Analisemos a relaxação da acção deformadora a partir do momento em que a deformação atinge um valor constante  $\varepsilon_0$  para o qual  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ , donde

$$\frac{1}{E} \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\eta} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{T} = -\frac{E}{\eta} dt \quad 2.47$$

Integrando a Eq. 2.47 considerando a condição inicial de  $T = T_0$  quando  $t=0$ , vem, para os fluidos de Maxwell,

$$T = T_0 e^{-\frac{E}{\eta} t} = T_0 e^{-\tau t} \quad 2.48$$

O tempo  $\tau = \frac{\eta}{E}$ , que é o intervalo de tempo necessário para que a tensão se reduza de  $1/e$ , chama-se tempo de relaxação.

### c) Curva tensão-deformação

Os fluidos mostram um marcado ciclo de histerese (ver Fig 2.71).

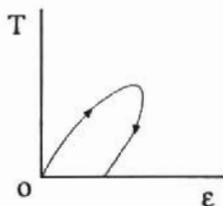


Fig. 2.71 - Impulso de tensão a aplicar para originar uma deformação rectangular  $\varepsilon_p$ .

## 16 - Corpos plasto-visco-elásticos (corpos de Bingham)

Estes corpos comportam-se como corpos elásticos até um certo valor de tensão  $T_c$  apresentando, a partir daí, escoamento irreversível. O exemplo típico deste corpo é o “chewing-gum” que apresenta elasticidade para pequenas tensões, após o que se deforma facilmente.

A função que relaciona tensão e deformação no corpo de Bingham acima de  $T_c$  é:

$$T = T_c + b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad 2.49$$

onde  $b$  é o coeficiente plástico.

## a) Curvas de fluência

Quando são aplicados impulsos de tensão inferiores ou iguais a  $T_c$  as curvas de fluência dos corpos de Bingham, Fig. 2.72, são idênticas às da Fig. 2.64, para a elasticidade linear.

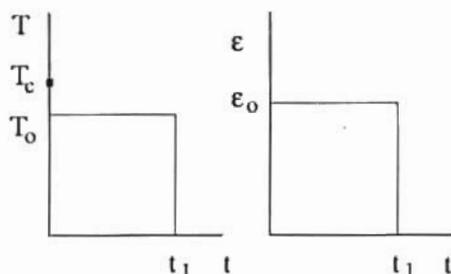


Fig. 2.72 - Curva de fluência de um corpo de Bingham para um impulso de tensão inferior ao limiar. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\varepsilon(t)$ .

Para impulsos de tensão superiores a  $T_c$  a deformação dos corpos de Bingham varia com o tempo de acordo com a Fig. 2.73.

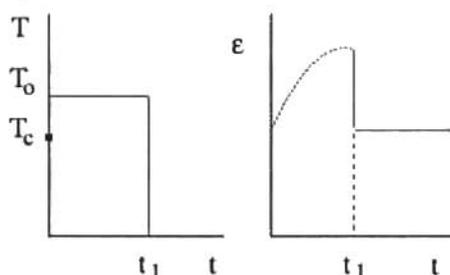


Fig. 2.73 - Curva de fluência de um corpo de Bingham para um impulso de tensão superior ao limiar. À esquerda a função  $T(t)$ . À direita a correspondente função  $\epsilon(t)$ .

### b) Curva tensão-velocidade de deformação

A função que relaciona tensão com velocidade de deformação (Eq. 2.49) é uma recta com inclinação  $b$  e que nasce em  $T_c$ , Fig. 2.74.

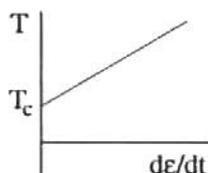


Fig. 2.74 - Curva de T em função de  $d\epsilon/dt$ .

## 17 - Modelos físicos da deformação

### 17.1 - Elasticidade

É usual utilizar-se modelos físicos no estudo do comportamento dos diversos materiais, quando sujeitos a tensões. Por exemplo, o comportamento perfeitamente elástico é simulado por uma mola perfeita (sem

massa e livre de atritos), sobre a qual se exerce um esforço, Fig. 2.75. A força produz uma deformação reversível, cujo valor varia com a intensidade da força sem depender do seu sentido de variação (ausência de histerese). Sendo a deformação proporcional à força, podemos escrever  $F = K \Delta x$ , que é formalmente equivalente a

$$T = E \epsilon \quad 2.50$$

onde  $T$  é a acção deformadora e  $\epsilon$  a deformação.

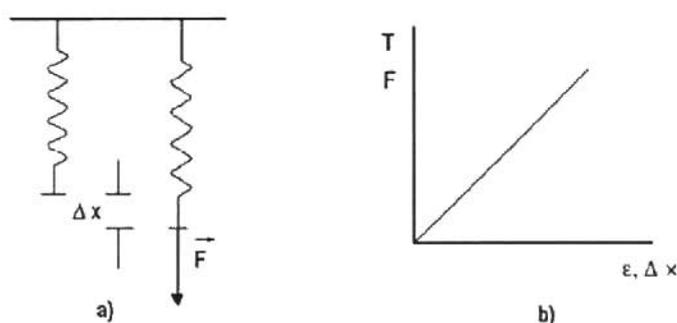


Fig. 2.75 - a) Modelo físico de uma mola perfeita. b) Deformação elástica e linear

Existe, contudo, a possibilidade do comportamento elástico não ser linear. A função  $T(\epsilon)$ , neste caso, terá uma expressão gráfica como na Fig. 2.76. Um exemplo deste comportamento é o das paredes dos vasos sanguíneos e de outras membranas biológicas, resultante de haver dois tipos de fibras elásticas na sua constituição (Curva 2 da Fig. 2.76).

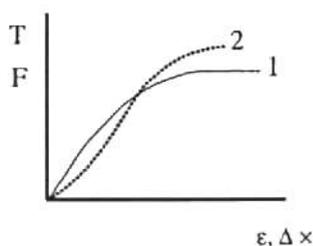


Fig. 2.76 - Deformação elástica não linear.

Alguns materiais deformam-se de forma não reversível, embora o seu comportamento possa ser descrito por leis bem definidas. Uma deformação diz-se plástica quando é irreversível e se manifesta a partir de um limiar de tensão, ocorrendo, a partir daí, simultaneamente com a carga (ou acção deformadora) aplicada. O comportamento plástico pode ser modelado em termos físicos por uma massa em repouso, apoiada, com atrito, sobre uma superfície horizontal (Fig. 2.77). Quando uma força horizontal é aplicada ao corpo, este não se desloca enquanto que esta não ultrapassa a força de atrito entre o corpo e o plano horizontal.

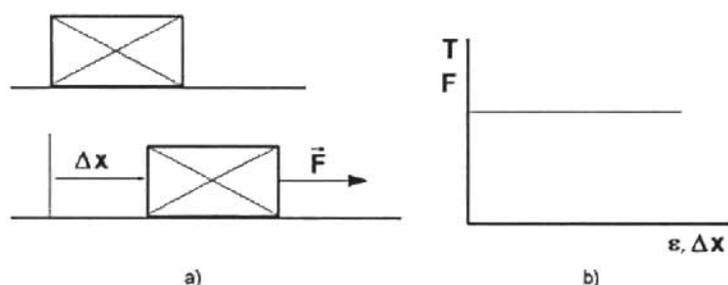


Fig. 2.77 - a) Modelo físico do comportamento plástico. b) Curva  $T(\epsilon)$  ou  $F(\Delta x)$

O modelo físico utilizado para representar outro tipo de deformação, a deformação viscosa, considera o comportamento de um amortecedor, simulado pelo deslocamento de um êmbolo, com um pequeno orifício, no interior de um cilindro contendo líquido, Fig. 2.78-a) e b). A velocidade de deslocamento do êmbolo é proporcional à pressão  $P$  sobre ele aplicada, Fig. 2.78-a).

No caso da curva Fig. 2.78-c) a viscosidade é linear e

$$T = \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad 2.51$$

onde  $\eta$  é a viscosidade.

A Fig. 2.78-d) refere-se a uma curva  $T(d\epsilon/dt)$  na viscosidade não linear.

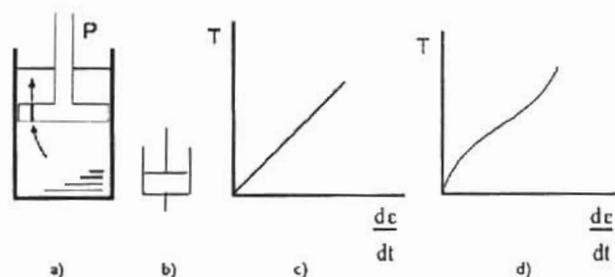


Fig. 2.78 - Modelo físico da deformação viscosa. a) Um êmbolo, com um pequeno orifício, no interior de um cilindro contendo líquido a deslocar-se sob a acção da pressão P (amortecedor). b) Representação esquemática de a). c) Curva  $T(d\epsilon/dt)$  na viscosidade linear. d) Curva  $T(d\epsilon/dt)$  na viscosidade não linear.

A partir da associação dos modelos físicos que referimos podem considerar-se as propriedades de materiais, cujo comportamento seja a sobreposição dos diversos tipos analisados.

## 17.2 - Viscoelasticidade

Quando as deformações e as velocidades de deformação são pequenas o comportamento viscoelástico é um processo linear que pode ser simulado por associação dos elementos elásticos e viscosos (mola e amortecedor).

O amortecedor não se deforma instantaneamente pois uma velocidade de deformação infinita obriga a uma tensão infinita. No instante de aplicação do pulso rectangular de tensão é o amortecedor que suporta todo o esforço, pois na mola, ainda sem deformação, a tensão é nula.

No modelo de um sólido de Voigt a mola e o amortecedor encontram-se em paralelo. A deformação da mola e do amortecedor terão de ser iguais, mas a tensão é repartida pelos dois elementos. A equação que traduz o processo é, como vimos, a Eq. 2.42 que podemos escrever

$$T = T_e + T_v = E \epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt}$$

onde  $T_e$  e  $T_v$  são respectivamente as componentes elástica e viscosa da tensão.

No fluido de Maxwell a mola e o amortecedor encontram-se em série. A tensão é a mesma para os dois elementos mas as deformações correspondentes são diferentes, sendo a deformação total a soma das deformações individuais dos dois elementos,

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

Um terceiro modelo de corpo viscoelástico é o sólido de Kelvin que alguns autores ainda identificam ao modelo de Voigt. No modelo de Kelvin uma mola em série com um amortecedor, encontram-se em paralelo com uma segunda mola.

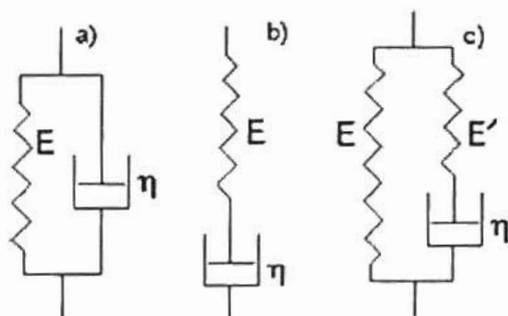


Fig. 2.79 - Modelos físicos do comportamento viscoelástico: a) Sólido de Voigt; b) Fluido de Maxwell; c) Fluido de Kelvin.

### 17.3 - Modelo físico do corpo Bingham

168

A Fig. 2.80 representa um modelo físico do corpo de Bingham.

Na Fig. 2.80 a) a força aplicada sobre a mola não faz deslocar a massa senão após ter atingido um certo valor limite, ou seja, após ter distendido a mola e ter vencido o atrito na superfície (situação plastoelástica).

A Fig. 2.80 b) corresponde à situação plasto-viscoelástica. O amortecedor introduz o elemento viscoso.

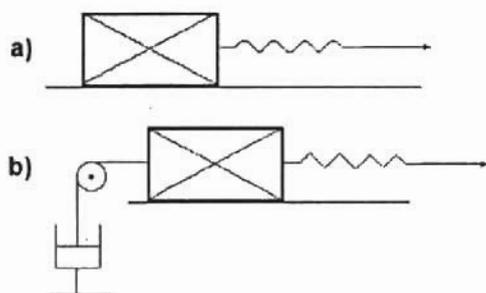


Fig. 2.80 - a) Corpo plastoelástico; b) Corpo plasto-viscoelástico. Em b) há ainda que vencer a fricção imposta pelo comportamento viscoso do amortecedor (situação plasto-viscoelástica).

## 18 - Dureza

Um parâmetro com interesse na comparação de materiais dentários é a dureza. Por definição é uma medida da resistência do material à indentação ou, em alternativa, à acção de ser riscado por materiais de dureza extrema. Em geral, um material duro é resistente à abrasão, ou difícil de polir. Os testes mais comuns de dureza envolvem a indentação do material por meio de uma cabeça indentadora padrão sob a acção de uma carga conhecida, durante um período de tempo convencional. O número de dureza é calculado dividindo a carga aplicada à cabeça indentadora pela área da indentação produzida. Deste modo, os números de dureza maiores correspondem aos materiais mais duros. O número de dureza não é considerado uma propriedade inerente do material pois a formação da indentação está relacionada com o limite do comportamento elástico dos materiais e com o seu módulo de elasticidade, que são dependentes da velocidade de aplicação da carga.

## 19 - Fadiga

Em alguns estudos experimentais das propriedades mecânicas dos materiais, estes são sujeitos a cargas contínuas até ocorrer rotura. É co-

nhecido, contudo, que a aplicação repetida de cargas abaixo da carga de ruptura pode, após algum tempo, produzir o mesmo efeito. Uma sequência de dobragens de um arame num sentido e depois no outro, acabam por produzir a ruptura. Este processo é conhecido por ruptura por fadiga do material e depende da intensidade dos esforços e do número de esforços aplicados. Verifica-se que, quanto mais perto da tensão máxima for a tensão cíclica aplicada, menor é o número de ciclos necessários para produzir a falência do material. Por outro lado, existe um esforço abaixo do qual o material não sofre ruptura qualquer que seja o número de ciclos aplicados. Este limite inferior é chamado de limite de endurance. O limite de endurance dos materiais pode obter-se por curvas experimentais, onde a intensidade do esforço cíclico aplicado é representado em função do logaritmo do número de ciclos necessários para a ruptura por fadiga. Um exemplo destas curvas é ilustrado na Fig. 2.81.

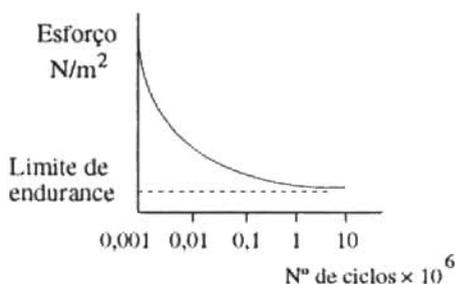


Fig. 2.81 - Intensidade do esforço cíclico aplicado, representado em função do logaritmo do número de ciclos necessários para a ruptura por fadiga.

Durante a sua existência, uma restauração dentária é submetida a um grande número de ciclos de carga e descarga resultantes da acção de forças funcionais e parafuncionais. Seria ideal que a restauração fosse projectada, de modo a que o esforço máximo recebido pela restauração, fosse inferior ao limite de endurance. Os níveis de esforço máximo podem ser diminuídos aumentando as dimensões da restauração e eliminando geometrias que produzam concentração de esforço. Diversas razões como requisitos estéticos e limitações de espaço podem, no entanto, impossibilitar a efectivação destes propósitos.

CAPÍTULO • III

MECÁNICA DENTÁRIA



(Página deixada propositadamente em branco)

## 1 - Introdução

Para realizar a sua principal tarefa que é a actividade mastigatória, a dentadura põe em jogo forças de enorme intensidade. As reacções a estas forças, a actuar nos dentes e tecidos de suporte, têm de obedecer a regras extremamente restritivas para permitirem uma elevada eficiência e segurança na actuação, uma longa duração e um crescimento harmónico. Por estas razões, a análise das forças em jogo, o seu rigoroso conhecimento na situação normal e a aprendizagem das leis da mecânica que permitam uma eventual actuação correctiva em situações patológicas, constituem aspectos de enorme importância em medicina dentária. O interesse pelos aspectos mecânicos não deve, contudo, alhear-nos dos espantosos sistemas de controlo e defesa existentes na acção mastigatória bem como de todos os processos fisiológicos ligados a esta. Nem sempre nos apercebemos do incrível fenómeno que é o desenvolvimento de um mecanismo, implantado em estruturas relativamente frágeis, capaz de produzir pressões locais superiores a 1 MPa, que fragmentam materiais tão compactos como a carne, mas que, graças a controlo, não excedem valores limite bem determinados, um mecanismo que cresce de acordo com as nossas necessidades e nos avisa em caso de deficiência. A forma e orientação dos dentes, a acção ponderada dos diversos músculos produzindo movimentos mastigatórios com orientação e força apropriados e a acção dos noci e próprio-receptores são aspectos que têm de ser conhecidos para se perceber a realidade da função estomatognática. Os resultados da actuação do processo mastigatório continuam-se no aparelho digestivo, onde é desejável uma optimização na recolha de energia e massa, com consequências indesejáveis se tal função não é realizada convenientemente por má preparação a montante.

Por outro lado, o osso alveolar que envolve a raiz dos dentes e os suporta, não é uma estrutura estática, mas sim em estado estacionário, sofrendo contínua interacção com estruturas vizinhas. Produzindo alterações deste estado, por aplicação de forças, estabelecem-se processos celulares que levam ao restabelecimento da estacionaridade ocorrendo, simultaneamente, lentos movimentos dentários.

Em ortodontia, através de técnicas e aparelhos apropriados, produzindo forças ligeiras e constantes, conseguem-se produzir, com rigor, movimentos correctivos nos dentes.

Nunca o homem será capaz de reconstruir toda a complexidade que está associada às funções de uma dentadura normal e só poderá aproximar-se disso, apercebendo-se das leis e das subtilezas que acompanham o processo natural.

## 2 - Efeitos de forças externas sobre corpos rígidos

Os movimentos dos sólidos rígidos podem, muitas vezes, ser classificados, de acordo com um número limitado de movimentos padrão, bem definidos, tais como movimento de translação ou de rotação em torno de um ponto.

Um sólido rígido executa movimento de translação se qualquer segmento de recta unindo dois pontos do sólido mantém a mesma direcção durante o movimento. Durante a translação as partículas constituintes do corpo deslocam-se em trajectórias paralelas à linha de acção da força motora.

Um sólido rígido executa movimento de rotação em torno de um eixo quando as suas partículas constituintes executam movimentos circulares em planos normais ao eixo e com centro no próprio eixo.

As partículas de um sólido podem executar uma infinidade de movimentos em planos paralelos entre si. Estes movimentos dizem-se planos.

Movimento de um sólido rígido em torno de um ponto fixo é o movimento em que cada ponto do corpo se desloca sobre uma esfera de centro no ponto.

Um sólido pode ainda deslocar-se com movimento que não se enquadre em qualquer dos tipos referidos.

Quando uma força externa  $\vec{F}$  actua sobre um corpo rígido livre as acções que, de acordo com os princípios da mecânica, poderão ocorrer, resumem-se a movimento de translação e/ou de rotação do corpo.

Actuemos sobre um corpo rígido livre, com uma força cuja linha de acção contenha o centro de massa do corpo. Já vimos que o centro de massa de um sistema se move como se fosse um ponto material onde estivesse concentrada toda a massa do sistema e onde se podem considerar aplicadas todas as forças exteriores que actuam no sistema. No caso da linha de acção conter o centro de massa, o movimento a que o corpo fica sujeito é de translação, com aceleração de módulo proporcional à força aplicada, Fig. 3.1 a).

Se a linha de acção da força que actua sobre o corpo rígido não contém o centro de massa o corpo fica sujeito, para além do movimento de translação, a movimento de rotação, que podemos caracterizar pelo momento da força em relação ao centro de massa, Fig. 3.1 b).

A aplicação de um binário sobre o corpo rígido produz simplesmente rotação, Fig. 3.1 c) e d). No primeiro caso da Fig 3.1 o momento do binário é normal ao eixo do dente; no segundo caso o momento do binário é paralelo ao eixo do dente que é também o eixo de rotação.

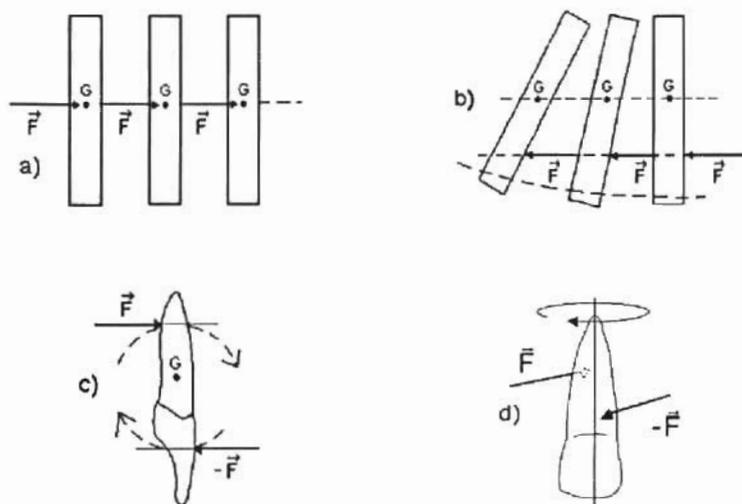


Fig. 3.1 - Efeitos de forças sobre corpos rígidos livres.

### 3 - Produção de movimentos nos dentes. Centro de resistência. Centro de rotação. Relação M/F.

Os casos apresentados na Fig. 3.1, não têm aplicação directa nas situações práticas de interesse em medicina dentária pois os dentes não são corpos livres mas sim sujeitos a ligações com as estruturas adjacentes<sup>1</sup>. O que se pretende em medicina dentária é produzir lentos movimentos e pequenos ângulos de rotação com finalidades correctivas pela acção continuada de forças ligeiras. Por outro lado, no que respeita a movimentos dentários, por acção de forças ligeiras e constantes, a mecânica que interessa tem uma componente biológica, associada aos processos fisiológicos de remodelação e da sua perturbação, que permitem os deslocamentos dos dentes. A outra componente tem a ver com o estudo teórico e com o desenvolvimento dos aparelhos capazes de libertar a força e ou, o momento óptimos, capazes de permitirem um deslocamento que, apesar de muito lento, seja tão rápido quanto possível e sem qualquer acção lesiva.

Na situação real o dente está ligado ao osso alveolar através do sistema de suporte periodontal. Quando um corpo está sujeito a ligações pode ser estudado como corpo livre se as referidas ligações forem substituídas por um par força-binário.

No caso presente o par força-binário é exercido pelo meio exterior sobre o dente (através do periodonto), como reacção a acções a actuar no dente, incluindo o próprio peso.

Ao ponto de aplicação da resultante de todas as forças de reacção do osso alveolar sobre o dente, chama-se **centro de resistência**. De modo semelhante ao centro de massa, o centro de resistência de um corpo ligado pode considerar-se, para certos cálculos, como um ponto onde se encontra concentrada toda a massa do corpo. Deste modo, uma força com linha de acção que contenha este ponto produz unicamente movimento de translação segundo a linha de acção da força.

<sup>1</sup> Ao conjunto formado pela zona de tecido ósseo em que um dente está implantado e pelos ligamentos que se encontram à sua volta e lhe servem de apoio chama-se periodonto.

Se a linha de acção da força não contém o centro de resistência o movimento terá uma componente de translação e outra de rotação. Um binário aplicado sobre o dente produz rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de resistência. A localização exacta do centro de resistência de um dente não é fácil de determinar mas, através de modelos teóricos aplicados a dentes monoradiculados, com implantação normal, concluiu-se que se situa de 30 a 40% da distância entre a crista alveolar marginal e o apex do dente (mais próximo da crista alveolar).

O centro de resistência coincide com o centro de massa para um corpo livre.

A posição do centro de resistência de um dente depende do comprimento e morfologia da raiz, do número de raízes e das características do tecido resistente de suporte (extensão do suporte ósseo alveolar, ligamento periodontal e tecido gengival), Fig. 3.2.

Como o centro de resistência *C* do dente está situado na raiz, não é possível actuar directamente sobre este, de forma não invasiva, com uma força, produzindo translação, por exemplo, segundo uma direcção normal ao eixo, como na Fig. 3.3-a).

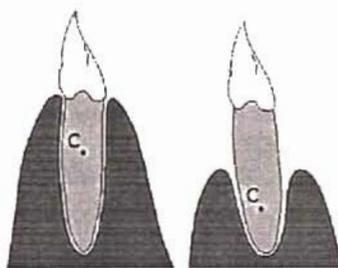


Fig. 3.2 - Variação do centro de resistência com as dimensões do suporte ósseo alveolar.

Esta dificuldade é, no entanto, ultrapassável utilizando conceitos de mecânica já estudados, pois podemos reproduzir exactamente o efeito da

força  $\vec{F}$  da Fig. 3.3-a aplicando num ponto  $P$  qualquer, da coroa, a mesma força  $\vec{F}$  e um binário apropriado. De facto, aplicando, no ponto  $P$ , um par de forças iguais e opostas de módulo  $F$  (Fig. 3.3-b) nada alteramos no sistema e obtemos o binário  $(\vec{F}, -\vec{F})$  com momento de módulo  $bF$ , normal ao plano das forças e a apontar para o outro lado do plano (Fig. 3.3-c) e a força  $\vec{F}$  aplicada em  $P$ . Portanto, se aplicarmos o par referido força-binário no ponto  $P$  da coroa, o dente fica sujeito à força  $\vec{F}$  na raiz (Fig. 3.3-a).

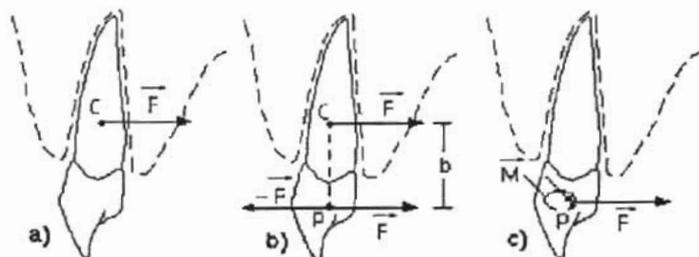


Fig. 3.3 - Aplicação de uma força e um binário num ponto da coroa, de modo a produzir o efeito da força  $\vec{F}$  a actuar no centro de resistência  $C$  do dente: a) Acção que se pretende simular. b) Aplicação de um par de forças iguais e opostas de módulo  $\vec{F}$  num ponto acessível da coroa. c) Substituição do sistema por uma força e um binário aplicados em  $P$ .

Para se produzir movimento de rotação pura num dente normal podem usar-se técnicas correntes em ortodontia. A conexão ou "bracket"  $B$  da Fig. 3.4 é colado ao dente e um fio metálico  $E$ , de secção rectangular, é introduzido através dele como em 1 da Fig. 3.4. Para ser produzida rotação, o fio, depois de ser sujeito a esforço de torsão como em 3 é introduzido no bracket (2). No corte  $S$  do fio pelo plano  $\pi$ , em 3, vê-se a inclinação produzida pela torsão. O binário  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  originado (2), actua como se vê em 4.

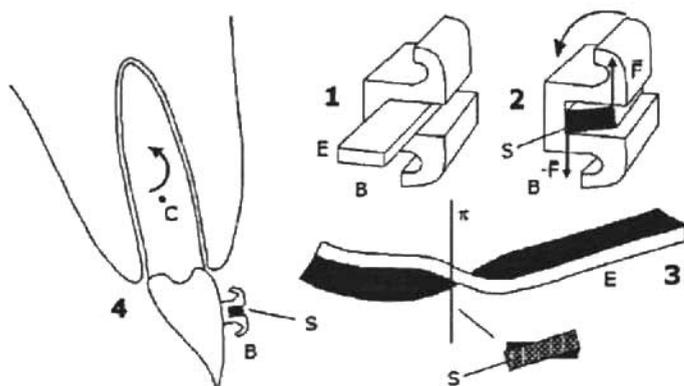
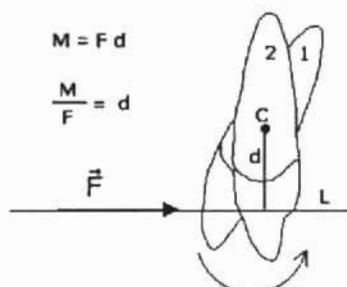


Fig. 3.4 - Rotação pura. A conexão ou "bracket" B é colado ao dente e um fio metálico E, de secção rectangular, é introduzido através dele como em 1. Para ser produzida rotação, o fio, depois de ser sujeito a esforço de torsão como em 3 é introduzido no bracket (2). No corte S do fio pelo plano  $\pi$ , em 3, vê-se a inclinação produzida pela torsão. O binário  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  originado (2), actua como se vê em 4.

Um modo útil de prever a acção de forças a actuar sobre um dente é calcular o sistema força+binário equivalente a actuar no centro de resistência ou, o que é equivalente, a força e o seu momento em relação ao centro de resistência. Estes valores podem ser combinados numa relação muito utilizada em biomecânica dentária: a relação momento/força. Notar que, considerando a definição de momento de uma força em relação a um ponto, Fig. 3.5, a relação  $M/F$  iguala o braço  $d$  da força.

Uma força ou sistema de forças actuando sobre um dente com  $M/F$  nula no centro de resistência produz translação pura, enquanto que com  $M/F$  infinita no centro de resistência gera rotação pura. Outros valores de  $M/F$  originam movimentos combinados de translação e rotação.

Fig. 3.5 - A relação  $M/F$  é o braço da força.

De um modo geral, uma força única aplicada produz num dente movimento de translação e/ou de rotação. Se a linha de acção da força passar pelo centro de resistência do dente este ficará, como vimos, sujeito somente a movimento de translação. Os movimentos que, em geral, se pretendem produzir por acção de forças e binários sobre os dentes são: A) Translação - por acção de um par força-binário. B) Rotação - por acção de um binário. C) Translação + inclinação<sup>2</sup> - por acção de uma força (inclinação não controlada). Neste caso o valor da relação  $M/F$  com respeito ao centro de resistência é elevado ( $>10$ ). D) Translação+inclinação, sem movimento do extremo superior do dente - por acção de um par força-binário. E) Translação + inclinação, sem movimento do apex - por acção de um par força-binário (inclinação controlada).

Na Fig. 3.6 indicam-se esquematicamente estes movimentos bem como a distribuição dos esforços, à direita para cada caso, que irão produzir-se na superfície periodontal. Quando um dente é sujeito a um momento que tenda a incliná-lo são produzidas tensões, particularmente na crista alveolar e no apex da raiz.

Na translação o esforço sobre o periodonto é uniforme. Na rotação os esforços sobre o periodonto são tangenciais. Em C) os esforços são opostos no apex e na margem cervical, tendo valores mínimos na porção média da raiz. Em D) as tensões são máximas no apex e em E), na

<sup>2</sup> Inclinação é usada como tradução de "tipping".

margem cervical. Na situação prática, o modelo teórico apresentado tem de ser ainda completado pois, num caso real os dentes não são sólidos indeformáveis e as forças que são aplicadas sobre os dentes são transmitidas por dispositivos, como molas e fios metálicos, eles próprios com propriedades elásticas e produzindo forças que variam com a deformação. É evidente que a consideração destes factores vai tornar estes estudos mais complexos mas, nem por isso desprovidos de interesse, como é o caso da aplicação de aparelhos e das suas conexões em ortodontia.

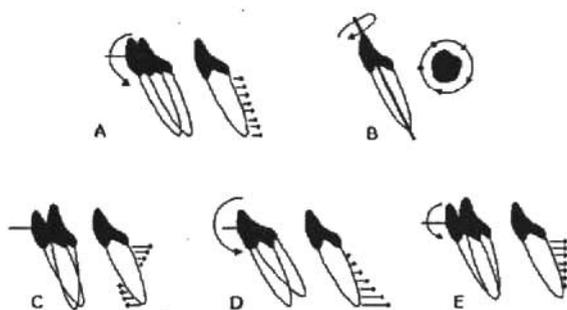


Fig. 3.6 - Movimentos produzidos nos dentes (esquerda) e distribuição dos esforços originados no periodonto (direita) para diversas situações: A) Translação - por acção de um par força-binário. B) Rotação - por acção de um binário. C) Translação + inclinação - por acção de uma força (inclinação não controlada). D) Translação + inclinação, sem movimento extremo superior do dente - por acção de um par força-binário (movimento da raiz). E) Translação + inclinação, sem movimento do apex - por acção de um par força-binário (inclinação controlada).

Como vimos, podem ser aplicadas forças ligeiros sobre os dentes, de forma continuada, com fins correctivos, destinadas a produzir deslocamentos terapêuticos na inserção dos dentes nos tecidos periodontais, sem serem originadas quaisquer lesões durante ou após estas aplicações. As forças ligeiras pretendem ter um efeito biológico próximo dos deslocamentos fisiológicos sofridos pelos dentes. Quando uma força  $\vec{F}$  actua

sobre o dente esta origina simultaneamente uma zona de tracção, no local onde actua e uma, ou várias, zonas de compressão P, Fig. 3.7. A designação de força ligeira supõe o desenvolvimento de pressões pequenas. Assim, uma mesma força, pode ser ligeira ou pesada, consoante é pequena ou grande a pressão que vai originar na área de contacto entre superfície radicular e o periodonto. Esta área depende de numerosos factores como: do local de aplicação da força, do tipo de dente (mono, bi ou tri-radicular), da sua mobilidade, da espessura do espaço periodontal, das dimensões do alvéolo ósseo e da configuração em termos de densidade de tecido esponjoso.

Sem especularmos sobre as suas possíveis origens, consideremos duas forças, de igual módulo  $|\vec{F}|$  aplicadas em diferentes pontos de um dente, Fig. 3.7 a) e b) e verifiquemos que estas podem desencadear efeitos mecânicos consideravelmente diferentes. Os deslocamentos que vão ser produzidos originam áreas de contacto entre superfície radicular e periodonto muito diferentes nos dois casos. Em a) a força actua na coroa do dente produzindo inclinação deste e compressão do ligamento em pequenas áreas com localizações diametralmente opostas mas de grande pressão P.

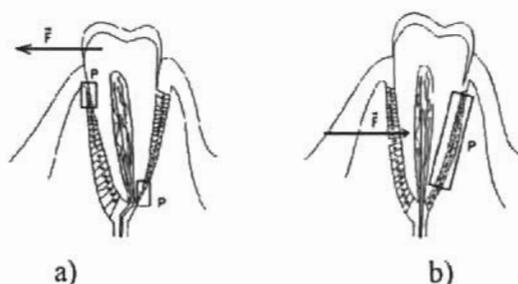


Fig. 3.7 - Duas forças, de igual módulo  $|\vec{F}|$  aplicadas em diferentes pontos de um dente a) e b) podem ter efeitos mecânicos muito diferentes. As áreas de contacto entre superfície radicular e periodonto são diferentes nos dois casos. Em a) a pressão sobre o periodonto é grande. Em b) é pequena.

Em b) supõe-se que a força  $\vec{F}$  passa pelo centro de resistência do dente produzindo translação do mesmo, com grande área de contacto e, por isso, de pequena pressão sobre o periodonto. A pressão distribui-se uniformemente ao longo do periodonto.

No caso da Fig. 3.7 a) o movimento do dente foi de rotação mais translação, em b) foi de translação.

As acções de forças verticais são também muito importantes. Um dente que sem a acção de forças externas se encontra como na Fig. 3.8 a), sob a acção de forças verticais a apontar para baixo, sofre intrusão, Fig. 3.8 b), ou seja, diminui a espessura de tecido ligamentar entre o apex radicular e o alvéolo ósseo. Sob a acção de forças verticais a apontar para cima, ocorre extrusão, Fig. 3.8 c), aumenta a espessura de tecido entre o apex radicular e o alvéolo ósseo (zona de tracção).

Há também a possibilidade dos dentes serem sujeitos a movimento de rotação em torno dos seus próprios eixos, após aplicação de binários.

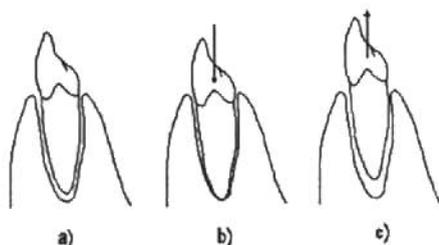


Fig.3.8 - Dente sem a acção de forças externas verticais, a); sob a acção de forças verticais a apontar para baixo, b), (intrusão); sob a acção de forças verticais a apontar para cima, c), (extrusão).

Quando se consideram as posições extremas de um dente após um deslocamento é comum falar-se em **centro de rotação** que é um ponto em torno do qual o dente parece rodar num deslocamento plano não translacional. No movimento de translação puro o centro de rotação situa-se no infinito. Quando uma força é aplicada sobre um corpo ligado num ponto distante do centro de resistência, o movimento produzido

aproxima-se da rotação pura e, nestas condições, os centros de resistência e rotação estão próximos. Um exemplo é a situação C) da Fig 3.6 que é produzido por uma força horizontal com linha de acção a passar no centro da coroa, determinando a inclinação não controlada do dente. Nesta situação o centro de rotação situa-se próximo do apex do dente.

Pode provar-se que uma dada transformação posicional de um sólido, com duas posições extremas, é conseguida com uma infinidade de ângulos de rotação diferentes. Na Fig. 3.9 apresentam-se duas diferentes acções mecânicas sobre um dente com o mesmo resultado: a) rotação do dente da posição 1 para a 2, com centro de rotação O e ângulo de rotação  $\alpha$ . b) translação da distância d correspondente ao máximo deslocamento do centro de resistência O' seguida de uma rotação do ângulo  $\beta$  em torno de O'.

O conceito de centro de rotação é pois ambíguo se não forem especificados os passos da operação.

O centro de rotação do dente não coincide com o centro de resistência, a não ser em condições especiais.

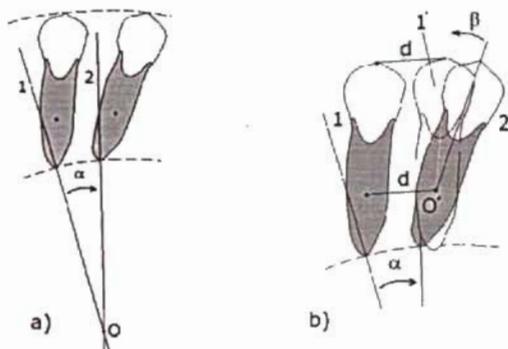


Fig. 3.9 - Duas acções mecânicas sobre um dente com o mesmo resultado: a) Rotação do dente da posição 1 para a 2, com centro de rotação O e ângulo de rotação  $\alpha$ . b) Translação da distância d seguida de uma rotação do ângulo  $\beta$  em torno de O'.

Conhecendo a linha de acção da força em relação ao centro de resistência e a grandeza e direcção do momento é possível, com certa aproximação, conhecer a localização do centro de rotação, assim como o tipo de movimento que se espera que o dente irá executar. Primeiro traça-se uma perpendicular à linha de acção da força passando pelo centro de resistência. O centro de rotação instantâneo do primeiro movimento situa-se sobre este eixo.

As forças ortodônticas podem ser encaradas em relação aos dentes ou aos aparelhos (arcos, molas, elásticos, etc.) utilizados para produzir e controlar as primeiras.

As forças aplicadas sobre os aparelhos são as **forças de activação**, ou seja, aquelas necessárias para levar o fio do estado passivo ao de activado por acumulação de energia potencial elástica.

As forças de desactivação são aquelas exercidas sobre o dente e são, em cada instante, iguais e opostas às primeiras.

Um *arco* é uma ligação entre dentes distintos através de um fio metálico, de elevado módulo de Young, com raio de 1-2 milímetros, sujeito a deflexão, inserido, num lado, de modo fixo num bracket e, no outro, com um simples contacto móvel. Os apoios do fio terão de ser solidamente implantados nos dentes pois o fio vai exercer um efeito de mola resultante do seu comportamento elástico quando sob tensão. A finalidade destes dispositivos é, em geral, produzir acções correctoras em dentes mal posicionados. Como consequência deste arranjo, são aplicados uma força e um momento no dente onde se insere a extremidade fixa do arco (unidade activa), enquanto que, no ou nos dentes onde se encontra a extremidade com o simples contacto (unidade reactiva ou de ancoragem), é aplicada uma única força (Fig. 3.10). As forças e o momento aplicados dependem do comprimento e diâmetro do fio, das formas do arco antes e após aplicação, da tensão elástica nele produzida e obrigam a uma análise prévia cuidadosa que inclui a medição das forças com um dinamómetro. No caso da Fig. 3.10 o molar, onde se encontra a unidade activa seria obrigado a rotação e extrosão. A acção de intrusão nos incisivos seria atenuada pela circunstância de estar distribuída por dois dentes.

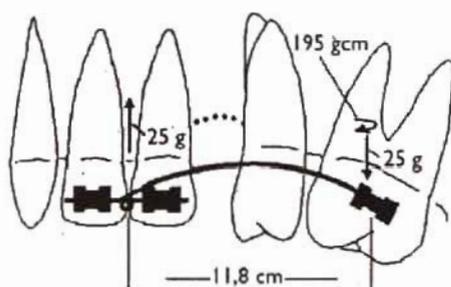


Fig. 3.10 - Esquema da aplicação de um arco corrector. No molar, cuja posição se pretende corrigir, actua um momento e uma força.

Algumas das propriedades dos materiais estudadas no Cap. II, em particular o comportamento elástico de metais e ligas metálicas, são de grande importância em ortodontia. Quando analisámos os efeitos de acções externas sobre os sólidos, em termos do par esforço (ou tensão)/deformação relativa, referimos que esforço e deformação se referem à estrutura interna do material em análise. O primeiro traduz a distribuição interna da carga expressa em força por unidade de área e o segundo a alteração relativa de parâmetros de forma. Nos fios metálicos para as aplicações ortodônticas interessa em especial a deformação por flexão. Na curva esforço/deformação relativa para um fio metálico sujeito a flexão, analisada em pormenor (Fig. 3.11), podem distinguir-se: 1. - O limite proporcional ou elástico, a partir do qual deixa de se verificar a lei de Hooke. 2. - O ponto de deformação irreversível ou simplesmente ponto de deformação (yield point), a cujo valor de tensão (tensão de deformação) corresponde uma deformação permanente de 0,1%, é o ponto a partir do qual se considera que as tensões aplicadas produzem deformação permanente. 3. - A carga máxima (ultimate tensile strength) que corresponde à tensão de maior valor a que a estrutura molecular do fio pode reagir e indica a máxima força que o fio pode transmitir quando usado como mola, em ortodontia. 4. - O ponto de fractura.

A tangente do ângulo  $\alpha$  é a rigidez (stiffness). O inverso da rigidez é a deformabilidade (springiness). Quanto maior for a  $\text{tg } \alpha$  maior é a rigidez do material do fio.

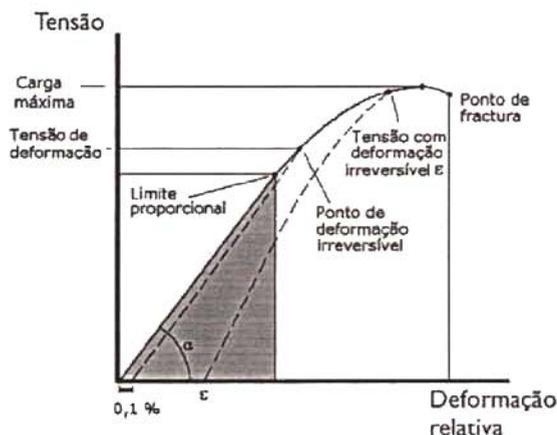


Fig. 3.11 - Curva esforço/deformação relativa para um fio metálico sujeito a flexão, onde se distingue: o limite proporcional, a tensão de deformação, a carga máxima e o ponto de fractura.

### 3.1 - Efeitos de forças sobre corpos rígidos sujeitos

Quando uma força actua sobre um corpo rígido qualquer, fixo a um dado apoio, esta é transmitida ao apoio mas, além disso, também provoca acções internas no corpo. A sua estrutura é eventualmente sujeita a acções de corte, compressão, flexão e torção.

Consideremos os esforços que são originados quando uma força de tracção  $\vec{F}$  é aplicada no ponto  $P$  da face superior de um prisma recto, paralelamente ao seu eixo Fig. 3.12-1. Utilizando uma propriedade conhecida e já referida, podemos aplicar um par de forças  $\vec{F}$ , e  $-\vec{F}$  no centro  $O$  da face, sem alterar em nada o estado do corpo. O conjunto das três forças constitui um par formado pelo binário com braço  $b = \overline{OP}$  Fig. 3.12-2 e a força  $\vec{F}$  aplicada em  $O$ , Fig. 3.12-3. Esta força origina no

material um esforço de tracção E.T. como se vê na Fig. 3.12-3. O momento do binário pode ser decomposto em duas componentes, segundo os X's e os Y's. Os binários responsáveis por estas componentes, encontram-se respectivamente nas Figs. 3.12-4 e 3.12-5. Os esforços de flexão produzidos por estes momentos sobre o material estão também indicados nas respectivas figuras. Em qualquer plano do objecto vamos ter esforço axial de tracção combinado com flexão segundo as direcções indicadas.

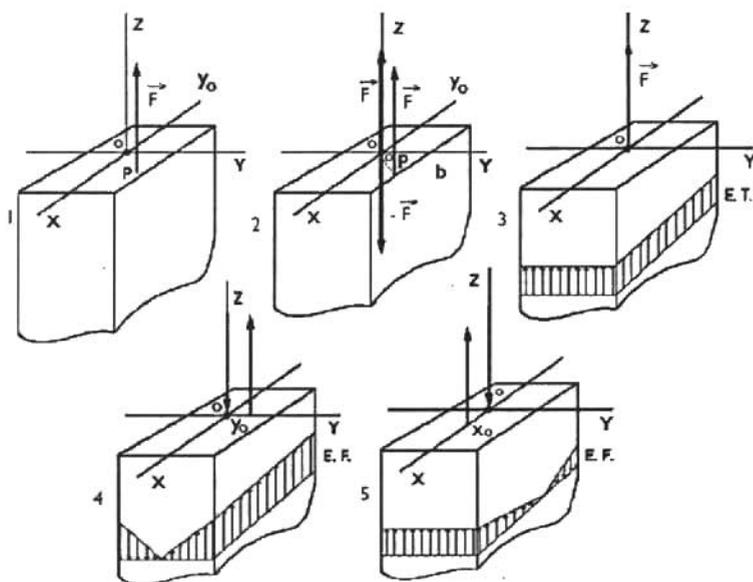


Fig. 3.12 - Esforços de tracção (E.T.) e de flexão (E.F.) que são originados quando uma força de tracção  $\vec{F}$  é aplicada no ponto P da face superior de um prisma recto, paralelamente ao seu eixo.

De modo semelhante ao caso anterior, pode imaginar-se um sem número de possibilidades que sugerem situações da medicina dentária. Por exemplo, consideremos a força  $\vec{F}$  a actuar sobre o sólido da Fig. 3.13-a),

fixo na base, com a linha de acção da força paralela ao eixo do corpo e a conter o centro de massa do sólido. A acção da força, nestas condições, é uma pressão de compressão de valor  $(F/S)$ , igual em qualquer secção normal ao eixo, que se considere.

As Figs. 3.13-b) e 3.13-c) referem-se a um segundo sólido, com a forma de um prisma não recto. No caso da Fig. 3.13-b), a linha de acção da força passa pelo centro de massa do sólido, pelo que se geram exclusivamente esforços de compressão no sólido.

No caso da Fig. 3.13-c), a somar à tensão de compressão  $(F/S)$ , gera-se um momento de flexão de tal modo que na metade da secção mais próxima da força ocorre compressão e, na outra metade, ocorre tracção. Estas duas acções actuam no suporte e em qualquer secção do sólido.

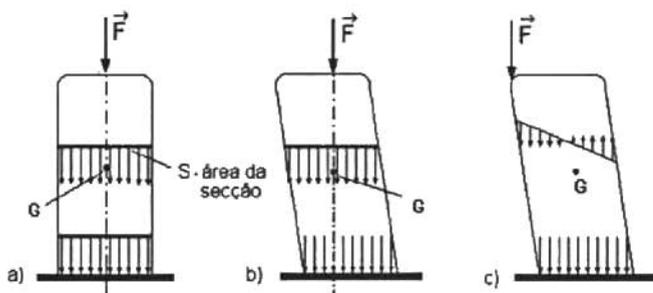


Fig. 3.13 - Efeitos de forças sobre corpos rígidos sujeitos.

#### 4 - Equilíbrio

Já conhecemos as condições de equilíbrio para um sólido indeformável. A primeira destas condições é que a resultante das forças aplicadas sobre o corpo seja nula. Se as forças se encontram todas num plano, esta condição também pode ser enunciada em relação às componentes das forças segundo duas direcções perpendiculares, situadas no referido plano. Para haver equilíbrio a soma dessas componentes terá de ser nula segundo cada um dos eixos.

A segunda condição que terá de ser satisfeita, e limitando-nos ainda ao caso das forças se encontrarem todas num plano, é que a soma dos momentos de todas as forças em relação a um ponto qualquer do plano seja zero.

No caso da Fig. 3.14, a acção da força  $\vec{F}$ , origina as forças de reacção  $\vec{R}_1$  e  $\vec{R}_2$  a actuar nos apoios (pilares) duma ponte dentária da mandíbula. Só interessa considerar as forças de ligação a actuar sobre a ponte como resultado da acção de  $\vec{F}$ . As componentes segundo o eixo dos XX são nulas e, nestas condições poderá escrever-se para as condições do equilíbrio das forças e dos momentos em relação ao ponto O

$$F + W = R_1 + R_2 \quad (\text{Condição de equilíbrio das forças})$$

$$R_1 a - W c - R_2 b = 0 \quad (\text{Condição de equilíbrio dos momentos em relação ao ponto O})$$

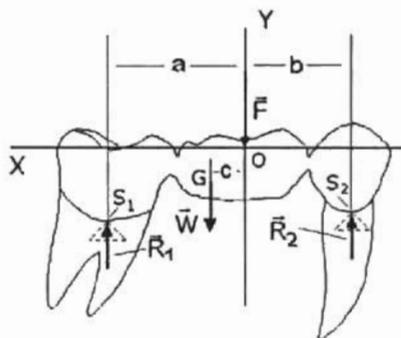


Fig. 3.14 - Forças a actuar numa ponte sob a acção da força  $\vec{F}$ .

Na situação real poderá ocorrer alguma flexão da estrutura da ponte, como na Fig. 2.50-b (Cap. 2).

Uma situação que tem interesse em ortodontia é o conhecimento das forças a actuar no suporte ósseo dos dentes. No caso da Fig. 3.15, suponha-se a força  $\vec{F}$  de 0,6 N a actuar no extremo superior do dente que

tem um ponto fixo no apex da raiz e que a reacção se concentra na crista óssea alveolar. Se ocorre equilíbrio, as outras forças a actuar sobre o dente terão de ser  $\vec{F}_o$  e  $\vec{F}_R$ . Considerando o equilíbrio dos momentos em relação ao vértice da raiz vem

$$0,6 \times 0,033 = F_o \times 0,021$$

e

$$F_o = 0,94 \text{ N}$$

donde

$$F_R = 0,94 - 0,6 = 0,34 \text{ N}$$

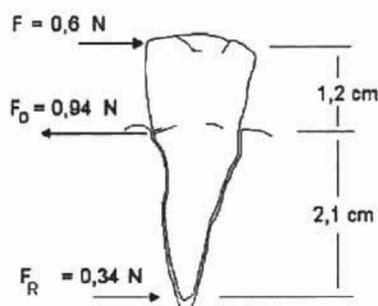


Fig. 3.15 - Supõe-se a força  $\vec{F}$  de 0,6 N a actuar no extremo superior do dente e a reacção concentrada na superfície da gengiva. Nestas condições a força que actua no vértice da raiz do dente, ponto que se considera fixo, é  $\vec{F}_R = 0,34 \text{ N}$ .

Como exemplo de aplicação de tensões com fins terapêuticos pode considerar-se o caso da Fig. 3.16. Sendo a tensão no fio de 0,8 Newton e o ângulo entre os dois ramos  $84^\circ$ , pretende determinar-se a força exercida sobre o incisivo e a sua orientação. Para ocorrer equilíbrio terão de ser iguais os módulos das forças nos pares representadas em cada um dos

segmentos do fio, na Fig. 3.16. Estas forças estão aplicadas em pontos do molar e incisivo e são iguais e opostas. Em cada um dos pontos de aplicação, a tensão no fio é também uma força igual e oposta à aplicada no dente.

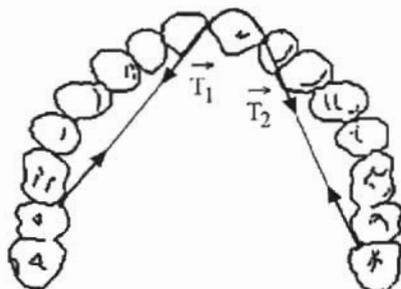


Fig. 3.16 - Para ocorrer equilíbrio terão de ser iguais os módulos de todas as forças representadas na figura. A tensão no fio é de 0,8 Newton e o ângulo entre os dois ramos é 84°.

As componentes das forças  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  segundo a direcção da bissetriz do ângulo entre estas são forças iguais e de valor  $0,8 \cos 42$ . Então a sua resultante tem o valor (Fig. 3.17),

$$2 \times 0,8 \cos 42 = 1,19 \text{ N}$$

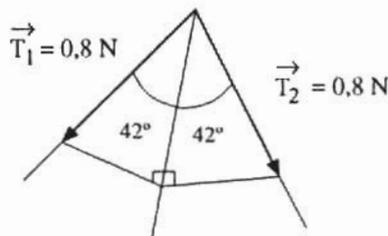


Fig. 3.17 - Esquema das forças a actuar sobre o incisivo no caso da figura anterior.

## 5 - A estrutura dos dentes

As estruturas típicas de dentes mono e bi-radiculares estão representadas esquematicamente na Fig. 3.18. A coroa, a parte exposta do dente acima da gengiva, está recoberta com uma protecção de esmalte. A dentina fornece suporte estrutural para o dente e limita a polpa que contém nervos e vasos sanguíneos e linfáticos. A polpa está assim rodeada pela dentina. Uma fina camada de cimento envolve a dentina radicular e o ligamento periodontal, através do espaço desmodontal, une-a ao osso alveolar. O canal da raiz permite a passagem de vasos e nervos para a polpa, fundamentalmente através do foramen apical.

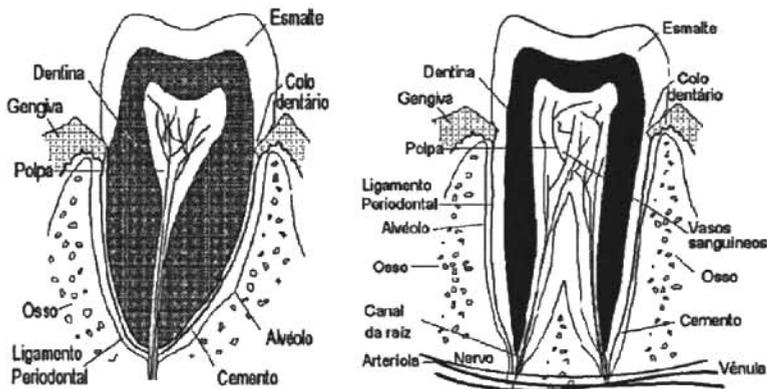


Fig. 3.18 - Estruturas esquemáticas de dentes mono e bi-radiculares em corte.

O periodonto é o aparelho de ligação do dente e é constituído pelo cimento, fibras ligamentares, alvéolo e parte da gengiva. O ligamento periodontal é a camada densa de tecido conectivo ligamentar que envolve a raiz do dente e une o cimento à gengiva marginal e ao osso alveolar, actuando também como amortecedor da força exercida sobre os dentes durante a mastigação.

O esmalte dentário, a dentina e o cimento são materiais compostos altamente anisotrópicos constituídos por pequenos cristais inorgânicos incluídos em matrizes orgânicas. As diferenças nas propriedades destes materiais resultam da proporção relativa entre os componentes inorgânico e orgânico.

O esmalte, o mais duro e com maior conteúdo inorgânico, é constituído por prismas com cerca de  $1\mu\text{m}$  de dimensão transversal, com eixos predominantemente normais à superfície. Estes prismas são formados por numerosos cristais inorgânicos com dimensões médias de cerca de  $800 \times 4000 \text{ \AA}$ , predominando a hidroxiapatite mas ocorrendo também a carbonapatite, fluoroapatite, flureto de cálcio, carbonato de cálcio e traços de elementos. No esmalte, 90% do volume é preenchido pelos cristais inorgânicos. Os cristais estão separados por uma fina camada de material orgânico complexo.

Na dentina e cimento, a componente inorgânica constitui apenas cerca de 70% do volume do material. Na dentina, cujas propriedades se assemelham às do osso, além dos cristais que são de menores dimensões, aproximadamente  $50 \times 250 \text{ \AA}$ , existem pequenos canaliculos preenchidos com líquido e o componente orgânico é sobretudo colagénio.

Alguns dos parâmetros que traduzem as propriedades reológicas dos materiais (Módulo de Young, módulo de rigidez, módulo de compressão e relação de Poisson) estão referidos no quadro 3.1 para os casos do esmalte e dentina.

Quadro 3.1 - Módulo de Young, Módulo de rigidez, Módulo de compressão e relação de Poisson da dentina e do esmalte dentário.

Material	Mod. Young	Mod. Rigidez	Mod. compres.	Rel. Poisson
Esmalte	76,5	29,3	65,3	0,3
Dentina	20,8	7,9	17,9	0,31

## 6 - A forma dos dentes

Utilizando a análise das forças pode chegar-se a uma possível explicação para o facto dos dentes humanos, no decurso da evolução, terem desenvolvido as cúspides. A principal função das cúspides é mastigatória, mas, além disso, guiam a mandíbula para a oclusão cêntrica. Uma outra importante função das cúspides é estabilizar mecanicamente os dentes naturais, impedindo o seu movimento lateral, lingual ou bucal, na posição de intercuspidação máxima.

De facto, como se vê na Fig. 3.19-a), se o dente inferior sofrer um deslocamento lingual, como está indicado, então a força de reacção do alimento na vertente lingual (interna) da cúspide bucal,  $\vec{F}$ , será maior do que a força na vertente bucal (externa) da cúspide, pois haverá menor compressão nesta superfície.

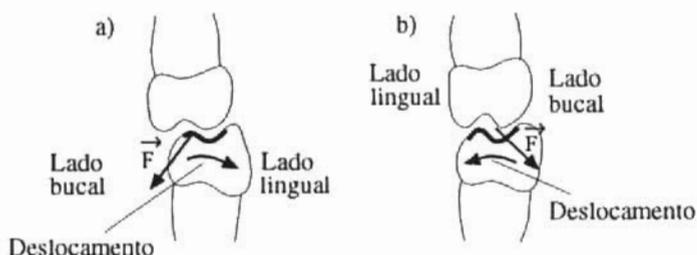


Fig. 3.19 - Explicação da acção de alinhamento desempenhada pelas cúspides. Um pequeno deslocamento lingual a), ou bucal b) do dente molar inferior origina uma força que tende a corrigir esse movimento.

Esta situação faz com que haja uma componente horizontal na força de reacção sobre o dente empurrando na direcção oposta ao deslocamento, ou seja, na direcção bucal.

Se, contrariamente, o dente da mandíbula for deslocado bucalmente, então a força  $\vec{F}$  de reacção do alimento nas superfícies faciais das cúspides

pides ficará maior do que na vertente lingual da cúspide bucal. A força de reacção tem uma componente horizontal que tende a deslocar o dente na direcção oposta ao deslocamento, agora a lingual.

### 7 - Forças dentárias. Superfície e pressões oclusais

Já referimos que a mais importante função da dentadura é a mastigação. O esforço máximo sobre a dentadura é também exercido durante a mastigação. Durante esta são aplicadas forças de grande intensidade ao aparelho mastigador incluindo os dentes, o periodonto, os alvéolos e os maxilares. Estas forças são também exercidas sobre as restaurações dentárias existentes, tais como obturações, pontes, coroas, etc. O estudo das forças dentárias e da sua acção, é de importância vital em toda a ciência dentária mas, no homem, é de particular interesse nos molares naturais onde ocorre a força de mastigação máxima. A relação entre a força e a forma dos dentes é um aspecto dos mais importantes. Os músculos temporal, masseter e pterigoide medial, cuja orientação das forças que fazem actuar se encontra na Fig. 3.20, são aqueles cuja contribuição é mais importante no processo da mastigação.

É possível determinarem-se as forças a actuar sobre os dentes utilizando dinamómetros electrónicos. Os valores observados são variáveis podendo atingir 90 kg a nível dos molares, devido à contracção dos músculos elevadores. Estes exercem a sua acção máxima, resultante das forças em jogo, próximo do ângulo da mandíbula. Deste modo, as forças que se aplicam às porções mais anteriores da mandíbula são de menor intensidade, e com direcção ligeiramente diferente, embora mantendo a sua orientação axial predominante. Verificou-se que a menor força é a exercida sobre os incisivos, e a maior, como vimos, sobre os molares. Por outro lado, a força muscular exercida varia entre indivíduos e, também, entre grupos de indivíduos, dependendo dos hábitos alimentares destes grupos. A força aplicada nos dentes dos grupos que privilegiam, na dieta, os alimentos moles é menor do que entre aqueles que comem alimentos duros ou com alto conteúdo de fibras. Nos esquimós

observaram-se as maiores forças mastigatórias do homem contemporâneo (cerca de 150 kg no primeiro molar).

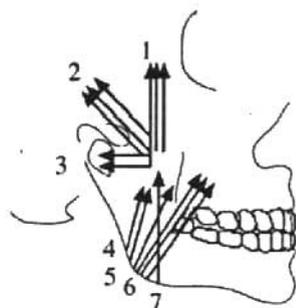


Fig. 3.20 - Forças correspondentes à acção dos músculos: 1 - Porção ventral do temporal. 2 - Porção dorsal do temporal. 3 - Pterigoide lateral. 4 - Porção profunda do masseter. 5 - Pterigoide medial. 6, 7 - Porção superficial do masseter.

Oclusão dentária é o processo que leva à justaposição das arcadas dentárias. Na oclusão dentária interessa, em especial, o sistema de forças aplicadas sobre os dentes quando em contacto. Só uma parte da área oclusal dentária intervém funcionalmente na mastigação, constituindo a superfície triturante ou cortante. Esta é a chamada área oclusal funcional que, em condições normais (existência de todos os dentes), é de cerca de 48 mm<sup>2</sup> e corresponde a 10% da área oclusal anatómica.

A análise das formas pontiagudas das superfícies dentárias e da orientação dos seus eixos, em particular nos molares, demonstra claramente o seu papel na função mastigatória e na sua adaptação ao crescimento.

A pressão exercida sobre os dentes é a força aplicada (força mastigatória) distribuída sobre a área oclusal funcional, ou seja,

$$P = \frac{F}{A}$$

onde **P** é a pressão oclusal, **F** a força mastigatória e **A** a área oclusal funcional. A pressão varia assim directamente com a força aplicada e

inversamente com a área oclusal. Deste modo, quando se aplica a mesma força sobre molares e premolares a pressão exercida nos últimos é maior. A força aplicada sobre os dentes de menores dimensões deve, obviamente, ser menor, para evitar esforços demasiados elevados sobre estes dentes. Por exemplo, 20 kg aplicados sobre um incisivo produzem pressão igual à produzida por 90 kg sobre um molar.

Mesmo na situação de repouso actuam forças sobre os dentes e maxilares. Já referimos anteriormente a acção muscular de compensação do momento do peso da mandíbula. Adicionalmente, os dentes estão situados entre dois grupos musculares activos, a língua, no interior e os músculos da face e lábios, no lado bucal (Fig. 3.21) e estão sujeitos a forças de reacção por parte dos dentes adjacentes em contacto e, na raiz, por parte do osso alveolar. Estas relações originam forças que também actuam durante a mastigação. Assim, para além da força exercida pelo alimento sobre o dente, como reacção à acção mastigatória, há a considerar também as forças das bochechas (mecanismo do bucinador), da língua e dos músculos do istmo das fauces contra os dentes, as forças do contacto entre dentes adjacentes e, finalmente, a força exercida no dente pelas estruturas ósseas de suporte, em reacção às forças exercidas sobre o dente.

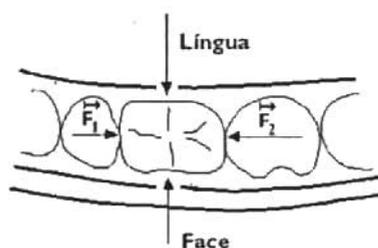


Fig. 3.21 - Força da face contra o dente, da língua contra o dente e forças do contacto,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , entre dentes adjacentes para o caso de um molar.

Nas Figs. 3.21 e 3.22 focamos a nossa atenção nas forças exercidas nos primeiros molares inferiores.



Fig. 3.22 - Força de reacção à força mastigatória, exercida pelo alimento sobre o dente, força exercida no dente pela estrutura óssea de suporte e forças de contacto dos dentes adjacentes,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ .

A força mastigatória exercida pelos dentes sobre os alimentos tem grande interesse em mecânica dentária. Durante a aplicação da força mastigatória, as forças a actuar sobre os dentes terão de estar em equilíbrio para que a posição destes seja fixa; contrariamente, ocorrerão deslocamentos se a resultante das forças aplicadas sobre os dentes não é zero. Esta condição tem a ver com cada dente individualmente. A força de reacção do alimento actua sobre o dente, e é compensada sobretudo pelas forças de reacção das estruturas ósseas que o envolvem. Estas forças são transmitidas ao dente através do ligamento periodontal. Esta estrutura distribui a força de reacção através da superfície da raiz do dente. A máxima força ocorre quando se mastigam alimentos duros, tais como carne. Foi medida esta força obtendo-se o valor de 5 a 10 Kg, consideravelmente superior àquela que ocorre quando se comem alimentos mais moles como vegetais cozidos ou uvas. Esta força é aplicada sobre aproximadamente  $6,45 \text{ mm}^2$  de superfície do dente, resultando uma pressão de 0,7 a 1,7 MPa.

A descrição rigorosa das forças a actuar sobre um dente, durante a mastigação, é de grande complexidade, obrigando a conceitos teóricos avançados. Na Fig. 3.23 mostra-se um esquema onde se podem observar, com algum realismo, as forças a actuar, durante a aplicação de uma força excêntrica  $\vec{F}$  sobre a superfície oclusal, no premolar inferior. Na Fig. 3.23 E é o grande eixo do dente e  $C_1$  e  $C_2$  os seus planos meso-distal e

vestibulo-lingual.  $M_1$  e  $M_2$  representam os efeitos de flexão exercidos no material nos planos  $C_1$  e  $C_2$ . As forças  $\vec{r}$  são as componentes verticais e horizontais das reacções provocadas pela carga axial aplicada e exercidas sobre a raiz do dente.

As forças  $\vec{v}$ ,  $\vec{h}$ ,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são os esforços desenvolvidos no material respectivamente segundo as direcções da vertical e da horizontal e nos planos  $C_1$  e  $C_2$ .

Os contactos entre dentes normais, bem posicionados, garantem a transmissão, repartição e equilíbrio da acção das forças, podendo ocorrer pequenos deslocamentos reversíveis. Quando os contactos interdentais estão alterados poderá ocorrer ingressão (intrusão) ou egressão (extrusão) de dentes adjacentes, deslizamento e rotação.

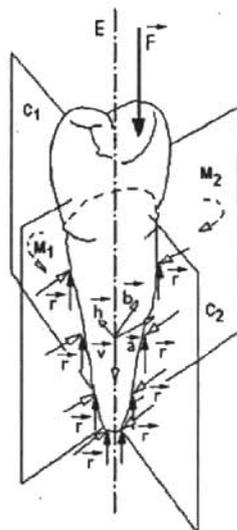


Fig. 3.23 - Forças a actuar, durante a aplicação de uma força excêntrica  $\vec{F}$  sobre a superfície oclusal, no premolar inferior.  $C_1$  e  $C_2$  são respectivamente os planos meso-distal e vestibulo-lingual do dente.  $M_1$  e  $M_2$  representam os efeitos de flexão exercidos no material nos planos  $C_1$  e  $C_2$ . As forças  $\vec{r}$  são as componentes verticais e horizontais das reacções exercidas sobre a raiz do dente, pelas estruturas envolventes, provocadas pela carga axial aplicada. As forças  $\vec{v}$ ,  $\vec{h}$ ,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são os esforços desenvolvidos no material respectivamente segundo as direcções da vertical, horizontal e nos planos  $C_1$  e  $C_2$ .

Num ponto de vista fisiológico, os integrais das forças em ordem ao tempo (produto do valor médio da força pelo seu tempo de actuação) são um factor importante, em particular no que respeita à reacção fisiológica do osso à força aplicada.

## 8 - Mastigação

As forças mais intensas que são exercidas sobre e pelos dentes ocorrem durante a mastigação. Alguns aspectos do processo de mastigação são interessantes e têm consequências importantes. Um destes aspectos é que as pessoas mastigam só com um dos lados do sistema mastigador de cada vez, aumentando para o dobro a pressão exercida sobre os alimentos. Outro aspecto é que, durante a mastigação, os dentes não estabelecem contacto entre si porque o alimento permanece entre as superfícies oclusais superior e inferior dos dentes. Pode mostrar-se este facto ligando as saídas de uma fonte de tensão a fios condutores eléctricos apropriados, que se adaptam aos molares superior e inferior. Verifica-se que só passa corrente durante a deglutição.

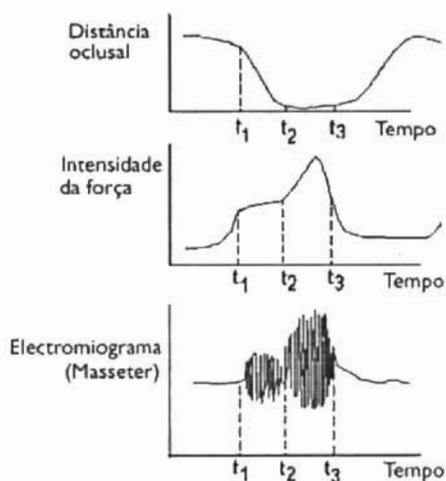


Fig. 3.24 - Electromiograma do masseter, intensidade da força mastigatória e movimento do mandíbula durante um ciclo mastigatório.

A força mastigatória é originada essencialmente pelos músculos masseter e temporal. A Fig. 3.24 ilustra aspectos do ciclo mastigatório mostrando a actividade muscular do masseter (electromiograma), a intensidade da força mastigatória exercida e a distância oclusal.

Entre os instantes 0 e  $t_1$  ocorre a abertura da boca, entre  $t_1$  e  $t_2$  desenrola-se a fase isotónica, de força aproximadamente constante, seguida de uma fase isométrica, entre os instantes  $t_2$  e  $t_3$ , com distância oclusal mínima, fase em que a força máxima de mastigação é desenvolvida.

### 9 - Análises de esforço/deformação das estruturas dentárias

O projecto de qualquer estrutura mecânica, como é o caso das próteses dentárias, exige o conhecimento antecipado dos esforços que irão desenvolver-se na estrutura sob a acção das cargas aplicadas. Porém, devido à complexidade do sistema de forças a actuar (funcionais e parafuncionais) e às limitações intrínsecas (estéticas, de espaço, etc.), o projecto de estruturas para o ambiente bucal reveste-se de grandes dificuldades. Os tecidos dentários e estruturas circundantes, apesar de apresentarem propriedades específicas inerentes, seguem as mesmas leis da física que qualquer outro sistema mecânico, sendo aplicáveis alguns dos métodos correntes de análise dos esforços. Estes métodos permitem conhecer-se os esforços presentes numa dada estrutura sujeita a cargas. As técnicas de análise de esforços podem ser divididas em dois sub-grupos: as teóricas e as experimentais. A aproximação teórica usa uma formulação matemática e a solução das correspondentes equações. As técnicas experimentais envolvem medições de diversos tipos, feitas directamente nas estruturas de interesse, ou utilizando modelos destas. Um exemplo é a comparação das características de transferência de carga de vários desenhos de dentadura parcial, com vista à selecção do modelo que tenha as melhores perspectivas de duração. O objectivo último das técnicas referidas é uma previsão fíável do comportamento clínico de modalidades restaurativas.

## 9.1 - Métodos analíticos e numéricos

Os métodos de análise teórica dos esforços envolvem o uso das leis básicas da física (leis da mecânica, princípios da conservação, condições de equilíbrio, etc.) e as equações reológicas dos materiais utilizados na estrutura (relação entre esforço e deformação relativa) para formular as equações integrais que se aplicam à estrutura. Estas equações são então resolvidas impondo condições de fronteira apropriadas (cargas aplicadas e características dos suportes) e utilizando métodos analíticos ou numéricos.

A utilização de técnicas analíticas é dificultada pela extrema complexidade das geometrias envolvidas, conhecimento incompleto das propriedades mecânicas dos tecidos orais e dificuldade em caracterizar as condições de fronteira, necessárias para a resolução correcta destas equações.

A direcção da linha de acção da força máxima sobre os dentes, durante a mastigação, é de grande importância clínica e fisiológica. Foi encontrada uma relação empírica que caracteriza, de forma aproximada, a direcção da força mastigatória  $\vec{F}$ , traduzida pela seguinte fórmula (no plano frontal):

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k \operatorname{tg} \sigma - \operatorname{tg}(\sigma - \mu)}{k + \operatorname{tg}(\sigma - \mu) \operatorname{tg} \sigma} \quad 3.1$$

onde  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\phi$  são os ângulos com a horizontal (X), respectivamente do movimento de deslocamento do dente  $\vec{D}$ , do plano dos vértices cuspídeos (cuja secção pelo plano da figura é T) e da direcção da força mastigatória  $\vec{F}$ . O ângulo  $\mu$  é chamado de ângulo de mastigação.

As componentes da força,  $\vec{F}$ , e do vector indicativo do movimento do dente,  $\vec{D}$ , segundo os sistemas de eixos XY e NT, encontram-se na Fig. 3.25,

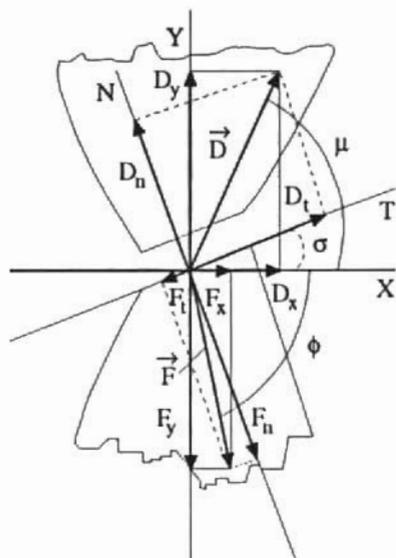


Fig. 3.25 - Orientação e componentes da força  $\vec{F}$  e vector deslocamento do dente  $\vec{D}$ , segundo os eixos XY e NT, durante a mastigação.

Os traçados do plano dos vértices cuspídeos T (representado esquematicamente na Fig. 3.25) e do ângulo  $\sigma$ , que este faz com o eixo dos X, encontram-se esquematizados na Fig. 3.26.

A inclinação do plano dos vértices cuspídeos  $\text{tg } \sigma$  é determinada fazendo passar um plano nas pontas das saliências dos dentes e medindo o ângulo entre este plano e a horizontal. A inclinação da cúspide ( $\text{tg } \alpha$ ), Fig. 3.26, é a tangente do ângulo das superfícies das cúspides em relação ao plano dos vértices cuspídeos.

A constante  $k$  da Eq. 3.1 tem valor dependente das características do alimento que está a ser mastigado através da sua rigidez  $\epsilon$  e módulo de compressibilidade  $E$ , podendo relacionar-se com a inclinação da cúspide ( $\text{tg } \alpha$ ) pela fórmula seguinte:

$$k = \epsilon/E + \text{tg}^2 \alpha (1 - \epsilon^2/E^2)$$

3.2

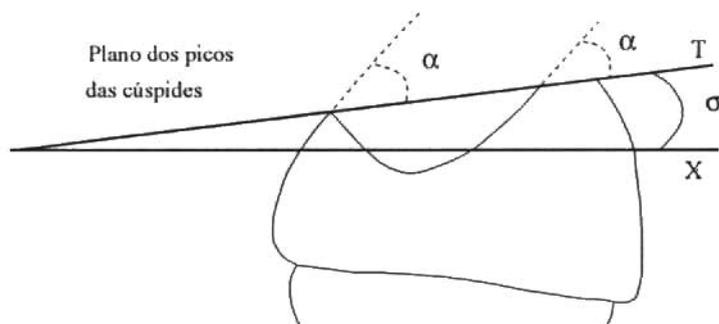


Fig. 3.26 - Traçado do plano das pontas cuspídeas T.

Considerando a expressão que dá a tangente do ângulo definido por duas rectas<sup>3</sup>, e a partir da Eq. 3.1, tira-se que se  $k=1$  os ângulos  $\sigma$  e  $\phi$  são iguais, ou seja, os ângulo de mastigação e da força mastigatória igualam-se.

A mecânica do movimento de mastigação foi estudada por diversos investigadores usando dispositivos mecânicos externos ou a análise do movimento, através de imagens dinâmicas com raios X. O movimento da mandíbula em relação ao maxilar superior, durante a mastigação, pode ser observado com o dispositivo apresentado na Fig. 3.27-a) e b). Um estilete preso à mandíbula inscreve os movimentos desta num alvo ligado ao maxilar. Durante a mastigação unilateral, ou seja, com alimento num só lado da boca, o movimento da mandíbula é grosseiramente descrito por um passo dirigido para baixo, seguido por um movimento lateral em direcção ao lado no qual a mastigação está a ocorrer e, finalmente, o movimento para cima, a partir da posição lateral, em direcção à posição central.

<sup>3</sup> A tangente do ângulo  $\theta$  entre duas rectas com coeficientes angulares  $m_1$  e  $m_2$  é:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

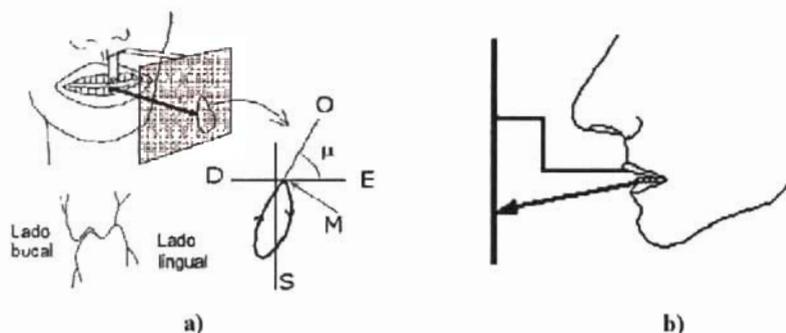


Fig. 3.27 - a) O movimento da mandíbula em relação ao maxilar superior pode ser descrito por um movimento para baixo, seguido por um passo e finalmente um movimento para cima. O ângulo  $\mu$  é o ângulo de mastigação. A direção do movimento final de oclusão é O. S é o corte do plano da imagem por um plano sagital. M é o ponto de máxima oclusão. b) Dispositivo visto de perfil.

Há que considerar também um ângulo de mastigação no plano sagital. Pode ser deduzida uma fórmula equivalente à Eq. 3.1 para o valor deste ângulo. Reparar que, neste caso, Fig. 3.28, o movimento de fechar da mandíbula é dirigido ligeiramente para a frente. A direção da mastigação e as forças que a condicionam devem ser visualizadas em três dimensões mas, na maioria dos casos, a componente frontal do vector força é a mais importante.

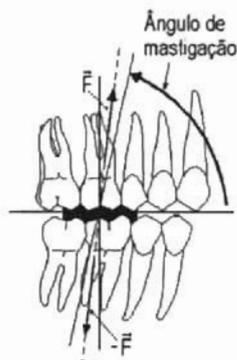


Fig. 3.28 - Ângulo de mastigação no plano sagital.

O ângulo de mastigação  $\mu$  é uma característica individual que tem a ver com hábitos de mastigação e já se provou ser independente do tipo de dentadura em causa. Estudos com diferentes tipos de próteses, no mesmo paciente, mostraram que o ângulo de mastigação é independente da prótese usada.

As propriedades físicas do alimento a ser mastigado podem avaliar-se pela relação entre a rigidez  $\epsilon$  e o módulo de compressão  $E$  de um alimento. Para alimentos duros, como a carne, esta relação é, aproximadamente,  $\epsilon/E = 0,14$ . Este valor constante foi medido utilizando carne padrão dura.

Na dedução da Eq. 3.1 é suposto que a superfície funcional total dos lados bucal e lingual seja igual nos dentes molares e premolares. Por exemplo, na Fig. 3.29 a superfície de mastigação do lado lingual ( $A_2$ ) da cúspide bucal ( $C_B$ ), num molar inferior, é igual à soma das superfícies de mastigação bucais ( $A_1$  e  $A_3$ ) nas duas cúspides, do mesmo dente, ou seja,

$$A_2 = A_1 + A_3$$

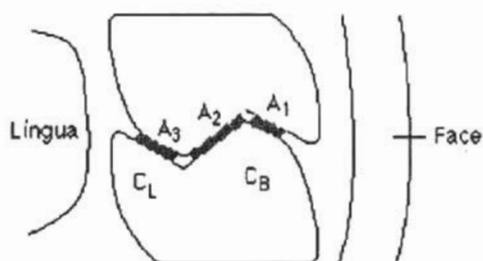


Fig. 3.29 - A superfície funcional lingual de mastigação  $A_2$  é igual à soma das superfícies de mastigação bucais ( $A_1$  e  $A_3$ ) nas duas cúspides dos dentes molares e premolares.

A partir da Eq. 3.1 e da sua equivalente no plano sagital obtiveram-se tabelas que dão a direcção da força mastigatória, para intervalos conhecidos do ângulo plano cuspidiano e entrando com combinações do ângulo de mastigação com o ângulo do plano dos vértices das cúspides (ver Quadro 3.2).

Quadro 3.2 - Direcção da força mastigatória (em itálico e em graus) para combinações entre o ângulo de mastigação (a variar de 80° a 68°) e o ângulo do plano dos vértices das cúspides (a variar entre 9° e 4°), válido para um intervalo de ângulo cuspidiano de 18° a 22°.

	80	78	76	74	72	70	68
9	<i>86</i>	<i>87</i>	<i>87</i>	<i>88</i>	<i>89</i>	<i>89</i>	<i>90</i>
8	<i>87</i>	<i>88</i>	<i>88</i>	<i>89</i>	<i>89</i>	<i>90</i>	<i>91</i>
7	<i>88</i>	<i>88</i>	<i>89</i>	<i>89</i>	<i>90</i>	<i>91</i>	<i>91</i>
6	<i>88</i>	<i>89</i>	<i>90</i>	<i>90</i>	<i>91</i>	<i>91</i>	<i>92</i>
5	<i>89</i>	<i>90</i>	<i>90</i>	<i>91</i>	<i>91</i>	<i>92</i>	<i>93</i>
4	<i>90</i>	<i>90</i>	<i>91</i>	<i>92</i>	<i>92</i>	<i>93</i>	<i>93</i>

A aplicação da análise das forças dentárias permite arriscar algumas conclusões interessantes. Uma destas aplicações refere-se à forma dos dentes e à presença de cúspides. Nos molares humanos a cúspide lingual é mais saliente do que a bucal, mas, na dentadura natural, devido à inclinação dos dentes na mandíbula, o vértice da cúspide lingual fica a um nível inferior do da cúspide bucal (Fig. 3.30). Consideremos uma linha (eixo dos Y's) a passar pelos centros da raiz e da fossa central e o correspondente eixo dos X's, perpendicular ao primeiro (Fig. 3.30).

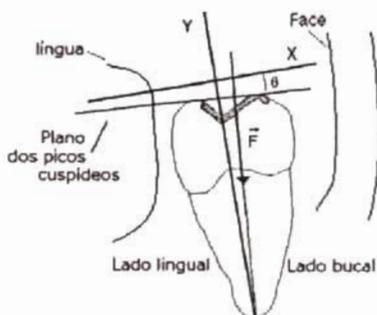


Fig. 3.30 - Nos molares humanos a cúspide lingual situa-se acima da bucal.

O plano dos vértices cuspídeos faz um ângulo  $\theta$  com o eixo dos X's descendo do lado da face para o lado da língua.

Durante a mastigação, com dentadura natural, a força resultante a actuar sobre o dente deve apresentar uma linha de acção que passa pelo centro da raiz de modo a impedir a existência de qualquer momento. Por razões de simetria esta linha de acção deve também passar pelo centro da superfície funcional lingual da cúspide bucal. A partir da Fig. 3.30 vê-se que tal só poderá ocorrer se o dente da mandíbula estiver posicionado de tal maneira que a direcção de mastigação tenha a direcção da força que, por sua vez, deve ser normal ao plano dos vértices cuspídeos. Para isto acontecer tem a cúspide lingual que estar acima da bucal.

## 9.2 - Análise dos elementos finitos

A análise de esforços pelo método dos elementos finitos consiste na modelagem de estruturas contínuas reais através de uma representação matemática por elementos discretos. Esta aproximação transforma os problemas de esforços em problemas de álgebra matricial que podem ser resolvidos com o apoio de computadores. O conceito básico da técnica assenta na decomposição teórica das estruturas reais, supostas contínuas, transformando-as numa montagem de um número finito de elementos discretos que se ligam entre si por um número finito de pontos. Os elementos finitos são obtidos cortando imaginariamente a estrutura original em segmentos. Para aplicações bidimensionais, a decomposição em triângulos de vários tamanhos e formas é a opção mais usada para esta análise. Cada elemento mantém as características mecânicas da estrutura original. Para um material isotrópico e elástico terão de ser conhecidas as constantes elásticas  $E$  e  $\nu$  (módulos de Young e de Poisson). É necessário adoptar um sistema de numeração para identificar os elementos e os seus pontos de ligação (nodos), e também adoptar um sistema de coordenadas para identificar univocamente a posição dos pontos nodais. Um grande número de equações lineares simultâneas são então geradas pelo computador, as quais estabelecem compatibilidade entre os elementos.

Esta técnica tem várias vantagens evidentes entre as quais a capacidade de obter com rigor os esforços em todos os pontos da estrutura em estudo. Para além disso, a inclusão de qualquer tipo de anisotropia ou não homogeneidade é teoricamente possível, desde que seja praticável distribuir as propriedades dos materiais nos nodos dos elementos. Esta última propriedade é atractiva mas difícil de concretizar na prática, visto as propriedades mecânicas da estrutura dentária serem mal conhecidas. A qualidade dos resultados da análise depende da qualidade da informação à entrada. A análise de elementos finitos não está restringida intrinsecamente a configurações geométricas simples. Todavia as configurações com simetria axial e as bidimensionais são realizadas mais facilmente. A análise de formas estruturais de grande complexidade geométrica poderá não ser executável. Outro factor que poderá limitar a aplicação da técnica dos elementos finitos é a impossibilidade de especificar as condições de fronteiras do problema. Por exemplo, a caracterização das forças a actuar numa prótese durante a sua função, considerando os movimentos relativos dos dentes que a enquadram e da mucosa de suporte, não é ainda possível com os meios disponíveis.

### 9.3 - Métodos experimentais

À medida que a geometria e cargas se tornam mais complexas aumenta a dificuldade de aplicação dos métodos teóricos. Nestas condições, várias técnicas experimentais podem ser usadas para prever os esforços e deformações e medir a resposta mecânica da estrutura a cargas simuladas ou reais. A aproximação experimental pode usar modelos ou as próprias estruturas de interesse, dependendo da técnica utilizada. Visto ser praticamente impossível modelar todos os aspectos do comportamento do material de uma vez só, é exigida, por vezes, considerável perícia para se preparar um modelo capaz de fornecer resultados fiáveis. Todavia, excelentes sistemas de modelagem que se mostraram capazes de fornecer resultados preditivos muito úteis de tensões e esforços foram já desenvolvidos, para várias estruturas dentárias.

#### 9.4 - Transdutores de tensão

Os transdutores de tensão utilizam certos elementos que sofrem variações na resistência eléctrica quando sujeitos a esforço-deformação. A tracção produz aumento de resistência. A compressão, pelo contrário, produz diminuição da mesma. Deste modo, quando um transdutor é ligado a pontos de uma superfície sujeita a carga, a avaliação das variações da resistência permite conhecer a deformação nesses pontos. A medida das deformações com transdutores de tensão começou com o uso de simples fios com precisão e sensibilidade limitadas. A partir daqui desenvolveram-se folhas e semi-condutores altamente sensíveis às variações de tensão. Presentemente, aplicadores com várias configurações permitem medir deformações com grande rigor em pontos das superfícies, nas estruturas reais. As principais desvantagens dos transdutores de tensão situam-se no elaborado equipamento eléctrico que necessitam para colectar e registar os dados da deformação, assim como no facto de só medirem as deformações em pontos discretos da superfície a que estão ligados. Não fornecem qualquer informação sobre as deformações no interior do objecto.

#### 9.5 - Métodos fotoelásticos

A fotoelasticidade é um fenómeno verificado com alguns materiais transparentes, tais como grandes polímeros, e que assenta no facto das propriedades de birrefringência destes materiais dependerem da tensão mecânica aplicada. Esta propriedade é utilizada para obter informações sobre esforços em problemas complexos da engenharia e no esclarecimento de situações onde ocorrem concentrações de esforços em objectos com geometria complicada. Vamos considerar esta técnica a partir dos seus fundamentos. Sabemos que a luz, como qualquer radiação electromagnética, resulta de vibrações dos campos eléctrico e magnético que a constituem, normais entre si e normais à direcção de propagação. Quando se fala de luz sem características especiais, admite-se que a

orientação do vector campo eléctrico pode ser qualquer, mantendo-se as características já enunciadas. Os vectores que traduzem as vibrações referidas podem decompor-se em componentes segundo direcções orientadas utilizando as regras que já estudámos. Alguns materiais chamados de birrefringentes possuem a propriedade de decompor a luz que os atravessa em duas componentes, com vibrações segundo direcções normais entre si e que apresentam diferentes velocidades de propagação. O índice de refração destes materiais depende da direcção dos raios luminosos e da orientação do seu campo eléctrico. Por outro lado, existem filtros polarizadores que só são transparentes a feixes de luz que sobre eles incidam, se tiverem uma direcção de vibração paralela a uma dada direcção designada de eixo óptico do filtro polarizador. A luz à saída de um filtro polarizador é constituída assim por vibrações numa única direcção e é chamada de plano-polarizada. Se dois filtros polarizadores são colocados, um a seguir ao outro, com os eixos ópticos a  $90^\circ$  (filtros cruzados), não passa qualquer luz através deste sistema. A componente da luz que atravessa o primeiro filtro é absorvida pelo segundo. Contrariamente, quando os filtros polarizadores são orientados de maneira a que os seus eixos sejam paralelos, o campo de visão através do conjunto, torna-se luminoso. Porém, se for colocado material birrefringente entre um par de filtros cruzados, a luz pode passar através deles, em certas condições. Suponhamos que o eixo óptico do filtro polarizador que recebe a luz em primeiro é vertical. A luz que passa através deste só tem vibrações verticais. Se esta luz passa através de material birrefringente será resolvida em duas componentes fazendo um ângulo recto entre si. Cada uma destas componentes tem a sua componente horizontal. Estas componentes horizontais podem passar através de um segundo filtro com eixo óptico horizontal. Só não acontece isto se as segundas componentes tiverem igual amplitude e resultarem de componentes iniciais em fase, de que resultava cancelarem-se os efeitos, situação que não é, de modo algum, a geral.

É possível conhecerem-se as direcções de vibração dos componentes da luz emergente de uma amostra birrefringente rodando esta entre os dois filtros. Apesar de passar luz para a quase totalidade das posições da

amostra, tal não sucede quando aqueles componentes tiverem direcções exactamente coincidentes com os eixos ópticos dos filtros. Se estes eixos forem um vertical e outro horizontal e o material birrefringente for rodado de modo a que decomponha a luz em componentes com vibrações uma horizontal outra vertical, a luz polarizada verticalmente emergente do primeiro filtro passará através do material sem alteração, não havendo, contudo, componente horizontal para atravessar o segundo filtro.

A birrefringência depende do arranjo das moléculas. Devido ao arranjo aleatório das suas moléculas, os polímeros amorfos, não sujeitos a carga, não são birrefringentes. Quando sob tensão, as moléculas destes materiais tendem a orientar-se segundo a direcção das maiores tensões, tornando-se birrefringentes pois dividem a luz em duas componentes, uma com a direcção da máxima tensão e a outra normal a esta (ou seja nos dois planos principais). Isto constitui o fenómeno da fotoelasticidade que pode ser utilizado para se saberem as orientações dos esforços nos materiais. Em geral, os objectos que se pretendem estudar não têm propriedades fotoelásticas e é necessário fabricarem-se modelos, ou seja, réplicas em polímeros amorfos e transparentes, usando materiais como “perspex” ou resinas “epoxy”, capazes de exibir resposta fotoelástica e investigar indirectamente os esforços a actuar sobre estes. Como já foi mencionado, a técnica fotoelástica permite obter uma visualização das tensões nos materiais. Estas tensões são reveladas em instrumentos denominados polariscópios. Os elementos principais de um polariscópio plano são os filtros polarizantes e uma fonte luminosa, Fig. 3.31. A fonte luminosa **A** emite um feixe de raios paralelos que atravessa o difusor **A'** e, a seguir, os filtros polarizadores cruzados **B** e **D** que podem rodar em conjunto, em torno do eixo do sistema. **E** é um alvo de vidro fosco. O modelo **C** a estudar (bidimensional) encontra-se numa prensa que aplica a carga pretendida entre os extremos do modelo. Quando o modelo é sujeito a esforço torna-se birrefringente e passa luz através deste, excepto quando os esforços principais são paralelos aos eixos ópticos dos filtros polarizadores. Se os filtros polarizadores são rodados de pequenos ângulos até 90° obtêm-se no alvo **E** conjuntos de finjas que permitem conhecer os planos principais de todas as partes do modelo e saber as orientações e

tipos de esforço a que está sujeito. Dois tipos de franjas são revelados por um polariscópio plano: um conjunto de franjas coloridas chamadas isocromáticas, relacionadas com a intensidade dos esforços, e uma série de franjas escuras chamadas isoclinicas. Estas franjas sobrepõem-se às isocromáticas e estão relacionadas com a direcção dos esforços a actuar no modelo. As famílias de isoclinicas e isocromáticas observadas num modelo (Fig. 3.32), em conjunto com as equações da elasticidade, permitem o cálculo de todos os esforços no modelo.

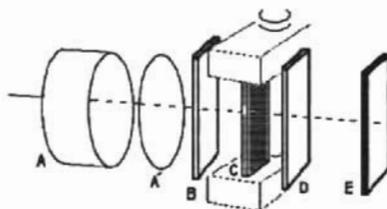


Fig. 3.31 - Polariscópio plano. A - fonte luminosa (colimador); A' - difusor; B e D - filtros polarizadores; C - modelo a estudar (bidimensional); E - alvo de vidro fosco.

Vimos que a luz só pode atravessar filtros polarizadores cruzados se existir material birrefringente entreposto pois estes materiais dividem a luz em duas componentes que se propagam com diferentes velocidades no material e emergem desfazadas. Se acontecer que a componente mais lenta é atrasada em relação à mais rápida de um número inteiro de comprimentos de onda, as componentes emergem em fase e não passa luz através do segundo polarizador. O atraso entre os componentes depende da espessura do material e do grau de birrefringência. Nos materiais tornados birrefringentes por aplicação de tensões, a diferença de fase é proporcional à diferença entre as duas principais tensões a actuar no material. Esta circunstância é utilizada para obter informação quantitativa sobre os esforços nos materiais. Se actuam no modelo tensões suficientemente fortes de modo a que a componente lenta da luz seja atrasada um ou mais comprimentos de onda, o modelo apresenta-se

estriado. O preto corresponde a atrasos de um número inteiro de comprimentos de onda e as estrias pretas ligam pontos com igual diferença entre as tensões principais a actuar. São chamadas franjas isocromáticas. Numa imagem complexa, podem saber-se quantos comprimentos de onda de atraso, originaram cada uma das franjas. Para isso começa-se com forças de pequena intensidade a actuar no modelo, aumentando-se estas por saltos, observando-se as franjas para cada aumento, até à distribuição de franjas a analisar ser atingida.

Como foi descrito, o método só permite obter isoclínicas e isocromáticas de modelos bidimensionais, pelo que este tipo de instrumento é chamado de polariscópio plano; contudo, a técnica já foi aperfeiçoada de modo a fornecer informação sobre objectos tridimensionais como, por exemplo, de dentes. Neste caso torna-se necessário fabricar modelos das estruturas dentárias de interesse e sujeitá-los às cargas representativas das forças funcionalmente aplicadas. As deformações que se desenvolvem nestes modelos como resultado das cargas aplicadas, podem então ser observadas, examinando o modelo com filtros polarizadores. Há diversas vantagens nesta técnica experimental de análise de tensões.



Fig. 3.32 - Indicação dos esforços num modelo através das franjas isoclínicas e isocromáticas.

Por exemplo, podem estudar-se modelos complicados das estruturas orais, podem determinar-se as forças mastigatórias e as reacções nas aplicações restauradoras, podem observar-se as tensões em todo o modelo, permitindo localizar e avaliar as concentrações de tensão, tudo isto em condições complexas de carga. A análise fotoelástica, facilitando o projecto de estruturas complexas é, presentemente, uma técnica indispensável à engenharia e indústria, e em breve o será à medicina dentária, dada a sua crescente aplicação em ortodontia e cirurgia dentária.

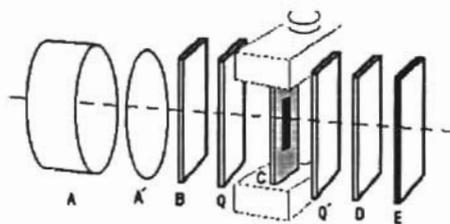


Fig. 3.33 - Polariscópio circular. A - fonte luminosa (colimador); A' - difusor; B e D - filtros polarizadores; C - modelo a estudar (tridimensional); Q e Q' - filtros de quarto de comprimento de onda; E - alvo de vidro fosco.

Referimos já a necessidade de construir modelos para efectuar os estudos de fotoelasticidade. Na modelagem de próteses para uma particular estrutura oral há que considerar dois aspectos principais. O primeiro está relacionado com a reprodução geométrica da estrutura. O modelo pode reflectir a estrutura com fidelidade total ou parcial e estar ou não na mesma escala.

O segundo aspecto relaciona-se com a simulação de propriedades mecânicas do sistema em estudo. Dada a sua complexidade não é possível modelar todas as características mecânicas de um elemento estrutural. Têm de ser feitas opções ao escolher, no problema clínico em estudo, as propriedades que mais interessa analisar. Uma vez que o tempo de utilização das restaurações deve terminar antes do início da deformação

permanente, o módulo de elasticidade é o parâmetro apropriado para a modelagem. Em geral, a selecção de materiais fotoelásticos para modelagem de próteses e de tecidos é baseada em valores relativos de módulos.

Um aspecto que interessa ter em conta quando se consideram os resultados obtidos com esta técnica é que qualquer técnica de análise de tensões só poderá prever valores para os esforços nos dentes ou em próteses de forma aproximada. As variações registadas nas propriedades mecânicas das estruturas biológicas bem como dos outros parâmetros em jogo, tornam muito difícil para cada caso individual, a obtenção de resultados rigorosos.

Para muitas aplicações dentárias, a principal informação exigida é a localização e intensidade das concentrações dos esforços. Esta informação pode indicar áreas de fraqueza estrutural ou de potencial insucesso devido a fractura ou excesso em relação aos limites de esforço do material.

Para facilitar o exame das isocromáticas, devem eliminar-se as isoclinicas. Esta eliminação é realizada pelo polariscópio circular, o qual contém filtros chamados de quarto de comprimento de onda (quarter wave plates). Estes filtros impedem parcialmente a rotação do plano de vibração da luz, o que faz desaparecer as franjas isoclinicas, surgindo apenas as franjas isocromáticas.

À medida que é aplicada tensão a uma estrutura, o número de franjas isocromáticas observável aumenta. Se a estrutura responde dentro da porção linear da curva tensão-esforço, o número de franjas será proporcional às cargas aplicadas. Quando se consideram as franjas isocromáticas, a interpretação é simplificada com o uso dos princípios seguintes: (1) quanto maior for o número de franjas, maior é a intensidade da tensão; e (2) quanto mais perto estiverem as franjas isocromáticas entre si, maior é a concentração dos esforços. As concentrações de esforço irão desenvolver-se em situações gerais típicas como a acção de um corpo sobre o outro (observável nos pontos de carga), descontinuidades geométricas (tais como ângulos pronunciados ou formas irregulares) e descontinuidades nos módulos de elasticidade.

Os princípios da fotoelasticidade são aplicados sobre modelos de modo a obter informação relevante para a ciência dentária. São utilizadas diversas técnicas. A técnica bidimensional usa modelos que só se identificam geometricamente com o objecto real num plano, por exemplo, a secção sagital de um dente. Esta análise obriga a que o esforço através da espessura do modelo seja constante, pelo que as forças aplicadas deverão estar no plano do modelo. A técnica bidimensional tem desvantagens, nomeadamente, a de não permitir a obtenção da distribuição tridimensional dos esforços.

A técnica tridimensional faz uso de uma propriedade especial de certos plásticos que podem ser usados nos modelos. Estes materiais, quando sujeitos a cargas constantes a uma temperatura elevada, que é reduzida lentamente até à temperatura ambiente, mantêm os esforços internos depois das cargas serem removidas. Este processo de fixar os esforços é denominado "stress freezing" (congelamento do stress). A técnica tridimensional permite a identidade geométrica do modelo, mas obriga a estratégias complexas para se obterem os esforços tridimensionais. O modelo tem de ser decomposto em finas secções e cada uma analisada como um modelo bidimensional.

## 10 - Periodonto e acção muscular

O comportamento do periodonto, no que respeita às forças aplicadas sobre os dentes e às modificações nele originadas pelas variações destas forças, são de grande interesse fisiológico. A parte activa do periodonto, no que se refere à dinâmica estomatognática, é o ligamento periodontal, ou sejam, as fibras periodontais perirradiculares. A gengiva tem um papel protector, como toda a mucosa e, além disso, possui nociceptores (receptores nociceptivos) de tacto, pressão e temperatura. O cemento bem como os tecidos mineralizados do dente e o processo alveolar têm também contribuições de importância naquela dinâmica.

O periodonto de inserção funciona como uma articulação semimóvel ou sinartrose, cuja parte mais dinâmica é constituída pelo ligamento periodontal formado por fibras dispostas em grupos, sendo o grupo alvéolo-dentário o mais importante, por manter o dente na sua posição elástica, dentro da cavidade alveolar, Fig. 3.34.



Fig. 3.34 - Organização dos feixes fibrosos no ligamento periodontal.

O ligamento alvéolo-dentário distribui-se em grupos com características específicas:

- Grupo da crista alveolar: vai da crista do rebordo alveolar à parte cervical do cimento;
- Grupo horizontal: fibras perpendiculares ao longo do eixo do dente, vão do cimento ao alvéolo, impedindo o deslocamento do dente no sentido horizontal;
- Grupo oblíquo: fibras que correm obliquamente do cimento ao alvéolo;
- Grupo apical: fibras com distribuição triangular, que evitam deslocamentos verticais.

As fibras periodontais resistem elasticamente às forças aplicadas, atenuando os seus efeitos. Quando uma força é aplicada verticalmente (axial), a atenuação é mais eficaz se as fibras estão dispostas vertical ou, pelo menos, obliquamente; daí a pequena população de fibras horizontais na área da crista alveolar. Quando a direcção da força é oblíqua, as fibras

adoptam um padrão horizontal, o que sucede na área da crista e no ápice do dente; além disso, o número de fibras atingidas é menor e a tensão produz-se nas extremidades opostas, cervical e apical.

Uma fracção apreciável da força oclusal é transmitida ao osso alveolar, devido à sua ligação às fibras do periodonto como consequência da tensão desenvolvida por estas. Atingidas as deformações extremas as forças são transmitidas ao osso praticamente por acção directa.

No ligamento periodontal encontram-se receptores mecânicos capsulados e densos plexos de fibras nervosas não mielinizadas. Os receptores mecânicos são excitados por forças da ordem de 0,7 g e controlam, por via reflexa, a intensidade da contracção muscular e a força mastigatória. Os axónios não mielinizados são funcionalmente nociceptores.

Considerando agora uma situação específica, observou-se uma relação entre a força intercuspídea local e a superfície da raiz dentária (os molares têm superfície radicular maior). Também há relação entre força aplicada e limiar dos presso-receptores perirradiculares. Estes receptores localizam-se nas fibras periodontais, em torno da raiz dentária. Quando o dente recebe uma força mecânica, a deformação das fibras do periodonto estimula os pressoreceptores perirradiculares. Esta estimulação provoca inibição reflexa da actividade dos músculos elevadores da mandíbula, de modo que a força mastigatória máxima indica o nível de excitação desses receptores periodontais. É o que se chama valor crítico de pressão. Quando se anestesia o periodonto, é possível aumentar 70%, em relação à situação normal, a força máxima aplicada axialmente e 100% as forças máximas aplicadas lateralmente. Foi determinado, além disso, que o valor da força máxima aplicada entre os dentes (intercuspídea), para condições normais, é só um fracção da força que podem desenvolver os músculos. Com base nas experiências realizadas com anestesia periodontal, estima-se aquela fracção em aproximadamente 0,6.

Já sabemos que os dentes estão preparados para sofrer pequenos deslocamentos, individualmente ou em grupo, em diversas direcções, sob a acção das forças mastigatórias. Estes movimentos intra-alveolares são amortecidos pelo ligamento de inserção do dente e originam forças opostas de reacção no osso alveolar. A deformação torna tensas as fibras

do periodonto que são pouco deformáveis (elevada elastância). A reacção elástica do ligamento equilibra a maior parte da força aplicada sobre o dente. A relação entre a área oclusal e a área radicular permite entender esta afirmação. Por exemplo, para o primeiro molar esta relação é cerca de 0,4, mostrando que, para uma mesma força, a pressão no periodonto é menor que aquela que actua sobre a superfície oclusal (ou sobre o alimento que está entre as superfícies oclusais), conseguindo uma margem de segurança que protege a integridade das estruturas periodontais.

A força de pressão mastigatória sobre as estruturas periodontais, provoca compressão dos vasos sanguíneos com diminuição do fluxo sanguíneo, fazendo desaparecer o pulso rítmico do dente, provoca deslocamento dos tecidos moles e, finalmente, dos tecidos duros (alvéolos). A força aplicada pode escrever-se:

$$F = F_r + F_{pm} + F_{pd}$$

onde:  $F$  = Força aplicada;  $F_r$  = Força absorvida como tensão das fibras de inserção;  $F_{pm}$  = Força sobre o tecido mole;  $F_{pd}$  = Força sobre o alvéolo.

Normalmente a mandíbula tem uma posição constante em relação à maxila, mas esta postura varia, estando o indivíduo consciente, na vigília, ou inconsciente, durante o sono. Por outro lado, a partir da primeira postura iniciam-se os movimentos mandibulares funcionais.

Durante a vigília, quando um indivíduo está sentado em posição ortostática confortável, os lábios contactam levemente e as peças dentárias encontram-se separadas de uma distância de cerca de 1 a 3 mm (free way space – espaço livre de inoclusão). É a postura basal de repouso. Desta posição pode-se passar facilmente à posição de oclusão cêntrica, onde é exercida pressão moderada nos dentes por uso amplo das superfícies oclusais sem ocorrerem deslizamentos ou atritos. A postura basal de repouso é determinada pelo tônus muscular dos músculos elevadores da mandíbula, resultante de um reflexo postural mandibular, que actua contra o peso da mandíbula que tende a fazer rodar esta para baixo.

Além dos músculos elevadores, também os abaixadores da mandíbula participam na determinação da postura da mandíbula, como foi demonstrado electromiograficamente no músculo pterigóide lateral e digástrico. Por este facto, postula-se que na postura mandibular deve existir equilíbrio dinâmico entre os músculos elevadores e abaixadores da mandíbula.

Deve-se destacar que a actividade tónica dos músculos mastigadores em repouso representa cerca de 3 a 5% da actividade muscular durante a mastigação, pelo menos no temporal, que é o principal músculo que determina o tónus postural da mandíbula.

O que designamos de posição basal de repouso da mandíbula refere-se a uma situação onde há actividade tónica muscular. Mesmo durante o sono, o tónus muscular diminui bastante, mas não desaparece. O estudo electromiográfico do masseter e temporal permitiu determinar que a actividade eléctrica destes diminuía quando a mandíbula era afastada da sua posição postural, chegando a um mínimo específico para cada músculo. Para o masseter, por exemplo, esta posição corresponde a uma distância interdentária de cerca de 10 mm; logo após, a actividade electromiográfica voltava a aumentar.

Há interesse em considerar alguns factores de natureza mecânica que dependem tanto da propriedade dos músculos mastigadores como das estruturas esqueléticas e dos tecidos orais e designados de mecanismos passivos. Os músculos elevadores da mandíbula possuem, como todas as estruturas musculares, além das proteínas contrácteis, outras proteínas com propriedades elásticas, dispostas mecanicamente em série ou em paralelo com a fibra muscular. Estas proteínas conferem ao sistema muscular elevador propriedades viscoelásticas que se opõem ao relaxamento. Em repouso, o músculo desenvolve tensão até ser atingido equilíbrio com as estruturas viscoelásticas.

A homeostase oclusal é a resultante de todas as forças dinâmicas que agem sobre o dente, podendo ser controladas pelo eficiente sistema sensorial oral, que pode captar corpos estranhos, entre os dentes, de até 20  $\mu\text{m}$  de diâmetro, ou pela capacidade de detectar forças menores de 600 mg.

## CAPÍTULO • IV

RAIOS X DENTÁRIOS: ASPECTOS FÍSICOS E TÉCNICOS



(Página deixada propositadamente em branco)

## 1 - Generalidades

Presentemente, e de um modo geral, os raios X usados para fins de diagnóstico médico, são produzidos por bombardeamento de eléctrodos com feixes de electrões de elevada energia cinética. As características exigidas aos raios X, para a execução das diferentes técnicas radiológicas, são, em grande parte, obtidas por variação da energia cinética dos electrões e da densidade de corrente daqueles feixes<sup>1</sup>.

As Figs. 4.1 a) e b) mostram, em esquema simplificado, a constituição de uma moderna ampola de raios X.

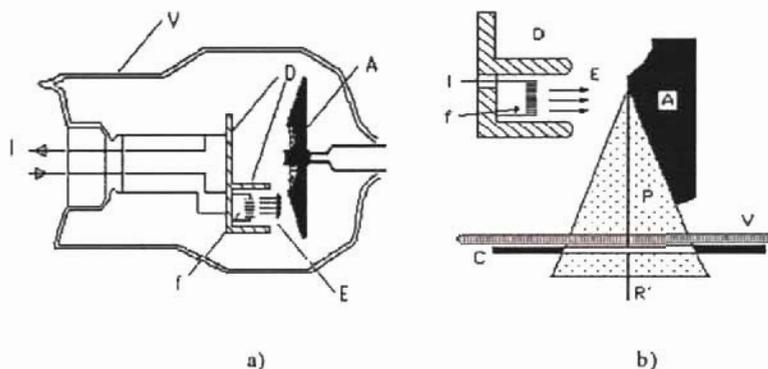


Fig. 4.1 - a) - Corte esquemático de uma ampola de raios X. b) - Pormenor do esquema anterior. A - Ânodo; E - Electrões; V - Parede de vidro; P - Feixe primário<sup>2</sup> dos raios X; D - Eléctrodo de focagem; R' - Raio central; f - Filamento; C - Colimador; I - Intensidade de corrente de filamento.

<sup>1</sup> Densidade de corrente de um feixe de electrões numa ampola de raios X é, muitas vezes, definida pelo número de electrões que, por segundo, atravessam a área de  $1 \text{ cm}^2$  normal à direcção da sua velocidade. Multiplicando esse número pelo valor da carga do electrão (em Coulomb), obtemos a densidade de corrente em  $\text{A cm}^{-2}$ .

<sup>2</sup> Um feixe de radiação electromagnética é um conjunto de fotões emitidos por uma fonte de pequenas dimensões, limitado por um colimador com forma quadrada ou rectangular, situado próximo da fonte. No caso dos raios X a secção normal ao raio central é geralmente quadrangular ou rectangular.

Na ampola, onde se faz um vácuo elevado ( $<10^{-6}$  mmHg), existe um filamento de tungsténio **f**, um dispositivo de focagem **D** e um ânodo **A** (ou anticátodo) também, em geral, de tungsténio.

O filamento é levado ao rubro por efeito Joule produzido pela corrente eléctrica **I** que o atravessa.

Entre o ânodo e o filamento é aplicada uma diferença de potencial que pode ir de algumas dezenas à centena e meia de quilovolts.

Os electrões emitidos do filamento por efeito termoiónico são acelerados no campo eléctrico existente entre **A** e **f**. Devido à acção do eléctrodo de focagem **D**, os electrões são dirigidos sobre uma área mínima do ânodo, o foco, idealmente pontual, cedendo aí a sua energia cinética. A maior parte desta energia é libertada na forma de calor e só uma pequena fracção é emitida na forma de energia electromagnética **X**. O aspecto típico do espectro de energia da radiação emitida está representado na Fig. 4.2.

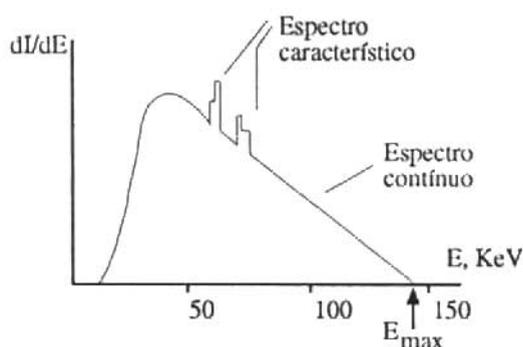


Fig. 4.2 - Distribuição da energia emitida por uma ampola de raios X ( $dI/dE$  - intensidade relativa do feixe por unidade de energia dos fotões.  $E_{\max}$  - máxima energia dos fotões emitidos).

Neste espectro, sobre uma distribuição contínua, observam-se alguns picos, cuja contribuição para a intensidade total é pequena.

As Figs. 4.3 e 4.4 esquematizam os processos que ocorrem no anticátodo com os electrões do feixe, e de que resulta a produção de raios X.

O fenómeno esquematizado na Fig. 4.3 é o responsável pela distribuição contínua do espectro e consiste na perda de energia cinética de electrões que passam próximo do núcleo de átomos do anticátodo. É o efeito de bremsstrahlung (em alemão, travamento dos raios). A variação da velocidade dos electrões devido à acção atractiva de núcleos, de elevado número atómico, é a causa desta emissão de fotões.

A energia dos fotões emitidos neste processo ou, se quisermos, a energia perdida pelos electrões, depende do número atómico dos núcleos, da distância de interacção electrão-núcleo e da energia cinética dos electrões.

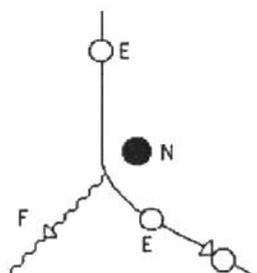


Fig. 4.3 - Efeito de bremsstrahlung. E - Electrão;  
N - Núcleo; F - Fotão de bremsstrahlung.

A energia máxima do espectro dos raios X,  $E_{max}$ , é igual à energia cinética dos electrões incidentes e corresponde à transformação em energia electromagnética de toda a energia cinética do electrão.

Os picos que se observam no espectro da Fig. 4.2 devem-se aos fenómenos esquematizados nas Figs. 4.4 a) e 4.4 b).

Os electrões incidentes (no anticátodo) e podem colidir com electrões  $e_0$  das camadas mais internas dos átomos do ânodo, produzindo ionização ou excitação. No primeiro caso, um electrão orbital é expellido do átomo. No segundo caso, um electrão passa a ocupar um nível de energia mais elevado no átomo. Em qualquer destas condições, os átomos ficam instáveis e um electrão de uma das camadas de maior energia potencial, irá ocupar a vaga produzida pela colisão. Este processo ocorre com a

emissão de um fóton. A energia desse fóton é característica dos átomos do ânodo e poderá ser de raios X, para átomos de  $Z$  elevado. Outros saltos quânticos com libertação de radiação electromagnética característica se seguirão, até ao estado energético do átomo ser mínimo. No caso da ionização, este estado corresponde ao átomo sem um dos electrões de energia de ionização mínima, no caso da excitação corresponde ao estado fundamental.

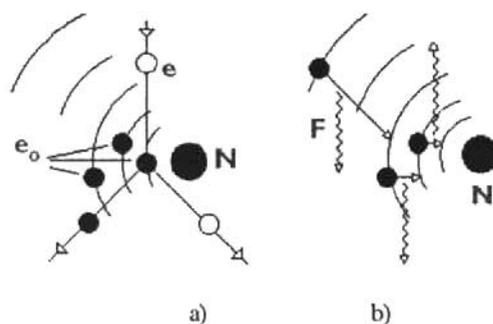


Fig. 4.4 - Produção de raios X característicos. e - Electrão incidente; e<sub>o</sub> - Electrão orbital; N - Núcleo; F - Fóton característico.

As energias dos vários picos que ocorrem no espectro são características da espécie atómica que constitui o ânodo; as intensidades relativas desses picos dependem das diversas possibilidades de interacção com os electrões mais próximos do núcleo, bem como das diferentes alternativas para emissão da energia de excitação do átomo. O espectro de riscas que se sobrepõe à parte contínua, na Fig. 4.2, tem, assim, uma natureza idêntica à dos espectros ópticos de emissão, igualmente de riscas. Para o caso dos raios X, as riscas resultam de interacções com os electrões mais ligados ao núcleo em elementos de número atómico elevado, e são riscas **K**, **L** ou **M**. Torna-se evidente que estas riscas só estarão presentes se a energia cinética dos electrões incidentes for superior à energia característica dos níveis correspondentes, o que pode verificar-se numa ampola de raios X.

No caso dos espectros ópticos trata-se de transições de baixa energia e os fotões característicos emitidos são fotões luminosos.

Os dois processos, atrás mencionados, que explicam a Fig. 4.2 e estão na origem da produção dos raios X, estão longe de ser os únicos que levam à perda de energia dos electrões acelerados, quando estes colidem com o átomo. As colisões com os electrões menos ligados ao núcleo, mais abundantes nos átomos de  $Z$  elevado, são os processos que predominam. Destas colisões resulta a transformação em calor de mais de 99% da energia cinética dos electrões acelerados. O rendimento total para emissão de raios X, numa ampola vulgar para fins clínicos, é cerca de 1%.

O valor máximo de energia,  $E_{\max}$  da Fig. 4.2, a que corresponde o comprimento de onda mínimo  $\lambda_{\min}$  da radiação X, ocorre quando toda a energia cinética do electrão incidente é transformada em energia electro-magnética. Se o potencial acelerador na ampola for  $V$  e se admitirmos que os electrões partem de  $f$  com velocidade inicial desprezável, a energia cinética dos electrões, ao atingirem o anticátodo, por aplicação da conservação de energia, vem dada por

$$\frac{m_e v^2}{2} = eV \quad 4.1$$

onde  $m_e$  é a massa do electrão.

Se toda a energia cinética aparecer na forma de um fotão de raios X, tem-se

$$E_{\max} = h\nu_{\max} = eV \quad 4.2$$

onde  $h$  é a constante de Planck e  $\nu_{\max}$  a frequência máxima da radiação X emitida.

Lembrando a definição de electrão-Volt<sup>3</sup>, facilmente se vê que a energia máxima dos fotões emitidos na ampola é o número de eV que

<sup>3</sup> Electrão-Volt é a energia cinética que um electrão adquire por acção de uma diferença de potencial de 1 V.

igual a o valor em Volt do potencial acelerador. Como  $v = \frac{c}{\lambda}$ , com  $c$  velocidade da luz no vácuo e  $\lambda$  o comprimento de onda, a equação anterior pode escrever-se:

$$E_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = eV$$

ou seja,

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} \quad 4.3$$

Substituindo os valores das constantes, podemos obter a fórmula de Douane e Hunt

$$\lambda_{\min} (\text{Å}) = \frac{12.403}{V (\text{kV})}$$

Para um feixe de raios X obtido com uma tensão aceleradora constante no ânodo, é usual indicar o seu comprimento de onda efectivo, que corresponde ao comprimento de onda de um feixe monoenergético com propriedades idênticas às do feixe real de raios X. Em geral, considera-se que

$$\lambda_{\text{ef}} = 3/2 \lambda_{\min} \quad 4.4$$

A energia efectiva,  $E_{\text{ef}}$  é a energia que corresponde ao comprimento de onda efectivo  $\lambda_{\text{ef}}$ , ou seja, usando as Eqs. 4.2 e 4.4.

$$\begin{aligned} E_{\text{ef}} &= \frac{2hc}{3\lambda_{\min}} \\ &= \frac{2}{3} E_{\max} \end{aligned} \quad 4.5$$

A energia efectiva é, portanto, 2/3 da energia máxima dos fotões emitidos.

A equivalência entre as propriedades de um feixe monoenergético de energia igual à energia efectiva (ou comprimento de onda igual ao comprimento de onda efectivo) e as propriedades do feixe real é uma aproximação tanto mais grosseira, quanto mais largo for o espectro de energia deste feixe.

Deve, no entanto, referir-se que a Eq. 4.4 é uma aproximação que só é aplicável se a tensão aceleradora for constante. Por exemplo, quando a tensão  $V$  aplicada ao ânodo, for obtida directamente por rectificação de onda completa, então

$$\lambda_{ef} = 1,8 \lambda_{min}$$

Raios X com diferentes  $\lambda_{ef}$  dizem-se de qualidade diferente. Os raios X clínicos de pequeno  $\lambda_{ef}$  (mais penetrantes) denominam-se duros e os de maior  $\lambda_{ef}$  (menos penetrantes) denominam-se moles. O ânodo das ampolas de raios X para fins clínicos é, em geral, de tungsténio, por duas razões principais: a primeira é que os elementos de número atómico elevado são mais eficazes na produção de fotões do espectro continuo de energias, que é o que interessa em medicina, e o segundo, é o elevado ponto de fusão do tungsténio (3 380 °C). Esta última propriedade é importante pois, não obstante os anticátodos serem rotativos e arrefecidos por circulação interior de água ou óleo, podem atingir temperaturas elevadíssimas, depois de algum tempo de funcionamento.

Na Fig. 4.1 b) está representado a sombreado o feixe de raios X útil, limitado pela janela existente no colimador C. Os fotões de raios X não são emitidos isotropicamente. Para as condições de trabalho utilizadas em radiologia, as maiores probabilidades de emissão ocorrem para ângulos próximos dos 90° com a direcção de incidência dos electrões.

Os comprimentos de onda e as correspondentes energias dos raios X usados no diagnóstico e na terapêutica, bem como os dispositivos utilizados na sua produção, podem observar-se na Fig. 4.5.

Raios X de muito elevadas energias podem ser obtidos com electrões acelerados em aceleradores, tais como o betatrão onde se obtêm raios X de  $10^7$  a  $10^8$  eV mas, neste caso, com elevados rendimentos, da ordem dos 80%.

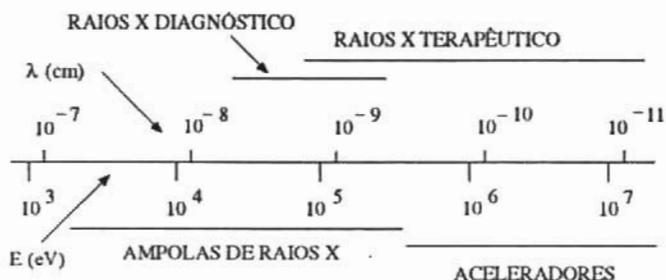


Fig. 4.5 - Comprimentos de onda, energias e dispositivos de produção de raios X com interesse médico.

Como é de esperar, as diferentes aplicações radiológicas exigem diferentes qualidades, quantidades e modos de aplicação dos raios X. O espectro dos raios X de um feixe depende da tensão aceleradora aplicada ao tubo. A modificação desta tensão faz variar as energias máxima e efectiva, bem como a intensidade total dos raios X emitidos (Fig. 4.6). Nesta figura as curvas foram obtidas para a mesma intensidade de corrente anódica  $I_a=20$  mA.

A quantidade de radiação X emitida por uma ampola pode ser alterada sem variar a energia máxima. Para uma dada tensão aceleradora, a quantidade de raios X emitida depende do número de electrões que atingem o ânodo, ou seja, da intensidade anódica que, por sua vez, depende da intensidade da corrente de aquecimento do filamento  $I$ .

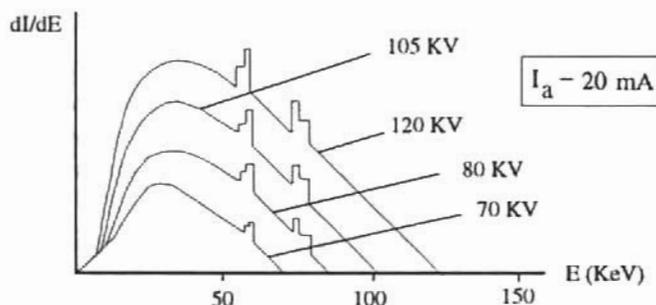


Fig. 4.6 - Curva  $dI/dE$  em função de  $E$  para diversas tensões aceleradoras.

Na Fig. 4.7, as coordenadas são idênticas às da figura anterior mas o parâmetro é a corrente anódica.

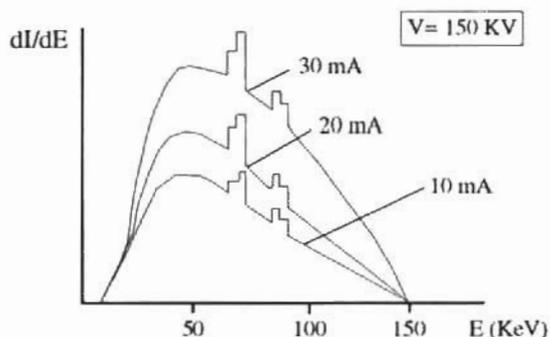


Fig. 4.7 - Curvas  $dI/dE$  em função de  $E$ , obtidas com diversas intensidades de corrente anódica e para tensão aceleradora constante.

Em medicina, o espectro dos feixes de raios X mais correntemente utilizados em radiologia, após absorção no vidro da ampola e filtragem apropriada (alumínio ou cobre), tem o aspecto da Fig. 4.8. Embora uma parte considerável da área subentendida corresponda a energias próximas do máximo do espectro, este está longe de ser monoenergético.

Praticamente só a parte contínua do espectro tem interesse em medicina. A grande exceção é a mamografia, com ânodos de molibdênio, onde por razões dosimétricas é utilizada sobretudo radiação característica.

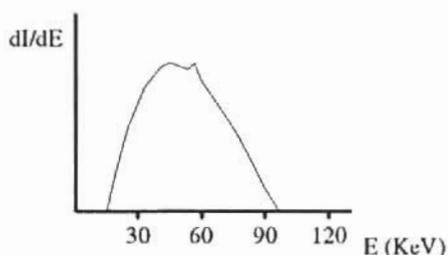


Fig. 4.8 - Espectro de raios X clínicos após filtragem acentuada (tensão anódica de 100 KV).

A filtração do feixe de raios X altera a forma do espectro, aumentando a participação relativa das energias mais altas, ou seja, endurece o feixe. A filtração total do feixe é a soma da filtração inerente com a filtração adicional. A filtração inerente é devida ao vidro do tubo, ao líquido de arrefecimento e à espessura e constituição da janela. A filtração adicionada é colocada para alterar o espectro de raio X, tornando-o mais próximo do monoenergético. De um modo geral, usam-se filtros de alumínio em diagnóstico e de cobre em radioterapia. Em radiologia são usados filtragens equivalentes a 1,5 mm de Al para tensões aceleradora de 70 kV<sub>p</sub> e 2,5 mm de Al para 100 kV<sub>p</sub>.

## 2 - Interação dos raios X com a matéria

### 2.1 - Radiações Ionizantes

De um modo geral, chamam-se radiações ionizantes àquelas radiações capazes de produzir ionização em estruturas biológicas. As energias de ionização dos elementos existentes em maior quantidade nas estruturas biológicas variam entre cerca de 11 eV e 14 eV, por exemplo:

C - 11,24 eV    H - 13,54 eV    O - 13,57 eV    N - 14,24 eV

Estes valores são as energias mínimas necessárias para ionizar os átomos.

Como veremos adiante, a energia média cedida pela radiação aos meios materiais por par de iões produzido é bastante maior do que as energias de ionização. Isto deve-se ao facto de mais de metade da energia ser utilizada em excitações atómicas e moleculares.

As partículas  $\alpha$  e  $\beta$  e a radiação  $\gamma$  emitidas pelos radionuclídeos e os raios X são, de um modo geral, radiações ionizantes.

A ionização produzida pela radiação  $\gamma$  ou X deve-se, quase exclusivamente, aos iões resultantes das interacções dos electrões que são libertados em acções primárias (efeitos fotoeléctrico, Compton e produção de pares) dos fotões com a matéria. Assim, e contrariamente às

partículas carregadas, a radiação electromagnética não é considerada directamente ionizante.

As ordens de grandeza do comprimento de onda e energias correspondentes ao espectro das radiações electromagnéticas mais utilizadas, são apresentadas no quadro 4.1:

Quadro 4.1 - Comprimentos de onda e energias da radiação electromagnética ionizante.

Radiação cósmica	$< 10^{-11}$ cm	$> 12,4$ MeV
Radiação $\gamma$	$10^{-8} - 10^{-11}$ cm	12,4 keV - 12,4 MeV
Raios X	$10^{-7} - 10^{-11}$ cm	1,24 keV - 12,4 MeV
Raios U.V.	$4 \times 10^{-5} - 1,4 \times 10^{-6}$ cm	3,1 - 88,7 eV

Os raios U.V. (ultravioleta), de menor comprimento de onda, possuem já energia suficiente para excitar e ionizar átomos e moléculas nas estruturas biológicas. Os comprimentos de onda que correspondem às energias dos fotões que indicámos como definindo um intervalo de valores típicos de energias de ionização das moléculas orgânicas (ou seja, de 11 a 14 eV) são, através da relação

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{E} \\ &= 6,627 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10} \times (11 \times 1,6 \times 10^{-12})^{-1} \\ &= 6,97 \times 10^{-5} \text{ cm} \end{aligned}$$

para os 11 eV e  $8,87 \times 10^{-5}$  cm para os 14 eV. Como se vê no quadro 4.1, o último destes valores situa-se no intervalo dos comprimentos de onda que correspondem à radiação ultravioleta.

Para fins de diagnóstico com raios X estamos interessados em fotões no intervalo de 20 keV a 150 keV, que são obviamente, radiações ionizantes.

A radiação ionizante liberta energia nos meios materiais, desencadeando processos complexos a nível atómico e molecular. A interacção com os meios biológicos é particularmente importante, pois interessa saber quais os níveis de irradiação susceptíveis de causar danos, saber como usar os efeitos desta interacção para fins terapêuticos e saber quais as doses que, com um risco calculado, os trabalhadores com radiações ionizantes poderão receber.

Só algum tempo depois do início da experiência com radiações ionizantes se definiram grandezas capazes de introduzir quantificação em radioterapia e em protecção. Durante algum tempo a dose em radioterapia foi avaliada utilizando uma reacção biológica como referência, o eritema da pele. A reacção biológica individual é, porém, muito variável e, por outro lado, a energia e o modo como é libertada nos tecidos depende do tipo de radiação e da energia dos fotões, ou partículas, utilizadas. Estas características cedo mostraram a necessidade de definir grandezas, baseadas em critérios físicos, para medir com rigor a energia libertada nos tecidos.

A sucessão dos fenómenos físico-químicos que ocorrem na matéria após absorção de fotões pode ser temporizada com alguma aproximação, como se observa no quadro 4.2, onde a coluna da esquerda se refere aos acontecimentos que tomam lugar após a incidência de radiação e a coluna da direita à ordem de grandeza dos tempos em que estes ocorrem.

Quadro 4.2 – Sequência dos fenómenos na interacção dos fotões com a matéria

Acontecimento	Tempo (seg)
Incidência da radiação	0
Ejecção de electrões secundários (ionização) e excitação de átomos	$10^{-15}$
Formação de radicais iónicos	$10^{-10}$
Formação de radicais livres	$10^{-5}$
Quebras de ligações moleculares	$10^{-10}$ a $10^{-3}$

### 3 - Ionização

As partículas carregadas, assim como os fotões de energia elevada podem actuar sobre os electrões orbitais, produzindo ionização ou simples excitação. Chama-se ionização específica, ou poder ionizante, ao número de pares de iões formados por unidade de comprimento de percurso da partícula ou radiação.

O poder ionizante  $\delta$  é aproximadamente proporcional ao quadrado da carga da partícula e inversamente proporcional à sua velocidade:

$$\delta \propto \frac{Q^2}{v} \quad 4.6$$

Uma outra quantidade, a transferência linear de energia (LET), que se define como a energia cedida ao meio por unidade de percurso da partícula, é também utilizada. Sabendo a energia média necessária para produzir uma ionização, num particular meio, pode saber-se a LET conhecendo o  $\delta$ .

A ionização específica inerente à radiação X é bastante menor do que nas radiações corpusculares. Para iguais energias, a ionização específica da radiação X é cerca de 100 vezes menor do que nas partículas  $\alpha$ .

Quando um fotão interage com a matéria, a colisão pode ocorrer com o núcleo ou com os electrões orbitais. Esta colisão pode também ser elástica, inelástica ou resultar na absorção completa do fotão.

Começemos por estudar as interacções dos fotões X com os electrões orbitais dos átomos do absorvente.

#### 3.1 - Efeito fotoeléctrico

Efeito fotoeléctrico é um processo de interacção entre um fotão de energia  $E_x$  com um electrão orbital, em que o fotão comunica toda a sua energia ao electrão, deixando de existir.

Parte da energia  $E_x$  é gasta para compensar a energia de ligação do electrão, adquirindo o electrão energia cinética  $E_c$  dada por:

$$E_c = E_x - E_\ell$$

com  $E_\ell$  a energia de ligação do electrão no átomo.

Desta expressão depreende-se que, para ocorrer este efeito, é necessário que o fóton tenha energia pelo menos igual à energia de ligação do electrão. O efeito fotoeléctrico ocorre geralmente com os electrões mais fortemente ligados ao átomo, ou seja, das camadas mais internas, K ou L, Fig. 4.9. O átomo atingido fica ionizado e num estado de excitação, sofrendo um rearranjo dos electrões periféricos, com emissão de raios X característicos e/ou electrões por efeito Auger.

A probabilidade de ocorrência do efeito fotoeléctrico aumenta rapidamente com o número atómico do absorvente e decresce drasticamente quando aumenta a energia do fóton. Esta probabilidade é, com certa aproximação, proporcional a  $\left(\frac{Z}{E}\right)^3$ .

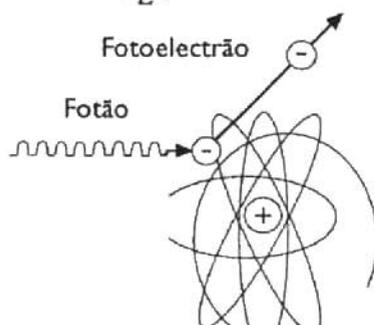


Fig. 4.9 - Representação esquemática do efeito fotoeléctrico.

O fotoelectrão, ou seja, o electrão libertado, torna-se uma partícula ionizante e vai ser um agente de ionização secundária à radiação X.

## 3.2 - Efeito Compton

Efeito Compton é um processo de interacção entre um fóton e um electrão orbital, no qual só parte de energia do primeiro é cedida. Ocorre com electrões frouxamente ligados, das camadas mais periféricas. O fóton perde energia e muda de direcção, Fig. 4.10.

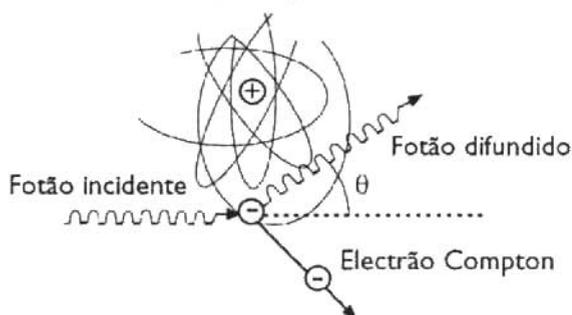


Fig. 4.10 - Representação esquemática do efeito Compton.

Considerando que a energia e a quantidade de movimento têm de ser conservadas durante a colisão, chega-se à expressão:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad 4.7$$

que relaciona o ângulo entre as direcções inicial e final do fóton com o aumento do seu comprimento de onda. A quantidade  $\frac{h}{m_0 c}$ , em que  $m_0$  é a massa do electrão em repouso, é designada por comprimento de onda de Compton do electrão. O valor desta constante é 0,023 Å, pelo que a expressão se pode escrever

$$\lambda' - \lambda = 0,023 (1 - \cos \theta) \text{ \AA}$$

A probabilidade de ocorrência deste efeito é proporcional a  $\frac{Z}{E}$ . O electrão libertado constitui, portanto, uma partícula ionizante secundária.

### 3.3 - Dispersão de Rayleigh-Thomson

Se a interacção entre o fóton e o electrão periférico é insuficiente para produzir ionização ou excitação do átomo, a colisão é elástica. O fóton sofre uma ligeira mudança de direcção sem perda de energia. Esta dispersão só se manifesta para baixas energias.

Consideremos agora as interacções do fóton com o núcleo atómico.

### 3.4 - Efeito de produção de pares

Para energias elevadas, de valor superior a 1,022 MeV, quando o fóton fica sujeito ao campo eléctrico intenso que existe nas proximidades de um núcleo, pode ocorrer um processo designado por materialização da energia, sendo criado um electrão e um positrão (ou antielectrão), Fig. 4.11.

O excesso de energia que o fóton possuía em relação a 1,022 MeV (energia equivalente a 2 vezes a massa do electrão em repouso) aparece na forma de energia cinética daquelas partículas.

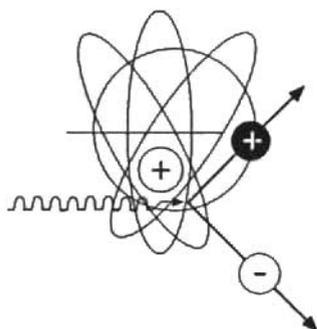


Fig. 4.11 - Efeito de produção de pares.

Sendo  $E_x$  a energia do fóton vem

$$E_x = h\nu = 2m_0c^2 + T_{e^-} + T_{e^+}$$

onde  $T_{e^-}$  e  $T_{e^+}$  são as energias cinéticas do electrão e do positrão.

Estes são, então, partículas ionizantes secundárias, do mesmo modo que o fotoelectrão ou o electrão Compton. A energia cinética que possuem quando produzidas será parcialmente utilizada a produzir ionizações.

Quando o electrão tiver perdido praticamente toda a sua energia cinética, combina-se com um átomo ionizado do meio.

O positrão, após ter perdido a quase totalidade da sua energia cinética, fica em equilíbrio térmico com o meio, ocorrendo o processo de aniquilação. Neste processo, toda a massa do positrão (anti-electrão) e dum electrão é convertida em radiação. O processo mais usual em materiais é a aniquilação com produção de dois fotões (cada um com  $\sim 0,511$  MeV) emitidos em direcções aproximadamente opostas.

A probabilidade de ocorrência do efeito de produção de pares é aproximadamente proporcional a  $Z^2(E-1,022)$ , com E em MeV. Aumenta pois com o quadrado do número atómico do absorvente e com a energia do fotão.

### 3.5 - Absorção da radiação X pela matéria

Quando a radiação passa através de matéria, sofre absorção ao interagir com os átomos do meio. Esta interacção deve-se aos já estudados efeito fotoeléctrico, efeito Compton e, para energias maiores que 1,022 MeV, ao efeito de produção de pares.

O resultado é um decréscimo na intensidade da radiação incidente, à medida que aumenta a distância percorrida no material.

Consideremos um feixe monoenergético de raios paralelos com intensidade  $I_0$ , incidindo sobre uma camada absorvente de espessura  $x$ . A intensidade do feixe emergente que atravessa essa espessura vem dada por:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad 4.8$$

A intensidade é, pois, uma função exponencial da distância. A constante  $\mu$ , designada por coeficiente de absorção linear, depende do meio e da energia dos fotões incidentes, Fig. 4.12.

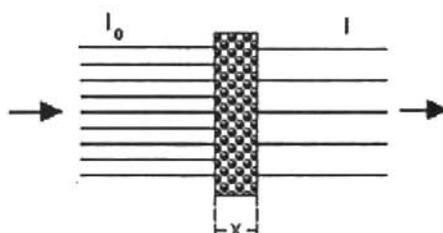


Fig. 4.12 - Absorção de um feixe homogêneo de raios paralelos.

A expressão anterior resulta da integração de uma equação diferencial, que se obtém ao considerar que a variação  $dI$  da intensidade do feixe é proporcional à espessura  $dx$  atravessada e à intensidade  $I$  do feixe incidente, ou seja,

$$\frac{dI}{dx} = -\mu I$$

que nos diz que a intensidade que é absorvida por unidade de comprimento do absorvente é proporcional à própria intensidade.

O coeficiente

$$\mu = -\frac{\frac{dI}{dx}}{I}$$

representa, portanto, a fracção da intensidade do feixe que é perdida por unidade de comprimento do meio absorvente.

Um conceito muito útil no estudo da qualidade de um feixe de radiação X ou de raios  $\gamma$  é o da camada semi-redutora ou espessura de semi-absorção. Define-se como espessura de um dado absorvente, necessária para reduzir a metade, a intensidade de um feixe incidente de radiação  $\gamma$  ou X. Esta espessura ( $x_{1/2}$ ) que os anglo-saxões designam por H.V.L. (half-value layer) e os franceses por C.D.A. (couche de demi-absorption), pode facilmente relacionar-se com  $\mu$ . Assim, para

$$x = x_{1/2}$$

vem

$$I = I_0/2$$

c

$$1/2 = e^{-\mu \times 1/2}$$

donde se tira que

$$\mu = \frac{0,693}{x_{1/2}} \quad 4.9$$

O coeficiente de absorção  $\mu$  é a soma de 3 coeficientes

$$\mu = \tau + \sigma + \kappa$$

Com:

$\tau$  - coeficiente de absorção devido ao efeito fotoeléctrico

$\sigma$  - coeficiente de absorção devido ao efeito Compton

$\kappa$  - coeficiente de absorção devido ao efeito de produção de pares.

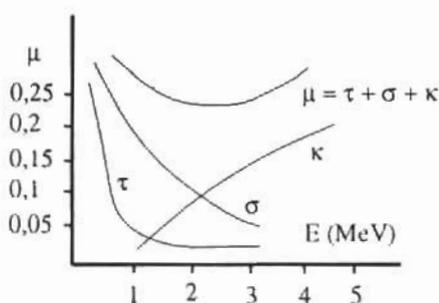


Fig. 4.13 - Coeficiente de absorção linear total e devido aos efeitos fotoeléctrico, Compton e produção de pares.

O coeficiente  $\sigma$  só contabiliza a energia dos fótons com ângulos de dispersão tais que permitam atingir o volume do detector.

Como a importância dos diferentes efeitos depende da energia da radiação X e do número atômico do absorvente, o coeficiente total  $\mu$  varia com a energia dos fótons X, como se pode ver na Fig. 4.13, referente à absorção em alumínio.

#### 4 - Efeitos químicos e biológicos das radiações ionizantes

As interações físicas dos diversos tipos de radiação com a matéria são, na substância viva, o primeiro estágio de uma série de fenômenos que conduzem a alterações biológicas, cuja manifestação pode ocorrer muito tempo depois. A radiação cede energia ao meio, desencadeando-se fenômenos físicos, químicos e biológicos que posteriormente irão traduzir-se nessas alterações. A parte da biologia que estuda essa cadeia de fenômenos, desde a interação física até às suas consequências extremas, chama-se Radiobiologia. É um ramo novo dentro da biologia, com conhecimentos ainda dispersos, sobretudo dos processos intermediários da cadeia. Devido à sua complexidade, não se conhecem ainda com pormenor muitos dos fenômenos físico-químicos desencadeados nas moléculas constituintes das células dos seres vivos após a irradiação. A desproporção entre a energia cedida e as consequências biológicas realça esta complexidade. Realmente, a energia cedida a um ser vivo quando sujeito a uma irradiação com consequências mortais, se fosse transformada em calor, não elevaria a temperatura do corpo do animal senão de alguns milésimos de grau. A energia que é cedida na irradiação, embora pequena, tem notáveis consequências, pois é libertada a nível molecular.

##### 4.1 - Grandezas e unidades usadas em dosimetria das radiações

Quando um feixe de radiação X atravessa a matéria, três tipos de informações físicas têm interesse:

- 1 - a distribuição espectral da energia;
- 2 - a intensidade da radiação (ou alternativamente o fluxo de partículas);
- 3 - a quantidade de energia que é libertada por unidade de massa em cada ponto do material irradiado.

A medida da acção ionizante da radiação no ar, que foi utilizada nos primórdios da radiologia, pode ser utilizada na determinação das duas últimas quantidades acima referidas.

A grandeza que inicialmente exprimiu a capacidade da radiação X ou  $\gamma$  produzir ionização no ar é a dose exposição ou simplesmente exposição. A unidade de dose exposição é o roentgen (R) que se define como sendo a exposição produzida por uma quantidade de raios X ou  $\gamma$  que, actuando sobre 0,001293 g de ar, liberta, por ionização primária ou secundária, iões de ambos os sinais qte transportam uma carga total de uma unidade electrostática C.G.S. de carga. A massa  $m=0,001293$  g é a massa de  $1\text{ cm}^3$  de ar em condições P.T.N. (condições normais de pressão e temperatura).

Na definição de roentgen, entra-se em consideração com todos os iões secundários, produzidos fora e dentro do volume de  $1\text{ cm}^3$  de ar, Fig. 4.14. Só as interações primárias é que ocorrem dentro do referido volume.

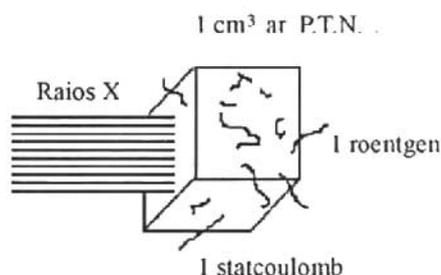


Fig. 4.14 - Definição de roentgen.

Como a carga do electrão é de  $4,8 \times 10^{-10}$  U.Es.C.G.S.Q (ou statcoulomb), o número de iões, com uma dose exposição de 1 roentgen é

$$\frac{1}{4,8 \times 10^{-10}} = 2,1 \times 10^9 \text{ pares de iões}$$

A energia média necessária para se produzir uma ionização no ar é de 34 eV, pelo que, para a dose de 1 R, a energia cedida ao ar vem

$$\begin{aligned} E(R) &= 2,1 \times 10^9 \times 34 \times 1,6 \times 10^{-12} \text{ erg} \\ &= 1,14 \times 10^1 \text{ erg} \end{aligned}$$

A energia libertada por grama de ar é

$$\frac{E(r)}{0,001293} = 88 \text{ erg / g}$$

A exposição de 1 roentgen de raios X ou  $\gamma$ , incidindo sobre tecido biológico, vai aí libertar, por grama de tecido, uma energia maior do que a libertada no ar, pois o número de pares de iões produzidos é maior.

A energia libertada num tecido para uma dose de roentgen é de 98 ergs por grama, para a radiação X ou  $\gamma$ .

A definição de dose exposição foi recentemente alterada. Modernamente define-se como a carga eléctrica total produzida por radiação X ou  $\gamma$ , por unidade de massa de ar, em condições P.T.N., resultante de ionizações produzidas por electrões secundários libertados no interior de um elemento de ar de massa  $\Delta m$ , nas vizinhanças de um ponto P, ou seja, a exposição é

$$X = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\sum Q_i}{\Delta m}$$

onde  $Q_i$  é a carga total resultante de uma interacção no interior de  $\Delta m$ .

As condições da interacção são idênticas às consideradas na definição inicial mas agora a carga é referida à unidade de massa. A nova unidade de dose exposição também chamada de unidade X é igual a um Coulomb por kg de ar.

O efeito biológico da radiação depende da energia libertada no tecido e, por isso, foi criada uma grandeza que exprime directamente a energia localmente absorvida. É a dose absorvida, que se define, como a energia total absorvida por unidade de massa nas vizinhanças de um ponto P, para qualquer radiação ionizante e qualquer material irradiado.

$$X = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\sum E_i}{\Delta m}$$

A unidade de dose absorvida é o Gray (Gy);  $1 \text{ Gy} = 1 \text{ Joule/kg}$ .

A unidade inicial de dose absorvida foi o rad, que equivale à libertação de 100 ergs por grama de material sujeito à irradiação,

$$1 \text{ Gy} = 100 \text{ rad}$$

Outras grandezas correntemente utilizadas em dosimetria das radiações são:

**Velocidade de dose exposição** - é a dose exposição por unidade de tempo e exprime-se em  $\text{C kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,  $\text{R s}^{-1}$ ,  $\text{R min}^{-1}$ ,  $\text{R h}^{-1}$ , etc.

**Velocidade de dose absorvida** - é a dose absorvida por unidade de tempo.

**Dose integral** - é uma grandeza utilizada em radioterapia e refere-se, não à energia libertada por unidade de massa em determinado ponto, mas à energia total absorvida em todo ou parte do meio irradiado. Exprime-se em: g R, g rad, g erg ou g J.

#### 4.2 - Aspectos químicos e biológicos da acção das radiações ionizantes

Na substância viva, as interacções físicas dos diversos tipos de radiação com a matéria são o primeiro estágio de uma série de fenómenos que conduzem a alterações biológicas, cuja manifestação pode ocorrer muito tempo depois da interacção.

A radiação cede energia aos átomos do meio, desencadeando uma sequência de fenómenos físicos, químicos e biológicos complexos, com consequências diversas, que incluem lesões celulares e tecidulares com possíveis manifestações patológicas. A parte da biologia que estuda essa cadeia de fenómenos, desde a interacção física inicial até às consequências biológicas extremas, chama-se radiobiologia. É um ramo peculiar da biologia, cuja aquisição de informação, sobretudo nos processos iniciais e intermediários da cadeia, se reveste de grande dificuldade. Devido à sua

complexidade, não se conhecem ainda, em pormenor, alguns dos fenómenos físico-químicos desencadeados nas moléculas biológicas, após a irradiação.

A desproporção entre a energia transferida e as consequências biológicas realça esta complexidade. Quando radiação ionizante produz uma irradiação mortal num animal, a totalidade da energia cedida, se totalmente transformada em calor, elevaria a temperatura do animal simplesmente de alguns milésimos de grau.

### 5 - Fenómenos físico-químicos elementares durante a irradiação do material biológico

Imediatamente após a acção da radiação ionizante sobre as moléculas constituintes das estruturas biológicas, ocorre um conjunto complexo de fenómenos que se seguem à ionização ou à excitação.

A ionização resultante da interacção da radiação sobre a matéria (ionização física) produz iões altamente instáveis. É um processo radicalmente distinto da ionização química, que ocorre como resultado da tendência espontânea dos átomos completarem a última camada electrónica, por perda ou cedência de electrões e que leva à formação de iões estáveis.

Na ionização física, num intervalo de tempo da ordem dos  $10^{-17}$  a  $10^{-15}$  s, o átomo atingido transforma-se num ião com um estado energético superior ao fundamental do átomo, por aumento da sua energia potencial. Só este tipo de ionização, que produz iões com valências livres, pode desencadear os fenómenos físico-químicos elementares que descreveremos adiante.

Qualquer molécula de uma célula ou de um fluido biológico, com um dos seus átomos atingido pela acção da radiação, pode transformar-se numa molécula excitada, ou num ião, com alta instabilidade e grande reactividade química. As moléculas nestes estados, que apresentam tempos de vida muito curtos, tendem a adquirir a estabilidade à custa de vários processos, como alterações da própria estrutura molecular, reacções químicas com moléculas ou radicais do meio ou, ainda, captura de electrões livres.

Citemos algumas possibilidades concretas referentes ao comportamento destes iões e estados excitados:

#### a) Dissociação espontânea

Consideremos o caso do butano. Irradiando este gás, ocorre a formação do ião radical  $C_4H_{10}^+$



Um ião radical<sup>4</sup> livre pode sofrer espontaneamente dissociação, em geral, por diversos processos.

No caso da reacção da Eq. 4.10, o ião radical cinde-se espontaneamente de acordo com a Eq. 4.11

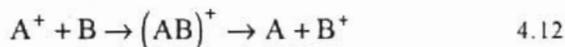


Qualquer dos produtos de reacção formados poderá originar novas reacções.

O radical  $CH_3^+$  possui um electrão livre e é muito reactivo. O ião  $C_3H_5^+$  é também instável.

#### b) Transferência de carga

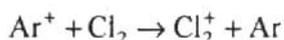
Considere-se uma molécula **A** que é transformada no ião  $A^+$  por ionização. Se no meio onde se encontram as moléculas **A**, existem outras, **B**, com potencial de ionização menor, pode ocorrer a reacção



<sup>4</sup> Chama-se radical, a um átomo ou agrupamento de átomos em que existe uma camada electrónica não saturada, ou um electrão não emparelhado - uma valência livre.

Após formação de um ião complexo,  $(AB)^+$ , a molécula A retira um electrão de B, ficando esta ionizada.

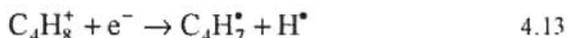
O fenómeno de autoextinção num tubo de Geiger-Müller (G.M.) é baseado nesta reacção. Na mistura gasosa de um tubo G.M. de argon/cloro (2%), são, com grande probabilidade, os átomos de argon os atingidos. No seu percurso para o cátodo ocorre transferência de carga



pois a molécula de  $\text{Cl}_2$  tem menor potencial de ionização. Da colisão dos iões cloro com o cátodo, não resulta emissão de radiação que possa induzir a descarga contínua no tubo.

### c) Reacção com iões negativos

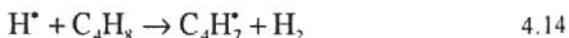
Um ião positivo obtido por ionização física pode capturar um electrão livre ou reagir com um ião negativo. Em qualquer dos casos, a quantidade de energia disponível para o processo de neutralização (que é da ordem de grandeza da energia necessária para produzir a ionização), é, em geral, suficiente para provocar a dissociação imediata da molécula resultante. Formam-se, assim, dois radicais livres, não carregados, que vão originar novas reacções. É o exemplo do buteno ionizado quando reage com um electrão.




---

 250

O radical  $\text{H}^*$  pode reagir com outra molécula, por exemplo:



Outras reacções possíveis impedem a propagação da reacção em cadeia.

**d) Reacção com moléculas**

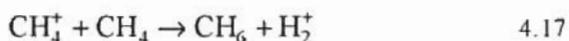
O ião positivo exerce uma força de atracção electrostática sobre as moléculas vizinhas que, embora neutras, se encontram polarizadas. Este facto aumenta a probabilidade da reacção dos iões positivos com moléculas não carregadas.

Estas reacções, cuja evidenciação é recente, podem ter bastante importância nos sistemas orgânicos.

Exemplos:



ou



Quando na interacção da radiação com um átomo do meio ocorre a formação de um ião positivo, cujas reacções temos estado a estudar, há também a libertação dum electrão. Esse electrão poderá ser suficientemente energético para actuar como nova partícula ionizante no meio.

Poderá ocorrer também uma reacção do tipo da última, que observámos, quando o electrão é capturado por uma molécula. O ião negativo que se forma sofrerá dissociação ou irá entrar em nova reacção com moléculas vizinhas.

**6 - Excitação**

Já referimos que a energia necessária para, no ar, produzir uma ionização é, em média, de 34 eV. Este valor obtém-se dividindo a energia que a radiação ionizante liberta no ar pelo número de ionizações produzidas.

Para a água e tecido mole, a energia média de ionização é também, aproximadamente, 34 eV. Ora, sabe-se que para se ionizar uma molécula de H<sub>2</sub>O são necessários só 13 eV. Deste modo, mais de metade da energia

dissipada é utilizada em excitações, isto é, vai originar a passagem de electrões para níveis mais energéticos mas ainda sob a acção do núcleo.

Quando numa molécula um átomo fica excitado, as distâncias inter-nucleares não variam de modo apreciável, mas o facto de um electrão passar do estado fundamental para um nível de maior energia, modifica a configuração electrónica da molécula. Esta modificação pode, em certos casos, fragilizar as ligações e ter efeitos consideráveis sobre as moléculas.

Noutros casos, a excitação é a origem de reacções químicas, nas quais a energia de excitação do átomo é total ou parcialmente utilizada.

Numa molécula, ao dar-se o reajustamento dos níveis electrónicos, não ocorre, em regra, a emissão de fotões, sendo a energia absorvida e transformada em energia de vibração e rotação moleculares que vai, ou distribuir-se pelas diversas ligações interatómicas e originar a fractura da molécula, Eq. 4.18, ou ser comunicada a outra molécula produzindo a sua dissociação, Eq. 4.19:



Quando a energia de excitação da molécula A é superior à diferença entre as energias de ligação de AB e BC pode ocorrer a reacção da Eq. 4.20.



Poderá ocorrer uma simples transferência de energia de excitação

---

252



Se a energia da excitação de A\* é superior ao potencial de ionização de B, poderá ocorrer a ionização desta



Em resumo, a excitação molecular produzida pela radiação ionizante ocorre com maior probabilidade que a ionização e pode desencadear processos algo semelhantes aos que decorrem da ionização.

## 7 - Modos de acção elementares

Na perspectiva de um modelo de agressão celular pela radiação ionizante, as células dos mamíferos podem considerar-se como suspensões aquosas diluídas. Deste modo, as lesões celulares podem ser determinadas por dois mecanismos distintos: uma acção directa da radiação ionizante sobre moléculas, grupos de moléculas ou estruturas intracelulares de grande importância biológica; uma acção indirecta, ligada aos fenómenos físico-químicos que são consequência mais ou menos imediata da acção da radiação ionizante sobre outras moléculas do meio intra e extra celular, particularmente a água.

Os efeitos da radiação, directos ou indirectos, são resultantes de processos alcatórios devendo, em princípio, poder ser analisados pelas leis da probabilidade.

### a) Acção directa

Diz respeito aos efeitos que ocorrem quando a radiação atinge directamente moléculas ou microestruturas de importância vital para as células. O número de moléculas atingido, relativamente ao total existente na célula, é, em geral, muito pequeno, mas os seus efeitos poderão ser importantes, tratando-se de enzimas ou moléculas constituintes de genes ou cromossomas.

É sabido, por exemplo, que para alguns enzimas, o número de moléculas numa célula é pequeno, limitado a algumas unidades, sendo, no entanto, decisiva a sua acção. A inactivação de moléculas do enzima poderá afectar irremediavelmente a função em que estas participam. A probabilidade de uma determinada molécula ou estrutura celular ser atingida pela radiação, aumenta com o seu volume.

O ácido ribonucleico, com massa molecular de 6 a  $8 \times 10^6$  u.m.a. e um papel primordial na vida celular é, assim, um alvo crítico. A teoria do alvo constitui o desenvolvimento matemático dos efeitos da acção directa, com certa base experimental, mas sem a preocupação de considerar em detalhe os mecanismos de destruição celular. Segundo esta teoria, a frequência de aparecimento de certos fenómenos radiobiológicos é função da probabilidade de que o acontecimento físico primário tenha ocorrido em determinadas zonas da célula. Cai-se assim na definição de zonas sensíveis na célula, que correspondem, afinal, às estruturas vitais referidas.

A teoria do alvo começou a ter base experimental com Latargé, biólogo francês. Este irradiou bacilos da disenteria em suspensão aquosa suficientemente diluída, para que as interacções celulares fossem desprezáveis. Por colheitas de amostras e observação das alterações, verificou que, diminuindo a intensidade da radiação mas mantendo a sua qualidade, as lesões observadas não eram menos graves mas sim em menor número.

O que acabámos de referir aplica-se a lesões que ocorrem devido a um simples impacto. Contudo, há efeitos que poderão ocorrer se um segundo fóton colide com uma dada molécula,  $10^{-8}$  a  $10^{-4}$  segundos após o primeiro impacto, e antes da molécula libertar a energia de excitação recebida.

O tratamento estatístico dos resultados experimentais e a sua interpretação sistemática permitem saber qual é a energia mínima necessária para provocar lesões numa dada região sensível e conhecer também o seu volume. A capacidade das células se multiplicarem por divisão celular é de capital importância em qualquer sistema biológico. A perturbação desta capacidade devido à acção da radiação interessa, fundamentalmente, à radioterapia e à radioprotecção.

Na ausência de radiação, os agentes que limitam a capacidade de divisão celular nas células integras, em meio apropriado, são, de um modo geral, a privação de nutrientes, o aumento da densidade celular e factores regulatórios sistémicos.

A inactivação de entidades biológicas individuais por acção da radiação é um postulado nos modelos desenvolvidos para o estudo dos efeitos da radiação sobre as células. Nestes modelos, devem sobressair as duas possibilidades de interacção da radiação ionizante com moléculas importantes

nas funções celulares: acções directas da radiação e acções indirectas resultantes da intervenção de produtos intermediários.

Para uma mesma fluência da radiação, a probabilidade de uma determinada molécula, ou estrutura, se encontrar no trajecto da radiação e ser afectada por acção directa, aumenta com as dimensões da molécula.

Para radiação de elevado LET, a acção directa é o efeito mais importante. Porém, para qualquer tipo de radiação e, em particular, para os fotões, ocorrem interacções com moléculas de água com produção, quer de radicais, quer de outras estruturas quimicamente activas.

A nível molecular, os efeitos biológicos da radiação, directos e indirectos, são acontecimentos raros, independentes entre si e aleatórios, abrangidos assim pela estatística de Poisson. É de notar que apesar de ser suposto que o DNA é o alvo crítico para os efeitos que implicam alterações na integridade dos processos de divisão celular, não há provas cabais de que seja exclusivamente este tipo de acção o responsável.

Uma célula, cuja integridade na capacidade de se dividir tenha sido afectada, pode dividir-se uma ou mais vezes, até todos os seus descendentes surgirem como incapazes de multiplicação. Importante é a característica de as células irradiadas não se comportarem como lesadas, senão após a primeira divisão celular.

Às células, após irradiação, podem ficar incapazes de divisão, apesar de fisiologicamente funcionais e idênticas às células normais, mantendo-se vivas por longos períodos e, ao tentar iniciar o processo de divisão celular, morrer ou dividir-se, originando formas aberrantes. Podem ainda dividir-se de modo aparentemente normal, até uma ou mais gerações de células filhas estéreis ocorrerem. Podem, finalmente, apresentar um processo de divisão normal ou com pequenas alterações, tais como ciclos com tempos diferentes dos normais.

O tratamento estatístico dos resultados experimentais e a sua interpretação sistemática permitem saber qual é a energia mínima necessária para lesar uma dada região sensível e conhecer o seu volume.

A teoria do alvo assenta em dois postulados: o da natureza estatística da deposição da energia e o da existência de uma relação de um para um, entre o número de lesões iniciadas e o efeito biológico final. Uma dificuldade inerente a estes métodos é relacionar a interacção com uma

alteração física ou química concreta. Embora se saiba hoje que a teoria do alvo não é inteiramente apropriada para explicar o que ocorre num sistema tão complexo como é uma célula, ela é importante nas situações em que os mecanismos de recuperação não modificam, de maneira significativa, os danos iniciais.

### b) Acção indirecta

Além do mecanismo anterior, consideram-se também efeitos indirectos igualmente desencadeadores de alterações moleculares, que ocorrem entre os fenómenos físicos e os biológicos.

A radiação pode actuar sobre o ambiente extracelular, originando radicais activos que podem, por sua vez, actuar sobre células.

A água constitui cerca de 70% da massa dos organismos vivos, podendo atingir mais de 80% nos tecidos jovens e embrionários.

Tem, portanto, interesse relevante considerar os produtos que resultam da acção das radiações ionizantes sobre a água. O processo de formação destas estruturas intermediárias designa-se por radiólise da água.

A reacção



traduz a ionização da molécula da água, sendo a recombinação dos iões obtidos, em geral, muito improvável. Estes iões vão originar novas reacções



enquanto o electrão livre se vai combinar com outra molécula de água.



Os radicais  $\text{H}^*$  e  $\text{OH}^*$  podem difundir e reagir entre si ou ir desencadear reacções de oxi-redução com outras moléculas do meio.

No caso dos radicais reagirem entre si, há as seguintes possibilidades:



possuindo os dois primeiros actividade química.

Resumindo, em torno do percurso de uma partícula na água e cerca de  $10^{-7}$  seg após a sua passagem, encontram-se  $\text{H}^\bullet$ ,  $\text{OH}^\bullet$ ,  $\text{H}_2\text{O}_2$  e  $\text{H}_2$ . As proporções relativas destes produtos intermediários de reacção dependem do LET de radiação.

O que se passa a seguir (de  $10^{-7}$  a  $10^{-13}$  s) depende de numerosos factores, tais como a pureza da água.

Tem interesse especial a presença de oxigénio dissolvido na água. Quando tal sucede, o electrão livre pode reagir com a molécula de  $\text{O}_2$ ,



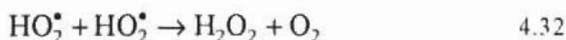
que, reagindo com uma molécula de água dá



Poderá ocorrer também a reacção do radical H com a molécula de  $\text{O}_2$ :



o radical  $\text{HO}_2^\bullet$  pode reagir com outro  $\text{HO}_2^\bullet$  ou com um  $\text{H}^\bullet$



O radical  $\text{HO}_2^\bullet$  é um oxidante menos activo que o  $\text{OH}^\bullet$ , mas pode difundir a distâncias maiores. O aparecimento deste radical e de uma maior quantidade de  $\text{H}_2\text{O}_2$  são as principais consequências da presença de  $\text{O}_2$ .

Outras reacções são possíveis por combinação dos radicais obtidos em presença do oxigénio.

O conjunto dos fenómenos que constituem a acção de potenciação dos efeitos da radiação devida à presença de  $\text{O}_2$  é designado de Efeito Oxigénio.

Podemos analisar os efeitos da radiólise em soluções aquosas. Consideremos uma solução aquosa de moléculas RH e que, por radiólise, surgem na solução os radicais  $\text{H}^\bullet$ ,  $\text{OH}^\bullet$  e  $\text{O}_2\text{H}^\bullet$ .

Poderão ocorrer as reacções seguintes:



ou



Se a concentração de  $\text{O}_2$  no meio for elevada, poderá dar-se uma reacção com o radical  $\text{R}^\bullet$ , com formação de um radical peróxido.



o qual poderá reagir com uma molécula RH



O radical  $\text{R}^\bullet$  pode ir, por sua vez, reagir com  $\text{O}_2$ , originando de novo o radical peróxido, repetindo-se o processo em cadeia.

Outras reacções são possíveis, nomeadamente em presença de oxigénio.

## 8 - Efeitos biológicos das radiações

Quando nos queremos referir a efeitos biológicos, a dose absorvida só ficará caracterizada se introduzirmos um coeficiente relacionado com a qualidade da radiação. A eficiência biológica de uma dada radiação, ou seja, a capacidade que tem de induzir alterações biológicas, tem sido estabelecida em relação à eficiência de uma outra que se toma como padrão – os raios X de 200 keV. Esta escolha deve-se ao facto de haver uma larga experiência na utilização desta radiação em radioterapia, com um consequente conhecimento dos seus efeitos biológicos. Esta radiação serve assim de padrão para uma medida dos efeitos biológicos das radiações ionizantes. Define-se um factor qualidade, de valor unitário para a radiação padrão, do modo que a seguir se descreve:

Se considerarmos um dado material irradiado separadamente por uma dada radiação padrão e administrando, nos dois casos, igual número de rads, ou seja, igual dose absorvida **D**, o factor de qualidade é:

$$Q = \frac{\text{Efeito biol. da rad. considerada}}{\text{Efeito biol. da rad. padrão}} \quad (\mathbf{D} \text{ constante})$$

O efeito biológico terá de ser uma propriedade mensurável como, por exemplo, o número de células mortas ou alteradas.

O **Q** pode ainda ser definido a partir da relação entre as doses absorvidas (em rad), necessárias para se obter determinado efeito biológico (por exemplo morte de 10% das células), usando a radiação padrão e a radiação em estudo; assim:

$$Q = \frac{n^{\circ} \text{ rads rad. padrão } (D_p)}{n^{\circ} \text{ rads rad. considerada } (D)} \quad (\text{Igual efeito biológico})$$

Para uma dada radiação, o **Q** varia, porém, com o efeito biológico considerado. O **Q** foi inicialmente chamado eficiência biológica relativa (R.B.E.).

Tomando como base os efeitos biológicos, podemos considerar uma nova grandeza, o **equivalente de dose H**

$$H = D Q$$

Um equivalente de dose de radiação de qualquer tipo, num dado tecido, produz o mesmo efeito biológico que o mesmo equivalente de dose de raios X de 200 keV. O efeito biológico para um dado equivalente de dose é constante, qualquer que seja a radiação utilizada.

A unidade de equivalente de dose é o Sievert (Sv). Para a radiação padrão (Raios X de 200 keV),  $1 \text{ Sv} = 1 \text{ Gy}$ . Assim, 1 Sv de uma qualquer radiação produz o mesmo efeito biológico que 1 Gy (ou 1 Sv) de raios X de 200 keV. Uma outra unidade de equivalente de dose, hoje obsoleta, é o rem. A dose equivalente de 1 rem de uma qualquer radiação produz o mesmo efeito biológico que 1 rad de raios X de 200 keV.

Sendo assim, a partir da definição de  $Q$ , vem, para qualquer tipo de radiação

$$1 \text{ Sv} = \frac{1 \text{ Gy}}{Q}$$

e também

$$1 \text{ rem} = \frac{1 \text{ rad}}{Q}$$

Para os efeitos que citamos, em que as partículas  $\alpha$  são 10 vezes mais eficientes do que os raios X, o  $Q$  será, de acordo com a definição, igual a 10. Nestas condições, 1 rem é 10 vezes menor do que o rad.

Esta definição foi generalizada, em protecção radiológica, para o caso de um órgão, ou tecido, irradiado por radiações de diversos tipos originando uma outra grandeza, a dose equivalente  $H_T$ . Considerando a dose equivalente num órgão T, vem

$$H_T = \sum_R W_R D_{T,R}$$

que representa a soma das doses absorvidas num órgão ou tecido multiplicadas por factores que ponderam o tipo e energia das diferentes

radiações, sendo:  $D_{TR}$  - Dose devida à radiação  $R$  recebida pelo órgão  $T$  e  $W_R$  - Factor de ponderação da radiação  $R$ .

A dose equivalente de  $1\text{ Sv} = 100\text{ rem}$ .

Outra grandeza da protecção radiológica é a dose efectiva ou eficaz  $E$ , que é a soma das doses equivalentes  $H_T$  resultantes de irradiação interna e externa, ponderadas para todos os tecidos e órgãos através de factores de ponderação  $W_T$ :

$$E = \sum_T W_T H_T$$

A unidade de dose efectiva é o Sievert.

Os fenómenos elementares primários que estudamos, podem desencadear, após tempo mais ou menos longo, alterações que se situam quer ao nível celular, quer ao nível do organismo. Estas alterações podem ser funcionais ou morfológicas. As alterações funcionais caracterizam-se por uma diminuição na actividade da matéria viva: diminuição na secreção de uma glândula, perda da contractilidade muscular, esclerose do tecido conjuntivo, etc. Estas constituem as primeiras reacções do organismo à acção da radiação e surgem geralmente para doses pouco elevadas.

As alterações morfológicas atingem a estrutura íntima da substância viva. Ao nível celular, o protoplasma, o núcleo ou os diversos "organitos" banhados no citoplasma, podem ser lesados. Estas alterações estruturais podem ser mais ou menos graves; em geral, deixam traços e podem provocar, por inibição de certas funções essenciais da célula, a morte imediata ou após um prazo mais ou menos longo. As funções metabólicas podem ser modificadas ao ponto de a célula se tornar incapaz de efectuar as sínteses que são necessárias à sua vida própria, originando, posteriormente, a sua morte. Uma agressão menos severa destas mesmas funções pode cancelar os processos de síntese que procedem à divisão celular, fazendo-a perder toda a sua capacidade de reprodução.

À escala do organismo, as alterações que se manifestam são o somatório das lesões elementares, bem como das modificações que surgem ao nível das substâncias intercelulares.

**a) Características fundamentais dos efeitos biológicos das radiações**

1) São de natureza extremamente variável, segundo o órgão atingido, a dose administrada, as condições de irradiação, etc. - são essencialmente polimorfas.

2) Podem ser provocadas por outras causas, além das radiações - são efeitos não específicos.

Embora certos critérios etiológicos e estatísticos permitam, por vezes, estabelecer uma relação de causa e efeito entre uma irradiação e determinadas lesões, muitas vezes essa relação não pode ser estabelecida.

Esta não especificidade é aplicável, quer se trate de efeitos somáticos ou de efeitos genéticos.

3) Decorre sempre um certo tempo de latência entre o momento da irradiação e o do aparecimento das lesões.

A duração do tempo de latência é variável, mas é sempre superior às ínfimas frações de segundo, no decurso das quais se desenrolam os fenómenos físicos e bioquímicos, imediatos à irradiação. Quando a acção da radiação é maciça e instantânea, este tempo de latência pode reduzir-se a alguns minutos ou algumas horas, no que respeita ao aparecimento dos primeiros efeitos, podendo advir a morte em alguns dias ou semanas.

As lesões que seguem as irradiações de intensidade média e as irradiações crónicas, apresentam geralmente tempos de latência longos: vários meses para a anemia; anos para a indução de afecções cancerosas.

As estatísticas que se referem aos irradiados de Hiroshima e Nagasaki mostram uma frequência anormal de leucemias entre o sexto e o décimo segundo anos após as explosões atómicas.

4) Em certos casos os efeitos biológicos apresentam carácter de reversibilidade.

As modificações funcionais podem ser temporárias, seguindo-se uma restauração mais ou menos total. A nível celular, este poder de restauração parece relacionado com a faculdade da célula poder reformar

certos edifícios moleculares que entram na sua estrutura. Outras estruturas são, segundo parece, demasiado complexas e especializadas para que a célula possa resintetizá-las e o seu dano determina efeitos irreversíveis.

Deste modo, a restauração intervém em todas as escalas, havendo lesões susceptíveis de restauração parcial, outras de restauração total e ainda outras, como a necrose e as afecções cancerosas, totalmente irreversíveis.

5) A maior parte das lesões, devidas à acção das radiações, afectam uma célula ou um organismo mas não se transmitem às células ou organismos que deles derivam por divisão ou reprodução assexuada.

É necessário, portanto, destacar e considerar como particularmente graves, certos danos da estrutura celular que são transmissíveis de célula a célula e se manifestam pela anarquia da função reprodutora (afecções cancerosas), assim como as lesões do património hereditário, transportado pelas células reprodutoras, que propagam as anomalias na descendência do ser irradiado (efeitos genéticos).

6) Quando se estudam as relações entre doses de radiação e efeitos biológicos, constata-se que certos efeitos, para aparecerem, exigem que a dose seja superior a um certo limiar (dose limiar).

Um eritema só se manifesta na palma da mão a partir de doses, naturalmente variáveis de indivíduo para indivíduo, mas que se situam sempre acima de 300 rem. A irradiação total do organismo só pode provocar a morte, com uma probabilidade a tomar em consideração, para doses superiores a 300 rem. Para provocar uma anemia por diminuição do número de glóbulos vermelhos do sangue é necessário uma dose superior a 100 rem.

A existência de um limiar não significa que não haja acção nociva, quando a dose seja inferior a esse limiar.

Mesmo para doses muito pequenas, há sempre fenómenos de ionização, com as suas consequências químicas e biológicas, mas os efeitos biológicos não se manifestam, ou porque a restauração no próprio seio da célula actua com bastante intensidade para que nenhum dano na vida

celular ocorra, ou porque as células que morrem são substituídas por células jovens formadas pelos tecidos reprodutores.

Há outros efeitos, porém, para os quais, face aos dados experimentais, se pode levantar a questão da não existência de limiar.

É difícil obter ensinamentos válidos, quando se experimenta com doses muito pequenas, porque muitas outras causas podem provocar efeitos idênticos aos da radiação, com uma frequência que é da mesma ordem de grandeza. Nestas condições, a estatística dificilmente conduz a resultados significativos.

Quando é possível estabelecer-se a curva que relaciona a frequência de aparecimento de um dado efeito com a dose, para um domínio de valores suficientemente grande, pode, em certos casos, obter-se por extrapolação indicações sobre a existência ou não de limiar. Quando a curva é simples (uma recta, por exemplo), o facto do seu prolongamento cortar o eixo das abcissas (dose) na origem ou num ponto de valor positivo, torna, no primeiro caso, mais provável a ausência de limiar e, no segundo caso, a sua existência.

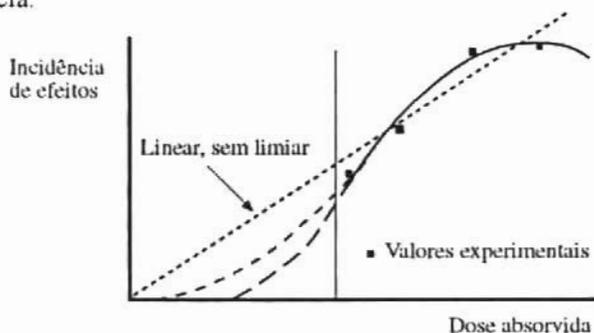


Fig. 4.15 - Curvas efeito dose.

Admite-se actualmente que os efeitos genéticos se produzem sem limiar.

As opiniões são muito mais cautelosas no que respeita à indução de leucemias ou de cancros pelas radiações, porque nenhuma observação permite actualmente afirmar com segurança suficiente a existência ou não de um limiar para esses efeitos.

É do mais alto interesse saber-se se dada lesão pode ser ou não devida à radiação abaixo de uma certa dose. Quando se possui este conhecimento, poderá ser estabelecida uma relação de causa efeito para doses superiores ao limiar. Acidentes cutâneos, por exemplo, não podem ser devidos a uma dose de 20 rem administrados à pele. Quando, pelo contrário, a dose administrada seja superior a este limiar e nenhuma outra causa possa ser razoavelmente suposta, será lógico atribuir a lesão à ação das radiações ionizantes.

É necessário notar também que os efeitos que se supõem ser sem limiar, são afecções que aparecem com uma certa frequência natural em toda a população que não é atingida por nenhuma irradiação artificial. Se todos os elementos de uma população são irradiados com uma certa dose e se verifica que a frequência de aparecimento do efeito aumenta, com significado estatístico, pode concluir-se que, para um indivíduo irradiado, a probabilidade de ocorrência do efeito aumenta, mas é difícil estabelecer, no plano individual, uma relação de causa e efeito e afirmar, por exemplo, que a afecção de que sofre seja devida à radiação. As radiações podem atingir as células que constituem o nosso corpo individualmente, ou soma, ou as células que são destinadas à reprodução. No primeiro caso, desencadeiam danos que constituem os efeitos somáticos, no segundo, as lesões só se manifestam na descendência do indivíduo irradiado, constituindo os efeitos genéticos.

Os efeitos somáticos podem revestir-se de toda a espécie de formas porque as radiações podem atingir todos os órgãos e todas as funções do corpo. Há, contudo, alguns dentre eles que apresentam um maior interesse, devido à importância e à radiosensibilidade dos tecidos lesados.

No sangue circulante só os linfócitos são sensíveis à radiação. Os órgãos sanguiformadores, pelo contrário, são facilmente lesáveis, quer por destruição, quer por dano nas estruturas que regem o ritmo da divisão celular.

No primeiro caso, segue-se uma diminuição temporária ou definitiva da formação de glóbulos, que deveriam chegar regularmente ao sangue circulante, originando anemia e leucopenia. No caso de lesão de certas estruturas, pode surgir proliferação anormal de glóbulos brancos, ou seja,

leucemia, que pode ser comparada a um cancro dos órgãos hemato-poiéticos.

Ao nível da pele, as radiações podem provocar simples modificações funcionais, tais como o eritema.

Quando surgem modificações estruturais, a epiderme ou a derme poderão ser atingidas, como no caso das queimaduras térmicas. Em geral estas lesões só se manifestam depois de um tempo de latência de alguns dias a semanas.

Muitas vezes, surgem necroses comparáveis às que aparecem nas queimaduras por ácidos e a cicatrização só é possível após eliminação dos tecidos mortos. Podem ocorrer lesões cancerosas nas superfícies cutâneas anteriormente irradiadas. Os tempos de latência são sempre muito longos, geralmente dezenas de anos.

As mucosas e o pulmão constituem, juntamente com as gónadas e embrião, outros tecidos de grande radiosensibilidade.

#### **b) Utilização terapêutica das radiações**

Para determinado tecido de um dado indivíduo, o efeito biológico e radioterapêutico é tanto maior, quanto maior for a dose absorvida. Por outro lado, a mesma dose absorvida por tecidos diferentes do mesmo indivíduo ou por tecidos correspondentes de indivíduos diferentes, pode originar efeitos desiguais, traduzindo uma diferença de radiosensibilidade.

Sabe-se hoje que as radiações ionizantes agem com maior intensidade sobre os tecidos se:

- a) A sua actividade reprodutora for maior;
- b) O seu futuro cariocinético, índice de divisão celular, for mais provável;
- c) A sua morfologia e função estiverem menos definitivamente fixadas;

Estas são as leis de Bergonié-Tribondeau de radiosensibilidade, que constituem, afinal, as regras que determinam o emprego terapêutico das

radiações. Assim, conforme as referidas leis, os tecidos do organismo mais afectados pelas radiações são: a base do epitélio de revestimento, o tecido hematopoiético, os tecidos fundamentais das gónadas e do embrião e, no campo da patologia, o tecido canceroso.

## 9 - Raios X dentário

Os raios X são de grande importância em medicina dentária, pois são um apoio de relevo para o diagnóstico da patologia dentária nos estágios iniciais e para o conhecimento da estrutura interna dos dentes, bem como da sua disposição e implantação.

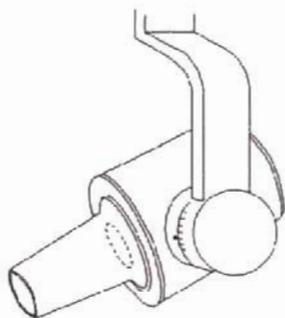


Fig. 4.16 - Aparelho de raios X dentários com cone de limitação do campo.

Em radiologia dentária, a espessura de tecido envolvente e a distância foco-filme são pequenas, pelo que as máquinas utilizadas nas radiografias intraorais convencionais são de baixa potência, com tensões anódicas fixas de cerca de 50 kV<sub>p</sub> e correntes anódicas de cerca de 7 mA. Nestas radiografias, um pequeno filme protegido da luz, com dimensões que podem ser de 2,2×3,5; 2,4×4; 3,1×4 ou 2,7×5,4 cm<sup>2</sup>, é introduzido na cavidade bucal em contacto com a zona a radiografar. A ampola, com um dispositivo cónico de limitação do feixe para diminuir a dose no paciente e trabalhadores, é colocada externamente a alguns centímetros da face do paciente e com o feixe dirigido para o local da película.

**a) Radiografia intraoral**

Há duas técnicas de radiografia intraoral:

Técnica da bissecção – o raio central **C** do feixe de raios X é dirigido ao vértice **V** do dente, perpendicularmente à bissetriz, **B**, do ângulo formado pelo eixo maior do dente **L** e a película de raios X, **F** (Fig. 4.17).

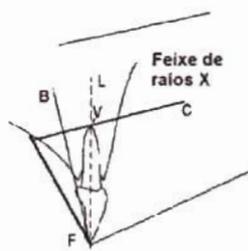


Fig. 4.17 - Técnica da bissecção.

Técnica do paralelismo ou do ângulo recto – o filme e o eixo maior do dente são alinhados paralelamente e de modo a que o raio central passe pelo ponto médio do dente, perpendicularmente ao eixo do dente e ao filme (Fig. 4.18). A distorção da imagem em relação ao objecto é moderada mas há sempre que contar com a ampliação que varia com a relação entre as distâncias foco-filme e objecto-filme.

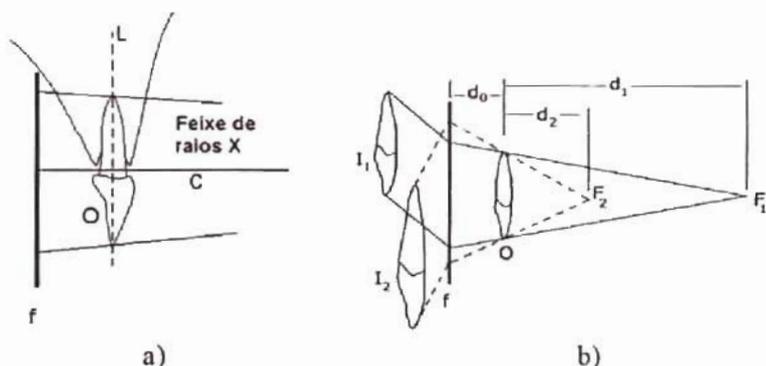


Fig. 4.18 - Técnica do paralelismo ou do ângulo recto: a) Aspectos gerais; b) Ampliação para diferentes relações entre a distância foco-filme e objecto-filme.

A técnica do paralelismo necessita de um dispositivo para suporte e colocação do filme (Fig. 4.19).

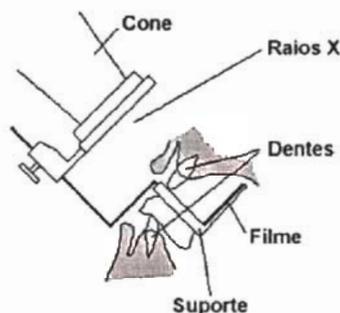


Fig. 4.19 - Dispositivo para suporte e colocação do filme.

A técnica da bissecção obriga o paciente a segurar o filme com um dedo, colocado na boca, produzindo a irradiação da mão.

A técnica da bissecção produz maior distorção da imagem do que a do paralelismo.

#### b) Radiografia panorâmica

Também incorrectamente designadas de ortopantomografia, visto não se tratar de uma tomografia mas de uma radiografia com movimento de rotação, obtendo-se projecções e não cortes.

Nas radiografias intraorais, a fonte de raios X e a película não se movem durante o disparo. Pelo contrário, nas radiografias panorâmicas, quer o filme, quer a ampola rodam em torno do paciente para evidenciar planos da anatomia dentária. O resultado final são imagens radiológicas dos maxilares com as partes curvas planificadas, mostrando os dentes e parte óssea até às articulações temporo-mandibulares. Existem diversos tipos de sistemas panorâmicos, baseados em princípios distintos de funcionamento, originando imagens com algumas características distintas.

As diferenças entre os sistemas são, sobretudo, devidas à existência de um número diferente de centros de rotação entre a ampola e o filme, como se exemplifica nas Figs. 4.20 a 4.24.

Na técnica do *único centro de rotação*, é dada ao filme a configuração do maxilar e dentes. O feixe de raios X, assim como o filme, rodam em torno de um único ponto, Fig. 4.20, com raios de rotação diferentes.

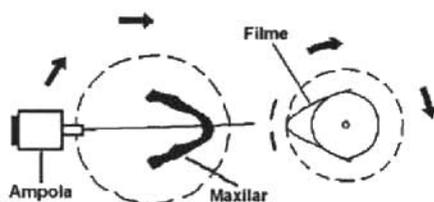


Fig. 4.20 - Único centro de rotação.

Na modalidade de *duplo centro de rotação*, as duas metades do maxilar e dentes fazem-se coincidir com arcos de circunferências imaginárias 1 e 2, Fig. 4.21. São executadas duas exposições distintas para cada metade, com mudança automática do centro de rotação.

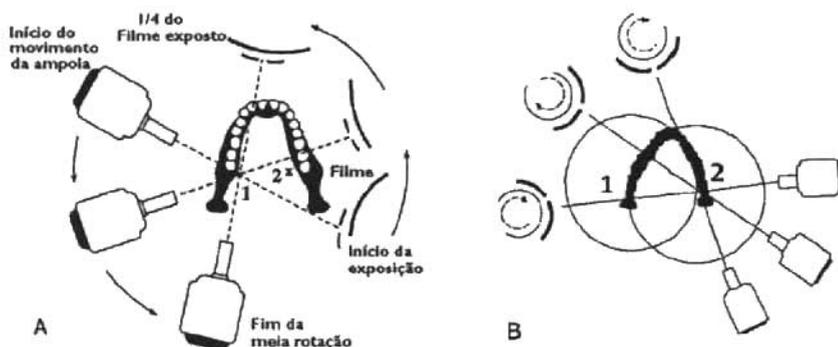


Fig. 4.21 - Duplo centro de rotação.

No método do *triplo centro de rotação* são utilizados três centros de rotação  $C_1$ ,  $C_2$ , e  $C_3$ , como se observa na Fig. 4.22. A imagem final é constituída por três segmentos independentes justapostos, obtidos para cada centro de rotação, sendo mínima a descontinuidade entre eles.

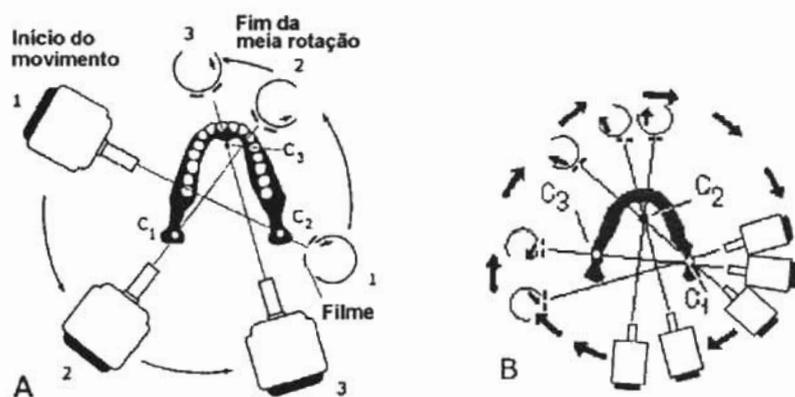


Fig. 4.22 - Triplo centro de rotação.

Outra modalidade é o *método do centro de rotação móvel*. O feixe roda em torno de um centro que se move continuamente com uma trajetória elíptica próxima à do arco do maxilar em estudo (pontos 1, 2, 3, 4 e 5), Fig. 4.23. Esta trajetória pode ajustar-se às dimensões do maxilar em estudo. A imagem obtida deste modo é contínua e as ampliações horizontal e vertical são aproximadamente iguais.

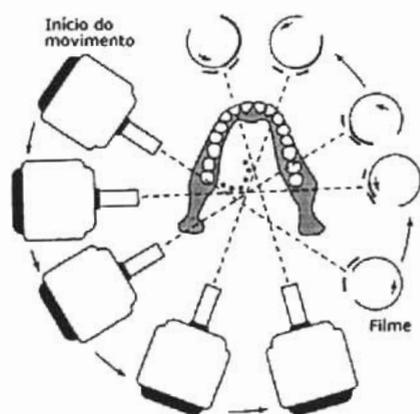


Fig. 4.23 - Método do centro de rotação móvel.

Volume focal é a região da anatomia dentária que aparece distintamente na imagem panorâmica. Os pontos do objecto situados nesse volume são radiografados com boa definição. Os pontos do objecto fora dessa zona ficarão tanto mais desfocados, quanto mais distantes deste se encontrarem. Na Fig. 4.24 encontram-se cortes horizontais medianos do volume focal para as três últimas técnicas descritas: duplo centro de rotação a), Triplo centro de rotação b) e Centro de rotação móvel c).



Fig. 4.24 - Cortes horizontais medianos do volume focal para as três últimas técnicas descritas: a) duplo centro de rotação, b) Triplo centro de rotação e c) Centro de rotação móvel.

Em a) a curvatura para dentro, na parte posterior, torna difícil obter boa definição na área das articulações temporo-mandibulares, pois a região de focagem fica estreita e quase limitada ao contorno do maxilar. A boa definição na parte anterior é obtida sem dificuldade. Em b) e c) a região focal é muito estreita na parte anterior, obrigando a um posicionamento rigoroso dos dentes incisivos. Para a visualização com qualidade da parte posterior do maxilar, o método do centro de rotação móvel é o que apresenta mais vantagens.

## 10 - Radiologia digital em Medicina Dentária

Há um conjunto de características que tornam os sistemas digitais de raios X vantajosos em relação aos sistemas convencionais de filme com ecrã intensificador. Talvez a mais notável das propriedades dos sistemas digitais seja a possibilidade de reavaliação e reprocessamento digital das

imagens adquiridas, no computador, de modo a otimizar a imagem. Porém, diversas outras características como a diminuição da dose no paciente e a transmissão de dados, estão também associadas a estas novas tecnologias.

É da opinião geral que as novas tecnologias digitais e a radiografia sem filme são o futuro da imagiologia com raios X. Em medicina dentária, a introdução da radiologia digital poderá representar um avanço revolucionário. As limitações iniciais quanto a resolução espacial e dose, verificadas nos sistemas sem filme iniciais, foram já ultrapassadas com os novos sistemas detectores e com a tecnologia dos transistores e fotodiodos em filme fino de silício amorfo.

Os diferentes tipos de sistemas de detecção e aquisição de imagem na radiologia digital do presente podem enquadrar-se, quanto ao tipo de detectores nas seguintes categorias:

- Detectores de área;
- Detectores de varrimento;
- Sistemas híbridos.

Nos detectores de área a informação proveniente do objecto é recolhida numa área de detecção, contínua ou constituída por elementos independentes e processada simultaneamente e em bloco.

Nos sistemas de varrimento, após a aquisição numa superfície sensível, a informação é lida localmente por varrimento laser.

Os sistemas híbridos, ainda em estudo, são um compromisso entre as soluções anteriores.

Quanto ao modo de aquisição os sistemas de detecção e aquisição de imagem na radiologia digital podem classificar-se em:

- Sistemas de aquisição de dois estágios;
- Sistemas de aquisição de um estágio.

Nos sistemas de aquisição de dois estágios, ocorre interacção dos raios X com uma espessura cintiladora com produção de luz de fluorescência

(primeiro estágio) que é colectada por fotodiodos e transformada em sinal eléctrico (segundo estágio).

Nos sistemas de aquisição de um estágio ocorre interacção dos raios X com material semiconductor, com libertação de electrões, que colectados por acção de um campo eléctrico produzem uma corrente que é amplificada.

Os sistemas de imagem da radiologia digital utilizando semicondutores com possibilidade de aplicação em Medicina Dentária são os detectores de área dos tipos de aquisição de um estágio e de dois estágios.

Nesta última, encontra-se a tecnologia que utiliza múltiplos CCD "charge coupled devices" acoplados por fibras ópticas a uma placa cintiladora que transforma energia electromagnética dos raios X em energia luminosa.

Os CCD são sensores de imagem do estado sólido e estão já, há algum tempo, em uso em câmaras comerciais de TV.

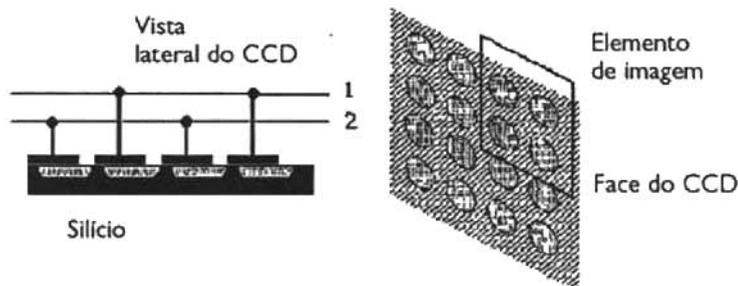


Fig. 4.25 - Esquema de um CCD, "Charge Coupled Device".

Explicaremos de modo sumário o modo de funcionamento de um CCD, Fig. 4.25. Fótons incidindo num elemento sensível do CCD produzem a geração de pares electrão/lacuna que se separam por acção do campo eléctrico. Os electrões são retidos em poços de potencial. O número de electrões capturados é proporcional à luz recebida. Depois de passado um certo tempo (tempo de integração) os electrões são atraídos para a região

de armazenamento do sensor e daqui para o estágio de saída onde vão originar correntes eléctricas e o correspondente sinal de tensão.

Os sistemas de dois estágios, da última geração, incluem um cintilador, de iodeto de céσιο (CsI) com as dimensões de um filme dentário, com cristais estriados de modo a minimizar a dispersão da luz, em contacto com uma camada de silício amorfo onde existem fotodíodos e fototransistores, Fig. 4.26.

Na detecção, quando o material fluorescente é sujeito aos raios X, electrões do meio são excitados ocupando níveis de energia mais elevados e relativamente estáveis. Fazendo um varrimento com um feixe laser He-Ne os electrões são libertados emitindo luz que é detectada por um tubo foto-multiplicador obtendo-se um sinal eléctrico analógico que é digitalizado. A estrutura em estrias do cristal detector fluorescente origina uma resposta localizada com uma função de resposta estreita e resoluções espaciais que podem ser inferiores a 100 micrómetros.

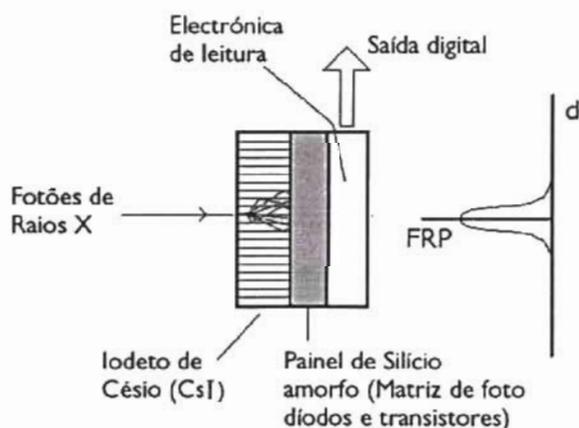


Fig. 4.26 - Detector digital de dois estágios.

Na Fig. 4.27 encontra-se um esquema mais pormenorizado de um detector deste tipo.

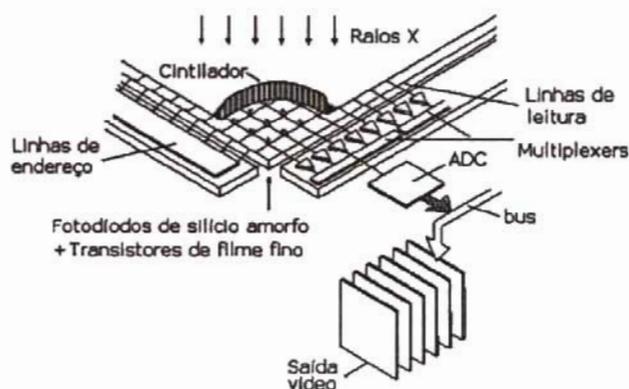


Fig. 4.27 Detector digital de dois estágios com a electrónica associada.

Os sistemas de radiologia dentária digital de um estágio (ou directa) consistem, fundamentalmente, de um detector com dimensões de um filme dentário, cujo esquema se encontra na Fig. 4.28. Este detector é constituído por dois eléctrodos limitando um meio semiconductor (em geral selénio) e por circuitos de transistores de filme fino de silício amorfo (TFT, "thin film transistor") ligados ao segundo dos eléctrodos. Estes desempenham o papel de amplificadores dos sinais eléctricos locais, resultantes das cargas geradas (electrões e lacunas) pela ionização no semiconductor e transportadas até aos eléctrodos por acção da diferença de potencial aplicada. A seguir a estes transistores encontra-se a electrónica de leitura, de muito baixo ruído. A função de resposta a um ponto (FRP) destes detectores é do tipo indicado na Fig. 4.28.

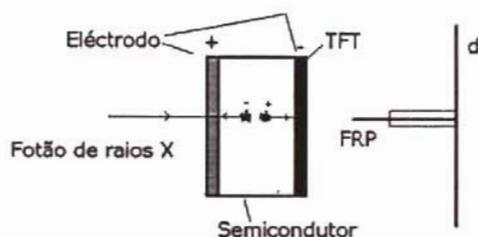


Fig. 4.28 - Esquema de um detector dentário de um estágio.

A captura directa da energia dos raios X, sem conversão luminosa, como na radiografia convencional com ecrãs intensificadores, origina que a FRP dos detectores digitais de conversão directa se compare favoravelmente com as dos sistemas convencionais (Fig. 4.29).

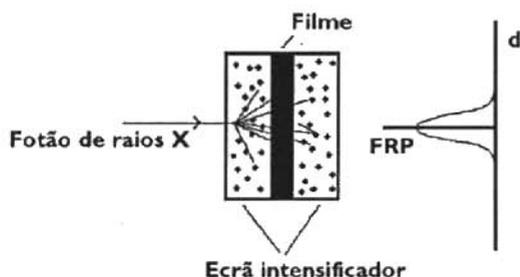


Fig. 4.29 - Esquema da radiografia convencional com um filme e ecrãs intensificadores.

As esperanças iniciais nos sistemas de aquisição de um estágio não foram completamente realizadas pois a eficiência é significativamente inferior à do sistema de dois estágios.

Em termos gerais, as características mais importantes das técnicas digitais em radiologia dentária são:

- Diminuição da dose absorvida pelo paciente;
- Possibilidade de reavaliação com reprocessamento;
- Possibilidade de tratamento dos dados – realce de contraste, e obtenção de parâmetros, como distâncias, ângulos, etc., bem como a aplicação de diversos tipos de filtragem;
- Possibilidade de mostrar imagens electrónicas em tempo real, eliminando o filme e o tempo de espera do processamento químico;
- Possibilidade de utilização de arquivos electrónicos de consulta imediata e com economia de espaço. Por exemplo, obtenção imediata, por via electrónica, de dados alfanuméricos e radiografias anteriores do paciente com possibilidade de comparação com os actuais;

- Possibilidade de transmissão da informação directamente ou após armazenamento para consulta ou utilização em áreas distantes como outros hospitais;
- Possibilidade de diagnóstico à distância através da comunicação digital;
- Possibilidade de utilização de inteligência artificial ("expert systems" para diagnóstico apoiado);
- Visualização simultânea da radiografia e de outras imagens, tais como a imagem dos dentes em estudo, obtida através de uma câmara de TV colocada junto do aparelho de raios X.

### 11 - Dosimetria por termoluminescência

Existem materiais que, sob a acção de radiação ionizante, apresentam a propriedade de absorver e armazenar parte da energia incidente e de a libertar, mais tarde, por acção de um agente excitador, na forma de radiação luminosa. Quando o agente excitador é o calor o fenómeno é designado de termoluminescência. Para um dado material as quantidades de energia armazenada e de luz emitida dependem da energia incidente. Deste modo, medindo a luz emitida pode determinar-se a dose absorvida.

Os dispositivos de medição da dose absorvida de radiação ionizante, baseados neste princípio, chamam-se dosímetros termoluminescentes (TLD). Alguns sais de cálcio, como o sulfato e o fluoreto, e sais de lítio, como o borato e o fluoreto, activados com traços de magnésio são materiais termoluminescentes. O rendimento na emissão de luz, assim como o número atómico efectivo é maior nos sais de cálcio do que nos sais de lítio. O número atómico elevado origina uma marcada dependência da energia na resposta dos detectores de sais de cálcio aos fotões de baixa energia.

O valor dos números atómicos efectivos dos sais de lítio referidos é próximo do dos tecidos moles e a sua resposta é menos dependente de energia dos fotões pelo que são os mais geralmente utilizados como TLDs. Para o LiF a resposta é praticamente independente da energia para fotões de 100 KeV a 1,3 MeV, Fig. 4.30.

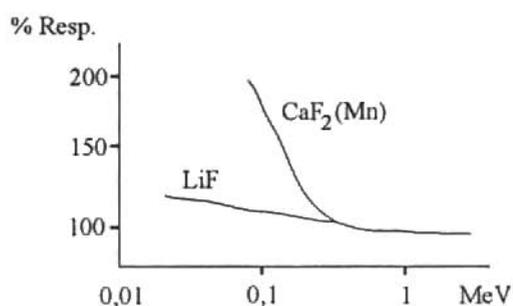


Fig. 4.30 - Dependência da resposta dos materiais termoluminescentes LiF e CaF da energia.

Como vimos, a dosimetria por termoluminescência obriga, após irradiação do detector, ao seu aquecimento e à medição da luz emitida.

O material termoluminescente irradiado, em geral uma pequena quantidade (~ 50 mg) é colocado num prato aquecido e a luz emitida, após filtragem, medida num tubo fotomultiplicador, como se indica na Fig. 4.31.

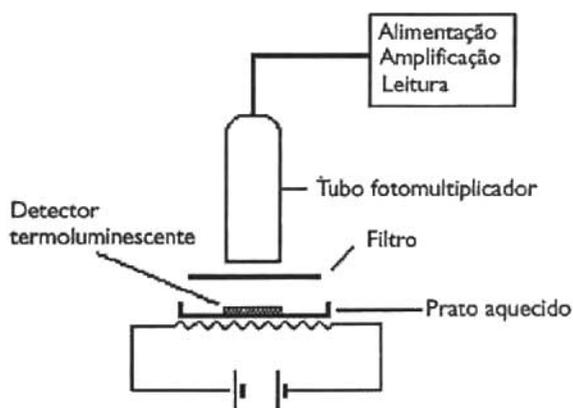


Fig. 4.31 - Esquema de um sistema de dosimetria de termoluminescência.

A intensidade luminosa da luz emitida durante o aquecimento varia com a temperatura de aquecimento segundo uma função  $I(t)$ , chamada curva de brilho e representada na Fig. 4.32.

Os fenómenos que explicam a termoluminescência são bem conhecidos. De um modo geral, quando radiação ionizante passa através de material termoluminescente geram-se electrões e lacunas.

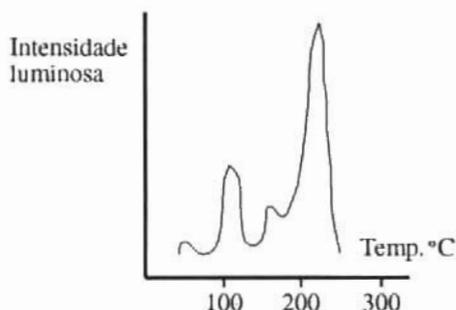


Fig. 4.32 - Curva de brilho do fluoreto de lítio.

Os primeiros, com a energia adquirida, passam a deslocar-se na banda de condução. A partir daqui os electrões podem regressar à banda de valência, ocorrendo recombinação com emissão de um fóton ou ficar retidos em armadilhas, resultantes da presença de impurezas ou de imperfeições na malha cristalina (Fig. 4.33).

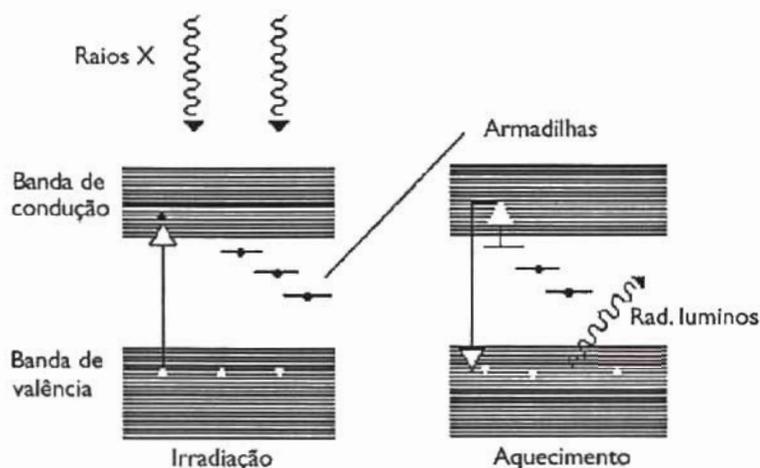


Fig. 4.33 - Estrutura de bandas do material termoluminescente.

Estas armadilhas são níveis de energia adicionais às bandas de energia da estrutura cristalina, inferiores à banda de condução, onde, à temperatura ambiente, os electrões têm grande probabilidade de permanecer por longos períodos.

A energia recebida sob acção do aquecimento permite que estes electrões regressem à banda de condução donde poderão regressar à banda de valência com emissão de fotões luminosos. A energia total emitida por aquecimento é proporcional ao número de electrões libertados. De modo semelhante, as lacunas poderão ser retidas em armadilhas, correspondentes a níveis de energia um pouco acima da banda de valência e libertadas por aquecimento, recombinação-se com um electrão.

As diferenças de energia entre os níveis das armadilhas dos electrões e a banda de condução (ou entre os níveis das armadilhas das lacunas e a banda de valência) determinam as temperaturas necessárias para libertar os transportadores das armadilhas. Na Fig. 4.32 os picos da curva correspondem às diversas armadilhas do LiF.

A equação de Boltzmann dá a probabilidade de um electrão à temperatura  $T$  adquirir a energia  $E$

$$p = A \exp\left(-\frac{E}{KT}\right)$$

onde  $K$  é a constante de Boltzmann e  $A$  uma constante que depende da energia de vibração da rede do material termoluminescente utilizado.

A energia luminosa total emitida em função da dose, para o fluoreto de lítio, pode ser observadas na Fig. 4.34. A resposta pode considerar-se quantitativa num intervalo que vai de 0,1 mGy até cerca de 1000 Gy sendo linear até cerca de 10 Gy.

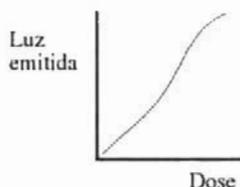


Fig. 4.34 - Energia luminosa emitida em função da dose para o LiF.

Os dosímetros de termoluminescência têm aplicação em numerosas situações e podemos dizer que as suas grandes qualidades são:

- a) A possibilidade de se realizarem medições simultâneas num conjunto de pontos do campo de radiação, utilizando diversos cristais de TLD.
- b) A boa resolução espacial devido às mínimas quantidades de cristal detector que podem ser utilizadas;
- c) O seu número atômico próximo do dos tecidos moles;
- d) A independência da resposta com a velocidade de dose para a maioria das aplicações médicas.

## 12 - Dosimetria fotográfica

Uma emulsão fotográfica é uma suspensão de pequenos cristais de halogenetos de prata em gelatina (brometo com pequena quantidade de iodeto).

Durante a irradiação de uma emulsão com radiações ionizantes são produzidos electrões livres e lacunas na rede cristalina do brometo de prata. Quando electrões caem em armadilhas da rede, as forças electrostáticas originam que iões de prata se desloquem até estes, neutralizando-se e produzindo pequenas quantidades de prata metálica nos locais das armadilhas, constituindo pontos da imagem latente.

No processo de revelação soluções de redutores orgânicos convertem os  $\text{Ag}^+$  em prata metálica, sendo este processo muito mais rápido com os iões situados em cristais com pontos de imagem latente.

Escolhendo condições apropriadas para a revelação é possível diferenciar os cristais que foram irradiados dos que não foram e obter variações no número de cristais reduzidos para diferentes graus de irradiação. A imagem latente transforma-se numa distribuição de diferentes concentrações de prata. Esta distribuição é tornada definitiva com o fixador (tiosulfato de sódio) que dissolve o halogeneto não reduzido.

A curva característica do filme relaciona densidade óptica<sup>5</sup> com o logaritmo da exposição e tem a forma da Fig. 4.35.

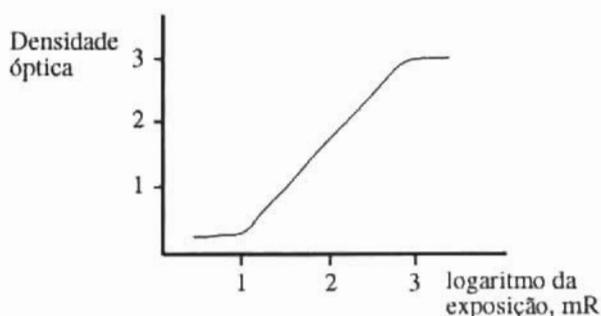


Fig. 4.35 Curva característica de uma emulsão fotográfica.

A extensão da porção linear da característica depende do tipo de radiação e de emulsão utilizados.

A sensibilidade do filme depende da energia dos fótons em estudo, de acordo com uma curva do tipo da que se mostra na Fig. 4.36.

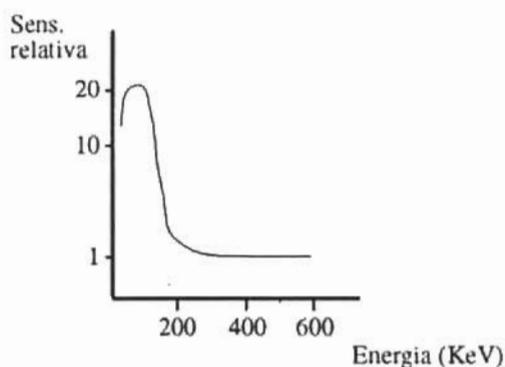


Fig. 4.36 - Curva típica de sensibilidade de um filme vs. energia dos fótons.

<sup>5</sup> Densidade óptica de um filme radiológico é o logaritmo decimal da relação entre a intensidade da luz incidente no filme e a intensidade emergente do mesmo.

Na prática os filmes para dosimetria pessoal ou de protecção pessoal estão comercializados com as dimensões e aparência de um filme dentário, vindo individualmente protegidos da luz. São colocados dentro de caixas de plástico, "badges" (Fig. 4.37) e utilizados pelos trabalhadores com radiações por períodos de tempo apropriados (quinze dias ou um mês). Após utilização os filmes são revelados e as suas densidades ópticas comparadas com uma curva de densidade óptica obtida com filmes iguais impressionados com doses de radiação conhecidas.



Fig. 4.37 - Caixa de plástico, "badge" e filme utilizados pelos trabalhadores com radiações ionizantes.

Dado que um trabalhador pode ter sido sujeito a irradiação com raios X de diferentes aparelhos ou diferentes tipos de radiação, para as quais o filme tem diferentes sensibilidades, a caixa onde se coloca o filme contém filtros que permitem não só identificar se houve outras radiações, além de fótons, como corrigir a dose devida a fótons com diferentes energias.

## BIBLIOGRAFIA

- BENEDEK, G. B. ; VILLARS, F. M. H. (1974) *Physics with illustrative examples from Medicine and Biology*. Vol. 1, Mechanics. Addison Wesley Publ. Comp.
- CAPUTO, A. A.; STANDLEE, J. P. (1987) *Biomechanics in clinical dentistry*. Chicago. Illinois. Quintessence Publishing Co., Inc.
- DARBY, R. (1976) *Viscoelastic Fluids. An introduction to their properties and behaviour*. N.Y., Marcel Dekker, Inc.
- DIAS DA SILVA, V. (1995) *Mecânica e Resistência de Materiais*. Coimbra, Ediliber Ed.
- DOUGLAS, C. R. (1994) *Tratado de Fisiologia Aplicada às Ciências da Saúde*. S. Paulo, Robe Editorial.
- DUHART, A. M. ; BARDINET, E. ; BEQUAIN, D. ; DARQUE, F. ; DORIGNAC, D. (1997) *Biomecânica ortodôntica et notion de "force légère"*. Encyclopédie Médico-Chirurgicale (Elsevier, Paris), Odontologie, Stomatologie/Odontologie, 23-490, B-10, 21 p.
- FRANKEL, V. H. ; BURSTEIN, A. H. (1970) *Biomechanica ortopedica*. Barcelona, Ed. Jims.
- HARING, J. I. ; LIND, L. J. (1996) *Dental Radiography. Principles and techniques*. W.B. Saunders Company.

## BIBLIOGRAFIA

- LEDLEY, P. S. (1986) Dental force analysis. *In : Physics in Medicine and Biology Encyclopedia*. Vol. I, Oxford, T.F. McAinsh (Ed.), Pergamon Press, p. 257-265.
- LE MENN, A. (1990) *Propriétés mécaniques des biomatériaux e restauration en art dentaire*. Editions techniques, Encyclopédie Médico-Chirurgicale (Elsevier, Paris), Stomatologie/Odontologie, 23063 B<sup>10</sup>, 7, 17 p.
- LE MENN, A. ; LE MENN, J. C. (1989). *Structures des matériaux*. Editions techniques, Encyclopédie Médico-Chirurgicale (Elsevier, Paris), Stomatologie/Odontologie, 23063 A<sup>10</sup>, 3, 11 p.
- MALQUARTI, G. ; ALLARD, Y. ; MARTIN, J.-P. ; BOIS, D. (1992) *Principes généraux des bridges*. Editions techniques, Encyclopédie Médico-Chirurgicale (Elsevier, Paris), Stomatologie/Odontologie, 23270 A<sup>10</sup>, 11 p.
- NANDA, R. ; KUHLBERG, A. (1997) *Biomechanics in Clinical Orthodontics*. W.B. Saunders Comp.
- PEDROSO DE LIMA, J. J. (1995) *Física dos métodos de imagem com raios X*. Edições Asa.

## ÍNDICE ALFABÉTICO

### a

- ângulo de mastigação - 203, 205, 206.
- absorção dos raios X - 233, 236, 237, 241-243.
- absorção linear - 243.
- aceleração instantânea - 76.
  - média - 76.
  - tangencial - 77.
  - centrípeta - 77.
- acção directa - 253, 254.
- acção indirecta - 253, 256.
- adição de vectores - 13, 41.
- ampola de raios X - 225, 226, 228-232, 267, 269.
- Análise esforço/deformação - 202.
- ânodo - 225-227, 230-233.
- anticátodo - 226, 227, 229, 231.
- área oclusal - 197-199, 221.
- atrito entre sólidos - 54.

### b

- binário - 19, 36-42.
- birrefringência - 211, 212.
- bremsstrahlung - 227.

### c

- camada semi-redutora - 242.
- capilares isolados - 124.
- capilaridade entre lâminas - 122.
- cátodo - 225, 250.
- calor latente de fusão - 87.
- calor latente de sublimação - 87.
- camada monomolecular - 116.
- CCD - 274.
- célula unitária - 86.
- centro de gravidade - 66.
- centro de massa - 64.
- classificação reológica dos materiais - 154.
- coeficiente de absorção linear - 241-243.
- coeficiente de Poisson - 133.
- componentes rectangulares
  - de um vector - 15.
  - do momento - 30.
- comprimento de onda efectivo - 230.
- comprimento de onda mínimo - 226.
- conductividade térmica - 86, 88.
  - eléctrica - 88, 96.
- condução eléctrica nos sólidos - 88.
- corpos plásticos - 155.

## ÍNDICE ALFABÉTICO

corpos viscosos – 155.  
corpos viscoelásticos – 156.  
corpos plasto-visco-elásticos – 161,  
163, 164.  
corpos de Bingham – 161, 163, 164,  
168.  
corrente anódica – 232, 233.  
cúpula da ampola de raios X – 225.  
curva tensão-deformação – 159, 162.  
curva tensão-velocidade de  
deformação – 164, 166.  
curvas de fluência – 157, 160, 163.  
curvas de relaxação – 159, 161.  
cúspides – 195, 196, 204, 207, 208.

### d

deformações – 150, 152.  
deformação por flexão – 138, 190.  
deformação por torção – 142.  
deformação relativa (strain) – 150.  
deformação diferencial – 151.  
deformações elásticas – 131.  
densidade de carga – 90.  
densidade óptica – 282.  
dentes  
  estrutura dos dentes – 193.  
  forma dos dentes – 195.  
detectores radiologia dentária  
  de área – 273.  
  de cintilação – 275-276.  
  de semiconductor – 277.  
  de varrimento – 273.  
  radiologia digital – 272.

dinâmica do ponto – 59.  
direcção da força mastigatória – 203.  
dissociação espontânea – 248.  
distribuição angular dos raios X  
  Duane e Hunt – 230.  
dose absorvida – 246, 247, 249, 266,  
277.  
  velocidade de dose absorvida – 247.  
dose efectiva ou eficaz – 261.  
dose equivalente – 260.  
dose de exposição – 245, 246.  
  velocidade de dose exposição –  
  247.  
dose integral – 247.  
dosimetria fotográfica – 282.  
dosimetria por termoluminescência –  
  278-282.  
dureza – 168.

### e

ecrã intensificador – 272.  
efeito de produção de pares – 240,  
241, 243.  
efeito de bremsstrahlung  
  (ver bremsstrahlung)  
efeito Compton – 234, 239, 241, 243.  
efeito de Joule – 226.  
efeito de Rayleigh-Thomson – 240.  
efeito fotoeléctrico – 237, 238, 241,  
243.  
efeitos biológicos da radiação – 259,  
262.  
eficiência biológica relativa – 259.

eficiência do detector – 277.  
 elasticidade – 131.  
 electrão-volt – 229.  
 eléctrodo de focagem – 225.  
 electromiograma – 201.  
 elementos finitos – 209.  
 equilíbrio de forças – 43.  
 endurecimento do feixe – 233.  
 energia de adesão líquido-líquido – 115.  
 energia de adesão sólido-líquido – 118.  
 energia de coesão de um líquido – 113.  
 energia elástica – 144.  
 energia de ligação dos electrões  
 energia efectiva – 230.  
 energia máxima no feixe de raios X – 226.  
 espectro dos raios X – 226.  
   espectro característico – 228.  
   espectro contínuo – 227.  
 espessura de semi-absorção  
 equações de Newton (ver Newton)  
 estados de agregação – 81.  
 excitação electrónica – 228, 236, 251.  
 exposição – 245.

## f

factor de qualidade – 259.  
 fadiga dos materiais – 169.  
 feixe de raios X – 230, 231, 234, 268, 270.  
 feixe primário – 225.

filamento – 225, 226, 232.  
 filme de protecção pessoal – 283.  
 filme dentário – 267.  
 filme radiológico-resposta – 283.  
 filtração do feixe de raios X – 226, 277.  
 filtros polarizadores – 212-213.  
 fluidos Newtonianos – 99.  
 fluidos não newtonianos  
   s/ histerese – 100.  
   c/ histerese – 102.  
 fluorescência – 275.  
 forças interiores e exteriores – 20, 83, 147.  
 forças de coesão – 83, 105, 136.  
 força mastigatória – 199, 201, 203, 205, 208, 220.  
 forças dentárias – 196.  
 fotoelasticidade – 211-216.  
 fórmula de Laplace – 109, 112.  
 fotão de bremsstrahlung – 227.  
 fotodiodo – 276.  
 fotoelectrão – 238.  
 fotões Compton – 239.  
 fototransistores – 276.  
 frinjas isoclinicas – 214.  
 frinjas isocromáticas – 214.  
 função trabalho – 92.

## g

gradiente de velocidade – 98, 100, 101, 103, 104.  
 Gray – 246.

## ÍNDICE ALFABÉTICO

### h

- hidroxiapatite – 194.
- histerese – 102, 145.
- Hooke, lei de (ver leis de Hooke)

### i

- intensidade anódica – 226, 267.
- interacção dos electrões com o núcleo  
(ver bremsstrahlung)
- interacção dos raios X com a matéria  
– 234.
- ionização – 237, 245.

### l

- leis de Hooke – 85, 131, 133.
- lei de Newton da gravitação  
(ver Newton)
- lei de Ohm – 90.
- leis de Newton (ver Newton)
- líquido de Pascal – 155.
- limite elástico – 137, 187.
- linearidade de  $T(\epsilon)$  – 187.

### m

- masséter – 45-48, 51-52, 202, 222.
- mastigação – 201.
- materiais compostos – 145.
- métodos analíticos – 209.
- métodos fotoelásticos – 211.
- métodos numéricos – 203.

- mobilidade electrónica – 91.
- modelo do corpo livre – 49.
- módulo de rigidez – 85.
- módulo de compressão – 134.
- módulo de Young – 131, 132.
- modelos físicos da deformação – 164-  
-167
- momento cinético (ou angular) – 63,  
64.
- momento de inércia – 71, 141.
- momento de uma força  
em relação a um ponto – 21.  
em relação a um eixo – 34.
- momento linear – 59, 61-63.
- movimento de translacção – 51, 176,  
178, 182.
- mudanças de estado – 87.

### n

- Newton, equação – 98.
- leis de – 11, 12, 19, 60.

### o

- oclusão dentária – 195, 197.

### p

- planos principais – 110.
- pressões oclusais – 196.
- princípio da transmissibilidade – 18.
- pterigoide – 47, 48, 52, 196, 197.
- produto escalar – 30.

produto triplo composto – 32.  
 produto vectorial – 23.  
 propriedade comutativa – 24.  
   distributiva – 24.  
   associativa – 24.

**q**

quantidade de movimento – 59.  
 qualidade da radiação – 231, 232.

**r**

rad – 247.  
 radiações ionizantes – 234.  
 radiólise da água – 256.  
 Radiologia digital – 272.  
 radiosensibilidade – 265, 266.  
 radiografia intraoral – 268.  
 radiografia panorâmica – 269.  
 raios de curvatura principais – 110.  
 raios duros – 231.  
 raios moles – 231.  
 raios X  
   dentário – 267.  
   terapêuticos – 266.  
 razão de Poisson – 133.  
 reacção com moléculas – 251.  
 reacções com iões negativos – 250.  
 regra do paralelograma – 13.  
 rem – 260.  
 rendimento do tubo de raios X – 229.  
 resposta de detectores – 276-278,  
 283.

rigidez – 85.  
 riscas características – 228.  
 roentgen – 245.

**s**

saltos quânticos – 228.  
 semicondutores – 96.  
 sensibilidade filme – 283, 284.  
 sistemas de forças equivalentes – 39.  
 sólidos indeformáveis – 20.  
 sólidos de Euclides – 154.  
 sólidos de Hooke – 154.  
 soma de binários – 40.  
 superfície oclusal – 196, 199, 200,  
 221.  
 superfície de separação  
   entre líquidos não miscíveis – 114.  
   entre líquidos e sólidos – 118.

**t**

tensão aceleradora – 230.  
 tensão anódica – 233.  
 tensão de contacto entre líquidos –  
 115  
 tensão de contacto sólido-líquido –  
 118  
 tensão de corte – 84.  
 tensão crossa da aorta – 127.  
 tensão tangencial – 84.  
 tensão superficial de um líquido –  
 104-106.  
 tensores – 148.

## ÍNDICE ALFABÉTICO

- teorema de Varignon - 26.
- teoria das bandas dos cristais - 92-96.
- teoria do alvo - 253.
- termoluminescência - 278.
- tipos de deformação - 150, 152.
- tipos de detectores - 277.
- técnicas experimentais - 210.
- transdutores de tensão - 211.
- transferência de carga - 249.
- tubos capilares - 120.
- tungsténio - 226, 231.

### V

- velocidade instantânea - 74.
  - média - 74.
- velocidade de dose absorvida - 247.
- velocidade de dose exposição - 247.
- vector binário - 41.
- viscoelasticidade - 167.
- viscosidade - 97.
- viscosidade cinemática - 99.
- viscosidade do sangue - 102.

(Página deixada propositadamente em branco)

