

# Modelação em Hidráulica Fluvial e A m b i e n t e

JOSÉ SIMÃO ANTUNES DO CARMO



Coimbra • Imprensa da Universidade

(Página deixada propositadamente em branco)

# Modelação em Hidráulica Fluvial e A m b i e n t e

JOSÉ SIMÃO ANTUNES DO CARMO



Coimbra • Imprensa da Universidade

COORDENAÇÃO EDITORIAL  
Imprensa da Universidade de Coimbra

CONCEPÇÃO GRÁFICA  
António Barros

PAGINAÇÃO  
António Resende  
[Universidade de Coimbra]

EXECUÇÃO GRÁFICA  
Imprensa de Coimbra, Lda  
Largo de S. Salvador, 1  
3000-372 Coimbra

ISBN  
972-8704-28-3

ISBN DIGITAL  
978-989-26-0364-3

DOI  
[HTTP://DX.DOI.ORG/10.14195/978-989-26-0364-3](http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-0364-3)

DEPÓSITO LEGAL  
218895/04

© SETEMBRO 2004, IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

*Do rio que tudo arrasta  
se diz que é violento,  
Mas ninguém diz violentas  
as margens que o comprimem.*

(in *As Tormentas*, Bertold Brecht)

(Página deixada propositadamente em branco)

# ÍNDICE

Prefácio	IX
Simbologia	XI

## Capítulo 1. Introdução

1.1 Enquadramento geral	1
1.2 Enquadramento específico, objectivo e âmbito	8
1.3 Tipos e regimes de escoamento	10
1.4 Metodologia	11

## Capítulo 2. Modelação em Hidráulica

2.1 Considerações gerais	15
2.2 Modelação física	17
2.2.1 Modelos de rios	17
2.2.2 Modelos de portos e estuários	22
2.2.3 Modelos de estruturas hidráulicas	30
2.3 Modelação numérica	32
2.3.1 Generalidades	32
2.3.2 Formulação geral de um modelo numérico	32
2.3.3 Classificação dos modelos numéricos	34
2.3.4 Modelos hidrodinâmicos	36
2.3.5 Modelos de dinâmica sedimentar	38
2.3.6 Modelos de qualidade da água	40
2.4 Modelação dos processos de drenagem e erosão numa bacia hidrográfica	42
2.4.1 Hipóteses básicas	43
2.4.2 Formulação matemática	44
2.4.3 Modelo numérico	45
2.4.4 Aplicações	46

### **Capítulo 3. Dinâmica do curso de água. Estudo dos escoamentos gradualmente variáveis**

3.1	Hipóteses básicas	51
3.2	Técnica do volume de controlo	52
3.3	Equação de continuidade ou de conservação da massa	55
3.4	Equação de conservação da quantidade de movimento	57
3.5	Modelo simplificado. Soluções analíticas	60
3.6	Modelos de resolução numérica das equações	62
3.6.1	Método das características	62
3.6.2	Métodos de diferenças finitas	65
3.6.2.1	Esquemas implícitos	67
3.6.2.1.1	Esquema semi-implícito de 4 pontos	67
3.6.2.1.2	Esquema semi-implícito de Abbott & Ionescu	73
3.6.2.1.3	Esquema totalmente implícito	75
3.6.2.2	Esquemas explícitos	76
3.6.2.2.1	Estabilidade numérica	77
3.6.2.2.2	Esquema explícito de Koutitas	79
3.6.2.2.3	Esquema explícito Leap-frog	80
3.6.2.2.4	Esquema explícito de MacCormack	81
3.6.3	Método dos elementos finitos	84
3.7	Condições iniciais e de fronteira	92
3.8	Singularidades	94
3.9	Breve abordagem a esquemas de alta resolução das equações diferenciais	96
3.9.1	Considerações gerais	98
3.9.2	Resolução aproximada sugerida por Roe	100
3.9.3	Extensão TVD do esquema de MacCormack	101
3.9.4	Extensão de segunda ordem do esquema de Roe	104
3.9.5	Aplicações	106

## **Capítulo 4. Barragens: solicitações hidrodinâmicas e rupturas**

4.1	Considerações gerais	113
4.2	Solicitações hidrodinâmicas devidas à actuação de um sismo	115
4.2.1	Equações básicas	115
4.2.2	Soluções analíticas	118
4.2.2.1	Modelo de Rashed & Iwan	119
4.2.2.2	Modelo de Trefftz-Mikhlin	122
4.2.2.3	Modelo de Dean & Dalrymple	125
4.2.3	Resolução da equação de Helmholtz - modelo numérico	130
4.2.4	Aplicações	134
4.3	Efeitos hidrodinâmicos resultantes de deslizamentos em albufeiras	138
4.3.1	Formulação	139
4.3.2	Sistema de equações de Boussinesq: modelo numérico	150
4.3.3	Aplicação	158
4.4	Ruptura de barragens: causas, mecanismos e consequências	159
4.4.1	Tipos de ruptura	164
4.4.2	Modelo numérico	167
4.4.3	Aplicações do modelo 1DH	167
4.4.4	Aplicações de modelos 2DH	173

## **Capítulo 5. Dinâmica sedimentar: erosão, transporte e deposição de sedimentos**

5.1	Considerações gerais	177
5.2	Conceitos básicos	178
5.2.1	Análise qualitativa	178
5.2.2	Tensões devidas à rugosidade do grão e velocidade de queda	183
5.2.3	Caudais sólidos junto ao fundo e em suspensão	186
5.2.4	Tensões devidas às formas de fundo	188
5.2.5	Dimensionamento de um canal de fundo móvel	190

5.3	Modelos matemáticos	192
5.3.1	Equação dinâmica da fase sólida	192
5.3.2	Equação de continuidade da fase sólida	200
5.4	Formulação morfodinâmica fluvial	200
5.4.1	Formulação clássica	201
5.4.2	Modelo de camada limite de zero-equações	204
5.4.2.1	Sub-camada viscosa	206
5.4.2.2	Camada logarítmica	206
5.4.3	Extensão a duas dimensões no plano horizontal	209
5.4.4	Formulação alternativa da fase sólida	211
5.4.5	Modelo numérico	213
5.5	Aplicações	216
5.5.1	Aplicação do modelo bidimensional <i>morfodin</i>	216
5.5.2	Aplicação do modelo unidimensional <i>fluvial_sed</i>	219
5.6	Distribuições granulométricas heterogéneas	221

**Capítulo 6. Obras de protecção contra cheias. Transporte sólido generalizado e erosões localizadas: causas e efeitos. Medidas correctivas**

6.1	Considerações gerais	225
6.2	Regime de equilíbrio	226
6.3	Análise da resposta do leito aluvionar a alterações nos processos morfodinâmicos	227
6.3.1	Resposta do leito aluvionar à construção de uma barragem	229
6.3.2	Resposta do sistema fluvial à rectificação de um troço de rio	229
6.3.3	Resposta do leito aluvionar a uma redução do caudal sólido	230
6.3.4	Resposta do leito aluvionar a um rebaixamento localizado das cotas do fundo	231

6.3.5	Resposta do sistema fluvial a um rebaixamento do nível de base da superfície livre do curso de água principal	233
6.3.6	Resposta do sistema fluvial a uma elevação do nível de base da superfície livre do curso de água principal	233
6.4	Teorias de regime	234
6.4.1	Teoria de regime de Lacey	235
6.4.2	Teoria de regime de Simons & Albertson	235
6.5	Aproximação racional	238
6.6	Aproximação com base na contribuição das forças transversais de atrito	239
6.7	Aspectos construtivos	241
6.8	Profundidades máximas de erosão junto de obstáculos implantados em meios fluviais	243
6.8.1	Fórmulas baseadas em teorias de regime	244
6.8.2	Fórmulas baseadas na análise dimensional	245
6.8.3	Fórmulas baseadas em métodos analíticos	246
6.8.4	Critérios sugeridos por Melville e Dongol	248
6.8.5	Modelação numérica das erosões localizadas junto de obstáculos	253
6.9	Protecção contra as erosões localizadas	255

## **Capítulo 7. Descargas de efluentes e impactos ambientais**

7.1	Considerações gerais	259
7.2	Efeitos de descargas em correntes naturais	259
7.3	Modelos matemáticos para difusão e dispersão de matéria	261
7.4	Soluções analíticas	264
7.4.1	Modelo em regime permanente de uma única substância conservativa	265
7.4.1.1	Difusão longitudinal	265
7.4.1.2	Difusão transversal	265

7.4.2	Modelo em regime permanente de uma única substância não-conservativa	266
7.4.3	Modelos em regime variável	268
7.4.3.1	Escoamento em regime laminar	268
7.4.3.2	Escoamento em regime turbulento	270
7.4.3.2.1	Descarga instantânea	270
7.4.3.2.2	Descarga contínua	271
7.5	Formulação matemática e modelo numérico	272
7.6	Aplicações	275

## **Capítulo 8. Modelação da qualidade da água em rios e albufeiras**

8.1	Equações básicas	279
8.2	Parâmetros e processos biológicos e químicos	283
8.2.1	Parâmetros de qualidade da água	284
8.2.1.1	Constituintes conservativos	284
8.2.1.2	Constituintes não-conservativos	288
8.2.2	Ciclo do carbono – fitoplâncton	292
8.2.3	Ciclo do fósforo	295
8.2.4	Ciclo do azoto	296
8.2.5	Ciclo do oxigénio dissolvido	299
8.3	Modelo analítico de Streeter-Phelps	304
8.3.1	Fontes pontuais isoladas	305
8.3.2	Fontes pontuais múltiplas	313
8.4	Fontes distribuídas	318
8.4.1	Fontes de poluição difusa sem contribuição significativa para o caudal	318
8.4.2	Fontes de poluição difusa com contribuição para o caudal	318
8.5	Modelo analítico de nitrificação	322
8.6	Modelação numérica dos processos de qualidade da água	324

8.6.1	Estrutura geral de um modelo de qualidade da água de um rio	324
8.6.2	Modelos 1DH “ISIS” e “QUAL2E” para rios	326
8.6.3	Modelo 1DV para albufeiras e lagos profundos	339
8.6.4	Modelos 2DH “STERNA” e “RMA4-UMQ” para estuários pouco estratificados	341
8.6.5	Modelo <i>quase</i> -3D “POM-UMQ” para estuários estratificados e zona costeira	345
<b>Bibliografia</b>		349
<b>Anexo I</b>		A1
<b>Anexo II</b>		A7
<b>Anexo III</b>		A19
<b>Anexo IV</b>		A25
<b>Anexo V</b>		A31

(Página deixada propositadamente em branco)

## PREFÁCIO

Um livro científico é por definição uma obra inacabada, limitando-se a transmitir o legado de um presente em constante evolução. Com esta obra, o autor reivindica tão-somente a contribuição necessária para um pequeno elo da interminável corrente do conhecimento científico.

Por constituir um ramo da ciência que experimentou uma grande evolução nas últimas décadas, sendo hoje uma poderosa ferramenta, nomeadamente em domínios da Hidráulica Fluvial e do Ambiente, dá-se neste livro particular ênfase aos desenvolvimentos e aplicações da modelação numérica de fenómenos puramente hidrodinâmicos, da dinâmica sedimentar e dos processos de qualidade da água.

Outros aspectos fundamentalmente relacionados com obras hidráulicas e estruturas implantadas no meio hídrico, em particular os impactos ambientais e as fragilidades decorrentes de determinadas opções, bem como as consequências de actividades menos bem ou incorrectamente planeadas, são objecto de adequados tratamento e análise.

Paralelamente com as possíveis soluções clássicas dos problemas aqui abordados, são desenvolvidos e adoptados aspectos inovadores sempre que a profundidade da análise não ultrapassou o âmbito e contexto das matérias em apreço.

São oferecidos, em anexos devidamente identificados, diversos textos-fonte de programas computacionais, escritos em linguagem FORTRAN 90. Versões executáveis destes programas e de outros modelos computacionais, bem como ficheiros de dados e resultados de aplicações, são ainda oferecidos em CD-ROM.

O autor agradece os comentários e sugestões dos dois revisores a quem foi solicitada a árdua tarefa de emitirem pareceres sobre o presente texto. Pela pertinência dos pareceres emitidos, tomo a liberdade de transcrever parte das conclusões expressas por ambos os revisores. Após análise global do texto e apropriados comentários, conclui um dos pareceres: “...o trabalho tem bastante mérito pelo que a sua edição constituirá uma mais valia considerável para quem se debruce sobre as temáticas tratadas”, enquanto o segundo, depois de aturadas reflexões e valiosas sugestões, conclui com o seguinte parágrafo: “Sugiro que esta apreciação seja enviada ao autor da publicação, ao qual apresento as minhas felicitações pelo enorme esforço

*desenvolvido na apresentação de temas tão diversos, de grande dificuldade e elevada complexidade”.*

Um agradecimento muito especial aos colegas e amigos que me permitiram adaptar ou reproduzir partes apropriadas de trabalhos publicados e devidamente referenciados ao longo do texto.

Por último, à Susete, ao Tiago e à Raquel quero deixar expressos os meus profundos agradecimentos por me aturarem, ou suportarem as minhas ausências, em tantas horas difíceis.

**José Antunes do Carmo**

## SIMBOLOGIA

Neste livro são usados os seguintes símbolos:

$a$	Constante da função do vento ( $0.075 W m^{-2} Pa^{-1}$ )
$\bar{a}$	Amplitude de deslocamento ( $m$ )
$a_0$	Amplitude de uma onda ( $m$ )
$\ddot{a}_b$	Amplitude da aceleração harmónica do paramento de montante de uma barragem ( $ms^{-2}$ )
$\ddot{a}_f$	Amplitude da aceleração harmónica do fundo de uma albufeira criada por uma barragem ( $ms^{-2}$ )
$\ddot{a}_p$	Amplitude da aceleração harmónica da fronteira de montante de uma albufeira criada por uma barragem ( $ms^{-2}$ )
$\ddot{a}_x$	Amplitude da aceleração horizontal do solo ( <i>sismo</i> ) ( $ms^{-2}$ )
$A$	Área ( $m^2$ ); área de uma secção transversal ( $m^2$ ); coeficiente (-); amplitude ( $m$ ); amplitude máxima de deslocamento de uma barragem ( $m$ ); parâmetro da fórmula de Yang (-); constante (-); matriz; vector
$\tilde{A}$	Valor médio aproximado de Roe da área da secção transversal do escoamento ( $m^2$ ) ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$A_0$	Área molhada de uma secção transversal não activa ( $m^2$ )
$A_a$	Coefficiente de absorção devido ao vapor de água e ao ozono (0.09) (-)
$A_b$	Área de uma bacia hidrográfica ( $m^2$ )
$A_{bt}$	Fracção directa do fluxo de radiação solar que atinge a superfície sob céu limpo (-)
$A_{dt}$	Fracção difusa do fluxo de radiação solar que atinge a superfície sob céu limpo (-)
$A_h$	Difusividade turbulenta horizontal ( $m^2s^{-1}$ )
$A_m$	Amplitude de um harmónico $m$ relativo à variação da superfície livre ( $m$ )

$A_{mol}$	Área molhada ( $m^2$ )
$A_{od}$	Taxa de rearejamento efectiva ( $dia^{-1}$ )
$A_{oda20}$	Taxa de rearejamento por acção do vento para a temperatura de referência ( $20^{\circ}C$ ) ( $dia^{-1}$ )
$A_{odh20}$	Taxa de rearejamento por acção do escoamento para a temperatura de referência ( $20^{\circ}C$ ) ( $dia^{-1}$ )
$A_p, A_s(n)$	Coefficientes determinados pela teoria de Sturm-Liouville para o cálculo do potencial de velocidade do escoamento ( $m^2s^{-1}$ )
$A_r$	Função integral do comprimento relativo de uma barragem
$A_s$	Área molhada da secção transversal de um canal ( $m^2$ )
$A_t$	Coefficiente de transmissão atmosférica (-)
$A_z$	Área de uma bacia hidrográfica situada acima da cota $Z$ ( $m^2$ )
$b$	Largura ( $m$ ); constante da função do vento ( $0.030 Jm^{-3}Pa^{-1}$ ); vector
$B$	Largura ( $m$ ); coeficiente (-); função de transferência ( $kg s^{-1}m^{-1}$ ); parâmetro da fórmula de Yang (-); matriz; vector
$B_0$	Largura de um canal (ou rio) no fundo ( $m$ )
$B_b$	Largura média de uma bacia hidrográfica ( $m$ )
$B_e$	Largura de um rectângulo equivalente ( $m$ )
$B_m$	Amplitude de um harmónico $m$ relativo à variação da velocidade ( $m$ )
$B_s$	Função integral da altura relativa de uma barragem
$c$	Celeridade em condições de água pouco profunda ( $\sqrt{gh}$ ) ( $ms^{-1}$ ); concentração ( $kg m^{-3} / mg l^{-1}$ ); velocidade do som na água ( $\approx 1440 ms^{-1}$ )
$\tilde{c}$	Celeridade média aproximada de Roe ( $\sqrt{g \Delta I_1 / \Delta A}$ ) ( $ms^{-1}$ ) ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$c_a$	Coefficiente de atrito no fundo (-)

$c_\lambda$	Concentração linear (-)
$c_p$	Calor específico da água ( $4100 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ )
$c_{ref}$	Concentração volumétrica de referência (-)
$C$	Celeridade ( $L/T$ ) ( $\text{ms}^{-1}$ ); concentração ( $\text{kg m}^{-3} / \text{mg l}^{-1}$ ); parâmetro da fórmula de Ackers e White (-); coeficiente de Chézy ( $\text{m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ )
$C^+, C^-$	Linhas características
$C_a$	Coeficiente de arrastamento (-)
$C_{a ij}$	Concentração de referência correspondente à fracção $ij$ da curva granulométrica
$C_{cbo}$	Concentração de <i>CBO</i> na coluna de água ( $\text{kg m}^{-3} / \text{mg l}^{-1}$ )
$C_{cl}$	Clorinidade da água ( $S/1.80655 \text{ ‰}$ )
$C_D$	Coeficiente de atrito ( <i>drag coefficient</i> ) (-)
$C_f$	Coeficiente da força hidrodinâmica (-)
$C_{fa}, C_{fp}, C_{fs}$	Coeficientes de forma (-)
$C_{fo}$	Concentração de fósforo orgânico na coluna de água ( $\text{kg m}^{-3} / \text{mg l}^{-1}$ )
$C_{fp}$	Concentração de fitoplâncton na coluna de água ( $\text{kg m}^{-3} / \text{mg l}^{-1}$ )
$C_{fs}$	Concentração de fosfato na coluna de água ( $\text{kg m}^{-3} / \text{mg l}^{-1}$ )
$C_i(\cdot)$	Função que toma valores iguais a 0.0, 0.5 ou 1.0, consoante o posicionamento em relação ao domínio de cálculo da função Delta de Dirac centrada no ponto $i$
$C_{ij}$	Concentração de sólidos em suspensão à altura $z$ , correspondente à fracção $ij$ da curva granulométrica ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$C_l$	Nebulosidade (-)

$C_m$	Concentração média numa secção transversal ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
$C_{ml}$	Concentração média em meio limitado ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
$C_{mnl}$	Concentração média em meio não limitado ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
$C_{mass}$	Coefficiente de massividade (-)
$C_{na}$	Concentração de nitrato na coluna de água ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
$C_{nh}$	Concentração de amónia na coluna de água ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
$C_{ni}$	Concentração de nitrito na coluna de água ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
$C_{no}$	Concentração de azoto orgânico na coluna de água ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
$C_o$	Coefficiente orográfico (-)
$C_{od}$	Concentração de oxigénio dissolvido na coluna de água ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
$C_{od,sat}$	Concentração de saturação de oxigénio dissolvido na coluna de água ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
$C_p$	Coefficiente da pressão hidrodinâmica (-)
$C_r$	Coefficiente de reflexão (-)
$C_s$	Coefficiente de sustentação (-); concentração volumétrica de sedimentos em suspensão ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ ); concentração volumétrica média de sedimentos (-); concentração de sólidos totais ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ ); concentração de saturação do oxigénio dissolvido num meio aquático ( $kg\ m^{-3} / mg\ l^{-1}$ )
XIV	
$d$	Dia; dia juliano ( <i>dia</i> )
$D$	Diâmetro característico ( $m$ )
$\tilde{D}$	Vector associado à extensão TVD do método de MacCormack
$D_*$	Parâmetro de grão adimensional (-)

$D_{16}$	Diâmetro da malha do peneiro onde passam 16% de material, em peso ( $m$ )
$D_{50}$	Diâmetro mediano ( $m$ )
$D_{84}$	Diâmetro da malha do peneiro onde passam 84% de material, em peso ( $m$ )
$D_{90}$	Diâmetro da malha do peneiro onde passam 90% de material, em peso ( $m$ )
$D_c$	Diâmetro característico do material sólido do fundo e margens de um canal ( $m$ )
$D_d$	Densidade de drenagem ( $km\ km^{-2}$ )
$D_{fp}$	Taxa de deposição de fitoplâncton ( $dia^{-1}$ )
$D_g$	Diâmetro característico da granulometria do fundo ( $m$ )
$D_{gr}$	Parâmetro da fórmula de Ackers e White (-)
$D_{ij}$	Diâmetro mediano da fracção $ij$ da curva granulométrica ( $m$ )
$D_m$	Difusividade mássica molecular ( $m^2\ s^{-1}$ )
$D_s$	Diâmetro característico dos sedimentos ( $m$ )
$D_x, D_y$	Coefficientes de difusão, segundo as direcções $x$ e $y$ , respectivamente ( $m^2\ s^{-1}$ )
$\bar{D}_t$	Tensor da difusividade mássica turbulenta
$D_{tm}$	Coefficiente de dispersão turbulenta médio ( $m^2\ s^{-1}$ )
$D_{tx}$	Coefficiente de dispersão turbulenta segundo $x$ ( $m^2\ s^{-1}$ )
$D_{ty}$	Coefficiente de dispersão turbulenta segundo $y$ ( $m^2\ s^{-1}$ )
$D_{tz}$	Coefficiente de dispersão turbulenta segundo $z$ ( $m^2\ s^{-1}$ )
$e$	Propriedade intensiva
$e_1, e_2$	Vectores próprios da matriz jacobiana ( <i>esquemas de alta resolução</i> )

$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$	Vectores próprios da matriz jacobiana aproximada ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$e_{sa}$	Pressão de vapor de saturação à temperatura do ar ( $Pa$ )
$e_{sw}$	Pressão de vapor de saturação à temperatura da água ( $Pa$ )
$e_w$	Emissividade da superfície da água (0.97)
$E$	Propriedade extensiva; número de Euler (-); parâmetro das fórmulas de Ackers e White e de Yang (-); coeficiente (-)
$E_a$	Espessura da camada activa ( $m$ )
$f$	Coeficiente de atrito (-); função de peso (-); factor de sedimentação ( $m^{1/2}$ ); parâmetro de Coriolis ( $s^{-1}$ )
$f_c$	Coeficiente de atrito devido à corrente (-); função que determina a formação de um canal de drenagem numa célula
$f_{min}$	Valor crítico da função que determina o início da formação de um canal de drenagem numa célula (-)
$f_v$	Frequência de formação de vórtices em torno de obstáculos
$f_w$	Coeficiente de atrito devido à onda (-)
$F$	Força ( $N$ ); coeficiente (-); vector de fluxo do sistema de leis de conservação; parâmetro da fórmula de Yang (-); matriz
$F^*$	Função de fluxo numérico ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$\overline{F}_d$	Amplitude da força hidrodinâmica ( $N$ )
$F_a$	Força de atrito ( $N$ ); força hidrodinâmica de arrastamento ( $N$ )
XVI $F_{fo}$	Fracção de fósforo devido à respiração e mortalidade do fitoplâncton sob a forma de fósforo orgânico (-)
$F_{gr}$	Parâmetro da fórmula de Ackers e White (-)
$F_l$	Factor de limitação do crescimento de fitoplâncton por efeito da luz (-)
$F_n$	Factor de limitação do crescimento de fitoplâncton por efeito dos nutrientes (-)

$F_{nf}$	Factor de limitação do crescimento de fitoplâncton devido à insuficiência do nutriente fósforo (-)
$F_{nh}$	Factor de preferência do fitoplâncton pela assimilação de azoto sob a forma de amónia (-)
$F_{nm}$	Factor de limitação do crescimento de fitoplâncton por insuficiência do nutriente azoto (-)
$F_{no}$	Fracção de azoto devido à respiração e mortalidade do fitoplâncton sob a forma de azoto orgânico (-)
$F_p$	Força de pressão ( $N$ )
$F_r$	Número de Froude (-)
$F_{rc}$	Número de Froude crítico (-)
$F_{rd}$	Número de Froude densimétrico (-)
$F_s$	Força de sustentação ( $N$ )
$F_w$	Força devida ao peso do fluido ( $N$ )
$g$	Aceleração da gravidade ( $m s^{-2}$ )
$G$	Coeficiente (-); parâmetro da fórmula de Yang (-); matriz; vector
$G_m$	Matriz de amplificação relativa ao harmónico $m$
$h$	Profundidade ( $m$ ); altura do escoamento ( $m$ ); altura da coluna de água ( $m$ )
$\bar{h}$	Altura média de uma bacia hidrográfica ( $m$ )
$h_0$	Profundidade inicial ( $m$ ); profundidade média do escoamento em zona não perturbada ( $m$ )
$h_1$	Profundidade em repouso numa albufeira, junto da barragem ( $m$ )
$h_2$	Altura da onda resultante da ruptura de uma barragem ( $m$ )
$h_c$	Profundidade característica ( $m$ ); profundidade do escoamento num leito de cheia ( $m$ )

$h_e$	Profundidade de erosão localizada junto de um obstáculo ( $m$ )
$h_r$	Altura característica de uma forma de fundo (ruga ou duna) ( $m$ )
$H$	Altura de uma onda ( $m$ ); coeficiente (-); profundidade da água numa albufeira, junto da barragem ( $m$ ); elevação da superfície livre acima de um nível de referência ( $m$ ); cota da superfície livre em repouso ( $m$ ); parâmetro da fórmula de Yang (-); matriz
$H_1, H_2$	Matrizes
$H_c$	Profundidade na região central de um canal ( $m$ )
$H_d$	Altura de uma duna (forma de fundo) ( $m$ )
$H_p$	Altura de uma face inclinada do paramento de montante de uma barragem ( $m$ )
$i$	Índice espacial nas equações às diferenças segundo $x$ (-); declive (-); $\sqrt{-1}$ ; índice da dimensão característica da curva granulométrica de uma fracção de sedimentos
$i, i_c$	Inclinação do leito de um canal (-)
$i_{eq}$	Declive de equilíbrio (-)
$I$	Intensidade da luz ( $Wm^{-2}$ )
$I_a$	Fluxo de radiação emitida da atmosfera ( $Wm^{-2}$ )
$I_c$	Fluxo de calor sensível ( $Wm^{-2}$ )
$I_d$	Gradiente da linha de energia (-)
$I_e$	Fluxo de calor latente ( $Wm^{-2}$ )
$I_F$	Índice de forma (-)
$I_G$	Índice de Gravelius (-)
$\bar{I}_i$	Índice de declive médio (-)
$I_o$	Fluxo de radiação solar ( $Wm^{-2}$ )
$I_r$	Fluxo de radiação solar no topo da atmosfera ( $Wm^{-2}$ )

$I_{rs}$	Função integral da altura e do comprimento relativos de uma barragem
$I_{sat}$	Fluxo de radiação solar de saturação ( $W m^{-2}$ )
$I_{sc}$	Constante solar ou fluxo de radiação solar à distância média entre o Sol e a Terra ( $1367 W m^{-2}$ )
$I_w$	Fluxo de radiação emitida da superfície da água ( $W m^{-2}$ )
$I_R$	Índice de Roche (-)
$I_1, I_2$	Integrais correspondentes a forças de pressão ( $m^3$ e $m^2$ , respectivamente)
$j$	Índice espacial nas equações às diferenças, segundo $y$ (-); índice da massa volúmica ou densidade característica da curva granulométrica de uma fracção de sedimentos (-)
$J$	Perda de carga unitária (-)
$J_0(kr)$	Função de Bessel de primeira espécie e ordem zero
$J$	Matriz jacobiana do sistema de equações de conservação ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$\tilde{J}$	Matriz jacobiana aproximada, associada à linearização do sistema de equações de conservação ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$J_{rs}$	Função integral da altura e do comprimento relativos de uma barragem
$J_x, J_y$	Declives da linha de energia (-)
$k$	Constante (-); constante de Von Kármán (0.4) (-); coeficiente de atrito (-); número de onda ( $w/c$ ) ( $m^{-1}$ ); coeficiente de extinção da luz ( $m^{-1}$ ); índice relativo às componentes das decomposições hiperbólicas das variáveis dependentes do fluxo numérico e dos termos fonte ( <i>esquemas de alta resolução</i> ); vector
$k'$	Coefficiente de atrito equivalente (-)
$k_0$	Número de onda ( $2\pi/L$ ) ( $m^{-1}$ )

$k_1, k_2$	Coeficientes de desoxigenação e de rearejamento ( $dia^{-1}$ )
$k_d$	Coeficiente de decaimento de um constituinte ( $dia^{-1}$ )
$k_e$	Coeficiente de erosão ( $kg N^{-1} s^{-1}$ )
$k_l, k_r$	Coeficientes de reacção de 1ª ordem ( $dia^{-1}$ )
$K_m$	Taxa de mortalidade do fitoplâncton ( $dia^{-1}$ )
$k_N$	Rugosidade de Nikuradse ( $\approx 2.5D_{50}$ ) ( $m$ )
$k_R$	Rugosidade global [ $(k_R)_f + (k_R)_g$ ] ( $m$ )
$(k_R)_f$	Rugosidade de forma, ou devida às configurações do fundo ( $m$ )
$(k_R)_g$	Rugosidade de pele, ou devida ao grão ( $\approx 3D_{90}$ ) ( $m$ )
$k_s$	Rugosidade do fundo ( $m$ )
$k_t$	Coeficiente de transferência de calor ( $s^{-1}$ )
$K$	Coeficiente da fórmula de Manning-Strickler ( $m^{1/3} s^{-1}$ ); número de Keulegan-Carpenter (-); energia cinética turbulenta ( $m^2 s^{-2}$ ); matriz
$K_A$	Coeficiente que traduz a influência da distribuição de velocidades na secção transversal de um escoamento e da orientação de um obstáculo (-)
$K_{cbo}$	Constante de semi-saturação para a limitação da oxidação pelo oxigénio ( $mg O_2 l^{-1}$ )
$K_D$	Coeficiente que traduz a influência da dimensão dos sedimentos (-)
$K_f$	Coeficiente que traduz o efeito da forma de um obstáculo (-)
$K_{fp}$	Constante de semi-saturação relativa à limitação da regeneração de nutrientes pelo fitoplâncton ( $mg Cl^{-1}$ )
$K_g$	Coeficiente que traduz a influência da forma da secção transversal do escoamento (-)

$K_h$	Coeficiente que traduz o efeito da profundidade do escoamento em obstáculos curtos (-)
$K_L$	Coeficiente que traduz o efeito do comprimento dos obstáculos (-)
$K_m$	Taxa de mortalidade do fitoplâncton ( $dia^{-1}$ )
$K_{na}$	Constante de desnitrificação ( $mg O_2 l^{-1}$ )
$K_{nf}$	Constante de semi-saturação para o fósforo ( $mg O_2 l^{-1}$ )
$K_{nh}$	Constante de semi-saturação para a limitação da nitrificação pelo oxigénio ( $mg O_2 l^{-1}$ )
$K_{mn}$	Constante de semi-saturação para o azoto ( $mg O_2 l^{-1}$ ).
$K_o$	Coeficiente com valores típicos entre 1.15 e 1.21
$K_p$	Coeficiente função da forma dos encontros de pontes (toma valores entre 1.10 e 2.15)
$K_r$	Coeficiente da fórmula de Manning-Strickler referente à rugosidade superficial ( $26/D_{90}^{1/6}$ ) ( $m^{1/3} s^{-1}$ )
$K_U$	Coeficiente que traduz o efeito da velocidade média do escoamento não perturbado (-)
$K_\theta$	Coeficiente que traduz a influência do alinhamento de um obstáculo em relação à direcção do escoamento (-)
$K_\sigma$	Coeficiente que traduz o efeito da forma da curva granulométrica (-)
$l$	Comprimento de mistura ( $m$ )
$l_m$	Comprimento de mistura do fluido não-estratificado ( $m$ )
$L$	Comprimento ( $m$ ); comprimento de onda ( $m$ ); comprimento de um obstáculo ( $m$ ); macro-escala da turbulência ( $m$ ); valor de $CBO$ num instante $t$
$L(.)$	Operador diferencial

$L_0$	Valor inicial de <i>CBO</i>
$L_b$	Comprimento axial de uma bacia hidrográfica ( <i>m</i> )
$L_c$	Comprimento de um obstáculo num leito de cheia ( <i>m</i> )
$L_d$	Comprimento de uma duna (forma de fundo) ( <i>m</i> ); contribuição de <i>CBO</i> por difusão
$L_e$	Comprimento de um rectângulo equivalente ( <i>m</i> )
$L_{ji}$	Função dos parâmetros $\lambda_i$ e $\lambda_j$ , e do ângulo entre a normal à face de uma barragem e a direcção <i>x</i>
$L_s$	Diferença de fase entre as localizações das secções de tensão máxima de atrito no fundo e de máximo transporte sólido em suspensão, no cálculo de $H_a/L_a$ ( <i>m</i> )
<i>m</i>	Parâmetro da fórmula de Ackers e White (-); massa de sedimento por unidade de área ( $kg\ m^{-2}$ )
$M_0$	Massa de poluente rejeitada num meio líquido, igualmente distribuída ao longo de toda a secção <i>A</i> ( <i>kg</i> )
$M_1, M_2$	Funções da equação de continuidade da fase sólida ( $m^2\ s^{-1}$ )
$M_3$	Massa total de uma substância rejeitada num meio líquido ( <i>kg</i> )
$M_{fo}$	Taxa de mineralização do fósforo orgânico ( $dia^{-1}$ )
$M_{fo20}$	Taxa de mineralização do fósforo orgânico para a temperatura de referência ( $20^\circ C$ ) ( $dia^{-1}$ )
$M_{no}$	Taxa de mineralização do azoto orgânico ( $dia^{-1}$ )
XXII $M_{no20}$	Taxa de mineralização do azoto orgânico para a temperatura de referência ( $20^\circ C$ ) ( $dia^{-1}$ )
<i>n</i>	Coefficiente (-); expoente temporal nas equações às diferenças (-); parâmetro da fórmula da Ackers e White (-); vector normal a uma face ou fronteira
$n_k$	Coefficiente de rugosidade de Manning-Strickler ( $1/K$ ) ( $m^{-1/3}\ s$ )

$N$	Número de pontos, valores ou incógnitas
$N_c$	Número de valores da pressão ou do seu gradiente conhecidos em toda a fronteira de uma albufeira
$N_{na}$	Taxa de desnitrificação ( $dia^{-1}$ )
$N_{na20}$	Taxa de desnitrificação para a temperatura de referência ( $20^{\circ}C$ ) ( $dia^{-1}$ )
$N_{nh}$	Taxa de nitrificação ( $dia^{-1}$ )
$N_{nh20}$	Taxa de nitrificação para a temperatura de referência ( $20^{\circ}C$ ) ( $dia^{-1}$ )
$N_i, N_j$	Funções de forma, ou de interpolação (-)
$O_{cbo}$	Taxa de oxidação de <i>CBO</i> ( $dia^{-1}$ )
$O_{cbo20}$	Taxa de oxidação de <i>CBO</i> para a temperatura de referência ( $20^{\circ}C$ ) ( $dia^{-1}$ )
$p$	Pressão ( $Pa$ )
$\bar{p}$	Amplitude da pressão hidrodinâmica ( $Pa$ ); vector
$p'$	Pressão hidrodinâmica ( $p'(x, y, z) = \bar{p}(x, y, z)e^{i\omega t}$ ) ( $Pa$ )
$p_0$	Pressão na fronteira superior da camada limite ( $Pa$ )
$p_{mov}$	Probabilidade de uma fracção de sedimentos entrar em movimento
$P$	Perímetro molhado ( $m$ )
$P_b$	Perímetro de uma bacia hidrográfica ( $m$ )
$P_c$	Perímetro de um círculo de igual área de uma bacia hidrográfica ( $m$ )
$P_{fp}$	Taxa de crescimento efectivo de fitoplâncton ( $dia^{-1}$ )
$P_{ij}$	Proporção volumétrica da fracção <i>ij</i> de um fundo activo
$P_{mol}$	Perímetro molhado ( $m$ )

$q$	Caudal líquido por unidade de largura ( $m^2s^{-1}$ ); coeficiente de amortecimento das ondas de pressão de origem sísmica ( $m^{-1}s$ )
$\bar{q}$	Vector
$q_l$	Caudal líquido lateral por unidade de largura de um tributário ( $m^3s^{-1}/m.l.$ )
$q_n$	Caudal sólido lateral por unidade de largura de um tributário ( $m^3s^{-1}/m.l.$ )
$q_x, q_y$	Caudais líquidos por unidade de largura ( $m^2s^{-1}$ )
$q_s$	Caudal sólido por unidade de largura ( $m^2s^{-1}$ )
$q_{sa}$	Caudal sólido por arrastamento ( $m^2s^{-1}$ )
$q_{sl}$	Caudal sólido lateral por unidade de largura do curso de água principal e por unidade de largura de um tributário [ $(m^3s^{-1}/m.l.)/m.l.$ ]
$q_{sa_{ij}}$	Caudal sólido por arrastamento correspondente à fracção $ij$ da curva granulométrica ( $m^2s^{-1}$ )
$q_{sp}$	Caudal sólido arrastado por unidade de largura, em peso submerso ( $Nm^{-1}s^{-1}$ )
$q_{ss}$	Caudal sólido em suspensão ( $m^2s^{-1}$ )
$q_{ss_{ij}}$	Caudal sólido em suspensão correspondente à fracção $ij$ da curva granulométrica ( $m^2s^{-1}$ )
$q_{st}$	Caudal sólido total ( $q_{sa} + q_{ss}$ ) ( $m^2s^{-1}$ )
$Q$	Caudal líquido ( $m^3s^{-1}$ )
$Q_c$	Caudal líquido numa secção de um canal ( $m^3s^{-1}$ )
$Q_d$	Caudal total por difusão ( $m^3s^{-1}$ )
$Q_s$	Caudal sólido ( $m^3s^{-1}$ )
$Q_{sl}$	Caudal sólido lateral por unidade de largura de um tributário ( $m^3s^{-1}/m.l.$ )

$Q_u$	Caudal líquido segundo $x$ ( $m^3 s^{-1}$ )
$Q_v$	Caudal líquido segundo $y$ ( $m^3 s^{-1}$ )
$r$	Factor de distorção ( $r = (\lambda_L / \lambda_V)$ ); razão entre a distância instantânea e a distância média entre o Sol e a Terra (-); raio vector ( $m$ )
$R$	Constante (-); fluxo de massa ( $kg s^{-1} m^{-2}$ )
$\tilde{R}$	Matriz contendo os vectores próprios da matriz jacobiana aproximada do sistema de equações de conservação ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$R_*$	Número de Reynolds de atrito (-)
$R_a$	Reflectividade da superfície da água para a radiação emitida da atmosfera (0.03) (-)
$R_b$	Relação de bifurcação (-)
$R_c$	Número de Reynolds devido à corrente (-)
$R_e$	Número de Reynolds (-); resíduo de uma aproximação
$R_{fp}$	Taxa de respiração e mortalidade de fitoplâncton ( $dia^{-1}$ )
$R_g$	Número de Reynolds relativo ao grão (-)
$R_h$	Raio hidráulico ( $m$ ); humidade relativa (-)
$R_i$	Número de Richardson (-)
$R_s$	Albedo ou reflectividade da superfície da água para a radiação solar (0.06) (-)
$R_w$	Número de Reynolds devido à onda (-)
$s$	Densidade (-)
$S$	Distância entre centros de gravidade de massas sólidas ( $m$ ); inclinação da superfície livre (-); vector com os termos fonte do sistema de leis de conservação; salinidade (‰); comprimento de um elemento
$S_{cbo}$	Taxa de variação local da concentração de CBO ( $kg m^{-3} s^{-1}$ )

$S_{fo}$	Taxa de variação local da concentração de fósforo orgânico na coluna de água ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ )
$S_{fp}$	Taxa de variação local da concentração de fitoplâncton na coluna de água ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ )
$S_{fs}$	Taxa de variação local da concentração de fosfato na coluna de água ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ )
$S_l, S_r$	Fonte ou sumidouro de um constituinte ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ )
$S_{na}$	Taxa de variação local da concentração de nitrato na coluna de água ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ )
$S_{nh}$	Taxa de variação local da concentração de amónia na coluna de água ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ )
$S_{no}$	Taxa de variação local da concentração de azoto orgânico na coluna de água ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ )
$S_{od}$	Taxa de variação local da concentração de oxigénio dissolvido na coluna de água ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ )
$S_t$	Número de Strouhal (-)
$t$	Tempo (s)
$t_h$	Tempo solar médio local (h)
$T$	Período (s); temperatura da água ( $^{\circ}C$ )
$T_a$	Temperatura do ar ( $^{\circ}C$ )
$T_k$	Temperatura termodinâmica ( $^{\circ}K$ )
$u$	Velocidade do escoamento segundo $x$ ( $ms^{-1}$ ); vector
$u(t)$	Velocidade instantânea ( $ms^{-1}$ )
$u(z)$	Perfil de velocidades ( $ms^{-1}$ )
$\bar{u}$	Velocidade média do escoamento ( $ms^{-1}$ )
$\hat{u}$	Amplitude da velocidade da onda ( $ms^{-1}$ )

$u_*$	Velocidade de atrito ( $ms^{-1}$ )
$u_{*c}$	Velocidade de atrito crítica ( $ms^{-1}$ )
$u_{*c_{ij}}$	Velocidade de atrito correspondente à fracção $ij$ ( $ms^{-1}$ )
$u_{cr}$	Velocidade crítica adimensional (-)
$u_{\delta}$	Velocidade na fronteira superior da camada limite ( $ms^{-1}$ )
$u_f$	Velocidade do escoamento junto ao fundo ( $ms^{-1}$ ); velocidade da frente da onda resultante da ruptura de uma barragem ( $ms^{-1}$ )
$(u_f)_{cr}$	Velocidade crítica junto ao fundo ( $ms^{-1}$ )
$u_{f_{ij}}$	Velocidade de atrito junto ao fundo correspondente à fracção $ij$ da curva granulométrica ( $ms^{-1}$ )
$u_i^n$	Componente harmónica; valor da velocidade do escoamento na secção $i$ da malha e no instante de cálculo $n\Delta t$ ( $ms^{-1}$ ).
$u_t$	Componente da velocidade do escoamento transversal na direcção do escoamento principal ( $ms^{-1}$ )
$U$	Velocidade do escoamento ( $ms^{-1}$ ); componente da velocidade média segundo a direcção $x$ ( $ms^{-1}$ ); número de Ursell; vector com as variáveis dependentes do sistema de conservação
$\tilde{U}$	Vector com os valores das variáveis dependentes previstos pelo método de MacCormack; velocidade média aproximada de Roe ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$\tilde{\tilde{U}}$	Vector com os valores das variáveis dependentes corrigidos pelo método de MacCormack ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$U(t)$	Velocidade instantânea ( $ms^{-1}$ )
$\bar{U}$	Velocidade média do escoamento numa secção transversal ( $ms^{-1}$ )
$\hat{U}$	Amplitude da velocidade da onda ( $ms^{-1}$ )

$U_c$	Velocidade característica ( $ms^{-1}$ ); velocidade média do escoamento na secção transversal de um canal ( $ms^{-1}$ )
$\bar{U}_R$	Velocidade média do escoamento, medida relativamente a uma superfície de controlo ( $ms^{-1}$ )
$\bar{U}_S$	Velocidade média de uma superfície de controlo ( $ms^{-1}$ )
$v$	Velocidade do escoamento segundo $y$ ( $ms^{-1}$ )
$V$	Volume ( $m^3$ ); componente da velocidade média segundo a direcção $y$ ( $ms^{-1}$ )
$w$	Frequência ( $2\pi/T$ ) ( $s^{-1}$ ); frequência de excitação ( <i>sismo</i> ) ( $rad s^{-1}$ ); velocidade do escoamento segundo $z$ ( $ms^{-1}$ )
$\tilde{w}$	Relação que traduz a influência da frequência de excitação de um movimento sísmico (-)
$w_f$	Frequência natural fundamental de uma albufeira [ $\pi c/(2H)$ ] ( $rad s^{-1}$ )
$w_q$	Velocidade de queda ( $ms^{-1}$ ); velocidade de queda dos sedimentos, em função da concentração ( $ms^{-1}$ )
$w_{q_{ij}}$	Velocidade de queda correspondente à fracção $ij$ da curva granulométrica
$w_s$	Velocidade de sedimentação ( $ms^{-1}$ )
$w_v$	Velocidade do vento ( $ms^{-1}$ )
$w_{50}$	Velocidade de queda correspondente ao $D_{50}$ ( $ms^{-1}$ )
$W$	Parâmetro da velocidade de queda (-); peso submerso duma partícula ( $Nm^{-3}$ )
$W_e$	Número de Weber (-)
$W_0$	Taxa de rejeição de um constituinte ( $kg s^{-1}$ )

$W_{jpd}$	Velocidade de deposição de fitoplâncton ( $m dia^{-1}$ )
$W_i, W_j$	Funções de peso (-)
$W_q$	Velocidade de queda das partículas sólidas ( $ms^{-1}$ )
$x$	Coordenada cartesiana no plano horizontal ( $m$ ); vector
$x_s$	Deslocamento máximo de uma partícula de fluido ( $m$ )
$y$	Coordenada cartesiana no plano horizontal ( $m$ )
$\bar{y}$	Coordenada adimensional ( $y/B$ ) (-)
$Y_0(kr)$	Função de Bessel de segunda espécie e ordem zero
$Y_r(\bar{y}), Z_s(\bar{z})$	Funções da solução para o cálculo da amplitude da pressão hidrodinâmica sobre o paramento de montante de uma barragem devido à actuação de um sismo
$z$	Coordenada cartesiana no plano vertical ( $m$ )
$z_0$	Medida da rugosidade ( $k_N/30$ ) ( $m$ )
$\bar{z}$	Altitude média de uma bacia hidrográfica ( $m$ ); coordenada adimensional ( $z/H$ ) (-)
$\alpha$	Ângulo da superfície de deslizamento de um talude com a horizontal ( $^{\circ}$ ); altitude solar ( $0 < \alpha < \pi/2$ rad); ângulo de entrada de um escoamento lateral ( $^{\circ}$ )
$\alpha_{ccl}$	Razão entre carbono e clorofila_a no fitoplâncton ( $mg C mg clorifila_a$ )
$\alpha_{fc}$	Razão entre fósforo e carbono no fitoplâncton ( $mg P mg C^{-1}$ )
$\alpha_G$	Coefficiente que traduz a relação entre a erosão junto de esporões e a erosão por contracção em estreitamentos (-)
$\tilde{\alpha}_k$	Coefficiente associado à decomposição das variáveis, no espaço próprio da matriz jacobiana aproximada ( $m^2$ ) ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$\alpha_{nc}$	Razão entre azoto e carbono no fitoplâncton ( $mg N mg C^{-1}$ )

$\alpha_{oc}$	Razão entre oxigénio e carbono ( $mg O_2 mg C^{-1}$ )
$\alpha_{on}$	Razão entre oxigénio e azoto ( $mg O_2 mg N^{-1}$ )
$\alpha_r$	Coefficiente de reflexão das ondas de pressão ( <i>sismo</i> )
$\beta$	Coefficiente; ângulo do perfil longitudinal do leito com a horizontal ( $^{\circ}$ ); ângulo da superfície do fundo de uma albufeira com a direcção $x$ ( $^{\circ}$ ); gradiente lateral de uma força devida ao escoamento secundário, por unidade de comprimento de um canal ( $\approx 0.15$ ); coefficiente de correcção da quantidade de movimento
$\beta(C)$	Somatório das parcelas de um constituinte produzidas e/ou transformadas através de reacções ( $kg m^{-3} s^{-1} / mg l^{-1} s^{-1}$ )
$\tilde{\beta}_k$	Coefficiente associado à decomposição dos termos fonte do sistema de equações, no espaço próprio da matriz jacobiana aproximada ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$\beta_r$	Raiz complexa
$\chi$	Ângulo de um fundo alterado com a horizontal ( $^{\circ}$ )
$\chi_{20}$	Taxa de respiração do fitoplâncton para a temperatura de referência ( $20^{\circ}C$ ) ( $dia^{-1}$ )
$\delta$	Espessura da camada limite ( $m$ ); declinação do Sol ( $rad$ )
$\delta_{ji}$	Função delta de Kronecker
$\delta_k$	Coefficiente associado à verificação da condição de entropia da solução numérica ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
XXX $\delta_{rs}$	Função da frequência de excitação, da altura e do comprimento relativos de uma barragem
$\delta t$	Incremento temporal duplo de $\Delta t$ , isto é, $\delta t = 2\Delta t$ ( $s$ )
$\delta x$	Incremento espacial duplo de $\Delta x$ , isto é, $\delta x = 2\Delta x$ ( $m$ )
$\Delta^e$	Região de integração (elemento)
$\Delta^i$	Função Delta de Dirac

$\Delta E$	Quantidade da propriedade extensiva $E$
$\Delta H$	Perda de carga (-)
$\Delta m$	Quantidade de massa ( $kg$ )
$\Delta t$	Incremento temporal ( $s$ )
$\Delta x, \Delta y$	Incrementos espaciais no plano horizontal, segundo $x$ e $y$ , respectivamente ( $m$ )
$\Delta z$	Incremento espacial na direção vertical ( $m$ )
$\varepsilon$	Medida de não-linearidades ( $H/h$ , ou $a/h$ ); medida de dissipação da turbulência ( $m$ ); coeficiente médio vertical isotrópico da viscosidade turbulenta ( $m^2 s^{-1}$ )
$\varepsilon_a, \varepsilon_s$	Coefficientes de eficiência da fórmula de Bailard (-)
$\varepsilon_{sa}, \varepsilon_{ss}$	Coefficientes adimensionais da equação de continuidade da fase sólida (modificada)
$\varepsilon_d$	Parâmetro de controlo da viscosidade numérica ( <i>procedimento de Jameson</i> ) (-)
$\phi$	Ângulo de repouso ( $rad$ ); ângulo de atrito médio ao longo de uma superfície de ruptura ( $^\circ$ ); latitude ( $rad$ )
$\phi_k$	Função limitadora de fluxo numérico ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$\Phi$	Parâmetro dependente da função limitadora de fluxo numérico ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$\gamma$	Peso volúmico da água ( $Nm^{-3}$ ); constante de Bowen ( $62.7 PaK^{-1}$ )
$\gamma_s$	Peso volúmico dos sedimentos ( $Nm^{-3}$ )
$\gamma'_s$	Peso volúmico do material sólido submerso ( $Nm^{-3}$ )
$\Gamma$	Parâmetro da solução em regime permanente de uma substância não-conservativa (-)
$\eta$	Elevação da superfície livre relativamente a um nível de referência ( $m$ ); ângulo horário do Sol ( $rad$ )

$\mu_{20}$	Taxa de crescimento máximo do fitoplâncton para a temperatura de referência (20°C) ( $dia^{-1}$ )
$\mu_d$	Coefficiente de atrito dinâmico (-)
$\eta_i^n$	Componente harmónica
$\eta_p$	Elevação da superfície livre devida à contribuição de uma onda progressiva ( $m$ )
$\eta_s$	Raiz complexa
$\eta_s(n)$	Elevação da superfície livre devida à contribuição de ondas estacionárias, ou modos evanescentes ( $m$ )
$\varphi$	Função; direcção do vento ( $rad$ ); variável de campo
$\varphi_d$	Ângulo de atrito interno (°)
$\hat{\varphi}$	Forma aproximada de uma variável de campo
$\tilde{\varphi}$	Valor normalizado de uma variável de transporte escalar (-)
$\lambda$	Porosidade dos sedimentos (0.30~0.40) (-); valor próprio
$\lambda_i, \lambda_j$	Parâmetros da solução de Trefftz-Mikhlin para o cálculo da pressão hidrodinâmica ( <i>sismo</i> ) ( $m^{-1}$ )
$\lambda_I$	Escala de uma variável $I$ ( $I = L, B, H, T, U, V, C, Q, Q_s, k_s, x, y, \dots$ )
$\lambda_1, \lambda_2$	Valores próprios da matriz jacobiana ( $ms^{-1}$ ) ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$	Valores próprios da matriz jacobiana aproximada ( $ms^{-1}$ ) ( <i>esquemas de alta resolução</i> )
$\lambda_r$	Comprimento de onda característico de uma forma de fundo (duna ou ruga) ( $m$ ); comprimento de uma ruga ( $m$ )
$\mu$	Taxa de crescimento máximo de fitoplâncton ( $dia^{-1}$ )
$\mu_{20}$	Taxa de crescimento máximo de fitoplâncton para a temperatura de referência (20°C) ( $dia^{-1}$ )

$\mu_d$	Coeficiente de atrito dinâmico (-)
$\nu$	Viscosidade cinemática ( $m^2 s^{-1}$ )
$\nu_t$	Viscosidade turbulenta ( $m^2 s^{-1}$ )
$\nabla(.)$	Operador gradiente [ <i>grad</i> (.)]
$\nabla^2(.)$	Operador laplaciano [ <i>div grad</i> (.)]
$\pi$	Constante [ $4.0 \tan^{-1}(1.0)$ ] (-)
$\Pi_1$	Parâmetro adimensional (-)
$\Pi_2$	Parâmetro adimensional (-)
$\Pi_3$	Parâmetro adimensional (-)
$\theta$	Parâmetro (-); limitador de fluxo; ângulo entre a normal à face de uma barragem e a direcção $x$ ( $^{\circ}$ ); ângulo da orientação de obstáculos salientes de margens ( $^{\circ}$ ); ângulo da margem de um curso de água com a horizontal ( $^{\circ}$ )
$\theta_{cboo}$	Coeficiente de temperatura referente à oxidação de <i>CBO</i> (-)
$\theta_{fom}$	Coeficiente de temperatura referente à mineralização do fósforo orgânico (-)
$\theta_{fpc}$	Coeficiente de temperatura referente ao crescimento do fitoplâncton (-)
$\theta_{fpr}$	Coeficiente de temperatura referente à respiração do fitoplâncton (-)
$\theta_k$	Relação que se baseia na limitação do fluxo numérico ( <i>esquemas de alta resolução</i> ) (-)
$\theta_{nan}$	Coeficiente de temperatura referente à desnitrificação do nitrato (-)
$\theta_{nhn}$	Coeficiente de temperatura referente à nitrificação da amónia (-)

$\theta_{nom}$	Coeficiente de temperatura referente à mineralização do azoto orgânico (-)
$\theta_{oda}$	Coeficiente de temperatura referente ao rearejamento por acção do vento (-)
$\theta_{odh}$	Coeficiente de temperatura referente ao rearejamento por acção do escoamento (-)
$\theta_{odr}$	Coeficiente de temperatura referente ao rearejamento (-)
$\Theta$	Parâmetro ( $0.5 \leq \Theta \leq 1.0$ ) (-); parâmetro de Shields (-)
$\Theta_c$	Parâmetro crítico de Shields (-)
$\Theta_n$	Ângulo de declive do fundo perpendicular à direcção do escoamento (-)
$\rho$	Massa volúmica da água ( $kg\ m^{-3}$ )
$\rho_s$	Massa volúmica dos sedimentos ( $kg\ m^{-3}$ )
$\sigma$	Parâmetro da água pouco profunda ( $h/L$ ) (-); constante de Stefan-Boltzmann ( $5.67 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$ ); frequência ( $2\pi/T$ ) ( $s^{-1}$ )
$\sigma_D$	Coeficiente de gradação do material de fundo (-)
$\tau, \tau'$	Tensão ( $Nm^{-2}$ ); tensão de atrito ( $Nm^{-2}$ )
$\tau(t)$	Tensão de atrito instantânea ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_c$	Tensão de atrito crítica ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_{c_{50}}$	Tensão de atrito crítica para movimentar uma granulometria caracterizada pelo seu diâmetro mediano ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_{c_{ij}}$	Tensão crítica correspondente à fracção $ij$ da curva granulométrica ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_d, \tau'_d$	Tensão de atrito devida a formas de fundo ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_g, \tau'_0$	Tensão de atrito devida à rugosidade do grão ( $Nm^{-2}$ )

$\tau_f$	Tensão associada a formas de fundo ( $Nm^{-2}$ ); tensão de atrito no fundo ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_l$	Tensão laminar de origem viscosa ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_t$	Tensão de atrito total ( $Nm^{-2}$ ); tensão turbulenta (Reynolds) ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_{0c}, (\tau_0)_{cr}$	Tensão crítica de arrastamento ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_0, \tau(\xi)$	Tensão de atrito no fundo ( $Nm^{-2}$ )
$\tau_{xx}, \tau_{xz} \dots \tau_{zz}$	Componentes do tensor das tensões ( $Nm^{-2}$ )
$u_k$	Número de Courant local aproximado ( <i>esquemas de alta resolução</i> ) (-)
$\Omega$	Domínio; área ( $m^2$ ); vorticidade ( $s^{-1}$ ); velocidade angular de rotação da Terra ( $rad s^{-1}$ )
$\xi$	Cota do perfil longitudinal do leito, ou do talvegue ( $m$ )
$\psi(y, z)$	Função de forma de deformação de uma barragem ( $\leq 1$ )
$\zeta$	Variação da superfície livre ( $m$ ); coeficiente de actividade no fundo; vector
$\zeta_0$	Amplitude de uma onda sinusoidal ( $m$ )
$O(\cdot)$	Ordem de grandeza
$\partial(\cdot)/\partial(\cdot)$	Derivada parcial
$\Delta(\cdot)$	Variação / diferença
*	Variável adimensional; aproximação <i>upwind</i>
'	Variável adimensional; flutuação
[.]	Matriz
{}	Vector

(Página deixada propositadamente em branco)

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Enquadramento geral

Ao longo de milhões de anos foi-se estabelecendo entre nós, que não enquadrámos uma região particularmente afectada por condições naturais adversas, um *quase*-equilíbrio natural nos meios fluviais, em ambientes estuarinos e na orla costeira. Este equilíbrio, que no passado apenas foi perturbado pelo dinamismo próprio resultante do balanço entre as acções forçadoras, os processos sedimentares e a forma do leito aluvionar, só muito recentemente (à escala geológica) começou a ser quebrado por acções de origem antropogénica, entendidas estas como as verdadeiras causas, directas ou indirectas, que afectam e degradam aquele dinâmico equilíbrio natural.

Com efeito, importa notar que na costa portuguesa a construção de obras ditas de protecção costeira nem sempre constituiu uma necessidade natural; bem pelo contrário, muitas das actuais necessidades de protecção costeira resultaram exactamente em consequência de algumas destas obras entretanto construídas e com consequências e efeitos não raramente bastante nefastos. Naturalmente que a estas obras dever-se-ão juntar muitas outras construídas em meios fluviais, e com efeitos fortemente desequilibradores e igualmente perniciosos do ponto de vista ambiental. Os permanentes défices de sedimentos que afluem à orla costeira portuguesa são disso a prova evidente.

Juntando a estas acções, com efeitos mais ou menos localizados, outras ocorrências globais, como o previsível aumento de situações de tempestades, o degelo das calotes polares e a consequente subida do nível médio das águas do mar, julgo mesmo que será pouco realista pensar-se que alguma vez ou de alguma forma será possível compensar estes desequilíbrios.

Por conseguinte, esta “batalha” que o homem iniciou na sua tentativa de *domesticar* os regimes naturais poderá tornar-se interminável, mantendo-se a actual gestão (ou falta dela) essencialmente caracterizada por intervenções não planeadas nos meios hídricos. Poder-se-ão contemplar situações pontuais, todavia estas nada mais constituirão que simples desequilíbrios que a própria natureza se encarregará de reavaliar e ultrapassar com evidentes reflexos negativos mais ou menos localizados.

Os ciclos de erosão-transporte-deposição da generalidade dos principais rios portugueses, que num passado já não muito recente foram os principais responsáveis pela abundante alimentação das extensas zonas arenosas vestibulares e litorais, encontram-se hoje em dia muito condicionados, essencialmente por limitações impostas ao transporte pelas obras hidráulicas (sobretudo as barragens) e pelas extracções dos já escassos volumes clásticos em circulação.

Para uma correcta e sustentável gestão de uma bacia hidrográfica, e sob pena de uma contínua e acelerada degradação global das características e condições ambientais, urge reequilibrar o sistema repondo os enormes volumes sedimentares em défice, devendo para o efeito proceder-se a um cuidadoso inventário das extracções de sedimentos no domínio hídrico.

É igualmente imprescindível proceder à monitorização do transporte sólido nas bacias hidrográficas, realizando campanhas de medição que possibilitem uma verdadeira caracterização das situações actuais e que permitam avaliar as evoluções topográficas recentes dos leitos fluviais, identificando os sectores com tendências de assoreamento, estabilização e erosão. Tais informações são essenciais como suporte da definição do desenvolvimento estratégico e de objectivos específicos.

Desde já, e como medida de prevenção, é urgente atenuar os efeitos de atitudes e acções antropogénicas negativas, “atacando” as causas que dão origem a desequilíbrios ambientais mais ou menos irreversíveis.

Aceitando como necessárias as extracções de sedimentos em meio hídrico, tanto por motivos de regularização fluvial e de navegabilidade como por razões económicas, nomeadamente para a indústria da construção civil, outro conjunto de questões igualmente pertinentes se levanta; ou seja, entendendo aqui as extracções em zonas de deposição não seguidas de reposição ou devolução ao meio hídrico em zonas de erosão, como seria desejável, importa encontrar respostas para as seguintes questões: Quais serão os locais de extracção mais apropriados? Que quantidades de sedimentos se deverão/poderão extrair e com que frequência?

Para a selecção dos eventuais locais de extracção de sedimentos dever-se-á proceder a uma análise profunda da evolução de cada sistema, colhendo na natureza os ensinamentos necessários e, com o apoio de rigorosos levantamentos topográficos, avaliar as situações de referência e as tendências evolutivas, tendo por base as características geológicas e sedimentares dos leitos aluvionares. Após esta fase, e para cada potencial

conjunto de escolhas, deverão realizar-se simulações físicas e/ou computacionais dos processos morfodinâmicos a médio e longo prazos, procurando antecipar as respostas de todo o sistema no seu conjunto, desde a nascente até à foz.

A queda da ponte de Entre-os-Rios, no rio Douro, em Março de 2001, constituiu um forte alerta para a necessidade de se manterem actualizados os levantamentos topográficos dos leitos, o que apenas se consegue com medidas de gestão que passem por uma monitorização, verificação e fiscalização permanentes.

A exploração de grandes empreendimentos com fins múltiplos construídos em meios hídricos, de que se destacam as barragens de grandes dimensões e as respectivas albufeiras, exige uma correcta coordenação entre as diversas entidades com competências na sua gestão, em particular tratando-se de uma obra de regularização fluvial, pelas fortes implicações que as “aparentemente simples” medidas de gestão poderão provocar em todo o vale situado a jusante do empreendimento.

Independentemente dos diferentes interesses em jogo, porventura antagónicos, está acima de tudo a segurança de pessoas e bens que poderão ser potencialmente afectados por uma incorrecta medida de gestão.

A situação vivida no Baixo-Mondego em Janeiro de 2001, fundamentalmente em consequência de uma gestão menos adequada da barragem da Aguieira, não pode ser simplesmente esquecida ou ignorada. Bem pelo contrário, as ocorrências então vividas demonstraram que a gestão de um empreendimento com fins múltiplos em condições de segurança exige a conciliação de vários interesses e a procura de soluções “óptimas” que só poderão ser encontradas com base em critérios rigorosamente científicos.

Como sublinha Cunha (2002) “não têm sido cumpridas as recomendações de projecto em termos da cota máxima de exploração da Barragem da Aguieira durante o período de Inverno, com as inerentes consequências na capacidade de amortecimento dos picos de cheia afluentes a Coimbra”. Com efeito, “nos últimos doze anos, registaram-se por cinco vezes em Coimbra caudais que só deveriam ocorrer com uma frequência centenária se existisse uma gestão das obras hidráulicas de acordo com o preconizado em projecto; daqui resulta um maior desgaste das estruturas hidráulicas do Baixo-Mondego e um maior risco de inundação”.

De facto, verificou-se que os diques do Baixo-Mondego ruíram em condições naturais menos extremas do que aquelas para que foram

projectados, o que comprova, nomeadamente, a falta de manutenção das obras existentes com a frequência e a extensão necessárias. Os diques encontravam-se fragilizados em vários pontos, em consequência de assentamentos e de erosões, nomeadamente as provocadas por cheias anteriores. A cobertura vegetal do leito era exagerada, produzindo um aumento da rugosidade que terá contribuído para uma redução da capacidade de transporte em várias secções do rio.

Importa ainda sublinhar a natural tendência das populações para ocuparem a planície aluvial em consequência da “falsa” sensação de segurança que resulta da construção de obras de regularização fluvial. Com efeito, não é admissível que obras com carácter permanente e uma importante função social sejam construídas em áreas de elevado risco, como sejam, por exemplo, os casos da ETAR de Ribeira de Frades e o Quartel dos Bombeiros de Montemor-o-Velho, que foram inundados em consequência das cheias de Janeiro de 2001.

É obviamente importante implementar obras de protecção contra cheias, mas é igualmente necessário sensibilizar as comunidades humanas em condições de serem (ou virem a ser) potencialmente afectadas. Em cada caso particular, os estudos a desenvolver deverão ter fundamentalmente dois objectivos: a delimitação de áreas susceptíveis de serem inundadas com determinado grau de risco e a determinação de valores para utilização em tempo real, com finalidades operacionais de gestão dos sistemas fluviais, incluindo o funcionamento de sistemas de alerta e aviso de cheias.

A Figura 1.1, obtida em 30 de Janeiro de 2001, revela claramente a violência da cheia ocorrida em 29 de Janeiro, de que resultaram elevados prejuízos e as graves consequências que esta imagem permite adivinhar.

No período de 26 a 30 de Janeiro desse mesmo ano verificaram-se 14 rupturas nos diques do Baixo-Mondego – no Canal Principal, sobretudo na margem esquerda, e no Leito Periférico (Montemor-o-Velho) – e o rápido e violento alagamento dos campos, como se documenta na Figura 1.2.

Como ficou claramente expresso no Relatório Final elaborado pelo Grupo de Trabalho constituído pela Ordem dos Engenheiros (Região Centro) para a análise das cheias ocorridas naquele período, estas terão acontecido devido a um comportamento hidrológico inesperado do rio Ceira, “provavelmente resultante da excessiva desflorestação das encostas produzida pela dramática sucessão de incêndios e/ou por uma política de ordenamento florestal e agrícola inexistente ou inadequada” e, nomeada-

mente, devido à “forma de operação da Aguieira” e à “fragilização da obra do Baixo-Mondego”.



Figura 1.1 - Vista aérea, mostrando ao fundo a planície aluvial completamente inundada e, em primeiro plano, a povoação de Ereira já convertida em ilha (foto de A. Carriço, 2001/01/30, publicada em Cunha, 2002).



Figura 1.2 - Panorama da ruptura no dique direito do Canal Principal (Baixo Mondego), junto a Santo Varão (foto de A. Carriço, 2001/01/30, publicada em Cunha, 2002).

Nesta conformidade, entre outros aspectos, aquele Relatório recomenda: *i)* que seja assegurada a manutenção regular e efectiva do sistema de regularização do Baixo-Mondego; *ii)* que sejam reavaliadas as condições de operação do sistema Aguieira-Fronhas; *iii)* que seja montado um sistema de gestão em tempo real, e *iv)* que, enquanto outra especificação não for convenientemente justificada, seja rigorosamente seguido o protocolo de operação actualmente em vigor para as barragens da Aguieira e de Fronhas.

Um facto relevante constatado na generalidade dos Planos de Bacia Hidrográfica, cujas primeiras gerações foram concluídas e publicadas nos anos de 2000 e 2001, prende-se com uma gritante falta de qualidade das águas superficiais em todos os rios portugueses. Esta constatação é ainda mais relevante se se atender ao facto de a qualidade destas águas vir sistematicamente a piorar, apesar das campanhas de sensibilização e de alguma “aparente” fiscalização que tem vindo a ser implementada, designadamente por força do cumprimento de legislação da União Europeia.

A título de exemplo, apresenta-se na Figura 1.3 o estado de qualidade das águas destinadas à produção de água para consumo humano, fins aquícolas, balneares e de rega, em várias estações situadas na bacia do rio Mondego, em Junho de 2001 (DRAOT-Centro, Plano de Bacia Hidrográfica do Rio Mondego).

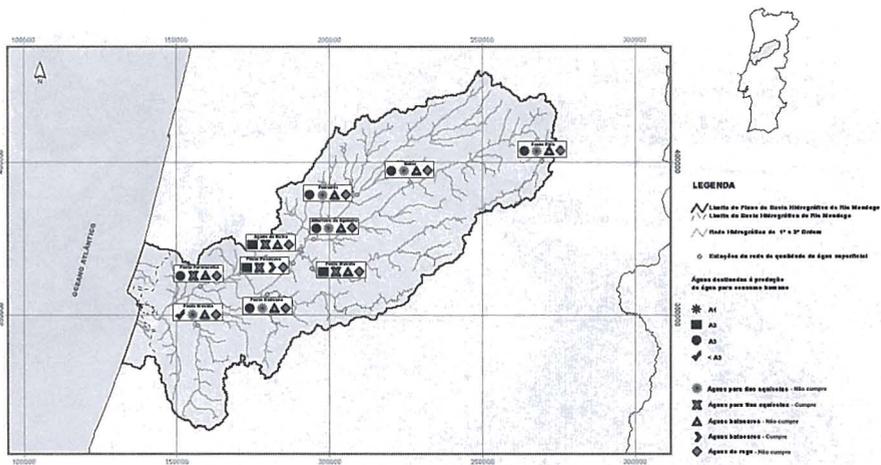


Figura 1.3 - Estado de qualidade das águas destinadas à produção de água para consumo humano, fins aquícolas, balneares e de rega (Plano de Bacia Hidrográfica do Rio Mondego).

Constata-se que, na totalidade das estações, as águas são impróprias para rega e, com excepção da Ponte de Penacova, em todas as restantes estações as águas são igualmente impróprias para fins balneares.

Esta situação terá necessariamente de ser invertida. Por um lado, porque sendo a água um recurso cada vez mais escasso, não podemos deixar de o preservar; por outro lado, porque a obrigatoriedade do cumprimento da Directiva-Quadro da Água a isso nos vai obrigar. Com efeito, esta Directiva estabelece um Quadro de Acção Comunitária no Domínio da Política da Água na União Europeia, constituindo um instrumento de importância primordial para a protecção das águas interiores, de superfície e subterráneas, estuarinas e costeiras, de modo a assegurar as utilizações da água em boas condições de quantidade e qualidade.

A estratégia adoptada na Directiva-Quadro da Água visa atingir um nível elevado de protecção do ambiente, aplicando os princípios da precaução e a acção preventiva, da correcção, prioritariamente na fonte, dos danos ambientais e do poluidor-pagador.

Esta Directiva-Quadro privilegia a gestão integrada dos recursos hídricos no quadro de bacias hidrográficas definidas pelos respectivos limites topográficos (podendo as pequenas bacias hidrográficas ser agrupadas numa única região hidrográfica, ou agrupadas a bacias hidrográficas contíguas de maior dimensão), independentemente dos Estados-membro e dos limites administrativos, englobando, assim, todos os meios hídricos de uma mesma bacia hidrográfica: rios e canais, lagos e albufeiras, aquíferos, estuários e águas costeiras.

A Directiva-Quadro da Água é assim um documento de referência fundamental, que envolve a análise e a monitorização dos impactos das actividades humanas sobre as águas e, designadamente, a análise económica e a aplicação de um regime financeiro às utilizações das águas.

A actividade humana nestas matérias tem sido lamentavelmente caracterizada, entre nós, pelo desperdício, pelo planeamento e gestão desadequados, por intervenções inapropriadas em leitos fluviais, por incorrectas práticas agrícolas e florestais, pela exploração desenfreada de aquíferos, pela poluição industrial, pela insustentável pressão sobre o litoral, etc. Importa, naturalmente, inverter esta tendência, criando por um lado os instrumentos legais necessários, tendo por base a Directiva-Quadro da Água, e desenvolvendo, por outro, as ferramentas técnicas para apoio a tomadas de decisão.

É neste contexto, procurando de algum modo contribuir para dar resposta a estas e outras preocupações em domínios da Hidráulica Fluvial e do Ambiente, que surge esta obra, cujos enquadramento mais específico, objectivo e âmbito se apresentam na secção seguinte.

## 1.2 Enquadramento específico, objectivo e âmbito

Já não são propriamente recentes os princípios, ou modelos matemáticos, comumente utilizados em domínios da Hidráulica Fluvial. Com efeito, decorreram já mais de dois séculos desde a publicação de Euler “*Principes généraux du mouvement des fluides*” e do nascimento de Barré de Saint-Venant, que em Julho de 1871 apresentaria na Academia de Ciências de Paris o célebre trabalho “*Theory of unsteady water flow, with application to river floods and to propagation of tides in river channels*”; um ano mais tarde, em 1872, apareceria o não menos notável trabalho de Boussinesq “*Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal*”.

No decurso destes dois últimos séculos, os engenheiros, que num passado ainda mais longínquo aprenderam a projectar e a construir com base na experiência acumulada e em conhecimentos mais ou menos empíricos, foram assimilando as teorias introduzidas pelos matemáticos. A pouco e pouco, com o tratamento abstracto do movimento da água, outras necessidades e mais vastos horizontes se abriram para novas e mais profundas experiências. Estas necessidades foram sendo satisfeitas pelo trabalho de numerosos investigadores e cientistas. Após as necessárias adaptações da teoria para aplicações práticas correntes, e recorrendo ao uso intensivo dos novos instrumentos que foram surgindo, o engenheiro vê-se agora confrontado com uma nova realidade: a de executar trabalhos modernos de tecnologia avançada para uma sociedade crítica, com investigadores e cientistas de várias formações a debruçarem-se sobre temas que eram tradicionalmente do incontestado domínio do engenheiro.

Como ficou claro na breve abordagem apresentada em 1.1 *Enquadramento geral*, pela diversidade dos temas tratados, a necessidade de se reunirem equipas multidisciplinares para o estudo e tratamento dos diversos problemas que surgem no âmbito da Hidráulica Fluvial e Ambiente é hoje comumente aceite.

Embora reconheça essa realidade, o autor desta obra não pretende abordar as questões de natureza interdisciplinar; antes, porém, limita-se a compilar de forma compreensiva um conjunto de informação dispersa e a sugerir instrumentos úteis para o estudo de potenciais ocorrências e intervenções em domínios da Hidráulica Fluvial e do Ambiente.

Os desenvolvimentos dos temas aqui apresentados resultam em grande parte da sua experiência enquanto docente e investigador, com participação activa em mais de uma dezena de projectos de investigação científica e várias dezenas de trabalhos publicados em domínios das Hidráulicas Fluvial e Marítima.

Os temas são abordados nas perspectivas teórica e prática, mas tendo sempre em vista as necessidades e aplicações correntes. Nesta conformidade, são resolvidos vários exercícios de aplicação e facultados programas informáticos na sua totalidade em versão executável, ou, em parte, em versão fonte, ao longo do texto e Anexos.

Sendo a Hidráulica Fluvial um capítulo da Hidráulica que trata do estudo dos escoamentos em canais artificiais e naturais tendo uma superfície livre submetida à pressão atmosférica, são várias as questões que, em geral, se colocam ao engenheiro envolvido nesta área do saber. Importa assim distinguir os campos ou formas de intervenção em cada um destes grandes domínios: *canais artificiais* e *canais naturais*.

#### • *Canais artificiais*

São os cursos de água construídos pelo homem sobre (ou sob) terra, tais como: os canais a céu aberto (canais de navegação, de adução e descarga, de irrigação e drenagem) ou os canais cobertos nos quais os líquidos não preenchem a totalidade da secção (túneis hidráulicos, aquedutos, drenos e esgotos). As questões neste âmbito são frequentemente apresentadas sob as seguintes formas:

- Conhecidos o caudal a transportar e a inclinação longitudinal, determinar a forma e as dimensões do canal.
- Conhecidos o caudal a transportar e as inclinações do fundo e das paredes de um canal a construir em material com determinada granulometria, calcular as dimensões do canal e as camadas de protecção por forma a evitar erosões no fundo e nas paredes.

- Analisar os comportamentos e calcular as sobrelevações resultantes da existência de curvas, estreitamentos, alargamentos, desvios angulares, abertura de comportas, etc.

As propriedades hidráulicas destes canais são geralmente bastante regulares. A aplicação da teoria hidráulica dá normalmente resultados realistas.

- *Canais naturais*

São os cursos de água que existem naturalmente sobre (ou sob) terra, tais como: torrentes, ribeiras, rios e alguns estuários. As principais intervenções neste domínio são frequentemente apresentadas sob as seguintes formas:

- Projectar obras de regularização fluvial, ou seja, determinar as características geométricas dos rios, ou canais de fundo móvel em equilíbrio, a partir do caudal que se escoia em regime permanente e das dimensões do material de fundo.
- Analisar as implicações na hidrodinâmica e as alterações nos fundos aluvionares resultantes da construção de obras de desvio, barragens, diques, açudes, esporões, pilares de pontes, etc.
- Analisar a evolução das ondas de cheia e definir as zonas de inundação resultantes de: *i*) precipitações intensas; *ii*) abertura de comportas; *iii*) ruptura de barragens, etc.
- Analisar a evolução da qualidade da água e avaliar os impactos ambientais resultantes de descargas de efluentes no sistema de drenagem.

As propriedades hidráulicas destes canais são geralmente bastante irregulares. A aplicação da teoria hidráulica apenas permite obter resultados aproximados, calculados a partir de hipóteses simplificativas.

### **1.3 Tipos e regimes de escoamento**

Dada a importância capital de que se revestem, particularmente ao longo desta obra, estes aspectos são aqui abordados, ainda que de forma necessariamente breve. Os escoamentos são classificados segundo as variações das suas principais propriedades (profundidade e velocidade) em relação ao tempo e ao espaço.

- *Variacão em tempo*

O escoamento diz-se *permanente* se as velocidades média e instantânea, bem como a profundidade, permanecerem invariáveis no tempo em grandeza e direco; nesta conformidade, o caudal permanece constante entre todas as secoes do canal. O escoamento diz-se *não permanente* ou *variável* se a profundidade, bem como os restantes parâmetros do escoamento, variarem com o tempo; nestas circunstâncias o caudal deixa de ser constante.

- *Variacão em espaço*

O escoamento diz-se *uniforme* se a profundidade e todos os restantes parâmetros se mantiverem invariáveis em todas as secoes do canal; nestas circunstâncias, as linhas do fundo e da superfície livre são paralelas. O escoamento diz-se *não-uniforme*, ou variado, se a profundidade e os restantes parâmetros variarem de uma secoa para outra. Um escoamento não uniforme pode ser permanente ou não permanente.

Um escoamento diz-se *gradualmente variado* se a profundidade e os restantes parâmetros variarem muito lentamente de uma secoa para outra. Um escoamento diz-se *rapidamente variado* se a profundidade e os restantes parâmetros variarem rapidamente, por vezes com descontinuidades.

No escoamento de um fluido real com superfície livre há a considerar as forças de inércia, gravíticas e de atrito, de que nos ocuparemos mais adiante. As equaoes do movimento fazem intervir os seguintes parâmetros adimensionais: número de Froude ( $F_r$ ) e número de Reynolds ( $R_e$ ); em funo destes dois parâmetros, os escoamentos classificam-se em:

- fluvial – laminar  $F_r < 1$  ;  $R_e < 500$
- fluvial – turbulento  $F_r < 1$  ;  $R_e > 2000$
- torrencial – laminar  $F_r > 1$  ;  $R_e < 500$
- torrencial – turbulento  $F_r > 1$  ;  $R_e > 2000$

## 1.4 Metodologia

Tendo como objectivo a resoluo prática de problemas relativos  Hidrodinâmica,  Dinâmica Sedimentar, a Obras de Regularizao Fluvial e  Qualidade da água em Ambientes Fluviais, abordam-se neste capítulo (Capítulo 1), ainda que de forma breve, algumas das questoes pertinentes a

que importa dar respostas com base em critérios científicos, procurando reduzir ao mínimo o grau de incerteza que alguns dos factores e parâmetros em causa não deixam de comportar.

No Capítulo 2 abordam-se aspectos relativos às relações de semelhança em modelação física e confrontam-se as modelações física e numerica, numa perspectiva de inter-dependência e complementaridade. Em função dos objectivos da modelação numérica, abordam-se as correspondentes limitações, as capacidades e as perspectivas de evolução. Termina este capítulo com uma análise global dos processos de drenagem e erosão numa bacia hidrográfica.

No Capítulo 3 apresentam-se vários modelos matemáticos para estudos da hidrodinâmica em meios fluviais, descrevem-se algumas soluções analíticas básicas e discutem-se modelos numéricos de resolução das equações com base no método das características, em métodos de diferenças finitas e num esquema de elementos finitos. É ainda apresentada uma breve abordagem a esquemas de alta resolução das equações diferenciais.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo das solicitações hidrodinâmicas resultantes de duas das principais causas que, em fase de exploração, podem conduzir à ruptura de uma barragem (a actuação de um sismo e o deslizamento de um talude situado numa encosta ou no fundo da albufeira), sendo ainda apresentada uma metodologia para a avaliação das potenciais consequências dessa ruptura, incluindo os correspondentes mecanismos de geração e propagação da onda de cheia resultante.

No Capítulo 5 são abordados conceitos básicos sobre o início do movimento de sedimentos e o cálculo de caudais sólidos transportados por arrastamento e em suspensão. São apresentadas as formulações matemáticas (clássica e alternativa) de modelos de transporte sedimentar e são descritos dois modelos matemáticos, um modelo unidimensional (1DH) e outro bidimensional (2DH) em planta. Após breve descrição e implementação dos correspondentes esquemas numéricos, são desenvolvidos alguns exemplos e apresentados resultados de aplicações destes modelos.

No Capítulo 6 tecem-se algumas considerações sobre as principais medidas preventivas e correctivas comumente utilizadas com objectivos de protecção contra cheias, e descrevem-se as alterações provocadas por vários tipos de intervenções humanas nos meios hídricos. São apresentadas soluções para o dimensionamento de secções transversais de canais aluviais

estáveis e resumem-se algumas das principais formulações existentes para o cálculo de profundidades máximas de erosão junto de obstáculos implantados em domínios fluviais.

O Capítulo 7 é dedicado ao estudo dos efeitos de descargas em correntes naturais, sendo apresentados os principais modelos matemáticos para difusão e dispersão de matéria. São analisados modelos analíticos em regime permanente de um única substância conservativa e não-conservativa e modelos de escoamento variável em regimes laminar e turbulento, considerando descargas instantâneas e contínuas. Por fim, apresenta-se um modelo numérico para o cálculo da evolução da concentração de um poluente ao longo de um curso de água, considerado unidimensional no plano horizontal.

Por último, abordam-se no Capítulo 8 aspectos essenciais sobre os principais parâmetros e processos biológicos e químicos normalmente utilizados em modelos de qualidade da água. Analisam-se alguns dos principais constituintes conservativos e não-conservativos, e descrevem-se os ciclos do carbono, do fósforo, do azoto e do oxigénio dissolvido. Discutem-se soluções analíticas para fontes pontuais isoladas e múltiplas e fontes distribuídas. Apresenta-se a estrutura geral de um modelo de qualidade da água de um rio (modelo 1DH) e as estruturas de outros modelos específicos para diferentes domínios e aplicações, tais como: albufeiras e lagos profundos (modelo 1DV); estuários pouco estratificados (modelo 2DH); e, estuários com importantes estratificações e regiões costeiras (modelo *quase*-3D).

(Página deixada propositadamente em branco)

## 2. MODELAÇÃO EM HIDRÁULICA

Abordam-se aspectos relativos às relações de semelhança em modelação física de fenómenos puramente hidrodinâmicos sobre fundos fixos e à modelação de fundos móveis, onde a quantificação dos efeitos de escala não é simples e está ainda hoje longe de ser completamente dominada. Distinguem-se os modelos físicos de fenómenos em que o processo dominante é devido à corrente e aqueles em que a onda tem uma importância acrescida. Confrontam-se as modelações física e numérica, numa perspectiva de interdependência e complementaridade. Em função dos objectivos da modelação numérica, abordam-se as correspondentes limitações, as capacidades e as perspectivas de evolução. Consideram-se aplicações e análises de processos sedimentares e de qualidade da água em diferentes domínios. Apresenta-se uma análise global dos processos de drenagem e erosão numa bacia hidrográfica.

### 2.1 Considerações gerais

Para apoio ao projecto de grandes obras hidráulicas construídas na rede de drenagem de um bacia hidrográfica, seja para efeitos de regularização fluvial, produção de energia eléctrica, irrigação de grandes áreas, abastecimento de água a populações, ou ainda com finalidades recreativas e/ou de lazer, deverá, em geral, recorrer-se a uma das seguintes vias:

- considerar experiências anteriores e a semelhança com sistemas similares;
- utilizar a via analítica e o uso de modelos numéricos; e,
- realizar experiências em modelo físico.

A combinação da experiência acumulada no passado com desenvolvimentos teóricos e o recurso à análise dimensional poderá permitir encontrar soluções suficientemente satisfatórias para alguns dos problemas reais, como é, em geral, o caso de estruturas hidráulicas convencionais, estações de bombeamento e turbinagem, etc. Trata-se de uma via fundamentalmente empírica.

O recurso a modelos numéricos é a via mais recente, sendo também a mais cómoda, a mais rápida e ainda a mais barata. Constitui, hoje em dia, o procedimento mais comum, em particular quando as análises se restringem a aspectos hidrodinâmicos.

No entanto, qualquer destas vias nem sempre permite traduzir com o necessário rigor muitos dos fenómenos que ocorrem no meio hídrico, nomeadamente quando estão em causa escoamentos fortemente turbulentos, o desenvolvimento de importantes camadas limite de fundo, fenómenos de separação e cavitação, ou ainda tratando-se de analisar processos sedimentares e a evolução de fundos móveis.

Imperativos de ordem económica têm conduzido a um progressivo desinvestimento das instituições com fortes tradições e competências em modelação física, e ao seu conseqüente abandono, em detrimento da modelação numérica. Este comportamento tem vindo a acentuar-se fundamentalmente nas últimas duas décadas, em estreita consonância, aliás, com os crescentes desenvolvimentos dos métodos numéricos e os exponenciais ritmos de evolução da indústria informática (*hardware* e *software*).

Importa inverter esta tendência. O recurso à modelação numérica não deve nem pode limitar-se à “cega” aplicação de um modelo numérico, ainda que este utilize um adequado e correcto procedimento para a resolução do apropriado modelo matemático para a análise do fenómeno físico que se pretende simular. Demonstra-se em Antunes do Carmo (1999) como pode ser imprudente a interpretação de resultados de simulações numéricas, e as conseqüentes extrapolações para protótipo, se não houver uma prévia análise crítica desses mesmos resultados e, nomeadamente, a utilização de outras vias de análise para efeitos de validação.

Apesar do forte incremento que a modelação numérica sofreu nas últimas décadas, em resultado da enorme revolução informática e do acentuado desenvolvimento dos métodos numéricos, é um profundo erro admitir que é possível prescindir da modelação física. Com efeito, para muitos problemas reais continua a não haver soluções analíticas e numéricas suficientemente poderosas para se prescindir do contributo de outras vias, as quais devem ser sobretudo encaradas como abordagens complementares, em vez de vias alternativas.

Importará, isso sim, rever o contexto mais alargado do uso da modelação física, recorrendo para o efeito a melhores técnicas e a mais sofisticados equipamentos de medição, orientando-a também para as novas e mais exigentes necessidades que as modelações matemática e numérica impõem.

Qualquer das abordagens (modelação física e modelação numérica) permite aos engenheiros e cientistas analisar diferentes pontos de vista e adquirir conhecimentos complementares sobre os processos envolvidos. Por outro lado, o processo de calibração de um modelo, igualmente necessário em ambas as abordagens, não só fornece boas indicações de causa-efeito como permite evidenciar aspectos menos bem estudados, não compreendidos ou indevidamente considerados.

A complementaridade destas duas vias de análise deverá assim ser encarada tanto do ponto de vista científico, através do estudo dos processos e calibração dos modelos numéricos, como do ponto de vista de projecto, cuja solução final poderá ser significativamente melhorada e os custos do modelo físico e da obra poderão ser francamente reduzidos, na fase de selecção das várias hipóteses de teste e de soluções alternativas, recorrendo à modelação numérica.

Exemplificam-se em seguida alguns problemas cuja resolução apenas se torna possível recorrendo à experimentação – modelação física. Analisam-se posteriormente aspectos particulares relativos à modelação numérica, considerando abordagens a diferentes escalas, com aplicações aos domínios sedimentar e de qualidade da água.

## **2.2 Modelação física**

Incluem-se nesta secção problemas relativos à modelação de escoamentos em canais artificiais e rios, com fundos fixos e móveis, docas, portos, estuários e ainda estruturas hidráulicas correntes. Nesta conformidade, distinguem-se modelos para estudos da hidrodinâmica e da dinâmica sedimentar. Em relação aos primeiros, distinguem-se ainda modelos em que o processo dominante é devido a correntes e aqueles em que a onda tem uma importância acrescida (casos de portos e estuários).

### **2.2.1 Modelos de rios**

Poderão construir-se modelos de rios para o estudo do comportamento hidrodinâmico face a eventuais alterações do seu leito (rectificações, rebaixamentos, estreitamentos, alargamentos, etc.), em torno de obstáculos, ou ainda para a definição de zonas de inundação (mapeamentos), etc. Nestes casos, o estudo poderá, em geral, ser realizado considerando o fundo fixo. Já o estudo dos processos morfodinâmicos exige a construção de um modelo

com fundo móvel, constituído por partículas com determinadas massas volúmicas, dimensões e granulometrias.

Se as relações de semelhança em modelação física dos fenómenos puramente hidrodinâmicos sobre fundos fixos estão já hoje bem estabelecidas e perfeitamente testadas (com algumas excepções, como por exemplo a cavitação e o emulsionamento e arrastamento de ar), o mesmo não pode dizer-se relativamente à modelação de fundos móveis, onde os efeitos de escala não estão ainda hoje tão bem dominados e nem são simples de quantificar.

Na literatura da especialidade podem ser encontradas elevadas gamas de relações de escala para a modelação dos processos morfodinâmicos. De um modo geral, todas estas relações resultam dos processos físicos envolvidos, procurando assegurar a mesma relação de grandeza *protótipo(P)/modelo(M)* no processo considerado dominante. Todavia, esta é uma tarefa impossível de cumprir em modelos de fundo móvel em virtude das complicações adicionais resultantes das interacções fluido-sedimento, sendo sobretudo necessário fazer um esforço no sentido de procurar reproduzir o processo dominante.

Os modelos poderão ser *distorcidos* ou *não-distorcidos*. Um modelo *não-distorcido* é geometricamente similar ao protótipo; por conseguinte, é construído com a mesma escala ( $\lambda_L$ ) para as dimensões horizontal (segundo  $x$ ) e vertical (segundo  $z$ ). Um modelo *distorcido* é construído com diferentes escalas nas direcções  $x$  e  $z$  ( $\lambda_x \neq \lambda_z$ , em geral com  $\lambda_x < \lambda_z$ ), para reduzir custos e o espaço necessário. Importa, todavia, referir que um modelo *distorcido* não poderá traduzir correctamente o comportamento do transporte sedimentar no protótipo.

Como critério para a selecção da escala do modelo físico é usual começar por estimar a menor escala do modelo que assegure a condição de escoamento turbulento completamente desenvolvido. Esta condição verifica-se apenas para números de Reynolds superiores a um certo valor mínimo; valor este que não é constante. Com efeito, é função da rugosidade relativa,  $A/z_0$ , como resulta das experiências de Nikuradse para escoamentos em condutas ou ainda, para o caso de ondas, como se mostra na Figura 2.1, a qual representa o coeficiente de atrito devido à onda,  $f_w$ , em função do número de Reynolds ( $R_w = \hat{u} A / \nu$ ) e da rugosidade relativa, sendo  $\hat{u}$  a amplitude da velocidade da onda,  $A$  a amplitude orbital da onda na fronteira superior da camada limite de fundo e  $z_0 = K_N / 30$  (para escoamentos

turbulentos), sendo  $K_N$  a rugosidade equivalente de Nikuradse, podendo tomar-se em primeira aproximação  $K_N = 2.5 D_{50}$ .

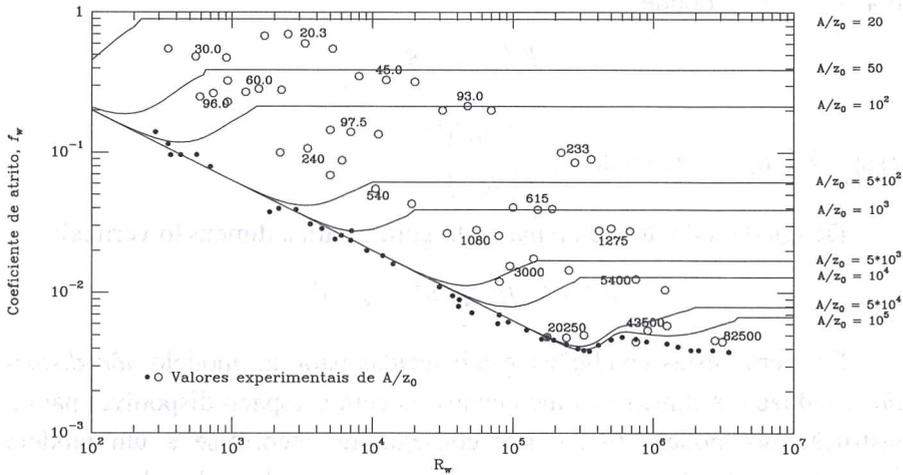


Figura 2.1 - Coeficiente de atrito devido à onda, em função do número de Reynolds ( $R_w$ ) e da rugosidade relativa ( $A/z_0$ ). Todos os regimes de escoamento (laminar, transição e turbulento) (adaptado de Antunes do Carmo *et al.*, 2003).

Definindo o número de Reynolds relativo à rugosidade como,

$$R_e = \frac{u_* k_s}{\nu} \quad (2.1)$$

em que  $u_*$  é a velocidade de atrito no fundo ( $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ ), com  $\tau_0 = \gamma R_h J \approx \gamma h I$ , admitindo regime uniforme e um rio suficientemente largo;  $k_s$  representa a dimensão característica da rugosidade e  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido. Verifica-se que apenas ocorre turbulência completamente desenvolvida para valores de  $R_e$  superiores a 70. Considera-se, em geral, o regime uniforme, vindo  $u_* = \sqrt{g R_h I}$  em que  $I$  representa o declive do talvegue. Representando a velocidade de atrito e o número de Reynolds no protótipo por  $u_*^p$  e  $R_e^p$ , respectivamente, e os equivalentes no modelo definidos por  $u_*^M$  e  $R_e^M$ , ter-se-ão:

$$u_*^M = \lambda_v u_*^p, \quad k_s^M = \lambda_L k_s^p \quad \text{e} \quad R_e^M = \frac{u_*^M k_s^M}{\nu} = \frac{(\lambda_v u_*^p)(\lambda_L k_s^p)}{\nu} \geq 70$$

Por outro lado, atendendo à semelhança de Froude,  $\lambda_v = \lambda_R^{1/2}$ , e considerando um rio suficientemente largo e um modelo *não-distorcido* ter-se-á  $\lambda_R^{1/2} = \lambda_L^{1/2}$ , donde,

$$R_e^M = \lambda_L^{3/2} R_e^P$$

ou seja,  $\lambda_L^{3/2} R_e^P \geq 70$ , vindo  $\lambda_L \geq \left(\frac{70}{R_e^P}\right)^{2/3}$ .

De igual modo, ter-se-ão para a largura e para a dimensão vertical:

$$B^M = \lambda_L B^P \text{ e } h^M = \lambda_L h^P$$

Em geral, estas condições, estabelecidas para um modelo *não-distorcido*, conduzem a dimensões incompatíveis com o espaço disponível para a construção do modelo físico. Por conseguinte, recorre-se a um modelo *distorcido*, mantendo, em geral, a escala vertical e reduzindo a largura para um valor normalmente superior a 5 vezes a altura do modelo (Chadwick & Morfett, 1993), isto é,  $B^M > 2 \cdot (2.5 \cdot h^P)$ , da qual resulta uma nova escala para as dimensões horizontais. Ter-se-á, portanto,  $B^M > \lambda_x B^P$  e  $B^M > 5 h^P$ , tomando-se assim para a nova escala horizontal um valor que satisfaça a seguinte condição:

$$\lambda_x < \frac{5 h^P}{B^P}$$

Em consequência, resultam para as restantes escalas e variáveis:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}, \text{ vindo } I^M = \lambda_1 I^P$$

$$\lambda_Q = \lambda_v \lambda_B \lambda_y = \lambda_y^{1/2} \lambda_x \lambda_y = \lambda_y^{3/2} \lambda_x, \text{ donde } Q^M = \lambda_Q Q^P$$

Nestas condições, como foi já referido, o modelo não deverá reproduzir correctamente a variação da profundidade com a distância. Serão assim necessários ajustamentos no modelo, que passam por uma calibração da rugosidade do fundo ( $k_s^M$ ) até se obter um razoável grau de aproximação aos valores de protótipo.

Em primeira aproximação, a escala para a rugosidade poderá obter-se a partir da fórmula empírica de Manning-Strickler  $u = k_s R_h^{2/3} I^{1/2}$ , vindo  $\lambda_u = \lambda_k \lambda_R^{2/3} \lambda_1^{1/2}$ , com  $k_s = 26/D_{90}^{1/6}$  no caso de fundo móvel, representando

$D_{90}$  o diâmetro dos sedimentos (expresso em  $m$ ) para o qual os elementos com diâmetros inferiores perfazem 90 % do peso da amostra.

Considerando um factor de distorção dado por  $r = \lambda_L / \lambda_V$  e um rio suficientemente largo, obtém-se para a rugosidade do modelo  $\lambda_k = \lambda_V r^3$ , donde  $k_s = \lambda_L r^4$ . Como  $h = r \lambda_L$  resulta  $(k_s/h)^M = r^3$ , ou seja, a rugosidade relativa de um modelo *distorcido* terá de ser superior à do protótipo.

### Exemplo 2.1:

Pretende-se melhorar as características de funcionamento de um troço de rio com 8  $km$  de comprimento e 200  $m$  de largura. Por razões de custo e espaço disponível, fixam-se a escala horizontal igual a 100 e a escala vertical igual a 40. O material de fundo do rio (protótipo) é areia com  $\bar{D} = 2 \text{ mm}$ . Neste troço do rio escoam-se um caudal líquido  $Q = 1700 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , com uma velocidade  $U = 1.15 \text{ m s}^{-1}$  e um caudal sólido  $Q_s = 1650 \text{ m}^3 \text{ dia}^{-1}$ . O material de fundo móvel é reproduzido no modelo por baquelite com as seguintes características:  $\rho_s \cong 1400 \text{ kg m}^{-3}$  e  $(\bar{D})^M = 0.70 \text{ mm}$ .

- Verificar se a escala do material de fundo móvel satisfaz a semelhança de Froude.
- Determinar o comprimento, a largura e a altura do modelo físico, bem como os valores do caudal líquido, da velocidade do escoamento e ainda uma ordem de grandeza do caudal sólido a esperar no modelo físico.

### Resolução:

a) De acordo com a fórmula de Manning-Strickler, para um fundo móvel tem-se  $U = (26/k_s^{1/6})h^{2/3}I^{1/2}$ , donde:  $(r\lambda_L)^{1/2} = k_s^{-1/6}(r\lambda_L)^{2/3}(r)^{1/2}$   
 $\Rightarrow k_s = r^4 \lambda_L$ , ou seja,  $(k_s)^M = r^4 \lambda_L (k_s)^P$ . Por conseguinte, com  $(k_s)^M \equiv (\bar{D})^M = (2.5^4/100) \cdot 2 = 0.78 \text{ mm}$ .

Como se verifica, de acordo com as hipóteses admitidas, o valor adoptado [ $(\bar{D})^M = 0.70 \text{ mm}$ ] para o material de fundo não respeita integralmente a semelhança de Froude. Naturalmente que as escalas das restantes variáveis serão influenciadas, pelo que os valores correctos destas escalas só serão encontrados após calibração do modelo físico. Mesmo respeitando integralmente aquela semelhança, os valores finais a adoptar, em particular tratando-se de modelos distorcidos, só serão rigorosamente conhecidos após calibração e

validação do modelo físico. Esta fase de operação do modelo físico é, em geral, sempre necessária.

Para dar início às operações de calibração e validação do modelo, que antecedem a fase de simulação propriamente dita, consideram-se valores teóricos aproximados obtidos com base na semelhança de Froude e eventualmente noutras semelhanças que mais adiante se expõem.

$$\text{b) Comprimento, } L: (L)^M = \lambda_L (L)^P = (1/100) \cdot 8000 = 80 \text{ m}$$

$$\text{Largura, } B: (B)^M = \lambda_L (B)^P = (1/100) \cdot 200 = 2.0 \text{ m}$$

$$\text{Altura, } h: (h)^M = r \lambda_L (h)^P = (2.5/100) \cdot 5.70 = 0.14 \text{ m}$$

$$\text{Caudal líquido, } Q = UA: \lambda_Q = \lambda_U \lambda_A = (r \lambda_L)^{1/2} (r \lambda_L) \lambda_L = r^{3/2} \lambda_L^{5/2},$$

$$\text{vindo, } Q^M = (r^{3/2} \lambda_L^{5/2}) Q^P = (2.5^{1.5} / 1000000) \cdot 1700 \approx 0.0672 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Velocidade, } U: \lambda_U = (r \lambda_L)^{1/2} \Rightarrow (U)^M = (r \lambda_L)^{1/2} (U)^P, \text{ donde,}$$

$$(U)^M \approx 0.18 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{Caudal sólido: } Q_s = f(BU^3) \Rightarrow \lambda_{Q_s} = \lambda_L (r \lambda_L)^{3/2} = r^{3/2} \lambda_L^{5/2}, \text{ ou seja,}$$

$$(Q_s)^M = (r^{3/2} \lambda_L^{5/2}) (Q_s)^P = (2.5^{1.5} / 100^{2.5}) \cdot 1650 \approx 0.065 \text{ m}^3 \text{ dia}^{-1}$$

### 2.2.2 Modelos de portos e estuários

No projecto de docas, portos, obras de protecção costeira, obras de descargas de águas residuais em estuários e águas costeiras através de exdutores submarinos, etc., recorre-se com alguma frequência à modelação física, embora a aplicação de modelos numéricos com base em elementos finitos tenha vindo a impor-se gradualmente nas últimas duas dezenas de anos e terá já hoje uma posição dominante. De qualquer modo, para estudos complementares de apoio, nomeadamente de calibração dos modelos numéricos, e ainda em zonas particularmente sensíveis, a modelação física continua a ter um importante papel a desempenhar.

Estas obras terão de ser projectadas para resistirem aos efeitos das ondas de maré e à agitação marítima devida à acção do vento, entre outras acções. Estes dois importantes efeitos na zona costeira são devidos à propagação de ondas com diferentes características. Assim a onda de maré é designada por longa, enquanto as ondas de superfície devidas à actuação do

vento se designam por ondas curtas. Para a classificação destes dois tipos de ondas recorre-se ao parâmetro  $L/h$ , sendo  $L$  o comprimento de onda e  $h$  a profundidade, o qual toma valores superiores a 20 para ondas longas e valores inferiores a 2 para o caso de ondas curtas.

As principais características de uma onda são: *i*) os termos geométricos: altura da onda ( $H$ ), comprimento de onda ( $L$ ), número de onda ( $k$ ) e profundidade ( $h$ ), e *ii*) os termos temporais: período ( $T$ ), frequência ( $w$ ) e celeridade ( $C$ ). Outros parâmetros igualmente importantes para descrever o movimento bidimensional de uma onda progressiva são a aceleração da gravidade ( $g$ ) e a velocidade horizontal do escoamento ( $u$ ). Muitos destes parâmetros estão inter-relacionados. Assim, por exemplo, a frequência está relacionado com o período ( $w = 2\pi / T$ ) e o número de onda relaciona-se com o comprimento de onda ( $k = 2\pi / L$ ), bem como com a celeridade através das seguintes relações:  $C = L / T = w / k$ . O comprimento de onda relaciona-se ainda com  $g$ ,  $T$  e  $h$  através da relação de Airy  $L = \{gT^2 / (2\pi)\} \tanh(2\pi h / L)$ . Uma outra igualdade igualmente importante que relaciona a profundidade ( $h$ ) com o comprimento de onda ( $L$ ) e com a frequência ( $w$ ), sendo designada por *relação de dispersão*, escreve-se  $w^2 / (gk) = \tanh kh$ .

Em função dos campos de aplicação, existem diversas teorias das ondas. De acordo com a teoria linear, a componente horizontal da velocidade é dada por:

$$u = \frac{Hw}{2} \frac{\cosh kz}{\cosh kh} \cos(kx - wt) \quad (2.2)$$

Recorrendo à análise dimensional mostra-se que os principais parâmetros adimensionais que caracterizam os efeitos das ondas são os números de Froude, Ursell, Reynolds, Strouhal, Keulegan-Carpenter, Euler e Weber, embora com importâncias relativas em função dos objectivos de cada modelo. Estes adimensionais têm as seguintes expressões:

- Número de Froude

- ondas longas:  $(F_r)_l = \frac{\hat{u}}{\sqrt{gh}}$

- ondas curtas:  $(F_r)_c = \frac{\hat{u}}{\sqrt{gL}}$

- Número de Ursell:  $U = \frac{HL^2}{h^3}$

- Número de Reynolds

- relativo à rugosidade:  $(R_e)_k = \frac{u_* k_s}{\nu}$

- relativo à profundidade:  $(R_e)_h = \frac{\hat{u} h}{\nu}$

- Número de Strouhal:  $S_l = \frac{f_v D}{\hat{u}}$

- Número de Keulegan-Carpenter:  $K = \frac{\hat{u} T}{D}$

- Número de Euler:  $E = \frac{\Delta p}{\rho u^2}$

- Número de Weber:  $W_e = \frac{\sigma}{\rho L u^2}$

O número de Froude traduz assim uma relação entre grandezas de forças de inércia e grandezas de forças gravíticas. Ora, sendo as forças gravíticas preponderantes na generalidade dos escoamentos em Hidráulica com superfície livre, nomeadamente em relação às forças de viscosidade e da tensão superficial, os modelos físicos são geralmente construídos e operados com base na semelhança de Froude.

O número de Ursell representa uma relação entre dois outros importantes adimensionais [ $U = \varepsilon / \sigma^2$ , com  $\varepsilon = H/h$  e  $\sigma^2 = (h/L)^2$ ], sendo normalmente usado para discutir os domínios de aplicação das diferentes teorias da onda. O parâmetro  $\varepsilon$  representa uma medida das não-linearidades e  $\sigma$  representa a profundidade relativa, sendo este habitualmente designado por parâmetro da água pouco profunda. O parâmetro  $\sigma$  é também frequentemente utilizado na classificação dos domínios de validade das diferentes teorias: Airy ou teoria linear ( $\sigma > 0.5$ ), Stokes de 2ª ordem ( $0.1 < \sigma < 0.5$ ) e Cnoidal ( $\sigma < 0.1$ ).

A verificação da semelhança de Reynolds é importante nos casos que as forças de inércia se relacionam com as forças viscosas, como acontece em estudos de camada limite laminar ou na determinação de ações de escoamentos com baixos números de Reynolds. Os efeitos da

viscosidade em modelos físicos poderão ser desprezados se o número de Reynolds baseado na rugosidade for superior a 70, ou se este mesmo número baseado na profundidade for superior a  $10^4$ ; por conseguinte, se  $\hat{u} k_s / \nu > 70$  ou se  $\hat{u} h / \nu > 10^4$ . Na prática, os modelos reduzidos devem ser construídos e operados verificando esta condição. Com efeito, a verificação simultânea das semelhanças de Froude e de Reynolds obriga a uma escala para a viscosidade dada por  $\lambda_v = \lambda_L^{3/2}$ . Assim, por exemplo, para uma escala geométrica de 1:50, o fluido teria de possuir uma viscosidade sensivelmente igual a 1/350 vezes a viscosidade do fluido do protótipo. Ora, sendo o fluido do protótipo a água, não será então possível satisfazer esta condição.

O número de Strouhal está relacionado com a frequência de formação de vórtices em torno de obstáculos ( $f_v$ ); por conseguinte, é importante em projectos de estruturas total ou parcialmente submersas, para a selecção da forma mais adequada destas estruturas e/ou dos seus apoios.

O número de Keulegan-Carpenter é usado em modelos de transporte sedimentar, particularmente na descrição de cavidades de erosão em torno de obstáculos, e na análise de forças provocadas por ondas sobre as estruturas.

O número de Euler traduz uma relação entre forças de pressão e forças de inércia. É um adimensional importante na análise e extrapolação de resultados obtidos em modelos físicos sempre que as forças de pressão são as forças dominantes.

O número de Weber traduz uma relação entre forças de inércia e forças de tensão superficial. Este número indica que a tensão superficial pode ser significativa quando a velocidade,  $u$ , e o comprimento característico do modelo,  $L$ , forem reduzidos; por conseguinte, nestas circunstâncias, a consideração deste adimensional pode ser determinante.

Nenhum daqueles parâmetros exclui a possibilidade de alguma distorção. Todavia, importa notar que as ondas são funções da gravidade e das características do fluido. Por conseguinte, contrariamente aos campos de correntes, que poderão ser reproduzidos em modelos *distorcidos*, a forma da onda não poderá ser arbitrariamente distorcida. Por exemplo, as figuras de difracção em torno de quebramares não são correctamente reproduzidas em modelos *distorcidos*, embora os correspondentes resultados possam ser interpretados com suficiente rigor por investigadores experientes em modelação física.

Considerando as dimensões de protótipo e as disponibilidades de espaço existentes para a construção do modelo físico de um quebramar para protecção de um porto, por exemplo, em primeira aproximação definir-se-á uma escala com dimensões apropriadas, não superiores às definidas pela menor das relações:

$$\lambda_L \leq \left( \frac{B^M}{B^P}, \frac{L^M}{L^P} \right)$$

Deste modo, assumindo um modelo *não-distorcido*, resulta para a escala das alturas  $\lambda_z = B^M/B^P = \lambda_L$ .

Para as escalas temporais, atendendo a que o período da onda é  $T = L/C$ , ter-se-á  $(\lambda_T)_{Onda} = (\lambda_L/\lambda_C)_{Onda} = (\lambda_L/\sqrt{\lambda_L})_{Onda} = (\sqrt{\lambda_L})_{Onda}$ .

Ou seja, o período da onda a considerar no modelo deverá ser tal que  $T_{Onda}^M = (\lambda_T)_{Onda} T_{Onda}^P = (\sqrt{\lambda_L})_{Onda} T_{Onda}^P$ . Por conseguinte, para a onda de maré virá,

$$(\lambda_T)_{Maré} = (\lambda_L/\lambda_C)_{Maré} = (\sqrt{\lambda_L})_{Maré}$$

O período da maré a considerar no modelo será então  $T_{Maré}^M = (\sqrt{\lambda_L})_{Maré} T_{Maré}^P$ .

O modelo físico de um estuário é bastante mais complexo de projectar e operar. Com efeito, é necessário ter em consideração um elevado número de características, nomeadamente: correntes de maré, ondas, escoamentos fluviais, estratificação da coluna de água na interface entre a água doce e a água salgada e o transporte sedimentar. É assim frequente o recurso a dois modelos com diferentes características:

- um modelo *distorcido*, com reduzidas dimensões horizontais ( $\lambda_x$  da ordem de 1/500), para investigação dos campos de correntes, naturalmente após calibração; e,
- um modelo *não-distorcido*, de maiores dimensões, de uma zona reduzida do estuário com pormenores da área de estudo. Este modelo será projectado para reproduzir os campos de correntes observados no modelo anterior e para analisar pormenores, nomeadamente de transporte sedimentar em torno de estruturas, grosseiramente representados no modelo *distorcido*.

O transporte sedimentar pode ser causado por um escoamento predominantemente unidimensional (como a corrente num rio ou em alguns estuários) ou pela acção de ondas. No caso do transporte sedimentar devido à corrente, a análise dimensional revela a importância dos seguintes grupos adimensionais (Chadwick & Morfett, 1993):

$$\Pi_1 = \frac{u_* D_s}{\nu}; \quad \Pi_2 = \frac{\rho u_*^2}{(\rho_s - \rho)g D_s}; \quad \Pi_3 = \frac{R_h}{D_s}; \quad \Pi_4 = \frac{\rho_s}{\rho} \quad (2.3)$$

em que  $D_s$  representa o diâmetro característico dos sedimentos (normalmente  $D_s = D_{50}$ ),  $u_*$  é a velocidade de atrito no fundo,  $\rho_s$  é a massa volúmica dos sedimentos,  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido e  $R_h$  é o raio hidráulico.

O grupo  $\Pi_1$  é uma forma do número de Reynolds, devendo garantir-se  $\Pi_1 > 70$  para assegurar condições de escoamento turbulento completamente desenvolvido, e o grupo  $\Pi_2$  é habitualmente designado por número de Froude densimétrico; resulta do produto de uma forma do número de Froude ( $u_*^2/g D_s$ ) por uma relação de massas volúmicas  $[\rho/(\rho_s - \rho)]$ .

Em primeira aproximação, o modelo físico deverá ser construído e operado em condições tais que:  $\Pi_1 > 70$ ,  $\Pi_2^p = \Pi_2^M$  e  $\rho_s^p = \rho_s^M$ . No entanto, nem sempre é possível construir um modelo que obedeça simultaneamente a estas três condições. Por este motivo, utiliza-se frequentemente no modelo físico material sedimentar com diferente massa volúmica do correspondente material de protótipo. Esta alteração das características do material sedimentar a utilizar no modelo físico é também para ultrapassar um problema que frequentemente surge neste tipo de modelação quando o diâmetro dos sedimentos do protótipo é tão pequeno que a sua redução para o modelo, acompanhado do efeito de escala, coloca o material a utilizar na fronteira entre os sedimentos coesivos e não-coesivos (da ordem de 0.08 mm), alterando consequentemente os mecanismos de transporte no modelo.

Quando o transporte sedimentar é prioritariamente devido à acção das ondas, em detrimento da acção de correntes, como em geral acontece nas zonas das embocaduras dos estuários, agravam-se os problemas com a construção de modelos físicos. Com efeito, o transporte sedimentar por acção das ondas ocorre apenas em águas pouco profundas onde o movimento da onda é transmitido à base da coluna de água. A velocidade do escoamento induzida no fundo actua de forma alternada, com direcções opostas, obedecendo a um movimento aproximadamente sinusoidal. A

direcção da tensão de atrito no fundo actua de igual modo de forma alternada. Este movimento oscilatório processa-se junto ao fundo no interior de uma camada de reduzida espessura, designada por camada limite de fundo, em que as velocidades são simultaneamente funções de  $h/\delta$  e do tempo, designando  $\delta$  a espessura da camada limite. Por outro lado, também os efeitos de refração da onda e de redução da profundidade (*shoaling*) são muito significativos neste tipo de problemas.

Uma forma de aproximar a análise dimensional é adoptar uma velocidade característica na fronteira superior da camada limite, seja  $u_\delta$  em  $y = \delta$ , vindo:

$$\Pi_1 = \frac{u_\delta D_s}{\nu}; \quad \Pi_2 = \frac{\rho u_\delta^2}{(\rho_s - \rho)gD_s}; \quad \Pi_3 = \frac{x_\delta}{D_s}; \quad \Pi_4 = \frac{\rho_s}{\rho} \quad (2.4)$$

representando  $x_\delta$  o deslocamento máximo de uma partícula de fluido em  $y = \delta$ .

Naturalmente que as quantidades  $\delta$ ,  $u_\delta$  e  $x_\delta$ , presentes naqueles grupos adimensionais, devem ser medidas, usando para o efeito técnicas e instrumentos de medição apropriados.

De acordo com Hughes & Fowler, 1990, embora na ausência de corrente, define-se um parâmetro de velocidade de queda  $W = H/(W_q T)$  e são geralmente aceites as seguintes recomendações:

1. Estabelecer a semelhança de Froude na componente hidrodinâmica;
2. Estabelecer a semelhança do parâmetro da velocidade de queda ( $W$ ) entre o protótipo e o modelo;
3. Utilizar um modelo *não-distorcido* (escalas horizontal e vertical iguais); e,
4. Utilizar um modelo suficientemente grande para reduzir os efeitos da viscosidade, tensão superficial e coesão dos sedimentos.

Nesta conformidade, devem ser respeitadas as seguintes relações de escala:

- Semelhança de Froude  $\lambda_T = \sqrt{\lambda_L}$ , com  $\lambda_T = T_p/T_M$  e  $\lambda_L = L_p/L_M$ ;
- Semelhança do parâmetro de velocidade de queda  $W_p = W_M$ , com  $W_p = H/(W_q T)_p$  e  $W_M = H/(W_q T)_M$ , obtendo-se  $\lambda_H = \lambda_{W_q} \lambda_T$ ; e,

- Escalas das alturas e comprimentos iguais:  $\lambda_H = \lambda_L$ , donde,  
 $\lambda_T = \lambda_{w_q} = \sqrt{\lambda_L}$ .

Por modelo suficientemente grande entende-se a satisfação de relações  $\lambda_L$  da ordem de 10.

Para mais informações e desenvolvimentos relacionados com esta matéria consulte-se, por exemplo, Yalin (1971).

### Exemplo 2.2:

Um porto está demasiado exposto à acção da agitação marítima e de ondas de tempestades, o que dá origem a frequentes destruições de amarrações e de obras de acostagem e ancoragem, dificultando as operações de carga e descarga. Pretende-se melhorar as características de funcionamento do porto, construindo, para o efeito, um modelo físico para otimizar o projecto de um novo quebramar. O porto ocupa uma área de  $0.70 \times 2.0 \text{ km}$  e o espaço disponível em laboratório não ultrapassa os  $10 \times 20 \text{ m}$ . Seleccionar as escalas do modelo físico, considerando um modelo *não-distorcido*.

### Resolução:

A escala máxima a adoptar será então  $\lambda_L = 20/2000 = 1/100$ . No entanto, atendendo a necessidades de espaço para os acessos, instalação dos equipamentos de geração das ondas, aquisição de dados e outros, não convém ultrapassar  $\lambda_L = \lambda_v = 1/120$ . Outras escalas a considerar são: a altura da onda e os períodos da onda e da maré. Tratando-se de um modelo *não-distorcido*, ter-se-á de igual modo para a altura da onda  $\lambda_H = 1/120$ . Para o período da onda, atendendo a que  $T = L/C$ , obtém-se,

$$\lambda_{T_{\text{onda}}} = \frac{\lambda_L}{\lambda_{C_{\text{onda}}}} = \frac{\lambda_L}{\sqrt{\lambda_L}} = \frac{1/120}{\sqrt{1/120}} = \frac{1}{10.95} \approx \frac{1}{11}$$

---

29

De igual modo, para o período da maré resulta:

$$\lambda_{T_{\text{maré}}} = \frac{\lambda_L}{\lambda_{C_{\text{maré}}}} = \frac{\lambda_L}{\sqrt{\lambda_L}} = \frac{1/120}{\sqrt{1/120}} \approx \frac{1}{11}$$

ou seja, um período de maré de aproximadamente  $12 \text{ h}$  será reproduzido no modelo físico durante  $(\lambda_{T_{\text{maré}}})^M = (1/11)^* (\lambda_{T_{\text{maré}}})^P \approx 1.09 \text{ h}$ .

### 2.2.3 Modelos de estruturas hidráulicas

As estruturas hidráulicas têm dimensões reduzidas quando comparadas com as dimensões de rios e estuários. Por conseguinte, os modelos hidráulicos destas estruturas podem ser construídos com escalas relativamente grandes, em geral do ordem de  $1/10 < \lambda_L < 1/50$ , e não necessitam de (nem poderão) ser *distorcidos*. As escalas das velocidades são obtidas com base no número de Froude (para escoamentos com superfície livre) ou no número de Reynolds (para escoamentos em condutas). Alguns problemas mais delicados, como seja a simulação da cavitação, poderão exigir a mesma pressão no modelo e no protótipo. Esta condição nem sempre é possível de satisfazer visto que as velocidades no modelo são normalmente inferiores às velocidades no protótipo, o que alterará provavelmente os valores da pressão. Para uma análise mais profunda deste assunto consulte-se, por exemplo, Abecasis (1961).

De modo a garantir condições de escoamento turbulento completamente desenvolvido, dever-se-á verificar a condição:  $R_e = u_* k_s / \nu > 70$ .

Uma relação entre as duas variáveis  $u_*$  e  $k_s$  é obtida a partir da distribuição logarítmica de velocidades, dada por (2.5):

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{0.4} \log_e \left( \frac{y}{k_s} \right) \quad (2.5)$$

Deste modo, fixando uma das variáveis, normalmente  $k_s$ , e conhecida a velocidade do escoamento  $U$ , obtém-se a velocidade de atrito,  $u_*$ , através daquela expressão.

Uma vez conhecido o número de Reynolds do protótipo,  $R_e^p$ , e uma vez que se pretende garantir para o modelo um número de Reynolds superior a 70, determinam-se em seguida a escala dos comprimentos,  $\lambda_L = (70/R_e^p)^{2/3}$ , a escala das velocidades,  $\lambda_V = \lambda_L^{0.5}$ , a escala dos caudais,  $\lambda_Q = \lambda_L^{2.5}$ , e o número de Froude densimétrico,  $\Pi_2$ , garantindo valores idênticos para modelo e protótipo.

#### Exemplo 2.3:

Pretende-se construir um descarregador de superfície para uma barragem com 15 m de altura. O caudal de projecto é de  $15 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  por metro de largura, para uma altura do escoamento de 3.6 m acima da crista do

descarregador. Para o efeito constrói-se um modelo físico para confirmação do projecto elaborado e para apoio ao dimensionamento do fundo do canal imediatamente a jusante da bacia de dissipação. Nestas condições de funcionamento forma-se um ressalto hidráulico sobre a bacia de dissipação, cuja altura máxima se prolonga para jusante desta bacia, já sobre o fundo do canal que se pretende fixar. O descarregador tem um comprimento total de 60 m, incluindo a bacia de dissipação, e as alturas do ressalto são  $h_1 = 0.75$  m (sobre a bacia de dissipação) e  $h_2 = 6$  m (sobre o fundo do canal).

Estimar as escalas deste modelo físico, admitindo que o fundo do canal é revestido a brita com uma dimensão característica  $D_{50} = 35$  mm.

### Resolução:

Para um escoamento turbulento hidraulicamente rugoso terá de verificar-se a condição  $R_e = u_* k_s / \nu > 70$ . Para obter os valores de  $u_*$  e, conseqüentemente, de  $R_e$  recorre-se à equação (2.5), na qual se considera habitualmente a rugosidade  $k_s \cong D_{50}/2$ . A velocidade  $U$  para a altura  $h_2$  do ressalto poderá obter-se pela continuidade, ou seja,  $U = Q/A = 15/6 = 2.50$  ms<sup>-1</sup>. Por conseguinte,

$$u_* = \frac{2.5}{(1/0.4) \log_e [6/(0.035/2)]} = 0.171 \text{ ms}^{-1}$$

vindo  $R_e = 0.171 \cdot 0.035/10^{-6} \approx 5985 \gg 70$ .

Deste modo, para a escala dos comprimentos obtém-se  $\lambda_L^{3/2} = 70/R_e$   
 $\Rightarrow \lambda_L \approx 1/20$ ; para o caudal resulta  $\lambda_Q = \lambda_L^{5/2} = 1/1789$ , ou seja,  
 $(Q)^M = \lambda_L^{5/2} (Q)^P = 15/1789 \approx 0.0084$  m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>, e para a velocidade obtém-se  
 $\lambda_U = \sqrt{\lambda_L} = \sqrt{1/20} \approx 1/4.472$ . O número de Froude densimétrico para o protótipo é então, de acordo com (2.3):

$$(\Pi_2)^P = \left( \frac{\rho u_*^2}{(\rho_s - \rho)g D_s} \right)^P = \frac{1000 \cdot 0.171^2}{(2560 - 1000) \cdot 9.81 \cdot 0.035} = 0.055$$

e para o modelo resulta, assumindo a mesma massa volúmica do protótipo e um diâmetro característico do sedimento 20 vezes inferior ao da brita do protótipo:

$$(\Pi_2)^M = \left( \frac{\rho u_*^2}{(\rho_s - \rho)g D_s} \right)^M = \frac{1000 \cdot (0.171/4.472)^2}{(2560 - 1000) \cdot 9.81 \cdot (0.035/20)} = 0.055$$

Por conseguinte, dever-se-á utilizar no modelo areia com a mesma massa volúmica da brita do protótipo e um diâmetro mediano  $(D_{50})^M = 1.75 \text{ mm}$ .

## **2.3 Modelação numérica**

### **2.3.1 Generalidades**

Existe um princípio básico comum às abordagens numéricas para a avaliação de qualquer propriedade conservativa. Com efeito, esta abordagem baseia-se nas leis gerais de conservação da Mecânica dos Fluidos, as quais determinam que nenhuma propriedade intrínseca do escoamento se perde ou ganha, mas antes se conserva. Os modelos são construídos tendo por base as leis de conservação aplicadas a propriedades conservativas, nomeadamente, a quantidade de movimento, a energia, as massas líquida e sólida e, em modelos de qualidade da água, as massas de contaminantes.

Os modelos numéricos podem ser entendidos tanto numa perspectiva de alternativa como de complemento dos modelos físicos. Na realidade, os modelos numéricos apresentam, em princípio, grandes vantagens sobre os modelos físicos quer em termos de custos quer em termos de tempos de resposta. No entanto, tal como os modelos físicos, também os modelos numéricos apresentam inconvenientes que têm tanto a ver com as hipóteses que estão na base da teoria matemática como com a dificuldade em reproduzir muitos dos fenómenos físicos envolvidos nos processos fluviais, entre os quais se destacam os relacionados com a fase sólida e, em modelos de qualidade da água, com as inter-relações e evolução dos diferentes constituintes.

### **2.3.2 Formulação geral de um modelo numérico**

A resolução de um problema de Mecânica dos Fluidos, com o auxílio de computadores, exige um conhecimento profundo de três diferentes áreas cuja interacção nunca deve ser menosprezada, sob pena de facilmente se perder o controlo sobre as operações de análise de um determinado fenómeno, bem como dos resultados assim obtidos.

Essa tríade é composta pela formulação matemática, ou seja, as equações que representam os princípios físicos, pela implementação das técnicas numéricas que permitem resolver as equações e, por último, pela

elaboração de uma estrutura computacional (*software*) que permite resolver, com recurso a um computador, as equações já discretizadas numericamente.

A Figura 2.2 mostra a sequência normal de operações na resolução de um problema de Mecânica dos Fluidos recorrendo a um computador.

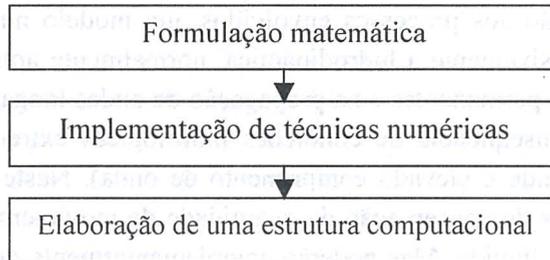


Figura 2.2 - Elaboração de um modelo de análise computacional.

Analisando cada uma das diferentes áreas, demonstra-se facilmente a interactividade entre as mesmas de uma forma pragmática.

Esta área da ciência aplicada, que desde meados da década de sessenta se encontra em expansão, acompanhando o desenvolvimento tecnológico, constitui uma “terceira aproximação” na filosofia e desenvolvimento da Mecânica dos Fluidos (Anderson, 1995). A Figura 2.3 mostra as três dimensões da Mecânica dos Fluidos: a *experimentação pura* tendo em vista a obtenção de formulações empíricas, que nasceu em França e Inglaterra no século XVII; o aparecimento e desenvolvimento da *teorização pura* da ciência, também na Europa, durante os séculos XVIII e XIX; e, a partir de meados do século XX, o aparecimento da *Mecânica dos Fluidos Computacional*.

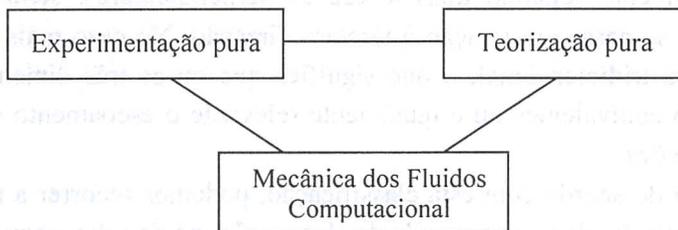


Figura 2.3 - As três “dimensões” da Mecânica dos Fluidos (adaptada de Anderson, 1995).

### 2.3.3 Classificação dos modelos numéricos

Os modelos numéricos para aplicações em domínios fluviais são classificados em conformidade com diferentes critérios: *i*) quanto aos processos que descrevem; *ii*) quanto ao tipo de escoamento dominante, e *iii*) quanto às dimensões do domínio e grau de estratificação do meio.

Em relação aos processos envolvidos, um modelo numérico poderá descrever exclusivamente a hidrodinâmica, normalmente aplicável em análises de regimes permanentes e na propagação de ondas longas, como as que ocorrem em consequência de condições hidrológicas extremas (ondas de reduzida amplitude e elevado comprimento de onda). Neste caso conterão apenas equações de conservação da quantidade de movimento e de conservação da massa líquida. Mas poderão complementarmente descrever a fase sólida e conterão então equações adicionais de dinâmica sedimentar e de conservação dos sedimentos. São os designados modelos morfodinâmicos. Por último, um modelo ainda mais completo conterá um número adicional de tantas equações de transporte quantos os constituintes de qualidade da água a analisar. Em geral, os designados modelos de qualidade da água descrevem apenas a fase líquida e contêm as equações adicionais para a descrição das inter-relações e evolução dos parâmetros de qualidade da água.

Quanto ao tipo de escoamento dominante, os modelos poderão ser classificados em unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. Trata-se neste caso de uma classificação puramente geométrica. Assim, serão considerados unidimensionais quando uma das dimensões de propagação do fenómeno em análise é muito superior a qualquer das outras duas, ou quando é irrelevante o que se passa em relação às duas direcções restantes. Serão bidimensionais quando duas dimensões do domínio são equivalentes e muito superiores à terceira dimensão, ou quando o escoamento se processa fundamentalmente segundo duas direcções perpendiculares, sendo irrelevante o que se passa em relação à terceira direcção. No caso mais geral, o domínio será tridimensional, o que significa que ou as três dimensões do domínio são equivalentes ou é igualmente relevante o escoamento segundo as três direcções.

Ainda de acordo com esta classificação, podemos recorrer a modelos de escoamento laminar para o cálculo dos perfis médios das componentes instantâneas da velocidade segundo as três direcções, considerando determinadas hipóteses simplificativas para o cálculo das tensões, a modelos de turbulência completos ou ainda a versões simplificadas destes modelos.

Em relação às dimensões do domínio e grau de estratificação do meio, os modelos unidimensionais poderão classificar-se em 1DH (1-D Longitudinal) e 1DV (1-D Vertical), os modelos bidimensionais classificam-se em 2DH (2-D Longitudinal-Lateral) e 2DV (2-D Longitudinal-Vertical). Existem ainda, e são já hoje relativamente correntes, os chamados modelos 2.5DH ou *quase-3D*, os quais descrevem o escoamento segundo as três direcções, assumindo como única simplificação a hipótese da hidrostática. No caso mais geral, sem qualquer simplificação adicional, o escoamento é igualmente descrito segundo as três direcções, designando-se por modelos 3D (3-D) (Figura 2.4, adaptada de Martin & McCutcheon, 1999).

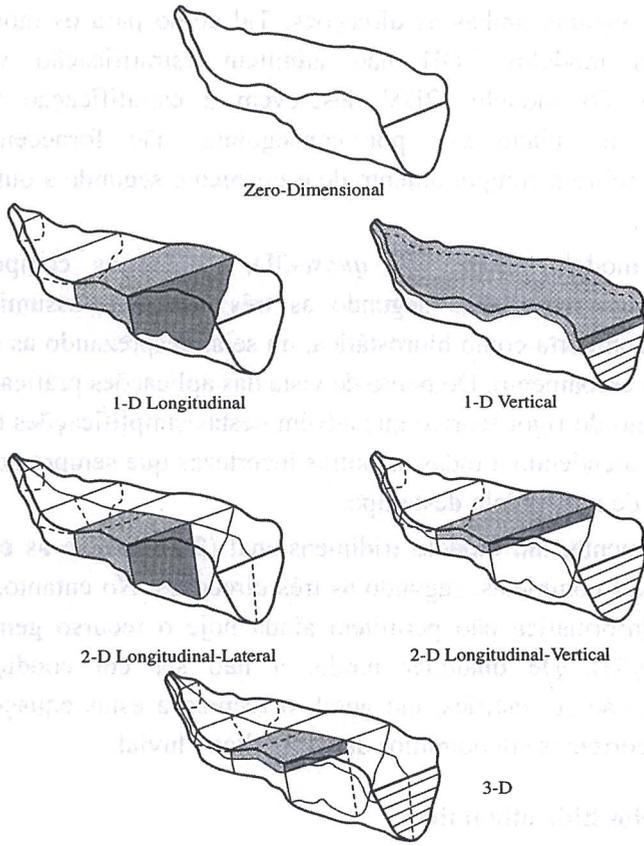


Figura 2.4 - Dimensões espaciais de modelos de escoamento com superfície livre (Martin & McCutcheon, 1999).

Os modelos 1DH desprezam a componente da velocidade segundo a direcção horizontal normal à propagação do escoamento. Resultam da integração vertical e lateral das equações de continuidade e da quantidade de movimento segundo a direcção do escoamento, admitindo a hipótese da hidrostaticidade. Nesta conformidade, resulta verticalmente uniforme o perfil da velocidade  $u$  (segundo  $x$ ); por conseguinte, não admitem estratificação vertical do escoamento. Os modelos 1DV descrevem a estratificação do escoamento ao longo de uma linha vertical; por conseguinte, não fornecem qualquer informação sobre o escoamento segundo as duas direcções horizontais  $x$  e  $y$ .

Um modelo 2DH resulta da integração vertical das duas equações da quantidade de movimento segundo  $x$  e  $y$ , assumindo a hipótese da hidrostaticidade. Deste modo, resultam uniformes os perfis verticais da velocidade segundo ambas as direcções. Tal como para os modelos 1DH, também os modelos 2DH não admitem estratificação vertical do escoamento. Os modelos 2DV descrevem a estratificação vertical do escoamento no plano  $x$ - $z$ ; por conseguinte, não fornecem qualquer informação sobre o comportamento do escoamento segundo a outra direcção horizontal  $y$ .

Um modelo 2.5DH, ou *quase*-3D, calcula as componentes da velocidade do escoamento segundo as três direcções assumindo que a pressão se comporta como hidrostática, ou seja, desprezando as acelerações verticais do escoamento. Do ponto de vista das aplicações práticas correntes, o afastamento do rigor teórico que advém destas simplificações é, em geral, irrelevante, atendendo a todas as outras incertezas que sempre acompanham a aplicação de um modelo deste tipo.

Finalmente, um modelo tridimensional (3D) resolve as equações de Navier-Stokes completas, segundo as três direcções. No entanto, limitações de ordem informática não permitem ainda hoje o recurso generalizado a estas equações. De qualquer modo, a não ser em condições muito específicas, não se justifica, em geral, o recurso a estas equações para as aplicações correntes em domínios da Hidráulica Fluvial.

#### 2.3.4 Modelos hidrodinâmicos

Em geral, para a resolução de problemas correntes no âmbito da Hidráulica Fluvial é suficiente o recurso a modelos 1DH e 1DV. Estudos no

âmbito de determinados estuários poderão exigir o recurso a modelos de correntes 2DH, ou até mesmo a modelos 2.5DH ou *quase*-3D. Incluir-se-ão nestes casos: *i*) estuários com uma largura importante em relação à profundidade, ou seja, em que o escoamento se desenvolve com componentes da velocidade igualmente importantes em ambas as direcções horizontais; *ii*) análises relativas aos efeitos da penetração e propagação da onda de maré em estuários, e ainda *iii*) estudos relativos ao comportamento da cunha salina, cujo fenómeno se traduz numa importante estratificação da coluna de água, sobretudo nas regiões próximas da frente desta cunha.

Outros estudos relativos à análise dos efeitos da agitação no interior de portos e estuários, devidos à actuação do vento, poderão exigir o recurso a modelos de ondas, sendo ainda hoje frequentemente utilizados modelos baseados na teoria linear, como a equação bidimensional da onda para declives suaves ("*mild-slope wave equation*") ou outros derivados desta equação mas mais completos, com inclusão de termos não-lineares relativos à corrente, ao atrito de fundo e à rebentação da onda. Contudo, são também já hoje bastante frequentes aplicações baseadas em aproximações não-lineares dispersivas dos tipos Boussinesq ou Serre, as quais descrevem com suficiente rigor a generalidade dos fenómenos hidrodinâmicos que ocorrem em condições de água pouco profunda. Este assunto será retomado e abordado com mais detalhe no Capítulo 4.

Para o estudo de problemas relacionados com a qualidade da água em albufeiras resultantes da construção de barragens poderá tornar-se necessário recorrer a modelos 1DV. Também o estudo de determinadas ocorrências nestas albufeiras, como seja a formação, a propagação e o impacto sobre as barragens de ondas geradas por deslizamentos de taludes submersos, marginais ou situados nas encostas das albufeiras, poderá exigir o recurso a modelos de ondas dos tipos Boussinesq ou Serre.

Os modelos de correntes 1DH vulgarmente utilizados em domínios fluviais são constituídos por equações de conservação da massa e da quantidade de movimento (vulgarmente conhecidas por equações de Saint-Venant ou "*shallow water equations*"). Estas equações poderão ser obtidas com base na técnica do volume de controlo, sendo este o procedimento adoptado no Capítulo 3 para a sua dedução. Utilizando outra técnica, por integração das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos, escritas a duas dimensões no plano vertical e considerando uma variação linear para o perfil da componente vertical da velocidade ( $w$ ), obtém-se em segunda

aproximação da teoria das ondas em condições de água pouco profunda um sistema de equações 1DH do tipo Boussinesq. A dedução destas equações é apresentada no Capítulo 4, mostrando-se também que o sistema de equações de Saint-Venant, atrás referido, corresponde à primeira aproximação desta mesma teoria das ondas em condições de água pouco profunda.

Idêntico procedimento permite obter modelos matemáticos 2DH de correntes e de ondas. Estes modelos, bem como as hipóteses simplificativas e as correspondentes condições de aplicação, são ainda apresentados no Capítulo 4, remetendo-se para literatura da especialidade as correspondentes deduções.

A resolução simultânea das equações de conservação permite obter valores médios instantâneos para as variáveis que caracterizam a hidrodinâmica,  $(h, u)$  ou  $(A, Q)$ , ao longo de todo o percurso, no caso de modelos 1DH, e de  $(h, u, v)$  ou  $(h, Q_u, Q_v)$  em todos os pontos da malha de cálculo, no caso de modelos 2DH. No caso de modelos *quase*-3D obtêm-se, em geral, os valores da profundidade em todas as verticais dos nós da malha bidimensional em planta e das três componentes da velocidade  $(u, v, w)$  em todos os nós da malha tridimensional.

Entre os vários exemplos de cada uma destas estruturas computacionais actualmente disponíveis destacam-se os modelos 1DH ISIS FLOW (Halcrow Group & Wallingford, 1997) e HEC-RAS (HEC, 2002), os modelos 1DV (Huynh Thanh & Temperville, 1991; Antunes do Carmo *et al.*, 2003), os modelos 2DH RMA2-WES (Roig, 1996a e b) e TRIM (Cheng *et al.*, 1993), os modelos 2DV GLVHT (Buchak & Edinger, 1989; Tran Thu, 1995) e os modelos *quase*-3D POM (Blumberg & Mellor, 1987; Mellor, 1998) e MECCA (Hess, 1989). Como se verá nos capítulos seguintes, para algumas destas estruturas computacionais foram já desenvolvidas versões mais recentes.

### 2.3.5 Modelos de dinâmica sedimentar

Um dos temas mais importantes e complexos em domínios da Hidráulica Fluvial e Costeira é a previsão da evolução da morfologia local (morfodinâmica). A construção de um modelo de simulação e a conseqüente análise dos resultados obtidos carecem de um conhecimento aprofundado das interações entre o escoamento do fluido (fase líquida) e dos sedimentos (fase sólida). Para além do profundo conhecimento destes processos, e do estabelecimento das equações que visam representar o comportamento

hidrodinâmico e sedimentar, o recurso a meios informáticos com grande capacidade de cálculo é fundamental. Por essa razão, e dado o desenvolvimento que os sistemas computacionais têm vindo a apresentar, a modelação matemática em domínios da Hidráulica Fluvial e Costeira sofreu um forte impulso nos últimos anos.

Os leitos dos rios, bem como os fundos de estuários e das zonas costeiras, não se mantêm fixos; bem pelo contrário, sofrem uma evolução de acordo com a hidrodinâmica local, gerando-se assim fenómenos de erosão, transporte e deposição. O aparecimento de tais fenómenos advém de um processo muito complexo de interacção entre dois meios (sólido e líquido) com características muito diferentes que tem vindo a ser estudado há várias décadas, sendo ainda na actualidade assunto de intensa investigação.

Tais estudos, projectos e actividades de investigação permitiram aumentar substancialmente o conhecimento nesta área, pelo que hoje em dia é já possível simular fenómenos de interacção entre a hidrodinâmica e a dinâmica sedimentar com um grau de aproximação já aceitável do ponto de vista qualitativo. No essencial, esses modelos de simulação carecem da utilização de diversos módulos subjacentes aos modelos hidrodinâmico e de dinâmica sedimentar.

A possibilidade de sermos capazes de prever com uma precisão aceitável fenómenos complexos da natureza como a evolução de margens e fundos móveis de ambientes fluviais e costeiros sujeitos a hidrodinâmicas complexas, de forma relativamente simples, rápida, confortável e com custos comportáveis, é cada vez mais importante na área da gestão ambiental.

Em domínios fluviais é frequente o recurso a modelos hidrodinâmicos 1DH complementados com equações de dinâmica sedimentar e de conservação dos sedimentos para simular escoamentos bifásicos em regime variável com superfície livre. Quando, pelas razões já aduzidas na secção anterior, se torna necessário recorrer a uma estrutura computacional bidimensional (modelo 2DH), esta integrará, em geral de modo desacoplado, as equações do modelo hidrodinâmico e as equações dos modelos de transporte sedimentar e de evolução do fundo móvel.

O sistema de equações do modelo hidrodinâmico é constituído por uma equação de conservação da massa líquida e por uma, duas ou três equações de conservação da quantidade de movimento, consoante se trate de um modelo 1DH, 2DH, ou *quase*-3D. Relativamente ao modelo de trans-

porte sedimentar e evolução do fundo móvel, este será baseado numa ou mais equações dinâmicas para o cálculo dos caudais sólidos, e numa equação de continuidade da massa sólida. O sistema de equações é fechado recorrendo, em alternativa, a equações empíricas do tipo Manning-Strickler, a modelos de turbulência de zero equações do tipo Prandtl, ou ainda a modelos de turbulência de uma ou de duas equações para o cálculo da viscosidade turbulenta (modelos 1DV, quando uma das variáveis que caracterizam a turbulência, normalmente a macro-escala da turbulência, é descrita por uma equação algébrica de tipo empírico, ou 2DV, quando ambas as variáveis, a energia cinética turbulenta e a macro-escala da turbulência ou a dissipação viscosa, por exemplo, são descritas por equações diferenciais).

Entre os vários exemplos de cada uma destas estruturas computacionais actualmente disponíveis destacam-se o modelo 1DH ISIS SEDIMENT (Halcrow Group & Wallingford, 1997), os modelos 2DH SED2D-WES (Ariathurai, 1982) e HSCTM-2D (Hayter *et al.*, 1993, 1997), o modelo 2DV LAEM-SED (Hall, 1987; Johnson *et al.*, 1989) e os modelos *quase*-3D ECOM-3D (Blumberg & Mellor, 1987), RMA11 (WEST, 1996) e ECOMSED (HydroQual, 2002).

### 2.3.6 Modelos de qualidade da água

Um modelo matemático de qualidade da água de um rio deverá descrever a globalidade dos fenómenos hidráulicos, térmicos e bioquímicos através de equações diferenciais. Cada um destes fenómenos deverá constituir um submodelo cujas variáveis interagem e influenciam todas as restantes variáveis dos outros submodelos, embora nem todas estas influências tenham idêntico peso.

Assim, por exemplo, a influência das variações da temperatura nas condições hidráulicas (através da evaporação e das variações da massa volúmica e da viscosidade da água) é desprezável no vasto conjunto das aproximações possíveis em condições fluviais. De igual modo, os efeitos das variações bioquímicas nas condições hidráulicas (através da sedimentação e crescimento de algas) e nas transferências de temperatura (através da produção de calor e de alterações das características de transferência) são em geral desprezáveis:

Estas hipóteses permitem simplificar o modelo numérico através, nomeadamente, de uma redução das relações entre as variáveis constantes

nos três submodelos. Em geral, o cálculo é iniciado pela resolução das equações do submodelo hidrodinâmico, obtendo-se deste modo valores médios para as variáveis ( $h$ ,  $u$ ) ou ( $A$ ,  $Q$ ), e termina com as equações do submodelo que traduzem os comportamentos dos diversos parâmetros bioquímicos.

Em estudos de qualidade da água em meios fluviais é em geral suficiente recorrer a um modelo unidimensional no plano horizontal (1DH). Nesta formulação, os valores das variáveis correspondem a médias nas secções transversais do rio, variando ao longo do seu percurso. Os valores destes parâmetros devem assim ser considerados bons índices médios do estado de qualidade da água de um rio, embora contenham óbvias limitações locais, pois não permitem descrever as distribuições das variáveis em cada secção.

Os modelos 1DH ISIS QUALITY e QUAL2E situam-se actualmente entre os mais conhecidos e utilizados em análises de qualidade da água em rios e alguns estuários. Ambos são desacoplados, isto é, os resultados da hidrodinâmica e dos processos de qualidade da água são obtidos sequencialmente.

O modelo WQRRS - Water Quality for River-Reservoir Systems (Hydrological Engineering Center – HEC, 1978) tem sido aplicado no estudo de vários casos de sucesso, inclusivamente em várias albufeiras existentes em Portugal (Rodrigues, 1992). Permite a simulação de um grande número de parâmetros de qualidade da água, destacando-se a temperatura, o oxigénio dissolvido, nutrientes e outros parâmetros não-conservativos e conservativos. Trata-se de um modelo unidimensional (1DV), de camadas, adequado ao estudo de albufeiras relativamente profundas, com estratificação térmica, em que o sistema é descrito como uma sucessão unidimensional de elementos de volume de água, de espessura uniforme e limitados por planos horizontais, balizado pelos limites da albufeira.

Entre as principais estruturas computacionais 2DH de qualidade da água actualmente disponíveis para aplicações em estuários e zonas costeiras destacam-se os modelos SIMSYS2D (Leendertse, 1967, 1970; Leendertse & Gritton, 1971) e CAFEX (Wang, 1978; Wang & Monjo, 1995). Entre outras estruturas computacionais, destacam-se ainda o modelo 2DV CE-QUAL-W2 (Cole, 1993) e os modelos *quase*-3D SED3D (Sheng *et al.*, 1992) e HEM3D (WEST, 1996).

Nos Capítulos 7 e 8 são abordados exaustivamente os modelos matemáticos, os métodos de resolução numérica das equações e as inter-dependências entre os processos e as variáveis de qualidade da água.

## **2.4 Modelação dos processos de drenagem e erosão numa bacia hidrográfica**

Trata-se de apresentar uma análise fundamentalmente qualitativa dos fenómenos de erosão e transporte sedimentar que ocorrem em toda a bacia hidrográfica, devidos à ocorrência de precipitação. Por requerer formulações particulares e manter o carácter generalista que caracteriza todo o Capítulo 2, justificam-se não só a sua inclusão neste capítulo como ainda a sua individualização em secção própria.

Avaliar quantitativamente os processos erosivos que ocorrem ao longo das vertentes de uma bacia hidrográfica em consequência da precipitação é uma tarefa ainda hoje só possível considerando um elevado número de hipóteses simplificativas.

A implementação de um modelo numérico para a resolução de um problema deste tipo exige a prévia tradução dos fenómenos envolvidos por equações diferenciais, as quais terão de ser necessariamente apoiadas em diversos parâmetros e num elevado número de equações algébricas, tendo ainda por base hipóteses e simplificações mais ou menos importantes.

Naturalmente que um modelo numérico a implementar reproduzirá tanto melhor os processos de drenagem e erosão numa bacia hidrográfica quanto mais informação processar e melhor definidas forem as características geológicas, climáticas e topográficas da região.

Por conseguinte, o desenvolvimento de um modelo conceptual de uma bacia hidrográfica poderá ser uma tarefa extremamente complicada, requerendo algumas dezenas de parâmetros para descrever as suas principais características, tais como índices de infiltração, características dos solos, capacidades de armazenamento, etc. Pelo contrário, conhecendo a topografia e admitindo características médias do solo, considerando-o constituído por material homogéneo desagregado, é possível construir um modelo capaz de prever com um rigor aceitável, do ponto de vista qualitativo, a quantidade de material erodido durante uma tempestade, a evolução do terreno, o transporte do material erodido ao longo das vertentes e a correspondente acumulação na rede de drenagem da bacia hidrográfica.

Ainda do ponto de vista qualitativo, um modelo com estas características poderá ser muito útil para efeitos de gestão de uma bacia hidrográfica, fornecendo boas indicações sobre zonas potencialmente menos protegidas, e que poderão necessitar de medidas preventivas de consolidação, ou serem, porventura, afectadas a diferentes usos.

#### 2.4.1 Hipóteses básicas

Os movimentos de material sólido para o interior ou para o exterior de células de cálculo (material rochoso, solo e sedimentos) são funções dos seguintes processos: impactos ou salpicos da chuva, escoamentos sobre fundos planos, escoamentos ao longo de canais, movimentos de massas e empolamentos ou deformações tectónicas. Combinam-se as transferências de massa segundo as vertentes das encostas devidas aos impactos ou salpicos da chuva, ao escoamento plano e a movimentos de massas, como avalanches e deformações do terreno, numa única função de transferência, representada por  $B$ .

Os processos considerados nesta análise encontram-se genericamente representados na Figura 2.5; são fundamentalmente: deslizamentos e avalanches; processos de erosão em leitos de canais; processos de erosão nas cabeceiras; transporte "difusivo" ao longo das vertentes; deformações tectónicas, e processos de erosão, transporte e deposição fluvial.

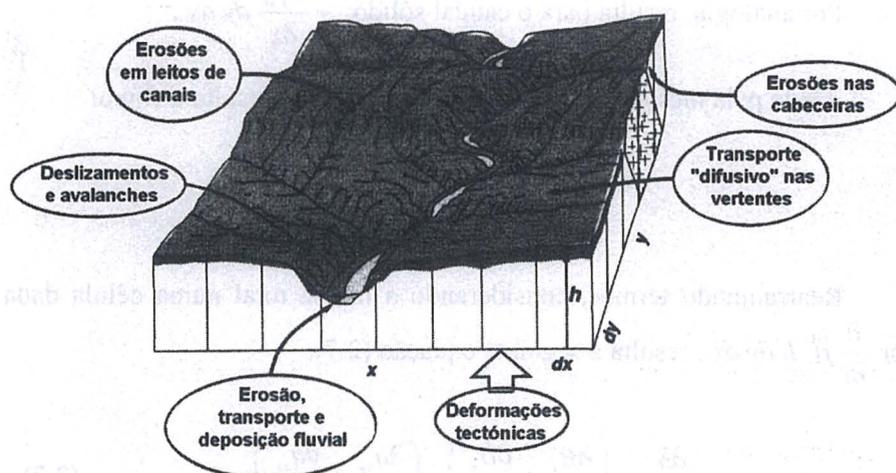


Figura 2.5 - Grelha e processos considerados no modelo numérico de uma bacia hidrográfica (adaptada de Slingerland *et al.*, 1994).

## 2.4.2 Formulação matemática

Seja a quantidade de massa  $B(x,y,t)$  que passa de uma célula para a célula vizinha, por unidade de tempo e por unidade de largura da célula, e designe-se por  $q_s(x,y,t)$  o caudal sedimentar, em  $kg s^{-1} m^{-1}$ , que transita entre células e é transportado para um curso de água. Seja ainda a quantidade adicional de massa por unidade de comprimento  $R(x,y,t)$  em cada célula devida a processos de deformação tectónica.

Atendendo a que a quantidade de massa entra em cada célula segundo  $x$  e/ou segundo  $y$ , é conveniente considerar cada direcção em separado. Devido ao movimento no interior da célula, a quantidade de massa que sai dum célula segundo  $x$  por unidade de tempo e por unidade de largura será:

$$B_x + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx$$

Por conseguinte, atendendo ao teorema de Taylor, a variação da quantidade de massa no interior de uma célula (massa que entra menos a massa que sai) é dada por (2.6):

$$B_x dy - \left( B_x + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \right) dy = - \frac{\partial B_x}{\partial x} dy dx \quad (2.6)$$

Por analogia, resulta para o caudal sólido:  $-\frac{\partial q_{sx}}{\partial x} dy dx$ .

Ainda pela mesma lógica, segundo a direcção  $y$  resulta o fluxo:

$$-\frac{\partial B_y}{\partial y} dy dx - \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} dy dx.$$

44

Rearranjando termos, considerando a massa total numa célula dada por  $\frac{\partial}{\partial t} \rho_s h dy dx$ , resulta a seguinte equação (2.7):

$$\rho_s \frac{\partial h}{\partial t} = - \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} \right) + R \quad (2.7)$$

Para resolver esta equação é necessário especificar as funções  $B$ ,  $q_x$  e  $R$ . De acordo com Slingerland *et al.* (1994), estas poderão ser calculadas por:

$$\begin{aligned} B_x &= -D_x \frac{\partial h}{\partial x}; & B_y &= -D_y \frac{\partial h}{\partial y} \\ q_{sx} &= k\rho q_x^m J_x^n; & q_{sy} &= k\rho q_y^m J_y^n \\ R &= \rho_s U \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que  $D_x$  e  $D_y$  são coeficientes de difusão ( $kg\ m^{-1}\ s^{-1}$ );  $k$  é uma constante de proporcionalidade (adimensional);  $q_x$  e  $q_y$  são caudais líquidos por unidade de largura;  $J_x$  e  $J_y$  representam declives da linha da energia;  $m$  e  $n$  são constantes;  $\rho$  e  $\rho_s$  são as massas volúmicas da água e do sedimento ( $kg\ m^{-3}$ ), respectivamente, e  $U$  representa a velocidade de deformação da superfície ( $m^{-1}\ s^{-1}$ ).

Substituindo as funções (2.8) em (2.7) obtém-se a seguinte equação (2.9):

$$\gamma \frac{\partial h}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) - k\rho \left( \frac{\partial}{\partial x} q_x^m J_x^n + \frac{\partial}{\partial y} q_y^m J_y^n \right) + R \quad (2.9)$$

A formação de um canal de drenagem numa célula terá início quando se verificar o valor de uma função ( $f_c$ ) do caudal ( $Q$ ) e do declive ( $i_c$ ) superior a uma quantidade pré-definida ( $f_{min}$ ). Esta função é do tipo:

$$f_c = k_c Q^{m_c} i_c^{n_c} \quad (2.10)$$

Verificando-se a condição  $f_c > f_{min}$  dá-se início à formação de um canal.

### 2.4.3 Modelo numérico

O programa de cálculo automático GOLEM (*Program 3*), apresentado em Slingerland *et al.* (1994), utiliza um método de diferenças finitas para a resolução da equação (2.9). Globalmente, este modelo é fundamentalmente constituído por três módulos. O primeiro módulo calcula o escoamento da fase líquida, assumindo que qualquer parcela de água devida à precipitação que cai sobre a bacia hidrográfica se propaga à superfície segundo a linha de

maior declive do terreno até encontrar uma célula de fronteira. Este módulo considera a presença de lagos e albufeiras e verifica a existência ou ausência de canais em cada célula. O segundo módulo calcula o transporte sedimentar ao longo das linhas de maior declive das encostas e o transporte sedimentar nas linhas de água, naturalmente em células que contiverem canais. Finalmente, o terceiro módulo fornece os restantes termos igualmente necessários à equação (2.9), a qual é resolvida por um método semi-implícito ADI (“*Alternating-Direction Implicit*”).

O programa GOLEM foi adaptado, nomeadamente através da resolução da equação (2.9) por um método implícito, tornando o modelo mais robusto, a consideração de incrementos espaciais variáveis, com uma nova filosofia de introdução de dados e uma nova interface para impressão de resultados. O programa assim adaptado, agora com o nome de *bacia*, foi utilizado para resolver o exemplo 2.3 apresentado em seguida, na secção 2.4.4 *Aplicações*.

A malha de cálculo é orientada nas direcções  $W \rightarrow E(x)$  e  $S \rightarrow N(y)$ , com o curso de água principal no eixo  $N \leftrightarrow S$ ; por conseguinte, com a sua foz localizada a Sul.

Naturalmente que a aplicação de um modelo deste tipo apenas permitirá, em primeira aproximação, obter resultados qualitativos. Uma análise mais profunda da generalidade dos processos que ocorrem numa bacia hidrográfica exige a fixação criteriosa de todos os parâmetros envolvidos no modelo numérico, o que apenas poderá ser conseguido após aturada verificação, calibração e validação do mesmo em cada caso particular, admitindo, ainda assim, que são aceitáveis as hipóteses simplificativas consideradas na sua implementação.

Para mais pormenores sobre a implementação do modelo numérico e as hipóteses básicas admitidas consulte-se Slingerland *et al.* (1994).

#### 2.4.4 Aplicações

Para servir de apoio à utilização do modelo *bacia*, apresentam-se as estruturas de um ficheiro *param.inc*, necessário para a introdução das dimensões do domínio e fixação de outros parâmetros gerais em *parameter* [no caso apresentado para um domínio com  $(60 \Delta x) \times (60 \Delta y)$ , com  $\Delta x = \Delta y = 100.0 m$ ], e de dois outros ficheiros que conterão, em geral, os dados específicos de cada problema: *bacia.dat* e *bacia.top*. Os resultados são apresentados nos ficheiros *bacia.elev* e *bacia.res*.

Ficheiro *param.inc*

PARAMETER (XMAX=60, YMAX=60,  
\* UNFLOODED=0, NEWPOND=1, OLDPOND=2, BASIN=3,  
\* XBND=XMAX+1, YBND=YMAX+1, GRIDSIZE=XMAX\*YMAX,  
\* DX=100.0, TOL=0.0001, VERYHIGH=100000.0,  
\* TILTBLOCK=3, UNIFORM=1)

Ficheiro *bacia.dat*

! número de incrementos temporais ( $n \Delta t$ )  
! valor do incremento temporal  $\Delta t$  (s)  
! constante (adimensional) das equações de transporte fluvial (2.8) ( $k$ )  
! expoente ( $m$ ) do caudal nas equações de transporte fluvial (2.8)  
! expoente ( $n$ ) do declive da linha de energia nas equações de transporte fluvial (2.8)  
! coeficientes de difusão do escoamento em encostas ( $D_x = D_y$ )  
! limite inferior da função  $f_c$  de inicialização de canais (2.10) ( $f_{min}$ )  
! coeficiente da função de inicialização de canais (2.10) ( $k_c$ )  
! expoente do caudal ( $Q$ ) na função de inicialização de canais (2.10) ( $m_c$ )  
! expoente do declive ( $i_c$ ) na função de inicialização de canais (2.10) ( $n_c$ )  
! valor constante ou equivalente da precipitação na bacia ( $m h^{-1}$ )  
! velocidade de deformação/elevação da superfície ( $m ano^{-1}$ )  
! duração da perturbação/elevação (número de incrementos temporais)  
! tipo de deformação/elevação (1, 2, 3) [função do valor (= /  $\neq$ ) de TILTBLOCK]  
! localização de falha/início da deformação (número da coluna)  
! intervalos de tempo para impressão (número de incrementos temporais)  
! nome de ficheiro com a topografia inicial (*bacia.top*)  
! nome de ficheiro (*fnome*) para resultados finais (*fnome.elev* e *fnome.res*)  
! condição de fronteira Este (1 = fronteira variável/não fixa)  
! condições de fronteira Norte e Sul (0 = fronteira variável/não fixa)  
! número da linha à qual uma deformação tem início na fronteira Oeste  
! número da linha à qual uma deformação termina na fronteira Oeste

Ficheiro *bacia.top*

! topografia inicial da bacia [cotas dos pontos ( $x, y$ ) da malha de diferenças finitas]

#### Exemplo 2.4:

Seja uma hipotética bacia hidrográfica com a estrutura do ficheiro *param.inc* acima apresentado e as características fornecidas em CD-ROM, nos ficheiros *bacia.dat* e *bacia.top*. A topografia inicial e a topografia calculada após 90 dias, por aplicação do modelo *bacia*, estão representadas na Figura 2.6.

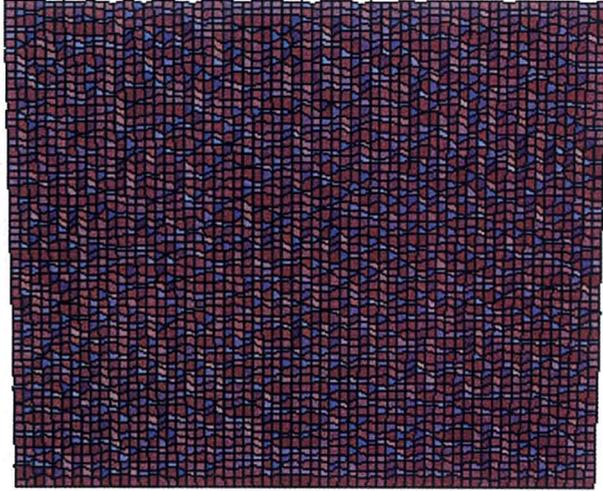
Assumiui-se uma chuvada com intensidade constante e igual a  $0.066 \text{ mh}^{-1}$  durante o período de simulação (90 dias).

Comparando as duas imagens presentes na Figura 2.6, correspondentes aos instantes inicial (a) e após 90 dias de simulação (b), é possível identificar diferenças significativas. Com efeito, a rede de drenagem perfeitamente visível na imagem (b) é bem mais nítida que a apresentada no instante inicial (imagem a). Poderemos então concluir que, devido a fenómenos de erosão, os canais da rede de drenagem inicial tornaram-se mais profundos e, porventura, ter-se-ão formado novos canais durante o período de simulação de 90 dias.

O resultado apresentado, embora qualitativo, é um bom indicador das reais capacidades e interesse de um modelo deste género para efeitos de planeamento e gestão de uma bacia hidrográfica.

Tratou-se, naturalmente, de um simples exercício académico, pelo que em condições reais e para um dado período de simulação, meses ou anos, deverá ser considerada a sucessão real de chuvadas, ou seja, a distribuição característica de durações e intensidades durante todo o período de análise.

a > Inicial



b > 90dias

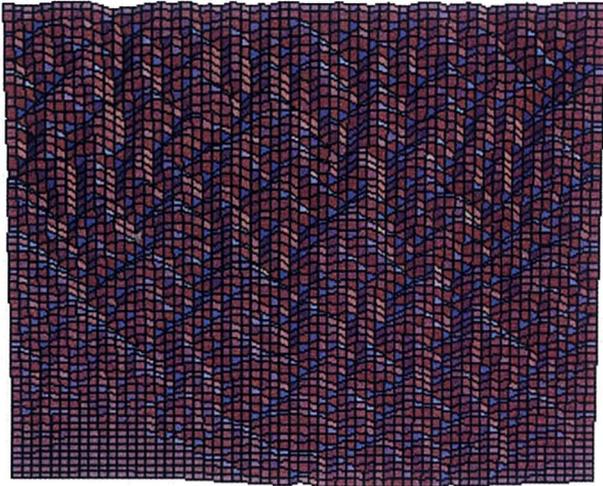
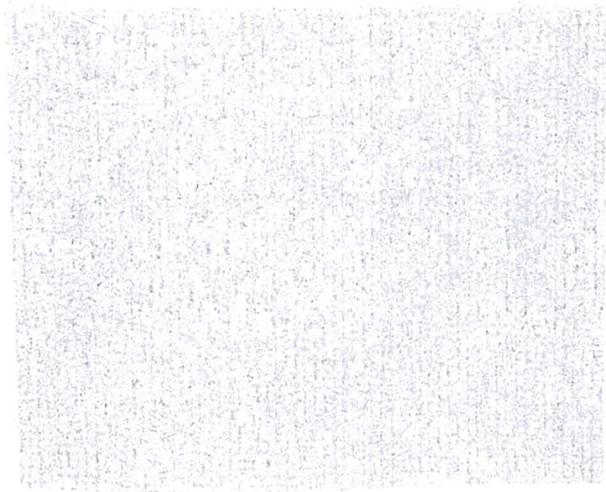
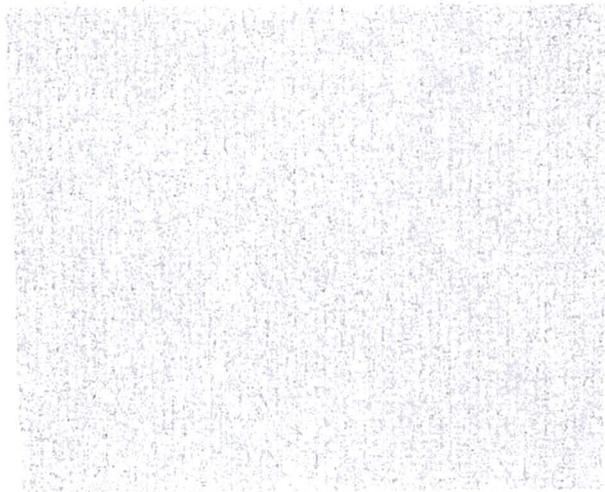


Figura 2.6 - Topografia inicial da bacia e topografia obtida após 90 dias de simulação.



### 3. DINÂMICA DO CURSO DE ÁGUA: ESTUDO DOS ESCOAMENTOS GRADUALMENTE VARIÁVEIS

São apresentadas as noções de hidrodinâmica que constituem a base da Hidráulica Fluvial. Deduzem-se a equação de continuidade (que exprime o princípio de conservação da massa) e a equação de conservação da quantidade de movimento, usando o teorema de transporte de Reynolds e considerando as hipóteses simplificativas usuais. Após uma breve apresentação das hipóteses básicas admitidas, descreve-se em seguida a técnica do volume de controlo e deduzem-se as equações válidas para escoamentos gradualmente variáveis unidimensionais (equações de Saint-Venant, ou “*shallow water equations*” em linguagem anglo-saxónica). Descrevem-se seguidamente algumas soluções analíticas básicas e apresentam-se modelos numéricos de resolução das equações com base no método das características, em métodos de diferenças finitas e num esquema de elementos finitos. Por fim, é feita uma breve abordagem a esquemas de alta resolução das equações diferenciais.

#### 3.1 Hipóteses básicas

As noções e hipóteses fundamentais usadas nos modelos matemáticos aplicados aos rios são formalizadas pelas equações do escoamento em canais abertos e irregulares. Estas equações são simples modelos de fenómenos extremamente complexos que incorporam apenas as influências mais importantes da vida real, desprezando aquelas que são consideradas secundárias para o modelo proposto.

Ao pretendermos descrever um fenómeno físico através de um conjunto de equações matemáticas (modelo), devemos estar conscientes das suas: *i*) reais potencialidades e limitações matemáticas para a descrição do fenómeno, e *ii*) condições de aplicabilidade. Importa ainda salientar que, em qualquer aplicação real, é essencial ter sempre sentido crítico relativamente à qualidade dos resultados obtidos.

Estão na base do modelo matemático que formularemos em seguida as cinco hipóteses seguintes:

- O fluido é considerado incompressível e homogéneo;
- O escoamento é unidimensional, isto é, a velocidade é considerada uniforme sobre a secção transversal e o nível da água na mesma é horizontal (desenvolvimento do canal em linha recta e com secção prismática);

- A curvatura da linha de corrente é pequena e a aceleração vertical é desprezável, ou seja, a pressão é considerada hidrostática (variação gradual da superfície livre com a distância);
- Os efeitos da turbulência e atrito no fundo são considerados, embora simulados por leis de resistência (semi-empíricas) válidas para escoamentos em regime permanente e uniforme; e,
- A declividade média do leito do canal é pequena.

### 3.2 Técnica do volume de controlo

Considere-se, num determinado instante  $t$ , um volume no espaço de dimensão e forma arbitrárias (*volume de controlo*) atravessado por um fluido em escoamento (*sistema de controlo*). O volume de controlo pode permanecer ou não fixo ou imóvel no espaço e ser ou não indeformável. Todas as leis básicas da mecânica (conservação da massa, conservação da quantidade de movimento, etc.) se aplicam ao sistema de controlo. Estas leis descrevem a interação entre o sistema de controlo e o meio ambiente e especificam em geral a variação temporal de alguma propriedade do sistema.

Em escoamentos de fluidos não estamos em geral interessados em seguir o movimento de uma partícula isolada ou de uma determinada porção de massa (com utilização de coordenadas lagrangeanas) mas sim no escoamento global numa região (utilização de coordenadas eulerianas). Nesta conformidade, as leis básicas são escritas para aplicações a escoamentos na região. O teorema de transporte de Reynolds é, nestas circunstâncias, de grande utilidade.

Seja  $E$  uma propriedade extensiva do fluido (massa, quantidade de movimento, energia, etc.), e seja  $e$  a correspondente propriedade intensiva. Uma propriedade intensiva,  $e$ , é definida como a quantidade de  $E$  por unidade de massa do sistema, isto é,

$$e = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta m}$$

A quantidade total de  $E$  no volume de controlo,  $E_{vc}$ , é então:

$$E_{vc} = \int_{vc} e \rho dV \quad (3.1)$$

em que  $\rho$  é a massa volúmica e  $vc$  representa o volume de controlo.

Importa agora analisar como as variáveis no volume de controlo estão relacionadas com as variáveis no sistema. Esta análise é aqui efectuada considerando as seguintes hipóteses:

- escoamento unidimensional;
- volume de controlo fixo no espaço; e,
- volume de controlo indeformável com o tempo.

Na aplicação da técnica do volume de controlo estamos interessados em fazer o balanço das variações das grandezas em jogo entre dois instantes consecutivos  $t$  e  $t + \Delta t$ . Para o efeito, considere-se o sistema de controlo nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ , como mostrado na Figura 3.1.

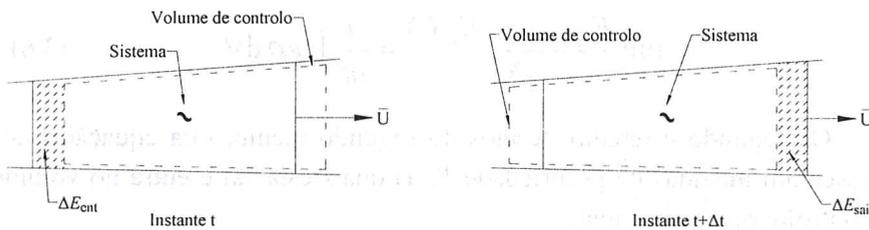


Figura 3.1 - Sistema e volume de controlo nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ .

A superfície de controlo é mostrada a tracejado e as fronteiras do sistema são apresentadas a cheio. No instante  $t$  parte do sistema está contido no volume de controlo e a parte restante está em movimento para o interior daquele volume. No instante  $t + \Delta t$  parte do sistema está ainda no interior do volume de controlo e a parte restante já se moveu para o exterior daquele volume. A propriedade  $E$  do sistema de controlo ( $_{sc}$ ) nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  escreve-se então:

$$\begin{aligned} E_{sc}(t) &= E_{vc}(t) + \Delta E_{ent} \\ E_{sc}(t + \Delta t) &= E_{vc}(t + \Delta t) + \Delta E_{sai} \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que  $\Delta E_{ent}$  e  $\Delta E_{sai}$  são as quantidades entrada e saída da propriedade  $E$  no volume de controlo, durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ .

A variação temporal da propriedade  $E$  do sistema escreve-se:

$$\frac{dE_{sc}}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{E_{sc}(t + \Delta t) - E_{sc}(t)}{\Delta t} \quad (3.3)$$

Substituindo as expressões (3.2) na equação (3.3) obtém-se:

$$\frac{dE_{sc}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{vc}(t+\Delta t) - E_{vc}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{sai}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{ent}}{\Delta t} \quad (3.4)$$

Ora, no limite, o primeiro termo do membro da direita da equação (3.4) representa a variação temporal da propriedade  $E$  no volume de controlo, isto é,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{vc}(t+\Delta t) - E_{vc}(t)}{\Delta t} = \frac{dE_{vc}}{dt} \quad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.1) na equação (3.5) resulta:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{vc}(t+\Delta t) - E_{vc}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \int_{vc} e\rho dV \quad (3.6)$$

Os segundo e terceiro termos do segundo membro da equação (3.4) representam medidas da propriedade  $E$ , às quais esta sai e entra no volume de controlo, respectivamente.

Designando por  $A$  uma superfície limítrofe do volume  $\forall$ , podemos escrever:

$$dV = \bar{U}_R dA \Delta t$$

em que  $\bar{U}_R$  representa a velocidade média do escoamento, medida relativamente à superfície de controlo.

Nesta conformidade, obtém-se:

$$E_{sai} = \int_{A_{sai}} e\rho dV = \int_{A_{sai}} e\rho (\bar{U}_R)_{sai} \Delta t dA$$

$$E_{ent} = \int_{A_{ent}} e\rho dV = \int_{A_{ent}} e\rho (\bar{U}_R)_{ent} \Delta t dA$$

donde,

54

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{sai}}{\Delta t} = (e\rho A \bar{U}_R)_{sai} \quad (3.7)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{ent}}{\Delta t} = (e\rho A \bar{U}_R)_{ent}$$

em que  $A$  representa uma secção transversal do escoamento.

Tendo presentes as equações (3.6) e (3.7), a equação (3.4) pode escrever-se:

$$\frac{dE_{sc}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vc} e\rho dV + (e\rho A \bar{U}_R)_{sai} - (e\rho A \bar{U}_R)_{ent} \quad (3.8)$$

Para um volume de controlo fixo ter-se-á  $\bar{U}_R = \bar{U}$  (velocidade média do escoamento). Todavia, se o volume de controlo aumentar ou diminuir com o tempo, então a superfície de controlo não será fixa e a velocidade  $\bar{U}_R$  na equação (3.8) será a velocidade relativa  $\bar{U}_R = \bar{U} - \bar{U}_s$ , sendo  $\bar{U}_s$  a velocidade da correspondente superfície de controlo (entrada ou saída). Consequentemente, a forma geral da variação da propriedade  $E$  de um sistema de controlo em movimento, para um escoamento unidimensional, escreve-se:

$$\frac{dE_{sc}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vc} e\rho dV + [e\rho A (\bar{U} - \bar{U}_s)]_{sai} - [e\rho A (\bar{U} - \bar{U}_s)]_{ent} \quad (3.9)$$

a qual traduz, nas condições enunciadas, o chamado *teorema de transporte de Reynolds*.

### 3.3 Equação de continuidade ou de conservação da massa

Para aplicar o teorema de transporte de Reynolds à conservação da massa (cuja propriedade extensiva,  $E$ , é a *massa* =  $m$ ), a propriedade intensiva do escoamento é *massa/unidade de massa* = 1, isto é,

$$e = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta m} = 1$$

Por outro lado, mantendo-se constante a massa do sistema de controlo tem-se  $dM_{sc}/dt = 0$ . Nesta conformidade, aplicando a equação (3.9) ao volume de controlo mostrado na Figura 3.2, com  $e = 1$ , obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho A dx + [\rho A (\bar{U} - \bar{U}_s)]_2 - [\rho A (\bar{U} - \bar{U}_s)]_1 = 0 \quad (3.10)$$

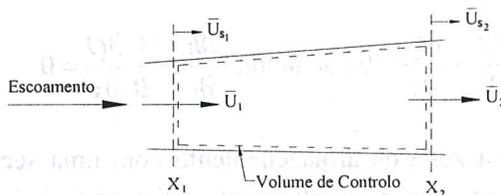


Figura 3.2 - Volume de controlo para dedução da equação de continuidade.

Aplicando o *teorema de Leibniz* ao primeiro termo da equação (3.10), seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho A dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dx + (\rho A)_2 \frac{dx_2}{dt} - (\rho A)_1 \frac{dx_1}{dt}$$

e atendendo a que  $dx_2/dt = (\bar{U}_s)_2$  e  $dx_1/dt = (\bar{U}_s)_1$ , aquela equação simplifica-se para:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dx + (\rho A \bar{U})_2 - (\rho A \bar{U})_1 = 0 \quad (3.11)$$

Atendendo agora ao *teorema do valor médio*, seja,

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = F(\xi) \Delta x, \text{ com } x_1 < \xi < x_2 \text{ e } \Delta x = x_2 - x_1$$

podemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) \Delta x + (\rho A \bar{U})_2 - (\rho A \bar{U})_1 = 0 \quad (3.12)$$

Dividindo a equação (3.12) por  $\Delta x$  e considerando condições limite, com  $\Delta x \rightarrow 0$ , aquela equação pode escrever-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A \bar{U}) = 0 \quad (3.13)$$

sendo esta a equação de continuidade ou de conservação da massa, em termos das variáveis  $A$  e  $\bar{U}$ . Considerando um fluido incompressível ( $d\rho/dt = 0$ ) e atendendo a que  $Q = A\bar{U}$ , com  $\partial A/\partial t = (\partial A/\partial h) \cdot (\partial h/\partial t)$  e ainda  $\partial A/\partial h = B(h)$ , a equação (3.13) pode tomar a seguinte forma:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \text{ ou ainda } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Se existir uma zona de armazenamento com uma secção transversal  $A_0$  (área não activa), esta é simplesmente adicionada à área activa  $A$  do escoamento. Por outro lado, se ocorrer um escoamento lateral contínuo,  $q_l$ ,

por unidade de largura do tributário, este é adicionado ao segundo membro da equação de continuidade (positivo tratando-se de um caudal afluente e negativo no caso contrário), vindo:

$$\frac{\partial(A + A_0)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_i \quad (3.14)$$

### 3.4 Equação de conservação da quantidade de movimento

Para a conservação da quantidade de movimento, a propriedade extensiva é a *quantidade de movimento* =  $m\bar{U}$  e a correspondente propriedade intensiva do escoamento escreve-se:

$$e = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \bar{U} \frac{\Delta m}{\Delta m} = \bar{U}$$

De acordo com a segunda lei de Newton, a variação temporal da quantidade de movimento do sistema é igual ao somatório de todas as forças exercidas sobre o sistema de controlo, ou seja  $dM_{sc}/dt = \sum F$ .

Substituindo  $e = \bar{U}$  na equação (3.9) obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{sc} \bar{U} \rho dV + [\rho A (\bar{U} - \bar{U}_s) \bar{U}]_2 - [\rho A (\bar{U} - \bar{U}_s) \bar{U}]_1 = \sum F$$

Após aplicação do teorema de Leibniz e atendendo a que  $dx_2/dt = (\bar{U}_s)_2$  e  $dx_1/dt = (\bar{U}_s)_1$ , resulta:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A \bar{U}) dx + (\rho A \bar{U}^2)_2 - (\rho A \bar{U}^2)_1 = \sum F$$

donde, após aplicação do teorema do valor médio:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A \bar{U}) \Delta x + (\rho A \bar{U}^2)_2 - (\rho A \bar{U}^2)_1 = \sum F \quad (3.15)$$

Seja a Figura 3.3, a qual representa as forças aplicadas ao volume de controlo.

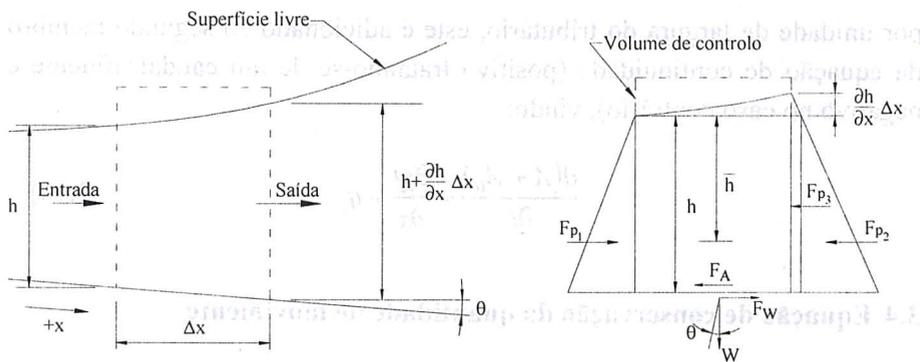


Figura 3.3 - Forças aplicadas ao volume de controle.

Tendo em consideração os elementos apresentados nesta figura, as forças aplicadas ao volume de controle são:

- Forças de pressão nas superfícies de entrada e saída do fluido no volume de controle

- para secções rectangulares teremos:

$$F_{p_1} = \rho g A \bar{h}; \quad F_{p_2} = \rho g A \bar{h}; \quad F_{p_3} = \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x$$

- para secções não rectangulares, embora com  $\partial B/\partial t = 0$ , a resultante daquelas forças escreve-se:

$$\frac{F_{p_3}}{\Delta x} = \rho g \frac{\partial}{\partial x} \int_b^{h(x)} [h(x) - \eta] B(x, \eta) d\eta$$

sendo  $\eta$  a distância vertical medida a partir da soleira.

- Força devida ao peso do fluido no volume de controle:  
 $F_w = -\rho g A (\partial \xi / \partial x) \Delta x$ , em que  $\xi$  representa o fundo.
- Força de atrito no fundo:  $F_A = \rho g A J \Delta x$ , em que  $J$  representa a inclinação da linha de energia.

Ainda de acordo com a Figura 3.3,  $\sum F = F_{p_1} - F_{p_2} - F_{p_3} + F_w - F_A$ .  
Por conseguinte, considerando secções rectangulares, teremos:

$$\sum F = -\rho g A \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x - \rho g A \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x - \rho g A J \Delta x \quad (3.16)$$

Substituindo esta última equação (3.16) na equação (3.15) e dividindo por  $\Delta x$  obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A \bar{U}) + \frac{(\rho A \bar{U}^2)_2 - (\rho A \bar{U}^2)_1}{\Delta x} = -\rho g A \frac{\partial(h + \xi)}{\partial x} - \rho g A J$$

Para um fluido incompressível e com  $\Delta x \rightarrow 0$  resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{U}^2) + g A \frac{\partial(h + \xi)}{\partial x} = -g A J$$

a qual pode ainda escrever-se na seguinte forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial(h + \xi)}{\partial x} = -g A J \quad (3.17)$$

A formulação de Manning-Strickler é vulgarmente utilizada para o cálculo da variável  $J$ , seja  $J = n_k^2 |Q|Q / (A^2 R_h^{4/3})$ , com  $R_h = A/P$  e representando  $n_k = 1/K$  o coeficiente de rugosidade de Manning-Strickler. Se ocorrer um escoamento lateral contínuo,  $q_l$ , por unidade de largura do tributário, a sua influência é considerada através da adição do termo  $q_l (Q/A - u_l)$  ao primeiro membro da equação (3.17), em que  $u_l$  representa a componente da velocidade do escoamento transversal na direcção do escoamento principal. Substituindo estes resultados na equação (3.17) obtém-se:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial(h + \xi)}{\partial x} + \frac{n_k^2 g |Q|Q}{A R_h^{4/3}} + q_l \left( \frac{Q}{A} - u_l \right) = 0 \quad (3.18)$$

Para secções não rectangulares, admitindo, todavia,  $\partial B / \partial t = 0$ , a equação resultante escreve-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Q^2}{A} + g \int_b^{h(x,t)} (h(x,t) - \eta) \sigma(x,\eta) d\eta \right] + \\ + g A \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{n_k^2 g |Q|Q}{A R_h^{4/3}} + q_l \left( \frac{Q}{A} - u_l \right) = 0 \end{aligned}$$

ou de forma mais compacta:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Q^2}{A} + g I_1 \right] + g A \frac{\partial \xi}{\partial x} + g A J + q_l \left( \frac{Q}{A} - u_l \right) = 0 \quad (3.19)$$

com  $I_1(x,t) = \int_b^{h(x,t)} [h(x,t) - \eta] \sigma(x,\eta) d\eta$ , em que  $\sigma \leq B(x,t)$  é a largura da secção à altura  $\eta \leq h(x,t)$  contada a partir do talvegue, situado à cota  $\xi(x)$ .

Para além do termo  $I_1$  correspondente às forças de pressão actuantes nas secções extremas  $x_1$  e  $x_2$  do volume de controlo, poderá ainda considerar-se um termo adicional  $I_2$  correspondente às forças de pressão actuantes nas paredes laterais devido a variações da largura do canal com a distância; é dado por:

$$I_2 = \int_b^{h(x,t)} [h(x,t) - \eta] \frac{\partial \sigma(x,\eta)}{\partial x} d\eta$$

Nesta conformidade, uma forma mais geral da equação de conservação da quantidade de movimento poderá agora escrever-se:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Q^2}{A} + g I_1 \right] + g A \frac{\partial \xi}{\partial x} + g A J + g I_2 + q_l \left( \frac{Q}{A} - u_l \right) = 0 \quad (3.20)$$

Considerando secções rectangulares constantes, ou com variações suaves, o sistema constituído pelas equações (3.14) e (3.18) é um modelo matemático suficientemente adequado para a modelação de escoamentos gradualmente variáveis com superfície livre, essencialmente unidimensionais no plano horizontal.

### 3.5 Modelo simplificado. Soluções analíticas

Com  $Q = Au$ , em que  $u \equiv \bar{U}$  é a velocidade média do escoamento segundo  $x$ , e considerando: *i*) uma secção rectangular constante; *ii*)  $q_l = 0$ , e *iii*) a aproximação  $R_h = h$  (válida para valores da largura  $B$  do canal muito superiores à altura  $h$ ), o sistema constituído pelas equações (3.14) e (3.18) escreve-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= -g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\tau(\xi)}{h} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\text{com } \frac{\tau(\xi)}{h} = \frac{n_k^2 g |u| u}{R_h^{4/3}}.$$

Não considerando os efeitos devidos ao atrito  $[\tau(\xi)/h=0]$  e com fundo horizontal, donde  $\partial h/\partial t = \partial \eta/\partial t$  e  $\partial(h+\xi)/\partial x = \partial \eta/\partial x$ , em que  $\eta$  representa a variação da superfície livre, o sistema (3.21) pode escrever-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= -u \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Admitindo, adicionalmente, desprezáveis os termos não lineares do 2º membro do sistema (3.22), com  $h = h_0$  no termo não linear restante e considerando um canal com um comprimento finito e fechado na extremidade oposta, à distância  $l$  da origem, o sistema de equações resultante admite a seguinte solução (3.23):

$$\begin{aligned} \eta &= 2 \zeta_0 \cos(\sigma t) \cos(k_0 x) \\ u &= 2 \frac{\zeta_0 c}{h} \sin(\sigma t) \sin(k_0 x) \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que  $\sigma = 2\pi/T$ ,  $k_0 = 2\pi/L$  e  $c$  representa a velocidade de propagação da onda ou celeridade que, em condições de água pouco profunda, é dada por  $c = \sqrt{gh}$ .  $T$  e  $L$  representam, respectivamente, o período e o comprimento de onda.

Substituindo a solução (3.23) nos membros da direita das equações (3.22) e integrando-as em seguida obtém-se a solução (3.24) (Singh & Hager, 1996):

$$\begin{aligned} \eta &= \zeta_0 \cos(\sigma t - k_0 x) - \frac{3}{4} \frac{g \zeta_0^2 \sigma}{c^3} x \sin[2(\sigma t - k_0 x)] \\ u &= \frac{g \zeta_0}{c} \cos(\sigma t - k_0 x) - \frac{1}{8} \frac{(g \zeta_0)^2}{c^3} \cos[2(\sigma t - k_0 x)] - \\ &\quad - \frac{3}{4} \frac{(g \zeta_0)^2 \sigma}{c^4} x \sin[2(\sigma t - k_0 x)] \end{aligned} \quad (3.24)$$

A solução (3.24) do sistema de equações (3.22) é válida apenas para distâncias  $x$  relativamente curtas (apenas alguns comprimentos de onda).

Uma outra solução para o sistema de equações (3.22) poderá ser obtida considerando no plano  $(x, t)$  as duas famílias de características  $C^+$  e  $C^-$  (como se verá na secção seguinte). Supondo o canal em repouso no instante  $t = 0$  (instante inicial) e admitindo uma condição de fronteira do tipo  $u_0 = f(t_0)$  é ainda possível obter a seguinte solução analítica (3.25) para uma onda progressiva (Temperville, 1985):

$$\begin{aligned} x &= (t - t_0) \left( \frac{3}{2} f(t_0) + \sqrt{gh} \right) \\ \eta &= \frac{f(t_0)^2}{4g} + \sqrt{\frac{h}{g}} f(t_0) \\ u &= f(t_0) \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.6 Modelos de resolução numérica das equações

Na generalidade das aplicações correntes, as equações (3.14) e (3.18) deverão ser resolvidas sem qualquer simplificação adicional. As soluções analíticas apenas poderão ser úteis em problemas muito particulares ou para validação de modelos numéricos.

Mostra-se em seguida como aquele sistema de equações poderá ser resolvido utilizando diferentes metodologias. Entre os esquemas numéricos mais correntes destacam-se o método das características e alguns métodos de diferenças finitas e de elementos finitos, os quais passamos a expor, por esta mesma ordem.

#### 3.6.1 Método das características

Seja de novo o sistema de equações (3.21), que agora pretendemos resolver utilizando um esquema numérico baseado no método das características:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= -g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\tau(\xi)}{h} \end{aligned} \quad (3.21)$$

As equações das linhas características e das invariantes de Riemann são obtidas a partir da anulação do determinante da matriz constituída pelos coeficientes dos gradientes das variáveis, tornando, por conseguinte, o

sistema indeterminado, mas impondo, por outro lado, que o mesmo seja possível. Assim, daquele sistema de equações resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & u & 0 & h & | & 0 \\ 0 & g & 1 & u & | & -g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\tau(\xi)}{h} \\ dt & dx & 0 & 0 & | & dh \\ 0 & 0 & dt & dx & | & du \end{bmatrix}$$

obtendo-se, por condensação da matriz:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{gh}$$

$$du \pm \sqrt{\frac{g}{h}} dh + \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau(\xi)}{h} \right) dt = 0$$

Tendo por base o esquema representado na Figura 3.4,

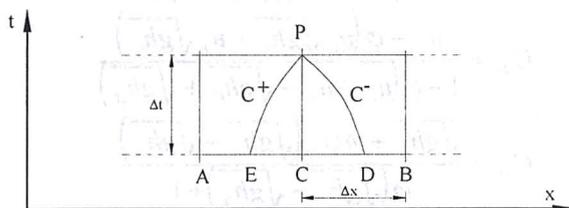


Figura 3.4 - Linhas características  $C^+$  e  $C^-$  de um sistema de equações do tipo (3.21).

e supondo conhecidos os valores de  $h$  e  $u$  nos pontos A, C e B, sendo dados  $x_p$  e  $t_p$ , obtêm-se através de integrações de 1ª ordem as seguintes equações segundo as linhas características  $C^+$  e  $C^-$ .

$$\text{De } \frac{dx}{dt} = u + \sqrt{gh} \Rightarrow x_p - x_A = (u + \sqrt{gh})_A (t_p - t_A)$$

$$\text{De } du + \sqrt{\frac{g}{h}} dh + \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau(\xi)}{h} \right) dt = 0$$

$$\Rightarrow u_p - u_A + \left( \sqrt{\frac{g}{h}} \right)_A (h_p - h_A) + \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau(\xi)}{h} \right)_A (t_p - t_A) = 0$$

$$\text{De } \frac{dx}{dt} = u - \sqrt{gh} \Rightarrow x_p - x_B = (u - \sqrt{gh})_B (t_p - t_B)$$

$$\text{De } du - \sqrt{\frac{g}{h}} dh + \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau(\xi)}{h} \right) dt = 0$$

$$\Rightarrow u_p - u_B - \left( \sqrt{\frac{g}{h}} \right)_B (h_p - h_B) + \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau(\xi)}{h} \right)_B (t_p - t_B) = 0$$

Atendendo às equações das linhas características,  $dx/dt = u \pm \sqrt{gh}$ , deduzem-se por interpolação linear as seguintes expressões (3.26) para  $U$ ,  $C$  e  $H$  nos pontos E e D (Antunes do Carmo *et al.*, 1993):

$$\begin{aligned} U_E &\approx \frac{u_C + \varphi(u_A \sqrt{gh_C} - u_C \sqrt{gh_A})}{1 + \varphi(u_C - u_A + \sqrt{gh_C} - \sqrt{gh_A})} \\ C_E &\approx \frac{-\sqrt{gh_C} + \varphi U_E (\sqrt{gh_C} - \sqrt{gh_A})}{\varphi(\sqrt{gh_A} - \sqrt{gh_C}) - 1} \\ H_E &\approx h_C - \varphi(h_C - h_A)(U_E + C_E) \\ U_D &\approx \frac{u_C - \varphi(u_C \sqrt{gh_B} - u_B \sqrt{gh_C})}{1 - \varphi(u_C - u_B - \sqrt{gh_C} + \sqrt{gh_B})} \\ C_D &\approx \frac{\sqrt{gh_C} + \varphi U_D (\sqrt{gh_C} - \sqrt{gh_B})}{\varphi(\sqrt{gh_C} - \sqrt{gh_B}) + 1} \\ H_D &\approx h_C + \varphi(h_C - h_B)(U_D - C_D) \end{aligned} \quad (3.26)$$

com  $\varphi = \Delta t / \Delta x$ .

Nesta conformidade, podemos escrever:

$$\begin{aligned} u_p &= U_E - g \frac{h_p - H_E}{C_E} - \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau(\xi)}{h} \right)_E \Delta t \\ u_p &= U_D + g \frac{h_p - H_D}{C_D} - \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau(\xi)}{h} \right)_D \Delta t \end{aligned}$$

ou seja,

$$u_p = V_E - \frac{g}{C_E} h_p$$

$$u_p = V_D + \frac{g}{C_D} h_p$$

com,

$$V_E = U_E + g \frac{H_E}{C_E} - \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau(\xi)}{h} \right)_E \Delta t$$

$$V_D = U_D - g \frac{H_D}{C_D} - \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau(\xi)}{h} \right)_D \Delta t$$

obtêm-se para os pontos interiores do domínio:

$$h_p = \frac{C_E C_D (V_E - V_D)}{g (C_E + C_D)} ; u_p = \frac{C_E V_E + C_D V_D}{C_E + C_D} \quad (3.27)$$

### 3.6.2 Métodos de diferenças finitas

Seja a função de duas variáveis  $u = u(x, t)$  e considere-se que  $u$  possui um número suficiente de derivadas parciais. Os valores da função  $u$  nos pontos  $(x, t)$  e  $(x + \Delta x, t + \Delta t)$  estão relacionados pela expressão em série de Taylor,

$$u(x + \Delta x, t + \Delta t) = u(x, t) + \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) + \frac{1}{2!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 u(x, t) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \right)^{n-1} u(x, t) + R_n$$

Consideremos o ponto do espaço  $(i\Delta x, n\Delta t)$ , também designado por nó  $(i, n)$ , da malha de cálculo representada na Figura 3.5.

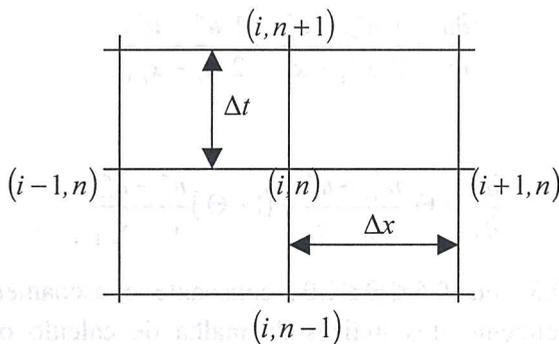


Figura 3.5 - Malha de diferenças finitas.

Expandindo  $u_{i-1}^n$  e  $u_{i+1}^n$  em série de Taylor em torno do valor  $u_i^n$  obtêm-se:

$$\begin{aligned} u_{i-1}^n &\approx u_i^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \\ u_{i+1}^n &\approx u_i^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

Considerando agora as equações (3.28), somando e subtraindo uma da outra obtêm-se as seguintes fórmulas de diferenças finitas para as derivadas de primeira e segunda ordem em  $(i, n)$ , segundo a direcção  $i\Delta x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{Diferenças progressivas}) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{Diferenças regressivas}) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (\text{Diferenças centradas}) \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.32)$$

De igual modo se obteriam as derivadas  $\partial u/\partial t$  e  $\partial^2 u/\partial t^2$ , expandindo  $u_i^{n-1}$  e  $u_i^{n+1}$  em série de Taylor em torno do valor  $u(i, n)$ .

A ordem de aproximação numérica das derivadas depende da uniformidade da malha computacional. Nesta conformidade, um esquema possível e comum para aproximar o valor da 1ª derivada numa malha não-uniforme escreve-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{x_{i+1} - x_i} + \frac{1}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{x_i - x_{i-1}}$$

66

ou ainda,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \Theta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{x_{i+1} - x_i} + (1 - \Theta) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{x_i - x_{i-1}} \quad (3.33)$$

com  $0.0 \leq \Theta \leq 0.5$ , ou  $0.5 \leq \Theta \leq 1.0$ , consoante o escoamento se dá no sentido de crescimento dos índices da malha de cálculo ou no sentido contrário.

Um esquema de diferenças finitas consiste em substituir as derivadas contínuas das variáveis nas equações que regem os fenômenos por fórmulas dos tipos (3.29) a (3.33), neste caso apenas derivadas de 1ª e 2ª ordens, e calcular os valores das incógnitas, no caso presente as variáveis  $h$  e  $u$ , em pontos  $(i, n)$  de uma malha previamente estabelecida nos domínios espacial  $(i\Delta x)$  e temporal  $(n\Delta t)$ .

### 3.6.2.1 Esquemas implícitos

Os esquemas implícitos de diferenças finitas são incondicionalmente estáveis, isto é, não obrigam ao cumprimento de qualquer condição de estabilidade para a garantia de uma solução. Contudo, a utilização de valores elevados do incremento temporal,  $\Delta t$ , poderá conduzir a soluções menos precisas, pelo que, na prática, se aconselha a utilizar um valor limite para  $\Delta t$  próximo ou não muito superior à correspondente condição de estabilidade deduzida para esquemas explícitos, como se verá mais adiante. Por outro lado, este tipo de esquemas calcula os valores das variáveis simultaneamente em todos os pontos da malha de cálculo, em cada instante  $(n+1)\Delta t$ , através da resolução de um sistema de equações.

Passaremos de seguida em revista alguns dos principais esquemas implícitos, ou semi-implícitos, constantes na bibliografia da especialidade.

#### 3.6.2.1.1 Esquema semi-implícito de 4 pontos

Neste método as derivadas espaciais  $\partial h/\partial x$  e  $\partial u/\partial x$  são aproximadas através das seguintes expressões (3.34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \Theta \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x_i} + (1 - \Theta) \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x_i} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \Theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x_i} + (1 - \Theta) \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x_i} \end{aligned} \quad (3.34)$$

com  $0.5 \leq \Theta < 1.0$ .

As derivadas temporais  $\partial h/\partial t$  e  $\partial u/\partial t$  são estimadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_{i+1}^n}{\Delta t} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

O termo relativo à tensão de atrito no fundo,  $\tau(\xi_i)/h_i$ , é modelado através de:

$$\frac{\tau(\xi_i)}{h_i} = n_k^2 g \frac{|\bar{u}_i^{n+1/2}| u_i^{n+1}}{h_i^{4/3}}$$

sendo  $n_k = 1/K$  o coeficiente de rugosidade de Manning.

Em cada  $\Delta t$ , durante o processo iterativo, proceder-se-á, sucessivamente, à seguinte actualização dos valores de  $\bar{u}_i^{n+1/2}$ :  $\bar{u}_i^{n+1/2} = 0.5(u_i^n + u_i^{n+1})$ .

As variáveis  $h$  e  $u$  são estimadas entre tempos adjacentes por:

$$\begin{aligned} h_i &= 0.25(h_i^n + h_{i+1}^n + h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}) \\ u_i &= 0.25(u_i^n + u_{i+1}^n + u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo os valores de  $h$ ,  $u$ ,  $\partial h/\partial x$ ,  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial t$ ,  $\partial \xi/\partial x$  e  $\tau(\xi)/h$  no sistema de equações de Saint-Venant (3.21) obtém-se a seguinte forma de diferenças finitas:

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta x_i}{2 \Delta t} (h_i^{n+1} - h_i^n + h_{i+1}^{n+1} - h_{i+1}^n) + \\ &+ 0.25(h_i^n + h_{i+1}^n + h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}) [\Theta(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) + (1 - \Theta)(u_{i+1}^n - u_i^n)] + \\ &+ 0.25(u_i^n + u_{i+1}^n + u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) [\Theta(h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}) + (1 - \Theta)(h_{i+1}^n - h_i^n)] = 0 \\ \\ &\frac{\Delta x_i}{2 \Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^n + u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) + \\ &+ 0.25(u_i^n + u_{i+1}^n + u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) [\Theta(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) + (1 - \Theta)(u_{i+1}^n - u_i^n)] + \\ &+ g [\Theta(h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}) + (1 - \Theta)(h_{i+1}^n - h_i^n) + (\xi_{i+1} - \xi_i)] + \\ &+ n_k^2 g \frac{\Delta x_i |\bar{u}_i^{n+1/2}| u_i^{n+1}}{h_i^{4/3}} = 0 \end{aligned}$$

Para uma grelha com  $N$  pontos teremos um sistema de  $2N-2$  equações a  $2N$  incógnitas, sendo, por conseguinte, necessárias 2 equações suplementares; equações estas que resultam de relações entre  $h$  e  $u$ , ditas condições de fronteira. Esquemáticamente, as equações resultantes podem escrever-se na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
CF_{M_1} h_1 + CF_{M_2} u_1 &= RF_M \\
C_{11} h_1 + C_{21} u_1 + C_{32} h_2 + C_{42} u_2 &= RC_1 \\
M_{11} h_1 + M_{21} u_1 + M_{32} h_2 + M_{42} u_2 &= RM_1 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
C_{1i} h_i + C_{2i} u_i + C_{3i+1} h_{i+1} + C_{4i+1} u_{i+1} &= RC_{i+1} \\
M_{1i} h_i + M_{2i} u_i + M_{3i+1} h_{i+1} + M_{4i+1} u_{i+1} &= RM_{i+1} \\
C_{1i+1} h_{i+1} + C_{2i+1} u_{i+1} + C_{3i+2} h_{i+2} + C_{4i+2} u_{i+2} &= RC_{i+2} \\
M_{1i+1} h_{i+1} + M_{2i+1} u_{i+1} + M_{3i+2} h_{i+2} + M_{4i+2} u_{i+2} &= RM_{i+2} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
C_{1N-1} h_{N-1} + C_{2N-1} u_{N-1} + C_{3N} h_N + C_{4N} u_N &= RC_N \\
M_{1N-1} h_{N-1} + M_{2N-1} u_{N-1} + M_{3N} h_N + M_{4N} u_N &= RM_N \\
CF_{J_1} h_N + CF_{J_2} u_N &= RF_J
\end{aligned}$$

o qual representa um sistema pentadiagonal de  $2N$  equações não lineares a  $2N$  incógnitas. Assim, considerando uma grelha com apenas 4 pontos teremos, em termos matriciais:

$CF_{M_1}$	$CF_{M_2}$							$h_1$	$RF_M$
$C_{11}$	$C_{21}$	$C_{32}$	$C_{42}$					$u_1$	$RC_1$
$M_{11}$	$M_{21}$	$M_{32}$	$M_{42}$					$h_2$	$RM_1$
		$C_{12}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{43}$			$u_2$	$RC_2$
		$M_{12}$	$M_{22}$	$M_{33}$	$M_{43}$			$h_3$	$RM_2$
				$C_{13}$	$C_{23}$	$C_{34}$	$C_{44}$	$u_3$	$RC_3$
				$M_{13}$	$M_{23}$	$M_{34}$	$M_{44}$	$h_4$	$RM_3$
						$CF_{J_1}$	$CF_{J_2}$	$u_4$	$RF_J$

Para a resolução de um sistema pentadiagonal de equações lineares apresenta-se em seguida uma metodologia eficiente, baseada num conjunto de expressões deduzidas com base no método directo de Gauss.

Seja o sistema pentadiagonal  $[K]\{u\} = \{f\}$ , com:



- Retro-substituição

$$u_{n+1} = \frac{s_{n+1}}{\alpha_{n+1}} ; \quad u_n = \frac{\beta_n u_{n+1} + s_n}{\alpha_n}$$

$$u_i = \frac{\beta_i u_{i+1} - e_i u_{i+2} + s_i}{\alpha_i} \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1)$$

A não-linearidade do sistema implica a utilização de um método de cálculo apropriado; o recurso a um procedimento iterativo é uma metodologia frequentemente utilizada.

Um esquema corrente de 4 pontos é devido a Preissmann (1961). Este esquema foi originalmente aplicado ao sistema de equações (3.14) e (3.18), com a equação (3.14) escrita em termos da variável  $h$ . Nesta conformidade, sejam estas equações escritas na seguinte forma simplificada (3.37), com  $q_i = 0$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial (h + \xi)}{\partial x} + \frac{g |Q| Q}{AK^2 R_h^{4/3}} = 0$$

As derivadas espaciais e temporais das variáveis  $h$  e  $Q$  são discretizadas em conformidade com as expressões (3.34) e (3.35) e o termo  $\partial(Q^2/A)/\partial x$  é calculado por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) \approx \frac{\Theta}{\Delta x} \left[ \frac{(Q_{i+1}^{n+1})^2}{A_{i+1}^{n+1}} - \frac{(Q_i^{n+1})^2}{A_i^{n+1}} \right] + \frac{(1-\Theta)}{\Delta x} \left[ \frac{(Q_{i+1}^n)^2}{A_{i+1}^n} - \frac{(Q_i^n)^2}{A_i^n} \right]$$

Após substituição nas equações (3.37) resultam as seguintes equações discretizadas:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_{i+1}^n}{\Delta t} + \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \right) + \frac{2}{\Delta x} \left[ \frac{\Theta (Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (1-\Theta)(Q_{i+1}^n - Q_i^n)}{(B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1})} + \frac{(1-\Theta)(Q_{i+1}^n - Q_i^n)}{(B_i^n + B_{i+1}^n)} \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} + \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \right) + \frac{\Theta}{\Delta x} \left[ \frac{(Q_{i+1}^{n+1})^2}{A_{i+1}^{n+1}} - \frac{(Q_i^{n+1})^2}{A_i^{n+1}} \right] + \frac{(1-\Theta)}{\Delta x} \times \\
& \times \left[ \frac{(Q_{i+1}^n)^2}{A_{i+1}^n} - \frac{(Q_i^n)^2}{A_i^n} \right] + g \left[ \Theta \frac{A_{i+1}^{n+1} + A_i^{n+1}}{2} + (1-\Theta) \frac{A_{i+1}^n + A_i^n}{2} \right] \times \\
& \times \left\{ \left[ \Theta \frac{(h+\xi)_{i+1}^{n+1} - (h+\xi)_i^{n+1}}{\Delta x} + (1-\Theta) \frac{(h+\xi)_{i+1}^n - (h+\xi)_i^n}{\Delta x} \right] + \right. \\
& \left. + \left[ \Theta \frac{Q_{i+1}^{n+1} |Q_{i+1}^{n+1}| + Q_i^{n+1} |Q_i^{n+1}|}{2} + (1-\Theta) \frac{Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n| + Q_i^n |Q_i^n|}{2} \right] \times \right. \\
& \times \left[ \Theta \frac{[(AKR_h^{2/3})_{i+1}^{n+1}]^2 + [(AKR_h^{2/3})_i^{n+1}]^2}{2} + (1-\Theta) \times \right. \\
& \left. \left. \times \frac{[(AKR_h^{2/3})_{i+1}^n]^2 + [(AKR_h^{2/3})_i^n]^2}{2} \right]^{-1} \right\} = 0; \quad 0.5 \leq \Theta \leq 1.0
\end{aligned}$$

Tal como no método anterior, também neste caso somos conduzidos à resolução de um sistema de equações não-lineares, em termos das variáveis  $h_i^{n+1}$ ,  $Q_i^{n+1}$ ,  $h_{i+1}^{n+1}$  e  $Q_{i+1}^{n+1}$ . Supondo uma grelha com  $N$  pontos de cálculo, teremos um sistema com  $2N-2$  equações para  $2N$  incógnitas. Este sistema será resolvido com a adição de duas condições de fronteira e recorrendo, por exemplo, ao método iterativo de Newton. Neste caso, porém, o sistema deverá ser previamente linearizado em termos das incógnitas  $\Delta h_i$ ,  $\Delta Q_i$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , as quais representam sucessivos incrementos em cada instante de cálculo  $(n+1)\Delta t$ , ou seja, representam os afastamentos para a solução, sendo as sucessivas aproximações, em cada instante de cálculo, obtidas através de:

72

$$h_i^{n+1} = h_i^n + \Delta h$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \Delta Q$$

Considerando o par de pontos  $(i, i+1)$ , o sistema de equações resultante linearizado poderá escrever-se:

$$A \Delta h_{i+1} + B \Delta Q_{i+1} + C \Delta h_i + D \Delta Q_i + G = 0 \tag{3.38}$$

$$A' \Delta h_{i+1} + B' \Delta Q_{i+1} + C' \Delta h_i + D' \Delta Q_i + G' = 0$$

Usando os valores conhecidos de  $h_i^n$  e  $Q_i^n$  obtêm-se valores para os coeficientes  $A, B, \dots, D', G'$ . O sistema de equações linearizado (3.38), escrito para os  $N$  pontos da malha, fornecerá então as novas aproximações para as incógnitas  $\Delta h_i, \Delta Q_i, i=1, 2, \dots, N$  no instante  $(n+1)\Delta t$ . A primeira aproximação no processo iterativo obtém-se considerando  $\Delta h_i = \Delta Q_i = 0$ . Os valores das incógnitas do sistema (3.37),  $h_i^{n+1}$  e  $Q_i^{n+1}$ , são seguidamente actualizados e parte-se para uma nova aproximação até que as diferenças entre duas aproximações sucessivas, para todos os pontos da malha de cálculo, sejam inferiores a um erro pré-estabelecido.

### 3.6.2.1.2 Esquema semi-implícito de Abbott & Ionescu

Seja de novo o sistema de equações a resolver (3.37):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial (h + \xi)}{\partial x} + \frac{g |Q| Q}{AK^2 R_h^{4/3}} = 0$$

Em conformidade com o esquema de Abbott & Ionescu (1967), os valores das variáveis  $h$  e  $Q$  são calculados alternadamente nos pontos da malha computacional, como representado na Figura 3.6. Trata-se de um método centrado, em que as distâncias entre os pontos da malha de cálculo ( $\Delta x_i$ ) podem variar de ponto para ponto.

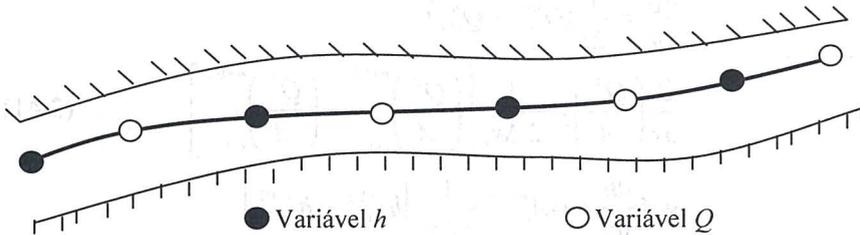


Figura 3.6 - Troço de um canal natural (rio). Grelha de cálculo das variáveis.

### Equação de continuidade

Esta equação é centrada em cada ponto  $h$  da malha de diferenças finitas, sendo as derivadas discretizadas no instante  $(n+1/2)\Delta t$  como se segue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} (h_i^{n+1} - h_i^n) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{2 \Delta x_i} \left[ \frac{1}{2} (Q_{i+1}^n + Q_{i+1}^{n+1}) - \frac{1}{2} (Q_{i-1}^n + Q_{i-1}^{n+1}) \right]\end{aligned}\quad (3.39)$$

com  $2 \Delta x_i = x_{i+1} - x_{i-1}$ .

Após substituição das equações (3.39) na primeira equação do sistema (3.37) resulta a seguinte formulação (3.40):

$$\alpha_i^c Q_{i-1}^{n+1} + \beta_i^c h_i^{n+1} + \gamma_i^c Q_{i+1}^{n+1} = \delta_i^c \quad (3.40)$$

em que:

$$\begin{aligned}\alpha_i^c &= -\frac{\Delta t}{4 \Delta x_i}; \quad \beta_i^c = B_i^{n+1}; \quad \gamma_i^c = \frac{\Delta t}{4 \Delta x_i}; \\ \delta_i^c &= h_i^n B_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4 \Delta x_i} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n)\end{aligned}$$

### ***Equação da quantidade de movimento***

A equação de conservação da quantidade de movimento [segunda equação do sistema (3.37)] é centrada em torno dos pontos  $Q$  da malha computacional, sendo as derivadas temporal e espacial discretizadas como se segue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) &= \frac{1}{2 \Delta x_i} \left[ \left( \frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^{n+1/2} - \left( \frac{Q^2}{A} \right)_{i-1}^{n+1/2} \right] \\ g A \frac{\partial h}{\partial x} &= g A_i^{n+1/2} \frac{1}{2 \Delta x_i} [h_{i+1}^{n+1/2} - h_{i-1}^{n+1/2}]\end{aligned}\quad (3.41)$$

O termo de atrito é calculado da seguinte forma:

$$\frac{g|Q|Q}{AK^2 R_h^{4/3}} = g \left( \frac{A}{A^2 K^2 R_h^{4/3}} \right)_{i+1}^{n+1/2} [f Q_{i+1}^{n+1} Q_{i+1}^{n+1} + (1-f) Q_{i+1}^n Q_{i+1}^n]$$

com a função de peso  $f$  dada por:

$$f = \frac{|\mathcal{Q}_i^{n+1/2}| \mathcal{Q}_i^{n+1/2} - |\mathcal{Q}_i^n| \mathcal{Q}_i^n}{\mathcal{Q}_i^n (\mathcal{Q}_i^{n+1} - \mathcal{Q}_i^n)}$$

Atendendo a que neste esquema, e de acordo com a Figura 3.6, as variáveis  $h$  e  $\mathcal{Q}$  não são calculadas nos mesmos pontos da malha de diferenças finitas, os valores de  $\mathcal{Q}^2$  no termo  $\partial(\mathcal{Q}^2/A)/\partial x$  deverão ser avaliados nos pontos  $i$  e  $i+2$ ; por conseguinte, são obtidos por interpolação com base nos valores dos pontos vizinhos. Substituindo a expressão do termo de atrito e as equações (3.41) na segunda equação do sistema (3.37) resulta a equação (3.42):

$$\alpha_{i+1}^q h_i^{n+1} + \beta_{i+1}^q \mathcal{Q}_{i+1}^{n+1} + \gamma_{i+1}^q h_{i+2}^{n+1} = \delta_{i+1}^q \quad (3.42)$$

em que  $\alpha_{i+1}^q$ ,  $\beta_{i+1}^q$ ,  $\gamma_{i+1}^q$  e  $\delta_{i+1}^q$  são funções conhecidas do caudal, da malha e da geometria do domínio.

As expressões (3.40) e (3.42) traduzem um conjunto de equações algébricas lineares em termos das variáveis  $\mathcal{Q}_{i-1}$ ,  $h_i$ ,  $\mathcal{Q}_{i+1}$  e  $h_{i+2}$ . Para cada par de pontos  $(i-1, i)$  e  $(i+1, i+2)$  estabelece-se um sistema de equações, sendo os coeficientes  $B_i^{n+1/2}$ ,  $A_{i+1}^{n+1/2}$  e  $[A/(A^2 K^2 R_h^{4/3})]_{i+1}^{n+1/2}$  reavaliados em cada iteração. Na primeira iteração consideram-se  $B_i^{n+1/2} = B_i^n$ ,  $A_{i+1}^{n+1/2} = A_{i+1}^n$  e  $[A/(A^2 K^2 R_h^{4/3})]_{i+1}^{n+1/2} = [A/(A^2 K^2 R_h^{4/3})]_{i+1}^n$ .

Após resolução dos sistemas (3.40) e (3.42) obtêm-se novas aproximações para as variáveis  $h_i^{n+1}$  e  $\mathcal{Q}_{i+1}^{n+1}$  ( $i=1, \dots, N$ ), o que permite recalcular os coeficientes:

$$A_{i+1}^{n+1/2} = (A_{i+1}^n + A_{i+1}^{n+1})/2$$

$$[A/(A^2 K^2 R_h^{4/3})]_{i+1}^{n+1/2} = \left\{ [A/(A^2 K^2 R_h^{4/3})]_{i+1}^n + [A/(A^2 K^2 R_h^{4/3})]_{i+1}^{n+1} \right\} / 2$$

Substituindo os últimos valores destes coeficientes nas equações (3.39) a (3.42) obtêm-se novas aproximações para as variáveis  $h_i^{n+1}$  e  $\mathcal{Q}_{i+1}^{n+1}$  ( $i=1, \dots, N$ ), repetindo-se o processo tantas vezes quantas as necessárias até se atingir a precisão desejada. São, em geral, suficientes duas iterações em cada passo de tempo.

### 3.6.2.1.3 Esquema totalmente implícito

Seja o seguinte sistema de equações simplificado (3.43):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2u \frac{\partial Q}{\partial x} + (c^2 - u^2) B \frac{\partial h}{\partial x} = \Phi \quad (3.43)$$

em que  $c = \sqrt{gh}$  e a função  $\Phi$  inclui os termos relativos ao atrito e às irregularidades do fundo.

Considerando, em primeira aproximação, o sistema homogéneo ( $\Phi = 0$ ) é possível utilizar, após linearização, o seguinte esquema totalmente implícito (Vasiliev *et al.*, 1965):

$$A_i^{n+1} - A_i^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) = 0$$

$$Q_i^{n+1} - Q_i^n + u \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) + (c^2 - u^2) B \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (h_{i+1}^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}) = 0 \quad (3.44)$$

Considerando  $N$  pontos da malha de cálculo, precisamos de conhecer  $2N$  variáveis independentes, sendo apenas possível escrever  $2N-4$  equações do sistema (3.44). Ou seja, resulta um problema de condições de fronteira que terá de ser resolvido, uma vez que temos apenas 2 condições de fronteira disponíveis. Este problema é análogo ao encontrado quando se analisam esquemas explícitos, como se verá na secção seguinte.

### 3.6.2.2 Esquemas explícitos

Contrariamente aos métodos implícitos, os esquemas explícitos são condicionalmente estáveis, isto é, obrigam ao cumprimento de uma condição entre os incrementos temporal e espacial como garantia de convergência para a solução.

No caso do sistema de equações de Saint-Venant, constituído pelas equações (3.14) e (3.18), demonstra-se que é condição necessária e suficiente para garantir a estabilidade dos métodos explícitos que apresentaremos mais adiante (secções 3.6.2.2.2 *Esquema explícito de Koutitas*, 1988; 3.6.2.2.3 *Esquema explícito Leap-frog*, e 3.6.2.2.4 *Esquema explícito de MacCormack*) a verificação da condição de Courant-Friedrich-Levy. Em geral, esta condição de estabilidade impõe que:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u \pm c|}$$

com  $c = \sqrt{gh}$ .

Considerando um sistema de equações linearizado, mostra-se em seguida o procedimento a adoptar para a obtenção da condição de estabilidade de um esquema explícito.

### 3.6.2.2.1 Estabilidade numérica

Por definição, dizemos que um processo de cálculo sequencial ou iterativo é estável se os erros de arredondamento não se amplificarem à medida que os cálculos progredem.

Para sistemas de equações às derivadas parciais (duas ou mais equações), define-se a matriz de amplificação relativa ao harmónico  $m$ , seja  $G_m$ , como se mostra para o sistema de equações linearizado (3.22), com  $h = h_0$  (constante):

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases} \quad (3.45)$$

o qual se pretende resolver através do seguinte esquema consistente, com  $r_1 = -h_0(\Delta t/\Delta x)$  e  $r_2 = -g(\Delta t/\Delta x)$ :

$$\begin{cases} \eta_i^{n+1} - \eta_i^n = \frac{r_1}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ u_i^{n+1} - u_i^n = \frac{r_2}{2}(\eta_{i+1}^{n+1} - \eta_{i-1}^{n+1}) \end{cases} \quad (3.46)$$

Nesta conformidade, pretende-se analisar as condições de estabilidade do esquema numérico (3.46). Para o efeito, podemos escrever:

$$\begin{cases} \eta_i^{n+1} & = \eta_i^n - \frac{r_1}{2}u_{i-1}^n + \frac{r_1}{2}u_{i+1}^n \\ \frac{r_2}{2}\eta_{i-1}^{n+1} - \frac{r_2}{2}\eta_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} & = u_i^n \end{cases}$$

Considere-se agora a seguinte decomposição harmónica:

$$\begin{aligned} \eta_i^n &= \sum_m A_m e^{iw_m j \Delta x} \\ u_i^n &= \sum_m B_m e^{iw_m j \Delta x} \end{aligned}$$

em que  $A_m$  e  $B_m$  são as amplitudes do harmónico  $m$  no instante  $n\Delta t$ . Por substituição termo a termo no sistema de equações original, designando por  $A_m^+$  e  $B_m^+$  as amplitudes no instante  $(n+1)\Delta t$ , obtém-se:

$$\begin{cases} A_m^+ &= A_m - \frac{r_1}{2}(e^{-iw_m\Delta x} - e^{iw_m\Delta x})B_m \\ \frac{r_2}{2}(e^{-iw_m\Delta x} - e^{iw_m\Delta x})A_m^+ & B_m^+ = B_m \end{cases} \quad (3.47)$$

Com

$$\beta_{1m} = r_1(e^{iw_m\Delta x} - e^{-iw_m\Delta x}/2i) = r_1 \operatorname{sen}(w_m\Delta x) \text{ e}$$

$$\beta_{2m} = r_2(e^{iw_m\Delta x} - e^{-iw_m\Delta x}/2i) = r_2 \operatorname{sen}(w_m\Delta x),$$

resultam as seguintes matrizes dos coeficientes das variáveis,  $H_1$  e  $H_2$ , para o primeiro e segundo membros de (3.47), respectivamente:

Calculando agora a matriz  $G_m = H_1^{-1}H_2$ :

$$G_m = \begin{bmatrix} 1 & i\beta_{1m} \\ i\beta_{2m} & 1 - \beta_{1m}\beta_{2m} \end{bmatrix}$$

obtém-se para a equação que dá os valores próprios de  $G_m$ :

$$\lambda^2 - (2 - \beta_{1m}\beta_{2m})\lambda + 1 = 0 \quad (3.48)$$

donde,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{2 - \beta_{1m}\beta_{2m} \pm \sqrt{(2 - \beta_{1m}\beta_{2m})^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{2 - \beta_{1m}\beta_{2m} \pm \sqrt{(\beta_{1m}\beta_{2m})} \sqrt{(\beta_{1m}\beta_{2m} - 4)}}{2} \end{aligned}$$

Para  $\beta_{1m}\beta_{2m} < 4$  as raízes são complexas e o seu módulo vale 1; para valores de  $\beta_{1m}\beta_{2m} > 4$  um dos valores próprios é em módulo superior à unidade, logo o esquema de discretização é, nestas condições, instável. A *condição de estabilidade* resulta então de  $\beta_{1m}\beta_{2m} \leq 4$ , ou seja  $r_1 r_2 \leq 4$ , obtendo-se sucessivamente:

$$gh_0 \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq 4 \rightarrow \sqrt{gh_0} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \leq 2$$

donde,

$$\frac{\sqrt{gh_0}}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \leq 1 \rightarrow \frac{c}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \leq 1$$

ou seja,

$$\Delta t \leq \frac{2 \Delta x}{c} = \frac{2 \Delta x}{\sqrt{gh_0}} \quad (3.49)$$

### 3.6.2.2.2 Esquema explícito de Koutitas

Seja do sistema de equações a resolver (3.37), escrito em termos das variáveis  $\eta$  e  $Q$ :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g |Q| Q}{A K^2 R_h^{4/3}} = 0$$

O esquema numérico de Koutitas (1988) resolve o sistema de equações (3.50) considerando uma grelha descentrada no espaço e no tempo. Os caudais são calculados nos nós da malha espaço-temporal de cálculo, enquanto as elevações da superfície livre são obtidas em pontos intermédios no espaço e no tempo. Na forma de diferenças finitas, as equações (3.50) escrevem-se:

$$\eta_i^{n+1/2} = \eta_i^{n-1/2} - \frac{2 \Delta t}{B_i + B_{i+1}} \left( \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right) \quad (3.51)$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \Delta t \left\{ \frac{\left( \frac{Q_{i+1}^n}{A_{i+1}} \right)^2 - \left( \frac{Q_{i-1}^n}{A_{i-1}} \right)^2}{2 \Delta x} + g A_i \left[ \frac{\eta_i^{n+1/2} - \eta_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{2 |Q_i^n + Q_{i-1}^n| Q_i^n}{(A_{i-1} + A_{i+1})^2 K^2 R_h^{4/3}} \right] \right\}$$

Segundo Slingerland *et al.* (1994), o esquema (3.51) é estável verificando-se a seguinte condição:

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{2 \Delta x}{g(h+\eta)}}$$

### 3.6.2.2.3 Esquema explícito Leap-frog

Seja o sistema de equações (3.37), escrito em termos das variáveis  $\eta$  e  $u$ :

$$\begin{aligned} B \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Bhu)}{\partial x} &= q_i \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g|u|u}{K^2 R_h^{4/3}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

O termo convectivo é aproximado por:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{\delta x} = \frac{(u_i^{n+1} + u_i^{n-1})(u_{i+2}^{n-1} - u_{i-2}^{n-1})}{4 \delta x} \quad (3.53)$$

com  $\delta x = 2\Delta x$  e sendo os valores da velocidade calculados através de,

$$u_i^n = \frac{(u_i^{n+1} + u_i^{n-1})}{2}; \quad u_{i+1}^n = \frac{(u_{i+2}^{n-1} + u_i^{n+1})}{2}; \quad u_{i-1}^n = \frac{(u_i^{n+1} + u_{i-2}^{n-1})}{2}$$

e o termo de atrito tratado da seguinte forma,

$$g \frac{|u_i^n| u_i^n}{K^2 R_{hi}^{4/3}} = g \frac{|u_i^{n-1}| u_i^{n+1}}{K^2 R_{hi}^{4/3}}$$

De acordo com este esquema, a solução é obtida no instante  $(n+1)\Delta t$  para as velocidades, a partir dos valores conhecidos no instante  $(n-1)\Delta t$ , ou seja  $\delta t = n\Delta t - (n-2)\Delta t = (n+1)\Delta t - (n-1)\Delta t$ . O instante  $n\Delta t$  é usado como um passo de cálculo intermédio, sendo nesse instante calculadas as amplitudes  $\eta_{i+1}^n$ . Por conseguinte, as variações temporais são obtidas por:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i+1} = \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_{i+1}^{n-2}}{\delta t}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{\delta t}$$

De igual modo, o incremento espacial é dado por  $\delta x = (i + 2)\Delta x - i\Delta x = (i + 1)\Delta x - (i - 1)\Delta x$ , correspondendo  $i\Delta x$  a um ponto intermédio onde são obtidos os valores das velocidades  $u_i^{n+1}$ . Nesta conformidade, as restantes variações espaciais escrevem-se:

$$\left(\frac{\partial(Bhu)}{\partial x}\right)^{n-1} = \frac{B_{i+2}(hu)_{i+2}^{n-1} - B_i(hu)_i^{n-1}}{B_{i+1}\delta x}; \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^n = \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n}{\delta x} \quad (3.54)$$

Após substituição das quantidades anteriores (3.53) a (3.54) no sistema (3.52) e explicitação em ordem às variáveis  $\eta_{i+1}^n$  e  $u_i^{n+1}$  obtém-se o esquema explícito (3.55):

$$\eta_{i+1}^n = \eta_{i+1}^{n-2} - \frac{[B_{i+2}(hu)_{i+2}^{n-1} - B_i(hu)_i^{n-1}]\delta t}{B_{i+1}\delta x} + \frac{q_{li}^n \delta t}{B_{i+1}} \quad (3.55)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\frac{u_i^{n-1}}{\delta t} - \frac{u_i^{n-1}(u_{i+2}^{n-1} - u_{i-2}^{n-1})}{4\delta x} - \frac{g(\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n)}{\delta x}}{\frac{1}{\delta t} + \frac{u_{i+2}^{n-1} - u_{i-2}^{n-1}}{4\delta x} + \frac{g|u_i^{n-1}|}{K^2(R_h^{4/3})_i^n}}$$

com  $i = 1, 3, 5, 7, \dots$

#### 3.6.2.2.4 Esquema explícito de MacCormack

Como foi já referido anteriormente, na prática, a resolução de um problema num canal, ou num sistema natural, de secção prismática não rectangular, a área líquida da secção transversal,  $A$ , deverá ser considerada explicitamente. Nesta conformidade, deverá ser utilizado o sistema constituído pelas equações (3.14) e (3.18), ou (3.20), que resolveremos nesta secção.

O esquema de MacCormack (MacCormack, 1971) é um método explícito de diferenças finitas que pertence à classe dos chamados métodos de passo fraccionado. Resultou de modificações introduzidas nos métodos de dois passos baseados na expansão de segunda ordem da série de Taylor no tempo, nomeadamente no método de Lax e Wendroff, e garante uma aproximação de segunda ordem no espaço e no tempo.

A aplicação de um ciclo completo de dois passos avança a solução de um incremento de tempo de cálculo  $\Delta t$ . No primeiro passo é determinada uma primeira aproximação das variáveis dependentes no instante  $(n + 1)\Delta t$ ,

em função dos valores dos parâmetros no instante  $n\Delta t$  (algoritmo de *previsão*); estes valores aproximados das variáveis dependentes são em seguida utilizados (segundo passo) para o cálculo dos valores das variáveis no final do incremento temporal considerado (algoritmo de *correção*).

Os termos de atrito são calculados considerando médias dos valores  $(A, Q)$  obtidos nos pontos da malha de cálculo envolvidos nas correspondentes diferenças. Considerando  $A_0 = 0$ , as equações (3.14) e (3.18) escrevem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_i \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial(h + \xi)}{\partial x} + \frac{n_k^2 g |Q| Q}{A R_h^{4/3}} + q_i \left( \frac{Q}{A} - u_i \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Sequência de *PREVISÃO* (diferenças regressivas)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i^{n+1} &= A_i^n - \frac{\Delta t}{x_i - x_{i-1}} (Q_i^n - Q_{i-1}^n) + \Delta t q_{i,i}^n \\ \tilde{Q}_i^{n+1} &= Q_i^n - \frac{\Delta t}{x_i - x_{i-1}} \left( \frac{Q_i^2}{A_i} - \frac{Q_{i-1}^2}{A_{i-1}} \right)^n - g \Delta t A_i^n \frac{[(h + \xi)_i - (h + \xi)_{i-1}]^n}{x_i - x_{i-1}} - \\ &\quad - g \Delta t \left[ \bar{n}_k^2 \left( \frac{|Q| Q}{A R_h^{4/3}} \right)^n \right]_{i-1,i} - \Delta t \left[ q_{i,i} \left( \frac{Q}{A} \right)_{i-1,i} - u_{i,i} \right]^n \end{aligned}$$

Sequência de *CORREÇÃO* (diferenças progressivas)

$$\begin{aligned} A_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ A_i^n + \tilde{A}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{x_{i+1} - x_i} (\tilde{Q}_{i+1}^{n+1} - \tilde{Q}_i^{n+1}) + \Delta t q_{i,i}^n \right] \\ Q_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left\{ Q_i^n + \tilde{Q}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{x_{i+1} - x_i} \left( \frac{\tilde{Q}_{i+1}^2}{\tilde{A}_{i+1}} - \frac{\tilde{Q}_i^2}{\tilde{A}_i} \right)^{n+1} - \right. \\ &\quad \left. - g \Delta t \tilde{A}_i^{n+1} \frac{[(h + \xi)_{i+1} - (h + \xi)_i]^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - \right. \\ &\quad \left. - g \Delta t \left[ \bar{n}_k^2 \left( \frac{|\tilde{Q}| \tilde{Q}}{\tilde{A} R_h^{4/3}} \right)^{n+1} \right]_{i,i+1} - \Delta t \left[ q_{i,i} \left( \frac{\tilde{Q}}{\tilde{A}} \right)_{i,i+1} - u_{i,i} \right]^{n+1} \right\} \end{aligned}$$

Foi exemplificada a aplicação do método de MacCormack utilizando diferenças regressivas para o algoritmo de previsão e progressivas para o algoritmo de correcção; em alternativa pode ser utilizado um esquema inverso, isto é, diferenças finitas progressivas para a previsão e regressivas para a correcção, ou ainda as duas alternativas em sequência alternada. Neste último caso, a sequência de previsão-correcção para o  $\Delta t$  seguinte [instante  $(n+2)\Delta t$ ] escreve-se na forma como se mostra em seguida.

Sequência de *PREVISÃO* (diferenças progressivas)

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i^{n+2} &= A_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{x_{i+1} - x_i} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + \Delta t q_{i_i}^{n+1} \\ \tilde{Q}_i^{n+2} &= Q_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{x_{i+1} - x_i} \left( \frac{Q_{i+1}^2}{A_{i+1}} - \frac{Q_i^2}{A_i} \right)^{n+1} - g \Delta t A_i^{n+1} \frac{[(h + \xi)_{i+1} - (h + \xi)_i]^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - \\ &\quad - g \Delta t \left[ \bar{n}_k^2 \left( \frac{|\bar{Q}| \bar{Q}}{\bar{A} \bar{R}_h^{4/3}} \right)^{n+1} \right]_{i,i+1} - \Delta t \left[ q_{i_i} \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \right)_{i,i+1} - u_{i_i} \right]^{n+1}\end{aligned}$$

Sequência de *CORRECÇÃO* (diferenças regressivas)

$$\begin{aligned}A_i^{n+2} &= \frac{1}{2} \left[ A_i^{n+1} + \tilde{A}_i^{n+2} - \frac{\Delta t}{x_i - x_{i-1}} (\tilde{Q}_i^{n+2} - \tilde{Q}_{i-1}^{n+2}) + \Delta t q_{i_i}^{n+1} \right] \\ Q_i^{n+2} &= \frac{1}{2} \left\{ Q_i^{n+1} + \tilde{Q}_i^{n+2} - \frac{\Delta t}{x_i - x_{i-1}} \left( \frac{\tilde{Q}_i^2}{\tilde{A}_i} - \frac{\tilde{Q}_{i-1}^2}{\tilde{A}_{i-1}} \right)^{n+2} - \right. \\ &\quad \left. - g \Delta t \tilde{A}_i^{n+2} \frac{[(h + \xi)_i - (h + \xi)_{i-1}]^{n+2}}{x_i - x_{i-1}} - \right. \\ &\quad \left. - g \Delta t \left[ \bar{n}_k^2 \left( \frac{|\tilde{Q}| \tilde{Q}}{\tilde{A} \tilde{R}_h^{4/3}} \right)^{n+2} \right]_{i-1,i} - \Delta t \left[ q_{i_i} \left( \frac{\tilde{Q}}{\tilde{A}} \right)_{i-1,i} - u_{i_i} \right]^{n+2} \right\}\end{aligned}$$

Apresentam-se no ANEXO I subprogramas escritos em FORTRAN que resolvem cada uma das sequências de previsão e correcção, com diferenças progressivas e regressivas, tal como representado nas equações precedentes.

### 3.6.3 Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos dá uma solução aproximada por troços da solução. A premissa de base deste método é que o domínio da solução pode ser modelado analiticamente ou aproximadamente substituindo-o por um conjunto de elementos discretos.

No método dos elementos finitos, o domínio em estudo é dividido em elementos, expressando-se o campo da variável (profundidade, velocidade, etc.) em termos de funções de aproximação em cada um dos elementos. As funções de aproximação, também designadas por funções de interpolação ou de forma, são definidas em termos da variável dependente em certos pontos designados por nós. Os valores que a variável toma nos nós e as funções de interpolação definem completamente o comportamento do campo da variável no interior dos elementos. Os valores da variável nos nós são as incógnitas do problema.

É óbvio que a natureza da solução e o grau de aproximação dependerão não só do tipo e dimensão dos elementos, mas também do tipo de funções de interpolação usadas. As funções de interpolação não podem ser quaisquer, pois terão de satisfazer certos requisitos de compatibilidade, sendo frequentemente escolhidas tendo em atenção a continuidade das funções ou das suas derivadas ao longo das fronteiras dos elementos.

Existe uma grande variedade de métodos e fórmulas para representar as propriedades dos elementos. De entre os vários processos disponíveis, um dos mais utilizados é o método dos resíduos pesados ou ponderados. Neste método, para além das funções de interpolação ou de forma ( $N_i, i = 1, \dots, n_e$ , sendo  $n_e$  o número de nós do elemento), é necessário definir funções de peso ( $W_i, i = 1, \dots, n_e$ ); estas por sua vez podem coincidir com as funções de interpolação (Método de Galerkin) ou serem resultantes da combinação das funções de interpolação e das suas derivadas (Método de Petrov-Galerkin).

84

O procedimento a adoptar para a resolução de um problema num meio contínuo pelo *método dos elementos finitos* pode resumir-se basicamente nas seguintes etapas:

- i*) Discretização do meio contínuo em elementos: segmentos (1D), superfícies (2D), ou espaços (3D);
- ii*) Seleção das funções de interpolação que irão representar a variação da variável, ou variáveis de campo em cada elemento;

- iii) Determinação das propriedades dos elementos ou, alternativa-mente, obtenção da solução da equação ou equações para cada elemento usando, por exemplo, uma técnica de resíduos pesados;
- iv) Ligação dos elementos de acordo com certas regras, por forma a obter um sistema de equações cuja solução represente o comportamento da variável ou variáveis de campo. A base desta ligação é a que um nó é partilhado pelos elementos que se reúnem nele, sendo o valor da variável ou variáveis nesse nó o mesmo para qualquer elemento que o partilhe;
- v) Imposição das condições de fronteira no sistema de equações formado no passo anterior; e,
- vi) Resolução do sistema de equações, usando técnicas directas ou iterativas.

Seja uma equação gerada pelo operador diferencial  $L(\varphi)$ ,

$$L(\varphi) = f \quad (3.57)$$

A formulação da *técnica dos resíduos pesados* consiste nos seguintes passos:

- i) Assumir a forma funcional da variável de campo,

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{n_e} N_i \alpha_i$$

em que os  $\alpha_i$  são coeficientes indeterminados que podem ser constantes ou funções do tempo;

- ii) Dado que a forma aproximada  $\hat{\varphi}$  não satisfaz em geral a equação diferencial, a substituição de  $\hat{\varphi}$  na equação (3.57) gera o resíduo,

$$R_e = L(\hat{\varphi}) - f$$

A optimização na aproximação de  $\hat{\varphi}$  à solução exacta  $\varphi$  é obtida através da minimização do resíduo  $R_e$ . De acordo com a técnica dos resíduos pesados, esta minimização requer a ortogonalidade de  $R_e$  relativamente a uma série de funções, ditas funções de peso, vindo:

$$\int_{\Delta^e} [L(\hat{\phi}) - f] W_i d\Delta^e ; i = 1, \dots, n_e$$

representando  $\Delta^e$  a região de integração (elemento).

iii) A integração conduz-nos a  $n_e$  equações algébricas, habitualmente agrupadas num sistema de equações relativamente aos  $n_e$  valores desconhecidos  $\alpha_i$ . A solução do sistema fornece os valores da função  $\hat{\phi}$ .

### Funções de aproximação para elementos a uma dimensão

Considere-se o elemento a uma dimensão com comprimento  $L$  representado na Figura 3.7, com os valores  $\varphi_i$  e  $\varphi_j$  da função em estudo nos nós  $i$  e  $j$ , respectivamente.

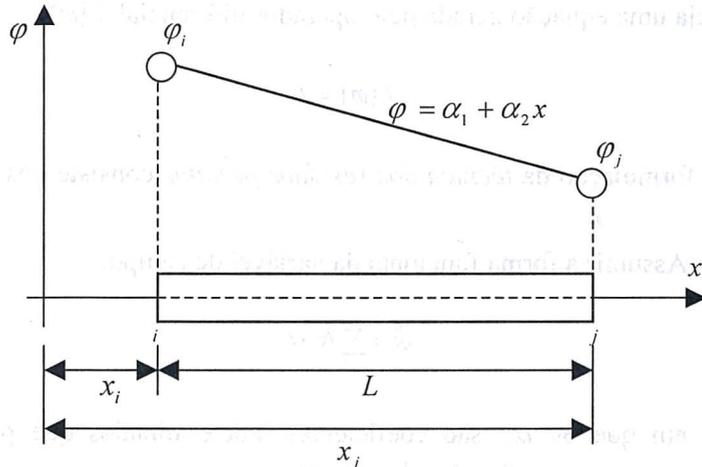


Figura 3.7 - Elemento linear 1D.

A variação do escalar  $\varphi$  ao longo deste elemento é dada por:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (3.58)$$

sendo os coeficientes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  determinados com base nas seguintes condições nos nós:

$$\varphi = \varphi_i, \quad \text{para } x = x_i$$

$$\varphi = \varphi_j, \quad \text{para } x = x_j$$

Resulta assim o sistema de equações:

$$\varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i$$

$$\varphi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j$$

cuja solução é,

$$\alpha_1 = \frac{\varphi_i x_j - \varphi_j x_i}{L}$$

$$\alpha_2 = \frac{\varphi_j - \varphi_i}{L}$$

Substituindo estes valores em (3.58) resulta a função de aproximação  $\varphi$ , válida em qualquer ponto do elemento, usando funções lineares:

$$\varphi = \frac{x_j - x}{L} \varphi_i + \frac{x - x_i}{L} \varphi_j$$

Para um elemento linear resultam então:

$$N_i = \frac{x_j - x}{L}; \quad \frac{\partial N_i}{\partial x} = -\frac{1}{L}; \quad N_j = \frac{x - x_i}{L}; \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{L}$$

donde, em termos das funções de interpolação  $N_i$  e  $N_j$ ,

$$\hat{\varphi} = N_i \varphi_i + N_j \varphi_j = \sum_{k=1}^{n_e} N_k \varphi_k, \quad \text{com } n_e = 2$$

ou ainda, na forma matricial,

$$\hat{\varphi} = [N_k, N_{k+1}] \begin{Bmatrix} \varphi_k \\ \varphi_{k+1} \end{Bmatrix} = [N] \{\varphi\}$$

### Exemplo 3.1:

Considere-se uma barra metálica com a distribuição de temperaturas representada na Figura 3.8.

Determinar o valor da temperatura em  $x = 4 \text{ cm}$  e o gradiente de temperaturas na barra.

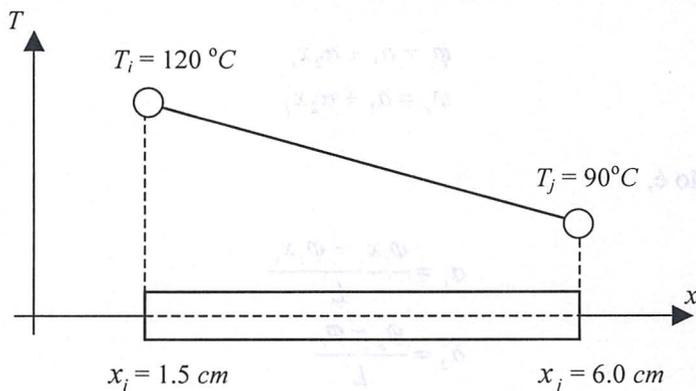


Figura 3.8 - Condições de aplicação (elemento 1D).

### Resolução:

Ora,  $x_i = 1.5 \text{ cm}$ ;  $x_j = 6.0 \text{ cm} \Rightarrow L = x_j - x_i = 4.5 \text{ cm}$ . A distribuição de temperaturas na barra é dada por,

$$T(x) = \frac{x_j - x}{L} T_i + \frac{x - x_i}{L} T_j$$

Com  $x = 4.0 \text{ cm}$  resulta  $T(4.0) = 103.33^\circ \text{C}$ .

Atendendo a que  $\partial T / \partial x = -(1/L)T_i + (1/L)T_j$ , para o gradiente de temperaturas na barra obtém-se  $\partial T / \partial x = -6.67^\circ \text{C}$ .

Considerando a solução ao longo de um domínio com  $M$  elementos, a função  $\varphi$  é expressa aproximadamente pelo somatório,

$$\hat{\varphi} = \sum_{e=1}^M [N]^{(e)} \{\varphi\}^{(e)}$$

sendo evidente que o valor local de  $\varphi(x)$ , com  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ , é apenas influenciado pelos valores das funções de interpolação e dos valores nodais de  $\varphi$  situados entre  $x_k$  e  $x_{k+1}$ .

O método dos elementos finitos é pesado do ponto de vista computacional, pois conduz invariavelmente à resolução de um sistema de equações. Por outro lado, quando aplicado à resolução de equações, ou de

sistemas de equações, unidimensionais (1DH ou 1DV) não se tira partido da principal vantagem do método, que consiste na sua grande maleabilidade de adaptação à geometria do domínio.

Por conseguinte, nestas circunstâncias, o método dos elementos finitos não é particularmente atraente. Todavia, tendo fundamentalmente como objectivo demonstrar a aplicação do método de Galerkin a um caso concreto, resolve-se em seguida a equação hiperbólica, linear de 2ª ordem (3.59):

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{k'}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (3.59)$$

Pode demonstrar-se que a equação (3.59) resulta do seguinte sistema linear (3.60), com  $h = \text{constante}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{k'}{h} u &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

em que o termo de atrito  $\tau_f/\rho = k|u|u$  foi igualmente linearizado por  $\tau_f/\rho = k'u$ , representando  $k'$  um coeficiente de atrito equivalente.

A segunda derivada presente na equação (3.59) não pode ser aproximada por funções de interpolação lineares; com efeito, a utilização de funções de interpolação lineares apenas permite aproximar variações de 1ª ordem. Por conseguinte, só após integração por partes do termo  $gh(\partial^2 \zeta/\partial x^2)$  é possível aplicar o método de Galerkin com funções de interpolação de 1ª ordem.

Após discretização do domínio em elementos de igual comprimento  $\Delta x$ , com funções de interpolação  $N_k$  lineares e considerando a profundidade  $h$  constante ao longo de cada elemento ( $e$ ), isto é,  $h^{(e)} = \text{constante}$ , a aplicação da formulação de Galerkin resulta na seguinte aproximação (3.61):

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \left( \int_{(e)} [N]^{(e)} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right\} N_k^{(e)} dx + gh^{(e)} \int_{(e)} \frac{\partial}{\partial x} [N]^{(e)} \left\{ \zeta \right\} \frac{\partial}{\partial x} N_k^{(e)} dx + \right. \\ \left. + \frac{k'}{h^{(e)}} \int_{(e)} [N]^{(e)} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\} N_k^{(e)} dx = 0 \right. \end{aligned} \quad (3.61)$$

em que, para o elemento ( $e$ ) definido nos pontos nodais  $i$  e  $i+1$ , se tem:

$$[N] = [N_i, N_{i+1}], \quad \{\zeta\} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_{i+1} \end{Bmatrix}$$

e  $k = i, i+1$ .

Em geral, as derivadas temporais são expressas por diferenças finitas, obtendo-se:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\zeta_i^{n+1} - 2\zeta_i^n + \zeta_i^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\zeta_i^n - \zeta_i^{n-1}}{\Delta t}$$

Tomando nas derivadas espaciais  $\zeta = \zeta_i^n$  o esquema resultante é explícito em tempo, sendo o sistema de equações a resolver em cada incremento temporal da forma:

$$[A]\{\zeta^{n+1}\} = \{B(\zeta^{n-1}, \zeta^n)\} \quad (3.62)$$

As contribuições do elemento ( $e$ ) para os membros da esquerda e da direita da matriz  $A$  e do vector  $\zeta$  são, respectivamente:

$$A_{i,i} = \frac{\Delta x}{3}; \quad A_{i,i+1} = \frac{\Delta x}{6}; \quad A_{i+1,i} = \frac{\Delta x}{6}; \quad A_{i+1,i+1} = \frac{\Delta x}{3} \quad (3.63)$$

$$B_i = (2\zeta_i^n - \zeta_i^{n-1})\frac{\Delta x}{3} + (2\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i+1}^{n-1})\frac{\Delta x}{6} -$$

$$- g h^{(e)}(\Delta t)^2 \frac{(\zeta_i^n - \zeta_{i+1}^n)}{\Delta x} - \frac{k'(\Delta t)^2}{h^{(e)}} \left[ \frac{\zeta_i^n - \zeta_i^{n-1}}{3} + \frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i+1}^{n-1}}{6} \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.64)$$

$$B_{i+1} = (2\zeta_i^n - \zeta_i^{n-1})\frac{\Delta x}{6} + (2\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i+1}^{n-1})\frac{\Delta x}{3} -$$

$$- g h^{(e)}(\Delta t)^2 \frac{(\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n)}{\Delta x} - \frac{k'(\Delta t)^2}{h^{(e)}} \left[ \frac{\zeta_i^n - \zeta_i^{n-1}}{6} + \frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i+1}^{n-1}}{3} \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.65)$$

Para completar o sistema de equações a resolver, após cada incremento temporal  $\Delta t$ , será especificado o valor de  $\zeta$  na fronteira de montante, em conformidade com a seguinte relação,

$$\zeta_i^n = \zeta_0 \text{sen} \left( \frac{2\pi t}{T} \right)$$

e na fronteira de jusante poderá impor-se uma condição do tipo  $\zeta_{i_{\max}}^n = \zeta_{i_{\max}-1}^n$ , que traduz reflexão total.

Apresenta-se em seguida parte de um programa escrito em FORTRAN que compõe, após cada instante de cálculo  $t + \Delta t$ , os elementos da matriz  $[A]$  e do vector  $\{B\}$  do sistema de equações a resolver (3.62), em conformidade com as equações (3.63) a (3.65).

C

C \* Solução da equação linear unidimensional da onda (3.59) \*

C-----

10 N = N + 1

T = T + DT

ZN(1) = AMP\*SIN(2.0\*PI\*T/PER)

DO i = 1, NT

B(i) = 0.0

DO j = 1, NT

A(i,j) = 0.0

END DO

END DO

DO i = 1, NT-1

B(i) = B(i) + ((2.0\*Z(i) - Z0(i))/3.0 + (2.0\*Z(i+1)

+ - Z0(i+1))/6.0)\*DX - G\*H(i)\*DT\*\*2\*(Z(i) - Z(i+1))/DX

+ - RK\*DT/H(i)\*((Z(i) - Z0(i))/3.0 + (Z(i+1)

+ - Z0(i+1))/6.0)\*DX

B(i+1) = B(i+1) + ((2.0\*Z(i) - Z0(i))/6.0 + (2.0\*Z(i+1)

+ - Z0(i+1))/3.0)\*DX - G\*H(i)\*DT\*\*2\*(Z(i+1) - Z(i))/DX

+ - RK\*DT/H(i)\*((Z(i) - Z0(i))/6.0 + (Z(i+1)

+ - Z0(i+1))/3.0)\*DX

A(i,i) = A(i,i) + DX/3.0

A(i,i+1) = A(i,i+1) + DX/6.0

A(i+1,i) = A(i+1,i) + DX/6.0

A(i+1,i+1) = A(i+1,i+1) + DX/3.0

END DO

ITER = 0

20 ITER = ITER + 1

IF(ITER.GT.NITER) STOP' Numero de iteracoes insuficiente.'

```

C-----
DIFMX = 0.0
DO i = 2, NT-1
  SOL = ZN(i)
  ZN(i) = (B(i) - ZN(i+1)*A(i,i+1) - ZN(i-1)*A(i,i-1))/A(i,i)
  DIF = ABS(SOL - ZN(i))
  IF(DIF.GT.DIFMX) DIFMX = DIF
END DO
IF(DIFMX.GT.EBS) GO TO 20
ZN(nt) = ZN(nt-1)
DO i = 1, NT
  Z0(i) = Z(i)
  Z(i) = ZN(i)
END DO
  :
IF(N.LT.NMAX) GOTO 10

```

C-----

Tratando-se de resolver equações em domínios bidimensionais em planta cuja solução dependa fortemente da resolução das condições de fronteira, o método dos elementos finitos é ainda particularmente adequado. Este é assim o caso das equações elípticas, em particular as equações de Laplace e de Helmholtz. No Capítulo 4 mostra-se a aplicação deste método à resolução de um sistema de equações bidimensional do tipo Boussinesq.

### 3.7 Condições iniciais e de fronteira

Para a resolução das equações de Saint-Venant são necessárias condições iniciais e condições de fronteira a montante e a jusante do domínio. As condições iniciais são especificadas em todos os nós do domínio para ambas as variáveis de cálculo  $(h, u)$ ,  $(h, Q)$ , ou  $(A, Q)$ . As condições de fronteira são equações complementares que podem consistir em funções do tipo:  $Q = Q(h)$ ,  $Q = Q(t)$ ,  $h = h(t)$  ou  $\eta = \eta(t)$ , em valores constantes para as variáveis, ou ainda em relações entre  $u$  e  $h$ .

#### *Condição na fronteira de montante*

Para que não se verifique acumulação irrealista de energia na fronteira incidente, é necessário que a condição de fronteira corresponda à conhecida

elevação da superfície livre, imposta pela onda incidente, mais a elevação de uma onda reflectida. O problema resulta assim indeterminado, visto não se conhecer *à priori* o valor da onda reflectida. Como resolvê-lo? Seja, por hipótese, uma onda sinusoidal incidente com período  $T$  e amplitude  $\zeta_0$ :

$$\zeta_{inc} = \zeta_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n\Delta t}{T}\right)$$

em que  $n$  representa o contador do instante de cálculo  $n\Delta t$ . A elevação da superfície livre no ponto de fronteira (1) no instante seguinte  $[(n+1)\Delta t]$  escreve-se:

$$\zeta_1^{n+1} = \zeta_0 \operatorname{sen}\left[2\pi(n+1)\left(\frac{\Delta t}{T}\right)\right] + \zeta_{r_1}^{n+1} \quad (3.66)$$

em que  $\zeta_{r_1}^{n+1}$  representa a elevação da superfície livre devida à onda reflectida no novo instante de cálculo  $(n+1)\Delta t$ ; obtém-se resolvendo a equação da onda,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

a qual se escreve, em diferenças finitas:

$$\zeta_{r_1}^{n+1} = \zeta_{r_1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 (\zeta_{r_2}^n - \zeta_{r_1}^n)$$

com  $c_0 = \sqrt{g(h+\zeta)}$ ;  $\zeta_{r_1}^n$  e  $\zeta_{r_2}^n$  representam as elevações da superfície livre devidas à onda reflectida nos nós 1 e 2 da malha computacional.

As amplitudes  $\zeta_{r_1}^n$  e  $\zeta_{r_2}^n$  podem ser obtidas assumindo que representam as diferenças entre os valores de  $\zeta$  calculados nos nós 1 e 2 e os correspondentes valores da onda incidente esperados nestes nós, isto é,

$$\zeta_{r_1}^n = \zeta_1^n - \zeta_{inc_1}^n$$

$$\zeta_{r_2}^n = \zeta_2^n - \zeta_{inc_2}^n$$

Por último, os valores esperados para  $\zeta_{inc_1}^n$  e  $\zeta_{inc_2}^n$  nestes nós são aproximados com base na teoria das ondas longas, donde,

$$\zeta_{inc_1}^n = \zeta_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n\Delta t}{T}\right)$$

$$\zeta_{inc_2}^n = \zeta_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n\Delta t}{T} - \frac{\Delta x}{L}\right)$$

em que  $L = T\sqrt{g(h + \zeta)}$ .

Apresenta-se em seguida parte de um programa escrito em FORTRAN que usa o procedimento acima descrito para o cálculo da condição de fronteira de montante devido à entrada de uma onda sinusoidal de período  $T$  e amplitude  $\zeta_0$  [equação (3.66)].

Sejam:  $CO = c_0$ ;  $HZ = h_0 + \bar{\zeta}$ ;  $PR = T$  (Período);  $DX = \Delta x$ ;  $CL = L$ ;  $DT = \Delta t$ ;  $PI = \pi$ ;  $T = \text{Tempo}$ ;  $ZO = \zeta_0$ ;  $Z1 = \zeta_1^n$  ( $\zeta_1^{n+1}$ );  $Z2 = \zeta_2^n$ ;  $Z(1) = \zeta_1^n$  ( $\zeta_1^{n+1}$ );  $Z(2) = \zeta_2^n$ .

C

C \* Atualização de zeta no Nó 1, tendo em conta a onda reflectida \*

C-----

CO = SQRT (9.81\*HZ)

CL = CO\*PR

IF ((N-1)\*DT .GT. DX/CO) THEN

Z1 = Z(1) - ZO\*SIN (2.0\*PI\*(T - DT)/PR)

Z2 = Z(2) - ZO\*SIN (2.0\*PI\*(T - DT)/PR - DX/CL)

Z1 = Z1 + (DT/DX)\*CO\*(Z2 - Z1)

ELSE

Z1 = 0.0

ENDIF

Z(1) = ZO\*SIN (2.0\*PI\*T/PR) + Z1

C-----

### **Condições na fronteira de jusante**

Uma condição de saída livre (condição natural ou do tipo Neumann,  $\partial Q/\partial x = 0$  ou  $\partial h/\partial x = 0$ ), uma condição de reflexão total ( $Q = 0$  ou  $u = 0$ ), ou ainda uma condição de radiação, do tipo  $Q_{i_{max}}^{n+1} = (1 - C_r) \sqrt{g B_{i_{max}} A_{i_{max}}} \eta_{i_{max}-1}^{n+1/2}$  ou  $u_{i_{max}}^{n+1} = (1 - C_r) \sqrt{g/h_{i_{max}}} \eta_{i_{max}-1}^{n+1/2}$ , em que  $C_r$  é um coeficiente de reflexão, são normalmente eficazes.

### **3.8 Singularidades**

Em secções de acentuada ou brusca descontinuidade na geometria ou nas características hidráulicas dos canais não são válidas as equações de

Saint-Venant. Nestes casos, aquelas equações poderão ainda continuar a ser aplicadas nos trechos a montante e a jusante, mas não na singularidade. O sistema a modelar terá, assim, que ser discretizado por trechos, sendo estes ligados por secções especiais onde serão introduzidas leis específicas do escoamento.

As transições, confluências e comportas são exemplos de singularidades cujo tratamento numérico, sendo o escoamento comandado por montante, pode ser realizado do seguinte modo:

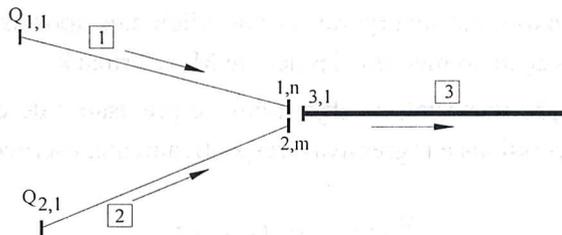
a) Transições (junções de dois canais)

$$Q_{i+1} = Q_i$$

$$\xi_i + h_i + \left(\frac{u^2}{2g}\right)_i = \xi_{i+1} + h_{i+1} + \left(\frac{u^2}{2g}\right)_{i+1} + \Delta H$$

b) Confluências (junções de três canais)

Com base no esquema



podemos escrever:

$$Q_{3,1} = Q_{1,n} + Q_{2,m}$$

$$\xi_{1,n} + h_{1,n} + \left(\frac{u^2}{2g}\right)_{1,n} = \xi_{2,m} + h_{2,m} + \left(\frac{u^2}{2g}\right)_{2,m} =$$

$$= \xi_{3,1} + h_{3,1} + \left(\frac{u^2}{2g}\right)_{3,1} + \Delta H$$

c) Comportas

$$Q_{i+1} = Q_i$$

$$Q_i = C_v A_b \sqrt{2g(h_{i+1} - h_i)}$$

### 3.9 Breve abordagem a esquemas de alta resolução das equações diferenciais

A resolução de equações às derivadas parciais utilizando esquemas numéricos de primeira ordem traduz-se no aparecimento de efeitos dissipativos ou difusivos. Os métodos de segunda ordem, nomeadamente o método de MacCormack, ultrapassam estas características, mas introduzem efeitos dispersivos que provocam oscilações junto de descontinuidades.

A discretização das equações de Saint-Venant pelo método de MacCormack introduz termos adicionais de ordem superior que se traduzem no aparecimento de oscilações numéricas de alta frequência com carácter dispersivo. Para a suavização destas oscilações têm sido propostos esquemas baseados na utilização de uma *viscosidade artificial*. Um destes esquemas é devido a *Jameson*, sendo esta metodologia apresentada por Fennema & Chaudhry (1986) como adequada para a *captura* de descontinuidades. Por se tratar de um esquema de ordem superior ao das derivadas presentes nas equações originais, este esquema apenas suaviza a solução em pontos onde ocorrem acentuadas variações da superfície livre. No essencial, o esquema de *Jameson* consiste em incorporar termos adicionais após as sequências de previsão e correcção do método clássico de MacCormack.

Em notação vectorial, os algoritmos de previsão e de correcção, com diferenças progressivas e regressivas, respectivamente, escrevem-se:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_i^{n+1} &= U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \Delta t S_i^n \\ U_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ U_i^n + \tilde{U}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_i^{n+1} - \tilde{F}_{i-1}^{n+1}) + \Delta t \tilde{S}_i^{n+1} \right] \quad (3.67)\end{aligned}$$

96

prossequindo de forma alternada no  $\Delta t$  seguinte,

$$\begin{aligned}\tilde{U}_i^{n+1} &= U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^n - F_{i-1}^n) + \Delta t S_i^n \\ U_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ U_i^n + \tilde{U}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_{i+1}^{n+1} - \tilde{F}_i^{n+1}) + \Delta t \tilde{S}_i^{n+1} \right] \quad (3.68)\end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

Considerando as correcções  $U_i^{n+1}$  obtidas por (3.67) e (3.68) como aproximações  $\tilde{U}_i^{n+1}$ , adiciona-se em seguida a suavização das variáveis de cálculo do seguinte modo:

$$U_i^{n+1} = \tilde{U}_i^{n+1} + \varepsilon_{i+1/2} \left( \tilde{U}_{i+1}^{n+1} - \tilde{U}_i^{n+1} \right) - \varepsilon_{i-1/2} \left( \tilde{U}_i^{n+1} - \tilde{U}_{i-1}^{n+1} \right)$$

em que,

$$\varepsilon_{i+1/2} = \varepsilon_d \max(\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_i)$$

$$\varepsilon_{i-1/2} = \varepsilon_d \max(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1})$$

com,

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{|h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}|}{(h_{i+1} + 2h_i + h_{i-1})}$$

sendo  $\varepsilon_d$  um coeficiente que controla a adição de viscosidade numérica, com valores dependentes das condições específicas de cada problema ( $\varepsilon_d \approx 0.10 - 0.50$ ).

Apresenta-se em seguida parte de um programa escrito em FORTRAN, que utiliza o procedimento de *Jameson* para suavização da solução.

C

C \* Viscosidade artificial e re-cálculo dos  $q_c$ ,  $a_c$  e  $h_c$  \*

C-----

DO i = 2, NP-1

DXDT = 0.5\*(X(i+1) - X(i-1))/DT

EPS(i) = DXDT\*ABS(HC (i+1) - 2.0\*HC(i) + HC(i-1))/

+ (ABS(HC(i+1)) + 2.0\*ABS(HC(i)) + ABS(HC(i-1)))

END DO

EPSP = EPS(2)

IF(EPS(3).GT.EPS (2)) EPSP = EPS (3)

EPSP = RKD\*EPSP

DO i = 3, NP-2

EPSM = EPSP

RMAX = EPS(i)

IF(EPS(i+1).GT.EPS(i)) RMAX= EPS(i+1)

EPSP = RKD\*RMAX

ALFA = (EPSP\*(QC(i+1) - QC(i)) - EPSM\*(QC(i) - QC(i-1)))

```

QC(i) = QC(i) + ALFA
ALFA = (EPSP*(AC(i+1) - AC(i)) - EPSM*(AC(i) - AC(i-1)))
AC(i) = AC(i) + ALFA
ALFA = (EPSP*(HC(i+1) - HC(i)) - EPSM*(HC(i) - HC(i-1)))
HC(i) = HC(i) + ALFA
END DO

```

C-----

O facto de não se conhecer *à priori* o valor de  $\varepsilon_d$  (RKD) tanto pode conduzir a soluções com elevada dissipação numérica, como a problemas de estabilidade geral do método, tornando esta metodologia pouco atractiva.

A ocorrência de dissipação numérica traduz-se assim numa solução excessivamente suavizada. Já a dispersão numérica resulta em consequência de diferentes velocidades de propagação das ondas que compõem as soluções das equações, conduzindo à presença de oscilações nos resultados numéricos.

Ambos os problemas poderão ser minimizados optando por métodos numéricos cuja variação total seja decrescente, como os esquemas baseados em formulações TVD - *Total Variation Diminishing* em linguagem anglo-saxónica. Os métodos baseados em limitadores de fluxo satisfazem aquela propriedade, alternando entre uma aproximação de segunda ordem em zonas em que a solução é suave e uma aproximação de primeira ordem próximo de discontinuidades.

Nas secções seguintes apresentam-se, de forma sumária, metodologias baseadas num método de diferenças finitas incluído na classe dos métodos conservativos.

### 3.9.1 Considerações gerais

98

Tendo como objectivo melhorar as soluções numéricas das equações de Saint-Venant descrevem-se em seguida uma resolução aproximada sugerida por Roe, uma extensão TVD do esquema de MacCormack e uma extensão de 2ª ordem do esquema de Roe.

A presença de termos fonte no sistema mais geral constituído pelas equações (3.14) e (3.20) dificulta a obtenção de esquemas numéricos conservativos, conduzindo frequentemente à degradação da qualidade das soluções numéricas.

A discretização destes termos é feita em geral seguindo uma abordagem pontual, sendo neste caso os termos fonte avaliados nos nós da malha de cálculo, ou uma abordagem do tipo *upwind*, a qual preserva o carácter físico da discretização do fluxo.

Escrevendo o sistema de equações de Saint-Venant na forma conservativa, em notação vectorial, admitindo  $q_1 = 0$ , resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (3.69)$$

em que:

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + g I_1 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -g A \frac{\partial \xi}{\partial x} - g A J + g I_2 \end{bmatrix}$$

com  $J = n_k^2 |Q| Q / (A^2 R_h^{4/3})$ .

A matriz Jacobiana deste sistema de equações é dada por:

$$J = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g \frac{A}{B} - \left(\frac{Q}{A}\right)^2 & 2 \frac{Q}{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - U^2 & 2U \end{bmatrix}$$

em que  $\frac{\partial I_1}{\partial A} = \frac{A}{B}$ ,  $c = \sqrt{g \frac{A}{B}}$  e  $U = \frac{Q}{A}$ .

Os valores próprios da matriz Jacobiana são reais e distintos e os correspondentes vectores próprios são linearmente independentes, revelando o carácter hiperbólico do sistema de equações (3.69). Os valores próprios de  $J$  são dados por:

$$\lambda_1 = U + c \quad \text{e} \quad \lambda_2 = U - c$$

e os vectores próprios escrevem-se:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ U + c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ U - c \end{bmatrix}$$

A abordagem pontual dos termos fonte significa a simples adição destes à forma discretizada da equação (3.69), isto é, com  $\Delta x$  constante:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{* \prime} - F_{i-1/2}^{* \prime}) + \Delta t S_i^n \quad (3.70)$$

De acordo com a abordagem *upwind* ter-se-á:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{* \prime} - F_{i-1/2}^{* \prime}) + \Delta t S_i^* \quad (3.71)$$

em que  $F^*$  representa uma função de fluxo numérico, tal que  $F_{i+1/2}^{* \prime} = F(U_i^n, U_{i+1}^n)$  e  $F_{i-1/2}^{* \prime} = F(U_{i-1}^n, U_i^n)$ , e  $S_i^*$  representa uma aproximação *upwind* dos termos fonte.

As aproximações de fluxo numérico,  $F_{i+1/2}^{* \prime}$  e  $F_{i-1/2}^{* \prime}$ , com o esquema de primeira ordem de Roe escrevem-se:

$$F_{i+1/2}^{* \prime} = \frac{1}{2} (F_{i+1}^n + F_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \tilde{\alpha}_{k,i+1/2} |\tilde{\lambda}_{k,i+1/2}| \tilde{e}_{k,i+1/2}$$

$$F_{i-1/2}^{* \prime} = \frac{1}{2} (F_i^n + F_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \tilde{\alpha}_{k,i-1/2} |\tilde{\lambda}_{k,i-1/2}| \tilde{e}_{k,i-1/2}$$

Os coeficientes  $\tilde{\alpha}_{k,i\pm 1/2}$  e a condição de entropia  $|\tilde{\lambda}_{k,i\pm 1/2}|$  são definidos na secção seguinte [equações (3.80) e (3.81), respectivamente].

### 3.9.2 Resolução aproximada sugerida por Roe

Seja de novo o sistema (3.69) na forma homogénea,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Linearizando este sistema de equações, pode construir-se uma matriz Jacobiana aproximada,  $\tilde{\mathcal{J}} \approx \partial F / \partial U$ , de tal modo que, localmente, entre quaisquer pontos adjacentes da malha de cálculo ( $i, i+1$ ), seja válido o sistema linearizado:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{\mathcal{J}}(U_i, U_{i+1}) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Esta linearização permite escrever as decomposições no espaço próprio aproximado como combinações dos valores próprios de  $\tilde{\mathcal{J}}$  (Roe, 1981), vindo:

$$\Delta U_{i+1/2} = U_{i+1} - U_i = \sum_{k=1}^2 \tilde{\alpha}_{k,i+1/2} \tilde{e}_{k,i+1/2} \quad (3.72)$$

e

$$\Delta F_{i+1/2} = F_{i+1} - F_i = \tilde{J}_{i+1/2} \Delta U_{i+1/2} = \sum_{k=1}^2 \tilde{\alpha}_{k,i+1/2} \tilde{\lambda}_{k,i+1/2} \tilde{e}_{k,i+1/2} \quad (3.73)$$

em que  $\tilde{\alpha}_{k,i+1/2}$  é um coeficiente relacionado com a intensidade de cada onda que compõe a solução; é determinado a partir do sistema de equações original (3.69) e da decomposição (3.72).

De igual modo, com base na linearização (3.72) e (3.73) do sistema homogéneo, sugere-se a seguinte decomposição (3.74) para os termos fonte (Amado Mendes *et al.*, 2001):

$$S_{i+1/2} = \sum_{k=1}^2 \tilde{\beta}_{k,i+1/2} \tilde{e}_{k,i+1/2} \quad (3.74)$$

podendo obter-se uma aproximação de 2ª ordem destes termos, verificando a propriedade TVD, como se verá mais adiante.

### 3.9.3 Extensão TVD do esquema de MacCormack

A adição de termos limitadores de fluxo ao esquema de 2ª ordem de MacCormack, de modo a que verifique a propriedade TVD, consiste em substituir as duas sequências de correcção (3.67) e (3.68) pelas expressões (3.75) e (3.76), respectivamente:

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ U_i^n + \tilde{U}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_i^{n+1} - \tilde{F}_{i-1}^{n+1}) + \Delta t \tilde{S}_i^{n+1} \right] \quad (3.75)$$

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ U_i^n + \tilde{U}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_{i+1}^{n+1} - \tilde{F}_i^{n+1}) + \Delta t \tilde{S}_i^{n+1} \right] \quad (3.76)$$

e aplicar em seguida a correcção de fluxo (3.77) por forma a tornar o esquema TVD:

$$U_i^{n+1} = \tilde{U}_i^{n+1} + \left( \tilde{R}_{i+1/2} \tilde{D}_{i+1/2} - \tilde{R}_{i-1/2} \tilde{D}_{i-1/2} \right) \quad (3.77)$$

em que  $\tilde{R}$  representa a matriz contendo os vectores próprios  $\tilde{e}$  da matriz Jacobiana linearizada  $\tilde{J}_{i+1/2} = \tilde{J}(U_i, U_{i+1})$ , com  $\tilde{J} \approx \partial F / \partial U$ :

$$\tilde{e}_{1,i+1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{U}_{i+1/2} + \tilde{c}_{i+1/2} \end{bmatrix}; \quad \tilde{e}_{2,i+1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{U}_{i+1/2} - \tilde{c}_{i+1/2} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

em que:

$$\tilde{U}_{i+1/2} = \frac{\frac{Q_{i+1}}{\sqrt{A_{i+1}}} + \frac{Q_i}{\sqrt{A_i}}}{\sqrt{A_{i+1}} + \sqrt{A_i}}; \quad \tilde{c}_{i+1/2}^2 = \begin{cases} g \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} & \text{se } A_{i+1} - A_i \neq 0 \\ \left( \frac{c_{i+1} + c_i}{2} \right)^2 & \text{se } A_{i+1} - A_i = 0 \end{cases} \quad (3.79)$$

ou se  $\Delta I_1 * \Delta A < 0$

com  $c = \sqrt{g \Delta I_1 / \Delta A} = \sqrt{g A / B}$ .

$\tilde{D}$  é o vector,

$$\tilde{D}_{i+1/2} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{1,i+1/2} \\ \tilde{D}_{2,i+1/2} \end{bmatrix}$$

com,

$$\tilde{D}_{k,i+1/2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{\alpha}_{k,i+1/2} \left| \tilde{\lambda}_{k,i+1/2} \right| \left( 1 - \left| v_{k,i+1/2} \right| \right) \left( 1 - \phi_{k,i+1/2} \right)$$

Os coeficientes  $\tilde{\alpha}_{k,i+1/2}$  relacionam-se com a intensidade de cada onda que compõe a solução e são determinados a partir do sistema de equações original (3.69) e da decomposição (3.72); escrevem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{1,i+1/2} &= \frac{1}{2} \Delta A_{i+1/2} + \frac{1}{2 \tilde{c}_{i+1/2}} \left( \Delta Q_{i+1/2} - \tilde{U}_{i+1/2} \Delta A_{i+1/2} \right) \\ \tilde{\alpha}_{2,i+1/2} &= \frac{1}{2} \Delta A_{i+1/2} - \frac{1}{2 \tilde{c}_{i+1/2}} \left( \Delta Q_{i+1/2} - \tilde{U}_{i+1/2} \Delta A_{i+1/2} \right) \end{aligned} \quad (3.80)$$

102

com  $\Delta A_{i+1/2} = A_{i+1} - A_i$  e  $\Delta Q_{i+1/2} = Q_{i+1} - Q_i$ . A condição de entropia,  $\tilde{\lambda}$ , escreve-se (Amado Mendes *et al.*, 2001):

$$\left| \tilde{\lambda}_{k,i+1/2} \right| = \begin{cases} \left| \tilde{\lambda}_{k,i+1/2} \right| & \text{se } \left| \tilde{\lambda}_{k,i+1/2} \right| \geq \delta_{k,i+1/2} \\ \delta_{k,i+1/2} & \text{se } \left| \tilde{\lambda}_{k,i+1/2} \right| < \delta_{k,i+1/2} \end{cases} \quad (3.81)$$

em que  $\tilde{\lambda}_{1,i+1/2} = \tilde{U}_{i+1/2} + \tilde{c}_{i+1/2}$  e  $\tilde{\lambda}_{2,i+1/2} = \tilde{U}_{i+1/2} - \tilde{c}_{i+1/2}$  são os valores próprios da matriz jacobiana linearizada  $\tilde{J}_{i+1/2}$ , e  $\delta_{k,i+1/2}$  é um valor positivo pequeno, dado por:

$$\delta_{k,i+1/2} = \max \{0, (\tilde{\lambda}_{k,i+1/2} - \lambda_{k,i}), (\lambda_{k,i+1} - \tilde{\lambda}_{k,i+1/2})\}$$

O coeficiente  $v_{k,i+1/2} = \tilde{\lambda}_{k,i+1/2} (\Delta t / \Delta x)$  representa um número de Courant local aproximado associado à componente  $k$  da decomposição do fluxo numérico.

A função limitadora de fluxo,  $\phi_{k,i+1/2}$ , é, neste contexto, redefinida a partir do limitador *minmod* de Roe, obtendo-se:

$$\phi_{k,i+1/2} = \frac{1}{\tilde{\alpha}_{k,i+1/2}} \min \text{mod}(\tilde{\alpha}_{k,i-1/2}, \tilde{\alpha}_{k,i+1/2}, \tilde{\alpha}_{k,i+3/2}) \quad (3.82)$$

em que,

$$\min \text{mod}(a, b, c) = \begin{cases} d \min(|a|, |b|, |c|) & \text{se } d = \text{sign}(a) = \text{sign}(b) = \text{sign}(c) \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

Considerando diferentes aproximações para as secções transversais (rectangular, triangular e trapezoidal), apresentam-se no ANEXO II parte de um programa e alguns subprogramas complementares escritos em FORTRAN que resolvem a correcção de fluxo (3.77) correspondente à extensão TVD do esquema de MacCormack, cujos subprogramas com as sequências de previsão e correcção do método clássico de MacCormack foram apresentados no ANEXO I.

Naturalmente que os subprogramas apresentados no ANEXO I deverão agora reflectir a extensão TVD, ou seja, estes subprogramas são complementados com a correcção TVD das variáveis de cálculo A e Q, como se mostra no ANEXO II.

Os termos fonte são discretizados considerando médias entre os valores nodais das correspondentes diferenças. Assim, aquando da discretização dos termos de fluxo com diferenças progressivas, a média será feita entre os valores nos pontos  $i$  e  $i+1$ ; no caso de diferenças regressivas, far-se-á a média entre os valores situados nos pontos  $i-1$  e  $i$ .

### 3.9.4 Extensão de segunda ordem do esquema de Roe

Seja agora o seguinte esquema de segunda ordem para o problema homogêneo (3.69):

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+1/2}^{*n} - F_{i-1/2}^{*n} \right) \quad (3.83)$$

A função de fluxo numérico depende do limitador não linear  $\phi_{k,i+1/2} = \phi(\theta_{k,i+1/2})$ ; é definida do seguinte modo:

$$F_{i+1/2}^{*n} = \frac{1}{2} (F_{i+1}^n + F_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \tilde{\alpha}_{k,i+1/2} \left| \tilde{\lambda}_{k,i+1/2} \right| \left[ 1 - \phi_{k,i+1/2} \left( 1 - |v_{k,i+1/2}| \right) \right] \tilde{e}_{k,i+1/2} \quad (3.84)$$

em que os coeficientes  $\tilde{\alpha}_{k,i+1/2}$ , a condição de entropia  $|\tilde{\lambda}_{k,i+1/2}|$ , as funções limitadoras de fluxo  $\phi_{k,i+1/2}$ , o número de Courant local  $v_{k,i+1/2}$  e os vectores próprios  $\tilde{e}_{k,i+1/2}$  têm as expressões indicadas em 3.9.3 *Extensão TVD do esquema de MacCormack*.

De igual modo, para o fluxo numérico  $F_{i-1/2}^{*n}$  obtém-se:

$$F_{i-1/2}^{*n} = \frac{1}{2} (F_i^n + F_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \tilde{\alpha}_{k,i-1/2} \left| \tilde{\lambda}_{k,i-1/2} \right| \left[ 1 - \phi_{k,i-1/2} \left( 1 - |v_{k,i-1/2}| \right) \right] \tilde{e}_{k,i-1/2} \quad (3.85)$$

De acordo com Sweby (1984), a função limitadora de fluxo,  $\phi_{k,i+1/2}$ , deve obedecer a certas condições por forma a garantir simultaneamente uma precisão do esquema de segunda ordem e a verificação da propriedade TVD. São correntes as seguintes funções limitadoras de fluxo:

i) Limitador *minmod de Roe*:

$$\phi(\theta) = \max\{0, \min(1, \theta)\}$$

ii) Limitador *superbee de Roe*:

$$\phi(\theta) = \max\{0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)\}$$

iii) Limitador de *van Leer*:

$$\phi(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|}$$

iv) Limitador de *van Albada*:

$$\phi(\theta) = \frac{\theta + \theta^2}{1 + \theta^2}$$

Nestas funções, o limitador de fluxo introduzido,  $\theta$ , é dependente da solução do problema, devendo ser uma função não linear da solução através de uma relação do tipo (3.86):

$$\theta_{k,i+1/2} = \frac{\tilde{\alpha}_{k,upwind}}{\tilde{\alpha}_{k,local}} = \frac{\tilde{\alpha}_{k,I+1/2}}{\tilde{\alpha}_{k,i+1/2}}, \text{ em que } I = i - \text{sign}(v_{k,i+1/2}) \quad (3.86)$$

em que a função  $\text{sign}(a)$  toma o valor 0 se o argumento  $a$  for nulo, toma o valor 1 no caso de o argumento ser positivo e o valor  $-1$  no caso de ser negativo.

Devido à propriedade de simetria das funções limitadoras do fluxo numérico, verificada pelos quatro limitadores de fluxo apresentados (*minmod de Roe*, *superbee de Roe*, *van Leer* e *van Albada*), os gradientes progressivos e regressivos da solução são tratados de igual modo.

Em conformidade com este esquema, obtém-se para a decomposição dos termos fonte:

$$S_i^* = \frac{1}{2} (S_{i+1/2} + S_{i-1/2})$$

com,

$$S_{i+1/2} = \sum_{k=1}^2 \tilde{\beta}_{k,i+1/2} [1 - \text{sign}(\tilde{\lambda}_{k,i+1/2})] \tilde{e}_{k,i+1/2}$$

$$S_{i-1/2} = \sum_{k=1}^2 \tilde{\beta}_{k,i-1/2} [1 + \text{sign}(\tilde{\lambda}_{k,i-1/2})] \tilde{e}_{k,i-1/2}$$

Os coeficientes  $\tilde{\beta}_{k,i+1/2}$  são calculados por (3.87):

$$\tilde{\beta}_{1,i+1/2} = -\frac{g \tilde{A}_{i+1/2}}{2\Delta x \tilde{c}_{i+1/2}} \Delta \xi - \frac{g \tilde{A}_{i+1/2}}{2 \tilde{c}_{i+1/2}} \tilde{S}_{f,v_2} + \frac{g}{2 \tilde{c}_{i+1/2}} \tilde{I}_{2,v_2} \quad (3.87)$$

$$\tilde{\beta}_{2,i+1/2} = -\tilde{\beta}_{1,i+1/2} = \frac{g \tilde{A}_{i+1/2}}{2\Delta x \tilde{c}_{i+1/2}} \Delta \xi + \frac{g \tilde{A}_{i+1/2}}{2 \tilde{c}_{i+1/2}} \tilde{S}_{f,v_2} - \frac{g}{2 \tilde{c}_{i+1/2}} \tilde{I}_{2,v_2}$$

em que  $\Delta \xi = \xi_{i+1} - \xi_i$  e  $\tilde{S}_{f,v_2} = \frac{|\tilde{Q}_{i+1/2}| |\tilde{Q}_{i+1/2}|}{\tilde{K}_{i+1/2}^2 \tilde{A}_{i+1/2}^2 \tilde{R}_{i+1/2}^{4/3}}$ .

Considerando canais de secção rectangular,  $\tilde{I}_{2,v}$  é dado por,

$$\tilde{I}_{2,v} = \frac{\tilde{h}_{i+1/2}^2}{2\Delta x} (B_{i+1} - B_i)$$

Calculam-se  $\tilde{U}_{i+1/2}$  e  $\tilde{c}_{i+1/2}$  em conformidade com (3.79). Para as restantes variáveis médias,  $\tilde{A}_{i+1/2}$  e  $\tilde{h}_{i+1/2}$ , utilizam-se médias aritméticas entre os correspondentes valores nas secções  $i$  e  $i+1$ .

### 3.9.5 Aplicações

As características geométricas das secções transversais de canais naturais (rios) são muito variáveis, afastando-se em geral consideravelmente da secção rectangular. É possível definir as secções reais por pontos e deste modo calcular os elementos geométricos (área, perímetro molhado, raio hidráulico, profundidade, momento estático, etc.); todavia, na generalidade das aplicações reais é suficiente recorrer a aproximações trapezoidais, considerando diferentes inclinações em cada uma das margens, sejam  $1:me$  e  $1:md$  ( $v:h$ ) em que  $e$  e  $d$  representam as margens esquerda e direita, respectivamente. Assim, seja  $B_0$  a largura no fundo, com  $B_0 > 0$  e  $me = md = 0$  teremos uma secção rectangular; com  $B_0 = 0$ ,  $me > 0$  e  $md > 0$  teremos uma secção triangular; no caso mais geral, com  $B_0 > 0$ ,  $me > 0$  e  $md > 0$ , teremos uma secção trapezoidal. Naturalmente que importa agora definir em função de  $me$  e  $md$  as necessárias características geométricas e hidráulicas das secções. Deduzem-se as seguintes características válidas para secções rectangulares, triangulares e trapezoidais:

- área,  $A = \left[ B_0 + \frac{1}{2} h (me + md) \right] h$
- perímetro molhado,  $P = B_0 + h \left[ \sqrt{1 + (me)^2} + \sqrt{1 + (md)^2} \right]$
- profundidade,  $h$ 
  - secção rectangular,  $h = \frac{A}{B_0}$
  - secções triangular e trapezoidal,  $h = \frac{-B_0 + \sqrt{B_0^2 + 2(me + md)A}}{me + md}$
- largura à superfície,  $B = B_0 + (me + md)h$

- momento estático (integral  $I_1$ ),  $I_1 = \frac{B_0}{2} h^2 + \frac{me + md}{6} h^3$
- integral  $I_2$  da equação (3.20),

$$I_2 = \frac{h^2}{2} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial(me + md)}{\partial x} = \frac{h^2}{2} \frac{\Delta B}{\Delta x} + \frac{h^3}{6} \frac{\Delta(me + md)}{\Delta x}$$

em que, no cálculo de  $I_2$ ,  $\Delta(\cdot)$  representa diferenças entre os valores nodais correspondentes à discretização efectuada (progressiva ou regressiva).

Os programas/subprogramas que se apresentam em ANEXO e as versões executáveis dos programas que constam no CD-ROM que acompanha este livro recorrem às expressões anteriores para a resolução das equações (3.14) e (3.18), ou (3.20), considerando o caso mais geral de secções trapezoidais com diferentes inclinações em ambas as margens.

Várias comparações e aplicações dos dois esquemas numéricos de diferenças finitas de segunda ordem baseados em limitadores de fluxo (extensão TVD do esquema de MacCormack e extensão de segunda ordem do esquema de Roe), acima apresentados, poderão ser encontradas em Amado Mendes (2001) e Amado Mendes *et al.* (2001).

Reproduzem-se nas Figuras 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12 alguns resultados de um dos exemplos sugeridos nesta bibliografia. Trata-se de comparar os resultados do esquema clássico de MacCormack, sem e com viscosidade numérica de Jameson; com resultados da extensão de segunda ordem do esquema de Roe e resultados da extensão TVD do esquema de MacCormack. O exemplo apresentado foi proposto por LeVeque (1998); o canal tem uma secção rectangular constante e o fundo é descrito pelas seguintes equações:

$$\xi(x) = \begin{cases} 0.25 [\cos(10\pi x - 5\pi) + 1], & \text{se } 0.40 \leq x \leq 0.60 \text{ m} \\ 0, & \text{no restante} \end{cases}$$

Partindo de condições iniciais de repouso em todo o domínio, simula-se a propagação de uma onda rectangular na superfície livre, descrita por:

$$u(x,0) = 0; h(x,0) = \begin{cases} 1.0 - \xi(x), & \text{se } x < 0.10 \text{ m} \\ 1.2 - \xi(x), & \text{se } 0.10 \leq x \leq 0.20 \text{ m} \\ 1.0 - \xi(x), & \text{se } x > 0.20 \text{ m} \end{cases}$$

Como era de esperar, a onda assim definida separou-se em duas ondas que se propagam em direcções opostas. A que se propaga no sentido

positivo do eixo dos  $x$  passa sobre a bossa do fundo, sendo parcialmente reflectida; a onda que se propaga na direcção oposta sai livremente pela fronteira de montante do domínio ou é reflectida nesta parede do canal; neste caso, a onda refaz-se e, após reflexão, propaga-se igualmente no sentido positivo do eixo dos  $x$ , tal como a primeira onda. Simulou-se a primeira hipótese (saída livre pela fronteira de montante) nas Figuras 3.9 a 3.11.

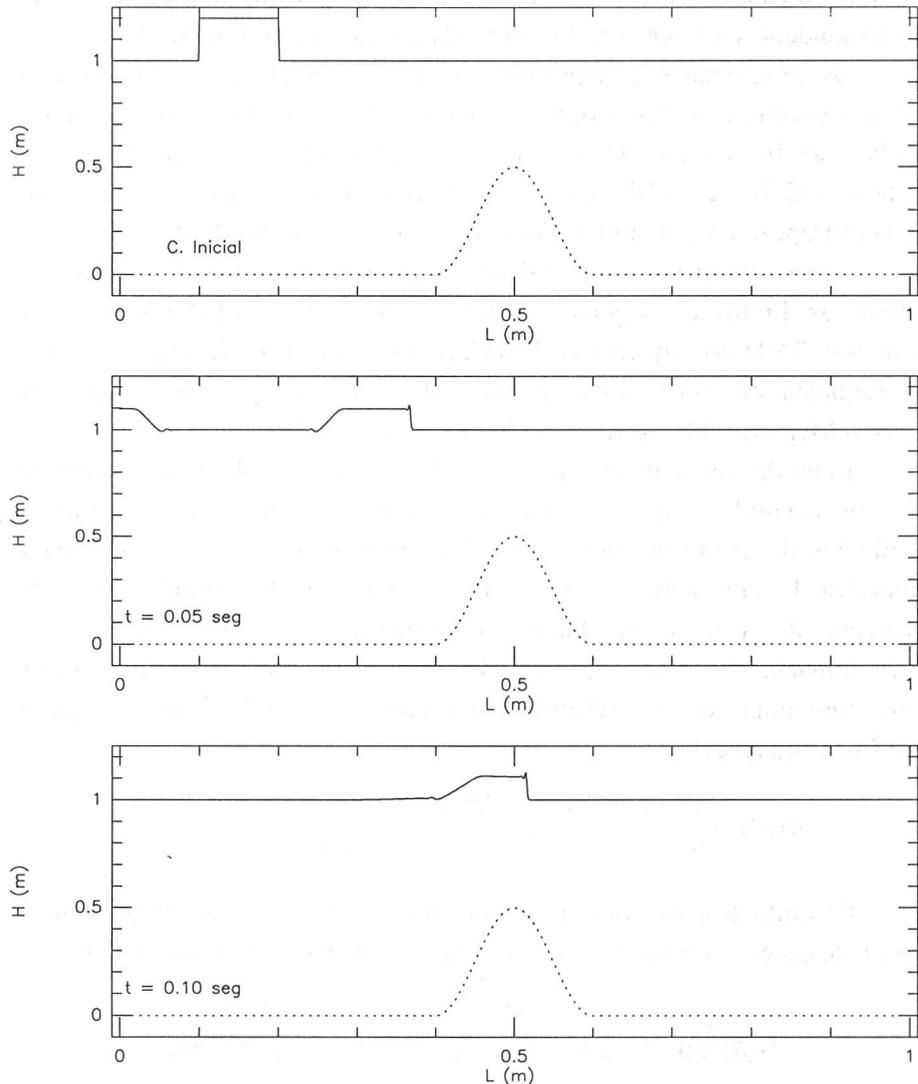


Figura 3.9 - Resultados do método clássico de MacCormack, sem qualquer procedimento de suavização (fundo representado a ponteados).

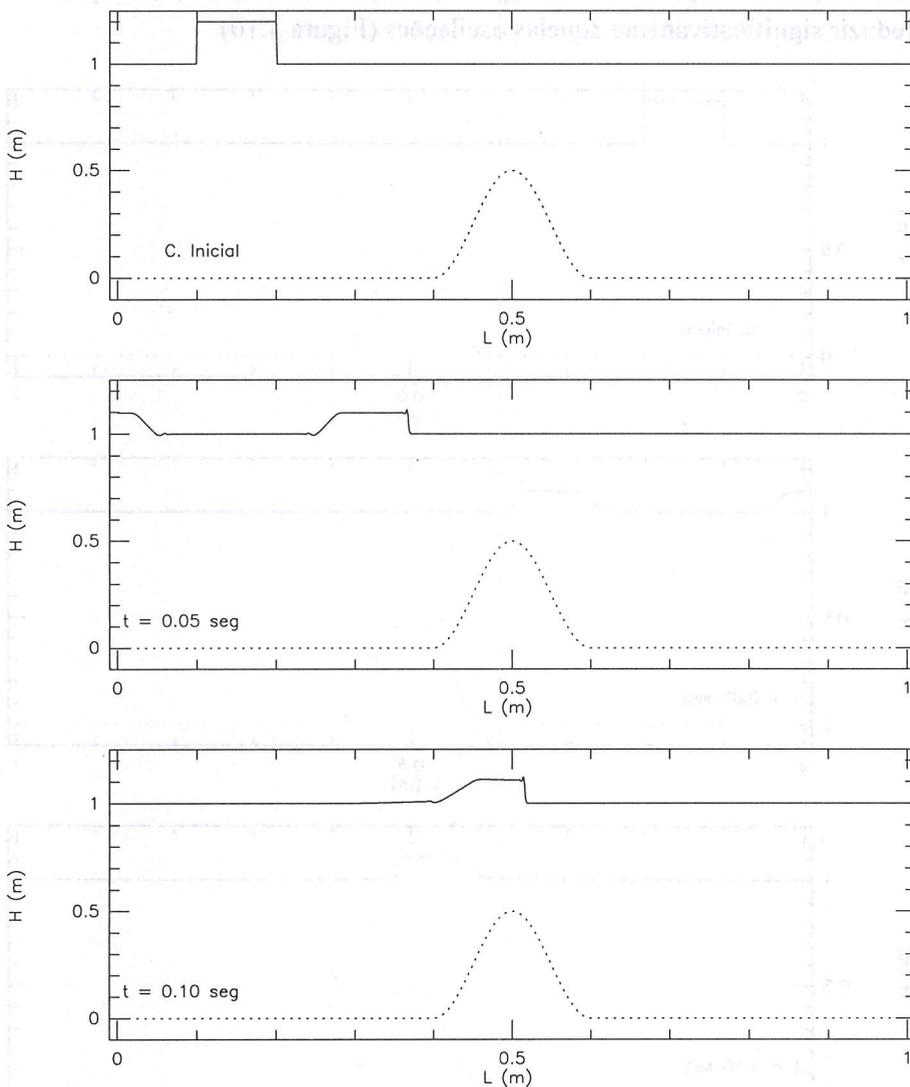


Figura 3.10 - Resultados do método clássico de MacCormack após suavização de Jameson (fundo representado a ponteados).

Comparando os resultados apresentados nas Figuras 3.9 e 3.10, verificam-se algumas oscilações de carácter dispersivo na solução obtida com o esquema clássico de MacCormack, mesmo considerando a média dos termos fonte como descrito na secção 3.6.2.2.3 *Esquema explícito de*

*MacCormack* (Figura 3.9); a introdução de uma viscosidade artificial para suavização da superfície livre (procedimento de Jameson) não permitiu reduzir significativamente aquelas oscilações (Figura 3.10).

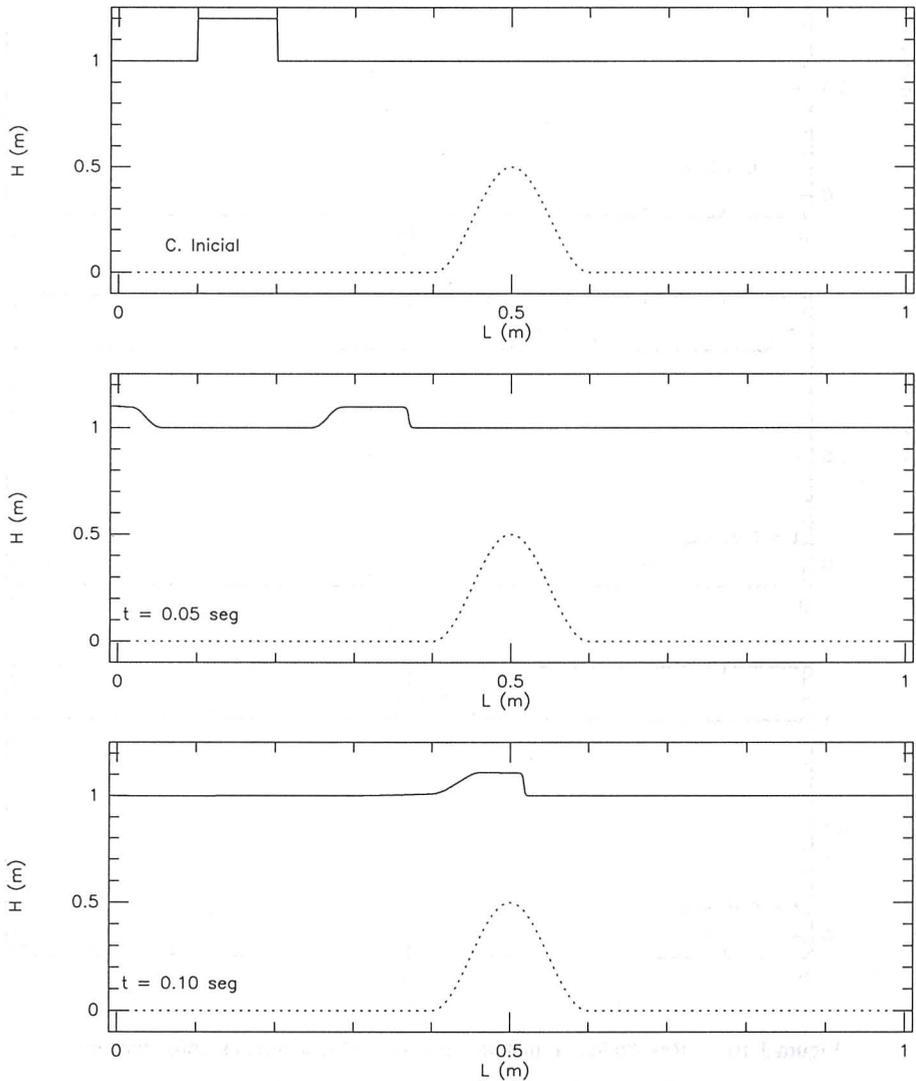


Figura 3.11 - Resultados da extensão de segunda ordem do esquema de Roe (fundo representado a ponteado).

Pelo contrário, comparando agora os resultados obtidos tanto com o esquema de segunda ordem de Roe (Figura 3.11) como com a extensão TVD do esquema de MacCormack (Figura 3.12), foi possível obter uma solução

sem oscilações dispersivas e com dissipação numérica praticamente inexistente, como se comprova pelas frentes quase verticais de ambas as ondas. Na Figura 3.12 consideraram-se condições iniciais idênticas às das Figuras 3.9 a 3.11, mas admitiu-se agora uma condição de reflexão total na fronteira de montante. Como é visível, a onda reflectida é perfeitamente idêntica à primeira onda, com excepção de um ligeiro empolamento desta devido à existência do obstáculo submerso.

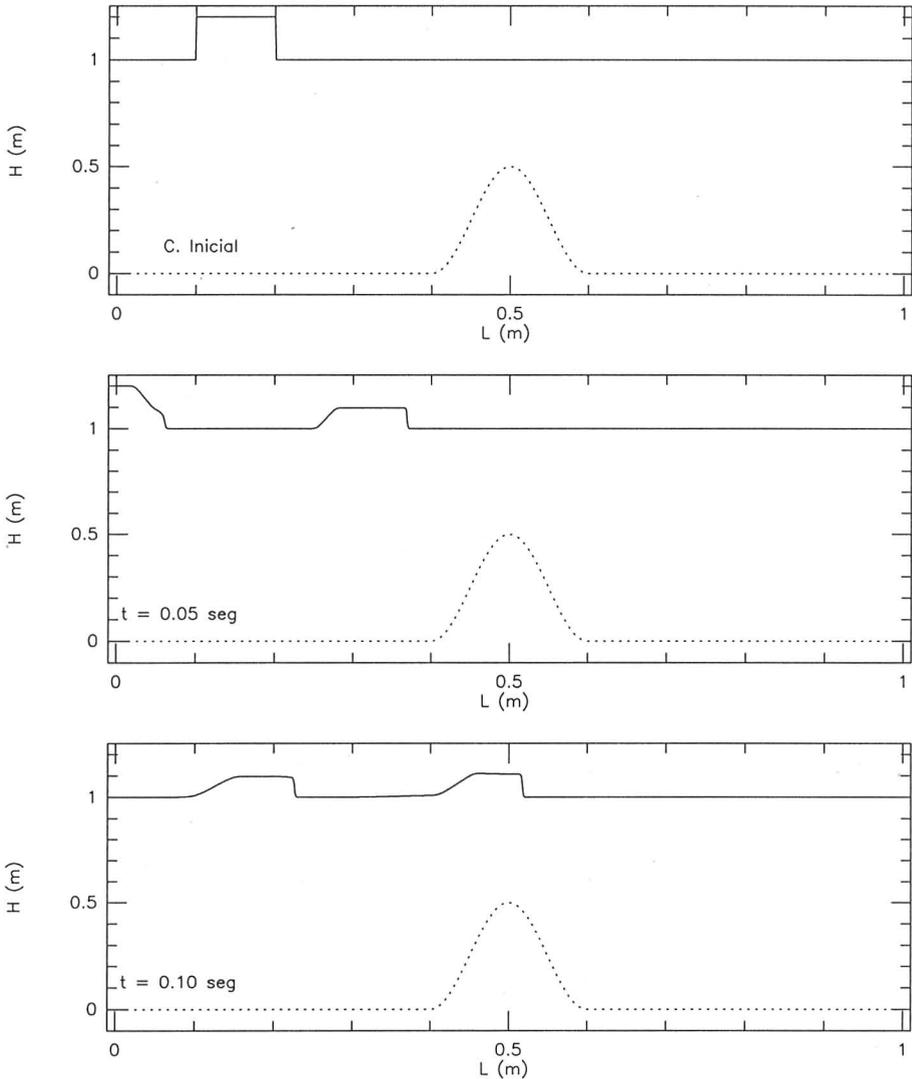


Figura 3.12 - Resultados da extensão TVD do esquema de MacCormack (fundo representado a ponteados).

(Página deixada propositadamente em branco)

## 4. BARRAGENS: SOLICITAÇÕES HIDRODINÂMICAS E RUPTURAS

São caracterizadas as solicitações hidrodinâmicas sobre uma barragem devidas à actuação de um sismo e apresentados alguns modelos de resolução analítica e numérica das equações básicas, considerando o movimento irrotacional de um fluido homogêneo, não viscoso e linearmente compressível e admitindo, complementarmente, que os deslocamentos da barragem são pequenos quando comparados com as suas dimensões. Apresentam-se metodologias para calcular os efeitos hidrodinâmicos sobre as barragens, resultantes de deslizamentos de taludes situados em encostas ou no fundo das albufeiras. Analisam-se os mecanismos e as consequências da ruptura de uma barragem, os tipos de ruptura e a evolução da onda de cheia resultante.

### 4.1 Considerações gerais

Em Portugal, a exemplo de outros países, faz-se o aproveitamento para fins múltiplos dos cursos de água, quer directamente, quer através da construção de barragens e consequente constituição de albufeiras. Os elevados custos destes empreendimentos e os prejuízos materiais e humanos que adviriam da sua eventual ruptura, conduzem à necessidade de ter em conta a elaboração de estudos, tanto quanto possível aprofundados, dos acidentes naturais e respectivos efeitos que possam pôr em causa a sua segurança.

Uma situação de cheia relativamente vulgar ocorre em consequência de precipitações intensas, dando origem a escoamento superficial directo, que se traduz na formação de um hidrograma de cheia. Todavia, outras situações de muito menor probabilidade de ocorrência, mas de consequências muitíssimo mais gravosas, estão associadas a acidentes resultantes do galgamento e/ou da ruptura de uma barragem. De entre estas destacam-se: *i*) o desmoronamento ou escorregamento de encostas submersas ou marginais, com formação de grandes ondas na superfície livre da água, e *ii*) a ocorrência de um sismo, dando origem a um movimento do tipo oscilatório que irá excitar um escoamento e provocar forças hidrodinâmicas.

O Regulamento Português de Segurança de Barragens, em vigor desde 1990, estabelece que as barragens com altura superior a 15 m, ou de altura inferior mas com volume de armazenamento superior a 100 000 m<sup>3</sup>, devem ser sujeitas à análise de cenários de ruptura da estrutura. Nesta conformidade, as entidades responsáveis pela construção e exploração de barragens, tanto públicas como privadas, são obrigadas a realizar um conjunto de

procedimentos técnicos por forma a aumentar a segurança pública. A caracterização de cheias provocadas por rupturas de barragens inclui, nomeadamente, a elaboração de mapas de inundação, zonamentos de risco e planos de emergência para as barragens portuguesas que se enquadrem no âmbito do referido Regulamento.

O estudo e a simulação de cheias provocadas por rupturas de barragens compreendem as seguintes fases:

- o processo de formação da cheia provocada pela ruptura da barragem que é, em particular, condicionado pelo tipo de ruptura (total, parcial, instantânea, gradual,...) e pelas características da brecha, nomeadamente a geometria, as dimensões e o tempo de ruptura;
- o processo de propagação da cheia provocada pela ruptura, que é baseado no estudo e modelação dos regimes hidráulicos transitórios de modo a caracterizar os seguintes parâmetros: tempo de chegada da frente de onda de cheia, cota máxima, velocidade e caudal máximos, bem como o correspondente tempo de ocorrência após o instante do acidente; e,
- o processo de caracterização das zonas inundáveis e de zonamento ao longo do vale.

Como foi já referido, do ponto de vista das causas naturais que podem dar origem a rupturas ou colocar em perigo a segurança das barragens, e que trataremos com algum detalhe ao longo deste capítulo, são fundamentalmente de dois tipos: (1) resultantes de deslizamentos nas encostas e fundos das albufeiras, e (2) resultantes da ocorrência de sismos.

Assim, nos estudos a desenvolver em fase de projecto de um aproveitamento hidráulico que compreenda a criação de uma albufeira, a consideração destes tipos de acidentes torna-se recomendável, em particular no caso do levantamento geológico das margens apontar para a existência de zonas com potencial risco de escorregamento para as condições futuras após a entrada em exploração da albufeira; especial cuidado devem merecer as zonas de elevada sismicidade.

Um sismo pode agir directamente sobre o corpo de uma barragem ou exercer uma acção indirecta sobre esta, ao ser o agente causador do deslizamento de uma encosta da albufeira.

Apresentam-se em seguida os principais aspectos relativos ao cálculo das solicitações hidrodinâmicas sobre uma barragem resultantes daquelas ocorrências, bem como a análise dos mecanismos de ruptura e consequente propagação da onda de cheia.

## 4.2 Solicitações hidrodinâmicas devidas à actuação de um sismo

O comportamento dinâmico de uma barragem é fortemente influenciado pela interacção massa de água-barragem e pela reflexão/amortecimento das ondas de pressão hidrodinâmica na barragem, margens e fundo da albufeira. Trata-se, por conseguinte, de obter por um processo analítico ou numérico, as solicitações hidrodinâmicas sobre a barragem devidas à actuação de um movimento do tipo oscilatório nas fronteiras (sismo, neste caso), tendo em consideração as características (geometria, material constituinte, etc.) do fundo da albufeira e da barragem.

Assim, seja uma estrutura em contacto com uma grande massa de água: uma barragem e respectiva albufeira. Ao ocorrer um sismo, as fronteiras da albufeira (paredes da barragem, fundo e margens da albufeira) vão ser sede de um movimento do tipo oscilatório, o qual irá excitar um escoamento e provocar forças hidrodinâmicas.

### 4.2.1 Equações básicas

Sejam as equações gerais de continuidade e de conservação da quantidade de movimento, sem efeito do peso:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \nabla^2 u &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

em que  $u$  é a velocidade;  $\rho$  é a massa volúmica;  $p$  é a pressão em  $(x, y, z, t)$ , e  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido.

Considerando que a generalidade das albufeiras se prolonga, segundo a normal à parede da barragem, numa extensão muito maior que a altura desta, pode demonstrar-se (problema de Rayleigh) que o efeito da viscosidade é praticamente insignificante (a constante de tempo do efeito da viscosidade é muito maior que a constante de tempo do movimento sísmico).

Antes da ocorrência de qualquer movimento oscilatório, o campo de velocidades é praticamente nulo ( $u = 0$  e  $rot\ u = 0$ ), sendo o estado de repouso do fluido definido por valores da pressão e da massa volúmica constantes  $p_0$  e  $\rho_0$ ; verificando-se qualquer perturbação, pode representar-se o estado do fluido em qualquer ponto  $(x, y, z, t)$  pelas médias de  $p = p_0 + p'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$  e  $u$ , e considerar que os produtos das quantidades  $p'$ ,  $\rho'$  e  $u$  pelas suas derivadas parciais são pequenos relativamente aos produtos destas por  $p_0$  e  $\rho_0$ . Nesta conformidade, do sistema (4.1) resultam as seguintes equações linearizadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} u &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p' &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aplicando o operador derivada temporal à primeira das equações (4.2) e o operador divergência à segunda daquelas equações, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} u = 0 \right] &= \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} u) = 0 \\ \operatorname{div} \left[ \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = 0 \right] &= \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} u) + \operatorname{div} (\operatorname{grad} p') = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Subtraindo as duas equações (4.3) obtém-se,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \operatorname{div} (\operatorname{grad} p') = 0$$

ou ainda, atendendo a que  $\nabla^2 p' = \operatorname{div} (\operatorname{grad} p')$ :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad (4.4)$$

Admitindo agora que a entropia não é afectada pela perturbação, a equação de estado  $p = f(\rho, s)$ , quando linearizada, conduz a  $p' = c^2 \rho'$ , em que  $c$  é a velocidade do som na água ( $c \approx 1440 \text{ ms}^{-1}$ ), obtendo-se a seguinte equação da onda:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad (4.5)$$

O campo de velocidades poderá obter-se a partir das equações (4.2) fazendo:

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} u = 0 \right] &= \text{grad} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) + \rho_0 \text{grad}(\text{div} u) = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad} p' = 0 \right] &= -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned}$$

donde, por adição destas duas equações, resulta:

$$-\frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_0 \text{grad}(\text{div} u) = 0$$

ou ainda, atendendo a que  $\text{grad}(\text{div} u) = \nabla^2 u + \text{rot}(\text{rot} u) = 0$  e que  $\text{rot}(\text{rot} u) = 0$ :

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nabla^2 u = 0 \quad (4.6)$$

Encontrando-se o fluido inicialmente em repouso, a vorticidade é nula; por conseguinte, pode introduzir-se a função potencial  $u = \text{grad} \phi$ , resultando a seguinte equação (4.7):

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = 0 \quad (4.7)$$

As equações deduzidas constituem a base dos métodos que se desenvolvem em seguida para a análise dos campos de pressões e das forças hidrodinâmicas instaladas no paramento de montante de uma barragem em consequência da actuação de movimentos oscilatórios do tipo sísmico. Nesta conformidade, em aplicações práticas, dever-se-ão ter em consideração as seguintes hipóteses simplificativas:

- o fluido é considerado homogéneo, não-viscoso e linearmente-compressível;
- o movimento do fluido é irrotacional;
- os deslocamentos são pequenos quando comparados com as dimensões da barragem; e,
- os efeitos das ondas de superfície do tipo gravítico são desprezados (demonstra-se que os erros associados são pequenos).

Nesta conformidade, supondo um movimento oscilatório de frequência  $w$ , a pressão hidrodinâmica resultante será também harmónica e da mesma frequência, podendo ser expressa por:

$$p'(x, y, z, t) = \bar{p}(x, y, z, t) e^{iwt} \quad (4.8)$$

sendo  $i = \sqrt{-1}$  e  $\bar{p}(x, y, z, t)$  a amplitude da pressão hidrodinâmica no ponto  $(x, y, z)$  da albufeira.

De (4.8) obtém-se  $\partial^2 p / \partial t^2 = -w^2 \bar{p} e^{iwt}$ ; substituindo este resultado na equação (4.5) resulta:

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} (-w^2 \bar{p} e^{iwt}) = -\left(\frac{w}{c}\right)^2 \bar{p} e^{iwt}$$

donde,

$$\frac{\nabla^2 p'}{e^{iwt}} = -\left(\frac{w}{c}\right)^2 \bar{p}$$

ou seja,

$$\nabla^2 \bar{p} + \left(\frac{w}{c}\right)^2 \bar{p} = 0 \quad (4.9)$$

Nas secções seguintes apresentam-se soluções analíticas da equação (4.9) e uma solução numérica obtida com base no método dos elementos de fronteira.

#### 4.2.2 Soluções analíticas

Embora as soluções analíticas para este problema sejam aplicáveis a situações reais bastante simplificadas, estas revelam-se muito úteis na validação de abordagens numéricas. Entre as principais hipóteses simplificativas frequentemente consideradas no desenvolvimento de soluções analíticas, complementam-se algumas das condições já atrás enunciadas para o modelo matemático:

- o sistema barragem/albufeira é bidimensional no plano vertical e a albufeira apresenta comprimento infinito;
- o fluido é incompressível, não-viscoso e irrotacional;
- a barragem e a fundação são rígidas; e,
- o movimento da barragem é horizontal.

Estas simplificações não são na sua totalidade comuns à generalidade das abordagens analíticas e algumas delas são ultrapassadas recorrendo à modelação numérica. Em particular, tem-se investido fundamentalmente na procura de soluções analíticas e numéricas que permitam ultrapassar as seguintes limitações:

- paramento de montante da barragem inclinado (com simples ou múltiplas inclinações);
- comprimento da albufeira finito e batimetria real, em particular num plano vertical perpendicular ao paramento de montante da barragem;
- efeito da compressibilidade do fluido na albufeira;
- modelos tridimensionais, permitindo considerar barragens em abóbada com diversas curvaturas;
- efeitos da aceleração convectiva não linear e das oscilações da superfície livre da albufeira considerando escoamentos compressíveis;
- interacção do movimento da barragem e da albufeira, utilizando métodos numéricos baseados em elementos finitos, ou outros esquemas numéricos integrados; e,
- possibilidade de utilização de um espectro aleatório de aceleração do solo com componentes horizontal e vertical.

Apresentam-se em seguida algumas soluções analíticas recentes que globalmente permitem ultrapassar algumas das hipóteses simplificativas consideradas nos modelos clássicos.

#### 4.2.2.1 Modelo de Rashed & Iwan

Sejam as notações e o sistema de coordenadas representados na Figura 4.1.

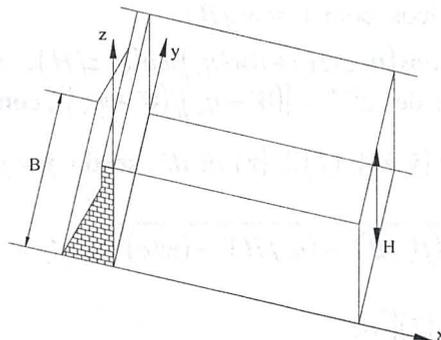


Figura 4.1 - Sistema de coordenadas e notações.

A amplitude de deslocamento  $\bar{a}$  de um ponto  $(y, z)$  é dada por  $\bar{a}(y, z) = A\psi(y, z)$ , sendo  $A$  a máxima amplitude de deslocamento e  $\psi(y, z)$  uma função de forma de deformação da barragem, cujo máximo é a unidade. Para esta função admitiram-se quatro formas, dadas por:

$$\psi(y, z) = \text{sen}(k\pi y/B) \text{sen}[(2l-1)(\pi z/2H)] ; k, l = 1, 2$$

Sejam as seguintes condições de fronteira:

- $\partial \bar{p}(0, y, z)/\partial x = \rho w^2 \bar{a}(y, z) = \rho w^2 A\psi(y, z)$ ;
- $\partial \bar{p}(x, 0, z)/\partial z = iwq \bar{p}(x, 0, z)$ , sendo  $q = (1/c)[(1 - \alpha_r)/(1 + \alpha_r)]$  o coeficiente de amortecimento e  $\alpha_r$  o coeficiente de reflexão das ondas de pressão ao embaterem nas margens;
- $\partial \bar{p}(x, y, 0)/\partial z = iwq \bar{p}(x, y, 0)$ ;
- $\left\{ \begin{array}{l} \partial \bar{p}(x, B/2, z)/\partial y = 0, \text{ para movimentos simétricos da barragem,} \\ \bar{p}(x, B/2, z) = 0 \text{ para movimentos antisimétricos; e,} \end{array} \right.$
- $\bar{p}(x, y, H) = 0$ .

A solução da equação (4.9), tendo em consideração as condições de fronteira indicadas, é dada por (Rashed *et al.*, 1984):

$$\bar{p}(x, y, z) = -\rho H w^2 A \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{I_{rs}}{\delta_{rs} A_r B_s} e^{(-\delta_{rs} \frac{x}{B})} Y_r \left( \frac{y}{B} \right) Z_s \left( \frac{z}{H} \right) \right] \quad (4.10)$$

em que:

- $Y_r(y/B) = \cos(\beta_r y/B) + i(V/\beta_r) \text{sen}(\beta_r y/B)$ , sendo  $\beta_r$  as raízes complexas de  $e^{i\beta_r} = [(\beta_r - V)/(\beta_r + V)]$  para movimentos simétricos da barragem, ou de  $e^{i\beta_r} = [(V - \beta_r)/(V + \beta_r)]$  para movimentos antisimétricos, com  $V = wqB$ ;
- $Z_s(z/H) = \cos(\eta_s z/H) + i(w/\eta_s) \text{sen}(\eta_s z/H)$ , sendo  $\eta_s$  as raízes complexas de  $e^{2i\eta_s} = [(W - \eta_s)/(W + \eta_s)]$ , com  $W = wqH$ ;
- $I_{rs} = \int_0^1 \int_0^1 \psi(\bar{y}, \bar{z}) Y_r(\bar{y}) Z_s(\bar{z}) d\bar{y} d\bar{z}$ , sendo  $\bar{y} = y/B$  e  $\bar{z} = z/H$ ;
- $\delta_{rs} = H \sqrt{(\beta_r/B)^2 + (\eta_s/H)^2 - (w/c)^2}$  ;  $A_r = \int_0^1 [Y_r(\bar{y})]^2 d\bar{y}$ , e  $B_s = \int_0^1 [Z_s(\bar{z})]^2 d\bar{z}$ .

No caso particular do movimento longitudinal do solo, considerando a barragem rígida e a aceleração harmónica do solo, de frequência  $\omega$  e amplitude  $\ddot{a}_x$ , não variando ao longo do comprimento da barragem, a solução da equação (4.9) transforma-se num caso particular da solução (4.10), com  $-\omega^2 A = \ddot{a}_x$  e  $\psi(\bar{y}, \bar{z}) = 1$ , reduzindo-se a:

$$\bar{p}(x, y, z) = \rho H \ddot{a}_x \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_{rs}}{\delta_{rs} A_r B_s} e^{(-\delta_{rs} \frac{x}{H})} Y_r \left( \frac{y}{B} \right) Z_s \left( \frac{z}{H} \right) \right] \quad (4.11)$$

em que  $J_{rs} = \int_0^1 \int_0^1 Y_r(\bar{y}) Z_s(\bar{z}) d\bar{y} d\bar{z}$ .

Complementarmente, considerando as margens da albufeira e o fundo totalmente rígidos, as expressões anteriores simplificam-se. Com efeito, sendo as ondas totalmente reflectidas ao embaterem nas fronteiras, então  $\alpha_r = 1$  resultando o coeficiente de amortecimento  $q = 0$ . Consequentemente, para as raízes  $\beta_r$  e  $\eta_s$  resultam valores reais e independentes da frequência, sendo dados por:

$$\begin{aligned} \beta_r &= r\pi & ; & \quad r = 0, 1, 2, \dots \\ \eta_s &= \frac{2s-1}{2} \pi & ; & \quad s = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Por outro lado, as funções  $Y_r$  e  $Z_s$  simplificam-se para:

$$Y_r \left( \frac{y}{B} \right) = \cos \left( \beta_r \frac{y}{B} \right) ; \quad Z_s \left( \frac{z}{H} \right) = \cos \left( \eta_s \frac{z}{H} \right)$$

e resultam os seguintes valores para  $A_r$  e  $B_s$ :

$$A_r = \begin{cases} 1 & ; r = 0 \\ 0.5 & ; r \neq 0 \end{cases} ; \quad B_s = 0.5$$

Nesta conformidade, considerando barragens com paramentos de montante verticais resultam para o integral  $J_{rs}$  os seguintes valores:

$$J_{rs} = \begin{cases} \frac{(-1)^{s+1}}{\eta_s} & ; r = 0 \\ 0 & ; r \neq 0 \end{cases} ; \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

obtendo-se para a pressão hidrodinâmica a expressão (4.12):

$$p'(x, z) = \bar{p}(x, z) e^{i\omega t} = 2\rho H \ddot{a}_x \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{\eta_s \delta_s} e^{\left(-\delta_s \frac{x}{H}\right)} \cos\left(\eta_s \frac{z}{H}\right) \right] e^{i\omega t} \quad (4.12)$$

$$\text{em que } \delta_s = H \sqrt{\left(\frac{\eta_s}{H}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}.$$

#### 4.2.2.2 Modelo de Trefftz-Mikhlin

Por ser independente da coordenada  $y$ , a expressão (4.12) é bidimensional (no plano vertical) e, por conseguinte, os resultados são independentes da relação comprimento/altura da barragem.

Para barragens com paramentos de montante não verticais, a amplitude da pressão hidrodinâmica, num ponto de coordenadas  $(x, z)$ , pode escrever-se na seguinte forma (4.13):

$$\bar{p}(x, z) = \rho H \ddot{a}_g C_p \quad (4.13)$$

sendo  $C_p$  o coeficiente da pressão hidrodinâmica, dado por (Avilés & Sánchez-Sesma, 1986),

$$C_p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{H} e^{-\lambda_i x} \cos(-\lambda_i z)$$

em que  $A_i$  é um coeficiente a ser determinado tendo em consideração a condição (4.14):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_s = -\rho \ddot{a}_g(t) \cos(\theta) \quad (4.14)$$

sendo  $\ddot{a}_g$  a aceleração horizontal do solo e  $\theta$  o ângulo entre a normal à face da barragem e a direcção  $x$ .

A equação (4.14) pode ser escrita na seguinte forma (4.15):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_s + \tan(\theta) \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_s = -\rho \ddot{a}_g(t) [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] = -\rho \ddot{a}_g(t) \quad (4.15)$$

Por outro lado, da equação (4.13) resultam:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho H \ddot{a}_g \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{H} [-\lambda_i e^{(-\lambda_i x)} \cos(-\lambda_i z)] \right\} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho H \ddot{a}_g \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{H} e^{(-\lambda_i x)} [\lambda_i \operatorname{sen}(-\lambda_i z)] \right\}\end{aligned}\quad (4.16)$$

Conseqüentemente, igualando as equações (4.15) e (4.16) obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \lambda_i e^{(-\lambda_i x)} [\cos(\lambda_i z) + \tan(\theta) \operatorname{sen}(\lambda_i z)] = 1$$

resultando, com  $f_i(x, z) = \lambda_i e^{(-\lambda_i x)} [\cos(\lambda_i z) + \tan(\theta) \operatorname{sen}(\lambda_i z)]$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x, z) = 1 \quad (4.17)$$

Da equação (4.17), cujo erro quadrático mínimo quando integrada ao longo do paramento de montante da barragem é garantido por:

$$\frac{\partial}{\partial A_j} \left\{ \int_s \left[ \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x, z) - 1 \right]^2 ds \right\} = 0 ; \quad j = 1, 2, \dots, \infty$$

resulta o seguinte sistema linear de equações algébricas:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_s f_i(x, z) f_j(x, z) ds = \int_s f_j(x, z) ds ; \quad j = 1, 2, \dots, \infty \quad (4.18)$$

ou ainda, na forma matricial,

$$[F_{ji}] \{A_i\} = \{G_j\} ; \quad j, i = 1, 2, \dots, \infty$$

com  $F_{ji} = F_{ij} = \int_s f_i(x, z) f_j(x, z) ds$  e  $G_j = \int_s f_j(x, z) ds$ .

Os parâmetros  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  são definidos por:

$$\lambda_i = \frac{2i-1}{2H} ; \quad \lambda_j = \sqrt{\left( \frac{2j-1}{2H} \pi \right)^2 - \left( \frac{\tilde{w}\pi}{2H} \right)^2}$$

traduzindo  $\tilde{w} = w/w_f$  a influência da frequência de excitação do movimento sísmico,  $w$ , e da frequência natural fundamental da albufera  $w_f = \pi c/(2H)$ , designando  $H$  a altura de água na albufera nas proximidades da barragem.

Considerando  $H_p$  a altura do paramento de montante da barragem, até ao início de uma hipotética inclinação ( $0 \leq H_p \leq H$ ), resultam (Avilés & Sánchez-Sesma, 1986):

$$\begin{aligned}
 F_{ji} = & \frac{\lambda_j \lambda_i}{2} \left\{ \delta_{ji} \left[ \frac{\text{sen}(2\lambda_j H_p)}{2\lambda_j} + H - H_p \right] + \right. \\
 & + (1 - \delta_{ji}) \left[ \frac{\text{sen}[(\lambda_j + \lambda_i) H_p]}{\lambda_j + \lambda_i} - \frac{\text{sen}[(\lambda_j - \lambda_i) H_p]}{\lambda_j - \lambda_i} \right] + \\
 & + \frac{\text{sec}(\theta)}{\lambda_j + \lambda_i} \{ [1 - 2 \cos(\theta)] \text{sen}[(\lambda_j + \lambda_i) H_p] - \\
 & - \tan(\theta) [ \cos[(\lambda_j + \lambda_i) H_p] - e^{-(\lambda_j + \lambda_i) H_p \tan(\theta)} ] \} + \\
 & + \frac{[\text{sec}^3(\theta) / (\lambda_j + \lambda_i)]}{(\lambda_j + \lambda_i)^2 \tan^2(\theta) + (\lambda_j - \lambda_i)^2} \times \\
 & \times [(\lambda_j^2 - \lambda_i^2) \text{sen}[(\lambda_j - \lambda_i) H_p] + (\lambda_j + \lambda_i)^2 L_{ji} ] \}; \\
 & j, i = 1, 2, \dots, \infty
 \end{aligned}$$

$$G_j = (-1)^{j+1} - [1 - \text{sec}(\theta)] \text{sen}(\lambda_j H_p); \quad j = 1, 2, \dots, \infty$$

em que  $L_{ji} = \tan(\theta) \{ \cos[(\lambda_j - \lambda_i) H_p] - e^{-(\lambda_j + \lambda_i) H_p \tan(\theta)} \}$  e  $\delta_{ji}$  é a função delta de Kronecker, dada por,

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1 & ; j = i \\ 0 & ; j \neq i \end{cases}$$

A solução do sistema de equações (4.18) é obtida por aproximação, considerando um número finito de termos, sendo, em geral, suficiente reter os primeiros 20 a 25 termos. O método directo de Gauss é perfeitamente adequado para a resolução do sistema de equações lineares resultante.

A amplitude da força hidrodinâmica resultante, por metro linear da barragem, obtém-se através de:

$$\bar{F}_d = \int_0^H \bar{p}(0, z) dz / m.l.$$

sendo este resultado frequentemente apresentado em termos do coeficiente da força hidrodinâmica  $C_f$ , que se obtém normalizando  $\bar{F}_d$  pela correspondente força hidrostática  $\bar{F}_h = \rho g H^2 / m.l.$ , ou seja,  $C_f = \bar{F}_d / \bar{F}_h$ .

De acordo com a hipótese de fluido linearmente compressível, a pressão hidrodinâmica varia com a frequência de oscilação: estará em fase com o movimento sísmico se a frequência for inferior à frequência fundamental da albufera ( $w < w_f$ ), e terá uma componente em fase e outra desfasada no caso contrário, isto é, se  $w > w_f$ .

Por último, importa assinalar que a pressão hidrodinâmica no paramento de montante cresce infinitamente para frequências do movimento harmónico iguais aos múltiplos ímpares da frequência da albufera.

Utilizando o método acabado de expor (método analítico de Trefftz-Mikhlin), apresentam-se na Figura 4.2 diagramas das pressões envolventes para movimentos oscilatórios com diferentes acelerações horizontais, considerando o fundo da albufera horizontal e o paramento de montante da barragem vertical.

#### 4.2.2.3 Modelo de Dean & Dalrymple

Admitindo que o escoamento associado à ocorrência de um sismo junto de uma barragem pode ser simulado pela actuação de um gerador de ondas do tipo pistão, poderá, em primeira aproximação, recorrer-se à teoria linear para a determinação das pressões hidrodinâmicas na face da barragem e das oscilações do nível da superfície livre da albufera.

O escoamento irrotacional de um fluido, necessariamente não-viscoso, num domínio de profundidade uniforme, sujeito a pequenas perturbações, é descrito com razoável aproximação pela função do potencial de velocidade, em conformidade com a equação  $\nabla^2 \phi = 0$ , cuja solução se pretende para uma condição de fronteira na superfície livre (à cota  $z = h_0 + \eta$ ) dada por (4.19):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (4.19)$$

definindo  $\eta(x, t)$  a elevação da superfície livre e  $h_0(x, y)$  a profundidade do meio em repouso.

Considerando uma barragem rígida de paramento vertical sujeita a um movimento horizontal harmónico dado por:

$$\zeta_w = \zeta_0 \sin(wt)$$

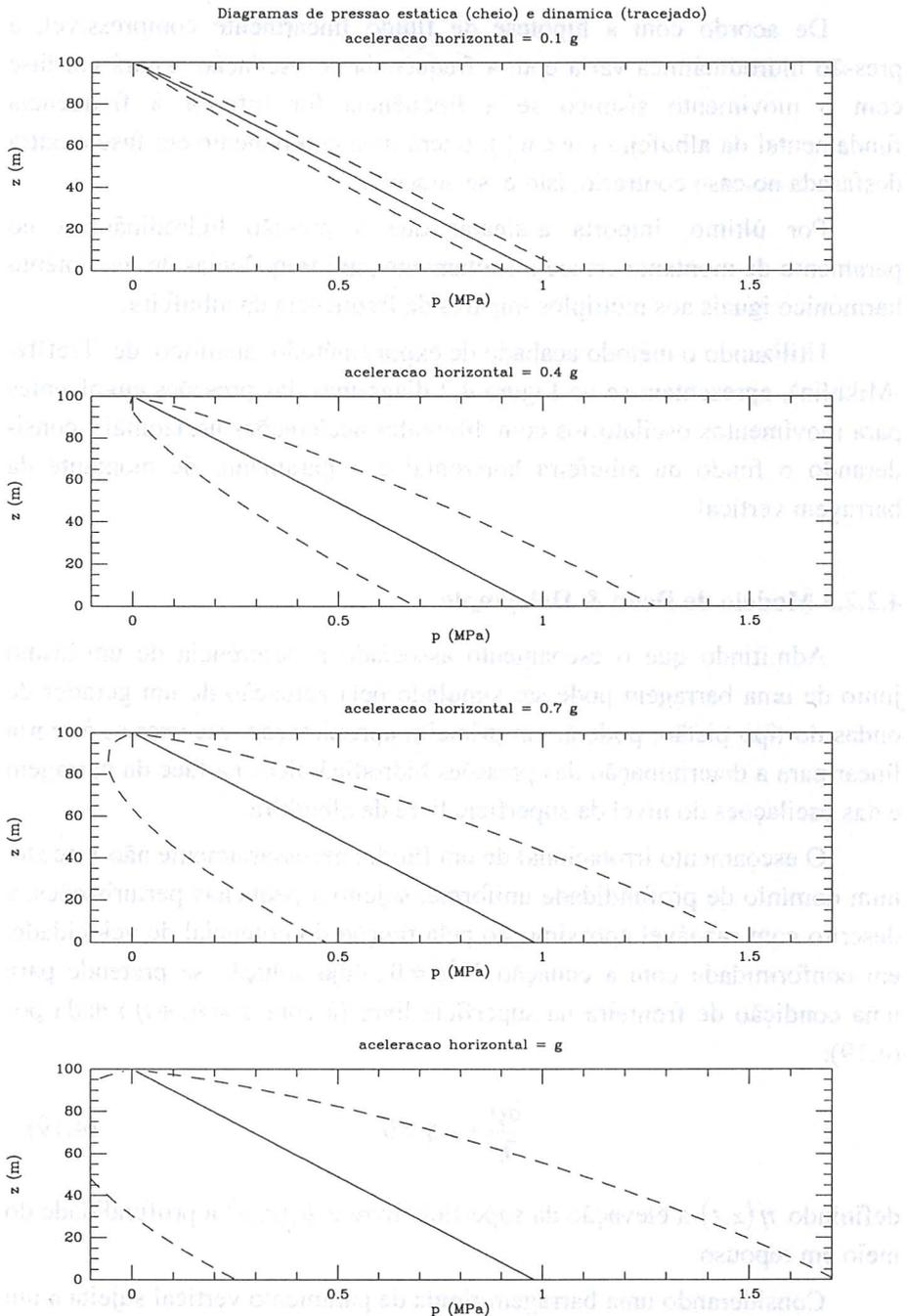


Figura 4.2 - Pressões envolvidas para movimentos oscilatórios com diferentes acelerações horizontais, considerando o fundo da albufera horizontal e o paramento de montante da barragem vertical (método analítico de Trefftz-Mikhlin).

a amplitude do movimento,  $\zeta_0$ , relaciona-se com a amplitude da aceleração do movimento harmónico através da relação:

$$\zeta_0 = -\frac{\ddot{a}_g}{\omega^2}$$

O potencial de velocidade do escoamento pode ser descrito pela soma da contribuição de uma onda progressiva e de várias ondas estacionárias, de acordo com (Dean & Dalrymple, 1984):

$$\phi = A_p \cosh(k_p z) \operatorname{sen}(k_p x - \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_s(n) \cos[k_s(n) z] e^{-k_s(n)x} \cos(\omega t)$$

em que os índices  $p$  e  $s$  designam, respectivamente, ondas progressivas e estacionárias.

Os valores de  $k_p$  e de  $k_s(n)$  relacionam-se com a frequência angular através da condição de radiação:

$$\omega^2 = g k_p \tanh(k_p h) ; \omega^2 = -g k_s(n) \tan[k_s(n)h]$$

e os coeficientes  $A_p$  e  $A_s(n)$  são determinados segundo a teoria de Sturm-Liouville:

$$A_p = -\frac{4\zeta_0 \omega h}{k_p h} \frac{\sinh(k_p h)}{\sinh(2k_p h) + 2k_p h}$$

$$A_s(n) = -\frac{4\zeta_0 \omega h}{k_s(n) h} \frac{\sinh(k_s(n) h)}{\sinh(2k_s(n) h) + 2k_s(n) h}$$

Tal como no potencial de velocidade, também a elevação da superfície livre apresenta uma contribuição da onda progressiva e outra de ondas estacionárias, sendo estes termos também designados por modos evanescentes:

$$\eta = \eta_p + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_s(n) \quad (4.20)$$

127

em que,

$$\eta_p = 2\zeta_0 \frac{\cosh(2k_p h) - 1}{\sinh(2k_p h) + 2k_p h} \cos(k_p x - \omega t)$$

$$\eta_s(n) = 2\zeta_0 \frac{1 - \cos[2k_s(n)h]}{\sin[2k_s(n)h] + 2k_s(n)h} e^{-k_s(n)x} \operatorname{sen}(\omega t)$$

sendo a elevação da superfície livre obtida, em qualquer ponto da albufera, a partir da condição de fronteira (4.19). Fazendo  $x = 0$  na equação (4.20) obtém-se a máxima elevação da superfície livre junto ao paramento de montante da barragem, a qual permitirá fixar a cota do respectivo coroamento. Por conseguinte, resulta:

$$\eta_{m\acute{a}x}(x=0) = 2\zeta_0 \left\{ \frac{\cosh(2k_p h) - 1}{\sinh(2k_p h) + 2k_p h} \cos(wt) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos[2k_s(n)h]}{\sin[2k_s(n)h] + 2k_s(n)h} \sin(wt) \right\}$$

O campo de pressões na albufera é obtido por linearização da equação de Bernoulli, vindo:

$$p(x, z, t) = \gamma(h - z) + 2\zeta_0 \gamma \left\{ \frac{\cosh(2k_p h) - 1}{\sinh(2k_p h) + 2k_p h} \frac{\cosh(k_p z)}{\cosh(k_p h)} \cos(k_p x - wt) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos[2k_s(n)h]}{\sin[2k_s(n)h] + 2k_s(n)h} \frac{\cos[k_s(n)z]}{\cos[k_s(n)h]} e^{-k_s(n)x} \sin(wt) \right\} \quad (4.21)$$

Com  $x = 0$  em (4.21) resulta o campo de pressões no paramento de montante da barragem, vindo:

$$p(0, z, t) = \gamma(h - z) + 2\zeta_0 \gamma \left\{ \frac{\cosh(2k_p h) - 1}{\sinh(2k_p h) + 2k_p h} \frac{\cosh(k_p z)}{\cosh(k_p h)} \cos(wt) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos[2k_s(n)h]}{\sin[2k_s(n)h] + 2k_s(n)h} \frac{\cos[k_s(n)z]}{\cos[k_s(n)h]} \sin(wt) \right\} \quad (4.22)$$

ou ainda em função da elevação da superfície livre [equação (4.20)]:

$$p(0, z, t) = \gamma(h - z) + \gamma \left\{ \frac{\cosh(k_p z)}{\cosh(k_p h)} \eta_p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[k_s(n)z]}{\cos[k_s(n)h]} \eta_s(n) \right\}$$

De acordo com esta metodologia, a obtenção dos campos de pressões no paramento de montante de uma barragem exige o recurso a um computador para o cálculo dos números de onda das componentes progressiva e

estacionária do escoamento oscilatório provocado pelo movimento sísmico, utilizando processos iterativos e com as seguintes soluções iniciais:  $k_{p_0} = w^2/g$  e  $k_{s_n} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ , ou seja, para  $k_s$ , com início em múltiplos de  $\pi$ , adotando uma precisão da ordem de  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Por outro lado, o número de modos evanescentes a considerar é função da precisão desejada. Assim, para uma tolerância de  $A_s(n)/A_s(1) \approx 10^{-6}$  torna-se necessário considerar cerca de 450 a 500 modos, naturalmente dependendo da frequência do movimento harmônico, aumentando o número de termos com o aumento da frequência do movimento.

Importa assinalar que este modelo assume o fluido como incompressível; por conseguinte, a pressão hidrodinâmica é invariável com a frequência; contudo, são acentuadas as diferenças na elevação da superfície livre, bem como a sua extensão ao longo da albufeira. Naturalmente, estas diferenças serão tanto mais acentuadas quanto mais elevadas forem as frequências de oscilação do movimento.

Apresentam-se na Figura 4.3 comparações de coeficientes da pressão hidrodinâmica sobre a barragem de *Pine Flat*, utilizando os modelos analíticos descritos (Treffitz-Mikhlin e Dean & Dalrymple) e os resultados de um modelo numérico descrito em Hung & Chen (1990), considerando a informação registada em El Centro de um sismo ocorrido em 15 de Outubro de 1979. Os resultados apresentados referem-se a um instante em que a componente vertical da aceleração é praticamente nula (Amado Mendes, 1998).

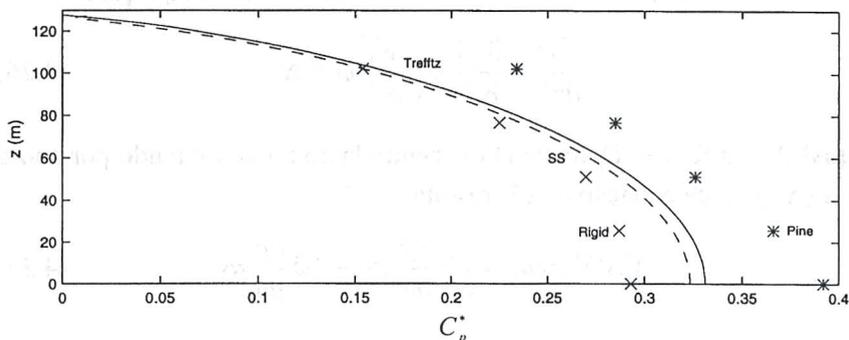


Figura 4.3 - Coeficientes da pressão hidrodinâmica obtidos pelos modelos analíticos de Treffitz-Mikhlin e de Dean & Dalrymple (linhas a cheio e tracejado, respectivamente) e os valores registados considerando a barragem rígida (*Rigid*) e flexível (*Pine*) (Amado Mendes, 1998).

### 4.2.3 Resolução da equação de Helmholtz - modelo numérico

Considerando o movimento do sistema barragem-albufera bidimensional (no plano vertical), a equação (4.9) escreve-se (equação de Helmholtz para a pressão):

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} + \left(\frac{w}{c}\right)^2 \bar{p} = 0 \quad (4.23)$$

Multiplicando a equação (4.23) por uma função arbitrária  $\bar{\varphi}(x, z)$  e integrando-a sobre todo o domínio em consideração (albufera), obtém-se a seguinte equação integral (4.24):

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} + \left(\frac{w}{c}\right)^2 \bar{p} \right] \bar{\varphi} \, dx dz = 0 \quad (4.24)$$

na qual  $\Omega$  representa o domínio.

Por aplicação do teorema de Green, a equação (4.24) reduz-se à forma:

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} + \left(\frac{w}{c}\right)^2 \bar{\varphi} \right] \bar{p} \, dx dz = \int_S \bar{p} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, ds - \int_S \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \, ds \quad (4.25)$$

em que  $S$  é a fronteira da albufera e  $n$  representa o vector normal à fronteira.

Se a função  $\bar{\varphi}$  for escolhida de modo a satisfazer a equação:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} + \left(\frac{w}{c}\right)^2 \bar{\varphi} = \Delta^i \quad (4.26)$$

na qual  $\Delta^i$  é a função Delta de Dirac centrada no ponto  $i$  e tendo por coordenadas  $(x_i, y_i)$ , da equação (4.25) resulta:

$$\iint_{\Omega} \Delta^i \bar{p} \, dx dz = \int_S \bar{p} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, ds - \int_S \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \, ds \quad (4.27)$$

Usando as propriedades da função  $\Delta^i$  (apenas diferente de zero em  $x = 0$  e com  $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^i(x) \, dx = 1$ , demonstra-se que a equação (4.27) se reduz a:

$$C_i(\bar{p})_i = \int_S \bar{p} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, ds - \int_S \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \, ds \quad (4.28)$$

com  $C_i = 1$ ,  $C_i = 0.5$  ou  $C_i = 0$ , consoante o ponto de coordenadas  $(x_i, y_i)$  pertence ao domínio (interior da albufeira), é um ponto de fronteira, ou se situa no exterior da albufeira.

Fazendo  $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \bar{\psi}$  e  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = \bar{q}$ , a equação (4.28) reduz-se a:

$$C_i (\bar{p})_i = \int_s \bar{p} \bar{\psi} ds - \int_s \bar{\varphi} \bar{q} ds \quad (4.29)$$

Para calcular os integrais da equação (4.29) divide-se a fronteira da albufeira em  $N$  elementos rectos e considera-se que os valores de  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  são constantes sobre cada elemento e iguais aos seus valores a meio do elemento. Nesta conformidade, a equação (4.29) toma a seguinte forma discretizada (4.30), para qualquer ponto  $i$  situado na fronteira:

$$-\frac{1}{2} (\bar{p})_i + \sum_{j=1}^N (\bar{p})_j \int_{s_j} \bar{\psi} ds = \sum_{j=1}^N (\bar{q})_j \int_{s_j} \bar{\varphi} ds \quad (4.30)$$

em que  $(\bar{p})_j$  e  $(\bar{q})_j$  são os valores destas variáveis sobre o elemento  $j$ , e  $S_j$  é o comprimento do elemento.

Fazendo  $\int \bar{\psi} ds = h_{ij}$  e  $\int \bar{\varphi} ds = G_{ij}$ , com  $H_{ij} = h_{ij} - 1/2$  se  $i = j$  e  $H_{ij} = h_{ij}$  se  $i \neq j$ , da equação (4.30) resulta:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} (\bar{p})_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} (\bar{q})_j$$

ou, na forma matricial,

$$[H] \{\bar{p}\} = [G] \{\bar{q}\} \quad (4.31)$$

na qual  $[H]$  é a matriz que contém os elementos  $H_{ij}$ ,  $[G]$  a matriz que contém os elementos  $G_{ij}$ ,  $\{\bar{p}\}$  um vector que contém os elementos conhecidos e desconhecidos de  $\bar{p}$ , e  $\{\bar{q}\}$  um vector que contém os elementos conhecidos e desconhecidos de  $\partial \bar{p} / \partial n$ .

Na equação anterior (4.31) assumem-se conhecidos  $n_1$  valores  $\bar{p}$  e  $n_2$  valores  $\bar{q}$ , com  $n_1 + n_2 = N_c$ ; por conseguinte, restam-nos  $N - N_c$  incógnitas. Reordenando as equações de modo a passar todos os valores desconhecidos para o 1º membro podemos escrever:

$$[A] \{x\} = \{b\}$$

sendo  $\{x\}$  o vector dos valores de  $\bar{p}$  e de  $\partial \bar{p} / \partial n$  desconhecidos na fronteira.

A equação (4.29) tem duas soluções linearmente independentes:  $J_0(kr)$  e  $Y_0(kr)$ , sendo  $J_0(kr)$  a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero e  $Y_0(kr)$  a função de Bessel de segunda espécie e ordem zero. Estas funções são definidas por:

$$J_0(kr) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [kr \operatorname{sen}(\theta)] d\theta$$

$$Y_0(kr) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} [kr \operatorname{sen}(\theta)] d\theta - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-kr \operatorname{senh}(\sigma)} d\sigma$$

nas quais  $k = w/c$  e  $r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .

Pode verificar-se que  $J_0(kr)$  é igual à unidade quando  $r$  se anula, enquanto que  $Y_0(kr)$  tende para infinito quando  $r$  tende para zero, dando, por conseguinte, a desejada singularidade da função Delta neste ponto.

Consequentemente, pode provar-se (Hanna & Humar, 1982) que uma solução possível da equação (4.26) é,

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4} Y_0(kr) \quad (4.32)$$

vindos, nestas condições, os elementos da matriz  $[H]$  dados por:

$$H_{ij} = \int_{s_j} \bar{\varphi} ds = \frac{1}{4 s_j} \int k Y_0'(kr) \cos(\theta) ds; \text{ para } i \neq j$$

$$= -\frac{1}{2} \quad ; \text{ para } i = j \quad (4.33)$$

sendo,

$$Y_0'(kr) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \operatorname{sen}(\theta) \cos [kr \operatorname{sen}(\theta)] d\theta + 2 \int_0^\infty \operatorname{senh}(\sigma) e^{-kr \operatorname{senh}(\sigma)} d\sigma \right\}$$

a derivada de  $Y_0(kr)$  e  $\theta$  o ângulo entre a normal ao elemento  $j$  e o raio vector  $r$ .

Os elementos da matriz  $[G]$  são dados por:

$$G_{ij} = \int_{s_j} \bar{\varphi} ds = \frac{1}{4 s_j} \int Y_0(kr) ds \quad ; \text{ para } i \neq j$$

$$= \frac{S_j}{2\pi} \left[ \log_e \left( \frac{k S_j}{2} \right) - 1 \right]; \text{ para } i = j \quad (4.34)$$

em que  $S_j$  representa o comprimento do elemento  $j$ .

### Condições de fronteira

Os métodos apresentados permitem avaliar as amplitudes das pressões hidrodinâmicas geradas em albufeiras finitas sobre as barragens, não havendo quaisquer restrições a impor quanto à forma do paramento de montante da barragem ou quanto à geometria do fundo da albufeira, admitindo as restantes hipóteses simplificativas oportunamente mencionadas e ainda o deslocamento do sistema barragem-albufeira como bidimensional (no plano vertical), o que, aliás, resulta da consideração de fronteiras rígidas.

As condições de fronteira a considerar para movimentos longitudinais estão representadas na Figura 4.4, em conformidade com a equação (4.14).

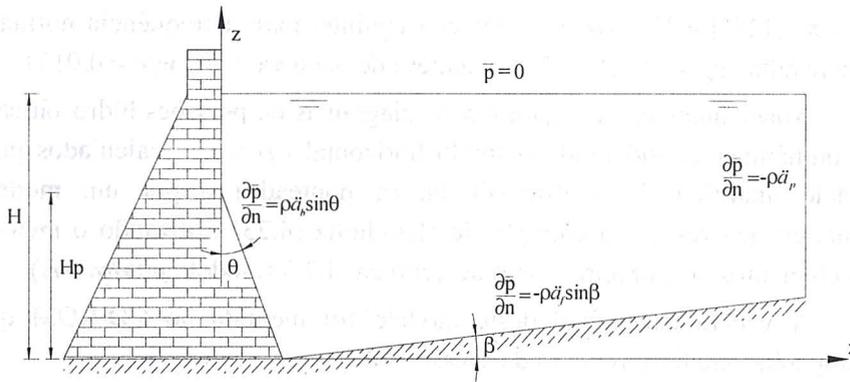


Figura 4.4 - Condições de fronteira.

Nas condições de fronteira apresentadas na Figura 4.4,  $\bar{p}$  representa a amplitude da pressão hidrodinâmica,  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  é a massa volúmica do fluido e  $\ddot{a}_b$ ,  $\ddot{a}_f$  e  $\ddot{a}_p$  são as amplitudes das acelerações harmónicas da barragem, do fundo e da fronteira de montante da albufeira, respectivamente;  $\theta$  representa o ângulo de uma face inclinada do paramento de montante da barragem com a vertical (eixo dos  $z$ ), com início à altura  $H_p$  (poderão existir no paramento de montante da barragem diversas faces com diferentes inclinações);  $\beta$  é o ângulo de uma superfície do fundo da albufeira com a horizontal (eixo dos  $x$ ) (o fundo poderá ser constituído por diversas superfícies com diferentes inclinações);  $H$  é a altura de água na albufeira junto ao paramento de montante da barragem.

Importa notar que as condições apresentadas são válidas considerando acelerações horizontais do fundo e das partículas líquidas.

#### 4.2.4 Aplicações

Seja um sistema com as características e condições de fronteira apresentadas na Figura 4.4, considerando os seguintes parâmetros:

- $H = 60 \text{ m}$  ;
- $H_p = 40 \text{ m}$  ;
- $L = 300 \text{ m}$  ;
- $\theta = 30^\circ$  ;  $\beta = 0^\circ$  e  $\beta = 5^\circ$  ;
- $\ddot{a}_b = \ddot{a}_f = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  ;  $\ddot{a}_p = 0$  ; e,
- Frequência de excitação,  $w = 18.85 \text{ rads}^{-1}$ .

Nestas condições, a frequência fundamental da albufera é  $w_f = \pi c / (2H) \approx 37.7 \text{ rad s}^{-1}$ ; por conseguinte, para a frequência normalizada resulta  $w_n = w / w_f \approx 0.5$  e o número de onda vale  $k = w / c \approx 0.0131$ .

Apresentam-se na Figura 4.5 os diagramas de pressões hidrostática e hidrodinâmica considerando o fundo horizontal ( $\beta = 0^\circ$ ), calculados pelo modelo analítico de Trefftz-Mikhlin (a ponteados) e por um modelo numérico que resolve a equação de Helmholtz (4.23) utilizando o método dos elementos de fronteira, como descrito em 4.2.3 (modelo *phidro\_sis*).

A versão executável deste modelo foi incluída no CD-ROM que acompanha este livro (código de acesso 4607).

Na Figura 4.6 estão representados os diagramas das pressões hidrostática (a cheio) e hidrodinâmica (a tracejado), este calculado pelo modelo *phidro\_sis*, considerando  $\beta = 5^\circ$ .

Apresentam-se na Figura 4.7 diversas comparações de coeficientes da pressão hidrodinâmica, considerando amplitudes das acelerações harmónicas verticais iguais a  $0.7g$  e diferentes ângulos de inclinação do fundo e do paramento de montante da barragem.

Na Figura 4.8 reproduzem-se os valores dos coeficientes da pressão hidrodinâmica apresentados na Figura 4.7, considerando agora as amplitudes das acelerações harmónicas dos movimentos iguais a  $g$ .

Na Figura 4.9 apresentam-se diagramas da pressão hidrodinâmica tendo o paramento de montante da barragem faces com ângulos de inclinação  $\theta = 30^\circ$  e  $\theta = 45^\circ$ , considerando para ambas as inclinações as alturas  $H_p = 20 \text{ m}$  e  $H_p = 40 \text{ m}$ .

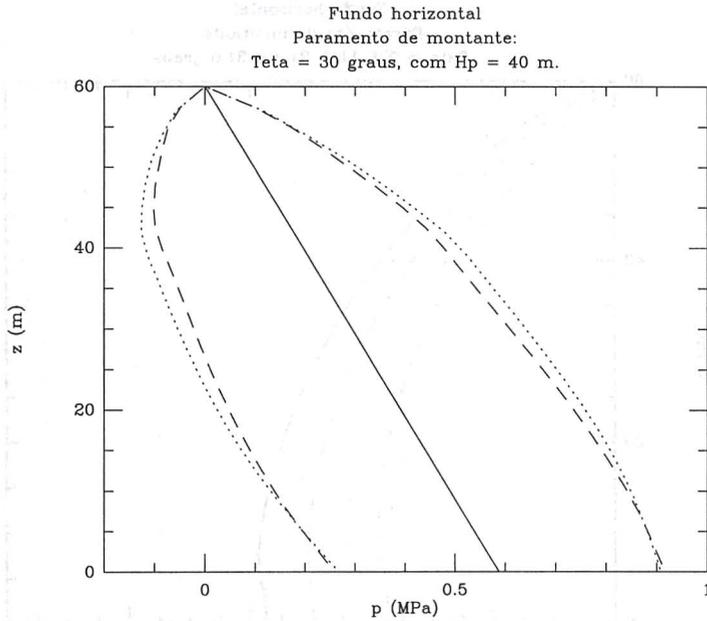


Figura 4.5 - Diagramas de pressões, considerando  $H_p = 40$  m,  $\theta = 30^\circ$  e  $\beta = 0^\circ$ . Pressões hidrodinâmicas: modelos analítico (.....) e numérico (---).

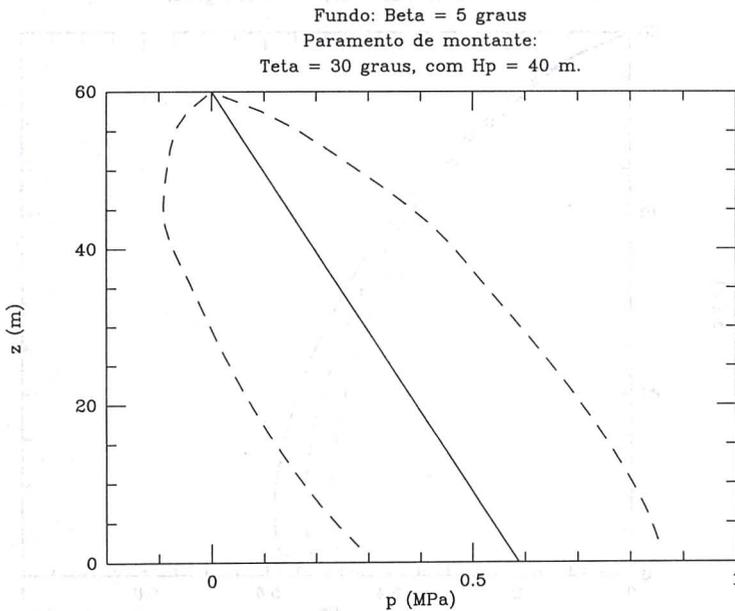


Figura 4.6 - Diagramas de pressões, considerando  $H_p = 40$  m,  $\theta = 30^\circ$  e  $\beta = 5^\circ$ . Pressões hidrostática (—) e hidrodinâmica [modelo numérico] (---).

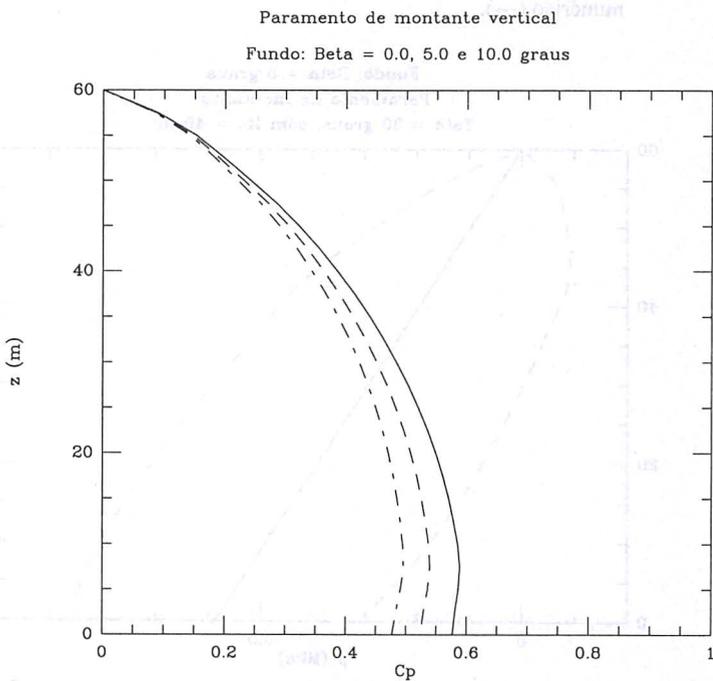
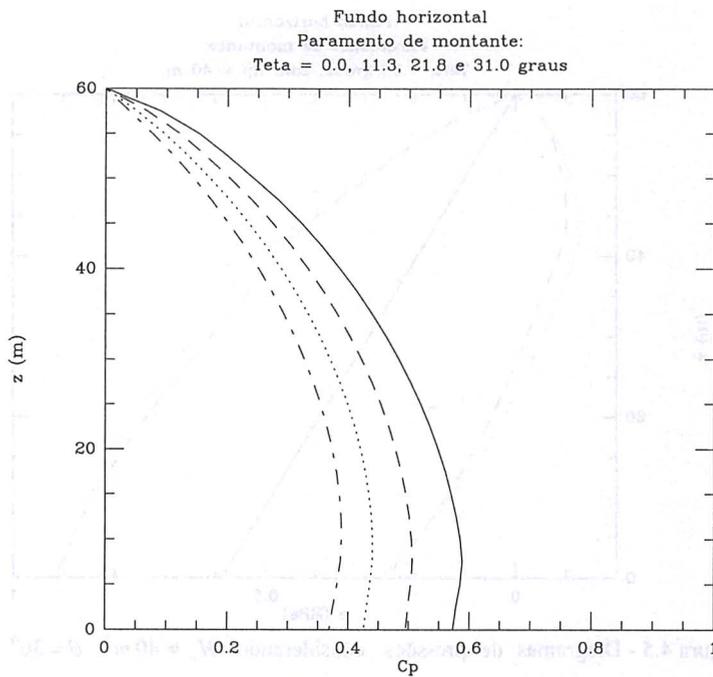


Figura 4.7 - Coeficientes da pressão hidrodinâmica (aceleração do movimento igual a  $0.7g$ ).

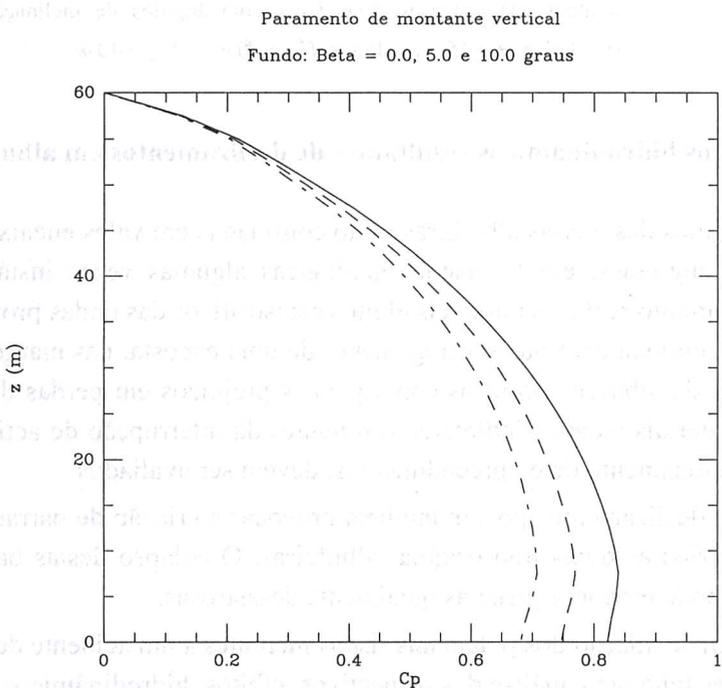
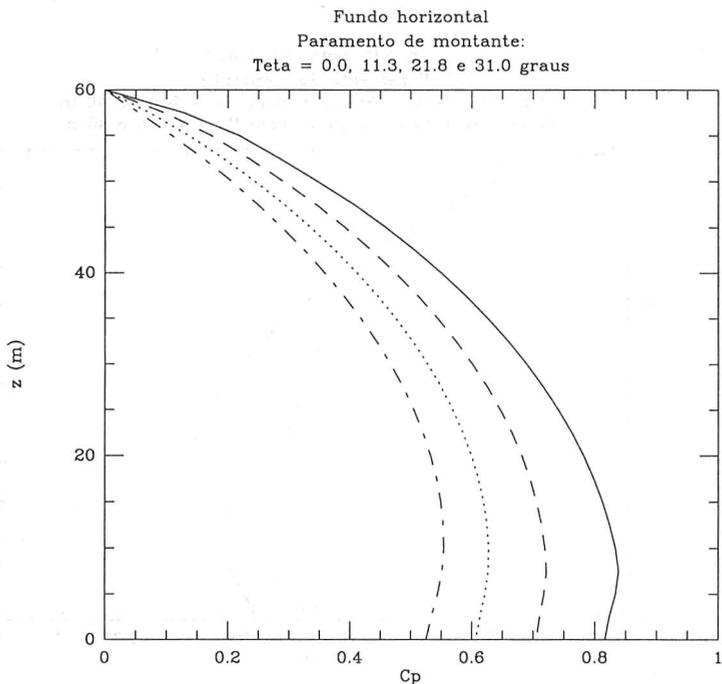


Figura 4.8 - Coeficientes da pressão hidrodinâmica (aceleração do movimento igual a g).

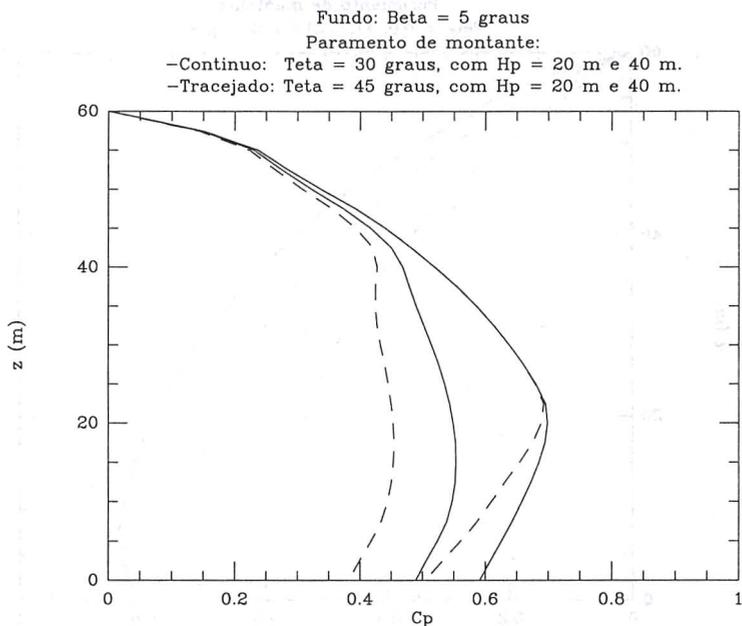


Figura 4.9 - Diagramas da pressão hidrodinâmica tendo o paramento de montante da barragem duas faces com ângulos de inclinação  $\theta = 30^\circ$  e  $\theta = 45^\circ$ , às alturas  $H_p = 20$  m e  $H_p = 40$  m.

### 4.3 Efeitos hidrodinâmicos resultantes de deslizamentos em albufeiras

Muitas das nossas albufeiras estão confinadas em vales encaixados de encostas íngremes, em formações geológicas algumas vezes instáveis. O risco é portanto real e os possíveis efeitos catastróficos das ondas provocadas pelo desmoronamento ou escorregamento de uma encosta, nas margens e na barragem da albufeira, com os consequentes prejuízos em perdas de vidas, danos materiais e danos indirectos resultantes da interrupção de actividades e do funcionamento de empreendimentos, devem ser avaliados.

Os deslizamentos podem também provocar a criação de barragens em leitos de rios as quais irão originar albufeiras. O colapso destas barragens naturais pode ter consequências igualmente desastrosas.

Para avaliação dos potenciais riscos inerentes a um acidente deste tipo deverá ser feita uma análise dos respectivos efeitos hidrodinâmicos. Trata-se, basicamente, de obter as características das ondas geradas pela entrada

de grandes massas de solo ou de rocha na albufeira e de analisar a respectiva propagação e acção sobre as margens e a barragem.

Detectadas as zonas de potencial instabilidade, há que analisar os respectivos efeitos hidrodinâmicos:

- nas margens da albufeira, por forma a definir zonas de segurança susceptíveis de serem atingidas pelas ondas geradas na albufeira; e,
- na barragem, por forma a avaliar a acção das ondas geradas tendo em vista o risco de galgamento e/ou de destruição da estrutura.

Os potenciais danos na estrutura da barragem dependem das características das ondas geradas e do tipo de barragem. Uma barragem em betão poderá ser galgada sem danos próprios; uma barragem de aterro será, quase por certo, destruída no caso de ser galgada. Em ambos os casos há que estimar a altura máxima que será atingida na barragem pelas ondas incidentes, a qual tenderá a ser superior ao valor da altura da onda imediatamente antes do impacto: a sobrelevação adicional dependerá das características do paramento de montante da barragem.

#### 4.3.1 Formulação

Pode demonstrar-se que um modelo matemático adequado para obter as características da onda resultante do deslizamento de um talude e a sua propagação no interior da albufeira é constituído por equações do tipo Boussinesq expandidas.

Estas equações podem obter-se por integração segundo a vertical das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos relativas ao escoamento tridimensional de um fluido viscoso e incompressível submetido à acção da gravidade, considerando as variáveis devidamente adimensionalizadas, com condições de fronteira apropriadas e tendo presente a hipótese fundamental da água pouco profunda. A duas dimensões no plano vertical, as equações de continuidade e de conservação da quantidade de movimento escrevem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (4.35)$$

nas quais  $\rho$  representa a massa volúmica do fluido;  $t$  o tempo;  $g$  a aceleração da gravidade;  $u$  e  $w$  as componentes horizontal e vertical da velocidade;  $p$  a pressão; e,  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zz}$  os elementos do tensor das tensões viscosas que valem, admitindo as hipóteses de Navier:

$$\tau_{xx} = 2\nu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \nu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zz} = 2\nu \frac{\partial w}{\partial z}$$

sendo  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido.

Sejam as notações apresentadas na Figura 4.10.

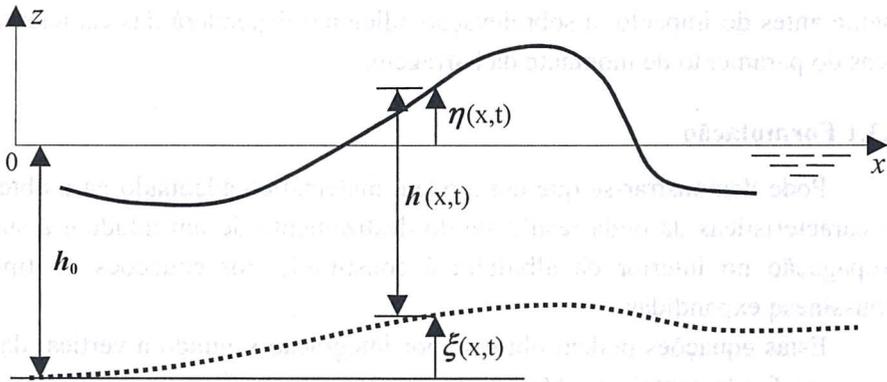


Figura 4.10 - Notações.

As condições de fronteira a considerar são:

A - Na superfície livre,  $z = \eta(x, t)$

Condição cinemática:  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$

Condições dinâmicas:  $\bullet - \tau_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xz} = \tau_s(\eta)$

(4.36)

$\bullet \frac{p}{\rho} + \tau_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_{zz} = 0$

B - No fundo,  $z = -h_0 + \xi(x, t)$

$$\text{Condição de impermeabilidade do fundo: } \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = w \quad (4.37)$$

$$\text{Condição dinâmica: } -\tau_{xx} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \tau_{xz} = \tau_f(\xi)$$

Efectuando a seguinte adimensionalização das variáveis:

$$\begin{aligned} x^* &= x/l ; z^* = z/h_0 ; t^* = \sqrt{gh_0} t/l = c_0 t ; \eta^* = \eta/a ; \xi^* = \xi/h_0 ; \\ u^* &= u/(a\sqrt{g/h_0}) = uh_0/(ac_0) ; w^* = wl/(ah_0\sqrt{g/h_0}) = wl/(ac_0) ; \\ p^* &= p/(\rho gh_0) ; \tau_{xx}^* = \tau_{xx}/(gh_0) ; \tau_{xz}^* = \tau_{xz}/(gh_0) ; \tau_{zz}^* = \tau_{zz}/(gh_0) \end{aligned}$$

definem-se os pequenos parâmetros  $\varepsilon = a/h_0$  e  $\sigma = h_0/l$  em que  $h_0$ ,  $l$  e  $a$  representam, respectivamente, uma profundidade, um comprimento e uma amplitude características e  $c_0$  representa a celeridade crítica ( $c_0 = \sqrt{gh_0}$ ).

Os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\sigma$  traduzem a importância relativa dos efeitos não-lineares e dos efeitos dispersivos, respectivamente, estando na base da definição dos domínios de validade das diferentes teorias de propagação das ondas em condições de água pouco profunda. Para o efeito, define-se um outro adimensional,  $U$ , como sendo a relação entre os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\sigma^2$ , ou seja (Ursell, 1953),

$$U = \frac{\varepsilon}{\sigma^2} = \frac{(a/h_0)}{(h_0/l)^2} = \frac{al^2}{h_0^3}$$

Assim, com base no valor deste adimensional, conhecido como número de Ursell, deverão ser utilizadas:

- a aproximação linear dispersiva se  $U \ll 1$ ;
- a aproximação não-linear dispersiva se  $U \approx 1$ ; e,
- a aproximação não-linear não-dispersiva se  $U \gg 1$ .

Com base na teoria das ondas em condições de água pouco profunda poderão deduzir-se estas diferentes aproximações. A forma de o fazer consiste em adimensionalizar o sistema de equações (1), proceder em

seguida a integrações das equações segundo a vertical, retendo sucessivamente os termos até à ordem de grandeza que se pretender.

Complementarmente, poderá admitir-se que a amplitude das ondas ( $\varepsilon = a/h_0$ ) é da mesma ordem de grandeza do pequeno parâmetro da água pouco profunda ( $\sigma^2$ ), ou seja, que  $U = O(1)$ , e ainda que  $\sigma \ll 1$  (*hipótese fundamental da água pouco profunda*), hipótese esta que admitiremos nesta obra.

Atendendo à adimensionalização de variáveis efectuada, as equações fundamentais e as condições de fronteira apresentam-se agora sob a forma seguinte.

### 1. Equações fundamentais

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \\ \varepsilon \sigma \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \varepsilon^2 \sigma u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 \sigma w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= \\ &= -\sigma \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \sigma \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \quad (4.38) \\ \varepsilon \sigma^2 \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \varepsilon^2 \sigma^2 u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 \sigma^2 w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= \\ &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \sigma \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} - 1 \end{aligned}$$

### 2. Condições de fronteira

A - Na superfície livre,  $z^* = \varepsilon \eta^*(x^*, t^*)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \varepsilon u^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} &= w^* \\ -\varepsilon \sigma \tau_{xx}^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + \tau_{xz}^* &= \tau_s^*(\varepsilon \eta^*) \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$p^* + \varepsilon \sigma \tau_{zx}^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} - \tau_{zz}^* = 0$$

B - No fundo,  $z^* = -1 + \xi^* (x^*, t^*)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} &= w^* \\ -\sigma \tau_{xx}^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \tau_{xz}^* &= \tau_f^* (-1 + \xi^*) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Nestas equações, os elementos adimensionais do tensor das tensões valem:

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^* &= 2 \left( \frac{\varepsilon \sigma}{R} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \\ \tau_{xz}^* = \tau_{zx}^* &= \frac{\varepsilon}{R} \left( \sigma^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \\ \tau_{zz}^* &= 2 \left( \frac{\varepsilon \sigma}{R} \right) \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \end{aligned} \quad (4.41)$$

sendo  $R$  o número de Reynolds, igual a  $h_0 c_0 / \nu$ .

Por comodidade de escrita os asteriscos são eliminados em todos os cálculos que se seguem.

### i) *Formulação da equação de continuidade*

A integração da primeira equação (4.38) entre o fundo  $(-1 + \xi)$  e a superfície livre  $(\varepsilon \eta)$  conduz a:

$$w|_{\varepsilon \eta} - w|_{-1+\xi} = - \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

ou ainda, tendo em consideração a regra de Leibniz:

$$w|_{\varepsilon \eta} - w|_{-1+\xi} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} u dz + \varepsilon u|_{\varepsilon \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u|_{-1+\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Tendo agora presentes a condição cinemática na superfície livre (em  $z = \varepsilon \eta$ ) e a condição de impermeabilidade do fundo obtém-se:

$$\frac{\partial(\eta - \xi/\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} u dz = 0 \quad (4.42)$$

Atendendo a que o valor médio da componente horizontal da velocidade,  $\bar{u}$ , é dado por:

$$\bar{u} = \frac{1}{1 - \xi + \varepsilon\eta} \int_{-1+\xi}^{\varepsilon\eta} u \, dz$$

resulta a seguinte expressão (4.43) para a equação de continuidade:

$$\frac{\partial(\eta - \xi/\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial[(1 - \xi + \varepsilon\eta)\bar{u}]}{\partial x} = 0 \quad (4.43)$$

*ii) Formulação da equação de conservação da quantidade de movimento*

Em todos os cálculos que se seguem admite-se que  $O(\varepsilon) = O(\sigma^2)$ , com  $\sigma \ll 1$  (*hipótese fundamental da água pouco profunda*).

A. Componente vertical da velocidade,  $w$

Admitindo vorticidade ( $\Omega$ ) baixa, seja,

$$\int_{-1+\xi}^{\varepsilon\eta} \Omega \, dz = O(\sigma^4)$$

podemos escrever:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sigma^2 \frac{\partial w}{\partial x} + O(\sigma^4) \quad (4.44)$$

Definindo  $U(x, t)$  a componente horizontal da velocidade à superfície ( $z = 0$ ) é então válida a relação:

$$u(x, z, t) = U(x, t) + O(\sigma^2) \quad (4.45)$$

Integrando por outro lado a primeira equação (4.38) entre o fundo ( $-1 + \xi$ ) e a cota  $z$ ,

$$w = - \int_{-1+\xi}^z \frac{\partial u}{\partial x} \, dz + w|_{z=-1+\xi} \quad (4.46)$$

obtém-se, juntamente com (4.44):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1+\xi}^z \frac{\partial u}{\partial x} dz + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + O(\sigma^4)$$

Substituindo no segundo membro desta expressão o valor dado em (4.45) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} = & -\sigma^2 (1 - \xi + z) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \\ & + 2\sigma^2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sigma^2 U \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left( \frac{\sigma^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} + O(\sigma^4) \end{aligned}$$

Integrando a equação anterior entre a cota  $z$  e a superfície  $(\varepsilon \eta)$ , obtém-se a seguinte expressão (4.47) para a velocidade:

$$\begin{aligned} u = & U - \sigma^2 \left[ \frac{z^2}{2} + z(1 - \xi) \right] \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \\ & - 2\sigma^2 z \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sigma^2 z U \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left( \frac{\sigma^2}{\varepsilon} \right) z \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} + O(\sigma^4) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Atendendo agora à definição de velocidade média podemos escrever (4.48):

$$\begin{aligned} \bar{u} = & U + \sigma^2 \frac{(1 - \xi)^2}{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \sigma^2 (1 - \xi) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \sigma^2 \frac{(1 - \xi)}{2} U \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \\ & - \sigma^2 \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} - \sigma^2 \frac{(1 - \xi)}{2\varepsilon} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} + O(\sigma^4, \varepsilon \sigma^2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Tendo presentes as equações (4.45) e (4.46) e considerando a condição de impermeabilidade do fundo, obtém-se para a componente vertical da velocidade ( $w$ ):

$$w = - \int_{-1+\xi}^z \frac{\partial U}{\partial x} dz + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} + O(\sigma^2)$$

donde,

$$w = -(1 - \xi + z) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} + O(\sigma^2) \quad (4.49)$$

## B. Pressão

Seja a terceira equação (4.38):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -1 - \varepsilon \sigma^2 \frac{\partial w}{\partial t} - \varepsilon^2 \sigma^2 u \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma^2 w \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Substituindo nesta expressão o valor de  $w$  [equação (4.49)] resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} = & -1 - \sigma^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \varepsilon \sigma^2 (1 - \xi + z) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \varepsilon \sigma^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \\ & - 2\varepsilon \sigma^2 U \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} + \sigma \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + O(\varepsilon^2 \sigma^2, \varepsilon \sigma^4) \end{aligned}$$

Integrando agora esta equação entre a cota  $z$  e a superfície ( $\varepsilon \eta$ ), considerando os valores de  $\tau_{xz}$  e de  $\tau_{zz}$  [equações (4.41)], obtém-se:

$$\begin{aligned} p(z) - p|_{\varepsilon \eta} = & -z + \varepsilon \eta - \sigma^2 z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \varepsilon \sigma^2 \eta \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \\ & - \varepsilon \sigma^2 z \left( 1 - \xi + \frac{z}{2} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \varepsilon \sigma^2 z \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \\ & - 2\varepsilon \sigma^2 z U \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} + \left( \frac{\varepsilon \sigma}{R} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \left[ \varepsilon \sigma \tau_{xz} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_{zz} \right]_{\varepsilon \eta} + \\ & + O(\varepsilon^2 \sigma^2, \varepsilon \sigma^4, \varepsilon \sigma^3 / R) \end{aligned} \quad (4.50)$$

### C. Integração da segunda equação (4.38)

A segunda equação (4.38) vai ser integrada entre o fundo ( $(-1 + \xi)$ ) e a superfície  $\varepsilon \eta$ , tendo presentes as condições cinemática nesta superfície e de impermeabilidade do fundo.

Assim, seja,

$$\varepsilon \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \sigma u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon^2 \sigma w \frac{\partial u}{\partial z} = -\sigma \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

146

Após a aplicação da regra de Leibniz, o 1º membro ( $M1x$ ) desta equação escreve-se:

$$\begin{aligned} M1x = & \varepsilon \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} u \, dz - u|_{\varepsilon \eta} \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_{-1+\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] + \\ & + \varepsilon^2 \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} u^2 \, dz - u|_{\varepsilon \eta}^2 \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} + u|_{-1+\xi}^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] + \\ & + \varepsilon^2 \sigma \left[ u|_{\varepsilon \eta} w|_{\varepsilon \eta} - u|_{-1+\xi} w|_{-1+\xi} \right] \end{aligned}$$

donde,  $M_{1x} = \varepsilon \sigma \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} u \, dz + \varepsilon^2 \sigma \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} u^2 \, dz + O(\varepsilon^2 \sigma^2, \varepsilon^3 \sigma)$ .

Em termos de valor médio da componente horizontal da velocidade obtém-se (4.51):

$$M_{1x} = \varepsilon \sigma [1 - \xi + \varepsilon \eta] \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \sigma [1 - \xi + \varepsilon \eta] u \frac{\partial u}{\partial x} + O(\varepsilon^2 \sigma^2, \varepsilon^3 \sigma) \quad (4.51)$$

De igual modo, o segundo membro da segunda equação (4.38) escreve-se:

$$M_{2x} = -\sigma \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} \frac{\partial p}{\partial x} \, dz + \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} \tau_{xx} \, dz - \tau_{xx} \Big|_{\varepsilon \eta} + \tau_{xx} \Big|_{-1+\xi} \right] + \tau_{xz} \Big|_{\varepsilon \eta} - \tau_{xz} \Big|_{-1+\xi}$$

ou seja,

$$M_{2x} = -\sigma \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} \frac{\partial p}{\partial x} \, dz + \sigma \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1+\xi}^{\varepsilon \eta} \tau_{xx} \, dz - \left( -\varepsilon \sigma \tau_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xz} \right) \Big|_{\varepsilon \eta} + \left( \sigma \tau_{xx} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \tau_{xz} \right) \Big|_{-1+\xi} \quad (4.52)$$

Derivando a equação (4.50), tendo presente a condição de fronteira para a pressão na superfície livre obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = & \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} - \sigma^2 z \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} + \varepsilon \sigma^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \varepsilon \sigma^2 \eta \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} + \\ & + \varepsilon \sigma^2 z \left( 1 - \xi + \frac{z}{2} \right) \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} - 2\varepsilon \sigma^2 z \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \\ & - \varepsilon \sigma^2 z \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial t} - 2\varepsilon \sigma^2 z \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\varepsilon \sigma^2 z \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} U + \\ & + \left( \frac{\varepsilon \sigma}{R} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + O(\varepsilon^2 \sigma^2, \varepsilon \sigma^4, \varepsilon \sigma^3 / R) \end{aligned}$$

Substituindo este valor de  $\partial p / \partial x$  na expressão (4.52) e tendo presentes o valor de  $\tau_{xx}$  dado por (4.41) e a equação (4.45) resulta a seguinte igualdade (4.53):

$$\begin{aligned}
M2x = & -\varepsilon \sigma (1 - \xi + \varepsilon \eta) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \sigma^2 \frac{\eta}{2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} \right) + \\
& + \sigma^3 \left[ (1 - \xi) \frac{1}{2} (1 - \xi + \varepsilon \eta) \right] \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} + \\
& + \varepsilon \sigma^3 \left[ (1 - \xi) \frac{1}{2} (1 - \xi)^2 + \frac{1}{6} (-1 + \xi)^3 \right] \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} - \\
& - \varepsilon \sigma^3 (-1 + \xi)^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \varepsilon \sigma^3 \frac{1}{2} (-1 + \xi)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \quad (4.53) \\
& - \varepsilon \sigma^3 (-1 + \xi)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \frac{\partial U}{\partial x} - \varepsilon \sigma^3 (-1 + \xi)^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} U + \\
& + \frac{\varepsilon \sigma^2}{R} (1 - \xi + \varepsilon \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_s(\varepsilon \eta) - \tau_f(-1 + \xi) + \\
& + O\left(\varepsilon^2 \sigma^2, \varepsilon \sigma^4, \frac{\varepsilon \sigma^3}{R}\right)
\end{aligned}$$

Em função da velocidade média a igualdade (4.53) escreve-se:

$$\begin{aligned}
M2x = & -\varepsilon \sigma (1 - \xi + \varepsilon \eta) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \sigma^2 \frac{\eta}{2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} \right) + \\
& + \sigma^3 \left[ (1 - \xi) \frac{1}{2} (1 - \xi + \varepsilon \eta) \right] \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} + \\
& + \varepsilon \sigma^3 \left[ (1 - \xi) \frac{1}{2} (1 - \xi)^2 + \frac{1}{6} (-1 + \xi)^3 \right] \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} - \\
& - \varepsilon \sigma^3 (-1 + \xi)^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} - \varepsilon \sigma^3 \frac{1}{2} (-1 + \xi)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \\
& - \varepsilon \sigma^3 (-1 + \xi)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \varepsilon \sigma^3 (-1 + \xi)^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} \bar{u} + \\
& + \frac{\varepsilon \sigma^2}{R} (1 - \xi + \varepsilon \eta) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \tau_s(\varepsilon \eta) - \tau_f(-1 + \xi) + \\
& + O\left(\varepsilon^2 \sigma^2, \varepsilon \sigma^4, \frac{\varepsilon \sigma^3}{R}\right)
\end{aligned}$$

Nesta conformidade, as equações de Boussinesq modificadas (equação de continuidade incluída), por forma a permitirem considerar: *i*) variações temporais do fundo; *ii*) tensões de atrito no fundo, e *iii*) tensões na superfície livre, escrevem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\eta - \xi/\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial[(1 - \xi + \varepsilon\eta)\bar{u}]}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \sigma^2 \frac{\eta}{2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} + \\
& + \sigma^2 \left[ \frac{(1 - \xi)}{2\varepsilon} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} - \frac{(1 - \xi)^2}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} + (1 - \xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \right. \\
& + \left. \frac{(1 - \xi)}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (1 - \xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (1 - \xi) \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} \bar{u} \right] - \\
& - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{[\tau_s(\varepsilon\eta) - \tau_f(-1 + \xi)]}{\varepsilon\sigma(1 - \xi + \varepsilon\eta)} = O\left(\varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon\sigma^4, \frac{\varepsilon\sigma^3}{R}\right)
\end{aligned} \quad (4.54)$$

Qualquer que seja o valor de  $\varepsilon$ , conservando apenas os termos de primeira ordem (ordem 1 em  $\sigma^2$ ) no desenvolvimento anterior (4.54) resultam as equações de Saint-Venant modificadas ou "Shallow water equations", já apresentadas no Capítulo 3.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\eta - \xi/\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial[(1 - \xi + \varepsilon\eta)\bar{u}]}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{[\tau_s(\varepsilon\eta) - \tau_f(-1 + \xi)]}{\varepsilon\sigma(1 - \xi + \varepsilon\eta)} = O(\sigma^2)
\end{aligned} \quad (4.55)$$

Em variáveis dimensionais, eliminando a barra sobre a variável  $u$  para simplificação de escrita, aquelas duas aproximações escrevem-se (com  $H = h_0$ ):

Ordem 2 em  $\sigma^2$  (Equações de Boussinesq expandidas)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} - \frac{(H - \xi)^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \\
& + \frac{H - \xi}{2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} + (H - \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{H - \xi}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \\
& + (H - \xi) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} + (H - \xi) u \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\
& - \frac{[\tau_s(\eta) - \tau_f(\xi)]}{h} = 0
\end{aligned} \quad (4.56)$$

Ordem 1 em  $\sigma^2$  (Equações de Saint-Venant expandidas)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{[\tau_s(\eta) - \tau_r(\xi)]}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

#### 4.3.2 Sistema de equações de Boussinesq: modelo numérico

Considerando o escoamento de um fluido viscoso sobre um fundo fixo e tensões à superfície desprezáveis, obtém-se em 2ª aproximação (ordem 2 em  $\sigma^2$ ) o seguinte sistema de equações simplificado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial(h+\xi)}{\partial x} - \frac{(H-\xi)^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \\ + (H-\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{H-\xi}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau(\xi)}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

#### Transformação das equações

Agrupando os termos que contêm derivadas em tempo de cada uma das variáveis  $u$  e  $v$ , podemos reescrever o sistema anterior (4.58) na seguinte forma equivalente (4.59):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial(h+\xi)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau(\xi)}{h} \\ u - \frac{(H-\xi)^2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (H-\xi) \frac{\partial(H-\xi)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \\ - \frac{H-\xi}{2} \frac{\partial^2(H-\xi)}{\partial x^2} u &= r \end{aligned} \quad (4.59)$$

Para obter a solução do sistema de equações de Boussinesq (4.55) (valores de  $h$  e  $u$  no instante  $t + \Delta t$ ) é utilizado o seguinte esquema numérico baseado no último sistema de três equações (4.59):

- 1- Previsão de  $h$  ( $h_p^{t+\Delta t}$ ), utilizando um esquema semi-implícito para a resolução da 1ª equação, considerando os valores conhecidos de  $h'$  e  $u'$  em todo o domínio.
- 2- Previsão de  $r$  ( $r_p^{t+\Delta t}$ ), por resolução da 2ª equação, considerando os valores de  $h^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta)h' + \theta h'^{t+\Delta t}$ ,  $u'$  e  $r'$ , conhecidos em todo o domínio.
- 3- Cálculo da velocidade  $u$  no instante  $t + \Delta t$  ( $u^{t+\Delta t}$ ), por resolução da 3ª equação, considerando o valor previsto  $r_p^{t+\Delta t}$ .
- 4- Cálculo da altura  $h$  no instante  $t + \Delta t$  ( $h^{t+\Delta t}$ ), considerando os valores de  $h'$  e  $u^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta)u' + \theta u'^{t+\Delta t}$  conhecidos em todo o domínio.
- 5- Cálculo da variável  $r$  no instante  $t + \Delta t$  ( $r^{t+\Delta t}$ ), considerando os valores de  $r'$ ,  $h^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta)h' + \theta h'^{t+\Delta t}$  e  $u^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta)u' + \theta u'^{t+\Delta t}$  conhecidos em todo o domínio.

### Método de diferenças finitas

Esquemáticamente as três equações do sistema (4.59) podem escrever-se na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 -\frac{u_i^n}{4\Delta x} h_{i-1}^{n+1} + \left[ \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \right] h_i^{n+1} + \frac{u_i^n}{4\Delta x} h_{i+1}^{n+1} &= \\
 &= \left[ \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \right] h_i^n - u_i^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_i^n \\
 h_i^{n+\theta} &= (1-\theta)h_i^n + \theta h_i^{n+1} \\
 r_i^{n+1} &= r_i^n - \left[ u_i^n \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_i^{n+\theta} - v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + \left( \frac{\tau}{h} \right)_i^n \right] \Delta t \\
 &\left[ -\frac{(H-\xi)^2}{3\Delta x^2} + \frac{(H-\xi)}{2\Delta x} \frac{\partial(H-\xi)}{\partial x} \right]_i u_{i-1}^{n+1} + \\
 &\quad + \left[ 1 + \frac{2(H-\xi)^2}{3\Delta x^2} - \frac{H-\xi}{2} \frac{\partial^2(H-\xi)}{\partial x^2} \right]_i u_i^{n+1} + \\
 &\quad + \left[ -\frac{(H-\xi)^2}{3\Delta x^2} - \frac{(H-\xi)}{2\Delta x} \frac{\partial(H-\xi)}{\partial x} \right]_i u_{i+1}^{n+1} = r_i^{n+1} \\
 u_i^{n+\theta} &= (1-\theta)u_i^n + \theta u_i^{n+1}
 \end{aligned}$$

Em cada ponto  $i$ , as derivadas  $\partial h/\partial x$ ,  $\partial u/\partial x$  e  $\partial(H - \xi)/\partial x$  são aproximadas através dos seguintes esquemas centrados:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x};$$

$$\left[\frac{\partial(H - \xi)}{\partial x}\right]_i = \frac{(H - \xi)_{i+1} - (H - \xi)_{i-1}}{2\Delta x}$$

e as segundas derivadas espaciais  $\partial^2 u/\partial x^2$  e  $\partial^2(H - \xi)/\partial x^2$  são estimadas através de:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2};$$

$$\left[\frac{\partial^2(H - \xi)}{\partial x^2}\right]_i = \frac{(H - \xi)_{i+1} - 2(H - \xi)_i + (H - \xi)_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

As derivadas temporais  $\partial h/\partial t$  e  $\partial r/\partial t$  são calculadas por:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i = \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t}; \quad \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_i = \frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\Delta t}$$

Os sistemas de equações resultantes (1ª e 3ª equações) são tridimensionais.

### *Método dos elementos finitos*

O método dos elementos finitos baseia-se na aproximação de funções contínuas, no presente caso profundidade e velocidade, definidas sobre cada um dos elementos em que é subdividido o domínio. Dado um elemento genérico  $\Delta^e$  considerem-se as funções  $h$  e  $u$  aproximadas dentro de cada elemento por:

$$h \approx \hat{h} = \sum_{i=1}^{n_e} N_i h_i; \quad u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^{n_e} N_i u_i$$

onde  $h_i$  e  $u_i$  representam os valores que as funções tomam nos nós dos elementos, sendo  $n_e$  o número de nós de cada elemento e  $N_i$  as funções de interpolação.

Aplicando o método dos resíduos pesados, constroem-se em primeiro lugar os resíduos  $R_j$  por substituição dos valores aproximados das variáveis, valores grafados com acento circunflexo nas seguintes equações (4.60):

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \hat{h} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \\
 R_2 &= \frac{\partial \hat{r}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + g \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right) - \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\hat{\tau}(\xi)}{\hat{h}} \\
 R_3 &= \hat{u} - \frac{(H - \xi)^2}{3} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \frac{(H - \xi)}{2} \frac{\partial^2 (H - \xi)}{\partial x^2} \hat{u} - \\
 &\quad - (H - \xi) \frac{\partial (H - \xi)}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \hat{r}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

No método dos resíduos pesados utilizado, método de Galerkin, os resíduos são ortogonalizados em relação a um conjunto de funções de ponderação que coincidem com as funções de interpolação, isto é,

$$\int_{\Delta^e} R_j W_j d\Delta^e = 0$$

em que  $W_j = N_i \delta\phi_i$ ;  $i = 1, \dots, n_e$ .

Aplicando o método de Galerkin ao resíduo  $R_1$  resultante da equação da continuidade obtém-se (4.61):

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta^e} R_1 W_1 d\Delta^e &= \int_{\Delta^e} R_1 N_i \delta\phi_i d\Delta^e \\
 &= \int_{\Delta^e} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right) N_i \delta\phi_i d\Delta^e \\
 &= \int_{\Delta^e} N_i \left[ \sum_{j=1}^{n_e} N_j \left( \frac{\partial h_j}{\partial t} \right) + \sum_{j=1}^{n_e} N_j u_j \sum_{k=1}^{n_e} \left( \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) h_k + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n_e} \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \sum_{k=1}^{n_e} N_k h_k \right] d\Delta^e = 0
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Traduzindo para a forma matricial o resultado expresso pela anterior equação (4.61) obtém-se (4.62):

$$[A] \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} + [B] \{h\} = 0 \tag{4.62}$$

com,

$$a_{i,j} = \int_{\Delta^e} N_i N_j d\Delta^e ; \quad i, j = 1, \dots, n_e$$

$$b_{i,j} = \int_{\Delta^e} N_i N_j u_j \frac{\partial N_k}{\partial x} d\Delta^e + \int_{\Delta^e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j N_k d\Delta^e ; \quad i, j, k = 1, \dots, n_e$$

A equação matricial (4.62) é resolvida da seguinte forma:

$$[A]' \left\{ \frac{h'^{+\Delta t} - h'}{\Delta t} \right\} + [B]' \{ \theta h'^{+\Delta t} + (1-\theta) h' \} = 0$$

donde,

$$\left( \frac{1}{\theta \Delta t} [A]' + [B]' \right) \{h\}'^{+\Delta t} = \frac{1}{\theta \Delta t} [A]' \{h\}' - \frac{1-\theta}{\theta} [B]' \{h\}'$$

com  $0.5 \leq \theta \leq 1$ .

A matriz resultante, embora não simétrica, é em geral muito esparsa, pelo que se recomenda um método de resolução do sistema de equações que tire partido desta característica.

A aplicação deste método aos resíduos  $R_2$  e  $R_3$  é em tudo análoga, importando apenas referir que as derivadas de 2ª ordem são reduzidas a derivadas de 1ª ordem recorrendo ao teorema de Green.

Reproduzem-se em seguida as equações adequadas para a propagação de ondas em domínios bidimensionais, no plano horizontal. Para o efeito, recorre-se às notações apresentadas na Figura 4.11.

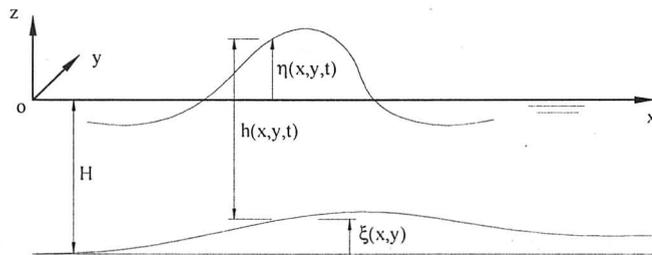


Figura 4.11 - Modelo de propagação de ondas em condições de água pouco profunda (2DH). Notações.

Tendo em consideração as notações apresentadas na Figura 4.11, o sistema de equações resultante, a duas dimensões no plano horizontal, escreve-se (Antunes do Carmo *et al.*, 1993):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial(h + \xi)}{\partial x} - \frac{(H - \xi)^2}{3} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \right) - \\ &- (H - \xi) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2(H - \xi)}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(H - \xi)}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(H - \xi)}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial(H - \xi)}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(h - \xi)}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\tau_{fx}}{h} = 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial(h + \xi)}{\partial y} - \frac{(H - \xi)^2}{3} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \right) - \\ &- (H - \xi) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2(H - \xi)}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(H - \xi)}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(H - \xi)}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial(H - \xi)}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(H - \xi)}{\partial y \partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\tau_{fy}}{h} = 0 \end{aligned}$$

em que  $h$  é a altura total do escoamento;  $H$  é a cota da superfície livre em repouso;  $(u, v)$  representa o campo de velocidades médias do escoamento;  $\xi$  representa as cotas do fundo;  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido, e  $\tau$  representa a tensão de atrito no fundo.

Assumindo as mesmas hipóteses que estão na base da dedução do sistema de equações (4.63), obtém-se a seguinte equação (4.64) para o cálculo do campo de pressões resultante sobre o paramento de montante da barragem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} p(z) &= g(\eta - z) + (\eta - z) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \\ &+ (\eta - z) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) \left( \frac{\eta - z}{2} + H - \xi \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

com  $\eta = h - H + \xi$ .

*Condições na fronteira perturbada (deslizamento de encosta)*

Para o cálculo da velocidade máxima de deslizamento de um talude,  $U_{max}$ , que se supõe ser atingida quando o centro de gravidade do volume sólido deslocado atinge a superfície livre da água, é utilizada uma aproximação obtida a partir de considerações energéticas globais.

Com efeito, durante o escorregamento, a perda de energia potencial inicial da massa sólida é equilibrada por um ganho em energia cinética daquela massa e pelo trabalho realizado para vencer a resistência ao corte e ao atrito, obtendo-se, após algumas simplificações, a seguinte equação (4.65) (Antunes do Carmo, 1990):

$$U_{max} = \sqrt{2gS \operatorname{sen}(\alpha - \phi)} \quad (4.65)$$

em que  $S$  representa a distância entre os centros de gravidade das massas sólidas nas posições inicial e final, após imobilização destas no interior da massa líquida;  $\alpha$  é o ângulo da superfície de deslizamento com a horizontal, e  $\phi$  é o ângulo de atrito médio ao longo da superfície de ruptura.

Entretanto, para ser atingida a velocidade máxima dada por (4.65), a partir do instante em que se inicia o movimento das massas de solo ou rocha até ao momento em que o volume deslocado se imobiliza no fundo da albufeira, durante um intervalo de tempo  $t_d$ , são admitidas *leis de velocidades* dos tipos das apresentadas na Figura 4.12, as quais são usualmente sugeridas na bibliografia da especialidade com base em relatos de ocorrências reais e observações em laboratório.

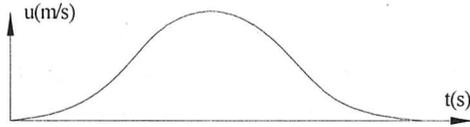
Conhecida a lei de velocidades  $U(t, t_d)$ , podemos calcular aproximadamente a sobrelevação da superfície livre,  $\eta(t, t_d)$ , resultante do movimento da fronteira perturbada por:

$$\eta(t, t_d) \approx \sqrt{\frac{h}{g}} U(t, t_d)$$

Porém, a superfície de deslizamento das massas sólidas faz um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Por conseguinte, teremos uma componente horizontal da velocidade,  $u(t, t_d)$ , dada por:

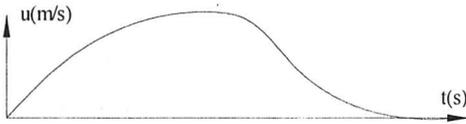
$$u(t, t_d) = U(t, t_d) \cos \alpha$$

e uma componente vertical  $v(t, t_d) = U(t, t_d) \operatorname{sen} \alpha$ .



Sinusoidal:

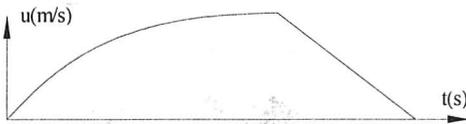
$$U(t, t_d) = \frac{1}{2} U_{\text{máx}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{t_d}\right) \right]; \quad 0 \leq t \leq t_d$$



Parabólica + Sinusoidal:

$$U(t, t_d) = 4 U_{\text{máx}} \left( 1 - \frac{t}{t_d} \right) \frac{t}{t_d}; \quad 0 \leq t \leq \frac{t_d}{2}$$

$$U(t, t_d) = \frac{1}{2} U_{\text{máx}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{t_d}\right) \right]; \quad \frac{t_d}{2} < t \leq t_d$$



Parabólica + Linear:

$$U(t, t_d) = 8 U_{\text{máx}} \left( 1 - \frac{2t}{3t_d} \right) \frac{t}{3t_d}; \quad 0 \leq t \leq \frac{3t_d}{4}$$

$$U(t, t_d) = 4 U_{\text{máx}} \frac{t_d - t}{t_d}; \quad \frac{3t_d}{4} < t \leq t_d$$

Figura 4.12 - Leis de velocidades de deslizamento das massas de solo e rocha da encosta de uma albufeira.

Em geral, faz-se o tratamento analítico deste problema sobrepondo linearmente os efeitos das duas componentes da velocidade  $[u(t, t_d)$  e  $v(t, t_d)]$  (Antunes do Carmo, 1990).

### 4.3.3 Aplicação

Seja o deslizamento de um talude situado na encosta de uma hipotética albufeira rectangular. O plano de deslizamento do talude é paralelo ao plano transversal que contém a barragem e situa-se sensivelmente a meio da albufeira. As características da albufeira e do talude, bem como a lei de velocidades admitida são as seguintes:

- Albufeira com  $915 \times 200$  m, tendo profundidades de 10 m numa extremidade (fronteira de montante) e de 50 m na extremidade oposta (barragem);
- $S = 40$  m ;  $\alpha = 30^\circ$  ;  $\phi = 25^\circ$  ; e,
- Lei de velocidades: Parabólica + Sinusoidal, com  $t_d = 10$  s .

Apresentam-se na Figura 4.13 perspectivas da superfície livre obtidas em diferentes instantes de propagação da onda gerada pela entrada do talude na massa líquida da albufeira. Para o efeito, implementou-se um modelo numérico de elementos finitos para a resolução do sistema de equações (4.63), com as condições na fronteira perturbada apresentadas na Figura 4.12.

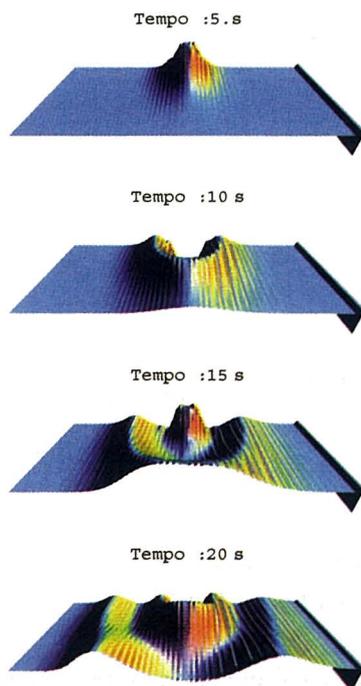


Figura 4.13 - Deslizamento da encosta de uma albufeira. Perspectivas da superfície livre obtidas em diferentes instantes.

Na Figura 4.14 apresentam-se os resultados obtidos em duas sondas numéricas localizadas junto à barragem. É evidente que, nestas condições, a onda ao atingir cerca de 9 m de altura não só galgaria a barragem como exerceria sobre esta um efeito dinâmico muito importante. O campo de pressões hidrodinâmicas poderia ser obtido recorrendo à equação (4.64).

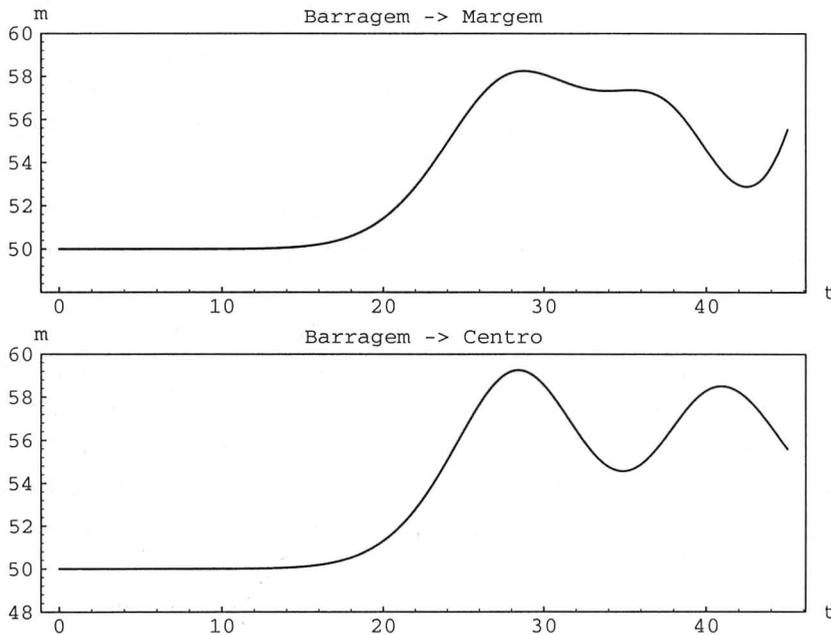


Figura 4.14 - Deslizamento da encosta de uma albufeira. Alturas de onda atingidas em sondas localizadas junto da barragem.

#### 4.4 Rupturas de barragens: causas, mecanismos e consequências

As causas de ruptura de uma barragem podem ser enquadradas em:

- causas naturais; e,
- causas provocadas pela acção humana.

Entre as causas naturais destacam-se, fundamentalmente:

- insuficiência da capacidade de vazão dos órgãos descarregadores face a uma afluência anormal, provocando o galgamento da barragem. Esta situação pode ocorrer em consequência do deslizamento de uma encosta da albufeira, por exemplo;

- alteração desfavorável da estabilidade ou resistência do corpo da barragem, das fundações e encontros e/ou ainda das vertentes da albufeira; e,
- actuação de um sismo intenso que possa dar origem a solicitações hidrodinâmicas excessivas e/ou provocar o escorregamento de taludes situados no fundo, nas margens, ou nas vertentes da albufeira.

Entre as causas provocadas por acção humana, são bem conhecidos os actos de sabotagem praticados na IIª Guerra Mundial. Outros ainda podem ter lugar, tais como erros de projecto, construções e/ou acções incorrectas na exploração da albufeira.

No que respeita à caracterização geométrica e temporal da ruptura, esta depende fundamentalmente do tipo de barragem (materiais utilizados, características dos órgãos descarregadores, etc.) e das causas que provocam a ruptura. Com efeito, para a mesma barragem de terra a ruptura será completamente diferente se a causa for a existência de erosão interna ou o galgamento provocado por uma onda gerada na albufeira motivada, por exemplo, por um deslizamento de encosta. A ruptura por erosão interna ("*piping*") provoca o aparecimento de uma brecha inicial localizada normalmente a cotas relativamente baixas e a formação de um ou mais canais internos.

À medida que um canal vai sendo erodido pelo escoamento a sua secção vai aumentando, bem como o caudal e o poder erosivo do escoamento. A evolução deste processo conduz normalmente ao colapso dos materiais envolventes, que numa primeira fase se vão mantendo por efeito de arco. Em geral, este processo é lento, podendo demorar várias horas. Pelo contrário, o galgamento do coroamento da barragem provoca o aparecimento de uma brecha sem carácter localizado que, em geral, evolui muito rapidamente. Apresentam-se na Figura 4.15 duas imagens obtidas num teste de ruptura de uma barragem de terra, bem elucidativas da rapidez com que este processo evolui. Com efeito, como se pode observar, estas duas imagens foram obtidas com um intervalo de três minutos.

A ruptura da barragem pode assim ser gradual ou "instantânea". Para rupturas praticamente instantâneas forma-se uma onda positiva de frente abrupta para jusante e uma onda negativa para montante. Para rupturas graduais a onda positiva que se propaga para jusante não apresenta uma frente abrupta mas sim gradual e a onda negativa para montante pode apresentar uma expressão insignificante ou mesmo não existir.

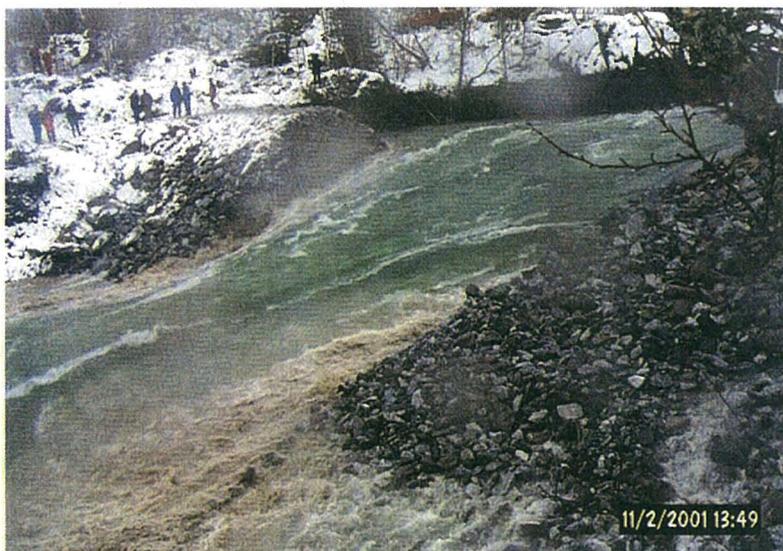


Figura 4.15 - Imagens obtidas num teste de ruptura de uma barragem de terra por galgamento (Franca, 2001).

A geometria da brecha criada pela ruptura pode apresentar aspectos bastante diversos, dependendo do tipo de barragem que rompe, podendo ou não ocupar a totalidade do vale. Tendo em consideração exemplos históricos de rupturas de barragens, estes parecem indicar a seguinte tendência:

- barragens de betão em arco: *rupturas praticamente instantâneas*
- barragens de aterro e em betão de gravidade: *rupturas graduais*

A ruptura de uma barragem pode ter diversas e graves consequências, entre as quais importa destacar:

- perdas de vidas humanas;
- danos materiais na barragem e nas zonas atingidas pela onda de cheia (habitações, unidades industriais, vias de comunicação, propriedades agrícolas, etc.);
- danos indirectos resultantes da interrupção das actividades produtivas nas zonas afectadas e do funcionamento da albufeira; e,
- traumatismos psicológicos e danos físicos nos sobreviventes.

É óbvio que os danos provocados são proporcionais à velocidade de propagação da frente de onda, à sua altura, à duração da inundação e ao caudal sólido transportado, sendo estes os parâmetros que importa conhecer para o estabelecimento de medidas preventivas e/ou eventualmente correctivas tanto em fase de planeamento, projecto e construção como de manutenção (comportamento da barragem, previsão de cheias, tratamento da bacia, planeamento urbanístico, etc.).

Soluções clássicas deste problema são ainda hoje importantes para análises expeditas e, sobretudo, para a calibração de modelos numéricos com base em equações que permitem hoje em dia modelar a ruptura de uma barragem em condições mais realistas.

Ritter propôs em 1892 a seguinte solução teórica (4.66) para a altura e velocidade instantâneas do escoamento em cada secção, correspondente à ruptura global e instantânea de uma barragem inserida num canal de secção rectangular, fundo horizontal e seco a jusante da barragem ( $h_c = 0$ ) e resistência nula:

162

$$h = \frac{1}{9g} \left( 2\sqrt{gh_1} - \frac{x}{t} \right)^2 ; \quad u = \frac{2}{3} \left( \sqrt{gh_1} + \frac{x}{t} \right) \quad (4.66)$$

em que  $h_1$  representa a profundidade em repouso na albufeira junto à barragem.

De acordo com este modelo, as frentes de montante e de jusante da onda movem-se com as velocidades  $c = -\sqrt{gh_1}$  e  $c = 2\sqrt{gh_1}$ , respectivamente. Na secção da barragem estabelece-se o regime crítico; por conse-

guinte, a profundidade e a velocidade são constantes e dadas por [com  $x = 0$  nas equações (4.66)]:

$$h = \frac{4}{9} h_1 ; u = \frac{2}{3} \sqrt{g h_1}$$

Considerando condições idênticas às do modelo de Ritter, mas com  $h_c \neq 0$ , Stoker obteve em 1957 uma solução baseada na decomposição do domínio em quatro regiões cujos limites são variáveis no tempo (Figura 4.16).

De acordo com o modelo de Stoker, aquelas quatro regiões são assim identificadas:

- Região I - zona não perturbada, com velocidade nula e profundidade  $h = h_1$ ;
- Região II - é válida a solução de Ritter;
- Região III - velocidade e profundidade dadas por  $u_2$  e  $h_2$ ; e,
- Região IV - zona não perturbada, com velocidade nula e profundidade  $h = h_0$ .

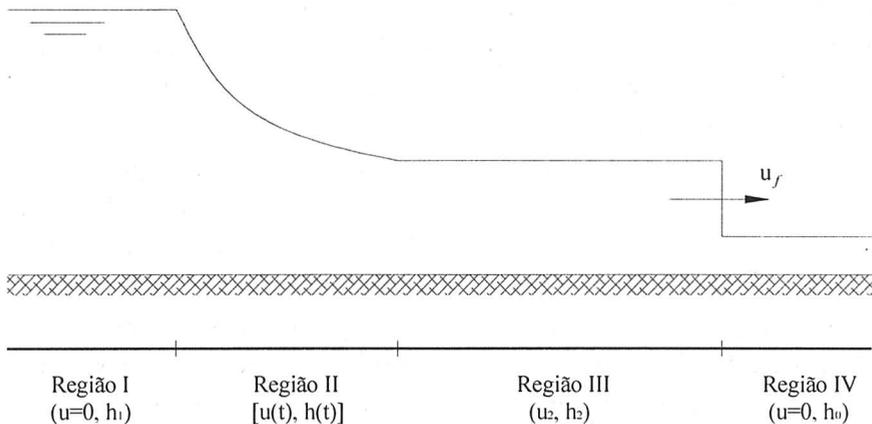


Figura 4.16 - Ruptura de uma barragem. Modelo de Stoker.

Para o cálculo da velocidade  $u_2$  e da profundidade  $h_2$ , Stoker propõe as seguintes relações (4.67), dependentes da velocidade da frente da onda que evolui para jusante,  $u_f$ :

$$u_2 = u_f - \frac{g h_0}{4 u_f} \left( 1 + \sqrt{1 + 8 \frac{u_f^2}{g h_0}} \right); \quad h_2 = \frac{h_0}{2} \left( \sqrt{1 + 8 \frac{u_f^2}{g h_0}} - 1 \right); \quad (4.67)$$

$$2 \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = 2 \sqrt{\frac{h_2}{h_0}} + \frac{u_2}{\sqrt{g h_0}}$$

O conjunto das três equações (4.67) permite assim calcular as três incógnitas:  $u_2$ ,  $h_2$  e  $u_f$ .

#### 4.4.1 Tipos de ruptura

O tipo de ruptura constitui um dos parâmetros principais na caracterização do processo de formação da cheia provocada pela ruptura de uma barragem. No que respeita à sua caracterização geométrica e temporal, o tipo de ruptura depende tanto das causas que a provocam, como, e fundamentalmente, do tipo de barragem, sendo de prever:

- ruptura total e rápida (ou *instantânea*) em barragens tipo arco;
- ruptura parcial e usualmente rápida em barragens de gravidade; e,
- ruptura parcial e lenta (ou gradual) em barragens de aterro.

Assim, o hidrograma de cheia efluente de uma barragem em ruptura é influenciado pelo grau de ruptura, ou seja, pelas dimensões da brecha e pelo tempo de ruptura. No que respeita a este último, admite-se, em geral, que o caudal máximo correspondente a uma ruptura de tipo instantânea é aproximadamente o dobro do correspondente a uma ruptura gradual.

Nos modelos de propagação da cheia provocada pela ruptura de uma barragem é necessário definir algumas características da brecha para a caracterização do hidrograma efluente. Estas são, usualmente, a geometria da brecha, a sua dimensão final e o tempo necessário para a sua formação – tempo de ruptura. Os modelos numéricos que incluem a caracterização dinâmica da brecha necessitam que o utilizador especifique a largura, a forma final e o tempo de ruptura, sendo esta informação usualmente obtida de rupturas históricas (protótipo) ou de resultados experimentais (modelação física).

A aplicação destes dados em modelação numérica deverá, contudo, ter em consideração o bom senso e, nomeadamente, as causas da ruptura, o tipo de barragem, as propriedades do material, a altura da barragem, o nível da albufeira, as características dos órgãos de descarga e ainda quaisquer

outras características particulares que possam influenciar a formação da brecha. Das três características da brecha: geometria, dimensão e tempo de ruptura, a primeira é a menos importante, sendo analisada em seguida. Como informação genérica, verifica-se que o tempo de ruptura se torna menos significativo à medida que o volume da albufera aumenta. No caso de se considerar, em vez de uma ruptura total e praticamente instantânea, a formação gradual de uma brecha rectangular, esta poderá ser modelada através de uma equação do tipo (4.68):

$$Q_b = C_v B_b \sqrt{2g} (H_m - H_b)^{1.5} \quad (4.68)$$

em que  $C_v = C_1 C_2 C_3$ , com  $C_1 \approx 0.387$ , é o coeficiente de vazão para o regime crítico;

$$C_2 = 1.0 + 0.07546 \left( \frac{Q^2}{B^2 (H_m - H_{bf})^2 (H_m - H_b)} \right)$$

é o coeficiente de correcção das velocidades de aproximação; e,

$$C_3 = \begin{cases} 1 & ; \text{ se } F_s \leq 0.67 \\ 1 - 27.8 (F_s - 0.67)^3 & ; \text{ se } F_s > 0.67 \end{cases}$$

é o coeficiente de submergência, sendo o factor de submergência dado por,

$$F_s = \frac{H_j - H_b}{H_m - H_b}$$

A Figura 4.17 mostra um instante da formação de uma brecha e o significado das respectivas notações. Os valores de  $H_b$  e  $B_b$  são obtidos como se segue:

- antes de ser atingida a cota de ruptura,  $H_{rup}$  (dado):  $H_b = H_{bar}$  e  $B_b = 0$
- uma vez atingida a cota de ruptura e enquanto se verificar a condição  $t - t_{ri} < t_{rup}$ :

$$H_b = H_{bar} - (H_{bar} - H_b) \frac{t - t_{ri}}{t_{rup}} \text{ e } B_b = B_{bf} \frac{t - t_{ri}}{t_{rup}}$$

- ao verificar-se a condição  $t - t_{ri} \geq t_{rup}$  :  $H_b = H_{bf}$  e  $B_b = B_{bf}$

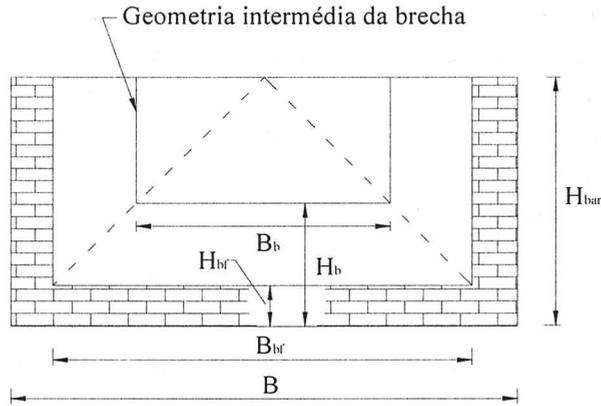


Figura 4.17 - Ruptura de uma barragem. Formação gradual de uma brecha rectangular.

Assim, nas expressões anteriores,  $H_{bar}$  (m) representa a altura da barragem,  $H_m$  (m) é a altura da água a montante,  $H_j$  (m) é a altura da água a jusante,  $B$  (m) é a largura da barragem,  $B_b$  (m) é a largura da brecha no instante de cálculo,  $H_b$  (m) é a altura da soleira da brecha no instante de cálculo,  $B_{bf}$  (m) é a largura final da brecha,  $H_{bf}$  (m) é a altura final da brecha,  $t_{ri}$  (s) é o instante inicial da ruptura,  $t_{rup}$  (s) é a duração da ruptura e  $t$  (s) é o instante de cálculo.

De igual modo, o caudal escoado através de um descarregador de superfície, localizado fora do local de formação da brecha, é calculado por (4.69):

$$Q_{desc} = C_d B_{desc} \sqrt{2g} (H_m - H_{desc})^{1.5}, \text{ com } C_d \approx 0.5 \text{ se } H_m > H_{desc} \quad (4.69)$$

166

sendo o restante caudal escoado através do coroamento da barragem dado por (4.70):

$$Q_{cor} = C_c (B - B_{desc} - B_b) \sqrt{2g} (H_m - H_{bar})^{1.5} \quad (4.70)$$

com  $C_c \approx 0.39$  se  $H_m > H_{bar}$ .

Analisa-se em seguida a capacidade das equações de Saint-Venant [equações (3.14) e (3.18)], resolvidas com recurso à extensão TVD do método de MacCormack, para reproduzir as condições do escoamento resultantes da ruptura de uma barragem [formação e propagação das ondas positiva (onda de cheia) e negativa]. Como condição inicial na secção da barragem (condição de fronteira interna) são considerados os valores da profundidade e da velocidade dados por (4.71):

$$h_b = h_c + \frac{4}{9}(h_1 - h_c); \quad u_b = \frac{2}{3}\sqrt{g(h_1 - h_c)} \quad (4.71)$$

#### 4.4.2 Modelo numérico

Mostra-se em seguida que o esquema numérico conservativo descrito na secção 3.9, com os principais subprogramas apresentados nos ANEXOS I e II (sequências de previsão, de correcção e extensão TVD do esquema de MacCormack), é adequado e suficientemente robusto para a resolução de problemas que envolvem descontinuidades internas do tipo ruptura de uma barragem, permitindo obter soluções de boa qualidade, mesmo em circunstâncias que desafiam algumas das hipóteses básicas das equações.

Sublinha-se ainda a extensão deste modelo a duas dimensões no plano horizontal (modelo 2DH), bem como os exemplos de aplicação apresentados em Bento Franco (1996) e em Betâmio de Almeida *et al.* (2003).

#### 4.4.3 Aplicações do modelo 1DH

1. Seja uma hipotética barragem localizada a 3 000 m da origem de um curso de água de secção rectangular, com 7 500 m de comprimento por 30 m de largura. A albufeira tem uma profundidade  $h_1 = 60$  m e o leito do curso de água a jusante da barragem é horizontal e tem uma profundidade inicial  $h_0 = 3$  m. Considera-se a rugosidade nula ( $n_k = 0$ ) e simulam-se duas situações de albufeiras com diferentes larguras ( $B_1 = 30$  m e  $B_2 = 100$  m).

Ambas as situações são simuladas utilizando os incrementos espacial e temporal de  $\Delta x = 3.0$  m e  $\Delta t = 0.10$  s, respectivamente.

Considerando uma ruptura total e praticamente instantânea, e sem alimentação na fronteira de montante da albufeira, apresentam-se nas Figuras 4.18 e 4.19 configurações da superfície livre aos 1, 2 e 3 minutos após o início da ruptura.

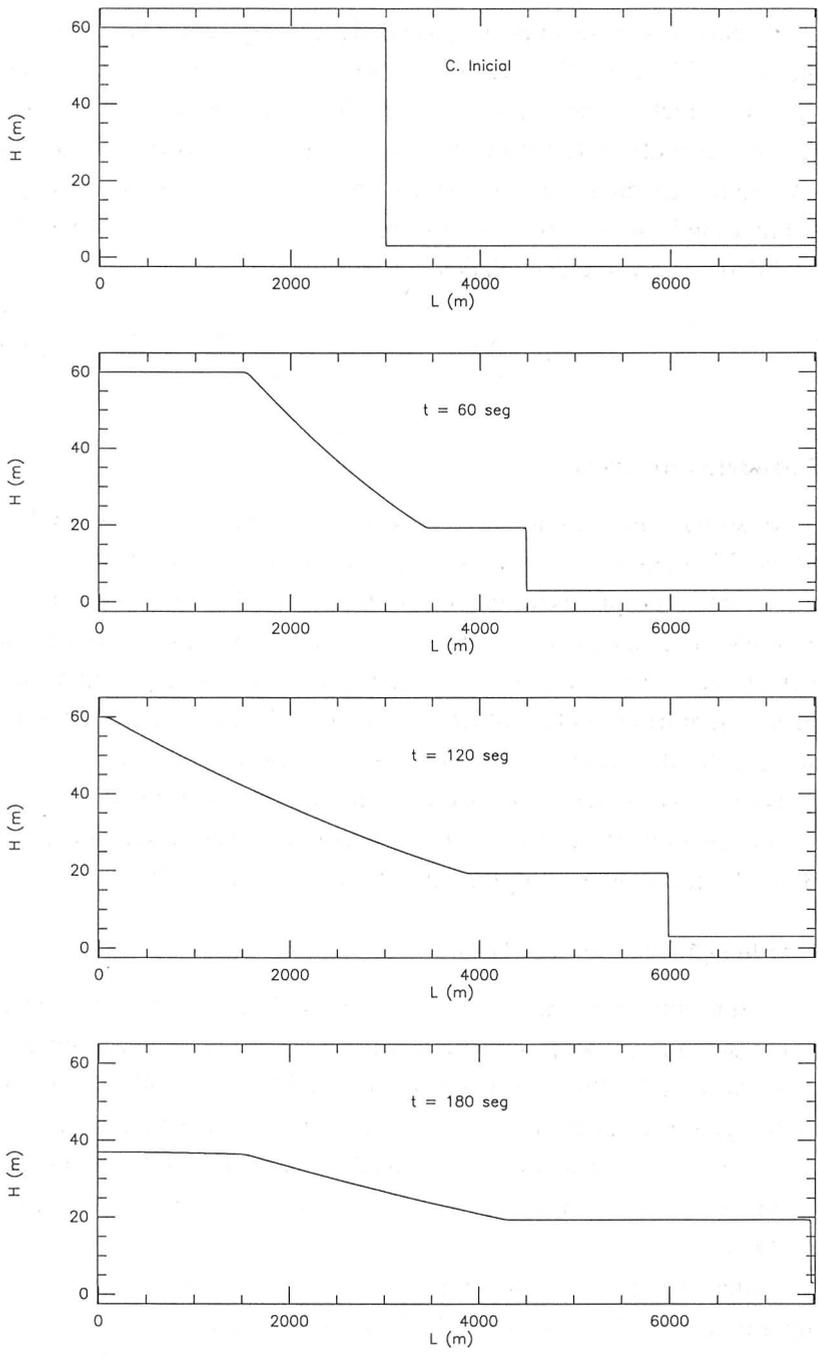


Figura 4.18 - Ruptura total e praticamente instantânea de uma barragem. Barragem e albufeira inseridas num curso de água de secção rectangular constante, com  $B = 30$  m.

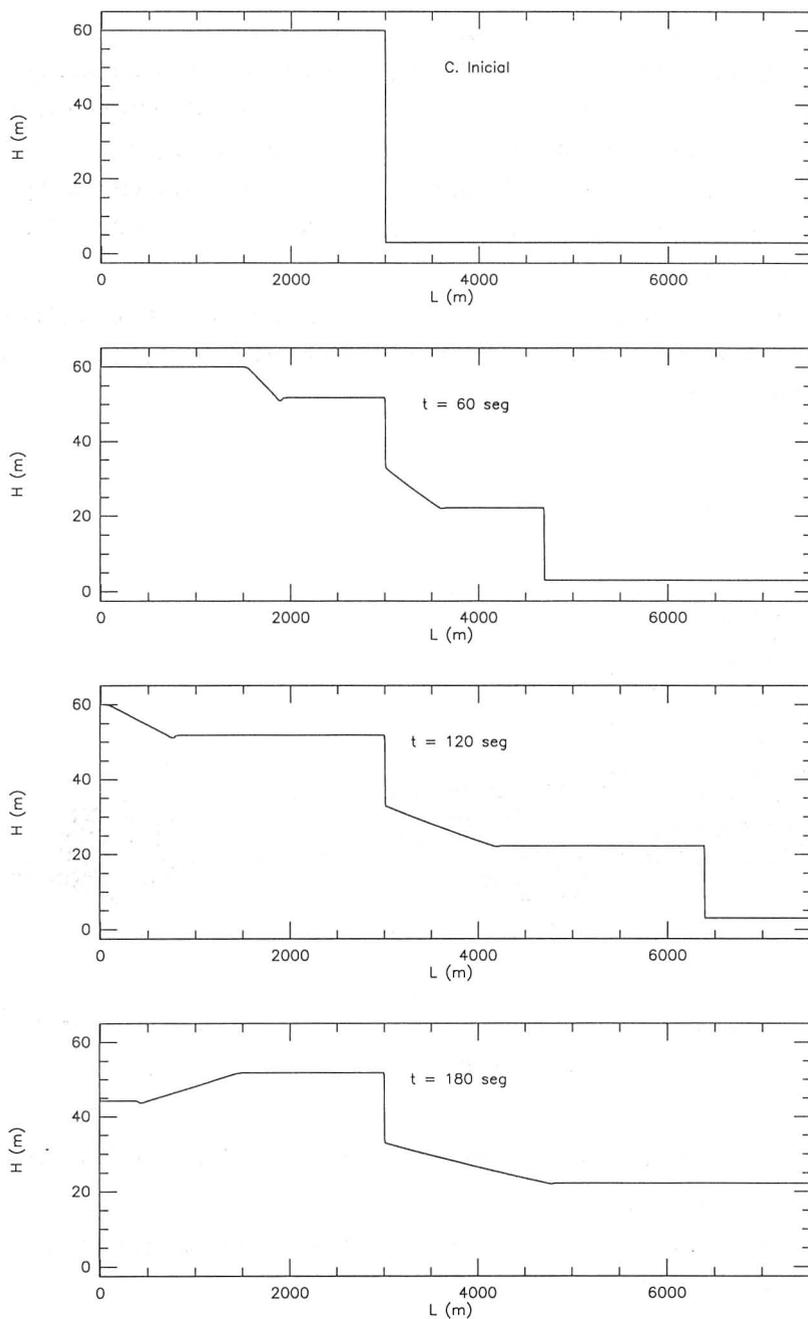


Figura 4.19 - Ruptura total e praticamente instantânea de uma barragem. Sistema Albufeira - Barragem - Rio, tendo a albufeira uma largura de 100 m e o curso de água a jusante da barragem uma secção rectangular constante, com  $B = 30$  m.

2. Aplicou-se o modelo traduzido pelas equações (3.14) e (3.18), resolvidas pelo método clássico de MacCormack, à ruptura da barragem da Aguieira no troço Aguieira – Penacova, numa extensão de aproximadamente 20 325 m. A montante da barragem foi analisado um troço que incluiu a albufeira numa extensão de 21 000 m. A ruptura da barragem da Aguieira constituiu assim uma condição de fronteira interna, situada sensivelmente a meio do domínio simulado.

Apresenta-se na Figura 4.20 um corte longitudinal do complexo que inclui as barragens da Aguieira e da Raiva, esta situada a jusante e a aproximadamente 10 km da primeira.

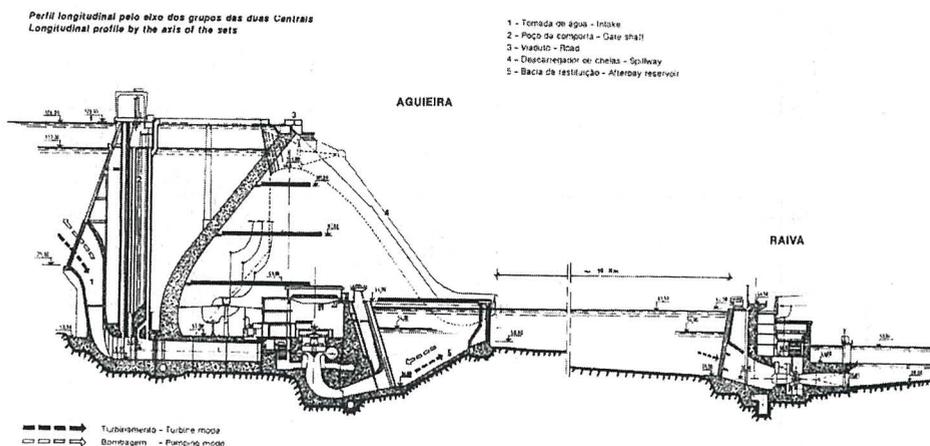


Figura 4.20 - Perfil longitudinal do sistema Aguieira – Raiva, a última situada a aproximadamente 10 km da primeira.

A existência da barragem da Raiva justifica-se pelos seguintes objectivos:

- criar uma reserva de água para bombeamento, quando oportuno, para a barragem da Aguieira; e,
- modular os caudais necessários para efeitos de abastecimento do sistema de rega do Baixo Mondego.

Em relação ao primeiro objectivo, importa aqui sublinhar o benefício resultante deste procedimento numa perspectiva de gestão da rede eléctrica

nacional, mas também salientar o benefício resultante para a qualidade da água na albufeira, como se verá no Capítulo 8.

Na Figura 4.21 inclui-se uma perspectiva da barragem, identificando-se claramente as três abóbadas de dupla curvatura e os dois contrafortes centrais que constituem, simultaneamente, dois descarregadores de cheia com capacidade de vazão de  $2 \times 1000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . O desenvolvimento total do coroamento é de aproximadamente 400 m e a albufeira tem uma capacidade total de  $450 \times 10^6 \text{ m}^3$ .

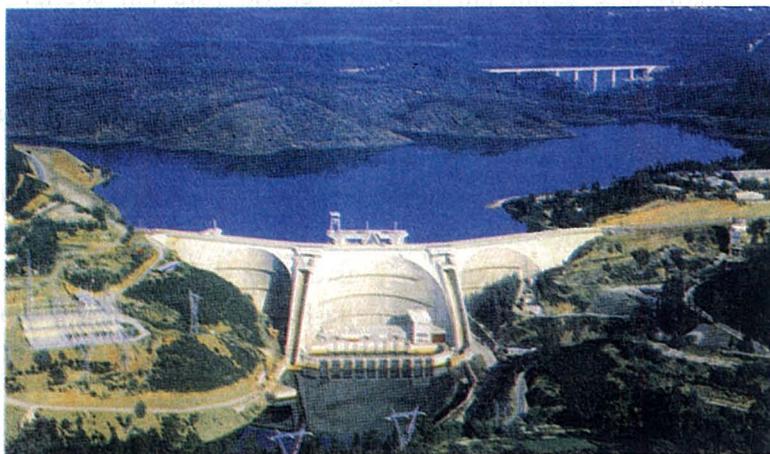


Figura 4.21 - Perspectiva da barragem da Aguieira.

Consideraram-se secções reais, levantadas a partir de uma carta à escala 1:25 000 e tendo ainda por base elementos apresentados em Belo, 1992. A aplicação do modelo matemático referido permite variações da largura da secção transversal do escoamento ao longo do comprimento do canal; todavia, apresenta como limitação o facto de não permitir alterações dessa largura com o tempo. Assim, a partir dos perfis transversais levantados, determinaram-se secções rectangulares equivalentes, as quais foram utilizadas na simulação numérica.

Considerou-se no troço a jusante da Aguieira um caudal inicial de  $175 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , caudal este que se aproxima da capacidade máxima da descarga de fundo. Partindo deste caudal descarregado na barragem da Aguieira, determinaram-se as condições de regime permanente inicial (valores da velocidade, alturas do escoamento e secções molhadas).

Admitiu-se que a ruptura da barragem ocorreria de forma *quase*-instantânea quando esta começasse a ser galgada, portanto com uma altura

de água na albufeira sensivelmente idêntica à do paramento de montante de barragem até à cota de coroamento; por conseguinte, com um altura aproximada de 89 m.

Simularam-se dois cenários, correspondentes a outros tantos valores distintos do coeficiente de Manning-Strickler. Pelo facto de este coeficiente ser estimado de forma empírica, é aconselhável estimar valores para as variáveis do escoamento correspondentes a duas situações “extremas”, entre as quais aquele coeficiente se deverá situar.

Analisou-se assim um primeiro cenário para um coeficiente  $K$  da fórmula de Manning correspondente à existência de atrito mínimo, em condições de regime fluvial, entenda-se, na ordem de  $40\text{-}45\text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ ; para o segundo cenário adoptou-se um coeficiente  $K$  correspondente à existência de atrito máximo, com ordens de grandeza de  $15\text{-}20\text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ . Estes cenários constituem assim as duas situações envolventes, em conformidade com o aspecto visual do troço de rio analisado.

Comparam-se na Figura 4.22 as alturas do escoamento obtidas em ambos os cenários, no troço Aguieira-Penacova, após 52.5 minutos de simulação. Naturalmente que a curva superior corresponde à situação de atrito máximo ( $K = 15\text{-}20\text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ )

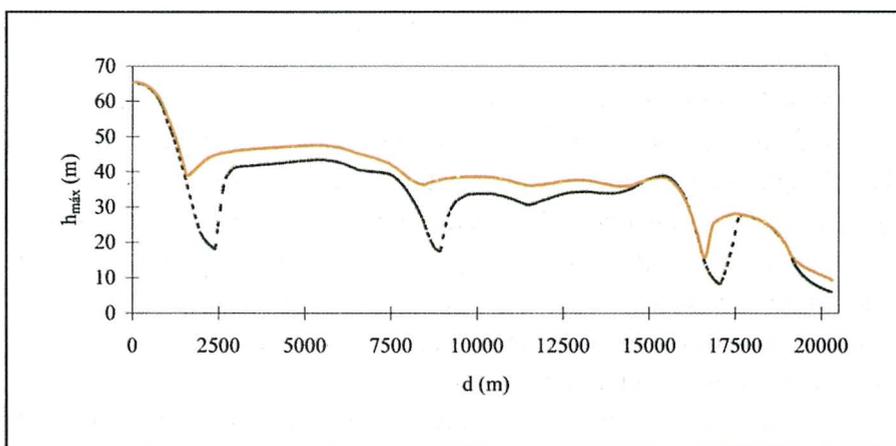


Figura 4.22 - Comparação das alturas máximas atingidas pelo escoamento no troço situado entre a barragem da Aguieira e Penacova, considerando diferentes coeficientes da fórmula de Manning ao longo do percurso (Amado Mendes *et al.*, 1998).

Para além do mapeamento das zonas inundáveis, outras variáveis igualmente importantes numa análise deste tipo são a velocidade e o tempo de chegada da onda de inundação. Considerando os dois cenários descritos, apresentam-se na Figura 4.23 as envolventes dos tempos de chegada da onda de cheia. Como é visível, a chegada desta onda a Penacova deverá situar-se entre valores pouco inferiores a 20 minutos, para a situação mais desfavorável, a valores da ordem dos 30 minutos.

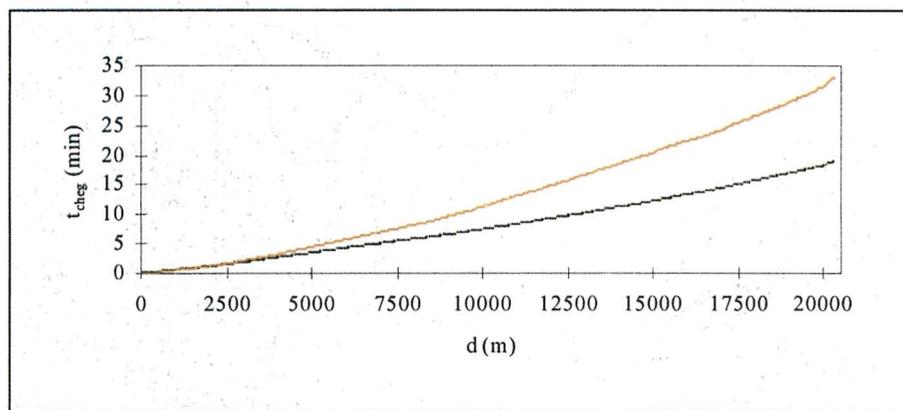


Figura 4.23 - Envolventes máxima e mínima dos tempos de chegada da onda de cheia ao longo do percurso Aguieira-Penacova, resultante da ruptura da barragem da Aguieira (Amado Mendes *et al.*, 1998).

Apresenta-se na Figura 4.24 o mapa de inundação correspondente ao cenário 1, que inclui os valores das alturas máximas do escoamento atingidas e os tempos de chegada da frente onda de cheia e da altura máxima desta onda em diferentes secções do domínio.

#### 4.4.4 Aplicações de modelos 2DH

Em Bento Franco (1996) é apresentado um modelo bidimensional no plano horizontal – modelo BIPLAN – que resolve as equações bidimensionais de Saint-Venant utilizando o método de diferenças finitas de MacCormack associado ao esquema TVD. O modelo desenvolvido é suficientemente robusto, permitindo a modelação de escoamentos variáveis com superfície livre, ondas de cheia com frente abrupta e leitos secos em planícies de inundação. As planícies podem ainda apresentar geometrias irregulares em planta e em altimetria. Este modelo foi aplicado à simulação

da ruptura da barragem do Arade, localizada no rio do Arade, a montante da cidade de Silves. Trata-se de uma barragem de terra com núcleo central de argila. Tem 50 m de altura e 246 m de desenvolvimento do coroamento.

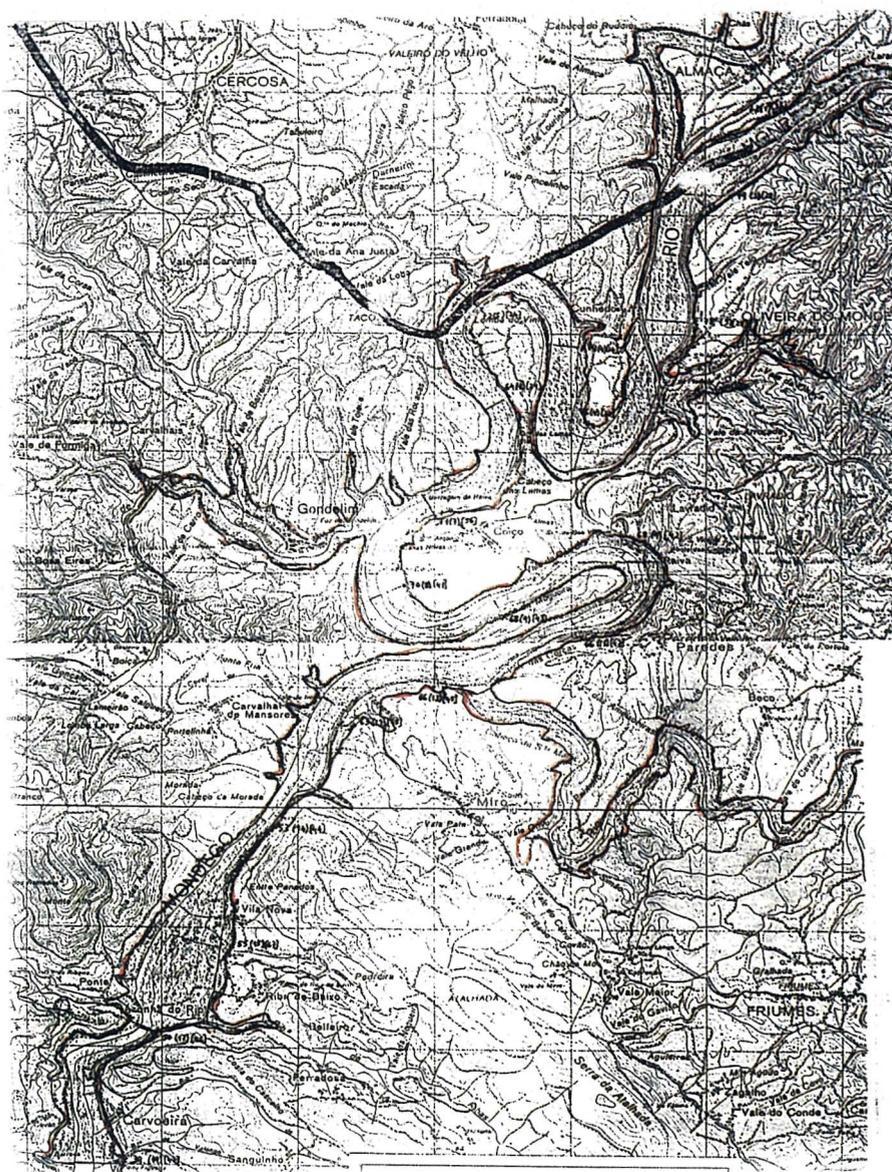


Figura 4.24 - Mapa de inundação correspondente ao cenário 1 no trecho compreendido entre a barragem da Aguieira e a localidade de Penacova, situada a aproximadamente 20 Km a jusante da barragem (Amado Mendes *et al.*, 1998).

O estudo foi efectuado para uma hipotética ruptura com um tempo de duração de 0.25 horas e uma largura da brecha de 40 m. A altura da base da brecha, relativamente ao talvegue, na sua configuração final, foi fixada em 6 m. Consideraram-se as condições iniciais do rio correspondentes à cheia com um período de retorno de 100 anos –  $Q = 400 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . Foi utilizado um coeficiente de Manning-Strickler  $K = 30 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$  e adoptou-se uma malha de cálculo com  $\Delta x = \Delta y = 25 \text{ m}$  num domínio de cálculo com  $4.35 \times 5.00 = 21.75 \text{ km}^2$ . Em Bento Franco (1996) são ainda apresentadas diversas comparações de resultados do modelo bidimensional descrito (2DH) com resultados de um modelo unidimensional (1DH) e representações tridimensionais de resultados do modelo BIPLAN para diferentes instantes de propagação da onda de cheia resultante da ruptura da barragem do Arade. A principal conclusão a retirar dos estudos efectuados prende-se com a superior qualidade dos resultados obtidos com o modelo bidimensional (2DH) no caso da propagação de ondas de cheia em vales com geometrias irregulares nos quais existam planícies de inundação, afluentes, zona laterais de armazenamento e curvas acentuadas. A Figura 4.25 mostra um exemplo de *output* relativo à variação da altura da onda de cheia no Vale do Arade baseado nos modelos computacionais 1DH e 2DH atrás descritos (Betâmio de Almeida *et al.*, 2003).

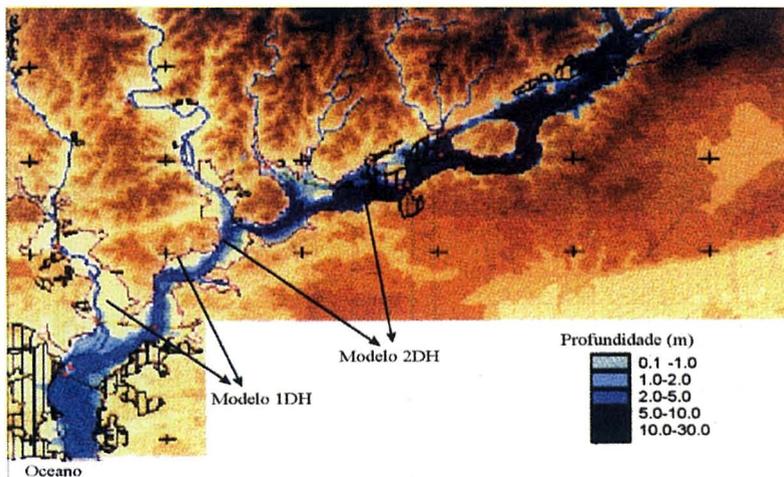


Figura 4.25 - Exemplo de *output*, relativo à onda de cheia no Vale do Arade, baseado em modelos computacionais 1DH e 2DH (Betâmio de Almeida *et al.*, 2003).

(Página deixada propositadamente em branco)

## 5. DINÂMICA SEDIMENTAR: EROSIÃO, TRANSPORTE E DEPOSIÇÃO DE SEDIMENTOS

São abordados conceitos básicos sobre o início do movimento de sedimentos e o cálculo dos caudais sólidos transportados por arrastamento e em suspensão. É descrita uma metodologia para o cálculo das tensões de atrito no fundo, considerando ambas as parcelas devidas ao grão (rugosidade de pele) e às formas de fundo, e é exemplificada a sua aplicação ao dimensionamento de um canal de fundo móvel. São apresentadas as formulações matemáticas (clássica e alternativa) de modelos de transporte sedimentar. Descrevem-se um modelo matemático unidimensional em planta (1DH) e um modelo bidimensional em planta (2DH), e são analisados os correspondentes esquemas numéricos de resolução. Por fim, sugerem-se exemplos de aplicação destes modelos e são apresentados alguns resultados.

### 5.1 Considerações gerais

O transporte sedimentar governa ou influencia muitas situações que são de grande importância para o homem. A deposição de sedimentos reduz a capacidade das albufeiras, interfere com operações portuárias e reduz ou modifica o leito dos cursos de água. A erosão, ou acção de 'lavagem', pode deteriorar estruturas.

Em rios e regiões costeiras, o movimento de sedimentos constitui uma parte muito significativa dos processos geológicos a médio e longo prazo. O transporte sedimentar ocorre devido à existência de uma interface entre o fluido em movimento e a fronteira de fundo móvel. A actividade nesta interface (vulgarmente designada por *camada limite de fundo*) é extremamente complexa.

O movimento das partículas sólidas ocorre fundamentalmente num dos seguintes modos:

- rolando ou deslizando sobre o fundo (transporte por arrastamento);  
ou,
- em suspensão na massa de água (transporte em suspensão).

Não existem definições precisas para estas designações. A ideia básica consiste em separar a carga total de sedimentos em dois modos ou mecanismos distintos de transporte.

O *caudal sólido transportado por arrastamento* é definido como a parte da carga total de sedimentos que está de forma mais ou menos

contínua em contacto com a superfície do leito durante o transporte. Nesta conformidade, inclui os grãos que rolam, deslizam ou saltitam sobre o fundo. Por conseguinte, o cálculo da quantidade de sedimentos que se move por arrastamento deverá estar relacionado com a tensão efectiva de atrito que actua sobre os grãos situados na superfície do leito móvel.

O *caudal sólido transportado em suspensão* é a parte da carga total de sedimentos que se movimenta sem contacto contínuo com o fundo. Neste caso, os sedimentos movem-se em consequência da agitação característica da turbulência do fluido. Por conseguinte, o cálculo do caudal sólido que se movimenta em suspensão está relacionado com conceitos da teoria do comprimento de mistura, segundo a qual o fluido e os sedimentos são transportados de um nível inferior onde a concentração volumétrica de sedimentos em suspensão é  $c - 0.5l(dc/dz)$  para um nível superior, à distância  $l$ , onde a concentração é  $c + 0.5l(dc/dz)$ . O equilíbrio dos caudais líquido e sólido transportados (em regime permanente) entre os dois níveis traduz-se numa relação que identifica o desvio da forma logarítmica do perfil de velocidades devido à presença de sedimentos.

Outra classificação corrente do transporte sólido baseia-se na origem dos materiais, distinguindo-se o *transporte de material de fundo*, que corresponde a materiais cuja granulometria se encontra presente no fundo, do *transporte de material de lavagem*, correspondente a materiais de dimensões inferiores às dos materiais de fundo e de origem exterior ao leito do trecho em consideração. Para um estudo mais profundo destes conceitos e, nomeadamente, das propriedades físicas dos sedimentos, em particular as propriedades das misturas granulométricas, consulte-se Cardoso (1998).

## 5.2 Conceitos básicos

### 5.2.1 Análise qualitativa

178

A condição crítica para o início do movimento de uma partícula sólida, isolada, de um material não-coesivo, localizada sobre um fundo com um ângulo de inclinação  $\beta$ , submetida à acção da força hidrodinâmica de arrastamento,  $F_a$ , da força de sustentação,  $F_s$ , e do peso submerso da partícula,  $W$ , é traduzida por (Figura 5.1):

$$\tan \phi = \frac{W \operatorname{sen} \beta + F_a}{W \operatorname{cos} \beta - F_s} \quad (5.1)$$

sendo  $\phi$  o ângulo de repouso.

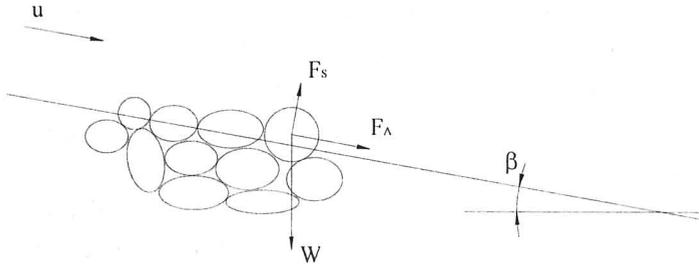


Figura 5.1 - Forças aplicadas a uma partícula sólida.

As forças hidrodinâmicas de arrastamento e de sustentação são dadas por (5.2):

$$F_a = C_a C_{fa} D^2 \frac{\rho u_f^2}{2} ; F_s = C_s C_{fs} D^2 \frac{\rho u_f^2}{2} \quad (5.2)$$

em que  $C_a$  e  $C_s$  representam coeficientes de arrastamento e sustentação, respectivamente;  $C_{fa}$  e  $C_{fs}$  representam coeficientes de forma;  $D$  é um diâmetro característico;  $\rho$  é a massa volúmica do fluido, e  $u_f$  representa a velocidade do escoamento junto ao fundo.

O peso submerso da partícula é expresso por (5.3):

$$W = C_{fp} (\rho_s - \rho) g D^3 \quad (5.3)$$

Substituindo os valores de  $W$ , dado por (5.3), e de  $F_a$  e  $F_s$ , dados por (5.2), na equação (5.1) resulta:

$$\frac{(u_f^2)_{cr}}{(\rho_s / \rho - 1) g D} = \frac{2 C_{fp} (\tan \phi \cos \beta - \sin \beta)}{C_a C_{fa} + C_s C_{fs} \tan \phi} \quad (5.4)$$

em que  $(u_f^2)_{cr}$  representa o quadrado da velocidade crítica junto ao fundo, à qual tem início o movimento da partícula. O segundo membro da equação (5.4) depende, assim, das características das partículas (dimensão, forma, uniformidade, distribuição, etc.), das características do escoamento, através dos coeficientes  $C_a$  e  $C_s$ , da inclinação do fundo e do ângulo de repouso. Nesta conformidade, a utilização prática daquela equação em condições reais é extremamente complicada.

Por outro lado, dada a grande dificuldade em conhecer (medir) com suficiente rigor a velocidade do escoamento junto ao fundo,  $u_f$ , e pelo facto de a equação (5.4) ter sido estabelecida para condições ideais, os resultados práticos são, em geral, pouco satisfatórios. Tal como definida, a velocidade  $u_f$  é extremamente ambígua, não permitindo a sua utilização em condições realistas. Nesta conformidade, impõe-se a introdução de uma nova variável com significado físico perfeitamente claro. Define-se, assim, um novo parâmetro, designado por *velocidade de atrito*  $u_*$ , o qual representa uma medida da intensidade das flutuações turbulentas. A relação entre a velocidade de atrito,  $u_*$ , e a tensão de atrito,  $\tau_0$ , é dada por (5.5):

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (5.5)$$

Com  $u_f = u_*$ , a expressão (5.4) pode escrever-se:

$$\frac{(\tau_0)_{cr}}{(\rho_s - \rho)gD} = \frac{2C_{fp}(\tan\phi \cos\beta - \text{sen}\beta)}{C_a C_{fa} + C_s C_{fs} \tan\phi}$$

Os primeiros trabalhos de investigação usando o conceito de velocidade de atrito foram conduzidos por Shields, o qual definiu o número de Reynolds de atrito por  $R_* = u_* D/\nu$  e construiu o gráfico da curva  $(\tau_0)_{cr}/((\rho_s - \rho)gD) = f(u_* D/\nu)$ , representado na Figura 5.2, com  $\tau_c = (\tau_0)_{cr}$  e  $D = D_s \cong D_{50}$ , conhecido por diagrama de Shields.

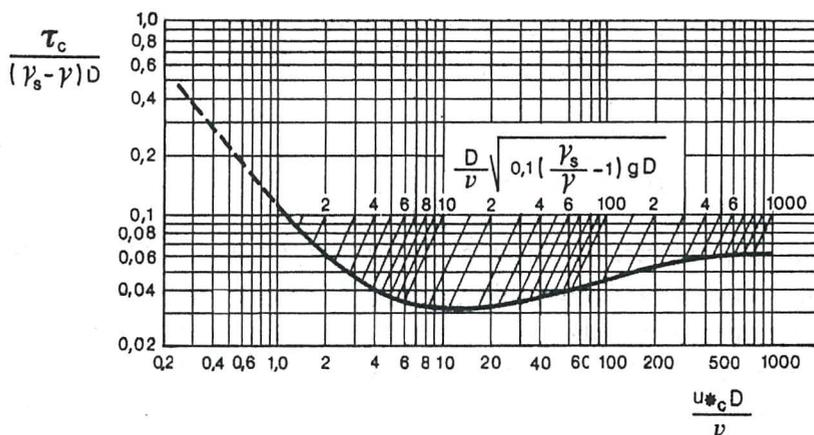


Figura 5.2 - Diagrama de Shields (reprodução de Cardoso, 1998).

A determinação de  $\tau_c$  a partir da curva de Shields exige um procedimento iterativo. Para o evitar foi introduzido no diagrama um eixo graduado relativo a um terceiro parâmetro adimensional:  $(D/\nu)\sqrt{0.1(\gamma_s/\gamma-1)gD}$ . Deste modo, marcando sobre o eixo o valor deste parâmetro, segue-se a linha inclinada que parte do ponto obtido, lendo-se o valor de  $\tau_c/[(\gamma_s - \gamma)D]$  (ou de  $u_{*c}D/\nu$ ) sobre a curva; a partir desse valor calcula-se  $\tau_c$ .

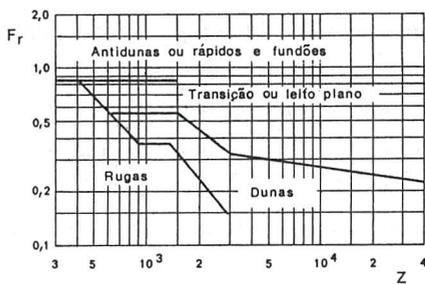
As experiências de Shields foram conduzidas sobre fundos planos; por conseguinte, os resultados que apresenta consideram apenas os efeitos devidos à rugosidade do grão, não tendo em consideração as formas de fundo.

Seja o escoamento num canal com fundo de areia de superfície inicialmente plana. Logo que a tensão de atrito seja suficientemente forte para causar transporte formar-se-ão rugas no fundo, isto é, ondulações caracterizadas por comprimentos de onda ( $\lambda_r$ ) da ordem das amplitudes orbitais das partículas fluidas sobre o fundo e relações  $h_r/\lambda_r \approx 0.10 - 0.25$ , sendo  $h_r$  a altura das rugas. Estas rugas poderão crescer e vir a formar dunas, com relações  $L_d/H_d \approx O(16)$ , as quais progredirão no sentido do escoamento para valores moderados do número de Froude.

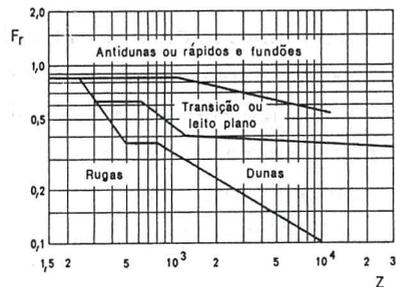
À medida que a velocidade do escoamento vai aumentando, novos movimentos sedimentares e diferentes configurações do fundo poderão ocorrer, tais como: *i*) a elevação das partículas sólidas mais finas e a sua manutenção na massa líquida, sendo transportadas em suspensão; *ii*) o alisamento das cristas das dunas (configuração designada por transição ou leito plano); e, para valores do número de Froude da ordem de um ou superior, *iii*) formação de antidunas ou rápidos e fundões.

Para as gamas de valores  $R_g < 10$ ,  $10 \leq R_g < 16$ ,  $16 \leq R_g < 26$ ,  $26 \leq R_g < 48$  e  $R_g \geq 48$ , com  $R_g$  dado por  $R_g = D\sqrt{gh}/\nu$ , sendo  $D$  o diâmetro característico das partículas sólidas, apresentam-se na Figura 5.3 os critérios de Vanoni, em função do número de Froude e do parâmetro  $Z = R_h/D \cong h/D$ , sendo  $R_h$  o raio hidráulico e  $h$  a altura do escoamento.

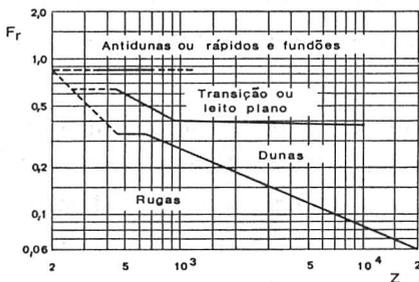
É óbvio que existirá uma relação entre os principais parâmetros ligados ao processo de transporte sedimentar (número de Froude, propriedades dos sedimentos, propriedades dos fluidos, tensão de atrito, rugosidade do fundo, ou dimensão característica das irregularidades do fundo, e caudal sólido transportado).



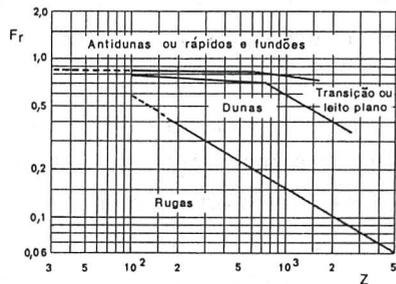
a)  $R_k < 10$



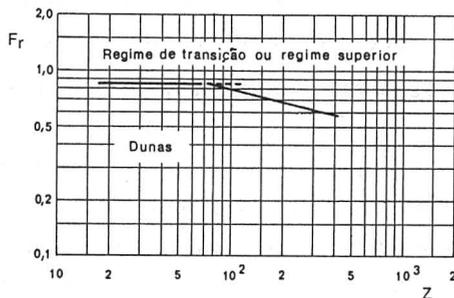
b)  $10 \leq R_k < 16$



c)  $16 \leq R_k < 26$



d)  $26 \leq R_k < 48$



e)  $R_k \geq 48$

Figura 5.3 - Configurações de fundo: critérios de Vanoni (reprodução de Cardoso, 1998).

Diversas metodologias foram já seguidas para desenvolver uma teoria racional e coerente da quantificação e evolução deste processo de transporte, todavia sem grande sucesso até ao presente.

Muitas das formulações de uso corrente foram desenvolvidas com base em considerações de análise dimensional, outras em dados experimentais e outras ainda em modelos teóricos simplificados.

### 5.2.2 Tensões devidas à rugosidade do grão e velocidade de queda

A tensão total de atrito no fundo ( $\tau_i$ ) é composta pela tensão devida à rugosidade do grão ( $\tau_g$ ) mais a tensão produzida pelo campo de pressões associado às formas de fundo ( $\tau_f$ ); por conseguinte, tem-se:  $\tau_i = \tau_g + \tau_f$ .

Como primeira aproximação, seja a fórmula de Manning-Strickler, válida para fundo plano e horizontal:

$$u = \frac{1}{n_k} (R_h)^{-2/3} J^{1/2}$$

com  $R_h = A_{mol} / P_{mol} = bh' / (b + 2h')$ , em que  $h'$  representa a altura do escoamento considerando apenas a rugosidade do grão. Para o caudal resulta então:

$$Q = u A_{mol} = \frac{1}{n_k} (R_h)^{-2/3} J^{1/2} A_{mol} = \frac{1}{n_k} \left( \frac{bh'}{b + 2h'} \right)^{-2/3} J^{1/2} b h' \quad (5.6)$$

Atendendo à hipótese de regime uniforme, a equação (5.6) poderá ainda simplificar-se com  $J \approx I = \tan \beta$ .

O coeficiente de rugosidade ( $n_k$ ) poderá exprimir-se em função da profundidade  $h'$  e de um coeficiente de atrito  $C_D$  (designado por *drag coefficient* na literatura anglo-saxónica) através da relação  $C_D = g n_k^2 / h'^{1/3}$ , com o coeficiente de atrito definido por  $C_D = 0.0474 (z_0 / h')^{1/3}$  (Soulsby, 1997). Considerando condições de parede hidraulicamente rugosa,  $R_e > 70$ , o valor de  $z_0$  é dado por  $z_0 = k_N / 30 = 2.5 D_{50} / 30 = D_{50} / 12$ .

A equação (5.6) permite escrever:

$$h' = \frac{Q n_k}{\left( \frac{bh'}{b + 2h'} \right)^{-2/3} J^{1/2} b} \quad (5.7)$$

a qual pode ser resolvida usando um procedimento iterativo, com  $J \equiv i_c$ , representando  $i_c$  o declive do canal.

Ainda em condições de regime uniforme e canais suficientemente largos, a velocidade de atrito devida à rugosidade do grão escreve-se:  $u_*' = \sqrt{g h' i_c}$ .

A tensão crítica para o início do movimento dos sedimentos poderá obter-se através de expressões resultantes da parametrização da curva de

Shields, ou ainda da curva proposta por Iwagaki (1956), ambas representadas na Figura 5.4.

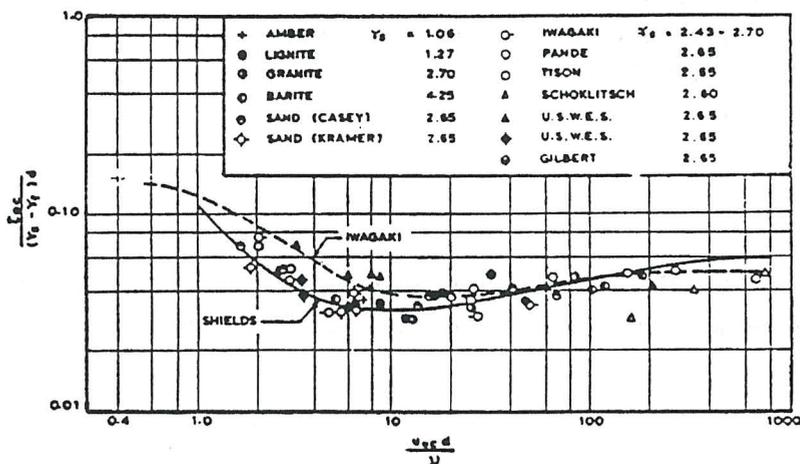


Figura 5.4 - Condições para o início do movimento de sedimentos (curvas de Shields e Iwagaki).

As expressões adimensionais resultantes da parametrização da curva de Iwagaki escrevem-se (Antunes do Carmo, 1995):

$$\begin{aligned} \tau_{0c}' &= 0.05 & R_{*0} &> 671.0 \\ \tau_{0c}' &= 0.00848 (R_{*0})^{3/11} & 671.0 &\geq R_{*0} > 162.7 \\ \tau_{0c}' &= 0.034 & 162.7 &\geq R_{*0} > 54.2 \\ \tau_{0c}' &= 0.195 (R_{*0})^{-7/16} & 54.2 &\geq R_{*0} > 2.14 \\ \tau_{0c}' &= 0.14 & 2.14 &\geq R_{*0} \end{aligned}$$

com  $R_{*0}$  definido por  $R_{*0} = \sqrt{g(s-1)D_{50}^3} / \nu$ , obtendo-se para a tensão crítica de arrastamento ( $\tau_{0c}$ ) e a correspondente velocidade crítica ( $u_{*c}$ ) as expressões (5.8):

$$\frac{\tau_{0c}}{\rho} = g(s-1)D_{50}\tau_{0c}'; \quad u_{*c} = \sqrt{\frac{\tau_{0c}}{\rho}} \quad (5.8)$$

Mais recentemente, Soulsby & Whitehouse (1997) propuseram a seguinte expressão (5.9) para o cálculo da tensão crítica para o início do movimento de sedimentos devido à rugosidade do grão:

$$\tau_{oc} = \frac{0.24}{D_*} + 0.055(1 - e^{-0.02D_*}) \quad (5.9)$$

com o parâmetro de grão adimensional,  $D_*$ , dado por,

$$D_* = [g(s-1)/\nu^2]^{1/3} D_{50}$$

Define-se a tensão de atrito adimensional devida à rugosidade do grão por (5.10):

$$\tau_0' = \frac{(u_*')^2}{[(s-1)gD_{50}]} \quad (5.10)$$

A velocidade de queda das partículas sólidas poderá ser determinada, em primeira aproximação, recorrendo à metodologia de Hallermeier (1980):

$$\begin{aligned} w_{50} &= \frac{(s-1)g D_{50}^2}{18\nu} \quad , \text{ se } D_*^3 \leq 39 \\ w_{50} &= \frac{[(s-1)g]^{7/10} D_{50}^{11/10}}{6\nu^{2/5}} \quad , \text{ se } 39 < D_*^3 \leq 10^4 \\ w_{50} &= \frac{[(s-1)g]^{1/2} D_{50}^{1/2}}{0.91} \quad , \text{ se } 10^4 < D_*^3 \leq 3 \cdot 10^6 \end{aligned} \quad (5.11)$$

As fórmulas (5.11) e, em geral, as formulações correntes na literatura para o cálculo da velocidade de queda não consideram concentrações elevadas de sedimentos em suspensão. Em conformidade com Yang (1996), elevadas concentrações de partículas sólidas em suspensão traduzem-se em reduções da velocidade de queda dos sedimentos, de acordo com uma expressão do tipo:

$$w_y = w_{50}(1 - C_s)^k \quad (5.12)$$

em que  $C_s$  é a concentração volumétrica de sedimentos em suspensão (percentagem em peso por unidade de volume) e  $k$  é uma constante que varia entre cerca de 2.5 e 7. Com o número de Reynolds  $R_e$  definido por  $R_e = w_{50} D_{50} / \nu$ , uma razoável aproximação para o valor de  $k$  poderá obter-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} k &= 4.5 R_e^{-0.03} & 10^{-6} < R_e \leq 1.0 \\ k &= 4.5 R_e^{-0.10} & 1.0 < R_e \leq 500 \\ k &= 2.4 & 500 < R_e \end{aligned}$$

### 5.2.3 Caudais sólidos junto ao fundo e em suspensão

Uma formulação clássica para o cálculo do caudal sólido transportado por arrastamento tendo por base o conceito de tensão crítica para o início do movimento de sedimentos é devida a Meyer-Peter & Müller, que em 1948 apresentaram a seguinte fórmula:

$$\left(\frac{K}{K_r}\right)^{3/2} \gamma R_b J = 0.047 \gamma_s' D + 0.25 \left(\frac{\gamma}{g}\right)^{1/3} (q_{sp}')^{2/3}$$

em que  $K$  é o coeficiente da fórmula de Manning-Strickler;  $K_r = 26/D_{90}^{1/6}$ ;  $\gamma_s'$  é o peso volúmico do material sólido submerso;  $q_{sp}' = q_{sa}(1-\lambda)(\gamma_s - \gamma)$  é o caudal sólido arrastado por unidade de largura, em peso submerso;  $\lambda$  é a porosidade, e  $q_{sa}$  é o caudal sólido arrastado por unidade de largura, em volume.

A fórmula de Meyer-Peter & Müller poderá escrever-se na forma:

$$q_{sp}' = 8 \sqrt{\frac{g}{\gamma}} (\tau_0 - \tau_{0c})^{3/2}$$

ou ainda, em termos do caudal sólido por unidade de largura, em volume:

$$q_{sa} = \frac{8}{g(s-1)} \left( \frac{\tau_0}{\rho} - \frac{\tau_{0c}}{\rho} \right)^{3/2} \quad (5.13)$$

na qual  $g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $s$  é a densidade do sedimento ( $s = \rho_s / \rho$ , com  $\rho \approx 1000 \text{ kg m}^{-3}$ );  $\tau_0$  ( $\text{Nm}^{-2}$ ) é a tensão calculada sobre um fundo plano e horizontal, e  $\tau_{0c}$  ( $\text{Nm}^{-2}$ ) é a tensão crítica para o início do movimento sólido, naquelas mesmas condições, sendo dada por  $\tau_{0c} = 0.047 \rho g (s-1) D_g$ .

Em conformidade com Fredsøe & Deigaard (1992), uma fórmula mais recente, adequada para quantificar os sedimentos em trânsito por arrastamento, é função do parâmetro de Shields, da tensão de atrito devida ao grão e de uma probabilidade que define a fracção de sedimentos que efectivamente entra em movimento uma vez ultrapassada a tensão crítica para o início do transporte de sedimentos por arrastamento; esta formulação é devida a Engelund & Fredsøe (1976) e escreve-se:

$$q_{sa} = 10 \frac{\pi}{6} D_{50} p_{mov} u_*' \left[ 1 - 0.7 \sqrt{\tau_{0c} / \tau_0'} \right] \quad (5.14)$$

a qual, após divisão por  $\sqrt{g(s-1)D_{50}}$ , resulta na seguinte forma adimensional:

$$q_{sa}' \approx 5 p_{mov} (\sqrt{\tau_0'} - 0.7\sqrt{\tau_{0c}}) \quad (5.15)$$

A equação (5.15) é válida enquanto  $\tau_0' > 0.49\tau_{0c}$ ; caso contrário,  $q_{sa}' = 0$ .

De acordo com Fredsøe & Deigaard (1992), a fracção  $p_{mov}$  de partículas sólidas que se movimentam por arrastamento é calculada por:

$$p_{mov} = \left[ 1 + \left( \frac{\frac{\pi}{6} \mu_d}{\tau_0' - \tau_{0c}} \right)^4 \right]^{-0.25}$$

Em que  $\mu_d$  é um coeficiente de atrito dinâmico, dado por  $\mu_d = \tan \varphi_d$ . Com  $\varphi_d \approx 33^\circ$  (Fredsøe & Deigaard, 1992) resulta num coeficiente de atrito dinâmico  $\mu_d \approx 0.65$ .

O caudal sólido em suspensão é dado por (5.16):

$$q_{ss} = \int_k^h u(z) c(z) dz \quad (5.16)$$

O cálculo do integral (5.16) exige o conhecimento das distribuições da velocidade e da concentração de sedimentos na coluna de água. Em primeira aproximação, a distribuição de sedimentos em suspensão poderá calcular-se a partir da solução da seguinte equação diferencial:

$$c w_q + u_* k z \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \frac{dc}{dz} = 0$$

obtendo-se (5.17),

$$c(z) = c_{ref} \left( \frac{h-z}{z} \frac{2 D_{50}}{h-2 D_{50}} \right)^{\frac{w_q}{k u_*}} \quad (5.17)$$

em que  $c_{ref}$  é a concentração volumétrica de referência dos sedimentos a uma distância do fundo aproximadamente igual a  $2D_{50}$ . O valor da concentração de referência depende de uma constante  $c_0 \approx 0.65$  e da concentração linear  $c_\lambda$  (Fredsøe & Deigaard, 1992). O valor de  $c_{ref}$  poderá obter-se a partir de (5.18):

$$c_{ref} = \frac{c_0}{\left(1 + \frac{1}{c_\lambda}\right)^3} \quad (5.18)$$

em que  $c_\lambda \approx 0.4 \alpha_1 \sqrt{\left[\left(\tau_0' - \tau_{0c} - \frac{\pi}{6} \mu_d\right) / (0.013 s \tau_0')\right]}$ , com  $\mu_d \approx 0.65$  e  $s = 2.65 \Rightarrow c_\lambda = 2.16 \alpha_1 \approx 4.32$ .

Substituindo o valor de  $c_\lambda = 4.32$  em (5.18), obtém-se  $c_{ref} = 0.35$ . Teoricamente o valor de  $c_{ref}$  poderá atingir um máximo de 0.65, embora a prática demonstre que este valor é algo elevado e confina em demasia o movimento das partículas.

O perfil da velocidade poderá obter-se assumindo uma distribuição logarítmica de velocidades, de acordo com a expressão que mais à frente se deduz, na secção 5.4.2.2 *Camada logarítmica*:

$$u(z) = \frac{u_*}{k} \log_e \left( \frac{z}{z_0} \right) = 2.5 u_* \log_e \left( \frac{z}{z_0} \right)$$

Conhecidas as distribuições da velocidade e da concentração na coluna de água, obtém-se o caudal em suspensão por resolução do integral (5.16) e o correspondente valor na forma adimensional através de (5.19):

$$q_{ss}' = \frac{q_{ss}}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}} \quad (5.19)$$

Para um estudo mais profundo de formulações clássicas utilizadas no cálculo do transporte sólido por arrastamento e em suspensão, incluindo exercícios práticos e inter-comparações, consulte-se Yang (1996).

## 5.2.4 Tensões devidas às formas de fundo

188

Fredsøe & Deigaard (1992) apresentam a seguinte expressão (5.20) para estimar a altura relativa de uma duna:

$$\frac{H_d}{h} = \frac{q_{sd}'}{2\tau_0' \frac{dq_{st}'}{d\tau_0'} \left( 1 + \frac{q_{sd}'}{4\tau_0' \frac{dq_{st}'}{d\tau_0'}} \right)} \quad (5.20)$$

com  $q_{st}' = q_{sa}' + q_{ss}'$  e  $dq_{st}'/d\tau_0' = [q_{st}'(\tau_0' + \Delta\tau_0') - q_{st}'(\Delta\tau_0')]/\Delta\tau_0'$ .

Em primeira aproximação, poderá tomar-se para o caudal depositado na frente da duna,  $q_{sd}'$ , a totalidade do caudal transportado por arrastamento, isto é,  $q_{sd}' \equiv q_{sa}'$ .

Par o cálculo da variação  $dq_{st}'/d\tau_0'$ , exprime-se o caudal sólido total transportado,  $q_{st}'$ , em função da tensão de atrito adimensional,  $\tau_0'$ , através da equação (5.15), para o cálculo de  $q_{sa}'$ , e da equação (5.19), para o cálculo de  $q_{ss}'$ , relacionando-se esta última com  $\tau_0'$  a partir da equação (5.18), para o cálculo de  $c_{ref}$ , e da equação (5.10), para o cálculo de  $u_*'$  e, conseqüentemente, do parâmetro de Rouse,  $w_q/(k u_*')$ , da equação (5.17).

Ainda de acordo com Fredsøe & Deigaard (1992), uma relação aproximada entre a altura de uma duna e o seu comprimento, quando o transporte por arrastamento é dominante, é dada por (5.21):

$$L_d \cong 16H_d \quad (5.21)$$

Quando o transporte em suspensão é dominante, é necessário introduzir uma diferença de fase,  $L_s$ , entre as localizações das secções de máxima tensão de atrito no fundo e de máximo transporte sólido em suspensão, sendo aquela relação ( $H_d/L_d$ ) obtida a partir da seguinte expressão (5.22):

$$\frac{H_d}{L_d} = \frac{q_{sa} + q_{ss}}{\left[ 16q_{sa} + \left( \frac{L_s}{H_d} + 16 \right) q_{ss} \right]} \quad (5.22)$$

O valor de  $L_s$  pode ser obtido a partir de  $L_s = z_c (u_{z_c} / w_q)$ , com  $z_c$  dado por:

$$z_c \approx \frac{\varepsilon_t}{w_q} \left[ \frac{1 - \frac{w_q h'}{\varepsilon_t} e^{-\frac{w_q h'}{\varepsilon_t}}}{1 - e^{-\frac{w_q h'}{\varepsilon_t}}} \right]$$

em que  $\varepsilon_t \approx 0.077 u_*' h'$  e  $u_{z_c}$  é a velocidade média do escoamento ao nível  $z_c$ , que representa a altura do centro de gravidade dos sedimentos em suspensão.

A transformação de energia por unidade de comprimento da duna, que é igual ao gradiente da linha de energia, pode ser expressa por (5.23):

$$I_d = \Delta H / L_d \quad (5.23)$$

sendo a perda de carga, devida à existência da forma de fundo (duna), dada por:

$$\Delta H \cong \alpha \frac{u^2}{2g} \left( \frac{H_d}{h} \right)^2, \text{ com } \alpha \approx 1$$

A tensão de atrito devida às formas de fundo pode escrever-se  $\tau_d = \rho g h I_d$ , ou ainda, na forma adimensional:

$$\tau_d' = \frac{\tau_d}{[(s-1)\rho g D_{50}]} \quad (5.24)$$

Considerando a equação (5.10) e introduzindo a equação (5.23) em  $\tau_d = \rho g h I_d$ , a equação (5.24) permite escrever a seguinte equação (5.25) para a tensão de atrito adicional devida à ocorrência de formas de fundo (rugas ou dunas), na forma adimensional:

$$\tau_d' = \tau_0' \frac{\alpha}{2} \frac{H_d}{h} \frac{H_d}{L_d} \left( \frac{u}{u_*'} \right)^2 \quad (5.25)$$

sendo  $u$  a velocidade média do escoamento.

O cálculo de  $\tau_d'$  obriga a um processo iterativo, tomando-se para  $u$  na primeira iteração o valor previsto pela fórmula de Manning-Strickler. O valor final da tensão de atrito é assim dado pela soma de duas componentes, uma devida à rugosidade do grão ( $\tau_0'$ ) e outra devida às formas de fundo ( $\tau_d'$ ), obtendo-se  $\tau' = \tau_0' + \tau_d'$ .

Finalmente, para a altura total  $h$  do escoamento resulta  $h = [\tau'(s-1)D_{50}] / i_c$ .

### 5.2.5 Dimensionamento de um canal de fundo móvel

Para o dimensionamento de um canal de fundo móvel propõe-se a sequência de operações que se apresenta em seguida, e que resume a metodologia acabada de expor. Supõem-se conhecidos: o caudal de dimensionamento,  $Q$ , o coeficiente de rugosidade de Manning-Strickler,  $n_k$ , a largura,  $b$ , e a inclinação  $i_c$  do canal. Calculam-se em primeiro lugar, nos pontos 1. a 3., os valores de  $h'$ ,  $u_*'$  e  $q_{su}$ :

1. Considerando  $J \equiv i_c$ , calcula-se  $h'$  através da expressão:

$$h' = (Q n_k) / \left\{ [(bh)' / (b + 2h)']^{-2/3} J^{1/2} b \right\};$$

2. Obtém-se  $u_*' = \sqrt{g h' i_c}$ ;

3. Calcula-se  $q_{sa} = 10(\pi/6) D_{50} p_{mov} u_*' (1 - 0.7 \sqrt{\tau_{0c} / \tau_0'})$ , com  $\tau_{0c}$ ,  $\tau_0'$  e  $p_{mov}$  dados por, respectivamente:  $\tau_{0c} = 0.047 \rho g (s - 1) D_g$ ;  $\tau_0' = (u_*')^2 / [(s - 1) g D_{50}]$  e  $p_{mov} = \left\{ 1 + [(\pi \mu_d / 6) / (\tau_0' - \tau_{0c})]^4 \right\}^{-0.25}$ , com  $\mu_d \approx 0.65$ .

Calculam-se em seguida, usando um processo iterativo envolvendo os pontos 4. a 10., até convergência, os valores do caudal sólido em suspensão  $q_{ss}$ , da altura e comprimento relativos das formas de fundo  $H_d/h$  e  $H_d/L_d$ , da tensão de atrito total  $\tau'$  (devida à rugosidade do grão e às formas de fundo) e da profundidade do escoamento,  $h$ .

4.  $u = Q / (hb)$

5.  $q_{ss} = \int_k^h u(z) c(z) dz$

em que:  $u(z) = 2.5 u_* \log_e (z/z_0)$ , com  $z_0 \approx 0.10 D_{50}$ ;

$c(z) = c_{ref} \left\{ [(h - z)/z] [2 D_{50} / (h - 2 D_{50})] \right\}^{w_q / u_*}$ ,  $c_{ref} \approx 0.35$ .

6.  $\frac{H_d}{h} = q_{sd}' / \left\{ 2 \tau_0' \frac{\Delta q_{st}'}{\Delta \tau_0'} [1 + q_{sd}' / (4 \tau_0' \Delta q_{st}' / \Delta \tau_0')] \right\}$ ,

em que  $q_{sd}' \approx q_{sa}'$  e  $q_{st}' = q_{sa}' + q_{ss}'$ , com:

$q_{sa}' \approx 5 p_{mov} (\sqrt{\tau_0'} - 0.7 \sqrt{\tau_{0c}})$  e  $q_{ss}' = \frac{q_{ss}}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}}$ .

7.  $\frac{H_d}{L_d} = \frac{q_{sa} + q_{ss}}{[16 q_{sa} + (L_s / H_d + 16) q_{ss}]}$ , com  $L_s = z_c \frac{u_c}{w_q}$ .

8.  $\tau_d' = \tau_0' \frac{\alpha}{2} \frac{H_d}{h} \frac{H_d}{L_d} \left( \frac{u}{u_*'} \right)^2$ , com  $\alpha \approx 1$ .

9.  $\tau' = \tau_0' + \tau_d'$

10.  $h = [\tau' (s - 1) D_{50}] / i_c$

### 5.3 Modelos matemáticos

Desenvolveu-se uma metodologia para aplicação em laboratório. O estudo dos processos morfodinâmicos em sistemas fluviais exige um outro tipo de análise. Com efeito, em sistemas naturais, as geometrias são bem mais complexas e os escoamentos são variáveis; por conseguinte, as condições de regime uniforme aqui admitidas estão longe de serem satisfeitas.

#### 5.3.1 Equação dinâmica da fase sólida

As formulações apresentadas em 5.2.3 *Caudais sólidos junto ao fundo e em suspensão* poderão ser estendidas à modelação de sistemas naturais, com as tensões de atrito no fundo calculadas numericamente e tendo pontualmente em consideração os efeitos das formas de fundo no cálculo das tensões críticas. Com efeito, em cada ponto da malha de cálculo de um modelo numérico, os valores da tensão crítica para o início do movimento poderão ser corrigidos em conformidade com a seguinte expressão (Antunes do Carmo, 1995; Antunes do Carmo & Seabra Santos, 2002):

$$\tau_c = \tau_{oc} \left( \cos \beta \cos \theta \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}} + \frac{\sin \beta}{\tan \phi} \right) \quad (5.26)$$

em que  $\tau_{oc}$  é a tensão crítica para o início do movimento de sedimentos sobre um fundo horizontal, com  $\tan \theta = \cos \beta \tan \Theta_n$ , sendo  $\beta$  o declive do fundo colinear com o escoamento e  $\Theta_n$  o declive do fundo perpendicular à direcção do escoamento.

No entanto, uma metodologia sugerida pelas formulações do tipo (5.13) e (5.14), que apenas fornecem o transporte sólido por arrastamento e terão de ser necessariamente complementadas com a formulação (5.16) para a quantificação do caudal sólido em suspensão, não é a mais adequada para a análise de processos sedimentares, sobretudo quando as extensões dos sistemas naturais a analisar são muito grandes (da ordem das dezenas, senão mesmo da centena de quilómetros), como em geral acontece. De facto, este é necessariamente o procedimento a adoptar recorrendo a fórmulas do tipo Meyer-Peter & Müller (1948) ou Engelund & Fredsøe (1976). Há, todavia, formulações que permitem obter directamente o caudal sólido total em trânsito (arrastamento mais suspensão).

Assim, ainda com base na tensão ou velocidade de atrito, mas desprezando o conceito de tensão crítica para o início do movimento sólido, tem sido utilizada com razoável sucesso a seguinte formulação (5.27) para o cálculo do caudal sólido total,  $q_{st}$ , devida a *Ackers & White* (Ackers & White, 1973).

$$q_{st} = C \frac{qD \left( \frac{F_{gr}}{E} - 1 \right)^m}{R_h \left( \frac{u_*}{u} \right)^n} \quad (5.27)$$

com,

$$F_{gr} = \frac{u_*^n}{\sqrt{gD(s-1)}} \left[ \frac{u}{\sqrt{32} \log_{10} \left( \frac{10 R_h}{D} \right)} \right]^{1-n} \quad \text{e} \quad D_{gr} = D \left[ \frac{g(s-1)}{\nu^2} \right]^{1/3}$$

Nestas equações,  $q_{st} = q_{sa} + q_{ss}$  ( $m^3 s^{-1}/m.l.$ ) representa a soma dos caudais sólidos transportados por arrastamento e em suspensão;  $q = Q/B$  ( $m^3 s^{-1}/m.l.$ ) representa o caudal líquido escoado por unidade de largura;  $u$  é a velocidade média do escoamento ( $u = Q/A$ , sendo  $A$  a área da secção líquida);  $u_*$  é a velocidade de atrito ( $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ );  $R_h = A/P$  ( $m$ ) representa o raio hidráulico da secção molhada;  $D \equiv D_{35}$  ( $m$ );  $s = \rho_s/\rho$  é a densidade do sedimento;  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido ( $\nu \approx 1.10 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1}$  para a água a cerca de  $17^\circ-18^\circ C$ ) e  $g \approx 9.81 m s^{-2}$ .

Os valores de  $m$ ,  $n$ ,  $E$  e  $C$  são obtidos a partir das seguintes expressões:

- Se  $1 < D_{gr} \leq 60$

$$\begin{cases} m = 1.34 + \frac{9.66}{D_{gr}} \\ n = 1.0 - 0.56 \log_{10} D_{gr} \\ E = 0.14 + \frac{0.23}{\sqrt{D_{gr}}} \\ \log_{10} C = 2.86 \log_{10} D_{gr} - (\log_{10} D_{gr})^2 - 3.53 \end{cases}$$

• Se  $D_{gr} > 60$

$$\begin{cases} m = 1.5 \\ n = 0.0 \\ E = 0.17 \\ C = 0.025 \end{cases}$$

Não haverá lugar a caudal sólido transportado, isto é  $q_{st} = 0$ , se e enquanto se verificar  $F_{gr} \leq E$ .

Pela facilidade de aplicação e qualidade das previsões de transporte sólido que fornece, a formulação de Ackers & White goza ainda hoje de grande aceitação entre as comunidades técnica e científica.

Uma formulação sugerida por Yang, também em 1973, para o cálculo da concentração do caudal sólido total, em partes por milhão (*ppm*) em peso, pode escrever-se na seguinte forma geral (5.28):

$$\begin{aligned} \log_{10} C_s = & A - B \log_{10} \left( \frac{w_{50} D_{50}}{\nu} \right) - E \log_{10} \left( \frac{u_*}{w_{50}} \right) + \\ & + \left[ F - G \log_{10} \left( \frac{w_{50} D_{50}}{\nu} \right) - H \log_{10} \left( \frac{u_*}{w_{50}} \right) \right] \log_{10} \left( \frac{uJ}{w_{50}} - \frac{u_{cr}J}{w_{50}} \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

com,

$$\frac{u_{cr}}{w_{50}} = \left[ \frac{2.5}{\log_{10} \left( \frac{u_* D_{50}}{\nu} \right) - 0.06} \right] + 0.66; \quad \text{se } 1.2 < \frac{u_* D_{50}}{\nu} < 70$$

$$\text{ou } \frac{u_{cr}}{w_{50}} = 2.05 \quad ; \quad \text{se } \frac{u_* D_{50}}{\nu} \geq 70$$

em que  $C_s$  é a concentração total de material sólido transportado, em *ppm* em peso;  $A$ ,  $B$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , e  $H$  são coeficientes de regressão, para areia fina ou grossa (gravilha);  $w_{50}$  é a velocidade de queda correspondente ao  $D_{50}$ , em  $ms^{-1}$ ;  $\nu$  é a viscosidade cinemática, em  $m^2 s^{-1}$ ;  $u_*$  é a velocidade de atrito junto ao fundo, em  $ms^{-1}$ ;  $u$  é a velocidade média do escoamento, em  $ms^{-1}$ ;  $J$  representa o declive da linha de energia, e  $u_{cr}$  representa um valor adimensional da velocidade crítica para o início do movimento sólido.

Os valores dos coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  foram obtidos em laboratório, considerando algumas centenas de experiências agrupadas em duas classes de diâmetros: areia fina, com diâmetros situados entre 0.015 mm e 1.71 mm, e gravilha, com diâmetros entre 2.46 mm e 7.01 mm; os valores obtidos para cada uma destas classes de diâmetros apresentam-se na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Valores dos coeficientes da fórmula de Yang (1973) [eq. (5.28)].

<i>Fundo</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>Areia</i>	5.435	0.286	0.457	1.799	0.409	0.314
<i>Gravilha</i>	6.681	0.633	4.816	2.784	0.305	0.282

Apresentam-se no ANEXO III subprogramas de cálculo automático, escritos em FORTRAN, com a resolução das fórmulas (5.27) de Ackers & White e (5.28) de Yang.

### Exemplo 5.1:

Numa secção de um determinado curso de água foram obtidos os seguintes dados:

- profundidade média do escoamento,  $h = 0.5273 \text{ m}$
- velocidade média do escoamento,  $u = 1.128 \text{ m s}^{-1}$
- diâmetro mediano do material de fundo,  $D_{50} = 0.283 \text{ mm}$
- inclinação da linha de energia,  $J = 0.00169$
- largura do rio nesta secção,  $B = 21.64 \text{ m}$
- temperatura da água,  $T = 14.4^\circ\text{C}$

Assumindo que a granulometria do material de fundo é aproximadamente uniforme, calcular a concentração total de material sólido transportado, utilizando as formulações de Ackers & White (com  $D_{35} \cong D_{50}$ ) e de Yang.

### Resolução:

#### a) Método de Ackers & White

$$\nu = 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$D_{gr} = 0.000283 \cdot \left[ \frac{9.81 \cdot (2.65 - 1)}{(1.2 \cdot 10^{-6})^2} \right]^{1/3} = 6.34$$

$$\begin{cases} m = 1.34 + \frac{9.66}{6.34} = 2.86 \\ n = 1.0 - 0.56 \log_{10} 6.34 = 0.55 \\ E = 0.14 + \frac{0.23}{\sqrt{6.34}} = 0.23 \\ \log_{10} C = 2.86 \log_{10} 6.34 - (\log_{10} 6.34)^2 - 3.53 \\ \quad = -1.8794 \Rightarrow C = 0.013 \end{cases}$$

$$u_* = \sqrt{9.81 \cdot 0.5273 \cdot 0.00169} = 0.0935 \text{ ms}^{-1}$$

$$F_{gr} = \frac{0.0935^{0.55}}{\sqrt{9.81 \cdot 0.000283 \cdot (2.65 - 1)}} \left[ \frac{1.128}{\sqrt{32} \log_{10} \left( \frac{10 \cdot 0.5028}{0.000283} \right)} \right]^{0.45}$$

$$= 1.013$$

$$\frac{q_{st}}{q} \cdot s = C \frac{D \left( \frac{F_{gr}}{E} - 1 \right)^m}{R_h \left( \frac{u_*}{u} \right)^n} \cdot s$$

$$= 0.013 \cdot \frac{0.000283 \cdot \left( \frac{1.013}{0.23} - 1 \right)^{2.86}}{0.5028 \cdot \left( \frac{0.0935}{1.128} \right)^{0.55}} \cdot 2.65 = 0.0025$$

196

donde,  $C_s = \frac{q_{st}}{q} \cdot s \cdot 10^6 = 2500 \text{ ppm}$  em peso.

### b) Método de Yang

$$u_* = 0.0935 \text{ m s}^{-1}$$

$$\frac{u_* D_{50}}{\nu} = \frac{0.0935 \cdot 0.000283}{1.2 \cdot 10^{-6}} = 22.1$$

$$\frac{u_{cr}}{w} = \left[ \frac{2.5}{\log_{10}(22.1) - 0.06} \right] + 0.66 = 2.61$$

$$D_*^3 \approx 254.8 \Rightarrow w = w_{50} = \frac{[(2.65 - 1) * 9.81]^{7/10} (0.000283)^{11/10}}{6 * (1.2 * 10^{-6})^{2/5}}$$

$$= 0.0342 \text{ m s}^{-1}$$

$$\log_{10} C_s = 5.435 - 0.286 * \log_{10} \left( \frac{0.0342 * 0.000283}{1.2 * 10^{-6}} \right) -$$

$$- 0.457 * \log_{10} \left( \frac{0.0935}{0.0342} \right) +$$

$$+ \left[ 1.799 - 0.409 * \log_{10} \left( \frac{0.0342 * 0.000283}{1.2 * 10^{-6}} \right) -$$

$$- 0.314 * \log_{10} \left( \frac{0.0935}{0.0342} \right) \right] *$$

$$* \log_{10} \left( \frac{1.128 * 0.00169}{0.0342} - \frac{0.0893 * 0.00169}{0.0342} \right) = 3.3112$$

$$\Rightarrow C_s = 2047 \text{ ppm em peso.}$$

Outra formulação igualmente com base na velocidade de atrito,  $u_*$ , e por comparação com a velocidade de atrito correspondente às condições críticas,  $u_{*c}$ , para o cálculo do caudal sólido total por unidade de largura,  $q_w$ , em regime permanente, é devida a *Karim & Kennedy* (Karim & Kennedy, 1990). Estes autores deduziram várias formulações, designadamente para condições de interacção entre as fases líquida e sólida (com inter-dependência entre a velocidade média do escoamento,  $u$ , e o caudal sólido,  $q_{st}$ ) e de não-interacção.

Com as aproximações,

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cong \sqrt{gRJ} \quad \text{e} \quad u_{*c} = \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}} \cong \sqrt{0.05g(s-1)D_{50}}$$

admitindo condições de regime hidraulicamente rugoso e tendo as restantes variáveis as definições anteriormente apresentadas, a formulação de *Karim & Kennedy* escreve-se:

$$\begin{aligned} \log_{10} \left( \frac{q_{st}}{\sqrt{g(s-1)D_{50}^3}} \right) &= -2.279 + 2.972 \log_{10} \left( \frac{u}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}} \right) + \\ &+ 1.060 \log_{10} \left( \frac{u}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}} \right) \log_{10} \left( \frac{u_* - u_{*c}}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}} \right) + (5.29) \\ &+ 0.299 \log_{10} \left( \frac{h}{D_{50}} \right) \log_{10} \left( \frac{u_* - u_{*c}}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}} \right) \end{aligned}$$

Conhecendo as características médias do escoamento (caudal líquido,  $q$ , e perda de carga unitária,  $J$ ) e as características medianas do sedimento ( $s = \rho_s / \rho$  e  $D_{50}$ ), poderá obter-se a velocidade média do escoamento através de,

$$\frac{u}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}} = 2.822 \left( \frac{q}{\sqrt{g(s-1)D_{50}^3}} \right)^{0.376} J^{0.310}$$

Como em geral acontece, em rios aluvionares, os coeficientes de atrito são fortemente influenciados pelo caudal sólido total (por arrastamento e em suspensão). Nesta conformidade, a dependência do caudal sólido mobilizado deverá assim ser considerada no cálculo das variáveis do escoamento médio (modelo acoplado), obtendo-se a seguinte relação implícita para o cálculo da velocidade média do escoamento:

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}} &= 5.370 \left( \frac{R_h}{D_{50}} \right)^{0.194} J^{0.137} \cdot \\ &\cdot \left( \frac{u_* - u_{*c}}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}} \right)^{-0.163} \left( \frac{q_{st}}{\sqrt{g(s-1)D_{50}^3}} \right)^{0.197} \end{aligned}$$

a qual deverá ser resolvida em conjunto com a expressão para o cálculo do caudal sólido total,  $q_{st}$ .

Uma formulação igualmente aplicável no cálculo do caudal sólido total,  $q_{st}$ , mas já em condições de regime variável, é devida a Bailard. Nesta formulação admite-se que a totalidade do transporte sedimentar responde instantaneamente a flutuações da velocidade junto ao fundo. Assume-se que a quantidade de sedimentos transportada é proporcional à dissipação de

energia nas proximidades do fundo; nesta conformidade, o caudal sólido transportado é expresso como uma combinação linear de termos que contêm potências daquela velocidade.

Em termos de valores médios instantâneos da velocidade característica do escoamento, a equação de Bailard escreve-se (Bailard, 1981):

$$\langle q_{st} \rangle = \frac{c_a}{g(s-1)} \left[ \underbrace{\frac{\varepsilon_a}{\tan \phi} \left( \langle |u|^2 u \rangle - \frac{1}{\tan \phi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \langle |u|^3 \rangle \right)}_{\text{Arrastamento}} + \underbrace{\frac{\varepsilon_s}{w_q} \left( \langle |u|^3 u \rangle - \frac{\varepsilon_s}{w_q} \frac{\partial \xi}{\partial x} \langle |u|^5 \rangle \right)}_{\text{Suspensão}} \right] \quad (5.30)$$

em que  $c_a$  é um coeficiente de atrito, dado por  $c_a = 0.06 [\log_{10} (12 R_h / k_R)]^{-2}$  no caso de um escoamento permanente, sendo  $k_R = (k_R)_g + (k_R)_f$ , com  $(k_R)_g \approx 3D_{90}$  e representando  $(k_R)_f$  a rugosidade devida às formas de fundo;  $R_h$  é o raio hidráulico da seção molhada;  $w_q$  é a velocidade de queda das partículas sólidas, e  $\varepsilon_a$  e  $\varepsilon_s$  são coeficientes de eficiência ( $0.10 \leq \varepsilon_a \leq 0.30$  e  $0.010 \leq \varepsilon_s \leq 0.030$ ). Em relação ao declive do fundo, importa notar que:  $\partial \xi / \partial x = (\xi_{i+1} - \xi_{i-1}) / (2\Delta x) = -\tan \beta$ .

Para uma partícula isolada, com diâmetro  $D$ , o valor de  $w_q$  pode ser aproximado por:

$$w_q = \sqrt{\frac{2}{3}(s-1)gD + \frac{36\nu^2}{D^2}} - \frac{6\nu}{D}$$

No caso de uma granulometria caracterizada pelo seu diâmetro mediano  $D_{50}$ , como é em geral o caso, deverá recorrer-se às expressões (5.11) e (5.12).

Apresenta-se ainda no ANEXO III um subprograma de cálculo automático, escrito em FORTRAN, para obter o transporte sólido total utilizando a formulação de Bailard.

Resolvendo o Exemplo 5.1 aplicando a fórmula de Bailard, com  $D_{90} \approx 2D_{50}$ ,  $w_q$  dado por (5.11) e as eficiências  $\varepsilon_a = 0.20$  e  $\varepsilon_s = 0.025$

(como constam no subprograma apresentado no ANEXO III), obtém-se  $C_s \approx 2188 \text{ ppm}$  em peso.

### 5.3.2 Equação de continuidade da fase sólida

Para o cálculo da evolução do fundo móvel, uma vez conhecido, em cada secção do canal, o caudal sólido total mobilizado por unidade de largura,  $q_{st}$ , recorre-se a uma equação de continuidade da fase sólida, a qual pode deduzir-se por um procedimento perfeitamente análogo ao utilizado na dedução da correspondente equação para a fase líquida, obtendo-se:

$$(1 - \lambda)P \frac{\partial \xi}{\partial t} + B \frac{\partial q_{st}}{\partial x} = Q_{st} \quad (5.31)$$

em que  $\lambda$  representa a porosidade do sedimento ( $0.30 \leq \lambda \leq 0.40$ );  $P$  é o perímetro molhado da secção do escoamento;  $B$  é a largura da secção;  $q_{st}$  ( $m^2 s^{-1}$ ) é o caudal sólido total, em volume, por unidade de largura;  $Q_{st}$  ( $m^3 s^{-1}/m.l.$ ) é um caudal sólido lateral contínuo, por unidade de largura do tributário, e  $\xi$  representa a cota do talvegue, que neste modelo se admite constante na secção transversal do canal.

A existência de variações locais importantes da concentração de sedimentos ( $C_s$ ) deve ser considerada na equação de transporte (5.31), a qual poderá então escrever-se na seguinte forma mais geral (Correia *et al.*, 1992):

$$(1 - \lambda)P \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (AC_s)}{\partial t} + B \frac{\partial q_{st}}{\partial x} = Q_{st} \quad (5.32)$$

### 5.4 Formulação morfodinâmica fluvial

Um modelo matemático adequado para o cálculo da evolução de um fundo móvel, tal como ocorre em canais naturais ou artificiais, é assim constituído pelas equações às derivadas parciais (3.14), (3.18) e (5.31) ou (5.32), às quais deverá juntar-se uma equação algébrica para o cálculo de  $q_{st}$  [uma das equações (5.27), (5.28), (5.29) ou (5.30) apresentadas em 5.3.1 *Equação dinâmica da fase sólida*]. Naturalmente que a precisão de um modelo numérico depende de um elevado número de factores que importa conhecer e controlar. No essencial, poder-se-ão apontar as seguintes fontes de erros de um modelo computacional:

- ocorrência de processos físicos não descritos pelas equações;
- validade dos esquemas numéricos adoptados na resolução das equações;
- procedimentos de esquematização e discretização;
- erros na topografia e/ou nos dados hidrológicos; e,
- procedimentos de calibração e validação.

Nesta conformidade, a precisão final de qualquer modelo numérico é muito difícil de quantificar. Certos erros provenientes de algumas daquelas fontes poderão ser minimizados; outros, porém, terão de ser aceites, devendo os resultados do modelo ser interpretados tendo estes aspectos em consideração. A maior limitação prende-se, desde logo, com a utilização corrente de modelos 1DH que, como é óbvio, não são rigorosamente aplicáveis a todas as configurações e unidades hidráulicas presentes ao longo de um rio, tais como curvas, confluências, alargamentos e estreitamentos importantes, albufeiras, planos de inundação, pilares de pontes, açudes, etc. Estas ocorrências poderão justificar o recurso a modelos bidimensionais em planta, ou mesmo a modelos *quase*-tridimensionais (*quase*-3D ou 2.5DH).

Apresentam-se nas secções seguintes formulações matemáticas de dois tipos de modelos 1DH e 2DH, incluindo as fases líquida e sólida, recomendados para utilizações em domínios de Hidráulica Fluvial.

#### 5.4.1 Formulação clássica

Admitindo que o caudal sólido em suspensão é muito reduzido e não afecta o movimento das partículas líquidas, como é em geral o caso de escoamentos fluviais ainda distantes das regiões estuarinas, o sistema de equações a resolver por um processo numérico adequado é o seguinte:

$$\frac{\partial(A + A_0)}{\partial t} + P \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial(h + \xi)}{\partial x} + \frac{A \tau}{h \rho} + q_l \left( \frac{Q}{A} - u_l \right) = 0 \quad (5.33)$$

$$(1 - \lambda) P \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(AC_s)}{\partial t} + B \frac{\partial q_{st}}{\partial x} = Q_{st}$$

em que  $\xi$  é a cota do talvegue do canal;  $q_l$  é um caudal lateral da mistura água-sedimentos, por unidade de largura;  $P$  é o perímetro molhado da secção do escoamento;  $C_s$  é a concentração volumétrica média de sedimentos ( $C_s = Q_s/Q \approx B * q_{st}/Q$ );  $q_{st}$  é um caudal sólido total, em volume, e  $Q_{st}$  ( $m^3 s^{-1}/m.l.$ ) representa um caudal sólido lateral, por unidade de largura do tributário.

Note-se que foram considerados efeitos de variações locais importantes da batimetria na equação de continuidade da fase líquida do sistema de equações (5.33), através do termo  $P(\partial\xi/\partial t)$ . Por conseguinte, aquele sistema de equações é perfeitamente adequado quando o processo de transporte sólido é fundamentalmente por arrastamento. Todavia, em zonas de escoamento ainda fundamentalmente unidimensional no plano horizontal, mas com elevadas concentrações de material sólido em suspensão, a influência desta concentração deverá ser considerada nas equações da fase líquida. Por outro lado, a existência de importantes estratificações devidas a fortes gradientes de salinidade e/ou de temperatura, poderão justificar o recurso a uma formulação diferente da apresentada, nomeadamente a um modelo do tipo 2DV, ou considerar a influência da estratificação no sistema de equações 1DH (5.33), através do número de Richardson.

Como se verá mais adiante, utilizando um modelo do tipo Prandtl para o cálculo das tensões de atrito no fundo, a influência da estratificação deverá traduzir-se no amortecimento do comprimento de mistura em função do número de Richardson, de acordo com uma relação do tipo:

$$\left(\frac{l}{l_m}\right)^2 = (1 + \beta R_i)^n$$

em que  $l_m$  é o comprimento de mistura do fluido não-estratificado e  $R_i$  é o número de Richardson, dado por,

$$R_i = -g(\partial\rho/\partial z)/[\rho(\partial u/\partial z)^2]$$

representando  $\partial\rho/\partial z$  e  $\partial u/\partial z$  os gradientes verticais da massa volúmica e do perfil da velocidade do escoamento, respectivamente.

Segundo Villaret (1986), os coeficientes  $\beta$  e  $n$  assumem os seguintes valores:  $\beta \approx 14$  e  $n \approx -1.5$ . Todavia, refira-se que a grande disparidade de valores para estes coeficientes presentes na bibliografia revela bem o ainda reduzido conhecimento actual da influência de uma estratificação sobre o número de Prandtl.

Porém, importa reconhecer que na generalidade das exigências do mundo real, em ambientes fluviais suficientemente afastados de estuários, e tendo ainda presentes as simplificações que um modelo numérico nesta área sempre comporta, é em geral suficiente recorrer a um modelo 1DH, com uma formulação do tipo (5.33), sem o efeito da estratificação, ou desprezando mesmo, como frequentemente se justifica, as variações locais da concentração de sedimentos [ $\partial(AC_s)/\partial t = 0$ ].

Uma correcta simulação das tensões de atrito no fundo [termo  $(A/h) * (\tau/\rho)$ ] é fundamental para a obtenção de resultados credíveis em dinâmica sedimentar. Tratando-se de simular apenas a fase líquida, é suficiente recorrer a uma fórmula do tipo Manning-Strickler, como se viu no Capítulo 3. Por conseguinte, nestas circunstâncias aquele termo é aproximado por:

$$\frac{A \tau}{h \rho} = \frac{g n_k^2 |Q| Q}{AR_h^{4/3}}$$

Todavia, em dinâmica sedimentar não basta trabalhar com os efeitos médios na coluna de água de valores da tensão de atrito assim calculados. Tanto o processo de arrastamento do material sólido junto ao fundo como o mecanismo de arranque e colocação dos sedimentos em suspensão são o resultado de escoamentos muito complexos que ocorrem numa reduzida espessura da camada limite turbulenta que se gera nas proximidades do fundo. Nesta conformidade, só será possível obter valores satisfatórios para a tensão de atrito no fundo recorrendo a um modelo de camada limite turbulenta para o fecho do sistema de equações (5.33).

Em escoamentos fluviais, particularmente em zonas distantes de obstáculos e sem grandes constrangimentos/perturbações no escoamento, é comum e ainda assim aceitável o recurso a formulações empíricas do tipo Manning-Strickler. Nas proximidades de zonas com grandes perturbações na veia líquida só mesmo o recurso a modelos 1DV ou 2DV de zero-, uma- ou duas-equações dos tipos  $K-L$  ou  $K-\varepsilon$  poderá resolver satisfatoriamente um problema de dinâmica sedimentar.

Um estudo profundo sobre esta matéria ultrapassa os objectivos que nos propomos atingir com esta obra; por conseguinte, remete-se o leitor para literatura da especialidade, nomeadamente Antunes do Carmo (1995) e Antunes do Carmo *et al.* (2003). Faz-se aqui apenas uma ligeira abordagem, implementando um modelo de zero-equações do tipo Prandtl.

### 5.4.2 Modelo de camada limite de zero-equações

Designam-se por modelos de zero-equações os modelos algébricos, isto é, todos aqueles que não utilizam qualquer equação diferencial para o cálculo das componentes que caracterizam a turbulência, nomeadamente a energia cinética turbulenta ( $K$ ) e a macro-escala da turbulência ( $L$ ) ou uma medida de dissipação da turbulência ( $\varepsilon$ ), a partir das quais se calcula a viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ).

Quando a energia cinética turbulenta é calculada por uma equação de transporte (equação às derivadas parciais), mantendo-se uma equação algébrica para o cálculo de  $L$  ou  $\varepsilon$ , o modelo diz-se de uma-equação. Naturalmente que um modelo de duas-equações utiliza duas equações às derivadas parciais para o cálculo das variáveis que caracterizam a turbulência, nos modelos acima referidos  $K$  e  $L$  ou  $K$  e  $\varepsilon$ .

Em qualquer escoamento real com superfície livre forma-se na vizinhança do fundo uma camada limite cuja estrutura depende do escoamento (laminar ou turbulento) e que desempenha um papel fundamental em dinâmica sedimentar.

Assim, seja um escoamento unidireccional (ou bidimensional no plano vertical) propagando-se segundo a direcção  $x$ . O eixo vertical  $z$  é positivo na direcção ascendente (Figura 5.5).

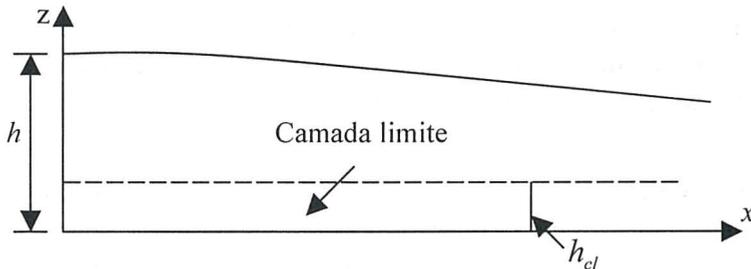


Figura 5.5 - Eixos coordenados e notações para o estudo da camada limite de fundo.

Representando as componentes da velocidade nas direcções  $x$  e  $z$  por  $u$  e  $w$ , respectivamente, a equação geral de conservação da quantidade de movimento segundo  $x$  escreve-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5.34)$$

Consideremos agora um escoamento *quase*-horizontal, o que permite eliminar  $w$ , e admitamos ainda que as derivadas segundo  $x$  são desprezáveis face aos restantes termos da equação (5.34). Seja finalmente a decomposição clássica de Reynolds, que consiste em admitir que o valor instantâneo das variáveis  $u$  e  $w$  se pode representar pela soma de uma componente média temporal com uma flutuação, ou seja,  $u = \bar{u} + u'$  e  $w = \bar{w} + w'$ . Nesta conformidade, atendendo a que a média temporal das flutuações é nula, isto é,  $\int_0^h u' dz = \int_0^h w' dz = 0$ , a média temporal da equação (5.34) escreve-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{u'w'} \right)$$

em que se suprimiram as barras nas componentes médias da velocidade por facilidade de escrita.

Por outro lado, a projecção da equação dinâmica sobre o eixo vertical conduz a:

$$p(x, z, t) = p_0(x, z, t) + g(h - z)$$

em que  $p_0(x, z, t)$  representa a pressão na fronteira superior da camada limite.

Por conseguinte, resulta então para o gradiente da pressão no exterior da camada limite:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x}$$

Seja agora um regime permanente, como é em geral o caso dos escoamentos fluviais em análise. Interessa-nos estudar o caso mais geral de um escoamento turbulento, isto é, com o número de Reynolds  $R_e = uh/\nu > 4000$ .

A tensão laminar de origem viscosa é dada por  $\tau_l = \rho\nu(\partial u/\partial z)$ . A tensão turbulenta (Reynolds) é  $\tau_t = \rho \overline{u'w'}$ , a qual, por analogia com a tensão laminar de origem viscosa, se representa por:

$$\tau_t = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial z}$$

sendo  $\nu_t$  a viscosidade turbulenta. Prandtl exprimiu esta tensão sob a forma:

$$\tau_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{ou} \quad \nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad (5.35)$$

em que  $l_m = kz$  representa o comprimento de mistura que caracteriza a dimensão dos turbilhões, sendo  $k = 0.4$  a constante de von Kármán.

#### 5.4.2.1 Sub-camada viscosa

Sobre um fundo liso existe, na vizinhança deste, uma sub-camada viscosa onde se verifica  $\tau/\rho = u_*^2 = \text{constante}$ , em que  $u_*$  é a velocidade de atrito no fundo. Nesta conformidade, deduz-se:

$$u_*^2 = \nu \frac{\partial u}{\partial z}$$

obtendo-se, por integração,  $u(z) = \frac{u_*^2}{\nu} z$ .

#### 5.4.2.2 Camada logarítmica

Acima da sub-camada viscosa encontra-se uma camada onde os fenómenos de turbulência adquirem grande importância. Com a hipótese de Prandtl tem-se:

$$\frac{\tau_t}{\rho} = u_*^2 = k^2 z^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}$$

vindo, por integração,

206

$$u = \frac{u_*}{k} \log_e \left( \frac{z}{z_0} \right) = 2.5 u_* \log_e \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad (5.36)$$

em que  $z_0$  depende da rugosidade do fundo,  $k_s$ . Em função do parâmetro adimensional  $u_* k_s / \nu$ , conhecido por número de Reynolds do grão, distinguem-se as seguintes situações:

- a) se  $u_* k_s / \nu < 5$  o escoamento diz-se hidraulicamente liso, sendo  $z_0$  dado por  $z_0 = \nu / (9u_*)$ ;

- b) se  $u_* k_s / \nu > 70$  o escoamento é hidraulicamente rugoso, sendo  $z_0$  dado por  $z_0 = k_s / 30$ ;
- c) se  $5 < u_* k_s / \nu < 70$  trata-se de uma zona de transição, em que  $z_0$  é função da espessura da camada limite e da dimensão do grão.

Pode obter-se o valor de  $z_0$  a partir do gráfico da Figura 5.6.

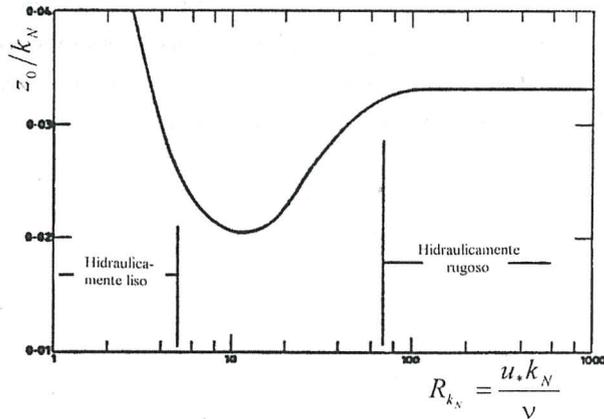


Figura 5.6 - Variação de  $z_0/k_N$  com  $R_{k_N}$  (adaptado de Temperville & Thanh, 1990).

É habitual tomar para a rugosidade do fundo o valor  $k_s = 2.5D_{50}$ . Assim, conhecidos os valores de  $u_*$  e  $z_0$ , a equação (5.36) permite traçar integralmente o perfil vertical  $u(z)$  de velocidades.

Verifica-se (Antunes do Carmo, 1995) que a expressão para o comprimento de mistura  $l_m = k z \sqrt{1 - z/h_{cl}}$ , sendo  $h_{cl}$  a espessura da camada limite, conduz, em geral, a melhores resultados que a definição original  $l_m = kz$ . No caso de uma corrente, o valor de  $h_{cl}$  poderá ser tomado igual à altura da lâmina líquida,  $h$ ; poderá também tomar-se a altura a que o perfil logarítmico da velocidade iguala o perfil da velocidade média,  $h_{cl} = h/e$ . Naturalmente que, em qualquer dos casos, o valor da camada superior a considerar para a variação de  $z$  não poderá ultrapassar o valor de  $h_{cl}$ .

A implementação deste modelo exige assim que o perfil uniforme da velocidade média seja transformado num perfil equivalente (com idêntica área) que obedeça à lei teórica de distribuição vertical da velocidade (5.36), garantindo que este perfil intersecta o perfil da velocidade média à altura  $z = h/e$ .

### Exemplo 5.2:

Seja o escoamento num troço de rio devido a uma corrente com altura e velocidade média iguais a  $2.0\text{ m}$  e a  $1.0\text{ m s}^{-1}$ , respectivamente. O leito do rio é constituído por areia com um  $D_{50} = 1.0\text{ mm}$ . Calcular o perfil vertical da velocidade na zona logarítmica.

### Resolução:

Com  $z_0 = D_{50}/12 = 0.0833\text{ mm}$ , resulta para a velocidade de atrito no fundo  $u_* = 0.4 u / \log_e [h/(z_0 e)] = 0.044\text{ m s}^{-1}$ . Sobreponham-se na Figura 5.7 o perfil vertical da velocidade na zona logarítmica com o perfil (verticalmente uniforme) da velocidade média  $\bar{u} = 1.0\text{ m s}^{-1}$ .

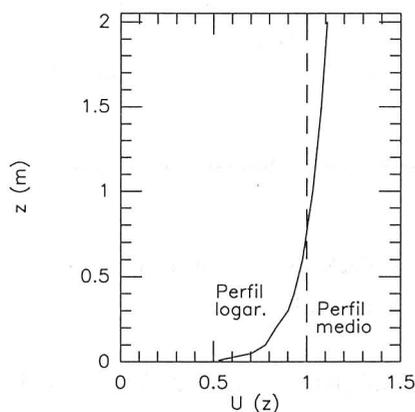


Figura 5.7 - Sobreposição dos perfis verticais da velocidade na zona logarítmica (a cheio) e da velocidade média.

Consideraram-se apenas 10 camadas, a alturas variáveis; foram as seguintes:  $z = 0.01\text{ m}$ ,  $0.05\text{ m}$ ,  $0.10\text{ m}$ ,  $0.20\text{ m}$ ,  $0.30\text{ m}$ ,  $0.40\text{ m}$ ,  $0.60\text{ m}$ ,  $1.0\text{ m}$ ,  $1.50\text{ m}$  e  $2.0\text{ m}$ . Nestas secções obtiveram-se:

$$u(z = 2.00) = 1.109\text{ m s}^{-1}$$

$$u(z = 1.50) = 1.078\text{ m s}^{-1}$$

$$u(z = 1.00) = 1.033\text{ m s}^{-1}$$

$$u(z = 0.60) = 0.977\text{ m s}^{-1}$$

$$u(z = 0.40) = 0.932\text{ m s}^{-1}$$

$$u(z = 0.30) = 0.901\text{ m s}^{-1}$$

$$u(z = 0.20) = 0.836 \text{ m s}^{-1}$$

$$u(z = 0.10) = 0.780 \text{ m s}^{-1}$$

$$u(z = 0.05) = 0.704 \text{ m s}^{-1}$$

$$u(z = 0.01) = 0.527 \text{ m s}^{-1}$$

Como se observa, esta discretização é manifestamente insuficiente na base da camada limite, em particular para alturas inferiores a cercas de 10 *cm*. Com efeito, a variação do perfil da velocidade é muito rápida na base desta camada, para depois ter uma variação muito suave, sobretudo a partir da altura  $z = h/e = 0.74 \text{ m}$ . Por esta razão o cálculo da tensão de atrito exige uma discretização da coluna de água muito cerrada na sua base, na ordem do milímetro ou mesmo inferior, para depois ir aumentando exponencialmente.

Com a utilização de um modelo de zero-equações do tipo Prandtl, a simulação dos fenómenos turbulentos fica ainda demasiado simplificada, conduzindo ainda em muitas situações a prováveis afastamentos entre os resultados obtidos e os valores reais. Importa, no entanto, reconhecer que é já um passo em frente relativamente à utilização ainda hoje corrente de formulações do tipo Manning-Strickler em dinâmica sedimentar. O modelo de Prandtl, apesar de muito limitado, tem ainda sobre os modelos empíricos do tipo Manning-Strickler a grande virtude de não exigir a fixação de qualquer parâmetro empírico.

Dado o actual ritmo de evolução dos meios informáticos, é previsível que a muito curto prazo surjam novos modelos de turbulência de uma e duas equações dos tipos 1DV e 2DV, implementados em estruturas bidimensionais no plano horizontal, ou mesmo em modelos *quase*-tridimensionais (2.5DH ou *quase*-3D). Uma destas estruturas computacionais, que utiliza um modelo 1DV de duas-equações para fechamento do sistema de equações de um modelo *quase*-3D, está descrita e foi utilizada em Antunes do Carmo & Carreiras (2002).

#### 5.4.3 Extensão a duas dimensões no plano horizontal

Naturalmente que a metodologia apresentada na secção 5.4.1 *Formulação clássica* para um escoamento unidimensional é facilmente extensível para o caso bidimensional em planta. Neste caso, o sistema de equações a resolver escreve-se (fase líquida):

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q_u}{\partial x} + \frac{\partial Q_v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} &= E_x \\ \frac{\partial Q_v}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= E_y\end{aligned}\tag{5.37}$$

em que:

$$\begin{aligned}H &= h(x, y, t) \\ Q_u &= u(x, y, t) h(x, y, t) \\ Q_v &= v(x, y, t) h(x, y, t) \\ F &= u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \\ G &= uvh \\ S &= v^2 h + \frac{1}{2} g h^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_x(x, y, t) &= -gH \frac{\partial \xi}{\partial x} + f Q_v - \frac{1}{\rho} \tau_{fx} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial Q_u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial Q_u}{\partial y} \right) \\ E_y(x, y, t) &= -gH \frac{\partial \xi}{\partial y} - f Q_u - \frac{1}{\rho} \tau_{fy} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial Q_v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial Q_v}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

sendo as tensões de atrito no fundo,  $\tau_f / \rho$ , calculadas por (modelo de zero-equações):

$$\frac{\tau_{fx}}{\rho}(z) = v_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\tau_{fy}}{\rho}(z) = v_t \frac{\partial v}{\partial z}$$

210

com a distribuição da viscosidade turbulenta obtida através de,

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial |\bar{V}|}{\partial z} \right|, \quad \text{com } |\bar{V}| = \left( u^2 + v^2 \right)^{1/2}$$

ou pelo modelo de Manning-Strickler:

$$\frac{\tau_{fx}}{\rho} = \frac{g n_k^2 (u^2 + v^2)^{1/2} u}{h^{7/3}} \quad ; \quad \frac{\tau_{fy}}{\rho} = \frac{g n_k^2 (u^2 + v^2)^{1/2} v}{h^{7/3}}$$

Por último, a equação de continuidade bidimensional da fase sólida, a resolver em simultâneo com as equações (5.37), escreve-se (desprezando a contribuição das variações locais da concentração de sedimentos):

$$(1 - \lambda) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (q_{st})_x}{\partial x} + \frac{\partial (q_{st})_y}{\partial y} = q_{st} \quad (5.38)$$

em que  $q_{st}$  ( $m^3 s^{-1}/m.l./m.l.$ ) representa um caudal sólido, entrado ou saído através da fronteira do domínio, por unidade de largura do curso principal e por unidade de largura do tributário.

Na secção 5.5 *Aplicações* são apresentados os resultados de uma aplicação a um caso teórico, considerando as tensões de atrito calculadas com base no modelo exposto de zero-equações e na formulação empírica de Manning-Strickler.

#### 5.4.4 Formulação alternativa da fase sólida

Uma formulação alternativa para o cálculo da evolução do fundo móvel pode escrever-se na seguinte forma (equação de Exner modificada), desprezando as variações locais da concentração de sedimentos ( $\partial C_s / \partial t = 0$ ):

$$(1 - \lambda) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial q'_{st}}{\partial x} = q_{st} \quad (5.39)$$

com  $q'_{st} = q'_{sa} + q'_{ss}$ , sendo as componentes do transporte por arrastamento ( $q'_{sa}$ ) e em suspensão ( $q'_{ss}$ ) dadas por:

$$q'_{sa} = q_{sa} - \varepsilon_{sa} \left| q_{sa} \right| \frac{\partial \xi}{\partial x} ; \quad q'_{ss} = q_{ss} - \varepsilon_{ss} \left| q_{ss} \right| \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (5.40)$$

Os segundos termos dos segundos membros de cada uma das equações (5.40) correspondem a correcções devidas a irregularidades do fundo. Com efeito, como se pode verificar naquelas equações e é fisicamente reconhecido, um declive positivo ( $\partial \xi / \partial x < 0$ ) deverá traduzir-se num aumento do caudal sólido disponível para o transporte.

Os coeficientes adimensionais  $\varepsilon_{sa}$  e  $\varepsilon_{ss}$  são funções do ângulo de atrito interno, da velocidade do escoamento e da velocidade de queda das partículas sólidas.

Nesta conformidade, podemos escrever:

$$q'_{st} = q_{sa} - \varepsilon_{sa} |q_{sa}| \frac{\partial \xi}{\partial x} + q_{ss} - \varepsilon_{ss} |q_{ss}| \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

ou ainda,

$$q'_{st} = q_{sa} + q_{ss} - (\varepsilon_{sa} |q_{sa}| + \varepsilon_{ss} |q_{ss}|) \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (5.41)$$

Desenvolvendo a equação (5.39), tendo em conta a equação (5.41)], e desprezando o produto de variações  $\partial[(\varepsilon_{sa} |q_{sa}| + \varepsilon_{ss} |q_{ss}|)(\partial \xi / \partial x)] / \partial x$ , resulta a seguinte equação de continuidade modificada (5.42), para o cálculo da evolução do fundo móvel:

$$(1 - \lambda) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(q_{sa} + q_{ss})}{\partial x} - (\varepsilon_{sa} |q_{sa}| + \varepsilon_{ss} |q_{ss}|) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = q_{st} \quad (5.42)$$

Deste modo, basta-nos calcular as componentes dos caudais sólidos admitindo o fundo horizontal ( $q_{sa}$  e  $q_{ss}$ ), sendo as influências das irregularidades do fundo consideradas apenas ao nível da equação (5.42). De acordo com esta metodologia, num modelo bidimensional em planta a correspondente equação de continuidade da fase sólida escreve-se:

$$(1 - \lambda) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(q_{sa} + q_{ss})_x}{\partial x} + \frac{\partial(q_{sa} + q_{ss})_y}{\partial y} - (\varepsilon_{sa} |q_{sa}| + \varepsilon_{ss} |q_{ss}|)_x \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - (\varepsilon_{sa} |q_{sa}| + \varepsilon_{ss} |q_{ss}|)_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = q_{st} \quad (5.43)$$

Esta equação (5.43) deverá assim substituir a equação (5.38), atrás apresentada.

São fundamentalmente duas as grandes *vantagens desta metodologia*; com efeito:

- 1 - A generalidade das formulações (de carácter empírico) propostas na literatura da especialidade para o cálculo dos caudais sólidos transportados não tem em consideração as irregularidades do fundo; e,
- 2 - Ao fazer intervir termos de 2ª ordem na equação de continuidade da fase sólida [equações (5.42) e (5.43)], são significativamente reduzidas as oscilações numéricas tão características das equações (5.31) e (5.38).

Importa, por outro lado, notar a analogia entre as expressões propostas para o cálculo das componentes do caudal sólido transportado por arrastamento e em suspensão e as equações de Bailard para o cálculo destas mesmas componentes do transporte sólido; de acordo com Bailard, estas equações escrevem-se:

$$\begin{aligned}
 q_{sa} &= \frac{c_a}{g(s-1)} \frac{\varepsilon_a}{\tan \phi} |u|^2 u \quad \rightarrow \quad q'_{sa} = q_{sa} - \frac{1}{\tan \phi} |q_{sa}| \frac{\partial \xi}{\partial x} \\
 q_{ss} &= \frac{c_a}{g(s-1)} \frac{\varepsilon_s}{w_q} |u|^3 u \quad \rightarrow \quad q'_{ss} = q_{ss} - \varepsilon_{ss} \left| \frac{u}{w_q} \right| |q_{ss}| \frac{\partial \xi}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{5.44}$$

Nesta conformidade, fazendo  $\varepsilon_{sa} = 1/\tan \phi$  e  $\varepsilon_{ss} = \varepsilon_s |u/w_q|$  resulta a mesma expressão [equação (5.41)] para o cálculo do caudal sólido total transportado,  $q'_{st} = q'_{sa} + q'_{ss}$ .

#### 5.4.5 Modelo numérico

Como se pode demonstrar teoricamente, e a prática confirma, a escala do tempo relativa ao movimento do fluido é muito inferior à escala do tempo de deformação do fundo móvel, pelo que se torna possível um desdobramento dos cálculos hidrodinâmicos e da resposta geomorfológica. Nesta conformidade, a dependência da terceira equação relativamente às duas primeiras do sistema (5.33) pode ser considerada apenas como parte de um eventual processo iterativo, sem necessidade de a resolver em simultâneo.

Sendo a equação clássica de continuidade da fase sólida (equação de Exner) perfeitamente idêntica à equação de continuidade da fase líquida, é igualmente válida a utilização do método explícito de MacCormack para a sua resolução, como exemplificado no Capítulo 2 para as duas primeiras equações do sistema (5.33). Contudo, poderá ser utilizado qualquer outro esquema de diferenças finitas, nomeadamente o método de Crank-Nicolson. A aplicação deste método à equação de continuidade da fase sólida (5.31) conduz à seguinte equação de diferenças finitas:

$$\begin{aligned}
 (\xi)_i^{n+1} &= (\xi)_i^n - \delta \left\{ \theta [(q_{st})_{i+1}^{n+1} - (q_{st})_{i-1}^{n+1}] + \right. \\
 &\quad \left. + (1-\theta)[(q_{st})_{i+1}^n - (q_{st})_{i-1}^n] \right\} + \vartheta (Q_{st})_i
 \end{aligned}$$

com  $\theta = 0.5$ ,  $\delta = \Delta t B_i / [(1-\lambda) P_i (x_{i+1} - x_{i-1})]$  e  $\vartheta = \Delta t / [(1-\lambda) P_i]$ .

Seja de novo a equação (5.32), escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{(1-\lambda)P} \left( Q_{st} - \frac{\partial(AC_s)}{\partial t} - B \frac{\partial q_{st}}{\partial x} \right)$$

Esta equação poderá ser igualmente resolvida utilizando um esquema numérico baseado em volumes de controlo finitos. De acordo com este método, os processos de actualização das cotas de fundo e correcção dos novos valores das alturas do escoamento em cada instante  $(n+1)\Delta t$ , após resolução da fase líquida, desenvolve-se segundo três etapas, em conformidade com o seguinte procedimento:

1. Calcula-se  $\Delta \xi_{i-1/2}^{n+1} = M_1 \frac{\Delta t}{(1-\lambda)} \frac{2}{(P_{i-1/2}^n + P_{i-1/2}^{n+1})}$

com  $M_1$  dado por:

$$M_1 = \frac{1}{2} (Q_{st_{i-1/2}}^n + Q_{st_{i-1/2}}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta t} [(AC_s)_{i-1/2}^{n+1} - (AC_s)_{i-1/2}^n + (AC_s)_{i-1/2}^{n+1} - (AC_s)_{i-1/2}^n] - \frac{B_{i-1} + B_i}{4\Delta x} (q_{sti}^n - q_{st_{i-1}}^n + q_{sti}^{n+1} - q_{st_{i-1}}^{n+1})$$

2. Calcula-se  $\Delta \xi_{i+1/2}^{n+1} = M_2 \frac{\Delta t}{(1-\lambda)} \frac{2}{(P_{i+1/2}^n + P_{i+1/2}^{n+1})}$

com  $M_2$  dado por:

$$M_2 = \frac{1}{2} (Q_{st_{i+1/2}}^n + Q_{st_{i+1/2}}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta t} [(AC_s)_{i+1/2}^{n+1} - (AC_s)_{i+1/2}^n + (AC_s)_{i+1/2}^{n+1} - (AC_s)_{i+1/2}^n] - \frac{B_i + B_{i+1}}{4\Delta x} (q_{st_{i+1}}^n - q_{sti}^n + q_{st_{i+1}}^{n+1} - q_{sti}^{n+1})$$

3. Finalmente, calculam-se as variações do fundo  $\Delta \xi_i$ , no instante  $(n+1)\Delta t$ , através de:

$$\Delta \xi_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\Delta \xi_{i-1/2}^{n+1} + \Delta \xi_{i+1/2}^{n+1})$$

Na fronteira de montante toma-se:  $\Delta \xi_1^{n+1} = \Delta \xi_{i+1/2}^{n+1} = \Delta \xi_{3/2}^{n+1}$ .

Para a fronteira de jusante resulta:  $\Delta \xi_N^{n+1} = \Delta \xi_{i-1/2}^{n+1} = \Delta \xi_{N-1/2}^{n+1}$ .

Por último, são actualizados os valores das cotas do fundo,  $\xi_i^{n+1}$ , e corrigidas as alturas do escoamento,  $h_i^{n+1}$ , obtidas por resolução da fase líquida, através de:  $\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + \Delta \xi_i^{n+1}$  e  $(h^*)_i^{n+1} = h_i^{n+1} - \Delta \xi_i^{n+1}$ , respectivamente.

Seja agora a equação (5.42) a resolver pelo método de MacCormack. Para a manutenção das características do esquema centrado de 2ª ordem no espaço e no tempo do método de previsão-correcção de MacCormack faz-se notar que para efeitos de discretização da 2ª derivada da equação (5.42) esta pode escrever-se na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

devido a primeira derivada  $\partial \xi / \partial x$  ser centrada, e com o esquema de previsão-correcção (com diferenças regressivas e progressivas) aplicado considerando como variável a 1ª derivada centrada, ou seja,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\xi_{i+1}^n - \xi_{i-1}^n}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right)$$

Por conseguinte, fazendo  $\xi_x = (\xi_{i+1}^n - \xi_{i-1}^n) / (x_{i+1} - x_{i-1})$ , o esquema é sucessivamente aplicado à derivada  $\partial \xi_x / \partial x$ , mantendo-se integralmente as propriedades do método de MacCormack. A equação de continuidade da fase sólida a resolver em cada fase de previsão-correcção é então a seguinte:

$$(1 - \lambda) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (q_{st} + q_{ss})}{\partial x} - (\varepsilon_{sa} |q_{sa}| + \varepsilon_{ss} |q_{ss}|) \frac{\partial \xi_x}{\partial x} = q_{st}$$

a qual contém apenas derivadas de 1ª ordem, não oferecendo qualquer dificuldade adicional.

Inclui-se no CD-ROM que faz parte integrante deste livro uma versão executável do programa computacional *fluvial\_sed* (código de acesso 5659), que utiliza o método explícito de previsão-correcção de MacCormack para a resolução do seguinte sistema de equações (5.45), com as tensões de atrito no fundo calculadas por um modelo semi-empírico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (A + A_0)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_l \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial (h + \xi)}{\partial x} + \frac{A}{h} \frac{\tau}{\rho} + q_l \left( \frac{Q}{A} - u_l \right) &= 0 \quad (5.45) \\ (1 - \lambda) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial q_{st}}{\partial x} &= q_{st} \end{aligned}$$

em que o caudal sólido total  $q_{st}$  é calculado, em alternativa, por Ackers & White (5.27) ou por Bailard (5.30). Para além da versão executável deste modelo computacional, é ainda oferecido em CD-ROM o ficheiro de dados correspondente à aplicação 1DH descrita no ponto 5.5.2 *Aplicação do modelo unidimensional fluvial\_sed*.

No ponto 5.5.1 *Aplicação do modelo bidimensional morfodin* são apresentados resultados de uma aplicação do modelo bidimensional (2DH) de dinâmica sedimentar *morfodin*. Este modelo resolve as equações da fase líquida (5.37) e a equação de transporte da fase sólida (5.43), com os caudais sólidos por arrastamento e em suspensão dados por (5.44).

## 5.5 Aplicações

Apresentam-se nesta secção duas aplicações dos modelos morfodinâmicos desenvolvidos ao longo deste capítulo. Trata-se, no primeiro caso, de aplicar o modelo bidimensional *morfodin* para obter a evolução qualitativa do fundo móvel de um hipotético troço de rio com dois meandros e o correspondente estuário final. O segundo exemplo refere-se à aplicação do modelo morfodinâmico unidimensional *fluvial\_sed* para calcular a evolução de um canal de fundo móvel, em desequilíbrio, até ao estabelecimento de um regime de *quase-equilíbrio*.

### 5.5.1 Aplicação do modelo bidimensional *morfodin*

Pretende-se simular a evolução do fundo móvel de um segmento de rio meandrizado, com a configuração representada na Figura 5.8, partindo de uma situação de repouso, uma profundidade inicial de 3.0 m e uma velocidade constante e igual a 1.0 m s<sup>-1</sup> na fronteira de montante. O talvegue tem um declive inicial de 1 ‰, sendo o leito constituído por areia com  $D_{50} = 0.002$  m e  $D_{90} = 0.003$  m.

Para efeitos de simulação numérica é utilizado o modelo bidimensional em planta *morfodin*, com as tensões de atrito no fundo calculadas, em alternativa, pelo modelo de camada limite de zero-equações do tipo Prandtl, ou pelo modelo empírico de Manning-Strickler.

Apresentam-se nas Figuras 5.9 e 5.10 o campo instantâneo da velocidade obtido nos dois meandros e uma perspectiva dos fundos obtida após 24 horas de simulação.

Nas Figuras 5.11 e 5.12 apresentam-se planimetrias do fundo, igualmente obtidas após 24 horas de simulação. Pretende-se com as últimas figuras comparar os resultados obtidos considerando as tensões de atrito no fundo calculadas pelo modelo de Prandtl (Figura 5.11) e pela fórmula de Manning-Strickler (Figura 5.12).

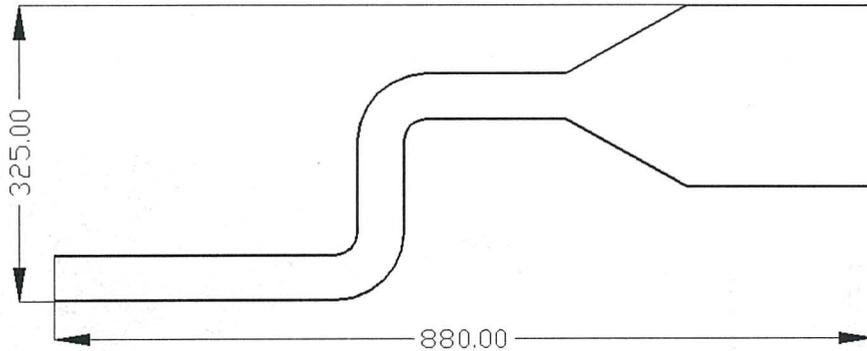
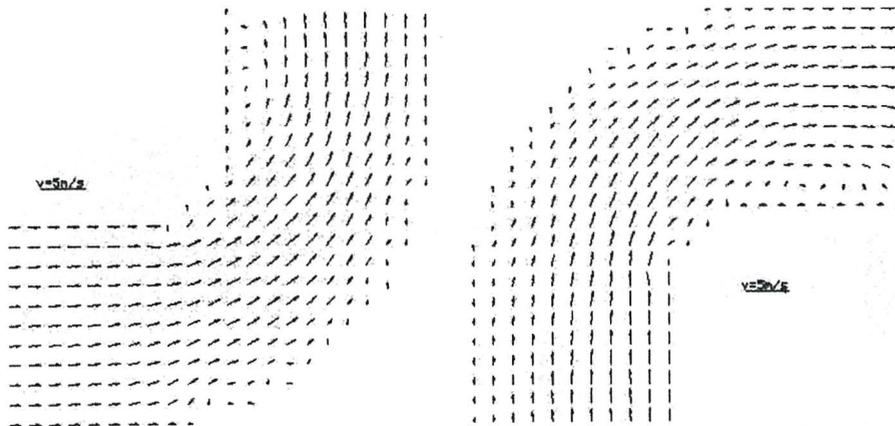


Figura 5.8 - Modelação dos processos de dinâmica sedimentar num rio e correspondente estuário.



a) Primeiro meandro (montante).

b) Segundo meandro.

Figura 5.9 - Campos de velocidades instantâneas obtidos aos 86400 s (24 horas).

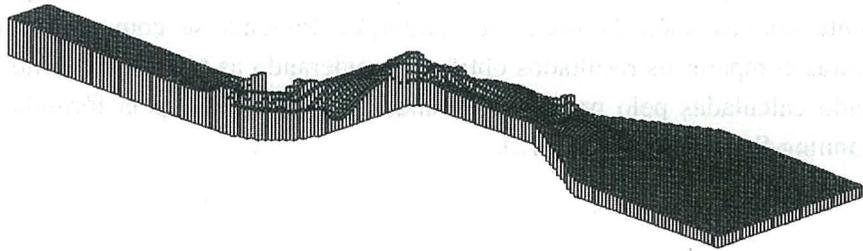


Figura 5.10 - Perspectiva do fundo móvel obtida após 24 horas de simulação.

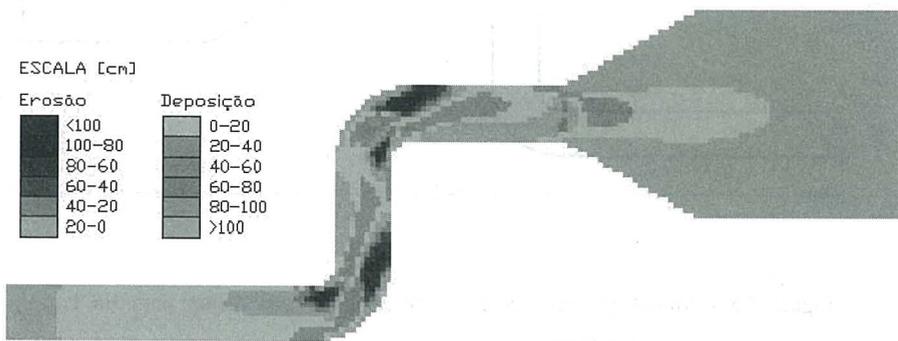


Figura 5.11 - Planimetria do fundo móvel obtido após 24 horas de simulação, considerando as tensões de atrito no fundo calculadas pelo modelo de Prandtl.

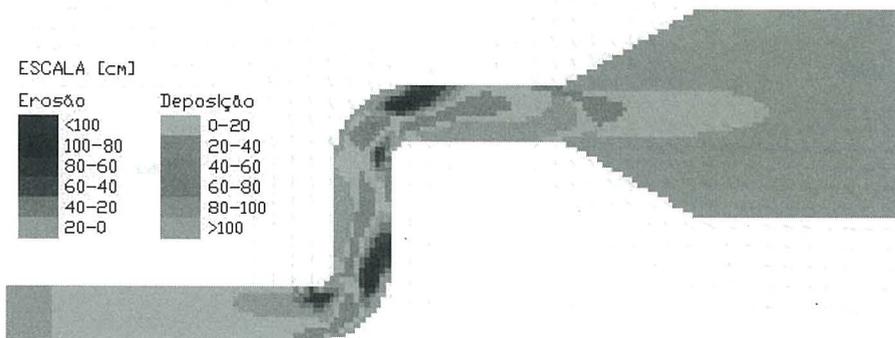


Figura 5.12 - Planimetria do fundo móvel obtido após 24 horas de simulação, considerando as tensões de atrito no fundo calculadas pelo modelo de Manning-Strickler.

Como é visível, o comportamento do modelo é idêntico utilizando qualquer das formulações, com zonas de erosão e deposição semelhantes e igualmente localizadas, embora a formulação de Prandtl apresente evoluções mais acentuadas, isto é, com maiores volumes de material erodido e depositado.

Tratando-se de um exemplo teórico, não é possível proceder a comparações quantitativas. Do ponto de vista qualitativo identificam-se, como seria de esperar, importantes zonas de erosão junto a ambos os meandros, em particular nas proximidades dos intradorsos antes das curvas e nos extradorsos imediatamente após as respectivas curvas; observam-se, por outro lado, importantes zonas de deposição na região central do leito entre os dois meandros, junto à margem esquerda após o 2º meandro e no alargamento para o estuário. Contudo, importa salientar que uma configuração de equilíbrio está ainda longe de ser atingida, pelo que a manutenção das actuais condições de simulação por um período mais alargado conduziria necessariamente a diferentes configurações batimétricas.

### 5.5.2 Aplicação do modelo unidimensional *fluvial\_sed*

Como exemplo de aplicação do modelo morfodinâmico unidimensional *fluvial\_sed*, que é apresentado em versão executável no CD-ROM que acompanha este livro, com o código de acesso 5659, considere-se um canal de secção rectangular constante, com uma largura  $B = 3.0 \text{ m}$  e o fundo horizontal constituído por areia com um diâmetro mediano  $D_{50} \approx 0.002 \text{ m}$ .

Partindo de condições de repouso [ $u(0) = 0$ ] e com uma profundidade inicial  $h = 3.0 \text{ m}$ , simula-se a entrada e propagação de um caudal  $q = 30.0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m.l.}$  a partir do instante  $t = 0^+$ , bem como a correspondente evolução do fundo móvel. Apresentam-se na Figura 5.13 as configurações correspondentes às condições iniciais e os resultados da simulação após 10, 20 e 30 dias.

A análise dos resultados apresentados nesta figura permite identificar a ocorrência de um fenómeno físico conhecido. As condições iniciais estavam longe de constituir uma situação de equilíbrio natural. Assim, ocorre uma evolução rápida do fundo nos primeiros dias, reduzindo-se gradualmente até se atingir uma situação de *quase*-equilíbrio por volta dos 10 dias.

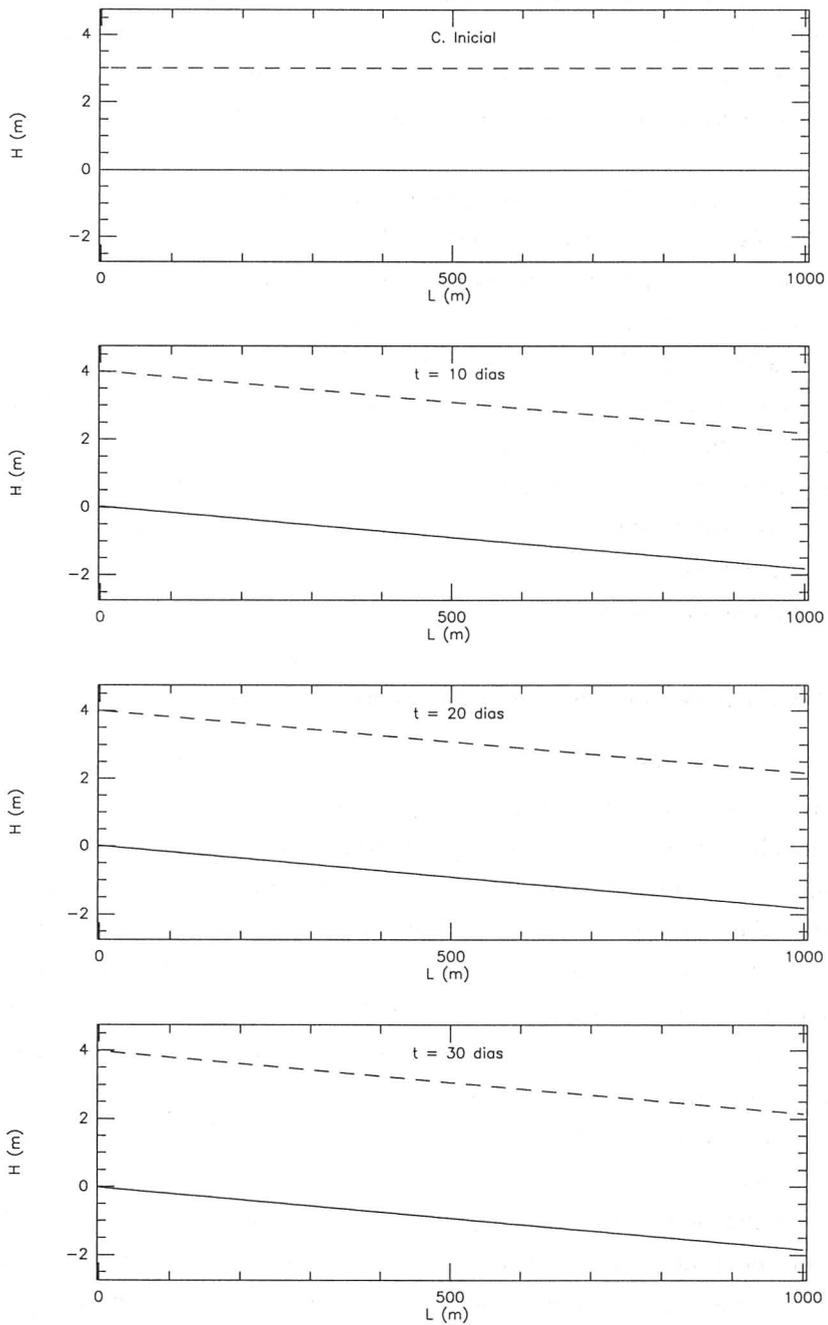


Figura 5.13 - Evolução de um fundo móvel, para um caudal  $q = 30.0 \text{ m}^3\text{s}^{-1}/\text{m.l.}$  a partir do instante  $t = 0'$  (cotas da superfície livre a tracejado e cotas do fundo a cheio).

Constata-se que entre os 10 dias e os 30 dias a actividade no fundo é já relativamente reduzida. De facto, como se pode verificar (com  $K$  da fórmula de Manning-Strickler igual a  $55.2 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ ), a configuração obtida aos 10 dias corresponde a uma situação de regime uniforme, ou já está muito próxima deste. O volume sólido total erodido até aos 10 dias foi de  $2679.3 \text{ m}^3$ , enquanto que após 30 dias de simulação se obtiveram  $2790.7 \text{ m}^3$ . Por conseguinte, entre os 10 dias e os 30 dias movimentaram-se pouco mais de  $111 \text{ m}^3$  de material sólido.

## 5.6 Distribuições granulométricas heterogéneas

Em regiões com granulometrias extensas, onde coexistam quantidades igualmente importantes de sedimentos movendo-se por arrastamento e em suspensão, como é em geral o caso das zonas aluvionares com baixos declives, próximas ou já no interior dos estuários, justifica-se o cálculo em separado das duas componentes de transporte (por arrastamento e em suspensão) e para cada uma das fracções da curva granulométrica considerada. A curva granulométrica será, neste caso, definida em função da dimensão  $i$  e da massa volúmica ou densidade  $j$  da fracção de sedimentos considerada, obtendo-se os necessários caudais sólidos por arrastamento e em suspensão correspondentes a cada fracção  $ij$ ,  $q_{sa_{ij}}$  e  $q_{ss_{ij}}$ .

Seja uma formulação do tipo Bagnold para o cálculo do caudal sólido transportado por arrastamento, em  $\text{kg s}^{-1}/\text{m.l.}$ :

$$q_{sa_{ij}} = P_{ij} \frac{2.5}{g \tan \phi} \log_e \left( \frac{z}{k_f} \right) (u_* - u_{*c_{ij}}) (\tau_0 - \tau_{c_{ij}}) \quad (5.46)$$

em que  $P_{ij}$  representa a proporção volumétrica da fracção  $ij$  do fundo activo;  $z$  é a distância desde o fundo da coluna de água até ao nível atingido pelo centro de massa da fracção de sedimentos  $ij$  durante o processo de arrastamento;  $k_f$  é a rugosidade do fundo;  $u_*$ ,  $\tau_0$  são a velocidade de atrito e a tensão efectivas, e  $u_{*c_{ij}}$ ,  $\tau_{c_{ij}}$  representam a velocidade de atrito e a tensão críticas correspondentes à fracção  $ij$ .

Por definição, o caudal sólido em suspensão,  $q_{ss_{ij}}$ , em  $\text{kg s}^{-1}/\text{m.l.}$ , é calculado por:

$$q_{ss_{ij}} = \int_a^h u(z) C_{ij} dz \quad (5.47)$$

em que  $a \approx 2D_{50}$ ;  $u(z) = 2.5 u_* \left[ \log_e \left( \frac{z}{h} \right) + 1 \right] + \bar{u}$ , em  $ms^{-1}$ , e  $C_{ij}$  é a concentração dos sólidos em suspensão à altura  $z$ , em  $kg m^{-3}$ .

Em primeira aproximação, a concentração  $C_{ij}$  poderá ser aproximada por  $C_{zij}$ , com:

$$\frac{C_{zij}}{C_{a ij}} = \left( \frac{h-z}{z} \frac{a}{h-a} \right)^{\left( \frac{w_{q_n}}{0.4 u_*} \right)} \quad (5.48)$$

Na expressão (5.48)  $w_{q_n}$  representa a velocidade de queda da fracção  $ij$ , correspondente ao diâmetro mediano  $D_{ij}$ ;  $C_{a ij}$  poderá ser calculada por  $C_{a ij} = q_{sa_{ij}} / (a g u_{f_y})$ , com a velocidade de atrito junto ao fundo da fracção  $ij$ ,  $u_{f_y}$ , obtida por  $u_{f_y} = A (u_* - u_{*c_y})$ , em que  $A \approx 6.8 \sim 8.5$  (Slingerland *et al.*, 1994).

Quando tem início o transporte de sedimentos, a textura e composição do fundo modificam-se. Estas modificações afectam o escoamento do fluido e as taxas de transporte posteriores à conseqüente alteração das características do fundo. Por este motivo, o fundo deverá ser tratado como uma componente dinâmica do sistema. Para o efeito, define-se uma camada activa, a qual consiste em  $n$  fracções com massas volúmicas bem representativas, cada uma com a sua distribuição granulométrica. Cada classe é representada pelo seu diâmetro mediano  $D_{ij}$ . Em cada incremento temporal ocorrem trocas de partículas entre a camada activa e as restantes camadas de fundo, após o que a distribuição das dimensões granulométricas das partículas na camada activa é actualizada, permitindo assim a erosão ou a deposição de fracções com diferentes granulometrias. Se ocorrer erosão durante um incremento temporal, a camada activa é recarregada pelo material da camada subjacente numa quantidade igual à espessura erodida. Se ocorrer deposição, a base da camada activa move-se no sentido ascendente uma distância idêntica à espessura do material depositado. Por espessura da camada activa entende-se uma quantidade dada por (5.49):

$$E_a = 2D_{50} \frac{\tau_0}{\tau_{c_w}} \quad (5.49)$$

em que  $E_a$  é a espessura da camada activa;  $\tau_0$  é a tensão de atrito efectiva, e  $\tau_{c_w}$  é a tensão de atrito necessária ou crítica para movimentar o diâmetro mediano.

Nestas circunstâncias, o cálculo das trocas de massa de sedimento entre o escoamento e a camada activa do fundo, e conseqüentemente o cálculo da erosão e deposição em cada nível, é obtido usando a equação de conservação da massa escrita para cada fracção  $i$ - $j$  (dimensão-densidade). Assume-se que o incremento temporal é suficientemente reduzido para que o movimento do fluido e o transporte sedimentar possam ser considerados constantes no mesmo incremento de tempo. Nesta conformidade, com  $q_{sa_n}$  dado por (5.46) e  $q_{ss_n}$  calculado por (5.47), a equação de continuidade, ou de conservação da massa sólida, escreve-se:

$$\rho_j(1-\lambda) \frac{\partial(B\xi_{ij})}{\partial t} + \frac{\partial(Bq_{sa_n})}{\partial x} + \frac{\partial(Bq_{ss_n})}{\partial x} = 0 \quad (5.50)$$

em que  $\rho_j$  representa a massa volúmica da fracção  $j$ .

A equação (5.50) poderá ser resolvida por um qualquer dos esquemas numéricos já atrás apresentados. Usando um esquema do tipo Preissmann modificado, aquela equação escreve-se na seguinte forma discretizada (5.51):

$$\Delta(B\xi_{ij})_i = \frac{1}{\rho_j(1-\lambda)} \left\{ \left[ \Theta \left( \Delta(q_{sa_n} + q_{ss_n})_{i_{r+1}} \right) \right] + \left[ (1-\Theta) \left( \Delta(q_{sa_n} + q_{ss_n})_{i_r} \right) \right] \right\} \quad (5.51)$$

em que  $\Delta(\text{var iável})_{\text{índice}} = \Delta(\text{var iável})_{\text{índice}} - \Delta(\text{var iável})_{\text{índice}-1}$  e  $0 \leq \Theta \leq 1$ , normalmente  $\Theta = 0.55 - 0.60$ .

(Página deixada propositadamente em branco)

## 6. OBRAS DE PROTECÇÃO CONTRA CHEIAS. TRANSPORTE SÓLIDO GENERALIZADO E EROSÕES LOCALIZADAS: CAUSAS E EFEITOS. MEDIDAS CORRECTIVAS

Apresentam-se breves considerações sobre as principais medidas preventivas e correctivas comumente utilizadas com objectivos de protecção contra cheias. Descrevem-se algumas das alterações correntes provocadas por intervenção humana nos sistemas fluviais. Referem-se as teorias de regime e são apresentadas soluções para o dimensionamento de secções transversais de canais com leitos aluvionares estáveis. Por último, tecem-se algumas considerações sobre profundidades máximas de erosão junto de obstáculos implantados em domínios fluviais e sugere-se um modelo numérico baseado em formulações empíricas correntes.

### 6.1 Considerações gerais

A necessidade de construção de obras de defesa contra cheias tem constituído uma preocupação constante das comunidades humanas por elas atingidas. São bem conhecidos os prejuízos materiais, e por vezes danos físicos, associados à inundaçãõ dos terrenos marginais de um curso de água.

As principais medidas utilizadas com objectivo de protecção contra cheias podem ser agrupadas em:

- medidas preventivas; e,
- medidas correctivas.

Entre as principais medidas preventivas contam-se: *i*) a delimitação das áreas susceptíveis de serem inundadas com determinado risco, e *ii*) a criação de sistemas de aviso. Entre as medidas correctivas incluem-se: diques, esporões, obras de desvio, barragens, obras de regularização, etc.

A redução do leito maior de um rio é frequentemente conseguida através da construção de diques dispostos longitudinalmente, normalmente complementados com descarregadores laterais associados a estruturas de controlo, permitindo descargas localizadas sempre que ocorram caudais superiores aos de dimensionamento.

A eliminação de meandros é frequentemente realizada através de desvios, ou da simples rectificação do leito natural. Importa todavia notar que este procedimento deve ser complementado com outras obras de regularização, pois pode conduzir a alterações significativas das condições

de equilíbrio natural (desadaptação da inclinação do rio às condições de transporte sólido, conduzindo a erosões e/ou a deposições indesejáveis).

A construção de uma barragem num curso de água modificará necessariamente as condições de equilíbrio, ou de *quase*-equilíbrio, pré-existentes, nomeadamente através da retenção do material sólido na albufeira, deixando de alimentar o curso de água a jusante da secção da barragem.

A acumulação do material sólido na albufeira conduzirá inevitavelmente a uma diminuição da sua capacidade total inicial. Nesta conformidade, no dimensionamento de uma albufeira de regularização torna-se necessário reservar uma fracção da respectiva capacidade total para acumulação do material sólido sedimentado (*volume morto da albufeira*).

Para calcular a quantidade de material sólido que uma albufeira irá reter (*volume assoreado*) é indispensável conhecer o transporte sólido anual médio do curso de água. Uma vez conhecidos os regimes hidrológico e de transporte sólido, bem como a respectiva *eficiência de retenção* (percentagem de sedimentos afluídos que fica retida), calcula-se a capacidade total inicial com que deverá ser construída uma albufeira para que esta possa alcançar uma determinada vida útil.

Considera-se vida útil de uma albufeira o período de tempo necessário até que o volume assoreado seja suficiente para impedir a respectiva utilização em conformidade com o objectivo inicial.

Analisaremos em seguida alguns aspectos relativos às condições de equilíbrio do leito de um curso de água.

## 6.2 Regime de equilíbrio

De acordo com o diagrama de Shields, para valores da tensão de atrito iguais ou inferiores a cerca de 0.030 (zona de escoamento em regime hidraulicamente liso) não há movimento do fundo. Nesta conformidade, considerando um escoamento uniforme, o valor da tensão tangencial média é dado por:

$$\tau = \gamma R_h J$$

Com  $R_h \cong h$ ,  $J \approx \text{sen}\beta = i$  e  $D \cong D_g$  resulta:

$$\frac{\tau}{\rho g (s-1) D} \cong \frac{\gamma h i}{\rho g (s-1) D_g} \leq 0.030$$

donde, com  $s = 2.65$ ,

$$D_g \geq 20 h i \quad (6.1)$$

Ou seja, com uma granulometria do material de fundo, numa espessura da ordem de  $2D_{90}$ , dada por  $D_g \cong 20 h i$  e uma granulometria do material da camada superior (camada de desgaste em contacto directo com a fase líquida) com  $D_g \geq 20 h i$  garante-se que o fundo não entra em movimento.

Na zona de escoamento em regime hidraulicamente rugoso (número de Reynolds relativo à rugosidade  $R_* = |u_*|k_N/\nu > 70$ , com  $k_N \approx 2.5D_{50}$ ) teremos:

$$\frac{\tau}{\rho g (s-1) D_g} \leq 0.060$$

donde,

$$D_g \geq 10 h i$$

ou, como resultados de experiências mais recentes aconselham:

$$\frac{\tau}{\rho g (s-1) D_g} \leq 0.047$$

vindo,

$$D_g \geq 13 h i \quad (6.2)$$

Desta análise [expressões (6.1) e (6.2)] podemos concluir que o declive médio do perfil de equilíbrio deverá obedecer à seguinte condição:

$$i_{eq} \leq \frac{D_g}{\sigma h}$$

em que, e ainda de acordo com aquelas equações,  $\sigma$  é uma constante que deverá situar-se no intervalo  $13 \leq \sigma \leq 20$ .

### 6.3 Análise da resposta do leito aluvionar a alterações nos processos morfodinâmicos

Em qualquer ponto ao longo de um rio, a morfologia do leito aluvionar é ajustada em função da quantidade de sedimentos em trânsito e

do regime de escoamento, apenas modificada por condições locais. Por conseguinte, qualquer intervenção humana no sistema fluvial deverá respeitar a natural tendência de um rio na procura de condições globais de estabilidade.

Com base em princípios básicos da morfodinâmica fluvial, e considerando as variáveis mais relevantes neste processo, é possível estabelecer de forma simplificada (Lane, 1953), mas tendencialmente correcta, a seguinte relação de proporcionalidade para o perfil longitudinal de equilíbrio:

$$i_{eq} \propto \frac{q_s D_n}{q} \quad (6.3)$$

ou noutra forma  $q_s * D_n \propto q * i$ , em que  $q$  e  $q_s$  são, respectivamente, os caudais líquido e sólido, em  $m^3 s^{-1} / m.l.$ , e  $D_n$  representa o diâmetro característico do material sólido transportado (normalmente  $D_n \cong D_{50}$ , sendo este o diâmetro de peneiração tal que 50% do material em peso é mais fino).

A expressão (6.3) traduz a tendência para o estabelecimento de um equilíbrio natural entre quatro variáveis. Qualquer alteração numa delas implica um desequilíbrio no sistema cujo novo equilíbrio tenderá a estabelecer-se a prazo, com a necessária contribuição de uma (ou mais) das restantes variáveis.

Podemos assim, com base naquela expressão, prever respostas qualitativas de um sistema fluvial a modificações naturais ou a alterações impostas nos processos morfodinâmicos. Para melhor entendimento deste tipo de análise, exemplificam-se algumas situações concretas, nomeadamente:

- i) *Resposta do leito aluvionar à construção de uma barragem;*
- ii) *Resposta do sistema fluvial à rectificação de um troço de rio;*
- iii) *Resposta do leito aluvionar a uma redução do caudal sólido;*
- iv) *Resposta do leito aluvionar a um rebaixamento localizado das cotas do fundo;*
- v) *Resposta do sistema fluvial a um rebaixamento do nível de base da superfície livre do curso de água principal; e,*
- vi) *Resposta do sistema fluvial a uma elevação do nível de base da superfície livre do curso de água principal.*

### 6.3.1 Resposta do leito aluvionar à construção de uma barragem

Em consequência de uma redução da velocidade do escoamento, haverá deposição de material sólido na albufeira. Consequentemente, a água descarregada para jusante da barragem conterà uma quantidade de sedimentos bastante inferior a idêntica quantidade de água que entrou na albufeira, ou seja, o caudal sólido reduzir-se-á da quantidade  $q_s$  para uma quantidade  $q_s^-$  (Figura 6.1).

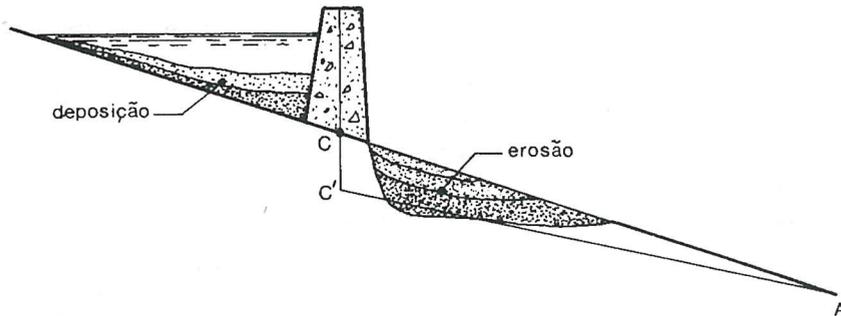


Figura 6.1 - Resposta do leito aluvionar à construção de uma barragem (Cardoso, 1998).

Admitindo que se mantêm constantes o caudal líquido e o diâmetro do material de fundo, um novo equilíbrio só poderá então restabelecer-se através de uma redução do declive médio do leito do rio,  $i$ , a jusante da barragem, em conformidade com a relação:  $q_s^- * D_n \propto q * i^-$ .

De acordo com a Figura 6.1, o perfil inicial a jusante da barragem CA tenderá a erodir até atingir, por hipótese, o perfil C'A, o qual, por sua vez, poderá regressar ao perfil CA se passar a haver mais material sólido disponível, o que, por exemplo, poderia ocorrer após completo enchimento da albufeira com sedimentos. A montante da barragem, o perfil médio do leito tenderá a ser paralelo ao perfil original.

### 6.3.2 Resposta do sistema fluvial à rectificação de um troço de rio

A eliminação de meandros é frequentemente realizada através de desvios, ou da simples rectificação (linearização) do leito natural de um rio.

Uma vez que o comprimento final do troço intervencionado é inferior ao original, este procedimento traduz-se normalmente num aumento do declive médio do fundo e, por conseguinte, num aumento da capacidade de

transporte sólido, podendo conduzir a alterações significativas das condições de equilíbrio natural.

Com efeito, a desadaptação da inclinação do rio às condições de transporte sólido pré-existentes conduz a fenómenos de deposição generalizada a jusante do troço intervencionado, com o conseqüente aumento das cotas do fundo e dos níveis de cheia, e a erosões que poderão ser fortemente indesejáveis a montante deste troço. A Figura 6.2 ilustra claramente esta situação.

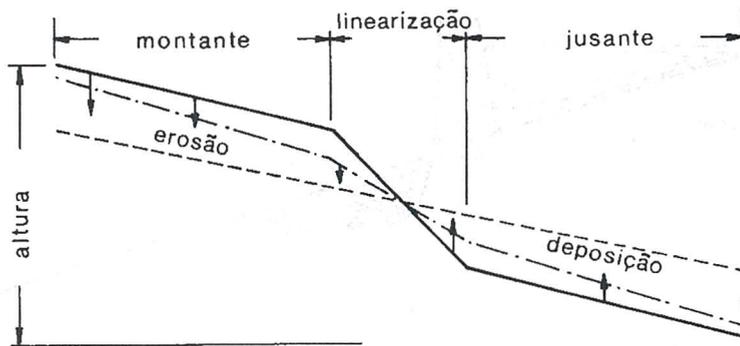


Figura 6.2 - Comportamento do sistema fluvial face à rectificação (linearização) de um troço de rio (Cardoso, 1998).

Importa, uma vez mais, analisar estas ocorrências à luz da expressão (6.3). Trata-se, neste caso, de um aumento da inclinação média do leito; ou seja, a inclinação original  $i$  aumenta para  $i^+$ . Ora, mantendo-se o caudal líquido e o diâmetro do material de fundo, ocorre naturalmente um aumento do caudal sólido a jusante do troço intervencionado, passando de  $q_s$  para  $q_s^+$ . Este, por sua vez, é retido no troço seguinte, uma vez que neste a inclinação se mantém inalterada e, por conseguinte, não existe capacidade de transporte suficiente para escoar a totalidade dos caudais sólidos em excesso que aí afluem. Um raciocínio idêntico permite explicar as erosões que ocorrem a montante do troço rectificado.

### 6.3.3 Resposta do leito aluvionar a uma redução do caudal sólido

Seja um afluente que em condições naturais descarrega para o leito do curso de água principal um caudal sólido  $q_s$ . Devido a intervenções humanas, este caudal sólido sofre uma redução significativa, passando para  $q_s^-$ . Ora, mantendo-se inalteráveis os valores do caudal líquido no curso de

água principal e do diâmetro do material de fundo, a inclinação média do leito do curso de água principal, a jusante da confluência daquele afluente, terá de sofrer uma redução significativa, passando de  $i$  para  $i^-$ , em conformidade com a expressão (6.3). A montante daquela confluência o leito evoluirá para uma configuração paralela à do leito original, embora com cotas finais inferiores. Esta situação encontra-se claramente ilustrada na Figura 6.3.

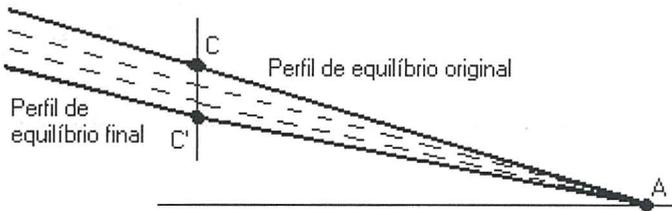
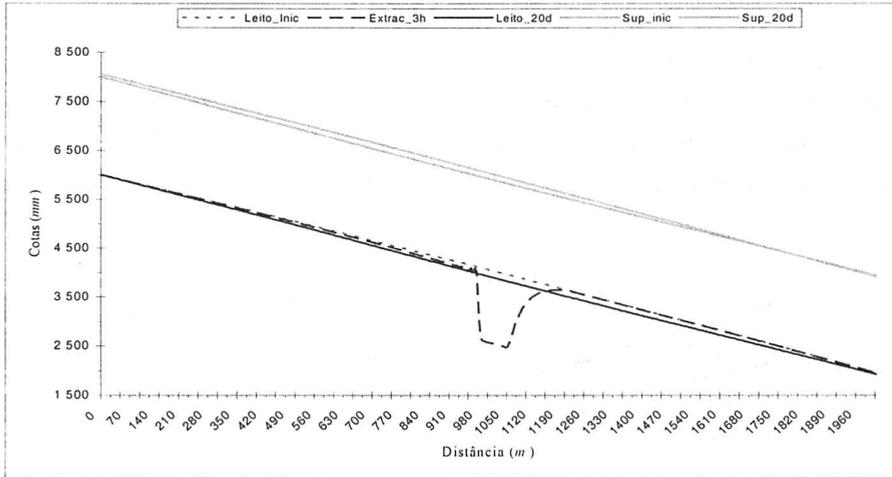


Figura 6.3 - Comportamento do leito aluvionar face a uma redução do caudal sólido.

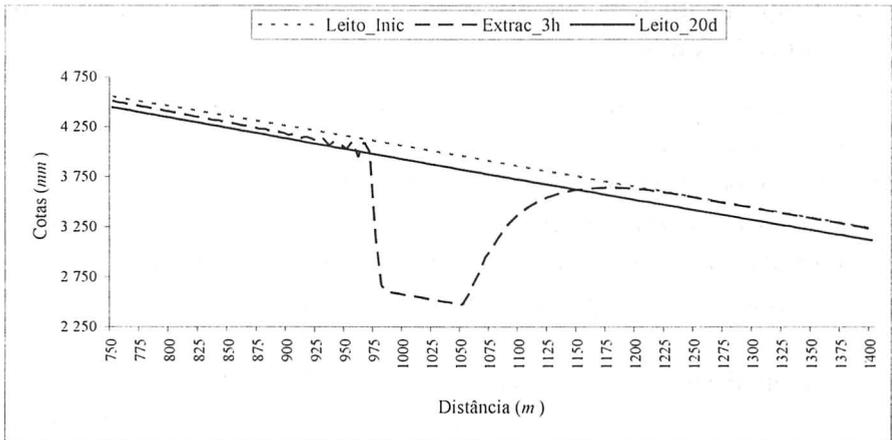
#### 6.3.4 Resposta do leito aluvionar a um rebaixamento localizado das cotas do fundo

Esta situação configura uma redução da inclinação média do leito a jusante da área intervencionada, passando de  $i$  para  $i^-$ ; por conseguinte, com um comportamento idêntico ao indicado no ponto anterior, ou seja, nas proximidades da zona intervencionada ocorrerá a prazo uma redução generalizada das cotas do fundo, tanto para jusante como para montante daquela zona. A configuração apresentada na Figura 6.4 ilustra esta ocorrência.

A simulação numérica representada nesta figura, utilizando o modelo *fluvial\_sed* descrito no capítulo anterior, parte de uma situação de regime uniforme; trata-se, por conseguinte, de uma configuração de equilíbrio natural, que foi modificada devido a intervenção humana. Para o efeito, num instante inicial, simulou-se uma extracção de inertes no leito do rio, numa extensão de 100 m (entre os 950 m e os 1 050 m do troço representado) e com uma profundidade de 1.50 m. Foi analisada a evolução diária do leito do rio durante um período de 20 dias. As configurações inicial, após 3 horas, e final, após 20 dias de simulação, estão representadas nas Figuras 6.4 a) e b), sendo esta uma ampliação do troço entre os 750 m e os 1 400 m.



- a) Configurações do leito: inicial (em regime uniforme), 3 horas após uma extracção localizada de sedimentos (a tracejado) e 20 dias após esta extracção (a cheio).



- b) Ampliação do trecho entre os 750 m e os 1400 m.

Figura 6.4 - Comportamento do leito aluvionar face a um rebaixamento localizado das cotas do fundo.

Como seria de esperar, verificam-se erosões generalizadas tanto a montante como a jusante da zona intervencionada.

### 6.3.5 Resposta do sistema fluvial a um rebaixamento do nível de base da superfície livre do curso de água principal

Esta situação poderá ocorrer em consequência de alguma das anteriores, dando origem a erosões generalizadas e provocando rebaixamentos nos níveis de base dos afluentes. Esta situação encontra-se claramente ilustrada na Figura 6.5.

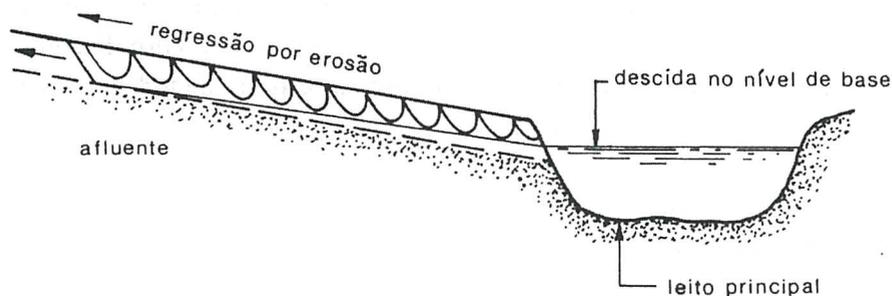


Figura 6.5 - Efeitos num afluente provocados pelo rebaixamento do nível de base da superfície livre do curso de água principal (Cardoso, 1998).

### 6.3.6 Resposta do sistema fluvial a uma elevação do nível de base da superfície livre do curso de água principal

Esta situação poderá surgir em consequência de alguma das duas primeiras ocorrências, dando origem a deposições generalizadas provocando elevações dos níveis de base dos afluentes, reduzindo a capacidade de transporte destes e criando condições para cheias, normalmente indesejáveis. Esta situação encontra-se ilustrada na Figura 6.6.

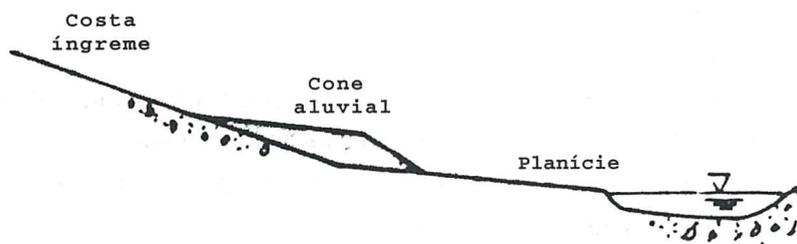


Figura 6.6 - Efeitos num afluente provocados pela elevação do nível de base da superfície livre do curso de água principal (Simons & Sentürk, 1976).

Em face do exposto, importa concluir que qualquer intervenção no meio fluvial só deverá ser realizada após rigoroso levantamento e análise da situação de referência e das tendências evolutivas, tendo por base as características geológicas e sedimentares dos leitos aluvionares. Este aspecto é particularmente relevante tratando-se de extrair inertes do meio hídrico, nomeadamente aquando da selecção dos locais de extracção. Assim, o comportamento do sistema hídrico deverá ser analisado globalmente, considerando a totalidade dos potenciais locais de extracção, devendo proceder-se a uma simulação computacional dos processos morfodinâmicos a médio e longo prazos, procurando antecipar a resposta de todo o sistema no seu conjunto, desde a nascente até à foz.

#### 6.4 Teorias de regime

Considerando elevados números de observações efectuadas em diferentes rios e canais, elaboraram-se métodos empíricos que permitem prever as características geométricas de canais de fundo móvel em equilíbrio a partir do caudal líquido que se escoia em regime permanente e da dimensão do material de fundo.

Estas teorias apenas devem ser utilizadas em dimensionamentos expeditos. No entanto, os seus resultados podem fornecer boas indicações, ou constituir condições iniciais para aplicações de modelos computacionais dos tipos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

Genericamente, as teorias de regime apenas deverão ser aplicadas nas seguintes condições:

- escoamento permanente e com números de Froude inferiores à unidade;
- caudal sólido permanente e com  $D_{50} \ll h$ ;
- inexistência de curvas ou outras perturbações que alterem significativamente o paralelismo das linhas de corrente;
- secção transversal  $B > 3h$  e com o ângulo dos taludes marginais próximo do ângulo de talude natural;
- fundo e margens hidráulicamente lisos; e,
- escoamento suficientemente estabelecido para permitir que o equilíbrio seja atingido e o canal seja estável.

Em geral as equações apresentadas nas teorias de regime não são homogéneas pelo que importa respeitar as unidades indicadas.

Entre as principais teorias de regime encontram-se as duas que apresentamos em seguida (Lacey, 1958, e Simons & Albertson, 1963).

#### 6.4.1 Teoria de regime de Lacey

Equações válidas para secções trapezoidais com taludes inclinados a 1.5:1; são as seguintes:

$$\begin{aligned} h &= 0.473 \left( \frac{Q}{f} \right)^{1/3} \\ B &= 4.840 \sqrt{Q} \\ u &= 0.442 Q^{1/6} f^{1/3} \\ i &= 3.02 \cdot 10^{-4} \frac{f^{5/3}}{Q^{1/6}} \end{aligned} \quad (6.4)$$

sendo  $h$  ( $m$ ) a profundidade média do escoamento;  $B$  ( $m$ ) a largura média da secção transversal ( $m$ );  $u$  ( $m s^{-1}$ ) a velocidade média do escoamento;  $Q$  ( $m^3 s^{-1}$ ) o caudal que se escoia em regime permanente;  $i$  a inclinação do leito do canal, e  $f$  o factor de sedimentação, expresso por:

$$f = 1.59 \sqrt{D_{50}}$$

em que  $D_{50}$  é o diâmetro mediano do material de fundo ( $mm$ ).

#### 6.4.2 Teoria de regime de Simons & Albertson

Utiliza as seguintes equações:

$$\begin{aligned} P &= k_1 Q^{0.50} ; R_h = k_2 Q^{0.36} \\ h &= 1.21 R \quad (R_h < 2.13 \text{ m}) \\ h &= 0.93 R_h + 0.61 \quad (R_h \geq 2.13 \text{ m}) \\ B &= 0.98 P + 0.70 \\ u &= k_3 (R_h^2 i)^\mu ; \frac{u^2}{g h i} = k_4 \left( \frac{u B}{\nu} \right)^{0.37} \\ &\{2 \text{ equações a } 2 \text{ incógnitas } (u, i)\} \end{aligned} \quad (6.5)$$

com  $Q$  em  $m^3 s^{-1}$ ,  $P$  em  $m$ ,  $R_h$  em  $m$ ,  $h$  em  $m$ ,  $B$  em  $m$ ,  $u$  em  $ms^{-1}$ , a aceleração da gravidade  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$  e a viscosidade cinemática  $\nu \approx 1.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 s^{-1}$  ( $T = 15^\circ C$ ).

Os valores de  $k_1, k_2, k_3, k_4$  e  $\mu$  dependem dos tipos de fundo e margens; são dados por:

- Fundo e margens de areia,

$$k_1 = 6.30, k_2 = 0.57, k_3 = 9.30, k_4 = 0.33 \text{ e } \mu = 0.33$$

- Fundo de areia e margens coerentes,

$$k_1 = 4.71, k_2 = 0.48, k_3 = 10.81, k_4 = 0.54 \text{ e } \mu = 0.33$$

- Fundo e margens coerentes,

$$k_1 = 4.00, k_2 = 0.41, k_3 \approx 11.40, k_4 = 0.87 \text{ e } \mu \approx 0.31$$

- Material grosseiro não coerente,

$$k_1 = 3.20, k_2 = 0.25, k_3 = 12.00, k_4 \approx 1.20 \text{ e } \mu = 0.29$$

O emprego de diferentes teorias de regime conduz normalmente a outros tantos resultados com diferenças muito significativas. Numa fase preliminar e ainda num estudo prévio de regularização fluvial poderá optar-se por uma média dos resultados encontrados ou, porventura melhor, optar pela teoria cujos resultados mais se aproximem da forma do leito pré-existente. Deste modo reduzir-se-ão ao mínimo as alterações a efectuar.

### Exemplo 6.1:

Aplicar as teorias de regime de Lacey e de Simons & Albertson para a determinação das características geométricas de um troço de rio, neste caso o leito central do Baixo-Mondego, considerando:  $Q = 340 \text{ m}^3 s^{-1}$ ,  $D_{50} = 2.1 \text{ mm}$ , o fundo de areia e as margens com fraca erodibilidade (elevada coerência) (Lencastre & Franco, 1984).

### Resolução:

*Teoria de regime de Lacey*

$$f = 2.30 \text{ mm}^{1/2}$$

$$h = 2.50 \text{ m}$$

$$B = 89.25 \text{ m}$$

$$u = 1.54 \text{ ms}^{-1}$$

$$i = 4.6 \cdot 10^{-4}$$

*Teoria de regime de Simons & Albertson*

$$P = 86.85 \text{ m}$$

$$R_h = 3.91 \text{ m}$$

$$h = 4.25 \text{ m}$$

$$B = 85.63 \text{ m}$$

$$u \approx 1.09 \text{ m s}^{-1}$$

$$i \approx 0.62 \cdot 10^{-4}$$

Considerando primeiras estimativas obtidas com base em teorias de regime e posteriormente verificadas/rectificadas recorrendo a modelação numérica, com base no modelo matemático de Saint-Venant, apresentam-se na Figura 6.7 pormenores do perfil transversal-tipo do leito central e a definição dos leitos regularizados do Baixo Mondego, adaptados de Lencastre & Franco (1984).

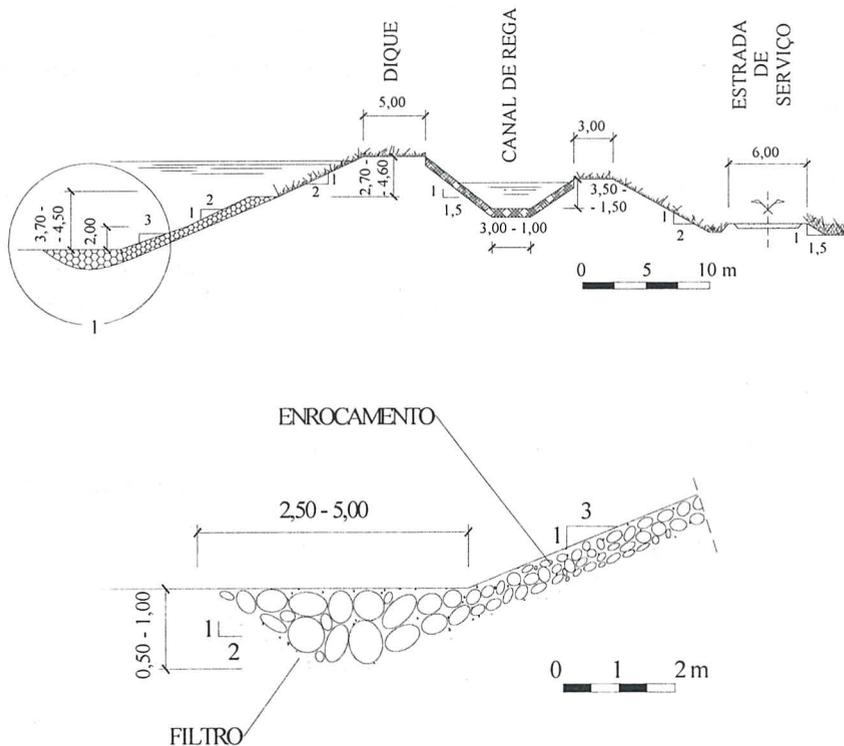


Figura 6.7 - Regularização do Baixo Mondego (adaptada de Lencastre & Franco, 1984).

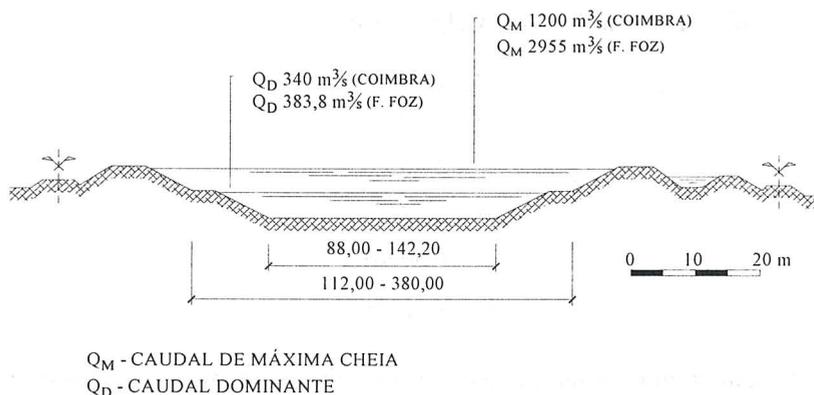


Figura 6.7 - Regularização do Baixo Mondego (adaptada de Lencastre & Franco, 1984) (continuação).

De acordo com Lencastre & Franco, 1984, as formas das secções transversais adoptadas garantem um equilíbrio dinâmico entre o material afluente e a capacidade de transporte desse material; garantem, por outro lado, o escoamento de caudais de cheia importantes sem inundação dos campos marginais.

### 6.5 Aproximação racional

Uma aproximação racional baseada nas fórmulas de transporte sedimentar de Ackers & White (1973) é apresentada em White, Bettess & Paris (1982). Esta teoria sugere o seguinte procedimento para o projecto de canas aluviais estáveis:

1. Estima-se a velocidade de atrito,  $u_* = \sqrt{g R_h i}$  ;
2. Determina-se  $D_{gr}$ , para uma determinada granulometria  $D$  e temperatura da água, através de  $D_{gr} = D [g(s-1)/\nu^2]^{1/3}$  ;
3. Obtém-se  $F_{fg}$  através de  $F_{fg} = u_* / \sqrt{g D (s-1)}$  ;
4. Resolve-se  $1 - [(F_{gr} - E)/(F_{fg} - E)] = 0.76 \left( 1 - e^{-(\log_{10} D_{gr})^{1.7}} \right)$  para obter  $F_{gr}$ , com  $E$  igual a 0.17, ou dado por  $E = 0.14 + 0.23/\sqrt{D_{gr}}$ , consoante o valor de  $D_{gr}$  é superior ou inferior a 60, respectivamente;

5. Por último, obtém-se a velocidade  $u$  através de,

$$F_{gr} = \frac{u_*^n}{\sqrt{gD(s-1)}} \left\{ u / \left[ \sqrt{32} \log_{10} \left( \frac{10 R_h}{D} \right) \right] \right\}^{1-n}$$

e determina-se  $Q$ .

Este procedimento exige o conhecimento prévio da profundidade  $h$  e do declive  $i$  do canal. Combinando estas mesmas expressões e considerando a relação (5.27), partindo de valores conhecidos do caudal  $Q$ , da concentração de sedimentos  $q_{st}/q$ , da granulometria do fundo  $D$  e da temperatura da água, é possível obter valores para a largura, profundidade, velocidade e declive que maximizam a capacidade de transporte para uma determinada concentração de sedimentos (White, Bettess & Paris, 1982).

### 6.6 Aproximação com base na contribuição das forças transversais de atrito

Cao & Knight (1998) apresentam uma solução para o dimensionamento de secções transversais de canais aluviais estáveis, baseada na contribuição do escoamento secundário para a redistribuição das tensões de atrito nas fronteiras/margens do canal.

Assim, considerando a geometria da secção transversal de um canal, e a correspondente notação apresentada na Figura 6.8, são deduzidas as características geométricas da secção com base num perfil transversal estável com forma parabólica junto às margens e em considerações de equilíbrio na região central resultantes da anulação do caudal lateral sólido transportado por arrastamento.

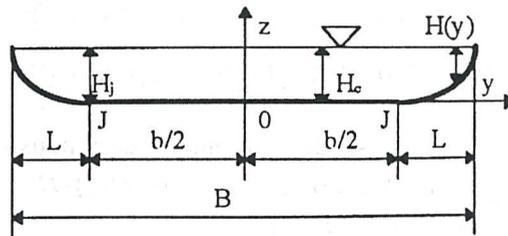


Figura 6.8 - Secção transversal de um canal estável e notações (Cao & Knight, 1998).

É assumido que o equilíbrio da região central da secção transversal do canal é atingido quando o caudal sólido lateral,  $q_n$ , for nulo e o transporte

longitudinal por arrastamento,  $q_{sa}$ , for positivo nesta região, assegurando assim a estabilidade dinâmica do canal. O caudal sólido  $q_n$  é dado por  $q_n = -0.75 q_s (\Theta_c / \Theta)^{0.25} (dz/dy)$ , sendo  $\Theta_c$  e  $\Theta$  os parâmetros crítico e efectivo de Shields; pode tomar-se, em primeira aproximação,  $\Theta_c \approx 0.034$  (valor médio sugerido por diversos autores).

Conhecidos o caudal líquido,  $Q$ , a inclinação da superfície livre,  $S$ , e as características do material sólido do fundo e margens do canal ( $D_c$ ), Cao & Knight (1998) recomendam o seguinte procedimento para o projecto de canais aluviais estáveis:

1. Calcula-se a profundidade na região central do canal,  $H_c$ , através de,

$$H_c = \frac{[\rho_s / (\rho - 1)] D_c \Theta_c}{S(1 - \beta)}$$

em que  $\beta$  representa o gradiente lateral da força devida ao escoamento secundário, por unidade de comprimento do canal; é dado por  $\beta = \Gamma / (\rho g S H_c) = [1 / (\rho g S H_c)] [\partial(\rho U V H_c) / \partial y]$ . Em primeira aproximação poderá tomar-se  $\beta \approx 0.15$ .

2. Calculam-se os valores adimensionais da altura ( $H_m^*$ ), da largura ( $B^*$ ), da área ( $A_m^*$ ), do perímetro molhado ( $P_m^*$ ) e do raio hidráulico ( $R_{hm}^*$ ) das margens do canal, utilizando as seguintes expressões (\* designa variáveis adimensionais):

$$\begin{aligned} H_m^*(y) &= 1 - [\mu(y - b/2)^*]^2 / 4 \\ (B - b)^* &= 4 / \mu \\ A_m^* &= 8 / (3\mu) \\ P_m^* &= 2 \left[ \mu \sqrt{1 + \mu^2} + \log_e \left( \mu + \sqrt{1 + \mu^2} \right) \right] / \mu^2 \\ R_{hm}^* &= 4(\mu/3) / \left[ \mu \sqrt{1 + \mu^2} + \log_e \left( \mu + \sqrt{1 + \mu^2} \right) \right] \end{aligned}$$

em que  $\mu = \tan \phi$ , sendo  $\phi$  o ângulo de repouso dos sedimentos;  $(y - b/2)^* = (y - b/2) / H_c$ ;  $H_m^*(y) = H(y) / H_c$ ;  $B^* = B_m / H_c$ ;  $A_m^* = A_m / H_c^2$  e  $P_m^* = P_m / H_c$ .

3. Fixa-se a largura da região central do canal,  $b$ .
4. Calculam-se os valores adimensionais da largura ( $B^*$ ), da área ( $A^*$ ), do perímetro molhado ( $P^*$ ) e do raio hidráulico ( $R_h^*$ ) para toda a secção do canal através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 B^* &= b^* + 4/\mu \\
 A^* &= [1 + 8/(3\mu b^*)]b^* \\
 P^* &= (1 + P_m^*/b^*)b^* \\
 R_h^* &= [1 + 8/(3\mu b^*)]/(1 + P_m^*/b^*)
 \end{aligned}$$

em que  $b^* = b/H_c$ ,  $B^* = B/H_c$ ,  $A^* = A/H_c^2$ ,  $P^* = P/H_c$  e  $R_h^* = R_h/H_c$ .

5. Calculam-se as dimensões dos parâmetros hidráulicos:  $B$ ,  $A$ ,  $P$  e  $R_h$ .
6. Usa-se uma lei de resistência adequada para calcular a velocidade média do escoamento,  $U_c$ , na secção transversal do canal.
7. Multiplica-se a área da secção transversal obtida em 5. pela velocidade média calculada no passo 6., para obter o caudal  $Q_c$ . Se o caudal obtido  $Q_c$  for igual ao caudal do escoamento  $Q$ , as características geométricas hidráulicas da secção foram obtidas correctamente. Caso contrário, volta-se ao passo 3. para ajustar o valor de  $b$  e repetir os passos 4. a 6.
8. Finalmente, utiliza-se a expressão  $z_m^*(y) = \left\{ [\mu(y - b/2)^*]^2 \right\}^{1/4}$  e os valores de  $b$  e  $H$  obtidos previamente para determinar a totalidade do perfil hidráulico do canal. Note-se (Figura 6.8) que esta equação permite determinar o perfil das margens (neste caso o da margem direita, com  $y$  positivo, obtendo-se o da margem esquerda por simetria) em função da coordenada lateral  $y$  tomada a partir da linha central do canal ( $y \geq b/2$ ).

## 6.7 Aspectos construtivos

A utilização de qualquer aproximação que, embora baseada em conceitos físicos, recorra a factores e parâmetros *semi*-empíricas, naturalmente que apenas terá validade para os trechos de rio que verificam as hipóteses de partida. Na realidade, como se mostra na Figura 6.9, para o caso do rio Mondego, as características de um rio variam muito desde a cabeceira até à foz. Por conseguinte, não existirá uma única secção transversal válida para todo o percurso do rio, mas existirão tantas secções-tipo quantas as variações consideradas dos principais parâmetros e factores que o caracterizam, em particular, o declive, a largura e a profundidade do escoamento.

Na definição dos perfis longitudinais e transversais-tipo de uma obra de regularização fluvial importa ter presente não só a elevada heterogeneidade dos parâmetros hidráulicos e características geológicas dos terrenos ao longo do curso de água, mas também as condições pré-estabelecidas ou existentes e ainda outras condicionantes locais, nomeadamente de ordens construtiva e económica, bem como o funcionamento global do sistema.

Ao tirar partido das condições pré-existent, a solução integrada adoptada para o escoamento dos caudais afluentes ao Baixo Mondego (Figura 6.9), nomeadamente através de um leito central dimensionado para canalizar os caudais de cheia com uma determinada probabilidade de ocorrência, adoptando secções transversais compostas como as apresentadas na Figura 6.7, e leitos periféricos laterais para colectar os caudais das linhas de água de menores dimensões constitui um bom exemplo de regularização fluvial.

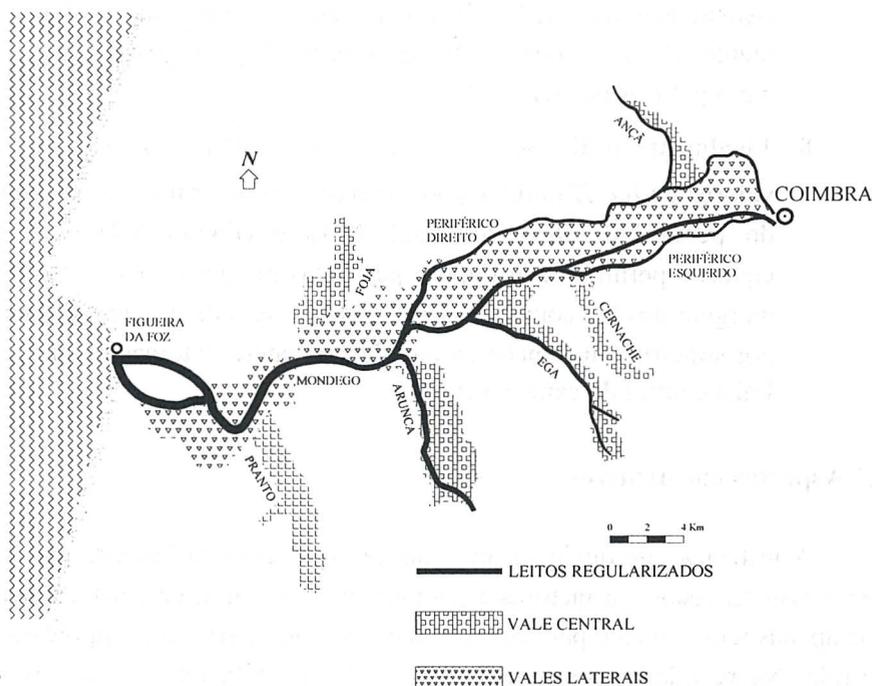


Figura 6.9 - Regularização do Baixo Mondego: definição dos leitos regularizados e perfil longitudinal do leito central (adaptada de Lencastre & Franco, 1984).

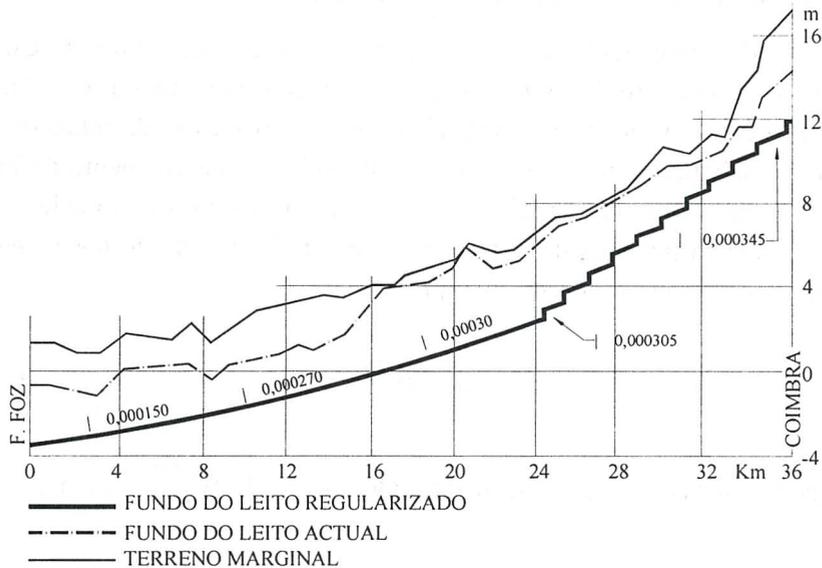


Figura 6.9 - Regularização do Baixo Mondego: definição dos leitos regularizados e perfil longitudinal do leito central (adaptada de Lencastre & Franco, 1984) (continuação).

## 6.8 Profundidades máximas de erosão junto de obstáculos implantados em meios fluviais

Não se pretende apresentar nesta secção um desenvolvimento exaustivo sobre esta matéria, mas tão-somente, e à semelhança de outras matérias expostas ao longo deste capítulo, resumir algumas das formulações semi-empíricas mais recentes, constantes na literatura da especialidade, para a determinação de profundidades máximas de erosão de equilíbrio, desenvolvidas com alguma base analítica e calibradas com resultados experimentais.

O objectivo é desenvolver uma metodologia que contemple as formulações aqui apresentadas, tendo em vista inter-compará-las e definir critérios/opções para a obtenção dos resultados finais a considerar, ou para a selecção da formulação que, em cada caso, se revele mais adequada.

As abordagens existentes para a quantificação das erosões localizadas distinguem fundamentalmente três abordagens: teorias de regime, análise dimensional e métodos analíticos.

### 6.8.1 Fórmulas baseadas em teorias de regime

Tendo fundamentalmente por base os trabalhos de Veiga da Cunha (1971) e Couto (2000), referem-se a fórmula desenvolvida por Lacey (1929), o qual considera a profundidade de erosão localizada junto de um obstáculo saliente da margem igual à profundidade do escoamento definida de acordo com a teoria de regime do mesmo autor. Esta profundidade,  $h_e$ , é assim traduzida por uma das equações apresentadas na secção 6.4.1 *Teoria de regime de Lacey*, e que aqui se reproduz:

$$h_e = 0.473 \left( \frac{Q}{f} \right)^{1/3} \quad (6.6)$$

em que o valor de  $f$  é igualmente definido por  $f = 1.59 \sqrt{D_{50}}$ , com  $D_{50}$  em *mm*.

Também Inglis (1949) apresenta uma formulação obtida com base em numerosas observações de erosões junto de pilares de pontes, de esporões e de diques, tendo obtido a seguinte expressão (6.7):

$$h_e = 0.473 K_l \left( \frac{Q}{f} \right)^{1/3} - h_0 \quad (6.7)$$

sendo  $h_0$  a profundidade média do escoamento na zona não perturbada pelo obstáculo e  $K_l$  um coeficiente determinado por Inglis, com valores próximos de 2 para erosões junto de pilares e com valores entre 2 e 4 para erosões junto de esporões e encontros.

Diversas formulações são ainda apresentadas em Veiga da Cunha (1971), concluindo que a fórmula que melhor reproduz a profundidade de erosão localizada junto de obstáculos em rios com fundo móvel é dada, em unidades métricas, por (6.8):

$$h_e = K_o \frac{q^{2/3}}{D_{50}^{1/6}} \quad (6.8)$$

em que  $q$  ( $m^2 s^{-1}$ ) é o caudal por unidade de largura e  $K_o$  assume valores variáveis de acordo com o tipo de obstrução, compreendidos entre cerca de 1.15 e 1.21.

## 6.8.2 Fórmulas baseadas na análise dimensional

Alguns dos principais estudos referidos na bibliografia e por ordem cronológica devem-se a Ahamad (1953), Garde *et al.* (1961), Liu *et al.* (1961), Veiga da Cunha (1971) e Froehlich (1989). O primeiro apresentou a seguinte expressão (6.9) para obter a profundidade de erosão,  $h_e$ , junto de um esporão:

$$h_e = K_A q^{2/3} - h_0 \quad (6.9)$$

em que  $K_A$  é um coeficiente cujo valor depende da distribuição da velocidade na secção transversal do escoamento e da orientação do esporão, e  $q$  é o caudal por unidade de largura.

Garde *et al.* (1961) propuseram a seguinte formulação (6.10), também para a profundidade máxima de erosão junto de esporões, função do número de Froude,  $F_r = u/\sqrt{gh_0}$ :

$$h_e = h_0 \left( K_G \frac{1}{\alpha} F_r^m - 1 \right) \quad (6.10)$$

em que  $K_G$  e  $m$  são determinados em função do coeficiente de resistência ao escoamento,  $C_D$ , sendo este parâmetro dado por (Couto, 2000):

$$C_D = \frac{4 (\gamma_s - \gamma) D_{50}}{3 w_q^2 \rho}$$

representando  $w_q$  a velocidade de queda das partículas sólidas.

Liu *et al.* (1961) apresentaram uma expressão para a profundidade de erosão em encontros de pontes, em condições de transporte sólido generalizado; esta expressão escreve-se:

$$h_e = h_0 K_p \left( \frac{L}{h_0} \right)^{0.4} F_r^{1/3} \quad (6.11)$$

em que  $L$  é o comprimento do obstáculo (encontro ou esporão) e  $K_p$  é função da forma dos encontros, tendo valores entre cerca de 1.10 para paredes verticais a 2.15 para encontros com taludes inclinados a 1:1.5 (v:h).

Veiga da Cunha (1971) apresentou as seguintes expressões (6.12) em função da orientação dos obstáculos salientes das margens:

$$\begin{aligned}
 h_e &= 2.20 \left( \frac{L}{h_0} \right)^{0.16} \left( \frac{h_{obs}}{h_0} \right)^{0.91} \left( \frac{w_q}{u_*} \right)^{0.14} h_0 & \theta = 60^\circ \\
 h_e &= 1.65 \left( \frac{L}{h_0} \right)^{0.30} \left( \frac{h_{obs}}{h_0} \right)^{0.95} \left( \frac{w_q}{u_*} \right)^{0.15} h_0 & \theta = 90^\circ \\
 h_e &= 1.80 \left( \frac{L}{h_0} \right)^{0.26} \left( \frac{h_{obs}}{h_0} \right)^{0.98} \left( \frac{w_q}{u_*} \right)^{0.14} h_0 & \theta = 120^\circ
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

em que  $h_{obs}$  representa a altura do obstáculo.

Froehlich (1989) sugeriu as seguintes expressões (6.13), respectivamente para erosões sem transporte sólido e com transporte sólido generalizado:

$$\begin{aligned}
 h_e &= 0.78 K_f K_\theta (L/h_0)^{0.63} (h_0/D_{50})^{0.43} F_r^{1.16} \sigma_D^{-1.87} h_0 \\
 &\text{(sem transporte generalizado)}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
 h_e &= 2.27 K_f K_\theta \left( \frac{L}{h_0} \right)^{0.43} F_r^{0.61} h_0 \\
 &\text{(com transporte generalizado)}
 \end{aligned}$$

em que  $\sigma_D = 0.5(D_{84}/D_{50} + D_{50}/D_{16})$  é o coeficiente de gradação, e o factor de forma  $K_f$  toma valores desde cerca de 1.0 para esporões ou encontros com paredes verticais a cerca de 0.50 para taludes inclinados a 1:1.5 (v:h).

Para atender à orientação do esporão ou do encontro com o escoamento Froehlich sugeriu a seguinte relação para  $K_\theta$ :

$$K_\theta = \left( \frac{\theta}{90} \right)^{0.13}$$

com o ângulo  $\theta$  em ( $^\circ$ ).

### 6.8.3 Fórmulas baseadas em métodos analíticos

Os principais estudos baseados em métodos analíticos foram desenvolvidos por Laursen & Toch (1956), Laursen (1958 e 1960), Gill (1972) e Lim (1997).

Com base nas equações de continuidade do caudal para a fase líquida e para o transporte de sedimentos, Laursen deduziu expressões para encontros enraizados no leito maior e atingindo o canal principal com transporte sólido generalizado; apresentou a seguinte equação (6.14):

$$\frac{L}{h_0} = 2.75 \frac{h_e}{h_0} \left[ \left( \frac{h_e}{1.15 h_0} + 1 \right)^{1.7} - 1 \right] \quad (6.14)$$

a qual, para a gama de valores práticos, se pode escrever:  $h_e = 1.5 \sqrt{h_0 L}$ .

Para o caso de escoamento sem transporte sólido generalizado e para obstáculos que não se estendam para além do leito maior, Laursen deduziu a expressão (6.15), que é função da relação entre a tensão tangencial efectiva no fundo e a tensão tangencial crítica de arrastamento:

$$\frac{L}{h_0} = 2.75 \frac{h_e}{h_0} \left[ \frac{(h_e/(12 h_0) + 1)^{7/6}}{(\tau/\tau_c)^{1/2}} - 1 \right] \quad (6.15)$$

Admitindo um estreitamento extenso e com base numa equação de transporte sólido, Gill apresentou o seguinte modelo (6.16) para a profundidade de erosão localizada junto de esporões:

$$h_e = h_0 \left\{ \alpha_G \left( \frac{B}{B-L} \right)^{6/7} \left[ \frac{1}{\left( \frac{B}{B-L} \right)^{1/m} \left( 1 - \frac{\tau_c}{\tau} \right) + \left( \frac{\tau_c}{\tau} \right)} \right]^{3/7} - 1 \right\} \quad (6.16)$$

em que  $B$  é a largura da secção transversal do canal, o expoente  $m$  varia entre 1.5 e 3.0, e  $\alpha_G$  traduz a relação entre a erosão junto de esporões e a erosão por contracção em estreitamentos; é dado por  $\alpha_G = 8.375 (D_{50}/h_0)^{0.25}$ .

Para o movimento do fundo apenas na vizinhança do obstáculo, a fórmula de Gill escreve-se:

$$h_e = h_0 \left[ 8.375 \left( \frac{D_{50}}{h_0} \right)^{0.25} \left( \frac{B}{B-L} \right)^{6/7} \left( \frac{\tau}{\tau_c} \right)^{3/7} - 1 \right] \quad (6.17)$$

e para taxas elevadas de transporte sólido generalizado obtém-se,

$$h_c = h_0 \left[ 8.375 \left( \frac{D_{50}}{h_0} \right)^{0.25} \left( \frac{B}{B-L} \right)^{(6/7-3/7m)} - 1 \right] \quad (6.18)$$

Para a previsão da profundidade máxima de equilíbrio junto de obstáculos colocados perpendicularmente à margem e com o escoamento sem transporte sólido generalizado, Lim (1997) propôs o seguinte modelo (6.19), aplicável para uma parede vertical:

$$h_c = h_0 \left\{ 0.9 \left[ (\theta_c)^{-0.375} (F_{r_c})^{0.75} \left( \frac{D_{50}}{h_0} \right)^{0.25} \left[ 0.9 \left( \frac{L}{h_0} \right)^{0.50} + 1 \right] \right] - 2 \right\} \quad (6.19)$$

em que  $F_{r_c}$  é o número de Froude densimétrico e  $\theta_c$  é o parâmetro de Shields na condição de início do movimento.

Esta equação poderá ainda escrever-se em função de  $u_* / u_{*c}$ , vindo:

$$h_c = h_0 \left\{ \left[ 2 \left( \frac{u_*}{u_{*c}} \right)^{0.75} \left[ 0.9 \left( \frac{L}{h_0} \right)^{0.50} + 1 \right] \right] - 2 \right\} \quad (6.20)$$

#### 6.8.4 Critérios sugeridos por Melville e Dongol

Estes critérios foram desenvolvidos por Melville (1992, 1995, 1997) e Dongol (1994) na Universidade de Auckland, para a determinação das profundidades de erosão de equilíbrio junto de pilares de pontes, com possibilidade de incluir canais com geometria de secção composta. A forma genérica da equação proposta escreve-se:

$$N_{h_c} = K_U K_D K_\sigma K_\theta K_f K_g \varphi \left( \frac{h_c}{L} \right) \quad (6.21)$$

em que  $N_{h_c}$  é um parâmetro adimensional, com a variável  $h_c$  incluída sob as formas  $h_c/L$  e  $h_c/h_0$ , por exemplo, e os parâmetros  $K$  representam a influência dos diversos factores na profundidade de erosão. Assim,  $K_U$  traduz o efeito da velocidade média do escoamento não perturbado,  $K_D$  traduz a influência da dimensão dos sedimentos,  $K_\sigma$  traduz o efeito da forma da curva granulométrica,  $K_\theta$  traduz a influência do alinhamento do obstáculo em relação à direcção do escoamento,  $K_f$  traduz o efeito da forma do obstáculo,  $K_g$  traduz a influência da forma da secção transversal do escoamento e  $\varphi(h_c/L)$  designa uma função de  $h_c/L$ .

Dongol introduziu mais dois parâmetros na equação anterior que traduzem, respectivamente, o efeito da profundidade do escoamento nos obstáculos curtos,  $K_h$ , e o efeito do comprimento dos obstáculos nas restantes situações,  $K_L$ . Este critério consiste assim na aplicação das seguintes equações (6.22):

$$\begin{aligned} \frac{h_c}{L} = 2 K_h K_f^* K_\theta^* K_\sigma K_D K_U K_g \quad \frac{L}{h_0} < 2 \\ \frac{h_c}{h_0} = 10 K_L K_f^* K_\theta^* K_\sigma K_D K_U K_g \quad \frac{L}{h_0} \geq 2 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Os parâmetros  $K_h$  e  $K_L$  são dados pelas seguintes expressões (6.23):

$$\begin{aligned} K_h &= \left(\frac{h_0}{L}\right)^{0.20} - 0.20 & 0 < L/h_0 < 2 \\ K_L &= 0.19 \left(\frac{L}{h_0}\right)^{0.30} + 0.10 \left(\frac{L}{h_0}\right)^{0.20} & 2 \leq L/h_0 \leq 100 \\ K_L &= 1.0 & L/h_0 > 100 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Os restantes parâmetros  $K$  têm as expressões que se apresentam em seguida. Assim, para o parâmetro que traduz a influência da velocidade média do escoamento não perturbado,  $K_U$ , Dongol sugeriu:

$$\begin{aligned} K_U &= 0 & \bar{u}/\bar{u}_c < 0.5 \\ K_U &= 2 \frac{\bar{u}}{\bar{u}_c} - 1.0 & 0.5 \leq \bar{u}/\bar{u}_c < 1.0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

em que  $\bar{u}$  representa a velocidade média do escoamento não perturbado e  $\bar{u}_c$  a correspondente velocidade média crítica.

Dongol sugeriu o cálculo de  $K_\sigma$  em função do coeficiente de gradação,  $\sigma_D$ , para diferentes valores da relação  $[\bar{u} - (\bar{u}_c - \bar{u}_c)]/\bar{u}_c$ , a partir do gráfico da Figura 6.10, com  $U_0 \equiv \bar{u}$ ,  $U_a \equiv \bar{u}_c$  e  $U_{ac} \equiv \bar{u}_c$ , sendo  $\bar{u}_c$  a velocidade de ruptura do encouraçamento.

Ainda segundo Dongol, o parâmetro  $K_D$  é calculado por:

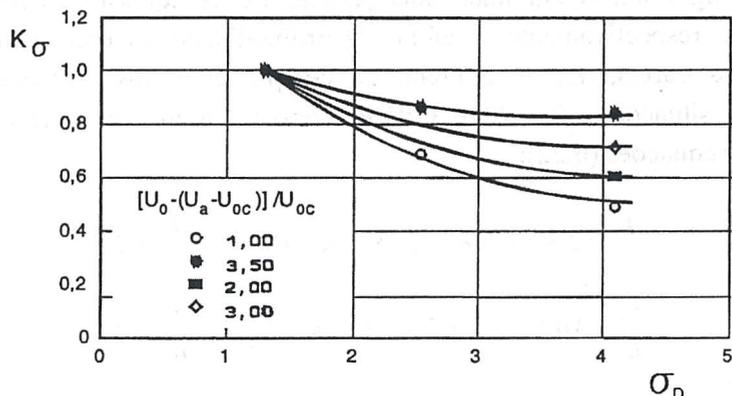


Figura 6.10 - Quantificação do efeito da distribuição granulométrica (Couto, 2000).

$$K_D = 0.44 \left( \frac{L}{D_{50}} \right)^{0.22} ; \quad L/D_{50} < 40 \quad (6.25)$$

Entretanto, Melville (1997) não inclui o coeficiente  $K_\sigma$  na equação 6.21, considerando o efeito deste parâmetro na quantificação do efeito da velocidade, sendo o correspondente parâmetro  $K_U$  obtido através de:

$$K_U = \frac{\bar{u} - (\bar{u}_e - \bar{u}_c)}{\bar{u}_c} \quad \frac{\bar{u} - (\bar{u}_e - \bar{u}_c)}{\bar{u}_c} < 1.0$$

$$K_U = 1.0 \quad \frac{\bar{u} - (\bar{u}_e - \bar{u}_c)}{\bar{u}_c} \geq 1.0 \quad (6.26)$$

Também para o coeficiente  $K_D$ , Melville (1997) sugeriu:

$$K_D = 0.57 \log_{10} \left( 2.24 \frac{L}{D_{50}} \right) ; \quad L/D_{50} < 40 \quad (6.27)$$

Em relação à forma do obstáculo, Dongol sugeriu a seguinte correção (6.28) aos valores de  $K_f$  apresentados na Tabela 6.1 (Couto, 2000):

$$K_f^* = K_f \quad L/h_0 \leq 2$$

$$K_f^* = K_f + 0.087 (1 - K_f) \left[ 0.5 \left( \frac{L}{h_0} \right) - 1.0 \right] \quad 2 < L/h_0 \leq 25 \quad (6.28)$$

$$K_f^* = 1.0 \quad L/h_0 > 25$$

De igual modo, Melville (1997) sugeriu uma correcção idêntica para os valores de  $K_f$ , utilizando as mesmas equações de Dongol nos intervalos  $L/h_0 \leq 2$  e  $L/h_0 > 25$ ; entretanto, para os valores intermédios de  $L/h_0$  Melville sugeriu:

$$K_f^* = K_f + 0.667(1 - K_f) \left[ 0.1 \left( \frac{L}{h_0} \right) - 1.0 \right] \quad 10 < L/h_0 \leq 25 \quad (6.29)$$

Tabela 6.1 – Factores de forma,  $K_f$ , aplicáveis a esporões fluviais e a encontros de pontes.

Obstáculo		Autor							
Forma	Nº	Field (1971)	Laursen (1970)	V. da Cunha (1973)	Breusers e Raudkivi (1991)	Wong (1982)	Tey (1984)	Melville (1992)	Dongol (1994)
	1	1,0	1,0	1,0	1,0			1,0	1,0
	2						1,0		
	3						1,0		
	4						0,80		
	5	0,85	0,90			0,87	0,70	0,75	0,80
	6			0,95					
	7					0,82		0,75	0,90
	8		0,80		0,85	0,60	0,70	0,50	0,51
	9			0,90					
	10	0,80							
	11							0,60	0,64
	12	0,50				0,55		0,45	0,45

Para a orientação do obstáculo são aplicáveis as seguintes expressões (6.30):

$$\begin{aligned}
 K_{\theta}^* &= K_{\theta} & L/h_0 &\geq 3 \\
 K_{\theta}^* &= K_{\theta} + (1 - K_{\theta}) \left[ 1.5 - 0.5 \frac{L}{h_0} \right] & 1 < L/h_0 &\leq 3 \\
 K_{\theta}^* &= 1.0 & L/h_0 &\leq 1
 \end{aligned} \quad (6.30)$$

com os valores de  $K_{\theta}$  obtidos a partir do gráfico da Figura 6.11, em que  $\theta$  representa o ângulo de incidência, medido entre o eixo do obstáculo e a margem de jusante.

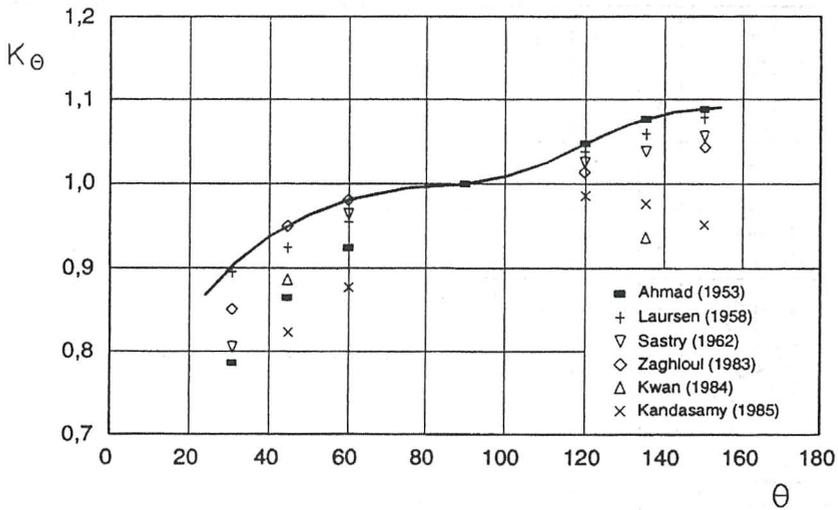


Figura 6.11 - Variação de  $K_{\theta}$  com a orientação do obstáculo (Couto, 2000).

A influência da geometria da secção transversal do escoamento pode ser traduzida através da seguinte expressão (6.31) obtida por Dongol (1994):

$$K_g = \sqrt{1 - \frac{L_c}{L} \left[ 1 - \left( \frac{h_c}{h_0} \right)^{5/3} \right]} \quad (6.31)$$

em que  $h_c$  e  $L_c$  representam, respectivamente, a altura do escoamento sobre o leito de cheias e o comprimento do obstáculo no leito de cheias.

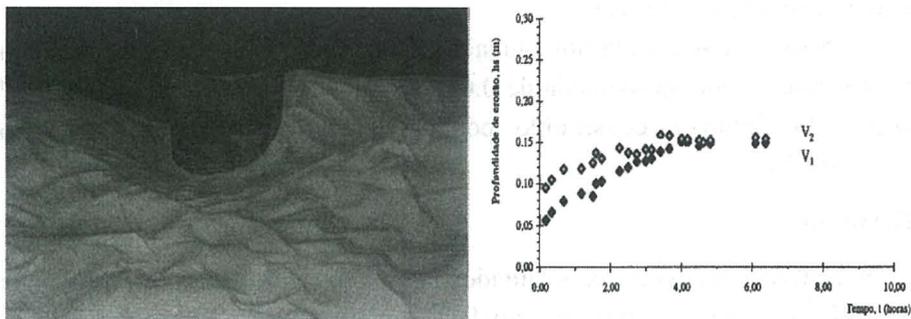
Apresenta-se no ANEXO IV o programa de cálculo automático *erosao\_obs*, escrito em FORTRAN, e no CD-ROM que acompanha este livro a correspondente versão executável (código de acesso 6669) para a previsão da profundidade de erosão,  $h_e$ , junto de obstáculos salientes de margens, segundo os critérios de Melville (1992, 1995 e 1997) e Dongol (1994).

### 6.8.5 Modelação numérica das erosões localizadas junto de obstáculos

Pretende-se utilizar o modelo matemático 2DH descrito no Capítulo 5 (modelo *morfofin*) para simular a evolução de um fundo móvel nas proximidades de um obstáculo e comparar os resultados obtidos com dados disponíveis na bibliografia. Complementarmente, comparam-se as profundidades máximas da cavidade de erosão obtidas por aquelas duas vias com o valor dado pelo programa de cálculo automático *erosao\_obs*, descrito na secção anterior.

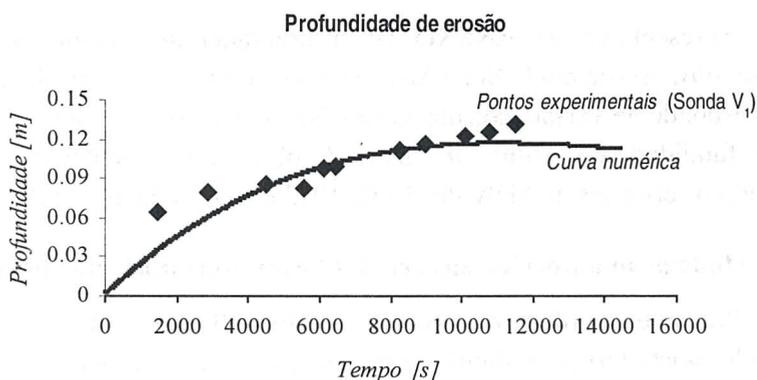
#### Exemplo 6.2:

Aplicar o programa de cálculo automático *erosao\_obs*, desenvolvido na secção 6.8.4 *Crítérios sugeridos por Melville e Dongol*, para a previsão da profundidade de erosão,  $h_e$ , considerando as condições do exemplo cujos resultados experimentais e da simulação numérica são apresentados na Figura 6.12.



- a) Configuração de equilíbrio obtida após 6.20 h e dados obtidos em sondas experimentais situadas sensivelmente a meio do paramento de montante ( $V_1$ ) e junto à cabeça do esporão ( $V_2$ ) (Couto, 2000).

Figura 6.12 - Dados experimentais e resultados numéricos obtidos para a evolução da cavidade de erosão, sensivelmente a meio do paramento de montante de um esporão.



- b) Evolução da cavidade de erosão sensivelmente a meio do paramento de montante do esporão.

Figura 6.12 - Dados experimentais e resultados numéricos obtidos para a evolução da cavidade de erosão, sensivelmente a meio do paramento de montante de um esporão (continuação).

A situação analisada corresponde à modelação da evolução de uma cavidade de erosão provocada pelo escoamento de água num canal com 10 m de comprimento por 1.8 m de largura, e onde existe um esporão com 0.37 m de comprimento, simulado através de um prisma rectangular que termina com uma cabeça cilíndrica.

Neste canal circula um caudal de  $0.045 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , a que correspondem uma profundidade aproximada de 0.092 m e uma velocidade média de  $0.27 \text{ m s}^{-1}$ . O fundo é constituído por areia com um diâmetro mediano  $D_{50} \approx 0.32 \text{ mm}$ .

### Resultados:

A concordância entre os resultados numéricos e os dados experimentais pode considerar-se bastante satisfatória. Para a profundidade máxima de erosão de equilíbrio obteve-se um valor numérico aproximadamente igual a 0.12 m, um pouco inferior aos cerca de 0.15 m obtidos experimentalmente. A aplicação do programa *erosao\_obs* estimou um valor ainda superior para esta profundidade, na ordem dos 0.21 m. Uma possível justificação para este facto poderá dever-se a efeitos de escala não contabilizados nas equações empíricas deduzidas para escoamentos em protótipo (a adoptar em fase de projecto). Nesta conformidade, em

condições reais deverão aproximar-se os valores estimados pelas diferentes vias, situando-se dentro de aproximações realistas para este tipo de problemas.

## 6.9 Protecção contra as erosões localizadas

O maior responsável pelas erosões localizadas que ocorrem na vizinhança de obstáculos é o vórtice principal (Figura 6.13). Por conseguinte, qualquer sistema de protecção contra estas erosões deverá visar uma actuação directa ou indirecta sobre aquele vórtice, com o objectivo de reduzir a sua intensidade ou de proteger convenientemente as zonas onde a sua acção se faz sentir mais intensamente.

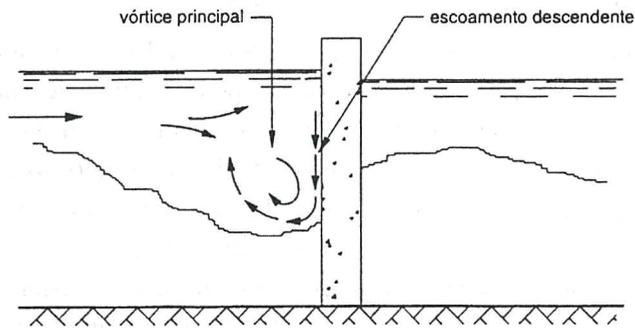


Figura 6.13 - Vórtice principal associado ao escoamento descendente (Couto, 2000).

Em princípio, as características gerais do escoamento, nomeadamente a velocidade e a profundidade, ou mesmo a geometria global do leito, como por exemplo uma curvatura em planta ou ainda a meandrização de um leito são imutáveis, isto é, assume-se que sobre estas características não se vai actuar.

Nesta conformidade, a solução deverá passar por:

1. analisar e corrigir outras características locais do escoamento, quer influenciando-o directamente, como por exemplo reduzindo a componente descendente do escoamento junto à estrutura, quer actuando sobre a posição, dimensões e geometria do obstáculo, quer ainda recorrendo a determinadas estruturas ligadas ou próximas do obstáculo; ou,

2. controlar a erosão, substituindo o material do leito na vizinhança do obstáculo por um material fixo, ou por um material incoerente de granulometria adequada.

Naturalmente que a escolha do tipo de protecção a utilizar, em cada caso, deverá resultar da comparação entre o custo da protecção e a economia conseguida nas fundações do obstáculo.

Ainda segundo Veiga da Cunha (1971), os principais métodos de protecção contra as erosões junto de pilares de pontes podem classificar-se em cinco grupos: *i)* actuação sobre a posição, a geometria ou a rugosidade do pilar; *ii)* construção de estruturas de protecção adjacentes ao pilar; *iii)* construção de estruturas de protecção a montante do pilar; *iv)* actuação directa sobre o escoamento, e/ou *v)* estabilização do leito.

Em relação ao primeiro método, importa sublinhar que a eficiência da protecção está fortemente condicionada pelo ângulo de ataque e, por conseguinte, só tem sentido falar numa determinada forma de protecção associada a um certo ângulo de ataque. Assim, têm sido propostos pilares com a geratriz ou a face de montante inclinada, por forma a que se gere um escoamento ao longo da cabeça do pilar, capaz de contrariar o escoamento vertical descendente. Outras soluções apontam para a existência de fendas ou de furos nos pilares com o objectivo de contrariar o gradiente de pressões adverso que origina a formação do vórtice principal.

O segundo método consiste no emprego de abas horizontais em torno do pilar, ao nível do fundo ou abaixo deste, com o objectivo de contrariar a formação de correntes secundárias descendentes e limitar a acção do vórtice principal.

Sobre as estruturas de protecção a montante do pilar, como por exemplo outros pilares ou painéis, em particular pilares cilíndricos submersos em número de três ou cinco dispostos em V com o vértice voltado para montante, parecem fornecer uma protecção eficaz.

A actuação directa sobre o escoamento consiste em aspirar o escoamento ao longo das linhas de estagnação na cabeça do pilar por forma a evitar ou reduzir o escoamento descendente vertical junto do pilar, ou ainda injectar um líquido no seio do escoamento, junto à cabeça do pilar, por forma a modificar a distribuição de pressões em torno do pilar. Este método, na sua aplicação prática, parece ser pouco eficaz.

Finalmente, a estabilização do leito consiste: *i*) na utilização de enrocamento a granel ou em invólucros; *ii*) na utilização de inertes naturais ou artificiais contidos em invólucros de rede metálica ou de plástico (gabiões); *iii*) na utilização de tapetes flexíveis formados por blocos pesados, de betão ou de pedra, convenientemente ligados ente si, ou ainda, como soluções limite, *iv*) em pavimentar o leito, formando um revestimento resistente à erosão.

Para uma protecção por enrocamento a granel encontram-se na bibliografia diversas formulações para o cálculo da distribuição e características (dimensões) deste material.

Considerem-se as seguintes relações entre os diâmetros  $D_n$ ,  $D_s$  e  $D$ , em que  $D_n$  representa a dimensão de um cubo de volume equivalente e  $D_s$  o diâmetro de uma esfera de volume equivalente:  $D_n = (W/\rho)^{1/3}$ ,  $D_n = 0.806 * D_s$  e  $D_{n50} = 0.84 a 0.91 D_{s50}$ , sendo  $W$  a massa do material (em kg). Escarameia & May (1992) sugerem a seguinte expressão (6.32) para o cálculo do  $D_{n50}$ :

$$D_{n50} = C_f \frac{u_f^2}{2g(s-1)} \quad (6.32)$$

em que  $D_{n50}$  (m) representa a dimensão característica do material (cubo de volume equivalente);  $C_f = 12.3 * TI - 0.20$ , sendo  $TI$  uma medida da intensidade turbulenta, que varia desde 0.12 para turbulência normal a 0.50-0.60 para turbulência muito elevada (a jusante de zonas de dissipação de energia), com valores da ordem de 0.35 para turbulência já elevada (em torno de estruturas do tipo pilar, esporões, caixões estanques,...);  $u_f$  é a velocidade do escoamento junto ao fundo (a cerca de 10% da profundidade local acima do fundo);  $g = 9.81 m^2 s^{-1}$ , e  $s = \rho_s / \rho$ .

Por sua vez, Pilarczyk (1990) sugere a fórmula (6.33), que seguidamente se apresenta, igualmente válida para a determinação do  $D_{n50}$  da curva granulométrica do material de enrocamento a utilizar:

$$D_{n50} = \frac{\mu}{(s-1)} \frac{0.035 K_T K_Y}{\Psi_{cr} K_S} \frac{u^2}{2g} \quad (6.33)$$

em que  $\mu$  é um factor de correcção, que varia entre 0.75 para uma protecção contínua a cerca de 1.0 a 1.5 para descontinuidades ou transições;  $\Psi_{cr}$  é um factor de estabilidade, sendo igual a 0.35 para material de enroca-

mento;  $K_T$  é um factor de turbulência ( $K_T \neq TI$ ), sendo igual a 1.0 para um rio com turbulência normal e igual a 1.5 a 2.0 para turbulência elevada (a jusante de bacias de dissipação e junto de pilares de pontes, por exemplo);  $K_Y$  é um factor de profundidade, sendo dado por  $K_Y = (D_{n50}/h)^{0.20}$  para escoamentos com turbulência elevada;  $K_S$  é um factor da inclinação transversal, sendo dado por  $K_S = \cos \beta \sqrt{1 - (\tan \theta / \tan \phi)^2} + (\sin(\phi - \chi) / \sin \phi)$ , em que  $\theta$  é o ângulo da margem com a horizontal,  $\chi$  é o ângulo do fundo alterado com a horizontal e  $\phi$  é o ângulo de repouso;  $u$  ( $ms^{-1}$ ) é a velocidade média do escoamento sobre a protecção.

Para o cálculo do  $D_{s30}$  Maynard (1995) sugere a utilização da seguinte expressão (6.34):

$$D_{s30} = S_f C_s C_v C_l h \left( \sqrt{\frac{1}{s-1}} \frac{U}{\sqrt{K_c gh}} \right)^{2.5} \quad (6.34)$$

em que  $D_{s30} \approx 0.70 D_{s50}$ ;  $S_f$  é um factor de segurança;  $C_s$  é um coeficiente de estabilidade (com valores desde 0.30 para pedras angulares a 0.375 para pedras esféricas);  $C_v$  varia desde 1.0 em canais rectilíneos a 1.25 nas proximidades de estruturas hidráulicas;  $C_l$  é da ordem de 1.0;  $K_c$  é um factor correctivo da inclinação da margem, que poderá ser obtido por  $K_c = -0.672 + 1.492 \cot \beta - 0.449 \cot^2 \beta + 0.045 \cot^3 \beta$ , sendo  $\beta$  o ângulo da margem com a horizontal.

A espessura do enrocamento deverá situar-se entre cerca de  $1.5 D_{50}$  e  $1.0 D_{100}$ ; se o material for colocado a profundidades superiores a 1.0 m, a espessura deverá então situar-se entre cerca de  $2.5 D_{50}$  e  $1.5 D_{100}$ .

Como principais critérios a adoptar para o enrocamento, CIRIA (2002) sugere, entre outros critérios, a seguinte composição em termos do  $W_{n50}$  da pedra característica:

- $W_{100} = 2.0 W_{n50}$  a  $5.0 W_{n50}$
- $W_{50} = 1.0 W_{n50}$  a  $1.5 W_{n50}$
- $W_{15} = 0.3 W_{n50}$  a  $1.0 W_{n50}$

Outras formulações igualmente válidas para enrocamentos, a granel ou em invólucros, e ainda para protecções por gabiões, são apresentadas em CIRIA (2002).

## 7. DESCARGAS DE EFLUENTES E IMPACTOS AMBIENTAIS

São analisados os efeitos de descargas em correntes naturais e apresentados os principais modelos matemáticos para difusão e dispersão de matéria. Descrevem-se modelos analíticos em regime permanente de uma única substância conservativa e não-conservativa e modelos de escoamento variável em regimes laminar e turbulento, considerando descargas instantâneas e contínuas. Apresentam-se os resultados da solução analítica para uma descarga contínua e, por último, a formulação matemática e o correspondente modelo numérico adequados para a obtenção da concentração de um poluente em qualquer secção de um curso de água unidimensional.

### 7.1 Considerações gerais

Assiste-se frequentemente ao lançamento de produtos com elevado grau de toxicidade nos cursos de água, sejam eles provenientes de redes de águas domésticas, de águas residuais, ou ainda de resíduos industriais, sem qualquer tratamento prévio. Enquadram-se também neste domínio de investigação as descargas de águas quentes provenientes de várias origens, tais como unidades fabris, centrais térmicas, centrais nucleares, etc.

Algum esforço tem sido dispendido nas últimas décadas no sentido de implementar modelos matemáticos adequados e de otimizar e desenvolver técnicas numéricas para a modelação de problemas de poluição ambiental.

No essencial, estes tipos de problemas podem reduzir-se à procura da solução de um modelo matemático de advecção-difusão-dispersão. A quantidade desconhecida é, nestes casos, uma concentração, ou seja, uma quantidade física escalar que pode ser a massa de um poluente, a salinidade, a temperatura da água, etc.

### 7.2 Efeitos de descargas em correntes naturais

Os efluentes de fontes domésticas e industriais deverão em geral, após algum tratamento prévio, ser de algum modo rejeitados num meio receptor final. Em geral, o lançamento de um efluente consiste: *i*) numa descarga para uma linha de água natural; *ii*) na injeção ou percolação através do subsolo; ou, ainda, *iii*) na evaporação para a atmosfera.

Trataremos em seguida o primeiro destes três modos de lançamento. Em linhas de água naturais há um balanço entre as vidas animal e vegetal,

com considerável interdependência entre as várias formas de vida. As águas de boa qualidade são caracterizadas por elevadas multiplicidades de espécies sem predominância de qualquer delas. A matéria orgânica lançada num rio é metabolizada pelas bactérias e convertida em amónia, nitratos, sulfatos, dióxido de carbono, etc., os quais são, por sua vez, usados pelas plantas e algas para a produção de carboidratos e oxigénio. Na vida das plantas abundam muitos animais microscópicos (protozoários, por exemplo) que servem de alimento a crustáceos, insectos, peixes, etc. Alguns dos animais servem de alimento a outros, contribuindo desse modo para a degradação bacteriana.

A introdução de quantidades excessivas de poluentes pode alterar de diversas formas este balanço natural. Modificações no pH ou na concentração de algumas espécies orgânicas e inorgânicas podem ser tóxicas para determinadas formas de vida. Excessivas quantidades de matéria orgânica podem causar crescimento bacteriano e o esgotamento de fontes de oxigénio dissolvido na corrente de água. As águas poluídas são tipicamente caracterizadas por elevados números de relativamente poucas espécies e a ausência de formas elevadas.

Como a concentração de poluentes é reduzida por diluição, precipitação, arejamento, oxidação bacteriana, ou outros processos naturais, o ciclo normal e a distribuição de formas de vida tenderão a reestabelecer-se. Os modelos de qualidade da água são baseados na manutenção de concentrações mínimas de oxigénio dissolvido, em concentrações não tóxicas de determinadas espécies químicas e na manutenção de um pH próximo do valor neutro.

Quando numa corrente de água se mantém um ambiente saudável, a sua capacidade assimilativa natural pode ser usada para suportar o tratamento de derrames sem afectar negativamente os utentes a jusante.

A auto-depuração de um curso de água natural resulta da acção conjugada de diversos fenómenos físicos, químicos e biológicos. Do ponto de vista hidráulico, importa fundamentalmente relacionar os aspectos relativos ao caudal disponível, à velocidade da corrente, à difusão, sedimentação e dispersão da matéria poluente, à forma como o poluente é rejeitado (preferencialmente pelo fundo e de forma distribuída), à luz solar (que actua como desinfectante e estimula o crescimento de algas) e à temperatura (que afecta a solubilidade do oxigénio na água e a actividade bacteriana).

### 7.3 Modelos matemáticos para difusão e dispersão de matéria

Considere-se um meio receptor (massa de água) de uma descarga poluente. Ao ser injectado um determinado volume de uma substância poluente neste meio receptor (cujas densidades se supõe serem muito próximas), o volume inicial desta substância sofrerá uma dispersão gradual como resultado da difusão molecular, mesmo que a massa líquida do meio receptor esteja em repouso. Se, por outro lado, o meio receptor estiver em movimento e com números de Reynolds suficientemente elevados, o escoamento será turbulento e introduz um mecanismo adicional de advecção e de mistura (difusão) devido à turbulência. A difusão devida à turbulência é normalmente várias ordens de grandeza superior à difusão molecular, sendo esta última frequentemente omitida. A combinação dos processos de advecção e difusão produz dispersão.

A descrição matemática da difusão turbulenta é baseada em considerações de conservação da massa poluente injectada a uma razão  $\partial C/\partial t$  num ponto do escoamento, sendo  $C$  a concentração do poluente.

Em conformidade com a decomposição de Reynolds, num escoamento turbulento a velocidade instantânea e a concentração são representadas pela soma de duas componentes: um valor médio temporal ( $u$  e  $c$ ) e uma flutuação ( $u'$  e  $c'$ ) com valor médio temporal nulo, ou seja,  $U = u + u'$  e  $C = c + c'$ . Usando um índice  $i$  para indicar direcção, isto é,  $u_i$  significa  $u_x, u_y$  ou  $u_z$ , o processo de difusão turbulenta pode ser representado pela seguinte equação diferencial, correspondente à média temporal da equação de transporte tridimensional de um escalar:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_{Mi} \frac{\partial c}{\partial x_i} - \overline{u'_i c'_i} \right)$$

em que  $D_{Mi}$  representa um coeficiente de difusão molecular e  $\overline{u'_i c'_i}$  representa o efeito de mistura turbulenta. Este produto ( $\overline{u'_i c'_i}$ ) não é simples de avaliar, sendo frequentemente aproximado por um modelo do tipo:

$$\overline{u'_i c'_i} = -D_{Ti} \frac{\partial C}{\partial x_i}$$

em que  $D_{Ti}$  é um coeficiente de difusão turbulenta, ou difusividade turbulenta, a qual se relaciona com a viscosidade turbulenta  $\nu_t$  (Capítulo 5) a menos de uma constante.

Considerando a difusividade mássica global constituída pela difusividade mássica molecular  $D_m$ , que por ser uma propriedade do fluido se mantém constante, e pelo tensor diagonal da difusividade mássica turbulenta  $\bar{D}_t(D_{ix}, D_{iy}, D_{iz})$ , a equação tridimensional de convecção-difusão-reacção que descreve a evolução temporal e espacial da concentração de um poluente, que apresenta reacções físicas, químicas ou biológicas, escreve-se:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D_m \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{ix} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{iy} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{iz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \beta(C) \quad (7.1)$$

em que  $\beta(C)$  representa o conjunto das parcelas do poluente produzidas e/ou transformadas através de reacções.

Na prática, para aplicações em rios e alguns estuários, o modelo traduzido pela equação (7.1) é normalmente simplificado, considerando valores médios do campo de velocidades segundo a vertical. Por outro lado, não sendo significativa a variação dos valores da velocidade e da turbulência na secção transversal, como em geral acontece nos escoamentos fluviais, o problema pode ser reduzido a uma dimensão horizontal.

Nesta conformidade, considerando um curso de água unidimensional, em regime turbulento ( $D_{ix} \gg D_m$ ), admitindo mistura completa nas direcções lateral e vertical, com  $\beta(C) \equiv \sum S_i$ , e fazendo intervir a área da secção transversal do escoamento, a equação diferencial que define a concentração,  $C$ , de um constituinte passa a ser a seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial t} (AC_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_m - AD_{ix} \frac{\partial C_m}{\partial x} \right) = \pm A \sum S_i \quad (7.2)$$

em que  $C_m$  ( $kg m^{-3}$ ) representa a concentração média numa secção;  $D_{ix}$  ( $m^2 s^{-1}$ ) é um coeficiente de dispersão longitudinal;  $A$  é a área da secção transversal ( $m^2$ );  $Q$  ( $m^3 s^{-1}$ ) é o caudal;  $S_i$  ( $kg m^{-3} s^{-1}$ ) representa uma fonte ou sumidouro; considerando reacções de 1ª ordem ter-se-á  $S_i = \pm k_i C_m$ .

Na falta de melhores dados, cuja obtenção passa por medições *in situ*, como veremos mais adiante, e pela calibração do modelo, o coeficiente de dispersão longitudinal  $D_{ix}$  poderá, em primeira aproximação, ser calculado por (7.3) (Deng *et al.*, 2001):

$$D_{ix} = 0.01875 \frac{hu_*}{\varepsilon_r} \left(\frac{B}{h}\right)^{5/3} \left(\frac{Q}{Au_*}\right)^2 \quad (7.3)$$

em que  $\varepsilon_r = 0.145 + \frac{1}{3.520} \left(\frac{Q}{Au_*}\right) \left(\frac{B}{h}\right)^{1.38}$  e  $u_*$  é a velocidade de atrito, dada por  $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ .

São também utilizadas com alguma frequência as expressões:  $D_{ix} \approx 0.011 (Q/A)^2 [B^2/(hu_*)]$ ,  $D_{ix} \approx 7.25 hu_* [Q/(Au_*)]^{1/4}$  e  $D_{ix} \approx 5.93 hu_*$ , embora os resultados obtidos pela equação (7.3) possam em geral ser considerados mais satisfatórios.

Tendo por base dados de concentrações medidas num curso de água, em duas estações localizadas em  $x_1$  e  $x_2$ , é possível estimar o coeficiente de dispersão. Assim, considerando os tempos das medições inicial  $t_0$  e final  $t_n$ , calculam-se as concentrações médias em cada estação por:

$$\bar{C} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (C_k + C_{k+1})(t_{k+1} - t_k)}{2(t_n - t_0)}$$

com as correspondentes massas dadas por,

$$M = Q \bar{C} (t_n - t_0)$$

e os tempos médios de percurso calculados através de,

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (C_k t_k + C_{k+1} t_{k+1})(t_{k+1} - t_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} (C_k + C_{k+1})(t_{k+1} - t_k)}$$

As variâncias temporais são em seguida estimadas:

$$s_t^2 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (C_k t_k^2 + C_{k+1} t_{k+1}^2)(t_{k+1} - t_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} (C_k + C_{k+1})(t_{k+1} - t_k)} - (\bar{t})^2$$

assim como a velocidade média entre as estações 1 e 2, calculada por,

$$U = \frac{x_2 - x_1}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1}$$

Em conformidade com Fischer (1968), o coeficiente de dispersão longitudinal pode ser, finalmente, determinado pela seguinte expressão (7.4):

$$D_{lx} = \frac{U^2 (s_{t_2}^2 - s_{t_1}^2)}{2(\bar{t}_2 - \bar{t}_1)} \quad (7.4)$$

Para o coeficiente de dispersão transversal,  $D_{ly}$ , Deng *et al.* (2001) sugerem:

$$D_{ly} = 0.284 h U \left( \frac{B}{h} \right)^{1.38}$$

O modelo traduzido pela equação (7.2) define que, numa dada secção do curso de água, a taxa de variação da concentração com o tempo depende da variação do fluxo do constituinte devido à advecção ( $QC_m$ ) e à dispersão ( $AD_{lx}(\partial C_m/\partial x)$ ), mais ou menos as fontes ou os sumidouros. Os termos fonte ou sumidouro incluem as várias reacções que aumentam ou diminuem a concentração do constituinte.

Atendendo a que o modelo unidimensional (7.2) considera valores médios em secções transversais, observações experimentais têm revelado que, quando aplicado em canais naturais, este modelo traduz razoavelmente bem a descrição da dispersão somente após algum período inicial desde o lançamento de uma descarga poluente. Nesta conformidade, o tempo a partir do qual poderá ser utilizado com alguma segurança é calculado aproximadamente por:

$$t > 1.5 \frac{B^2}{R_h u_*}$$

sendo  $R_h$  o raio hidráulico, dado por  $R_h = Bh/(B + 2h)$ .

264

É ainda vulgarmente utilizada a expressão  $b(t) \approx 4.5 \sqrt{h u_* (t - t_0)}$  para o cálculo aproximado da largura  $b(t)$  de um traçador, no caso de uma rejeição pontual no instante  $t = t_0$ .

#### 7.4 Soluções analíticas

Considerando o caudal, a área da secção transversal e os coeficientes de dispersão longitudinal e transversal constantes, podemos escrever a

seguinte equação (7.5) simplificada, a qual admite, em geral, solução analítica segundo cada uma das direcções, aceitando que o processo difusivo é francamente dominante segundo a direcção em análise:

$$\frac{Q}{A} \frac{\partial C_m}{\partial x} - D_{ix} \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} - D_{iy} \frac{\partial^2 C_m}{\partial y^2} = \pm \sum_l S_l \quad (7.5)$$

#### 7.4.1 Modelo em regime permanente de uma única substância conservativa

##### 7.4.1.1 Difusão longitudinal

Para uma substância conservativa (a concentração de cloretos, por exemplo) é nulo o termo correspondente ao decaimento; admitindo, por outro lado, que é desprezável a difusão transversal, isto é,  $\partial^2 C_m / \partial y^2$ , resulta a equação (7.6):

$$\frac{Q}{A} \frac{\partial C_m}{\partial x} - D_{ix} \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} = 0 \quad (7.6)$$

Considerando as seguintes condições de fronteira:

$$C_m = 0, \text{ para } x \rightarrow -\infty$$

$$C_m = C_0, \text{ para } x = 0$$

obtém-se a solução,

$$C_m(x) = C_0 e^{\left(\frac{Qx}{AD_{ix}}\right)}, \text{ para } x < 0 \quad (7.7)$$

$$C_m(x) = C_0, \text{ para } x \geq 0$$

com  $C_0 = W_0 / Q$ , sendo  $W_0$  o caudal mássico rejeitado na secção  $x = 0$ , em  $kg s^{-1}$ .

Para obter  $D_{ix}$ , de (7.7) resulta  $\log_e C_m = \log_e C_0 + [Q/AD_{ix}]x$ , a qual representa uma recta de inclinação  $Q/(AD_{ix})$ .

##### 7.4.1.2 Difusão transversal

Admitindo a difusão de uma fonte contínua como permanente,  $\partial C_m / \partial t = 0$ , supondo desprezável a difusão longitudinal,  $\partial^2 C_m / \partial x^2$ , e

considerando a difusão vertical “quase instantânea”, com  $\sum S_i = 0$ , a equação (7.5) permite escrever a seguinte equação (7.8), vulgarmente conhecida como a equação de convecção-difusão transversal:

$$\frac{Q}{A} \frac{\partial C_m}{\partial x} - D_{ly} \frac{\partial^2 C_m}{\partial y^2} = 0 \quad (7.8)$$

De acordo com Rutherford (1994) esta equação admite a seguinte solução (7.9), considerando um *meio não limitado*:

$$C_{mnl}(x, y) = \frac{W_0}{h\sqrt{4\pi D_{ly} x U}} e^{-\left(\frac{y^2 U}{4D_{ly} x}\right)} \quad (7.9)$$

em que  $U = Q/A$  e  $W_0 = M_0/t$  representa o caudal mássico rejeitado na fonte, em  $kg s^{-1}$ , igualmente distribuído na secção transversal A.

Se o *meio* for *limitado*, de largura  $B$ , a solução de (7.8) escreve-se (Pinho, 2001):

$$C_{ml}(x, y) = C_{mnl}(x, y + y_0) + C_{mnl}(x, y - y_0) + \sum_{j=1}^N C_{mnl}(x, 2jB \pm y \pm y_0)$$

em que  $C_{ml}$  e  $C_{mnl}$  representam as concentrações em meio limitado e não limitado, respectivamente;  $B$  é a largura do canal e  $y_0$  é a posição transversal segundo  $y$ , onde a fonte é injectada.

#### 7.4.2 Modelo em regime permanente de uma única substância não-conservativa

Considerando uma reacção de 1ª ordem, com  $S_1 = k_r C_m$ , a equação (7.5) toma a seguinte forma (7.10):

$$\frac{Q}{A} \frac{\partial C_m}{\partial x} - D_{lx} \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} + k_r C_m = 0 \quad (7.10)$$

Admitindo agora, como condições de fronteira, que a concentração de um constituinte tende para zero, tanto para montante ( $x < 0$ ) como para jusante ( $x > 0$ ) do ponto de rejeição, é possível obter, por integração, a seguinte solução (7.11) para a concentração em qualquer ponto  $x$  resultante da rejeição da massa  $M_0$  ( $kg$ ) de um constituinte, a uma taxa constante  $W_0$  ( $kg s^{-1}$ ), no ponto  $x = 0$ :

$$C_m(x) = \begin{cases} \frac{W_0}{Q\Gamma} e^{\left[\frac{Q}{2AD_x}(1+\Gamma)x\right]}, & x < 0 \\ \frac{W_0}{Q\Gamma} e^{\left[\frac{Q}{2AD_x}(1-\Gamma)x\right]}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (7.11)$$

em que  $\Gamma = \sqrt{1 + \frac{4A^2 k_r D_{ix}}{Q^2}} = \frac{A}{Q} \sqrt{\left(\frac{Q}{A}\right)^2 + 4k_r D_{ix}}$ .

A equação (7.11) admite que não existem fontes ou sumidouros do constituinte, com excepção do decaimento  $-k_r C_m$  e da rejeição constante para  $x = 0$ . Importa ainda notar que  $\Gamma \geq 1$ ; por conseguinte, os expoentes da equação (7.11) são sempre negativos e  $C_m(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

No caso de mistura completa no ponto de rejeição, a concentração inicial do constituinte devido a  $W_0(x=0)$  é:

$$C_m(0) = \frac{W_0}{Qm}$$

Em rios que não estejam sob a influência da maré, o coeficiente de dispersão  $D_{ix}$  é em geral pequeno e, conseqüentemente,  $m \approx 1$ . Nestes casos,  $C_m(0) = W_0/Q$  e a equação (7.10) toma a seguinte forma (7.12) (a advecção é dominante):

$$\frac{Q}{A} \frac{\partial C_m}{\partial x} + k_r C_m = 0 \quad (7.12)$$

cuja solução é  $C_m(x) = C_0 e^{-\frac{A}{Q} k_r x} = C_0 e^{-k_r t}$ .

Como obter  $k_r$ : da solução de (7.12) obtém-se a igualdade  $\log_e C_m(x) = \log_e C_0 - k_r t$ , cuja representação é a recta apresentada na Figura 7.1, de inclinação  $k \equiv k_r$ .

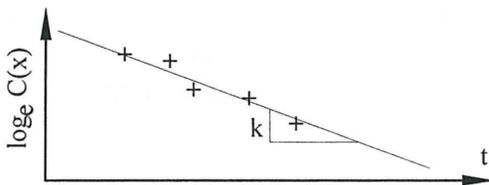


Figura 7.1 - Valor da constante  $k_r \equiv k$  da equação (7.12).

À medida que o coeficiente de dispersão  $D_{ix}$  aumenta e a velocidade decresce, o que acontece com a aproximação do rio a um estuário, ter-se-á:

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow Q\Gamma \rightarrow A\sqrt{4k_r D_{ix}}$$

De igual modo  $\frac{Qx}{2AD_{ix}}(1 \pm \Gamma) \rightarrow \pm x\sqrt{\frac{k_r}{D_{ix}}}$ . Consequentemente, para baixos valores da velocidade, a dispersão é dominante e a solução (7.11) toma a seguinte forma:

$$C_m(x) = \begin{cases} \frac{W_0}{2A\sqrt{k_r D_{ix}}} e^{\left[+\sqrt{\frac{k_r}{D_{ix}}}x\right]}, & x < 0 \\ \frac{W_0}{2A\sqrt{k_r D_{ix}}} e^{\left[-\sqrt{\frac{k_r}{D_{ix}}}x\right]}, & x \geq 0 \end{cases}$$

### 7.4.3 Modelos em regime variável

Importa distinguir as descargas de substâncias poluentes efectuadas em (1) lagoas e albufeiras, ou mesmo em cursos de água nas proximidades de estuários, onde as velocidades são normalmente reduzidas e, por conseguinte, com baixos números de Reynolds, das descargas efectuadas em (2) regiões muito dinâmicas, nomeadamente em zonas de maior declive de um rio com importantes caudais, em estuários e nas zonas costeiras. Ou seja, importa procurar soluções analíticas para aplicações em condições de regime laminar, essencialmente, ou em condições de regime turbulento.

Nesta conformidade, a equação (7.1) admite soluções analíticas para aplicações simples, que serão apresentadas em seguida.

#### 7.4.3.1 escoamento em regime laminar

268

Considerando em primeiro lugar uma descarga instantânea num meio com apenas a componente da velocidade segundo  $x$ , isto é, com  $\vec{V}(u, 0, 0) \neq 0$ , a solução da equação tridimensional (7.1), com  $D_{ix} \approx D_{iy} \approx D_{iz} = D_{im}$  e  $\beta(C) \equiv \sum S_i = 0$ , escreve-se (Graf & Altinakar, 1996):

$$C(x, y, z, t) = \frac{M_3}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} e^{\left[-\frac{(x-ut)^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (7.13)$$

em que  $\sigma^2 = 2D_m t$  e  $M_3 = M_0$  é a massa total da substância injectada instantaneamente, em kg.

Para uma fonte unidimensional contínua, com  $C_0 = \text{Constante}$  e  $\bar{V}(u, 0, 0) = U$ , a versão unidimensional da equação de convecção-difusão (7.1), ainda com  $\beta(C) = 0$ , admite a seguinte solução (7.14):

$$C_m(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[ e^{\frac{Ux}{D_m}} \operatorname{erfc} \left( \frac{x + Ut}{\sqrt{4D_m t}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{x - Ut}{\sqrt{4D_m t}} \right) \right] \quad (7.14)$$

Na Figura 7.2 apresentam-se uma tabela de valores e uma expressão aproximada para o cálculo da função complementar de erro [ $\operatorname{erfc}(\cdot)$ ] (Graf & Altinakar, 1996).

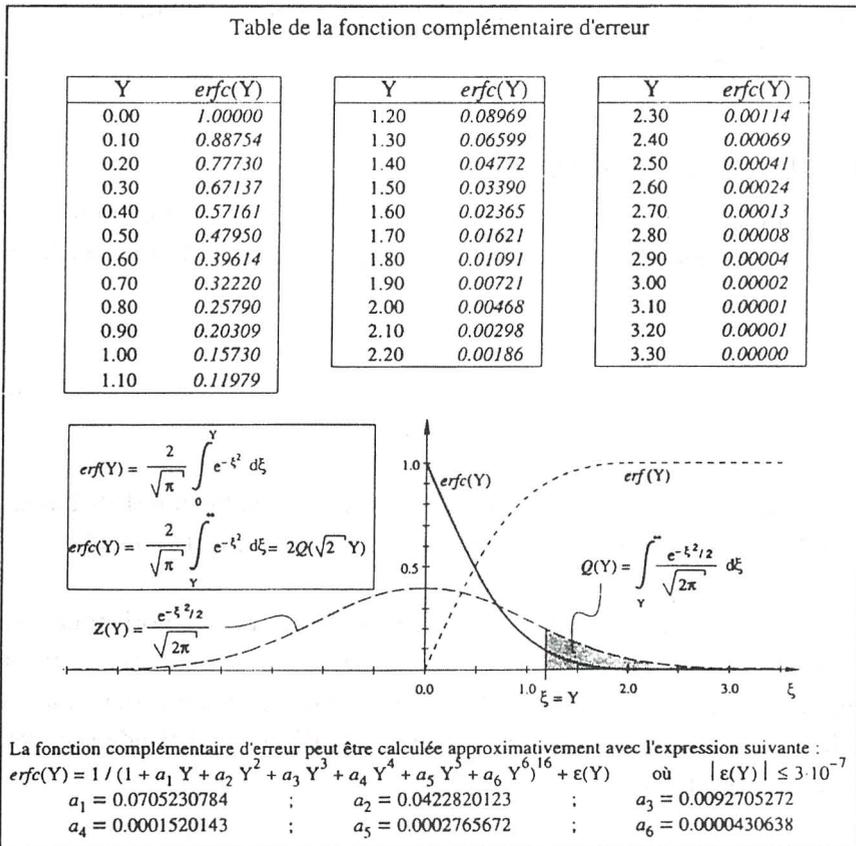


Figura 7.2 - Função complementar de erro (reprodução de Graf & Altinakar, 1996).

### 7.4.3.2 Escoamento em regime turbulento

Apresentam-se neste caso soluções analíticas para a equação unidimensional de dispersão, considerando uma substância conservativa ou não-conservativa, sendo, neste caso,  $k_r$  o coeficiente de reacção da substância activa. Considerando o coeficiente de dispersão longitudinal,  $D_{ix}$ , constante, a correspondente equação unidimensional escreve-se:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D_{ix} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \pm k_r C \quad (7.15)$$

com  $D_{ix}$  dado por (7.3).

Importa distinguir os casos de descargas efectuadas de forma praticamente instantânea de outras descargas com durações contínuas mais ou menos prolongadas.

#### 7.4.3.2.1 Descarga instantânea

Para uma substância não-conservativa ( $k_r \neq 0$ ), por conseguinte com decaimento, e inicialmente concentrada em  $x = 0$ , a equação (7.15) admite a seguinte solução (7.16):

$$C(x, t) = \frac{M_0}{A \sqrt{4\pi D_{ix} t}} e^{\left[ \frac{(x-Ut)^2}{4D_{ix}t} \pm k_r t \right]} \quad (7.16)$$

em que  $M_0$  é a massa total da substância activa igualmente distribuída ao longo de toda a secção  $A$  de um canal, de forma “quase instantânea”.

Considerando um meio bidimensional no plano horizontal, com componentes da velocidade do escoamento segundo  $x$  e  $y$  ( $U$ ,  $V$ ) e admitindo a descarga pontual e instantânea de uma substância com a massa inicial  $M_0$ , a solução analítica da correspondente equação (7.1) simplificada escreve-se (Stefanovic & Stefan, 2001):

$$C(x, y, t) = \frac{M_0}{4\pi t \sqrt{D_{ix} D_{iy}}} e^{\left[ \frac{(x-Ut)^2}{4D_{ix}t} - \frac{(y-Vt)^2}{4D_{iy}t} \pm k_r t \right]} \quad (7.17)$$

### 7.4.3.2.2 Descarga contínua

No caso de uma descarga contínua importa distinguir duas situações: um primeiro caso em que a descarga é efectuada no instante  $t = 0$  e mantida de forma contínua e por tempo "ilimitado", e um segundo caso em que a descarga é iniciada num instante  $t = 0$  e mantida continuamente durante um intervalo de tempo finito até ao instante  $\tau$ .

No primeiro caso, isto é, com  $\tau \rightarrow \infty$ , a solução da equação (7.15) escreve-se (Chapra, 1997):

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[ e^{\frac{Ux}{2D_r}(1+\Gamma)} \operatorname{erfc} \left( \frac{x + Ut\Gamma}{\sqrt{4D_{ix}t}} \right) + e^{\frac{Ux}{2D_r}(1-\Gamma)} \operatorname{erfc} \left( \frac{x - Ut\Gamma}{\sqrt{4D_{ix}t}} \right) \right] \quad (7.18)$$

em que  $\Gamma = \sqrt{1 + 4\vartheta}$ , com  $\vartheta = k_r D_{ix} / U^2$ , sendo este último parâmetro também designado por *número de estuário*.

No caso particular de  $k_r = 0$  (substância conservativa), a equação (7.18) simplifica-se, obtendo-se a seguinte solução particular (7.19), que apenas difere da equação (7.14) em relação ao coeficiente de dispersão:

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[ e^{\frac{Ux}{D_r}} \operatorname{erfc} \left( \frac{x + Ut}{\sqrt{4D_{ix}t}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{x - Ut}{\sqrt{4D_{ix}t}} \right) \right] \quad (7.19)$$

Se a concentração da substância activa,  $C_0$ , for introduzida sobre toda a secção,  $A$ , de forma permanente e constante, admitindo as seguintes condições no limite:  $C \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$  e o estado permanente quando  $t \rightarrow \infty$ , aquela solução poderá simplificar-se ainda mais, obtendo-se (7.20) (Graf & Altinakar, 1996):

$$C(x) = C_0 e^{\left\{ \frac{Ux}{2D_r} (\sqrt{\alpha_r} - 1) \right\}} \quad (7.20)$$

em que  $\alpha_r = 4D_{ix}k_r / U^2$  é um coeficiente adimensional de reacção-dispersão.

No segundo caso, isto é, com  $\tau$  finito e  $k_r \neq 0$  obtém-se a seguinte solução (7.21) (Chapra, 1997):

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left\{ e^{\frac{Ux}{2D_{ix}}(1+r)} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x+Ut\Gamma}{\sqrt{4D_{ix}t}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{x+U(t-\tau)\Gamma}{\sqrt{4D_{ix}(t-\tau)}} \right) \right] + e^{\frac{Ux}{2D_{ix}}(1-r)} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x-Ut\Gamma}{\sqrt{4D_{ix}t}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{x-U(t-\tau)\Gamma}{\sqrt{4D_{ix}(t-\tau)}} \right) \right] \right\} \quad (7.21)$$

Através de uma análise dimensional da equação (7.15) é possível avaliar a importância dos efeitos de advecção e difusão com base no parâmetro  $\vartheta = k_r D_{ix} / U^2$ . Consoante este parâmetro, também designado por *número de estuário*, tem valores bastante inferiores ou superiores à unidade, assim predominarão os efeitos de advecção ou de difusão, respectivamente. De acordo com Chapra (1997) poderão indicar-se os seguintes intervalos:

Intervalos de variação		
$\vartheta \ll 1$	Advecção predominante	$\vartheta < 0.1$
$\vartheta \approx 1$	Efeitos igualmente importantes	$0.1 \leq \vartheta \leq 10$
$\vartheta \gg 1$	Difusão predominante	$\vartheta > 10$

Para uma revisão mais profunda destas matérias e acompanhamento com exercícios resolvidos ou propostos recomenda-se a consulta de Graf & Altinakar (1996) e ainda de Chapra (1997).

## 7.5 Formulação matemática e modelo numérico

Um modelo matemático adequado para o cálculo da concentração de um constituinte, em qualquer secção de um curso de água unidimensional, é constituído pelo seguinte sistema de três equações às derivadas parciais (7.22), ao qual se deverá juntar uma equação algébrica adequada para o cálculo de  $D_{ix}$ , podendo utilizar-se, em primeira aproximação, a equação (7.3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A+A_0)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_l \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial(h+\xi)}{\partial x} + \frac{n_k^2 g |Q| Q}{AR^{4/3}} + q_l \left( \frac{Q}{A} - u_l \right) &= 0 \quad (7.22) \\ \frac{\partial}{\partial t} (AC_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_m - D_{ix} A \frac{\partial C_m}{\partial x} \right) &= \pm A \sum_l S_l \end{aligned}$$

Para obter a solução da terceira equação do sistema (7.22), cálculo da concentração  $C_m$ , poderá recorrer-se a qualquer dos métodos numéricos já anteriormente abordados, nomeadamente os esquemas de diferenças finitas de MacCormack, Crank-Nicolson e semi-implícito de 4 pontos, ou a um esquema baseado em volumes de controlo finitos. Neste último caso, o balanço de massa em torno de um volume de controlo poderá ser globalmente representado como se mostra na Figura 7.3, com o termo de advecção discretizado usando uma técnica *upwind*, e o termo de difusão/dispersão centrado em cada ponto  $i$  da malha de cálculo. Naturalmente que os termos de fonte/sumidouro e de reacção são introduzidos/calculados em cada ponto  $i$  da malha computacional.

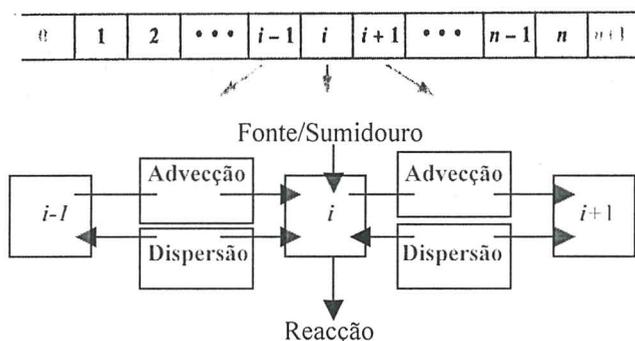


Figura 7.3 - Balanço de massa em torno de um volume de controlo, centrado no ponto  $i$  da malha de cálculo.

Esta equação de transporte [terceira equação do sistema (7.22)] tem sido objecto de inúmeros estudos tanto analíticos como numéricos, sendo abundante a literatura sobre diferentes propostas de esquemas essencialmente baseados em diferenças finitas, no método das características e em elementos finitos, bem como os correspondentes estudos de estabilidade e difusão numérica (não-física), pelo que nos abstermos de repetir aqui a vasta gama de trabalhos publicados sobre esta matéria.

Exemplifica-se em seguida, para incrementos temporais ( $\Delta t$ ) consecutivos, o uso do método explícito de MacCormack. Como se pode verificar pelos exemplos resolvidos em 7.6 *Aplicações*, este método numérico é perfeitamente adequado para efeitos de utilização prática do modelo global.

• No instante  $n\Delta t$  :

- Etapa de *previsão*, com *diferenças regressivas*

$$\begin{aligned} (\tilde{A}\tilde{C}_m)_i^{n+1} = & (AC_m)_i^n - \frac{\Delta t}{x_i - x_{i-1}} \left[ \left( QC_m - D_{ix} A \frac{\partial C_m}{\partial x} \right)_i - \right. \\ & \left. - \left( QC_m - D_{ix} A \frac{\partial C_m}{\partial x} \right)_{i-1} \right]^n \pm \Delta t \left( \frac{A_{i-1} + A_i}{2} \sum_l S_l \right)^n \end{aligned}$$

- Etapa de *correção*, com *diferenças progressivas*

$$\begin{aligned} (AC_m)_i^{n+1} = & \frac{1}{2} \left\{ (AC_m)_i^n + (\tilde{A}\tilde{C}_m)_i^{n+1} - \right. \\ & - \frac{\Delta t}{x_{i+1} - x_i} \left[ \left( \tilde{Q}\tilde{C}_m - \tilde{D}_{ix} \tilde{A} \frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial x} \right)_{i+1} - \left( \tilde{Q}\tilde{C}_m - \tilde{D}_{ix} \tilde{A} \frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial x} \right)_i \right]^{n+1} \pm \\ & \left. \pm \Delta t \left( \frac{\tilde{A}_i + \tilde{A}_{i+1}}{2} \sum_l S_l \right)^{n+1} \right\} \end{aligned}$$

• No instante  $(n+1)\Delta t$  :

- Etapa de *previsão*, com *diferenças progressivas*

$$\begin{aligned} (\tilde{A}\tilde{C}_m)_i^{n+2} = & (AC_m)_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{x_i - x_{i-1}} \left[ \left( QC_m - D_{ix} A \frac{\partial C_m}{\partial x} \right)_{i+1} - \right. \\ & \left. - \left( QC_m - D_{ix} A \frac{\partial C_m}{\partial x} \right)_i \right]^{n+1} \pm \Delta t \left( \frac{A_{i-1} + A_i}{2} \sum_l S_l \right)^{n+1} \end{aligned}$$

- Etapa de *correção*, com *diferenças regressivas*

$$\begin{aligned} (AC_m)_i^{n+2} = & \frac{1}{2} \left\{ (AC_m)_i^{n+1} + (\tilde{A}\tilde{C}_m)_i^{n+2} - \right. \\ & - \frac{\Delta t}{x_{i+1} - x_i} \left[ \left( \tilde{Q}\tilde{C}_m - \tilde{D}_{ix} \tilde{A} \frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial x} \right)_i - \left( \tilde{Q}\tilde{C}_m - \tilde{D}_{ix} \tilde{A} \frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial x} \right)_{i-1} \right]^{n+2} \pm \\ & \left. \pm \Delta t \left( \frac{\tilde{A}_i + \tilde{A}_{i+1}}{2} \sum_l S_l \right)^{n+2} \right\} \end{aligned}$$

Em ambas as sequências do método, calcula-se a derivada  $\frac{\partial C_m}{\partial x}$

$\left(\frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial x}\right)$  usando diferenças centradas no ponto  $i$ .

## 7.6 Aplicações

Desenvolveu-se o programa de cálculo automático *conc\_ana* para resolver a equação (7.15) usando a solução analítica (7.18). De igual modo, implementou-se o esquema acabado de expor para obter a solução numérica da equação de advecção-difusão-reacção, conjuntamente com as equações da hidrodinâmica do sistema (7.22) já resolvidas anteriormente (Capítulo 3) (programa *fluvial\_pol*).

Nos exemplos que se seguem são apresentados resultados de ambas as metodologias.

### Exemplo 7.1:

O escoamento num canal largo (largura  $B = 120\text{ m}$  e declive  $i = 0.002\text{ mm}^{-1}$ ) pode ser considerado unidimensional. A profundidade e a velocidade do escoamento são, respectivamente,  $h = 1.0\text{ m}$  e  $u = 0.10\text{ m s}^{-1}$ . A massa volúmica da água e a sua temperatura são  $\rho = 1000\text{ kg m}^{-3}$  e  $T = 15^\circ\text{ C}$ , respectivamente.

Em dado instante ( $t = 0^+$ ) é lançada uma solução de um poluente de forma contínua e constante na secção inicial do canal, com uma concentração  $C_0 \approx 17\text{ kg m}^{-3}$ . Mediram-se a massa volúmica e a temperatura da mistura, tendo-se obtido  $\rho_m = 1010\text{ kg m}^{-3}$  e  $T_m = 21^\circ\text{ C}$ , respectivamente. Também por medição experimental obteve-se um coeficiente de dispersão  $D_x = 0.10\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$ .

Considerando somente a difusão longitudinal segundo  $x$ , determinar as repartições da concentração da substância poluente e da temperatura após os instantes  $t = 12\text{ h}$  e  $t = 24\text{ h}$ .

Na Figura 7.4 apresentam-se comparações dos resultados obtidos para as distribuições da concentração da substância poluente (valores de  $C/C_0$ ), usando a solução analítica (7.18), considerando, a partir do instante  $t = 0^+$ : a) um coeficiente de reacção nulo (substância conservativa), e b) um coeficiente de reacção  $k_r = 0.30\text{ dia}^{-1}$ .

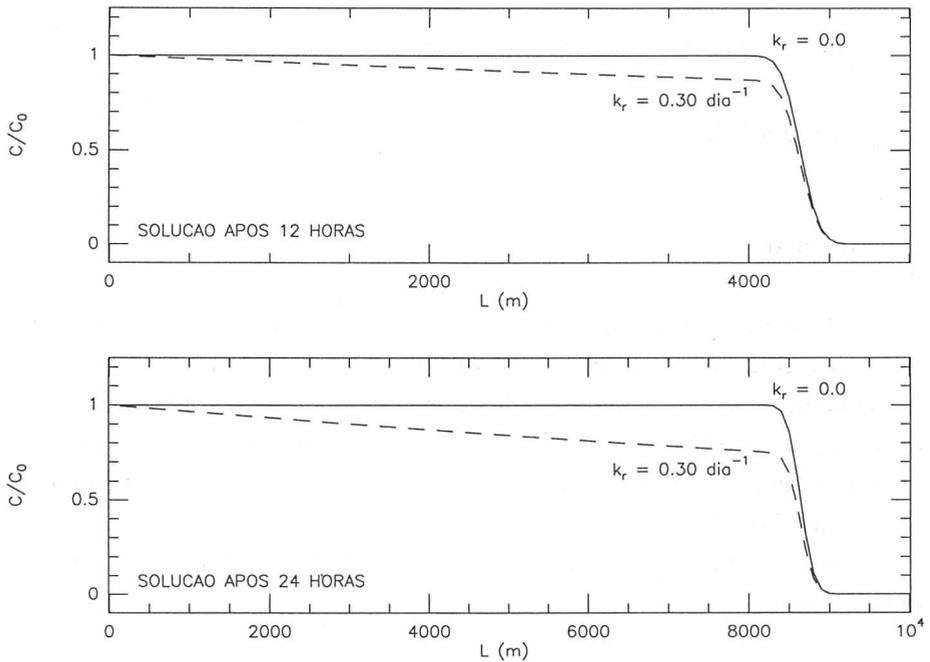


Figura 7.4 - Distribuições da concentração de uma substância poluente nos instantes  $t = 12 h$  e  $t = 24 h$ , considerando em ambos os casos  $k_r = 0.0 \text{ dia}^{-1}$  e  $k_r = 0.30 \text{ dia}^{-1}$ , respectivamente.

Deixa-se como exercício o cálculo da repartição da temperatura naqueles mesmos instantes.

As simplificações admitidas permitiram resolver este problema por via integralmente analítica. Todavia, importa referir que na prática as configurações dos cursos de água são bem mais complexas e os escoamentos naturais estarão em geral longe de se comportarem como uniformes, pelo que, na generalidade dos casos, se aconselha o recurso a um modelo numérico, em detrimento de soluções analíticas.

A implementação de um método numérico para a resolução de uma equação, ou de um sistema de equações, exige procedimentos de calibração e validação, tendo aqui as soluções analíticas um papel importante a desempenhar. Uma vez verificada a boa concordância entre ambas as abordagens, será então possível utilizar o modelo numérico para a resolução de problemas mais realistas, como sejam cursos de água com diferentes inclinações, larguras, velocidades, profundidades do escoamento, etc.

Com o exemplo 7.2, que se apresenta em seguida, pretende-se verificar o comportamento do modelo numérico, sendo comparados os resultados de uma simulação em que a dispersão longitudinal é nula com idênticos resultados em que os valores do coeficiente de dispersão longitudinal são calculados por (7.3).

### Exemplo 7.2:

Considere-se um canal horizontal com comprimento de 1000 m, rugosidade de fundo correspondente a um  $K$  de Manning igual a 100, largura  $B = 3.0$  m e altura de água  $h \approx 5.0$  m.

Na secção inicial (origem) deste canal, onde circula um caudal líquido de  $15.0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  ( $5.0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m.l.}$ ), é lançada uma substância poluente uniformemente distribuída em toda a secção transversal do canal entre os instantes  $t = 300.0$  s e  $t = 600.0$  s, em conformidade com a expressão  $W_f = W_{of} * \sin[0.010472 * (t - 300.0)]$ , com  $W_{of} = 3.0 \text{ kg s}^{-1}$  ( $1.0 \text{ kg s}^{-1} / \text{m.l.}$ ).

Determinar as distribuições da concentração do poluente nos instantes  $t = 15, 30$  e  $45$  minutos, considerando:

- a) dispersão longitudinal nula; e,
- b) dispersão longitudinal calculada com base em (7.3).

Na Figura 7.5 apresentam-se os resultados correspondentes a ambas as situações.

Como se pode observar, o efeito da dispersão traduz-se numa redução da amplitude da onda poluente introduzida e consequente alargamento da base desta onda, de modo a conservar a quantidade de massa poluente, uma vez que se trata de uma substância conservativa ( $\sum_i S_i = 0$ ).

Versões executáveis dos programas aqui utilizados (*conc\_ana* e *fluvial\_pol*) são oferecidas em CD-ROM (códigos de acesso 7802 e 7795, respectivamente), bem como o ficheiro de dados do exemplo (7.2). Apresenta-se ainda no ANEXO V o programa fonte da solução analítica (7.18).

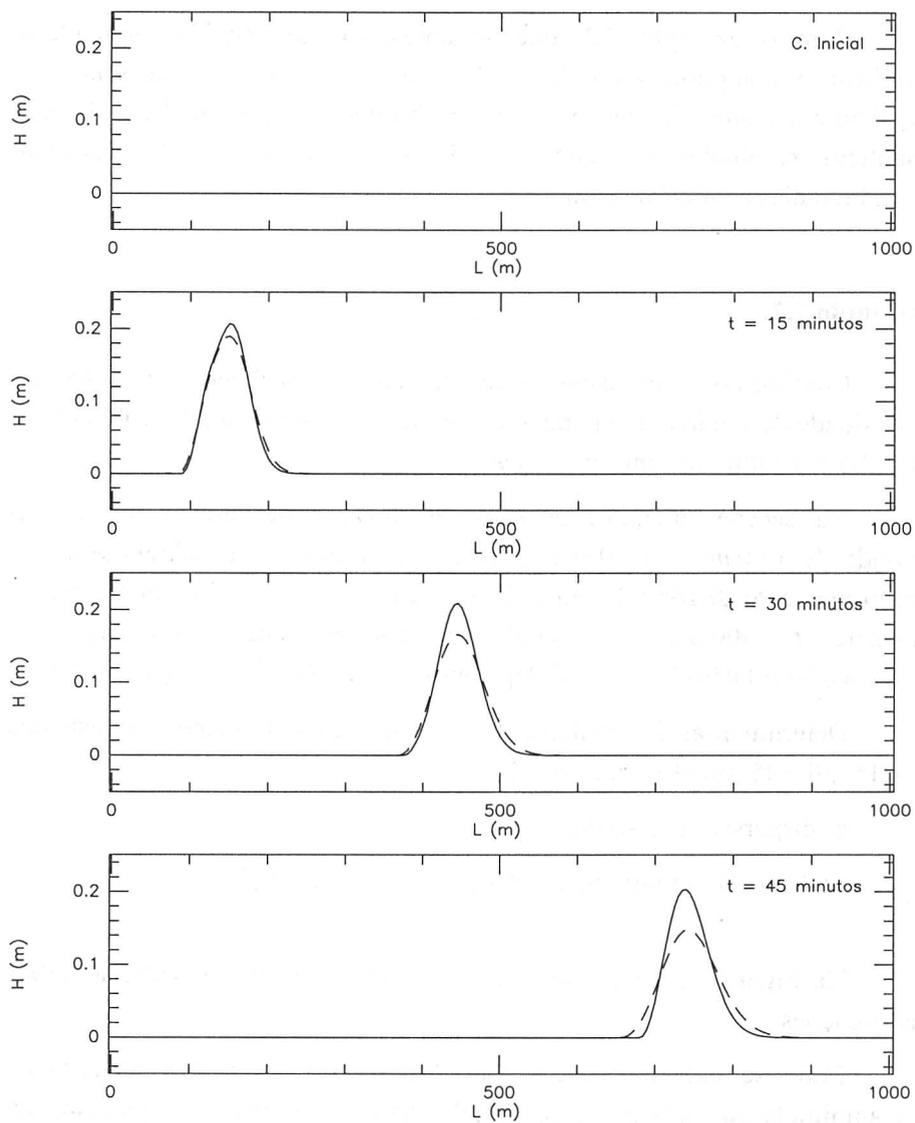


Figura 7.5 - Distribuições da concentração de um poluente nos instantes:  $t = 0$  (C. Inicial),  $t = 15$  minutos,  $t = 30$  minutos e  $t = 45$  minutos. Curva a contínuo: dispersão longitudinal nula; curva a tracejado: dispersão longitudinal calculada por (7.3).

## 8. MODELAÇÃO DA QUALIDADE DA ÁGUA EM RIOS E ALBUFEIRAS

Abordam-se aspectos essenciais sobre os principais parâmetros e processos biológicos e químicos normalmente utilizados em modelação da qualidade da água. Analisam-se os principais constituintes conservativos e não-conservativos, e descrevem-se os ciclos do carbono, do fósforo, do azoto e do oxigénio dissolvido. Abordam-se soluções analíticas para fontes pontuais isoladas e múltiplas, e fontes distribuídas (poluição difusa sem e com contribuição para o caudal). Apresenta-se a estrutura geral de um modelo de qualidade da água de um rio (modelo 1DH) e as estruturas de outros modelos específicos para diferentes domínios, tais como albufeiras e lagos profundos (modelos 1DV), estuários pouco estratificados (modelos 2DH) e estuários e regiões costeiras (modelos *quase*-3D). Termina este capítulo com a apresentação de resultados de aplicações práticas dos diferentes modelos em rios, estuários e na zona costeira.

### 8.1 Equações básicas

As bactérias em contacto com matéria orgânica utilizam esta como fonte de alimentação. Em consequência desta utilização, a matéria orgânica poderá vir a ser eventualmente oxidada, dando origem a produtos estáveis, tais como  $CO_2$  e água. A quantidade de oxigénio usado neste processo designa-se por *Carência Bioquímica de Oxigénio (CBO)*, sendo considerada uma medida do conteúdo orgânico do meio receptor. Pode também representar a quantidade de oxigénio que será necessária para estabilizar o meio receptor num meio natural, tal como uma corrente de água ou um lago. A determinação do *CBO* é hoje uma medida *standardizada*, também designada por  $CBO_5$ , e representa a quantidade de oxigénio utilizada pelos microorganismos na estabilização do meio receptor durante 5 dias a  $20^\circ C$ . Considera-se, em geral, que o comportamento do *CBO* é descrito pela reacção de 1ª ordem (8.1):

$$\frac{dy}{dt} = -k_1 y \quad (8.1)$$

em que  $y$  representa o *CBO* (ou concentração mínima de oxigénio presente na matéria orgânica) restante no instante  $t$ , e  $k_1$  ( $dia^{-1}$ ) é uma constante ou coeficiente de desoxigenação, sendo função da temperatura. À temperatura de  $20^\circ C$ , este coeficiente,  $k_1$ , toma os valores típicos apresentados na Tabela 8.1.

Para um curso de água natural, o valor de  $k_1$  poderá ser obtido aproximadamente por (8.2):

$$k_1 \cong k_i + \frac{u}{h} \zeta \quad (8.2)$$

em que  $k_i$  é o valor do coeficiente de desoxigenação determinado em laboratório;  $u$  é a velocidade média do escoamento ( $ms^{-1}$ );  $h$  é a profundidade média ( $m$ ), e  $\zeta$  é um coeficiente de actividade no fundo.

Tabela 8.1 – Valores típicos do coeficiente de desoxigenação,  $k_1$ .

Meio	Valores de $k_1$ , a 20°C
Água residual não tratada	0.35 - 0.70
Água residual tratada	0.10 - 0.25
Rio contaminado	0.10 - 0.25

Para temperaturas diferentes de 20°C, o parâmetro  $k_1$  deverá ser corrigido, em conformidade com:

$$k_{1(T)} = k_{1(20^\circ C)} \theta^{(T-20)}$$

em que  $\theta$  toma valores de 1.135 para temperaturas entre 4 e 20°C e de 1.056 para temperaturas entre 20 e 30°C.

Integrando a equação (8.1), considerando  $L$  igual ao  $CBO$  total no instante  $t = 0$ , em  $mg l^{-1}$ , ou seja, o valor máximo de oxigénio que será consumido para restaurar um meio completamente degradado, obtém-se:

$$y = L e^{-k_1 t}$$

280

O  $CBO$  em qualquer instante  $t$  é, evidentemente, a diferença entre a quantidade de oxigénio inicialmente presente ( $CBO$  total) e o restante, ou seja, a evolução da concentração de  $CBO$  satisfeita escreve-se:

$$CBO_t = L - y = L (1 - e^{-k_1 t}) \quad (8.3)$$

A equação (8.3) não pode ser linearizada. Todavia, atendendo a que em primeira aproximação podemos escrever:

$$1 - e^{-k_1 t} \cong k_1 t \left(1 + \frac{k_1 t}{6}\right)^{-3}$$

resulta então,

$$CBO_t \cong L k_1 t \left(1 + \frac{k_1 t}{6}\right)^{-3}$$

a qual pode assim ser linearizada:

$$\left(\frac{t}{CBO_t}\right)^{1/3} \cong (k_1 L)^{-1/3} + \frac{k_1^{2/3}}{6L^{1/3}} t$$

Deste modo, representando num sistema de eixos  $(t/CBO_t)^{1/3}$  vs  $t$ , obtém-se uma recta com ordenada na origem  $(k_1 L)^{-1/3}$  e declive  $k_1^{2/3}/6L^{1/3}$ , a qual permite determinar os valores da constante  $k_1$  e de  $L$  a partir de conjuntos de valores  $(t, CBO)$  medidos no meio receptor.

Considerando na equação (7.2) a concentração de *oxigénio dissolvido*, o termo do 2º membro  $A \sum k_i C_m$  incluirá a utilização de oxigénio para satisfação das *necessidades biológicas em oxigénio*, o *rearejamento a partir da atmosfera* e quaisquer *outras fontes ou sumidouros* (tais como a utilização bentónica ou a produção de algas).

Ora, a taxa de oxigenação para satisfação das necessidades biológicas em oxigénio é igual à variação do  $CBO$ , ou seja:

$$\frac{d}{dt}(AC_m) = \frac{d}{dt}(AL) = -Ak_1 L(x,t)$$

Para gases de solubilidade baixa a moderada, tal como o oxigénio, a variação da concentração devida ao rearejamento é aproximada por:

$$\frac{d}{dt}(AC_m) = Ak_2(C_s - C_m)$$

281

em que a concentração de saturação de oxigénio dissolvido ( $C_s$ ) é função da temperatura ( $T$ ) e da salinidade ( $S$ ), sendo determinada em conformidade com a equação:

$$C_s \approx 1.43 \left[ (10.291 - 0.2809T + 0.006009T^2 - 0.0000632T^3) - 0.607S(0.1161 - 0.003922T + 0.0000631T^2) \right]$$

Por conseguinte, para águas doces, com  $T$  em ( $^{\circ}C$ ), resulta para a concentração de saturação do oxigénio dissolvido a expressão  $C_s \approx 14.716 - 0.401687T + 0.008593T^2 - 0.0000904T^3$ , válida para a pressão atmosférica de 760 mm de mercúrio.  $k_2$  representa um coeficiente de transferência de massa, ou de rearejamento; pode ser aproximado por uma das seguintes expressões (8.4):

$$k_2 \cong \frac{3.9|u|^{0.5}}{h^{1.5}} \text{ (dia}^{-1}\text{)} \text{ ou } k_2 \cong \frac{5Q}{AR_h^{5/3}} \text{ (dia}^{-1}\text{)} \quad (8.4)$$

com  $u$  em  $ms^{-1}$  e  $R_h$  em  $m$ ;  $h$  é a profundidade média do escoamento. O coeficiente  $k_2$  varia com a temperatura, de acordo com:

$$k_{2(T)} = k_{2(20^{\circ}C)} (1.025)^{T-20}$$

A  $20^{\circ}C$ , o coeficiente  $k_2$  ( $k_{2(20^{\circ}C)}$ ) tomará aproximadamente os valores típicos apresentados na Tabela 8.2.

A equação (7.2) pode então escrever-se na seguinte forma (8.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(AC_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_m - D_{ix} A \frac{\partial C_m}{\partial x} \right) = \\ = -Ak_1 L(x,t) + Ak_2 (C_s - C_m) \pm AS_r(x,t) \end{aligned} \quad (8.5)$$

representando  $S_r(x,t)$  todas as restantes fontes e sumidouros de oxigénio.

Tabela 8.2 – Valores típicos do coeficiente de rearejamento,  $k_2$ .

Meio	Valores de $k_2$ , a $20^{\circ}C$
Pequenas lagoas ou albufeiras	0.10 - 0.23
Rios com águas calmas e grandes lagos	0.23 - 0.35
Rios com velocidades baixas	0.35 - 0.46
Rios com velocidades médias	0.46 - 0.69
Rios com velocidades elevadas	0.69 - 1.15
Rios muito rápidos	> 1.15

Substituindo na equação (8.5)  $(C_s - C_m)$  por  $D$ , *défice de oxigênio*, obtém-se (8.6):

$$\frac{\partial}{\partial t}(AD) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QD - D_{ix} A \frac{\partial D}{\partial x} \right) = Ak_1 L - Ak_2 D \pm AS_r(x,t) \quad (8.6)$$

De igual modo, a equação (7.2) pode ser aplicada no transporte de outros constituintes de qualidade da água. No caso do *CBO*, por exemplo, o termo  $A \sum_i k_i C_m$  incluirá o *CBO* removido por ação biológica:

$$\frac{d}{dt}(AL) = -Ak_1 L(x,t)$$

o *CBO* removido por sedimentação ou adsorção:

$$\frac{d}{dt}(AL) = -Ak_s L(x,t)$$

e a adição de *CBO* por ressuspensão de sedimentos ou por escoamento superficial:

$$\frac{d}{dt}(AL) = AL_a(x,t)$$

Por conseguinte, resulta a seguinte equação (8.7) para o cálculo do *CBO* restante:

$$\frac{\partial}{\partial t}(AL) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QL - D_{ix} A \frac{\partial L}{\partial x} \right) = -Ak_1 L(x,t) - Ak_s L(x,t) + AL_a(x,t) \quad (8.7)$$

As equações (8.6) e (8.7) permitem calcular o *défice de oxigênio* dissolvido ( $D$ ) e o *CBO* restante ( $L$ ) em qualquer ponto do curso de água, utilizando para o efeito um método numérico apropriado.

## 8.2 Parâmetros e processos biológicos e químicos

Descrevem-se em seguida os principais parâmetros normalmente utilizados em modelação numérica para traduzir o estado de qualidade da água num meio hídrico, bem como os correspondentes processos em que intervêm e as inter-dependências entre estes.

## 8.2.1 Parâmetros de qualidade da água

Para efeitos de modelação numérica do estado de qualidade da água de um rio e respectivo estuário consideram-se em geral representativas as análises das evoluções e inter-dependências dos seguintes parâmetros: constituintes conservativos (salinidade, temperatura, sedimentos em suspensão) e não-conservativos [coliformes, fitoplâncton, macrófitas, algas bentónicas (clorofila\_a), silicatos, fósforo orgânico, fosfato ( $PO_4^{3-}$ ), azoto orgânico, amónia ( $NH_4^+$ ), nitrito ( $NO_2^-$ ), nitrato ( $NO_3^-$ ), oxigénio dissolvido ( $O_2$ ) e carência bioquímica de oxigénio (CBO)].

### 8.2.1.1 Constituintes conservativos

No transporte de uma substância conservativa assume-se que o constituinte não interage com outros constituintes ou variáveis do modelo. Por conseguinte, o submodelo relativo a substâncias conservativas pode funcionar independentemente dos restantes submodelos do módulo de qualidade da água.

#### *Salinidade*

O transporte de sal é particularmente importante em estuários. A variação longitudinal da salinidade e, portanto, da densidade, afectam o regime de escoamento e o coeficiente de dispersão longitudinal. Além disso, o montante de oxigénio que pode estar dissolvido em água salgada é significativamente inferior ao de água doce. Por conseguinte, as variações de salinidade são importantes quando se pretende modelar os níveis de oxigénio dissolvido em estuários. A salinidade poderá ser modelada considerando um valor de base constante, ou de forma idêntica ao transporte de um poluente conservativo. Os valores da salinidade são usados para a determinação do coeficiente de dispersão longitudinal. Dada a importância da salinidade num estuário, é fortemente recomendada a sua inclusão na modelação da qualidade da água num sistema que inclua um estuário.

Este submodelo poderá funcionar independentemente dos restantes submodelos do módulo de qualidade da água.

#### *Temperatura*

A generalidade dos processos biológicos e químicos são dependentes da temperatura, isto é, a temperatura afecta as taxas de reacção da genera-

lidade dos processos. Muito simplificada, a temperatura poderá ser simulada como um valor de base constante, isto é,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -k_t (T - T_{base})$$

em que  $k_t$  ( $s^{-1}$ ) é um coeficiente de transferência de calor e  $T_{base}$  ( $^{\circ}C$ ) é a temperatura de equilíbrio da água.

A evolução da temperatura é particularmente importante na modelação da qualidade da água num estuário, se for significativa a diferença entre as temperaturas das águas do mar e do rio e/ou em situações em que é necessário ter em consideração as suas variações sazonais.

Nesta conformidade, a distribuição da temperatura deverá ser simulada recorrendo à equação de advecção-difusão já apresentada nos capítulos precedentes e que aqui se reproduz, com  $C_m = T$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(AT) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QT - D_{tx} A \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{B \sum I_i}{\rho c_p} \quad (8.8)$$

em que  $T$  ( $^{\circ}C$ ) é a temperatura;  $\sum I_i$  ( $W m^{-2}$ ) representa o somatório dos fluxos de calor através da superfície da água;  $\rho = 1000 kg m^{-3}$  é a massa volumica da água, e  $c_p = 4100 J kg^{-1} K^{-1}$  é o calor específico da água.

O fluxo total de calor que passa através da interface ar-água pode ser expresso por (8.9):

$$\sum I_i = I_o + I_a - I_w - I_e \pm I_c \quad (8.9)$$

em que  $I_o$  ( $W m^{-2}$ ) é o *fluxo de radiação solar*;  $I_a$  ( $W m^{-2}$ ) é o *fluxo de radiação emitida da atmosfera*;  $I_w$  ( $W m^{-2}$ ) é o *fluxo de radiação emitida da superfície da água*;  $I_e$  ( $W m^{-2}$ ) é o *fluxo de calor latente*, e  $I_c$  ( $W m^{-2}$ ) é o *fluxo de calor sensível*. Por conseguinte, a massa de água ganha calor através dos termos  $I_o$  e  $I_a$ , perde calor através dos termos  $I_w$  e  $I_e$  e pode ganhar ou perder calor através do termo  $I_c$ .

O *fluxo de radiação solar* é normalmente calculado por (8.10):

$$I_o = I_r A_i (1 - 0.65 C_i^2) (1 - R_s) \quad (8.10)$$

em que  $I_r$  ( $W m^{-2}$ ) é o fluxo de radiação solar no topo da atmosfera;  $A_i$  é um coeficiente de transmissão atmosférica;  $C_i$  representa a nebulosidade ( $0 < C_i < 1$ ), e  $R_s = 0.06$  é o albedo ou reflectividade da superfície da água para a radiação solar.

O fluxo de radiação solar no topo da atmosfera é expresso por  $I_r$  :

$$I_r = \frac{I_{sc}}{r^2} \text{sen} \alpha$$

sendo  $I_{sc} = 1367 W m^{-2}$  uma constante solar, ou fluxo de radiação solar à distância média entre o Sol e a Terra;  $\text{sen} \alpha$  representa a altitude solar (com  $0 < \alpha < \pi/2$ ), e  $r$  é um raio vector.

A altitude solar, ou elevação angular do Sol acima do horizonte, é dada por:

$$\text{sen} \alpha = \text{sen} \phi \text{sen} \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \eta$$

em que  $\phi$  ( $rad$ ) representa a latitude;  $\delta$  ( $rad$ ) representa a declinação do Sol, e  $\eta$  ( $rad$ ) representa o ângulo horário do Sol.

A declinação do Sol depende do dia do ano; é dada por:

$$\delta = \frac{23.45\pi}{180} \cos \left[ 2\pi \frac{(172 - d)}{365} \right]$$

em que  $d$  é o dia juliano.

O ângulo horário depende da hora do dia; é dado por:

$$\eta = \frac{(t_h + 12)\pi}{12} \quad \text{se } t_h < 12 h$$

$$\eta = \frac{(t_h - 12)\pi}{12} \quad \text{se } t_h \geq 12 h$$

em que  $t_h$  é o tempo solar médio local ( $0 < t_h < 24 h$ ).

O raio vector é obtido por:

$$r = 1.0 + 0.017 \cos \left[ 2\pi \frac{(186 - d)}{365} \right]$$

em que  $d$  é o dia juliano.

O coeficiente de transmissão atmosférica pode ser representado na forma:  $A_i = A_{bt} + A_{dt}$ , em que  $A_{bt} = 0.74^{(1/\text{sen}\alpha)}$  é a fracção directa do fluxo de radiação solar que atinge a superfície sob céu limpo, sendo  $\text{sen}\alpha$  a altitude solar, e  $A_{dt} = (1 - A_a - A_{bt})/2$  é a fracção difusa do fluxo de radiação solar que atinge a superfície sob céu limpo, com  $A_a = 0.09$  (coeficiente de absorção devido ao vapor de água e ao ozono).

O *fluxo de radiação emitida da atmosfera*,  $I_a$ , pode ser calculado por (8.11):

$$I_a = 0.937 \cdot 10^{-5} \sigma (273.15 + T_a)^6 (1 + 0.17 C_i^2) (1 - R_a) \quad (8.11)$$

em que  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  é a constante de Stefan-Boltzmann;  $T_a$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) é a temperatura do ar;  $C_i$  é a nebulosidade, e  $R_a = 0.03$  representa a reflectividade da superfície da água para a radiação emitida da atmosfera.

O *fluxo de radiação emitida da superfície da água* pode ser obtido directamente pela lei de Stefan-Boltzmann:

$$I_w = e_w \sigma (273.15 + T)^4 \quad (8.12)$$

em que  $e_w = 0.97$  representa a emissividade da superfície da água.

O *fluxo de calor latente* perdido por evaporação pode obter-se através do seguinte modelo empírico (8.13):

$$\begin{aligned} I_e &= (a + b w_v) (e_{sw} - e_{sa} R_h) & \text{se } (e_{sw} - e_{sa} R_h) > 0 \\ I_e &= 0 & \text{se } (e_{sw} - e_{sa} R_h) \leq 0 \end{aligned} \quad (8.13)$$

em que  $a = 0.075 \text{ W m}^{-2} \text{ Pa}^{-1}$  e  $b = 0.030 \text{ J m}^{-3} \text{ Pa}^{-1}$  são constantes da função do vento;  $w_v$  ( $\text{m s}^{-1}$ ) representa a velocidade do vento;  $e_{sw} = 612 \cdot e^{[17.5 T / (241 + T)]}$  (Pa) é a pressão de vapor de saturação à temperatura da água;  $e_{sa} = 612 \cdot e^{[17.5 T_a / (241 + T_a)]}$  (Pa) é a pressão de vapor de saturação à temperatura do ar, e  $R_h$  é a humidade relativa ( $0 < R_h < 1$ ).

O *calor sensível* é a fracção da energia interna proporcional à diferença de temperaturas; pode ser calculado por (8.14):

$$I_c = \gamma (a + b w_v) (T - T_a) \quad (8.14)$$

em que  $\gamma = 62.7 \text{ Pa K}^{-1}$  é a constante de Bowen;  $a$  e  $b$  são as constantes da função do vento;  $w_v$  ( $\text{m s}^{-1}$ ) representa a velocidade do vento;  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) é a temperatura da água, e  $T_a$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) é a temperatura do ar.

Este submodelo pode ser usado independentemente dos restantes submodelos do módulo de qualidade da água; todavia, deverá ser usado conjuntamente com os submodelos de fitoplâncton, macrófitas, algas bentónicas e oxigénio dissolvido.

### *Sedimentos em suspensão*

Os sólidos em suspensão, ou os limos e lodos, são transportados de forma idêntica à dos poluentes conservativos. Para além dos efeitos de advecção, os limos ou lodos em suspensão tendem a assentar no fundo, onde podem consolidar ou serem erodidos voltando de novo para a coluna de água, dependendo do regime de escoamento. As principais equações que descrevem o comportamento dos sedimentos na coluna de água são:

i) a quantidade de sedimentos depositada no fundo é representada por uma equação do tipo  $\partial m/\partial t = w_s C$ , em que  $m$  representa a massa de sedimentos por unidade de área;  $w_s$  ( $m s^{-1}$ ) é a velocidade de sedimentação, e  $C$  ( $kg m^{-3}$ ) representa a concentração de sedimentos; e,

ii) a quantidade de sedimentos erodida do fundo é dada por  $\partial m/\partial t = k_e (\tau_f - \tau_c)$ , para  $\tau_f > \tau_c$ , em que  $k_e$  ( $kg N^{-1} s^{-1}$ ) é o coeficiente de erosão e  $\tau_c$  ( $N m^{-2}$ ) é a tensão crítica de erosão no fundo.  $\tau_f = \rho g |u| u / (K^2 R_h^{1/3})$  representa a tensão efectiva no fundo, sendo  $\rho = 1000 kg m^{-3}$ ;  $K$  é o coeficiente da fórmula de Manning-Strickler;  $u$  é a velocidade média do escoamento, e  $R_h$  é o raio hidráulico da secção transversal.

Este submodelo poderá funcionar independentemente dos restantes submodelos do módulo de qualidade da água; todavia, se for considerada relevante a interacção do balanço de oxigénio com sedimentos ou fitoplâncton, este submodelo deverá ser considerado conjuntamente.

## 8.2.1.2 Constituintes não-conservativos

288

### *Coliformes*

O transporte de coliformes rege-se pela equação geral de advecção-difusão-reacção (7.2), sendo o decaimento simulado por uma equação de 1ª ordem do tipo (8.1), que neste caso toma a forma:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = -k_d C_m$$

em que  $k_d$  ( $s^{-1}$ ) é o coeficiente de decaimento e  $C_m$  ( $kg m^{-3}$ ) representa a concentração de coliformes.

Este submodelo poderá funcionar independentemente dos restantes submodelos do módulo de qualidade da água.

### ***Fitoplâncton***

A produção primária (crescimento) é o processo pelo qual a matéria orgânica é sintetizada por compostos inorgânicos. Este mecanismo é executado por plantas e algas que recebem nutrientes da coluna de água na forma de nitratos e fosfatos e, usando a energia solar, crescem por meio da fotossíntese. Neste processo é também produzido oxigénio. Os nutrientes são rejeitados na coluna de água pelos processos de respiração e de assentamento de resíduos. Os resíduos são simulados como matéria que pode assentar no fundo e ser deste erodida. Estes processos são simulados num submodelo de fitoplâncton, constituindo as algas a espécie mais representativa.

O crescimento algal, ou produção diária, é função da temperatura e limitado por uma expressão do tipo:

$$P_{max} = e^{2.303 k_m T + k_c}$$

em que  $T$  é a temperatura;  $k_m$  e  $k_c$  são constantes que dependem da espécie a ser modelada, as quais representam crescimento acima e abaixo de uma temperatura crítica.

Este submodelo terá de funcionar em conjunto com os submodelos de temperatura, sedimentos em suspensão, oxigénio dissolvido e de interacção oxigénio-sedimento. Terá de conter necessariamente informação sobre a radiação solar, e deverá permitir simular os seguintes constituintes de qualidade da água: macrófitas, algas bentónicas (clorofila\_a), silicatos, fósforo orgânico e fosfato.

### ***Radiação solar***

A produção primária de fitoplâncton, macrófitas e algas bentónicas depende da presença de luz solar. A quantidade de luz solar é representada pela radiação solar. A radiação solar é usada para calcular o factor de limitação de luz para a produção primária de fitoplâncton, macrófitas e algas bentónicas.

### *Macrófitas*

As macrófitas são plantas volumosas que criam raízes no fundo dos meios hídricos. Estas recebem nutrientes dos poros da água através das raízes. Tal como o fitoplâncton, também o seu crescimento está limitado pela luz solar e concentrações de nutrientes.

### *Algas bentónicas (clorofila\_a)*

Algumas algas vivem no fundo do rio. A sua produção primária é simulada no submodelo de algas bentónicas. Todos os processos simulados pelo submodelo de fitoplâncton são aplicados na simulação de algas bentónicas, excepto a assumção de que as algas vivem no material de fundo. Consequentemente, estas podem ser colocadas em suspensão quando o fundo é erodido e em seguida advectadas antes de voltarem para o fundo em qualquer outra parte do rio.

### *Silicatos*

Todos os submodelos de fitoplâncton, macrófitas e algas bentónicas assumem que os nitratos e fosfatos são os mais importantes nutrientes para a produção primária e são aqueles que terão em geral limitação de crescimento. Os silicatos são importantes no crescimento das diatomáceas e as paredes das suas células estão impregnadas com silício. Ora, tendo em mente que os silicatos actuarão como limitadores da produtividade primária, então estes deverão ser incluídos na simulação via submodelo de silicatos.

### *Fósforo orgânico e fosfato ( $PO_4^{3-}$ )*

O fósforo pode ser adsorvido na superfície das partículas sedimentares. O fitoplâncton, as macrófitas e as algas bentónicas não têm facilmente acesso a esta forma de fósforo. O fósforo dissolvido na forma de ortofosfato é mais facilmente acessível para as algas e as plantas.

290

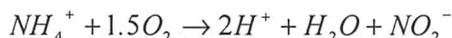
Um programa computacional deverá poder simular a adsorção de fosfato nas partículas sedimentares e a sua desadsorção para o estado dissolvido. Este processo pode jogar um papel importante na limitação do fornecimento de fosfato às plantas e algas.

Os constituintes fósforo orgânico e fosfato e os correspondentes processos de mineralização de fósforo orgânico, de assimilação do fosfato, e de respiração e mortalidade do fitoplâncton são simulados conjuntamente no designado ciclo do fósforo.

Estes submodelos terão assim que funcionar em conjunto com o sub-modelo de fitoplâncton.

### ***Azoto orgânico, amónia ( $NH_4^+$ ), nitrito ( $NO_2^-$ ) e nitrato ( $NO_3^-$ )***

Com o tempo, os compostos orgânicos de nitrogénio são hidrolisados criando amónia adicional. As bactérias autotróficas assimilam a amónia em excesso e criam nitritos e nitratos. A conversão dos iões amónio ( $NH_4^+$ ) em nitratos ( $NO_3^-$ ) é traduzida por uma série de reacções, sendo este processo vulgarmente designado por nitrificação. Numa primeira fase, os iões amónio são convertidos em nitrito ( $NO_2^-$ ), segundo a reacção:

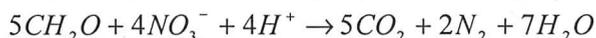


para, numa segunda fase, as nitrobactérias converterem o nitrito em nitrato, de acordo com a seguinte reacção:



Sequencialmente pode ocorrer a conversão de nitrato em gás azoto ( $N_2$ ), o qual tem influência sobre a matéria orgânica, expressa em termos de *CBO*. Este processo é habitualmente designado por desnitrificação. A desnitrificação bentónica é um processo particularmente relevante no ciclo do azoto em estuários.

A reacção de desnitrificação pode ser representada por:



verificando-se que envolve uma proporção de carbono orgânico ( $CH_2O$ ) na proporção de cinco moles para quatro moles de *N*, na forma de nitrato ( $NO_3^-$ ).

Estes constituintes e os correspondentes processos de mineralização de azoto orgânico, assimilação de amónia e de nitrato, nitrificação, desnitrificação, e respiração e mortalidade do fitoplâncton são simulados no designado ciclo do azoto.

### ***Oxigénio dissolvido ( $O_2$ ) e Carência Bioquímica de Oxigénio (CBO)***

O balanço de oxigénio é governado pelo transporte, dispersão e interacção de matérias orgânicas dissolvidas e nitrogénio oxidável. Um sub-

modelo de oxigénio dissolvido deverá incluir no mínimo os seguintes constituintes: *CBO*, azoto ou nitrogénio orgânico, nitrogénio amoniacal, nitritos, nitratos e oxigénio dissolvido. O oxigénio dissolvido entra no modelo através de rearejamento na superfície livre e por entradas nas fronteiras, sendo consumido por decaimento de *CBO* e por nitrificação do azoto amoniacal, formando nitritos e nitratos. Forma-se o azoto ou nitrogénio amoniacal por decaimento do nitrogénio orgânico. Para baixos níveis de oxigénio dissolvido ocorre desnitrificação, com o *CBO* a consumir o oxigénio resultante do nitrogénio oxidado. Se não houver nitritos ou nitratos disponíveis para a desnitrificação então as exigências de oxigénio serão satisfeitas por redução de sulfatos.

As taxas de redução simuladas neste submodelo são dependentes da temperatura. Por conseguinte, este módulo deverá funcionar conjuntamente com o submodelo de temperatura. Para ter em conta o efeito da salinidade nas concentrações médias do oxigénio dissolvido, em estuários e em todas as aplicações que envolvam água salgada, é igualmente necessário “correr” este submodelo em conjunto com o submodelo de salinidade.

### ***Oxigénio-sedimento***

Os processos de balanços de oxigénio podem interagir com os processos sedimentares. Para além das variáveis simuladas no submodelo de oxigénio dissolvido, deverão ainda ser simuladas variações rápidas e lentas de *CBO*. Estas simulações de *CBO* carecem de exigências adicionais de oxigénio na coluna de água e podem assentar no fundo do rio ou serem deste removidas. As variáveis dissolvidas, como nitratos, podem ser agarradas e mantidas nos poros da água. Os processos de balanços de oxigénio descritos no submodelo de oxigénio dissolvido são também simulados na camada do fundo pelo submodelo de interacção oxigénio-sedimento.

Este submodelo terá de funcionar necessariamente em conjunto com o submodelo de oxigénio dissolvido.

### **8.2.2 Ciclo do carbono - fitoplâncton**

O principal constituinte do ciclo do carbono é o fitoplâncton. Os processos que lhe dizem respeito são (Figura 8.1): *crescimento do fitoplâncton*, *respiração e mortalidade do fitoplâncton*, e *deposição do fitoplâncton*.

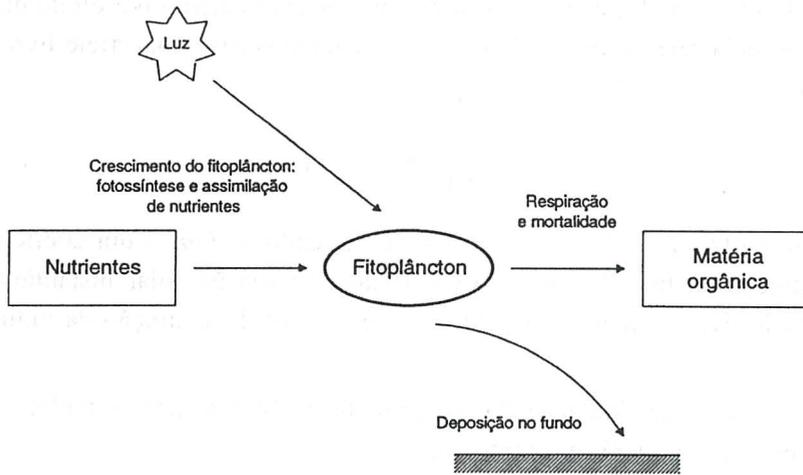


Figura 8.1 - Processos a considerar num submodelo de fitoplâncton de um modelo de qualidade da água (Portela, 1998).

A equação geral de transporte, já apresentada nos capítulos precedentes, e que aqui se reproduz para a simulação do fitoplâncton, incluirá no 2º membro o termo de fonte-sumidouro deste constituinte; esta equação escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(AC_{fp}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(QC_{fp} - D_{ix}A\frac{\partial C_{fp}}{\partial x}\right) = AS_{fp} \quad (8.15)$$

representando  $C_{fp}$  ( $kg\ m^{-3}$ ) a concentração de fitoplâncton na coluna de água e  $S_{fp}$  ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ ) a taxa de variação local da concentração de fitoplâncton na coluna de água, podendo esta ser obtida por (Portela, 1998):

$$S_{fp} = \frac{1}{864 \cdot 10^5} (S_{fp}^{prod} - S_{fp}^{resp} - S_{fp}^{depos})$$

em que  $S_{fp}^{prod} = P_{fp} C_{fp}$  é devido ao *crescimento do fitoplâncton*, com  $P_{fp} = \mu_{20} \theta_{fpc}^{(T-20)} F_l F_n$ , sendo  $\mu_{20}$  a taxa de crescimento máximo do fitoplâncton para a temperatura de referência ( $20^{\circ}C$ ) ( $dia^{-1}$ );  $\theta_{fpc}^{(T-20)}$  é a taxa de crescimento máximo do fitoplâncton, para condições óptimas de luz e de nutrientes, representando  $\theta_{fpc}$  um coeficiente de temperatura referente ao crescimento do fitoplâncton;  $F_l$  é um factor de limitação do crescimento por efeito da luz, e  $F_n$  representa um factor de limitação do crescimento por efeito dos nutrientes.

O factor de limitação do crescimento de fitoplâncton por efeito da luz é obtido pela relação de Steele (1962), integrada entre a superfície livre e o fundo:

$$F_l = \frac{e}{kh} (e^{a_1} - e^{a_2})$$

com  $a_1 = -(I_o/I_{sat})e^{(-kh)}$  e  $a_2 = -I_o/I_{sat}$ , sendo  $k$  ( $m^{-1}$ ) um coeficiente de extinção da luz;  $I_o$  ( $W m^{-2}$ ) é o fluxo de radiação solar instantâneo à superfície livre da água, e  $I_{sat}$  ( $W m^{-2}$ ) é o fluxo de saturação da radiação solar.

O factor de limitação do crescimento de fitoplâncton por efeito dos nutrientes,  $F_n$ , poderá ser obtido por:

$$F_n = F_{nf} \quad \text{se } F_{nf} \leq F_{nm}$$

$$F_n = F_{nm} \quad \text{se } F_{nf} > F_{nm}$$

em que  $F_{nf} = C_{fs} / (K_{nf} + C_{fs})$  é um factor de limitação do crescimento relativo ao nutriente fósforo, e  $F_{nm} = (C_{nh} + C_{na}) / (K_m + C_{nh} + C_{na})$  representa um factor de limitação do crescimento de fitoplâncton por insuficiência do nutriente azoto. Nestas expressões,  $C_{fs}$  ( $mg l^{-1}$ ) é a concentração de fosfato,  $K_{nf}$  ( $mg l^{-1}$ ) é uma constante de semi-saturação para o fósforo,  $C_{nh}$  ( $mg l^{-1}$ ) é a concentração de amónia,  $C_{na}$  ( $mg l^{-1}$ ) é a concentração de nitrato e  $K_m$  ( $mg l^{-1}$ ) é uma constante de semi-saturação para o azoto.

O termo relativo à *respiração e mortalidade do fitoplâncton* pode ser calculado por:

$$S_{fp}^{resp} = R_{fp} C_{fp}$$

em que  $R_{fp} = \chi_{20} \theta_{fpr}^{(T-20)} + K_m$  ( $dia^{-1}$ ) é a taxa de respiração e mortalidade do fitoplâncton, sendo  $\chi_{20}$  ( $dia^{-1}$ ) a taxa de respiração do fitoplâncton para a temperatura de referência ( $20^\circ C$ ) e  $\theta_{fpr}$  um coeficiente de temperatura referente à respiração do fitoplâncton, e  $K_m$  ( $dia^{-1}$ ) é a taxa de mortalidade do fitoplâncton.

O termo devido à *deposição do fitoplâncton* é obtido por:

$$S_{fp}^{depos} = D_{fp} C_{fp}$$

em que  $D_{fp} = W_{fpd} / h$  ( $dia^{-1}$ ) é a taxa de deposição do fitoplâncton, sendo  $W_{fpd}$  ( $m dia^{-1}$ ) a velocidade de deposição do fitoplâncton e  $h$  ( $m$ ) é a altura da coluna de água.

Nas Tabelas 8.3 a 8.5 são apresentados valores típicos para as constantes e coeficientes referidos nos processos incluídos neste ciclo e nos seguintes.

### 8.2.3 Ciclo do fósforo

O fósforo é considerado o principal elemento limitante do crescimento de fitoplâncton em ecossistemas de água doce. Os principais constituintes do ciclo do fósforo são o fósforo orgânico e o fosfato ( $PO_4^{3-}$ ). Mostram-se na Figura 8.2 os constituintes e processos a considerar no ciclo do fósforo: *mineralização do fósforo orgânico, assimilação de fosfatos, e respiração e mortalidade do fitoplâncton.*

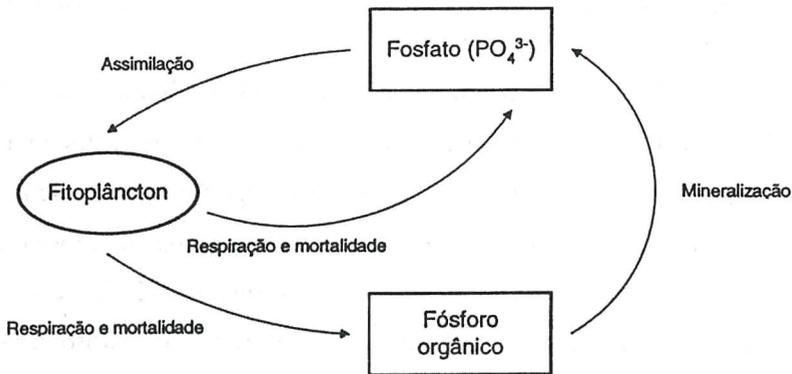


Figura 8.2 - Constituintes e processos a considerar no ciclo do fósforo (Portela, 1998).

Seja de novo a equação geral de transporte, que aqui se reproduz [equações (8.16)] para a simulação dos constituintes do ciclo do fósforo: fósforo orgânico ( $fo$ ) e fosfato ( $fs$ ).

$$\frac{\partial}{\partial t} (AC_{fo}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_{fo} - D_{tx} A \frac{\partial C_{fo}}{\partial x} \right) = AS_{fo} \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (AC_{fs}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_{fs} - D_{tx} A \frac{\partial C_{fs}}{\partial x} \right) = AS_{fs}$$

Nestas equações,  $C_{fo}$  ( $kg\ m^{-3}$ ) é a concentração de fósforo orgânico na coluna de água;  $C_{fs}$  ( $kg\ m^{-3}$ ) é a concentração de fosfato na coluna de água, e os termos  $S_{fo}$  e  $S_{fs}$  ( $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$ ) representam as taxas de variação local das concentrações de fósforo orgânico e de fosfato na coluna de água, respectivamente. São dados por (Portela, 1998):

$$S_{fo} = \frac{1}{864 * 10^5} (S_{fo}^{resp} - S_{fo}^{miner}) \quad e$$

$$S_{fs} = \frac{1}{864 * 10^5} (S_{fs}^{resp} + S_{fs}^{miner} - S_{fs}^{assim})$$

em que:

- $S_{fo}^{resp} = R_{fp} C_{fp} \alpha_{fc} F_{fo}$  é um termo devido à respiração e mortalidade do fitoplâncton, com  $R_{fp}$  e  $C_{fp}$  já definidos anteriormente,  $\alpha_{fc}$  ( $mg\ P\ mg\ C^{-1}$ ) é a razão entre fósforo e carbono no fitoplâncton e  $F_{fo}$  é a fracção de fósforo devido à respiração e mortalidade do fitoplâncton sob a forma de fósforo orgânico;
- $S_{fo}^{miner} = M_{fo} C_{fo}$  é um termo devido à mineralização do fósforo orgânico, sendo  $C_{fo}$  ( $mg\ l^{-1}$ ) a concentração de fósforo orgânico na coluna de água e  $M_{fo} = M_{fo,20} \theta_{fom}^{(T-20)} [C_{fp} / (K_{fp} + C_{fp})]$  ( $dia^{-1}$ ) a taxa de mineralização do fósforo orgânico, sendo  $M_{fo,20}$  ( $dia^{-1}$ ) a taxa de mineralização do fósforo orgânico para a temperatura de referência ( $20^{\circ}C$ ) e  $\theta_{fom}$  um coeficiente de temperatura referente à mineralização do fósforo orgânico;
- $S_{fs}^{resp} = R_{fp} C_{fp} \alpha_{fc} (1 - F_{fo})$  representa a respiração e mortalidade do fitoplâncton;
- $S_{fs}^{miner} = M_{fo} C_{fo}$  é devido à mineralização do fósforo orgânico; e,
- $S_{fs}^{assim} = P_{fp} C_{fp} \alpha_{fc}$  é devido ao crescimento do fitoplâncton.

#### 8.2.4 Ciclo do azoto

O azoto é considerado o principal constituinte limitante do crescimento de fitoplâncton em ecossistemas estuarinos e costeiros. Devido às interações com os processos que têm lugar nos sedimentos do fundo e à sua influência na produção primária, o ciclo do azoto é particularmente complexo. Os três constituintes essenciais que fazem parte deste ciclo são: o azoto orgânico (*no*), a amónia (*nh*) e o nitrato (*na*).

Apresentam-se na Figura 8.3 os processos que se encontram mais directamente relacionados com o ciclo do azoto; são os seguintes: *mineralização de azoto orgânico, assimilação de amónia e de nitrato, nitrificação e desnitrificação*.

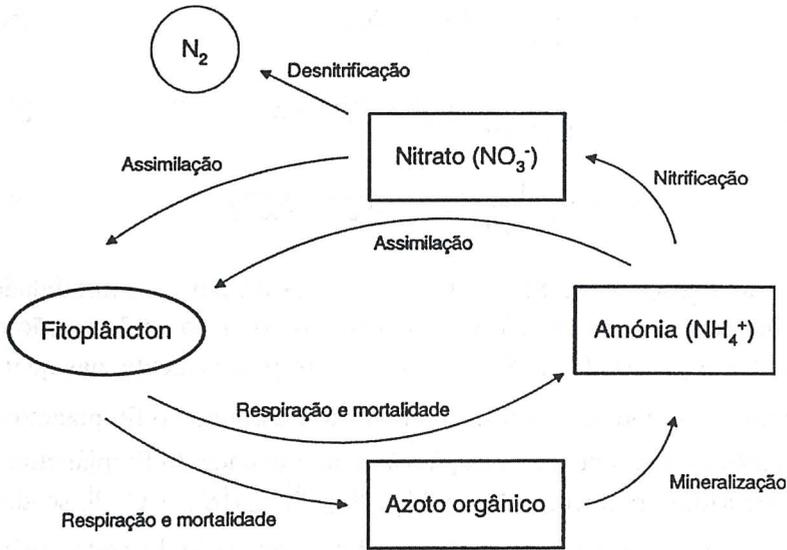


Figura 8.3 - Constituintes e processos essenciais do ciclo do azoto (Portela, 1998).

Seja uma vez mais a equação geral de transporte (7.2), que aqui se reproduz para a simulação dos constituintes do ciclo do azoto [equações (8.17)]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(AC_{no}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_{no} - D_{ix} A \frac{\partial C_{no}}{\partial x} \right) &= AS_{no} \\ \frac{\partial}{\partial t}(AC_{nh}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_{nh} - D_{ix} A \frac{\partial C_{nh}}{\partial x} \right) &= AS_{nh} \\ \frac{\partial}{\partial t}(AC_{na}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_{na} - D_{ix} A \frac{\partial C_{na}}{\partial x} \right) &= AS_{na} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Nas equações (8.17),  $C_{no}$  ( $kg\ m^{-3}$ ) é a concentração de azoto orgânico na coluna de água,  $C_{nh}$  ( $kg\ m^{-3}$ ) é a concentração de amónia na coluna

de água,  $C_{na}$  ( $kg\ m^{-3}$ ) é a concentração de nitrato na coluna de água e  $S_{no}$ ,  $S_{nh}$  e  $S_{na}$  são as taxas de variação local das concentrações de azoto orgânico, de amónia e de nitrato na coluna de água, respectivamente; têm as seguintes expressões (Portela, 1998):

$$S_{no} = \frac{1}{864 \cdot 10^5} (S_{no}^{resp} - S_{no}^{miner}) \quad (8.18)$$

$$S_{nh} = \frac{1}{864 \cdot 10^5} (S_{nh}^{resp} + S_{nh}^{miner} - S_{nh}^{assim} - S_{nh}^{nitr}) \quad (8.19)$$

$$S_{na} = \frac{1}{864 \cdot 10^5} (S_{na}^{nitr} - S_{na}^{assim} - S_{na}^{desn}) \quad (8.20)$$

Na equação (8.18), o termo de respiração e mortalidade do fitoplâncton e o termo devido à mineralização do azoto orgânico são dados por  $S_{no}^{resp} = R_{fp} C_{fp} \alpha_{nc} F_{no}$  e  $S_{no}^{miner} = M_{no} C_{no}$ , respectivamente, nas quais  $\alpha_{nc}$  ( $mg\ N\ mg\ C^{-1}$ ) representa a razão entre azoto e carbono no fitoplâncton;  $F_{no}$  é a fracção de azoto devido à respiração e mortalidade do fitoplâncton sob a forma de azoto orgânico, e  $M_{no} = M_{no20} \theta_{nom}^{(T-20)} [C_{fp} / (K_{fp} + C_{fp})]$ , sendo  $\theta_{nom}$  um coeficiente de temperatura referente à mineralização do azoto orgânico e  $M_{no20}$  ( $dia^{-1}$ ) a taxa de mineralização do azoto orgânico para a temperatura de referência ( $20^\circ C$ ).

Na equação (8.19), os termos devidos à respiração e mortalidade do fitoplâncton,  $S_{nh}^{resp}$ , à mineralização do azoto orgânico,  $S_{nh}^{miner}$ , ao crescimento do fitoplâncton,  $S_{nh}^{assim}$ , e à nitrificação,  $S_{nh}^{nitr}$ , têm as seguintes expressões:

$$S_{nh}^{resp} = R_{fp} C_{fp} \alpha_{nc} (1 - F_{no}) \quad (8.21)$$

$$S_{nh}^{miner} = M_{no} C_{no} \quad (8.22)$$

$$S_{nh}^{assim} = P_{fp} C_{fp} \alpha_{nc} F_{nh} \quad (8.23)$$

$$S_{nh}^{nitr} = N_{nh} C_{nh} \quad (8.24)$$

Na expressão (8.23),  $F_{nh}$  representa um factor de preferência do fitoplâncton pela assimilação de azoto sob a forma de amónia; é dado por:

$$F_{nh} = \left[ \frac{C_{nh} C_{na}}{(K_m + C_{nh})(K_m + C_{na})} + \frac{C_{nh} K_m}{(C_{nh} + C_{na})(K_m + C_{na})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Na expressão (8.24),  $C_{nh}$  ( $mg\ l^{-1}$ ) é a concentração de amónia na coluna de água e  $N_{nh}$  ( $dia^{-1}$ ) representa a taxa de nitrificação, sendo dada por:

$$N_{nh} = N_{nh20} \theta_{nhn}^{(T-20)} \left( \frac{C_{od}}{K_{nh} + C_{od}} \right)$$

em que  $C_{od}$  ( $mg\ l^{-1}$ ) é a concentração de oxigénio dissolvido na coluna de água,  $K_{nh}$  ( $mg\ l^{-1}$ ) é a constante de semi-saturação para a limitação da nitrificação pelo oxigénio e  $\theta_{nhn}$  é um coeficiente de temperatura referente à nitrificação da amónia.

Na equação (8.20), os termos devidos à nitrificação,  $S_{na}^{nitr}$ , ao crescimento do fitoplâncton,  $S_{na}^{assim}$ , e à desnitrificação,  $S_{na}^{desn}$ , têm as seguintes expressões:

$$S_{na}^{nitr} = N_{nh} C_{nh} \quad (8.25)$$

$$S_{na}^{assim} = P_{fp} C_{fp} \alpha_{nc} (1 - F_{nh}) \quad (8.26)$$

$$S_{na}^{desn} = N_{na} C_{na} \quad (8.27)$$

em que  $C_{na}$  ( $mg\ l^{-1}$ ) é a concentração de nitrato na coluna de água e  $N_{na}$  ( $dia^{-1}$ ) representa a taxa de desnitrificação, sendo dada por:

$$N_{na} = N_{na20} \theta_{nan}^{(T-20)} \left( \frac{K_{na}}{K_{na} + C_{od}} \right)$$

em que  $K_{na}$  é uma constante de desnitrificação e  $\theta_{nan}$  é um coeficiente de temperatura referente à desnitrificação do nitrato.

### 8.2.5 Ciclo do oxigénio dissolvido

Os processos que se encontram mais directamente relacionados com o oxigénio dissolvido são os seguintes: *i) trocas de oxigénio entre a coluna de água e a atmosfera ( $OD_{rear}$ ); ii) produção de oxigénio resultante do crescimento de fitoplâncton ( $OD_{prod}$ ); iii) consumo de oxigénio resultante da respiração do fitoplâncton ( $OD_{resp}$ ); iv) oxidação do carbono da matéria orgânica incluída no CBO ( $OD_{oxid}$ ); v) consumo de oxigénio devido à nitrificação ( $OD_{nitr}$ ), e vi) consumo de oxigénio por necessidades bentónicas ( $OD_{bent}$ ).*

Naturalmente que o balanço de oxigénio dissolvido num meio natural incluirá necessariamente a quantidade de oxigénio dissolvido que é introdu-

zida através de massas de água afluentes ( $OD_{afiu}$ ). Por conseguinte, o balanço do oxigénio dissolvido num meio natural (como um troço de rio, por exemplo) é globalmente traduzido pela seguinte igualdade:

$$OD_{entra} + OD_{afiu} + OD_{rear} + OD_{prod} - OD_{resp} - OD_{oxid} - OD_{nitr} - OD_{bent} - OD_{sai} = 0 \quad (8.28)$$

Mostram-se na Figura 8.4 os processos descritos para o ciclo do oxigénio dissolvido.

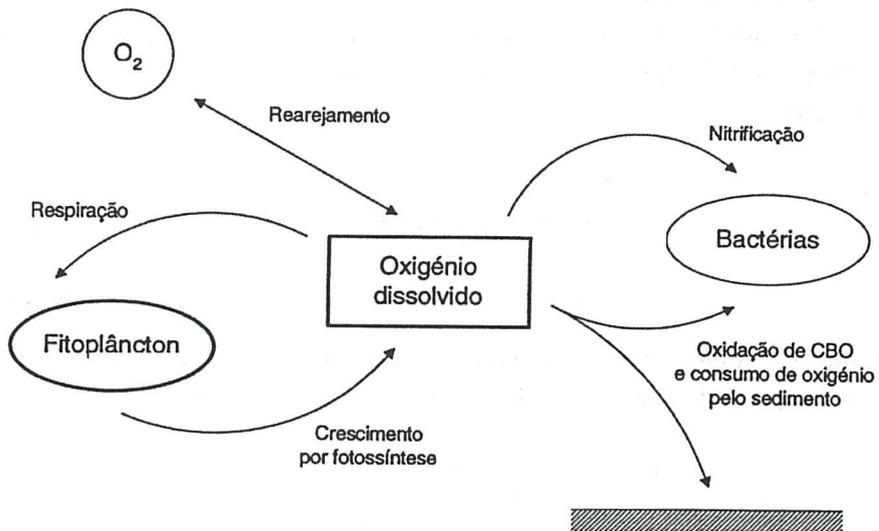


Figura 8.4 - Processos a considerar no ciclo do oxigénio dissolvido (Portela, 1998).

O ciclo do oxigénio dissolvido é descrito pelos dois parâmetros clássicos: a Carência Bioquímica de Oxigénio ( $CBO$ ) e o Oxigénio Dissolvido ( $OD$ ), considerando os processos mais directamente relacionados com o Oxigénio Dissolvido, acima descritos. As equações gerais de advecção-difusão-reacção para a simulação das concentrações dos constituintes  $CBO$  e  $OD$  escrevem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(AC_{cbo}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_{cbo} - D_{ix} A \frac{\partial C_{cbo}}{\partial x} \right) = AS_{cbo} \quad (8.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(AC_{od}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QC_{od} - D_{ix} A \frac{\partial C_{od}}{\partial x} \right) = AS_{od}$$

Nas equações (8.29),  $C_{cho}$  ( $kg\ m^{-3}$ ) é a concentração de *CBO* na coluna de água,  $C_{od}$  ( $kg\ m^{-3}$ ) é a concentração de oxigênio dissolvido na coluna de água, e  $S_{cho}$  e  $S_{od}$  são as taxas de variação local das concentrações de *CBO* e de *OD* na coluna de água; têm as seguintes expressões (8.30) e (8.31) (Portela, 1998):

$$S_{cho} = \frac{1}{864 \cdot 10^5} (S_{cho}^{mort} - S_{cho}^{oxid} - S_{cho}^{desn}) \quad (8.30)$$

$$S_{od} = \frac{1}{864 \cdot 10^5} (S_{od}^{rear} + S_{od}^{prod} - S_{od}^{resp} - S_{od}^{oxid} - S_{od}^{nitr}) \quad (8.31)$$

Na equação (8.30), os termos devidos à mortalidade do fitoplâncton,  $S_{cho}^{mort}$ , à oxidação de *CBO*,  $S_{cho}^{oxid}$ , e à desnitrificação,  $S_{cho}^{desn}$ , escrevem-se:

$$S_{cho}^{mort} = K_m C_{fp} \alpha_{oc}$$

$$S_{cho}^{oxid} = O_{cho} C_{cho}$$

$$S_{cho}^{desn} = 1.25 N_{na} C_{na} \alpha_{on}$$

Nestas equações,  $K_m$  ( $dia^{-1}$ ) representa a taxa de mortalidade do fitoplâncton;  $\alpha_{oc}$  ( $mg\ O_2\ mg\ C^{-1}$ ) é a razão entre oxigênio e carbono;  $O_{cho} = O_{cho20} \theta_{cho}^{(T-20)} [C_{od} / (K_{cho} + C_{od})]$  ( $dia^{-1}$ ) é a taxa de oxidação de *CBO*, sendo  $O_{cho20}$  ( $dia^{-1}$ ) a taxa de oxidação de *CBO* para a temperatura de referência ( $20^\circ C$ ) e  $\theta_{cho}$  um coeficiente de temperatura referente à oxidação de *CBO*;  $N_{na}$  ( $dia^{-1}$ ) é a taxa de desnitrificação;  $C_{na}$  ( $mg\ l^{-1}$ ) é a concentração de nitrato na coluna de água, e  $\alpha_{on}$  ( $mg\ O_2\ mg\ N^{-1}$ ) é a razão entre oxigênio e azoto.

Na equação (8.31), os termos devidos ao reajeamento,  $S_{od}^{rear}$ , ao crescimento de fitoplâncton,  $S_{od}^{prod}$ , à respiração do fitoplâncton,  $S_{od}^{resp}$ , à oxidação de *CBO*,  $S_{od}^{oxid}$ , e à nitrificação,  $S_{od}^{nitr}$ , escrevem-se:

$$S_{od}^{rear} = A_{od} (C_{od_w} - C_{od})$$

$$S_{od}^{prod} = P_{fp} C_{fp} [\alpha_{oc} + 3.43 \alpha_{nc} (1 - F_{nh})]$$

$$S_{od}^{resp} = \rho C_{fp} \alpha_{oc}$$

$$S_{od}^{oxid} = O_{cho} C_{cho}$$

$$S_{od}^{nitr} = 4.57 N_{nh} C_{nh}$$

Nestas equações  $A_{odt} = (A_{odh20} - A_{oda20}) \theta_{odr}^{(T-20)}$  ( $dia^{-1}$ ) representa a taxa de rearejamento efectiva, em que  $A_{odh20} = 3.9 |u|/h^{1.5}$  ( $dia^{-1}$ ) é a taxa de rearejamento por acção do escoamento, com velocidade  $u$ , para a temperatura de  $20^{\circ}C$ ;  $A_{oda20} = (0.72 w_v^{0.5} - 0.317 w_v + 0.0372 w_v^2)/h$  ( $dia^{-1}$ ) é a taxa de rearejamento por acção do vento, com velocidade  $w_v$ , para a temperatura de referência ( $20^{\circ}C$ );  $\theta_{odr}$  é um coeficiente de temperatura referente ao rearejamento por acção do escoamento ( $\theta_{odh}$ ) e do vento ( $\theta_{oda}$ );  $C_{od_{\infty}} = e^{\alpha_{od_{\infty}}}$ , com,

$$\alpha_{od_{\infty}} = -139.34411 + \frac{1.575701 \cdot 10^5}{T_k} - \frac{6.642308 \cdot 10^7}{T_k^2} + \frac{1.24380 \cdot 10^{10}}{T_k^3} - \frac{8.621949 \cdot 10^{11}}{T_k^4} - C_{cl} \left( 3.1929 \cdot 10^{-2} - \frac{19.428}{T_k} + \frac{3.8673 \cdot 10^3}{T_k^2} \right)$$

em que  $T_k = T + 273.15$  (K) é a temperatura termodinâmica, sendo  $T$  a temperatura em  $^{\circ}C$ , e  $C_{cl} = S/1.80655$  (‰) representa a clorinidade da água, sendo  $S$  (‰) a salinidade;  $\alpha_{nc}$  ( $mg N mg C^{-1}$ ) é a razão entre azoto e carbono no fitoplâncton;  $F_{nh}$  é o factor de preferência do fitoplâncton pela assimilação de azoto sob a forma de amónia;  $N_{nh}$  ( $dia^{-1}$ ) é a taxa de nitrificação, e  $C_{nh}$  ( $mg l^{-1}$ ) é a concentração de amónia na coluna de água.

Apresentam-se nas Tabelas 8.3 a 8.5 valores típicos das razões entre constituintes, das variáveis e dos coeficientes de temperatura utilizados na simulação dos parâmetros biológicos e químicos de um modelo de qualidade da água, tal como constam nas equações gerais atrás apresentadas para a modelação dos diversos constituintes e processos.

Tabela 8.3 – Valores típicos de factores de conversão utilizados na simulação dos parâmetros biológicos e químicos de um modelo de qualidade da água.

Símbolo	Razões entre constituintes	Valor
$\alpha_{fc}$	Fósforo e carbono no fitoplâncton	0.024 mg P mg C <sup>-1</sup>
$\alpha_{nc}$	Azoto e carbono no fitoplâncton	0.18 mg N mg C <sup>-1</sup>
$\alpha_{oc}$	Oxigénio e carbono	32/12 mg O <sub>2</sub> mg C <sup>-1</sup>
$\alpha_{on}$	Oxigénio e azoto	32/14 mg O <sub>2</sub> mg N <sup>-1</sup>
$\alpha_{ccl}$	Carbono e clorofila <u>a</u> no fitoplâncton	60 mg C mg Clorofila <u>a</u> <sup>-1</sup>

Tabela 8.4 – Valores típicos de algumas variáveis utilizadas na simulação dos parâmetros biológicos e químicos de um modelo de qualidade da água.

Símbolo	Variável	Valor
$\mu_{20}$	Taxa de crescimento máximo do fitoplâncton para a temperatura de referência ( $20^{\circ}\text{C}$ )	$2.0 \text{ dia}^{-1}$
$K$	Coefficiente de extinção da luz	$2.0\sim 3.0 \text{ m}^{-1}$
$I_{sat}$	Fluxo de saturação da radiação solar	$150 \text{ Wm}^{-2}$
$K_{pf}$	Constante de semi-saturação para o fósforo	$0.004 \text{ mgP l}^{-1}$
$K_{pn}$	Constante de semi-saturação para o azoto	$0.100 \text{ mgN l}^{-1}$
$\chi_{20}$	Taxa de respiração do fitoplâncton para a temperatura de referência ( $20^{\circ}\text{C}$ ).	$0.125 \text{ dia}^{-1}$
$K_m$	Taxa de mortalidade do fitoplâncton	$0.020 \text{ dia}^{-1}$
$W_{fpd}$	Velocidade de deposição do fitoplâncton	$0.10 \text{ m dia}^{-1}$
$F_{fo}$	Fracção de fósforo devido à respiração e mortalidade do fitoplâncton sob a forma de fósforo orgânico	0.50
$M_{fo20}$	Taxa de decaimento por mineralização do fósforo orgânico para a temperatura de referência ( $20^{\circ}\text{C}$ )	$0.22 \text{ dia}^{-1}$
$K_{fp}$	Constante de semi-saturação relativa à limitação da regeneração de nutrientes pelo fitoplâncton	$1.0 \text{ mg C l}^{-1}$
$F_{no}$	Fracção de azoto devido à respiração e mortalidade do fitoplâncton sob a forma de azoto orgânico	0.50
$M_{no20}$	Taxa de decaimento por mineralização do azoto orgânico para a temperatura de referência ( $20^{\circ}\text{C}$ )	$0.075 \text{ dia}^{-1}$
$N_{nh20}$	Taxa de nitrificação da amónia para a temperatura de referência ( $20^{\circ}\text{C}$ )	$0.10 \text{ dia}^{-1}$
$K_{nh}$	Constante de semi-saturação para a limitação da nitrificação pelo oxigénio	$2.0 \text{ mgO}_2 \text{ l}^{-1}$
$N_{na20}$	Taxa de desnitrificação do nitrato para a temperatura de referência ( $20^{\circ}\text{C}$ )	$0.10 \text{ dia}^{-1}$
$K_{na}$	Constante de desnitrificação	$0.10 \text{ mgO}_2 \text{ l}^{-1}$
$O_{cbo20}$	Taxa de oxidação de CBO para a temperatura de referência ( $20^{\circ}\text{C}$ )	$0.18 \text{ dia}^{-1}$
$K_{cbo}$	Constante de semi-saturação para a limitação da oxidação pelo oxigénio	$0.50 \text{ mgO}_2 \text{ l}^{-1}$
$w_v$	Velocidade do vento (médias mensais)	$3\sim 5 \text{ ms}^{-1}$

Tabela 8.5 – Valores típicos dos coeficientes de temperatura utilizados na simulação dos parâmetros biológicos e químicos de um modelo de qualidade da água.

Símbolo	Coefficientes de temperatura	Valor
$\theta_{fpc}$	Crescimento do fitoplâncton	1.0680
$\theta_{fpr}$	Respiração do fitoplâncton	1.0460
$\theta_{fom}$	Mineralização do fósforo orgânico	1.0640
$\theta_{nom}$	Mineralização do azoto orgânico	1.0800
$\theta_{nhn}$	Nitrificação da amónia	1.0800
$\theta_{nan}$	Desnitrificação do nitrato	1.0460
$\theta_{cboo}$	Oxidação de <i>CBO</i>	1.0470
$\theta_{odh}$	Rearejamento por acção do escoamento	1.0260
$\theta_{oda}$	Rearejamento por acção do vento	1.0260

### 8.3 Modelo analítico de Streeter-Phelps

O modelo clássico de Streeter-Phelps descreve o ciclo do oxigénio pelos dois parâmetros clássicos: Carência Bioquímica de Oxigénio (*CBO*) e o Oxigénio Dissolvido ( $O_2 \rightarrow OD$ ), admitindo uma equação de balanço bastante mais simplificada que a dada por (8.28). Com efeito, não considera a acção do fitoplâncton (tanto na produção como na respiração), bem como os consumos devidos à nitrificação e às algas bentónicas. Por conseguinte, a equação de balanço do oxigénio dissolvido reduz-se à seguinte forma:

$$OD_{entra} + OD_{aflu} + OD_{rear} - OD_{oxid} - OD_{sai} = 0$$

304

Reconhece-se que é um modelo limitado, pois despreza contribuições importantes para o balanço do oxigénio dissolvido na coluna de água. Todavia, teve grande importância no passado e é ainda hoje um modelo frequentemente utilizado em estudos de impactos ambientais, por exemplo.

Analisaremos em seguida o caso particular de fontes pontuais e a sua extensão para fontes distribuídas, como é em geral a situação mais corrente de grandes extensões de cursos de água naturais.

### 8.3.1 Fontes pontuais isoladas

Em condições de regime permanente e com  $k_1, k_2, k_s$  e  $L_a$  constantes, a equação (8.7) pode ser integrada obtendo-se (8.32):

$$L(x) = L_0 e^{-A(k_1+k_s)x/Q} + \frac{L_a}{k_1+k_s} \left[ 1 - e^{-A(k_1+k_s)x/Q} \right] \quad (8.32)$$

sendo  $L_0$  o valor do CBO total no início do troço, isto é, em  $x = x_0$ . Substituindo a equação (8.32) na equação (8.6), para condições de regime permanente, e integrando-a em seguida, com  $k_1, k_2, k_s, Q/A$  e  $L_a$  constantes, obtém-se (8.33):

$$D(x) = D_0 e^{-Ak_1 x/Q} + \frac{k_1}{k_2 - (k_1 + k_s)} \left( L_0 - \frac{L_a}{k_1 + k_s} \right) * \left( e^{-A(k_1+k_s)x/Q} - e^{-Ak_1 x/Q} \right) + \left( \pm \frac{S_r}{k_2} + \frac{k_1 L_a}{k_2 (k_1 + k_s)} \right) \left( 1 - e^{-Ak_1 x/Q} \right) \quad (8.33)$$

em que  $D_0$  é o défice de oxigénio dissolvido em  $x = x_0$ . A equação (8.33) é normalmente designada por “*oxygen sag equation*” na linguagem anglo-saxónica.

A equação (8.32) permite calcular o CBO restante em qualquer ponto do canal, enquanto a equação (8.33) fornece o défice de oxigénio dissolvido em qualquer ponto à distância  $x$ . A variação destes factores com a distância está representada na Figura 8.5.

O máximo ou *défice crítico*, designado por  $D_c$  na Figura 8.5, ocorre no ponto de inflexão da *curva de oxigenação* e pode obter-se directamente por derivação da equação (8.33) em relação a  $x$ , igualando o resultado a zero e resolvendo em seguida para  $x_c$ :

$$x_c = \frac{Q}{A} \frac{1}{k_2 - (k_1 + k_s)} * \log_e \left\{ \frac{k_2}{k_1 + k_s} + \frac{k_2 - (k_1 + k_s)}{(k_1 + k_s)L_0 - L_a} \left[ \frac{L_a}{k_1 + k_s} + \frac{\pm S_r - k_2 D_0}{k_1} \right] \right\} \quad (8.34)$$

Substituindo o valor  $x_c$  dado por (8.34) na equação (8.33) obtém-se o *défice crítico*  $D_c$ .

Os parâmetros  $k_s$  e  $L_a$  representam medidas de propriedades físicas independentes; são muitas vezes desprezáveis. Todavia, valores destes parâmetros podem ser obtidos a partir de dados de campo.

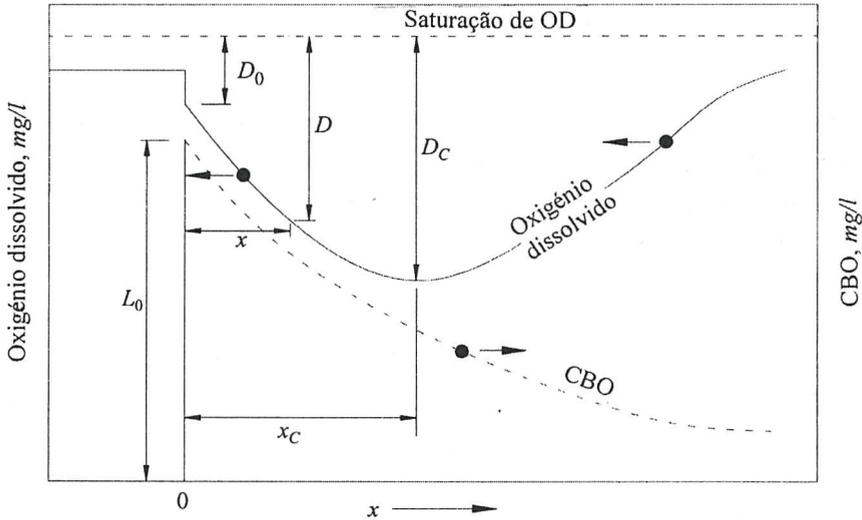


Figura 8.5 - Curvas de oxigenação “Oxigênio dissolvido” e de desoxigenação (“CBO”) de um curso de água (adaptada de McGhee, 1991).

Assim, se o CBO decrescer ao longo de um trecho e em algum ponto  $x$  desse trecho o CBO for inferior ao previsto por  $L(x) = L_0 e^{-Ak, x/Q}$ , então  $k_s$  será positivo e superior a  $L_a$ ;  $L_a$  tomará o valor zero e  $k_s$  será calculado por  $L(x) = L_0 e^{-A(k_1+k_s)x/Q}$ .

Se o CBO crescer com  $x$  ou decrescer menos que o previsto por  $L(x) = L_0 e^{-Ak, x/Q}$ , então  $L_a$  será positivo e excederá  $k_s$ ;  $k_s$  tomará então o valor zero e  $L_a$  será determinado com base em:

306

$$L(x) = L_0 e^{-Ak, x/Q} + \frac{L_a}{k_1} [1 - e^{-Ak, x/Q}] \quad (8.35)$$

Considerando um escoamento permanente e unidimensional, é possível obter soluções directas para problemas de qualidade da água. Com efeito, se  $L_a$  e  $S_r$  forem desprezáveis, as equações (8.33) e (8.34) reduzir-se-ão à formulação clássica de Streeter-Phelps:

$$D(x) = D_0 e^{-Ak, x/Q} + \frac{k_1 L_0}{k_2 - (k_1 + k_s)} (e^{-A(k_1+k_s)x/Q} - e^{-Ak, x/Q}) \quad (8.36)$$

$$x_c = \frac{Q}{A} \frac{1}{k_2 - (k_1 + k_s)} \log_e \left[ \frac{k_2}{k_1 + k_s} \left( 1 - \frac{k_2 - (k_1 + k_s)}{k_1} \frac{D_0}{L_0} \right) \right] \quad (8.37)$$

Substituindo  $t = Ax/Q$  nestas equações, poderão ainda escrever-se as seguintes equações equivalentes [(8.38) e (8.39)]:

$$D(t) = D_0 e^{-k_2 t} + \frac{k_1 L_0}{k_2 - (k_1 + k_s)} \left( e^{-(k_1 + k_s) t} - e^{-k_2 t} \right) \quad (8.38)$$

$$t_c = \frac{1}{k_2 - (k_1 + k_s)} \log_e \left[ \frac{k_2}{k_1 + k_s} \left( 1 - \frac{k_2 - (k_1 + k_s)}{k_1} \frac{D_0}{L_0} \right) \right] \quad (8.39)$$

O coeficiente da parcela de sedimentação,  $k_s$  ( $dia^{-1}$ ), é dado por  $k_s = w_s/h$ , em que  $w_s$  ( $m dia^{-1}$ ) é a velocidade de sedimentação de *CBO* e  $h$  representa a profundidade local do escoamento. A eliminação de *CBO* por sedimentação poderá manifestar-se imediatamente a jusante de pontos de rejeição de águas residuais, visto que estas conterão em geral elevadas quantidades de materiais sólidos em suspensão, por conseguinte com elevados valores de  $k_s$ , o que tem como consequência uma redução da carga contaminante nas águas receptoras. A distâncias consideráveis dos pontos de rejeição e em zonas de baixas concentrações de materiais sólidos em suspensão (o que não é em geral o caso de estuários), os processos de eliminação de *CBO* por sedimentação são menos importantes, o que se traduz numa redução ou mesmo no anulamento do coeficiente  $k_s$ . O próprio coeficiente de desoxigenação,  $k_1$ , terá tendência a ser mais reduzido.

Resumindo, a aplicação do modelo de Steeter-Phelps, traduzido pela equações (8.35) a (8.37), ou pelas equações equivalentes (8.35), (8.38) e (8.39), pressupõe as seguintes hipóteses simplificativas:

- o sistema é unidimensional, no plano horizontal;
- o caudal e a secção são constantes no espaço e no tempo;
- a matéria orgânica carbonatada é o único consumidor de oxigénio;
- o rearejamento atmosférico é a única fonte de oxigénio; e,
- a descarga do efluente é pontual.

Apresentam-se em seguida as equações de balanço a utilizar no cálculo das características das águas resultantes da entrada no sistema de fontes pontuais. Assim, sejam:

- Características das águas usadas lançadas num curso de água:

$$Q_u, D_u, T_u, (CBO_5)_u, C_u$$

- Características das águas do curso de água:

$$Q, D, T, (CBO_5), C$$

As características das águas resultantes da mistura  $D_M, T_M, (CBO_5)_M$  e  $C_M$ , imediatamente após a acção de rejeição, escrevem-se:

$$\begin{aligned} D_M &= \frac{DQ + D_u Q_u}{Q + Q_u} \\ T_M &= \frac{TQ + T_u Q_u}{Q + Q_u} \\ (CBO_5)_M &= \frac{(CBO_5)Q + (CBO_5)_u Q_u}{Q + Q_u} \\ C_M &= \frac{CQ + C_u Q_u}{Q + Q_u} \end{aligned} \quad (8.40)$$

### Exemplo 8.1:

Uma água residual com uma carência bioquímica de oxigénio ( $CBO$ ) de  $25.0 \text{ mg l}^{-1}$  é descarregada num curso de água doce com uma velocidade média de  $0.10 \text{ ms}^{-1}$  e uma temperatura após a mistura de  $19^\circ\text{C}$ . A concentração de oxigénio dissolvido no rio é de  $8.5 \text{ mg l}^{-1}$ .

Considerando  $k_s = 0$  e velocidades de desoxigenação  $k_1 = 0.25 \text{ dia}^{-1}$  e de rearejamento  $k_2 = 0.40 \text{ dia}^{-1}$ , determinar:

- o tempo e a distância para o mínimo de oxigénio dissolvido;
- o mínimo de oxigénio dissolvido.

### Resolução:

$OD$  inicial no curso de água,  $OD = 8.50 \text{ mg l}^{-1}$

$OD$  saturado no curso de água,  $C_s = 9.57 \text{ mg l}^{-1}$

Défice de oxigénio inicial,  $D_0 = 9.57 - 8.50 = 1.07 \text{ mg l}^{-1}$

- O tempo para o valor mínimo do  $OD$  é dado por:

$$t_c = \frac{1}{k_2 - (k_1 + k_s)} \log_e \left[ \frac{k_2}{k_1 + k_s} \left( 1 - \frac{k_2 - (k_1 + k_s)}{k_1} \frac{D_0}{L_0} \right) \right]$$

donde,

$$t_c = \frac{1}{0.40 - 0.25} \log_e \left[ \frac{0.40}{0.25} \left( 1 - \frac{0.40 - 0.25}{0.25} \frac{1.07}{25.0} \right) \right] = 2.96 \text{ dias}$$

Para a distância obtém-se:

$$x_c = \bar{U} t_c = 0.10 * 2.96 * 24 * 60 * 60 = 25574 \text{ m} = 25.60 \text{ km}$$

b) O máximo défice de oxigénio é obtido para  $t = t_c = 2.96$  dias, através de:

$$D(t) = D_0 e^{-k_2 t} + \frac{k_1 L_0}{k_2 - (k_1 + k_s)} \left( e^{-(k_1 + k_s)t} - e^{-k_2 t} \right)$$

donde,

$$\begin{aligned} D(t=2.96) &= 1.07 * e^{-0.40 * 2.96} + \frac{0.25 * 25.0}{0.40 - 0.25} \left( e^{-0.25 * 2.96} - e^{-0.40 * 2.96} \right) \\ &= 7.46 \text{ mg l}^{-1} \end{aligned}$$

Por conseguinte, para o oxigénio dissolvido (OD) à distância  $x = 25.60$  km, obtém-se:

$$OD_{min} = C_s - D_c = 9.57 - 7.46 = 2.11 \text{ mg l}^{-1}$$

valor este que é extremamente baixo, mesmo para as espécies mais resistentes.

### Exemplo 8.2:

Uma empresa de conservas está a ponderar a hipótese de abrir uma nova fábrica numa de duas localizações possíveis: o rio Verde ou, o seu congénere, o rio Amarelo. Entre as questões a ponderar está a determinação do efeito da descarga de cada uma das fábricas (A ou B) em cada um dos rios, e qual o rio que sofreria o menor efeito dessa descarga. As características dos efluentes da solução A e da solução B são representativas das potenciais características das futuras descargas. Deverão ser avaliadas as 4 combinações seguintes: A-Verde; A-Amarelo; B-Verde, e B-Amarelo.

Características de cada um dos efluentes e de cada um dos rios:

Parâmetros do efluente	Solução A	Solução B
Caudal, $m^3 s^{-1}$	0.050	0.050
$CBO_5$ a $25^\circ C$ , $kg dia^{-1}$	129.600	129.600
$OD$ , $mg l^{-1}$	0.900	0.900
Temperatura, $^\circ C$	25.000	25.000
$k_1$ a $20^\circ C$ , $dia^{-1}$	0.050	0.030

Parâmetros do rio	Rio Verde	Rio Amarelo
Caudal, $m^3 s^{-1}$	0.500	0.500
$CBO_5$ a $25^\circ C$ , $mg l^{-1}$	19.000	19.000
$OD$ , $mg l^{-1}$	5.850	5.850
Temperatura, $^\circ C$	25.000	25.000
Velocidades, $m s^{-1}$	0.100	0.200
Profundidade, $m$	4.000	4.000
Coefficiente de actividade do leito	0.200	0.200

### Resolução:

A única diferença nas combinações é a troca dos coeficientes de desoxigenação e de rearejamento; por conseguinte, basta-nos calcular um único valor para  $L_0$  e um só valor para  $D_0$ .

Começa-se por converter o caudal mássico de  $CBO$  último ( $kg dia^{-1}$ ) para unidades de concentração ( $mg l^{-1}$ ). Para o cálculo da concentração correspondente ao caudal mássico, divide-se a carga mássica descarregada ( $kg dia^{-1}$ ) pelo caudal que transporta esta carga ( $Q$ ,  $Q_u$  ou  $Q + Q_u$ ):

$$\frac{\text{Massa da } CBO \text{ última descarregada (} kg \text{ dia}^{-1} \text{)}}{\text{Caudal que transporta a carga mássica de } CBO \text{ (} m^3 s^{-1} \text{)}}$$

ou seja,

$$\frac{(kg/dia) \times (1 \times 10^6 \text{ mg/kg})}{(m^3/s) \times (86400 \text{ s/dia}) (1 \times 10^3 \text{ l/m}^3)}$$

donde, para ambas as soluções A e B:

$$L_u = \frac{(129.60 \text{ kg dia}^{-1})(1 \times 10^6 \text{ mg/kg})}{(0.050 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1})(86400 \text{ s/dia})(1 \times 10^3 \text{ l/m}^3)}$$
$$= \frac{129.60 \cdot 10^6 \text{ mg}}{4.320 \cdot 10^6 \text{ l}} = 30.0 \text{ mg l}^{-1}$$

Calcula-se agora o *CBO* resultante após a mistura, obtendo-se:

$$L_o = \frac{0.050 \cdot 30.00 + 0.50 \cdot 19.00}{0.050 + 0.500} = 20.0 \text{ mg l}^{-1}$$

A 25°C obtém-se para a concentração saturação de *OD*:

$$C_s \approx 14.716 - 0.401687 \cdot 25 + 0.008593 \cdot 25^2 - 0.0000904 \cdot 25^3$$
$$= 8.60 \text{ mg l}^{-1}$$

vindo para o déficit inicial:

$$D_0 = 8.60 - \frac{0.050 \cdot 0.90 + 0.50 \cdot 5.85}{0.050 + 0.500} = 3.20 \text{ mg l}^{-1}$$

Para a combinação A-Verde, os coeficientes de desoxigenação,  $k_1$ , e de rearejamento,  $k_2$ , poderão ser calculados usando as aproximações (8.2) e (8.4), vindo:

$$k_1 = 0.050 + \frac{0.10}{4.0} \cdot 0.20 = 0.055 \text{ dia}^{-1} \text{ a } 20^\circ\text{C}$$

$$k_2 = \frac{3.9 \cdot (0.10)^{0.5}}{(4.0)^{1.5}} = 0.154 \text{ dia}^{-1} \text{ a } 20^\circ\text{C}$$

À temperatura de 25°C ter-se-ão:

$$k_1 = 0.055 \cdot (1.056)^{(25-20)} = 0.072 \text{ dia}^{-1}$$

$$k_2 = 0.154 \cdot (1.025)^{(25-20)} = 0.174 \text{ dia}^{-1}$$

Para o instante crítico  $t_c$  e o déficit crítico  $D_c$  obtém-se:

$$t_c = \frac{1}{0.174 - 0.072} \log_e \left[ \frac{0.174}{0.072} \left( 1 - \frac{0.174 - 0.072}{0.072} \frac{3.20}{20.0} \right) \right]$$

$$= 6.13 \text{ dias}$$

$$D_c = 3.20 * e^{-0.174 * 6.13} + \frac{0.072 * 20.0}{0.174 - 0.072} (e^{-0.072 * 6.13} - e^{-0.174 * 6.13})$$

$$= 5.32 \text{ mgl}^{-1}$$

vindo para o oxigénio dissolvido no ponto crítico:

$$OD = C_s - D_c = 8.60 - 5.32 = 3.28 \text{ mgl}^{-1}$$

Repetimos agora os cálculos para a melhor combinação, que corresponde à solução B-Amarelo. Com efeito, tem-se:

$$k_1 = 0.030 + \frac{0.20}{4.0} * 0.20 = 0.040 \text{ dia}^{-1} \text{ a } 20^\circ\text{C}$$

$$k_2 = \frac{3.9 * (0.20)^{0.5}}{(4.0)^{1.5}} = 0.218 \text{ dia}^{-1} \text{ a } 20^\circ\text{C}$$

À temperatura de  $25^\circ\text{C}$  ter-se-ão:

$$k_1 = 0.040 * (1.056)^{(25-20)} = 0.053 \text{ dia}^{-1}$$

$$k_2 = 0.218 * (1.025)^{(25-20)} = 0.247 \text{ dia}^{-1}$$

Para o instante e o défice críticos obtêm-se:

$$t_c = \frac{1}{0.247 - 0.053} \log_e \left[ \frac{0.247}{0.053} \left( 1 - \frac{0.247 - 0.053}{0.053} \frac{3.20}{20.0} \right) \right]$$

$$= 3.39 \text{ dias}$$

$$D_c = 3.20 * e^{-0.247 * 3.39} + \frac{0.053 * 20.0}{0.247 - 0.053} (e^{-0.053 * 3.39} - e^{-0.247 * 3.39})$$

$$= 3.59 \text{ mgl}^{-1}$$

e para o oxigénio dissolvido no ponto crítico resulta:

$$OD = C_s - D_c = 8.60 - 3.59 = 5.01 \text{ mgl}^{-1}$$

Deixa-se como exercício a verificação das duas combinações restantes.

### 8.3.2 Fontes pontuais múltiplas

Trata-se, neste caso, de considerar o curso de água (rio) constituído por uma série de troços com características uniformes, ligados entre si através de condições de fronteira. Nesta conformidade, o cálculo inicia-se na secção mais a montante, onde as condições de fronteira são especificadas, sendo as equações (8.35) e (8.36) usadas para calcular as sucessivas concentrações para jusante daquela secção. O cálculo continuará até à fronteira situada mais a jusante.

Durante o percurso, podem ocorrer dois tipos de fronteiras: *i*) são fronteiras do primeiro tipo as mudanças nos parâmetros do sistema (por exemplo, o declive do leito, a velocidade, a profundidade, as alterações dos parâmetros ou processos de (des)oxigenação, etc.; *ii*) correspondem a fronteiras do segundo tipo as entradas no sistema de fontes pontuais.

No primeiro caso, as concentrações no final do troço em análise servirão como concentrações iniciais para as equações do modelo com parâmetros revistos; no segundo caso, usam-se as equações de balanços de massa (8.40) para o estabelecimento das concentrações de partida para o troço seguinte. Apresenta-se em seguida um exemplo de aplicação (adaptado de Chapra, 1997) suficientemente esclarecedor destas aproximações.

#### Exemplo 8.3 (Chapra, 1997):

A figura 8.6 mostra um rio que recebe o efluente de uma ETAR ao quilómetro 100 (SQ 100) e um afluente (tributário) ao quilómetro 60, em SQ 60. A secção do rio é trapezoidal, com as características indicadas. O coeficiente global de desoxigenação para o *CBO* no troço de montante (em SQ > 100) é igual a  $0.50 \text{ dia}^{-1}$  a  $20^{\circ}\text{C}$ . Num percurso de 20 quilómetros para jusante da estação de tratamento (entre os quilómetros 100 e 80) há uma redução de *CBO* por decomposição e uma redução adicional por sedimentação, traduzindo-se este último processo num aumento do coeficiente global de desoxigenação neste troço de um valor correspondente a  $k_s = 0.25 \text{ dia}^{-1}$ .

Supondo que o rio se situa ao nível do mar, pretende-se o cálculo da concentração do *oxigénio dissolvido* ao longo do sistema, considerando a informação que se resume nas tabelas seguintes:

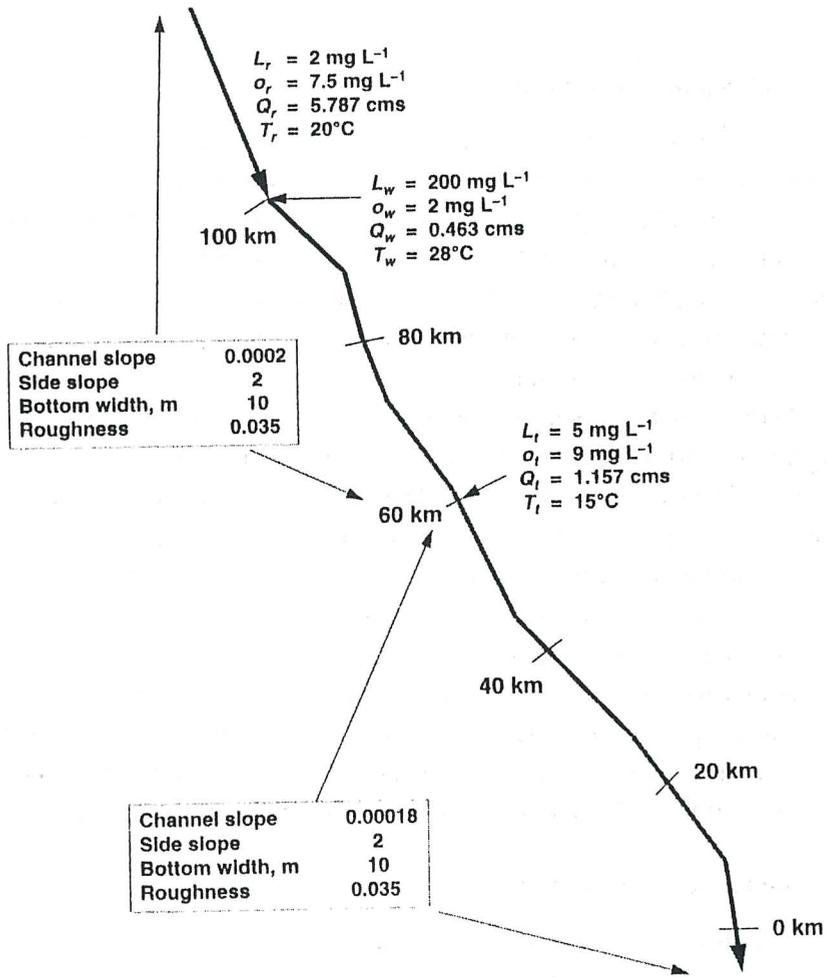


Figura 8.6 - Rio com duas condições de fronteira internas e alterações nas suas características hidrogeométricas (Chapra, 1997).

		>	-	<
Profundidade, $h$	$m$	1.19	1.24	1.41
Área, $A$	$m^2$	14.71	15.5	18.05
Caudal, $Q$	$m^3 s^{-1}$	$5.787 \times 10^{-3}$	$6.250 \times 10^{-3}$	$7.407 \times 10^{-3}$
	$m^3 dia^{-1}$	500.0	540.0	640.0
Velocidade, $U$	$m s^{-1}$	0.393	0.403	0.410
	$m dia^{-1}$	33955.0	34819.0	35424.0

Parâmetro	SQ > 100	SQ 100 - 80	SQ 80 - 60	SQ < 60
Temperatur a, T	20.00	20.59	20.59	19.72
C. saturação de O <sub>2</sub> , C <sub>s</sub>	9.092	8.987	8.987	9.143
Coeficient e k <sub>2</sub>	1.902	1.842	1.842	1.494
Coeficient e k <sub>1</sub>	0.50	0.514	0.514	0.494
Coeficient e k <sub>1</sub> + k <sub>s</sub>	0.50	0.764	0.514	0.494

### Resolução:

O balanço de massa de *CBO* na fronteira de montante (secção SQ 100) obtém-se por aplicação de uma equação do tipo (8.40),

$$L_0 = \frac{L_w Q_w + L_r Q_r}{Q_w + Q_r} = \frac{200.0 * 40.0 + 2.0 * 500.0}{540.0} = 16.667 \text{ mg l}^{-1}$$

Ao longo do troço SQ 100-80 ocorrerá um decaimento de *CBO*, obtendo-se a jusante deste troço (na secção SQ 80):

$$L_{p_1} = L_0 e^{-\frac{k_1+k_s}{U}x} = 16.667 * e^{-\frac{0.514+0.25}{34 \text{ 819.0}}(100 \text{ 000}-80 \text{ 000})} = 10.75 \text{ mg l}^{-1}$$

No troço seguinte (SQ 80-60) já não ocorre sedimentação, mas continua o processo de decaimento de *CBO*, obtendo-se na secção de jusante,

$$L_{p_2} = L_{p_1} e^{-\frac{k_1}{U}x} = 10.75 * e^{-\frac{0.514}{34 \text{ 819.0}}(40 \text{ 000}-20 \text{ 000})} = 8.00 \text{ mg l}^{-1}$$

Na secção SQ 60 é agora necessário proceder a um novo balanço de massa, vindo:

$$L_{60} = \frac{L_{p_2} Q_{p_2} + L_t Q_t}{Q_{p_2} + Q_t} = \frac{8.0 * 540.0 + 5.0 * 100.0}{640.0} = 7.53 \text{ mg l}^{-1}$$

continuando o *CBO* a decair no troço SQ 60-0, obtendo-se na fronteira de jusante:

$$L_j = L_{60} e^{-\frac{k_1}{U}x} = 7.53 * e^{-\frac{0.494}{35 \text{ 424.0}}(60 \text{ 000}-0)} = 3.26 \text{ mg l}^{-1}$$

Para o *oxigénio dissolvido* resulta o seguinte balanço de massa na secção SQ 100:

$$OD_0 = \frac{OD_w Q_w + OD_r Q_r}{Q_w + Q_r} = \frac{2.0 \cdot 40.0 + 7.5 \cdot 500.0}{540.0} = 7.093 \text{ mg l}^{-1}$$

Por conseguinte, para o défice inicial nesta secção obtém-se:

$$D_0 = 8.987 - 7.093 = 1.894 \text{ mg l}^{-1}$$

Calcula-se o *défice de oxigénio* ao longo do troço SQ 100-80 recorrendo à fórmula de Streeter-Phelps,

$$D_{p_1} = D_0 e^{-\frac{k_2}{U}x} + \frac{k_1 L_0}{k_2 - (k_1 + k_s)} \left( e^{-\frac{(k_1 + k_s)}{U}x} - e^{-\frac{k_2}{U}x} \right)$$

donde,

$$D_{p_1} = 1.894 \cdot e^{-\frac{1.842}{34819.0}x} + \frac{0.514 \cdot 16.667}{1.842 - 0.764} \left( e^{-\frac{0.764}{34819.0}x} - e^{-\frac{1.842}{34819.0}x} \right)$$

ou seja, com  $x = 10\,000 - 80\,000 = 20\,000 \text{ m}$  obtém-se:

$$D_{p_1} = 3.023 \text{ mg l}^{-1}$$

o que corresponde a uma concentração de *oxigénio dissolvido* na secção SQ 80 dada por:

$$OD_{p_1} = 8.987 - 3.023 = 5.964 \text{ mg l}^{-1}$$

O *défice de oxigénio* no troço SQ 80-60 será agora obtido por:

$$D_{p_2} = 3.023 \cdot e^{-\frac{1.842}{34819.0}(x-20000)} + \frac{0.514 \cdot 10.75}{1.842 - 0.514} \left( e^{-\frac{0.514}{34819.0}(x-20000)} - e^{-\frac{1.842}{34819.0}(x-20000)} \right)$$

Com  $x = 40000 \text{ m}$  resulta,

$$D_{p_2} = 2.702 \text{ mg l}^{-1}$$

o que corresponde à seguinte concentração de *oxigénio dissolvido* a jusante do troço SQ 80-60:

$$OD_{p_2} = 8.987 - 2.702 = 6.285 \text{ mg l}^{-1}$$

Procedendo agora a um novo balanço do *oxigénio dissolvido* nesta secção, devido à existência de uma condição de fronteira do segundo tipo (tributário), resulta:

$$\begin{aligned} OD_{60} &= \frac{OD_{p_2} Q_{p_2} + OD_i Q_i}{Q_{p_2} + Q_i} \\ &= \frac{6.285 * 540.0 + 9.0 * 100.0}{640.0} = 6.709 \text{ mg l}^{-1} \end{aligned}$$

Por conseguinte, para o *défice de oxigénio* no início do troço SQ 60-0 obtém-se:

$$D_0 = 9.143 - 6.709 = 2.434 \text{ mg l}^{-1}$$

sendo ao longo deste troço dado por:

$$\begin{aligned} D_{p_3} &= 2.434 * e^{-\frac{1.494}{35424.0}(x-40000)} + \\ &+ \frac{0.494 * 7.53}{1.494 - 0.494} \left( e^{-\frac{0.494}{35424.0}(x-40000)} - e^{-\frac{1.494}{35424.0}(x-40000)} \right) \end{aligned}$$

Em  $x = 100000 \text{ m}$  (fronteira de jusante) obtém-se:

$$D_j = 1.509 \text{ mg l}^{-1}$$

e para o *oxigénio dissolvido* resulta,

$$OD_j = 7.634 \text{ mg l}^{-1}$$

A tradução gráfica destes resultados encontra-se representada na Figura 8.7.

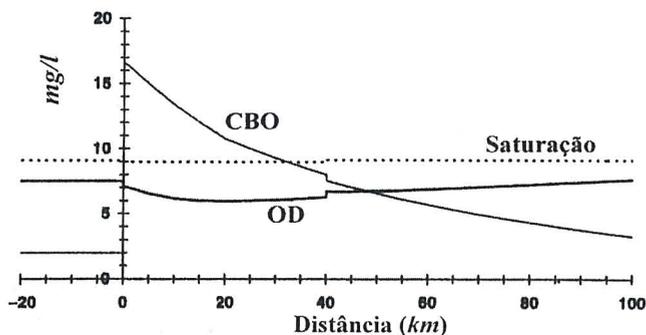


Figura 8.7 - Evolução espacial da Carência Bioquímica de Oxigénio (CBO), do *oxigénio dissolvido* (OD) e da curva de saturação de oxigénio (Saturação) (Chapra, 1997).

## 8.4 Fontes distribuídas

Interessa neste caso distinguir duas situações: um primeiro caso em que uma fonte de poluição difusa não contribui significativamente para o caudal do curso de água, e um segundo caso em que a fonte de poluição difusa está associada a uma contribuição significativa para o caudal do escoamento principal (rio).

### 8.4.1 Fontes de poluição difusa sem contribuição significativa para o caudal

Considerando  $F$  e  $R$  ( $g\ m^{-3}\ dia^{-1}$ ) taxas volumétricas de fotossíntese e de respiração das plantas,  $S_f$  ( $g\ m^{-3}\ dia^{-1}$ ) um factor de carência de oxigénio bentónico (sedimento),  $S_L$  a taxa de distribuição da fonte de  $CBO$  e  $h$  a profundidade do escoamento, pode obter-se a solução analítica global (8.41) para o  $CBO$  e o défice de oxigénio ( $D$ ), válida para um sistema em regime permanente que contenha fontes de poluição pontuais e difusas (Chapra, 1997).

$$\begin{aligned}
 L &= L_0 e^{-(k_1+k_s)t} + \frac{S_L}{(k_1+k_s)} (1 - e^{-(k_1+k_s)t}) \\
 D &= D_0 e^{-(k_1+k_s)t} + \frac{k_1 L_0}{k_2 - (k_1+k_s)} (e^{-(k_1+k_s)t} - e^{-k_2 t}) + \\
 &+ \frac{-F + R + (S_f/h)}{k_2} (1 - e^{-k_2 t}) + \frac{k_1 S_L}{(k_1+k_s)k_2} (1 - e^{-k_2 t}) - \\
 &- \frac{k_1 S_L}{(k_1+k_s)[k_2 - (k_1+k_s)]} (e^{-(k_1+k_s)t} - e^{-k_2 t})
 \end{aligned}
 \tag{8.41}$$

Este modelo traduz assim os efeitos de fontes pontuais e difusas, em regime permanente e com contribuição nula para o caudal, podendo ser aplicado de forma idêntica à utilizada no Exemplo 8.3. Valores típicos para  $F - R$  e  $S_f$  situam-se à volta de  $1\sim 2\ g\ m^{-3}\ dia^{-1}$  e  $2\sim 5\ g\ m^{-2}\ dia^{-1}$ , respectivamente.

## 8.4.2 Fontes de poluição difusa com contribuição para o caudal

### *Modelo analítico*

Neste caso, seja a concentração de um poluente no curso de água ( $C$ , em  $mg\ l^{-1}$ ) e a contribuição de uma concentração difusa ( $C_d$ , em  $mg\ l^{-1}$ ), a equação de balanço de massa que contribui com caudal e massa poluente escreve-se:

$$\frac{\partial(A_s C)}{\partial t} + \frac{\partial(QC)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} C_d - k_1 A_s C \quad (8.42)$$

A equação (8.42) apenas tem solução analítica considerando: (i) o regime permanente; (ii) a linearização da equação resultante, com o caudal a crescer linearmente ( $Q = Q_0 + q_r x$ , sendo  $q_r$  um valor constante do caudal ( $m^2\ dia^{-1}$ ) que traduz o crescimento linear), e (iii) a manutenção da secção transversal constante, ou da velocidade do escoamento constante. Por conseguinte, a equação (8.42) tem solução analítica quando se reduz à seguinte forma:

$$0 = -(Q_0 + q_r x) \frac{\partial C}{\partial x} - (q_r + k_1 A_s) C + q_r C$$

a qual admite agora duas soluções consoante se assuma uma ou outra das condições indicadas em (iii). Como é óbvio, qualquer destas condições é pouco realista, pelo que este problema apenas poderá ser satisfatoriamente resolvido por via numérica.

### *Modelo numérico simplificado*

Como acabámos de ver, as soluções analíticas para fontes difusas têm aplicações práticas limitadas e pouco realistas. Para as aplicações correntes em sistemas fluviais, com extensões significativas, uma metodologia baseada em modelação numérica é mais realista e perfeitamente compatível com os actuais meios de cálculo informático. Nesta conformidade, apresenta-se nesta secção um modelo matemático simplificado para o balanço de oxigénio de fontes difusas, assim como o correspondente esquema numérico para a implementação de um programa de cálculo automático.

Considerando o esquema representado na Figura 8.8, a aproximação numérica é baseada na divisão do curso de água em segmentos finitos ou volumes de controlo (finitos). Os segmentos 0 e  $n+1$  representam segmentos

de fronteira. Por conseguinte, existirão  $n$  incógnitas a serem determinadas, sejam elas os balanços de *CBO* ( $L$ ) e de *oxigénio dissolvido*  $OD$  ( $O$ ).

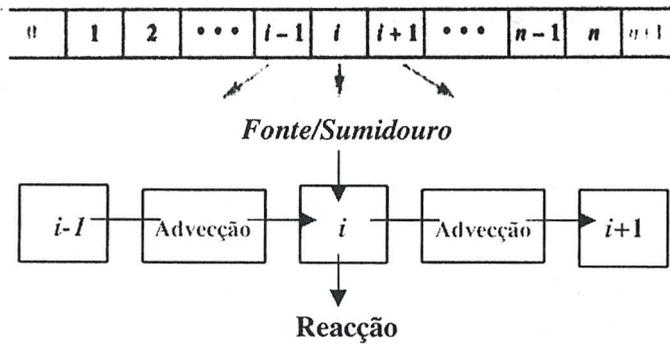


Figura 8.8 - Fonte uniformemente distribuída. Balanço de massa em torno de um volume de controle.

A equação (8.42) apenas contém termos de reacção, fonte/sumidouro e de advecção, sendo os primeiros calculados no ponto  $i$  da malha e os termos de advecção discretizados com diferenças regressivas ou progressivas. Assim, considerando o regime permanente, o balanço de *CBO* obtém-se directamente a partir da equação (8.42), com  $C \equiv L$ :

$$Q_i L_i - Q_{i-1} L_{i-1} - (q_d L_d)_i + (k_1 + k_s)_i A_{s,i} \Delta x_i L_i = 0 \quad (8.43)$$

em que  $q_d = Q_d/n$ , representando  $Q_d$  a contribuição total de caudal difuso e  $n$  o número de elementos;  $L_d$  representa a contribuição de *CBO* por difusão;  $A_s$  é a área da secção transversal;  $\Delta x$  é o comprimento de cada elemento;  $Q$  e  $L$  representam, respectivamente, o caudal total escoado e a variável de cálculo (*CBO*) ao longo do curso de água.

320

No caso do *oxigénio dissolvido*, importa considerar os efeitos relativos à fotossíntese, à respiração das plantas e à satisfação de oxigénio bentónico (sedimentos) na variação local do défice, sendo válida a seguinte aproximação (8.44):

$$Q_i O_i - Q_{i-1} O_{i-1} - (q_d L_d)_i + k_{1,i} A_{s,i} \Delta x_i L_i - k_{2,i} A_{s,i} \Delta x_i (C_s - O)_i - F_i + R_i + \left( \frac{S_f}{h} \right)_i = 0 \quad (8.44)$$

em que  $C_s$  é a concentração de saturação do oxigénio dissolvido e  $O$  representa a variável de cálculo (*oxigénio dissolvido*) ao longo do curso de água.

Consequentemente, da equação (8.43) obtém-se a seguinte equação explícita para o cálculo do *CBO* ao longo do rio:

$$L_i = \frac{Q_{i-1} L_{i-1} + (q_d L_d)_i}{Q_i + (k_1 + k_s)_i A_{s,i} \Delta x_i} \quad (8.45)$$

De igual modo, explicitando  $O_i$  na equação (8.44) obtém-se a equação (8.46) para o cálculo do *oxigénio dissolvido* ao longo do curso de água:

$$O_i = \frac{(QO)_{i-1} + (q_d L_d)_i - (k_1 A_s \Delta x L)_i + (k_2 A_s \Delta x C_s)_i + F_i - R_i - (S_f/h)_i}{Q_i + (k_2 A_s \Delta x)_i} \quad (8.46)$$

O cálculo dos valores  $(L_i, O_i)$ , utilizando as equações (8.45) e (8.46), é iniciado a partir da primeira secção interna, isto é, a partir de  $i = 1$ , sendo conhecidos na fronteira de montante não só os valores de  $Q_0$ , obviamente, mas também os valores de  $L_0$  e de  $O_0$ .

Este modelo exhibe alguma dispersão numérica, cujo erro se prova ser aproximadamente igual a  $E_n = U \Delta x / 2$ . Assim, uma vez conhecida a dispersão física ( $E_f$ ), será reduzida ao mínimo a dispersão numérica adoptando incrementos espaciais que satisfaçam a condição  $\Delta x \leq 2E_f / U$ .

#### Exemplo 8.4 (Chapra, 1997):

Considere-se um rio como meio receptor de uma fonte pontual de *CBO* e de fontes difusas com déficit de oxigénio, como se mostra na Figura 8.9. Usando um programa de cálculo automático baseado nas equações (8.45) e (8.46), calcular os perfis longitudinais de *CBO* e de *oxigénio dissolvido* no trecho de rio representado nesta figura.

As variáveis apresentadas na Figura 8.9 correspondem aos seguintes parâmetros do modelo traduzido pelas equações (8.45) e (8.46):  $k_r \equiv k_1 + k_s$ ,  $k_d \equiv k_1$ ,  $k_u \equiv k_2$ ,  $o_s \equiv C_s$  e  $P \equiv F$ . As unidades têm a seguinte correspondência:  $(mps) \equiv (ms^{-1})$ ,  $(d^{-1}) \equiv (dia^{-1})$  e  $(L^{-1}) \equiv (l^{-1})$ .

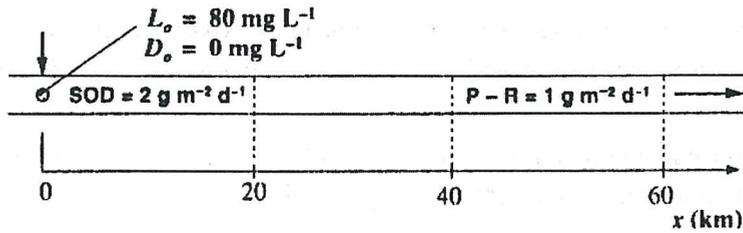


Figura 8.9 - Características e valores típicos de parâmetros ao longo do rio (Chapra, 1997).

### 8.5 Modelo analítico de nitrificação

Em complemento às soluções analíticas apresentadas para o *CBO* carbonatado, propõe-se também agora uma solução analítica para o cálculo da evolução dos compostos de nitrogénio presentes nas águas residuais lançadas num curso de água. Com efeito, como se viu na sub-seção 8.2.4 *Ciclo do azoto*, estes compostos têm um forte impacto na qualidade da água do meio. Considerando reacções de 1ª ordem, pode descrever-se o processo de nitrificação por uma série de reacções do tipo (Chapra, 1997):

$$\begin{aligned} \frac{dC_{no}}{dt} &= -k_{oa} C_{no} \\ \frac{dC_{nh}}{dt} &= -k_{oa} C_{no} - k_{ai} C_{nh} \\ \frac{dC_{ni}}{dt} &= -k_{ai} C_{nh} - k_{in} C_{ni} \\ \frac{dC_{na}}{dt} &= -k_{in} C_{ni} \end{aligned} \quad (8.47)$$

as quais podem agora ser resolvidas numericamente, admitindo conhecidos, no instante inicial ( $t = 0$ ), os valores das concentrações de  $C_{no} = C_{no0}$  e de  $C_{nh} = C_{nh0}$ . Os coeficientes  $k_{oa}$ ,  $k_{ai}$  e  $k_{in}$  tomam valores na ordem de  $0.25 \text{ dia}^{-1}$ ,  $0.25 \text{ dia}^{-1}$  e  $0.75 \text{ dia}^{-1}$ , respectivamente.

Uma vez conhecidos os valores de  $C_{nh}$  e  $C_{ni}$ , o défice de oxigénio poderá em seguida ser calculado por:

$$\frac{dD}{dt} = r_{oa} k_{ai} C_{nh} + r_{oi} k_{in} C_{ni} - k_2 D$$

em que  $r_{oa}$  e  $r_{oi}$  representam as quantidades de oxigénio consumido nos processos de nitrificação do ião amónio e do nitrito, respectivamente; são dados por:

$$r_{oa} = \frac{1.5 * 32}{14} = 3.43 \text{ g O g N}^{-1}; \quad r_{oi} = \frac{0.5 * 32}{14} = 1.14 \text{ g O g N}^{-1}$$

Uma vez que as equações do sistema (8.47) são sequenciais, é então possível obter soluções analíticas para os processos de nitrificação, sendo dadas por (Chapra, 1997):

$$\begin{aligned} C_{no} &= C_{no0} e^{-k_{no}t} \\ C_{nh} &= C_{nh0} e^{-k_{ni}t} + \frac{k_{oa} C_{no0}}{k_{ai} - k_{oa}} (e^{-k_{no}t} - e^{-k_{ni}t}) \\ C_{ni} &= \frac{k_{ai} C_{nh0}}{k_{in} - k_{ai}} (e^{-k_{ni}t} - e^{-k_{ni}t}) + \frac{k_{ai} k_{oa} C_{no0}}{k_{ai} - k_{oa}} \left( \frac{e^{-k_{no}t} - e^{-k_{ni}t}}{k_{in} - k_{oa}} - \frac{e^{-k_{ni}t} - e^{-k_{ni}t}}{k_{in} - k_{ai}} \right) \\ C_{na} &= C_{no0} + C_{nh0} - C_{no0} e^{-k_{no}t} - C_{nh0} e^{-k_{ni}t} - \frac{k_{oa} C_{no0}}{k_{ai} - k_{oa}} (e^{-k_{no}t} - e^{-k_{ni}t}) - \\ &\quad - \frac{k_{ai} C_{nh0}}{k_{in} - k_{ai}} (e^{-k_{ni}t} - e^{-k_{ni}t}) - \frac{k_{ai} k_{oa} C_{no0}}{k_{ai} - k_{oa}} \left( \frac{e^{-k_{no}t} - e^{-k_{ni}t}}{k_{in} - k_{oa}} - \frac{e^{-k_{ni}t} - e^{-k_{ni}t}}{k_{in} - k_{ai}} \right) \end{aligned} \quad (8.48)$$

Como é natural, esta solução analítica comporta limitações, nomeadamente porque não considera alguns cofactores limitantes, como sejam a inibição da reacção de nitrificação devido à interacção com o escoamento, o qual se processa com velocidades mais ou menos importantes, diferentes níveis de oxigénio dissolvido e a presença de microrganismos (bactérias); por conseguinte, o uso deste modelo deve limitar-se a situações muito particulares.

## 8.6 Modelação numérica dos processos de qualidade da água

### 8.6.1 Estrutura geral de um modelo de qualidade da água de um rio

Os parâmetros de qualidade da água estão intrinsecamente ligados à hidrodinâmica do curso de água. Por conseguinte, a construção de uma estrutura computacional para a simulação dos processos que afectam as características da água de um sistema hídrico (rio, albufeira, lago, estuário, etc.) exige o tratamento conjunto das equações que regem os fenómenos hidrodinâmicos e de qualidade da água nesse meio.

Nesta conformidade, um adequado modelo matemático de qualidade da água de um rio deverá descrever a globalidade dos fenómenos hidráulicos, bioquímicos e térmicos através de equações diferenciais. Cada um destes fenómenos deverá constituir um submodelo cujas variáveis interagem e influenciam todas as restantes variáveis dos outros submodelos, embora nem todas estas influências tenham idêntico peso. Assim, por exemplo, a influência das variações da temperatura nas condições hidráulicas (através da evaporação e das variações da massa volúmica e da viscosidade da água) é desprezável no vasto conjunto das aproximações possíveis em condições fluviais. De igual modo, os efeitos das variações bioquímicas nas condições hidráulicas (através da sedimentação e crescimento de joio aquático, por exemplo) e nas transferências de temperatura (através da produção de calor e de alterações das características de transferência) são em geral desprezáveis.

Estas hipóteses permitem simplificar o modelo numérico através, nomeadamente, de uma redução das relações entre as variáveis constantes nos três submodelos. Em geral, o cálculo é iniciado pela resolução das equações do submodelo hidrodinâmico, obtendo-se deste modo valores médios para as variáveis  $(h, u)$  ou  $(A, Q)$ , e termina com as equações do submodelo que traduzem os comportamentos dos diversos parâmetros bioquímicos.

Em estudos de qualidade da água em meios fluviais, é em geral suficiente recorrer a um modelo unidimensional no plano horizontal (1DH). Nesta formulação os valores das variáveis correspondem a médias nas secções transversais do rio, variando ao longo do percurso. Os valores destes parâmetros devem assim ser considerados bons índices médios do estado de

qualidade da água de um rio, embora contenham óbvias limitações locais, pois não permitem descrever a distribuição das variáveis em cada secção.

### **Modelo Hidrodinâmico**

É constituído pelas equações de conservação da massa e da quantidade de movimento (equações de tipo Saint-Venant), e que são em geral deduzidas com base na técnica do volume de controlo (Capítulo 3). A resolução simultânea destas equações permite obter valores médios instantâneos para as variáveis que caracterizam a hidrodinâmica ( $h, u$ ) ou  $(A, Q)$  ao longo de todo o percurso. Em termos das variáveis  $(A, Q)$ , o sistema de equações a resolver é traduzido pelas equações (3.14) e (3.18), que aqui se reproduzem:

$$\frac{\partial(A + A_0)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial(h + \xi)}{\partial x} + \frac{g|Q|Q}{K^2 AR_h^{4/3}} + q_l \left( \frac{Q}{A} - u_l \right) = 0$$

### **Modelo de Evolução da Temperatura**

Os valores da temperatura são obtidos recorrendo a uma equação geral de transporte de um escalar (neste caso a temperatura  $T$ ), contendo os termos de aceleração local, de advecção, de difusão, e os termos de fonte e sumidouros de calor ( $\sum I_l$ ).

Consideram-se apenas as transferências ao nível da interface água-ar, tais como as radiações solar e atmosférica, a condução, a evaporação, etc.; isto é, dada a sua irrelevância, são desprezadas as transferências de calor entre os sedimentos na interface sólida (fundo) com o escoamento líquido. São ainda desprezadas, nesta equação, as fontes internas de geração ou transformações de calor, como a dissipação de energia por efeito viscoso e o atrito nas fronteiras. Como se viu na sub-secção 8.2.1.1 *Constituintes conservativos*, a forma geral desta equação escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (AT) + \frac{\partial}{\partial x} \left( QT - D_{\kappa} A \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{B \sum I_l}{\rho c_p}$$

### **Modelo de Análise do Estado Bioquímico das Águas**

É constituído por tantas equações de transporte de um escalar quantos os constituintes  $p$  a considerar na análise da qualidade da água de um meio

hídrico. Assim, considerando a equação genérica para o cálculo da concentração de um constituinte  $p$ , esta conterá os termos de aceleração local, de advecção, de difusão, e os termos de fontes externas ( $E_p$ ) e internas ( $I_p$ ). Por fontes internas entende-se um conjunto de termos que são funções dos diversos constituintes representados por outras tantas equações no modelo bioquímico de convecção-difusão-reacção; ou seja, estas fontes incluem todos os fenómenos que ocorrem no interior da massa líquida e que influenciam a concentração de  $p$ . Considerando um constituinte  $p$ , a forma geral desta equação escreve-se:

$$\frac{\partial(Ap)}{\partial t} + \frac{\partial(AUp)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( AD_{ix} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = E_p + AI_p \quad (8.49)$$

Este módulo conterá assim tantas equações diferenciais do tipo (8.49) a resolver, em cada caso específico, quantos os constituintes a considerar na análise da qualidade da água do rio.

Apresentam-se nas secções seguintes alguns modelos matemáticos e as principais características dos correspondentes modelos numéricos desenvolvidos para a simulação da hidrodinâmica e dos processos de qualidade da água em meios com diferentes características. Trata-se de modelos predominantemente unidimensionais nos planos horizontal (1DH) e vertical (1DV). Complementarmente, faz-se uma breve referência a modelos bidimensionais em planta (2DH) e no plano vertical (2DV), e a modelos predominantemente bidimensionais no plano horizontal, que admitem estratificação no plano vertical; estes modelos consideram a hipótese da hidrostaticidade, sendo geralmente designados por modelos 2.5DH ou *quase-3D*.

### 8.6.2 Modelos 1DH “ISIS” e “QUAL2E” para rios

A análise da qualidade da água em sistemas mais ou menos complexos de canais com superfície livre, utilizando uma estrutura computacional do tipo ISIS, desenvolvida e apoiada por *Halcrw Group Ltd & HR Wallingford Ltd*, requer o funcionamento de ambos os módulos: hidrodinâmico e de qualidade da água.

O cálculo de todas as variáveis de ambos os módulos poderá ser efectuado em simultâneo (após cada  $\Delta t$ ) ou de forma desacoplada. Neste caso calculam-se em primeiro lugar os campos de velocidades (ou os caudais) e as alturas (ou as áreas do escoamento) num período de tempo

característico e obtêm-se, em seguida, as concentrações das variáveis de qualidade da água em todas as seções da rede de canais.

A estrutura computacional ISIS utiliza este procedimento através de dois módulos distintos: o ISIS FLOW, para o cálculo da hidrodinâmica, e o ISIS QUALITY que utilizará, em cada simulação, tantas equações quantos os constituintes de qualidade da água a analisar, num máximo de quinze; pode ser representado esquematicamente como se mostra na Figura 8.10.

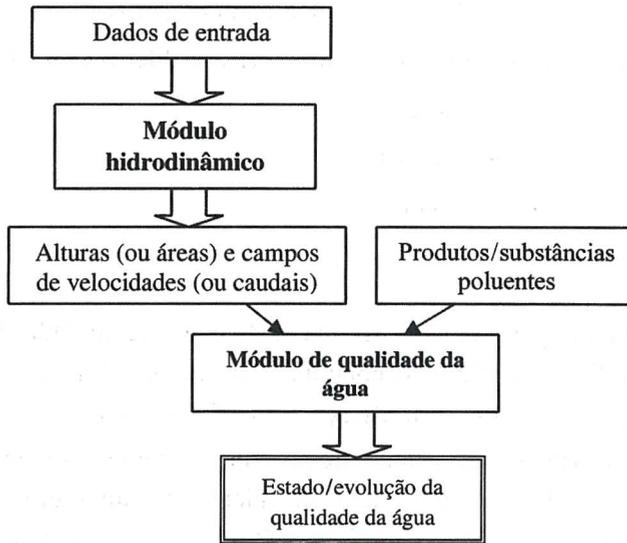


Figura 8.10 - Sequência das operações a desenvolver para a análise do estado de qualidade da água num curso de água natural.

A separação dos módulos hidrodinâmico e de qualidade da água permite reduzir os tempos de cálculo, uma vez que poderão ser analisadas múltiplas situações de referência, em termos de qualidade da água, utilizando os mesmos resultados hidrodinâmicos. O modelo hidrodinâmico ISIS FLOW utiliza equações do tipo Saint-Venant para o cálculo de caudais, alturas e velocidades de escoamentos com superfície livre; são as seguintes:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l \quad (8.50)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{g|Q|Q}{AK^2 R_h^{4/3}} + q_l \frac{Q}{A} \cos \alpha = 0$$

em que:

$Q$  = caudal ( $m^3 s^{-1}$ )

$A$  = área da secção transversal ( $m^2$ )

$q_l$  = caudal lateral por unidade de largura ( $m^2 s^{-1}$ )

$\beta$  = coeficiente de correcção da quantidade de movimento

$g$  = aceleração da gravidade ( $ms^{-2}$ )

$H$  = elevação da superfície livre acima de um nível de referência ( $m$ )

$\alpha$  = ângulo de entrada do escoamento lateral ( $rad$ )

$K$  = coeficiente da fórmula de Manning-Strickler ( $m^{1/3} s^{-1}$ )

$R_h = A/P$  = raio hidráulico ( $m$ )

$P$  = perímetro molhado ( $m$ )

$x$  = distância longitudinal ( $m$ )

$t$  = tempo ( $s$ )

Este modelo permite simular uma vasta gama de unidades hidráulicas, incorporando diferentes tipos de condutas, estruturas hidráulicas, albufeiras, descarregadores, comportas, ramificações, confluências, etc.

Pode ser utilizado no cálculo de regimes permanentes e em condições de regime variável. Para dar início ao cálculo de um regime variável é necessário estimar 'condições iniciais' (alturas ou áreas e velocidades ou caudais) em todos os nós da malha de cálculo. Estas condições são frequentemente obtidas considerando as condições de regime permanente no instante inicial.

O programa ISIS usa um método de diferenças finitas implícito de 4 pontos e um procedimento iterativo para a resolução do sistema de equações não-lineares (8.50).

328

Para cada problema é criada uma base de dados com a configuração da rede, ou sistema de canais, com as condições de fronteiras na entrada e na saída do domínio e com os dados batimétricos, incluindo as secções transversais, as dimensões, etc.

A precisão da solução numérica das equações de Saint-Venant é fortemente dependente da resolução espacial. Em geral, elevados números de Froude e condições de água pouco profunda requerem resoluções espaciais mais apertadas.

Os sistemas de canais com superfície livre são modelados considerando os parâmetros dos canais e calculando os níveis ou áreas e caudais em conjuntos discretos de secções transversais situadas a distâncias não necessariamente uniformes  $\Delta x$ , sendo a solução armazenada após cada conjunto de incrementos temporais ( $n\Delta t$ ) pré-definidos. As secções transversais irregulares são introduzidas por pares de valores ( $y_j, z_j$ ) relativamente a uma das margens.

Para o cálculo das concentrações, o módulo de qualidade da água utiliza a seguinte equação-tipo de advecção-difusão-reacção:

$$\frac{\partial(AC)}{\partial t} + \frac{\partial(UAC)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( AD_{ix} \frac{\partial C}{\partial x} \right) = S \quad (8.51)$$

Esta equação é resolvida utilizando o seguinte esquema de diferenças finitas:

$$\frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\Delta t} + \frac{U\varphi_{i+1/2}^n - U\varphi_{i-1/2}^n}{\Delta x} - \left[ \frac{(A_{i+1}^n + A_i^n)(C_{i+1}^n - C_i^n) - (A_i^n + A_{i-1}^n)(C_i^n - C_{i-1}^n)}{2(\Delta x)^2} \right] D_{ix} = S \quad (8.52)$$

em que  $\varphi = AC$  ( $kgm^{-1}$ ) é uma variável de transporte escalar e  $S$  ( $kgm^{-1}s^{-1}$ ) tanto pode representar uma fonte ou sumidouro, como um decaimento, um crescimento, ou ainda erosão, deposição, etc.

Para a resolução do termo de advecção [segundo termo da equação (8.51)], o qual exige o conhecimento do valor da concentração em pontos intermédios da malha de cálculo, o modelo computacional ISIS utiliza várias hipóteses, em alternativa: (i) o esquema explícito de SMART, (ii) o algoritmo QUICK e (iii) um esquema de primeira ordem *upwind*, sendo recomendada a utilização do esquema de SMART.

O problema consiste em estimar um valor da concentração, de tal modo que:

- os valores da concentração se situem no interior do intervalo possível;
- a estimativa seja tão aproximada quanto possível; e,
- o algoritmo seja computacionalmente eficiente.

O algoritmo SMART combina as melhores qualidades dos dois esquemas anteriores (QUICK e *upwind*), preservando as três condições referidas e mantendo uma elevada precisão, pelo que apenas nos deteremos sobre esta metodologia.

Sejam em cada instante  $t$  os valores de  $\varphi$  conhecidos em três pontos da malha de cálculo:  $\varphi_{i-2}$ ,  $\varphi_{i-1}$  e  $\varphi_i$ . Obtém-se o seguinte valor normalizado para  $\tilde{\varphi}_{i-1}$ :

$$\tilde{\varphi}_{i-1} = \frac{\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}}{\varphi_i - \varphi_{i-2}}$$

Consoante o valor de  $\tilde{\varphi}_{i-1}$ , determina-se  $\tilde{\varphi}_{i-1/2}$  através do seguinte esquema (SMART):

$$\tilde{\varphi}_{i-1/2} = \begin{cases} \tilde{\varphi}_{i-1} & \text{se } \tilde{\varphi}_{i-1} \leq 0 \text{ ou } \tilde{\varphi}_{i-1} \geq 1.0 \\ 3\tilde{\varphi}_{i-1} & \text{se } 0 < \tilde{\varphi}_{i-1} < 1/6 \\ 0.375 + 0.75\tilde{\varphi}_{i-1} & \text{se } 1/6 \leq \tilde{\varphi}_{i-1} \leq 5/6 \\ 1.0 & \text{se } 5/6 < \tilde{\varphi}_{i-1} < 1.0 \end{cases}$$

O valor não normalizado de  $\varphi_{i-1/2}$  é finalmente obtido através de:

$$\varphi_{i-1/2} = \tilde{\varphi}_{i-1/2}(\varphi_i - \varphi_{i-2}) + \varphi_{i-2}$$

O módulo de qualidade da água do programa ISIS está, ele próprio, escrito de forma modular, o que não obriga ao estudo de todos os processos em simultâneo. Todavia, num rio e/ou num ambiente estuarino algumas destas variáveis e os processos interagem. Além disso, não é possível ‘correr’ alguns submodelos sem incluir outros. Por exemplo, o crescimento de fitoplâncton interage com o oxigénio dissolvido.

Sumarizam-se na Figura 8.11 os diferentes módulos e as correspondentes inter-dependências, tal como são simulados no programa ISIS.

Esta figura mostra que, por exemplo, para modelar *algas bentónicas* é igualmente necessário simular o *fitoplâncton*, a *radiação solar*, o *oxigénio-sedimento*, os *sedimentos em suspensão*, o *oxigénio dissolvido* e a *temperatura*. Para modelar o *pH* é igualmente necessário simular o *oxigénio dissolvido* e a *temperatura*. Já a modelação da *salinidade* não obriga à simulação de nenhum outro processo.

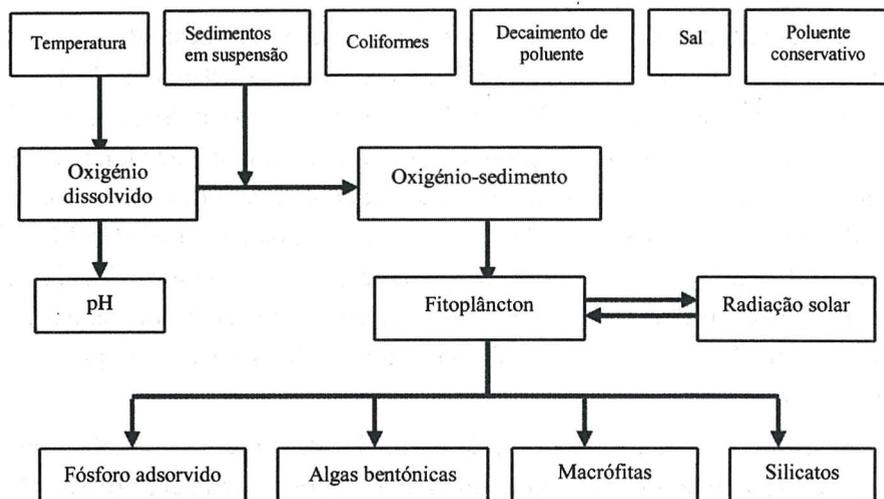


Figure 8.11 - Dependências entre variáveis e processos considerados no modelo ISIS.

Os programas ISIS FLOW e ISIS QUALITY foram aplicados na simulação da qualidade da água em dois grandes trechos do rio Lima: o primeiro compreendido entre a barragem do Touvedo e a vila de Ponte da Barca e o segundo trecho entre a vila de Ponte da Barca e Viana do Castelo.

Apresentam-se na Figura 8.12 a rede de drenagem da bacia hidrográfica do rio Lima e as redes hidrométrica e de qualidade da água, compostas por quatro estações no curso de água principal e uma no rio Vez.

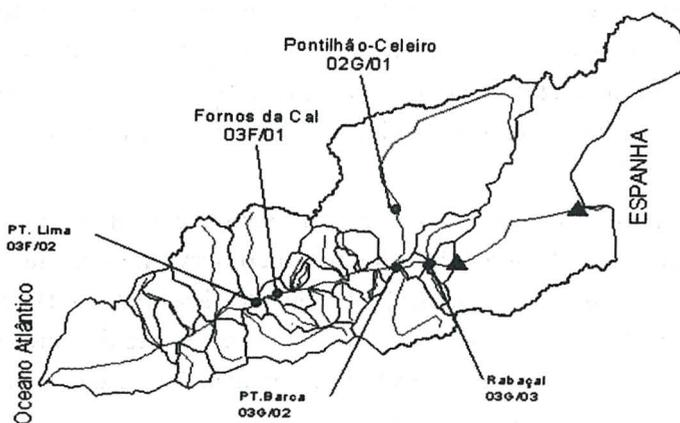


Figura 8.12 - Bacia hidrográfica do rio Lima: rede de drenagem e estações hidrométricas e de qualidade da água da rede nacional integradas nesta bacia (Lopes *et al.*, 2002).

A bacia hidrográfica do rio Lima localiza-se no Noroeste de Portugal Continental; ocupa uma área total de  $2525 \text{ km}^2$ , correspondendo  $1170 \text{ km}^2$  a território português, cerca de 47% da área total da bacia hidrográfica, e  $1355 \text{ km}^2$  a território espanhol; apresenta uma forma rectangular alongada de orientação NEE - SWW, com uma largura média da ordem dos  $19 \text{ km}$  e uma altitude média aproximada de  $450 \text{ m}$ . O curso de água principal (rio Lima) nasce em Espanha, na serra de S. Mamede, a uma altitude aproximada de  $950 \text{ m}$ , e entra em Portugal próximo do Lindoso, percorrendo uma extensão de  $67 \text{ km}$  até Viana do Castelo. O perfil longitudinal deste rio apresenta sectores distintos:

- sector intermédio com declive médio da ordem de 1.5%, que corresponde ao percurso de montanha entre a barragem do Alto do Lindoso e um pouco a montante de Ponte da Barca, onde o vale é muito encaixado e com vertentes íngremes; e,
- sector de jusante, com cerca de  $35 \text{ km}$  de extensão, entre Ponte da Barca e Viana do Castelo, com declive médio da ordem de 0.1%, onde o vale se apresenta largo e de vertentes suaves, particularmente a jusante de Ponte de Lima.

Os principais afluentes que constituem a rede hidrográfica desta bacia, em Portugal, são os rios Vez, Labruja e Estorãos, na margem direita, e os rios Vade e Trovela na margem esquerda.

O aproveitamento hidroeléctrico do Touvedo situa-se no rio Lima, a cerca de  $47 \text{ km}$  da sua foz. Para efeitos de simulação, apresenta-se na Figura 8.13 a discretização efectuada do troço entre Touvedo e Ponte da Barca, em conformidade com as unidades hidráulicas internas e externas da estrutura computacional ISIS.

332 Efectuou-se uma primeira simulação para o caudal ecológico de  $4.0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  (caudal considerado suficiente para a conservação e manutenção dos ecossistemas aquáticos existentes). A cota de descarga na Barragem do Touvedo é de  $23.4 \text{ m}$ , situando-se o leito do rio em Ponte da Barca à cota de  $17.3 \text{ m}$ , o que representa um desnível de aproximadamente  $6.0 \text{ m}$  em  $6200 \text{ m}$ .

Representa-se na Figura 8.14 o perfil longitudinal deste troço, com as alturas do escoamento simuladas para um caudal de  $4.0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  descarregado na barragem do Touvedo, acrescido de um caudal de  $0.5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  do afluente Tora a partir dos  $3200 \text{ m}$ .

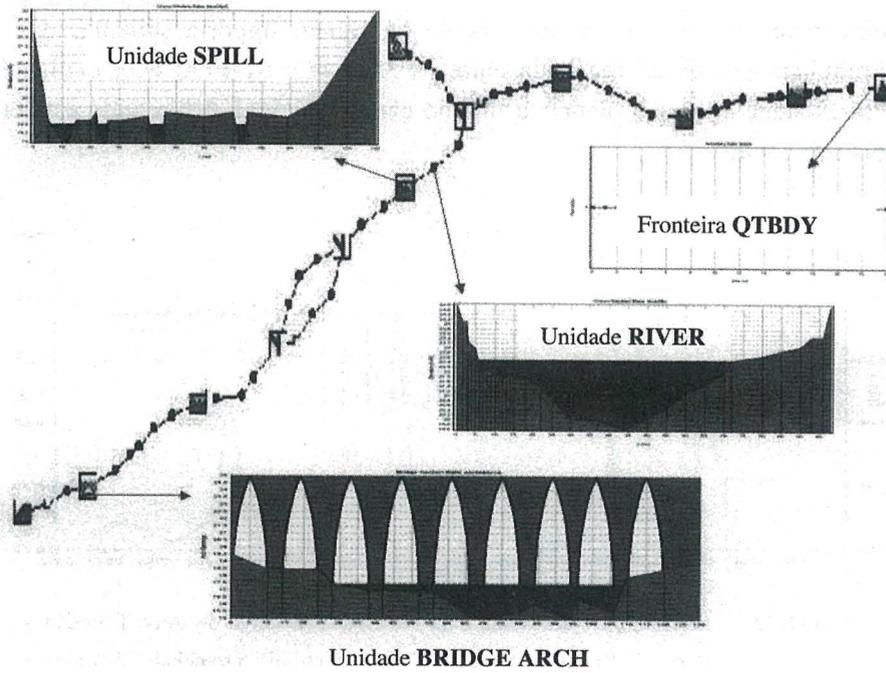


Figura 8.13 - Esquema da discretização efectuada para o troço do rio Lima entre Touvedo e Ponte da Barca, em conformidade com as unidades hidráulicas internas e externas do programa ISIS (Lopes *et al.*, 2002).

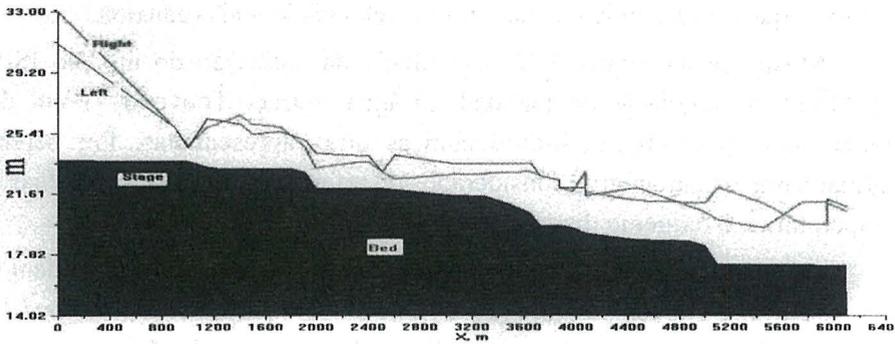


Figura 8.14 - Perfil longitudinal do troço Touvedo - Ponte da Barca. Alturas do escoamento para um caudal de  $4.0 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  a partir do Touvedo, acrescido de  $0.5 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  proveniente do afluente Tora, a cerca de  $3200 \text{ m}$  da foz (Lopes *et al.*, 2002).

Na Figura 8.15 estão representadas as distribuições do caudal e da velocidade no troço Touvedo – Ponte da Barca. Importa salientar que a diminuição do caudal registada entre os 3800 m e os 4000 m, é explicada pela existência de uma pequena ilha no canal principal, bifurcando este em dois sub-canais.

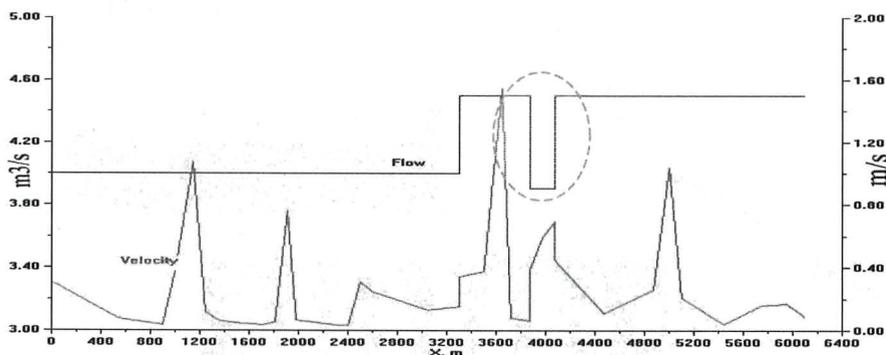


Figura 8.15 - Distribuições do caudal e da velocidade ao longo do troço Touvedo – Ponte da Barca (Lopes et al., 2002). O círculo a tracejado identifica a existência de uma ilha que bifurca o canal entre os 3800 m e os 4000 m.

Importa ainda registar um comportamento muito irregular da velocidade ao longo deste troço, explicado pela existência de muitos rápidos, que se traduzem em picos elevados da velocidade (correspondendo no sistema natural a quedas naturais de pesqueiras), e a fundões ou alargamentos a que correspondem patamares de velocidade mais reduzida.

Mostra-se na Figura 8.16 o resultado da aplicação do modelo ISIS QUALITY na simulação da qualidade da água no troço Touvedo – Ponte da Barca para as condições hidrodinâmicas atrás apresentadas. Por serem normalmente os parâmetros considerados de referência, simulam-se apenas a temperatura e o oxigénio dissolvido.

As condições iniciais da massa de água do rio Lima correspondem a valores correntes de temperatura ( $20^{\circ}\text{C}$ ) e de oxigénio dissolvido ( $9.0\text{ mg l}^{-1}$ ) ao longo de toda a secção longitudinal. A descarga de  $4.0\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$  na barragem de Touvedo é efectuada com as seguintes características: temperatura de  $24.3^{\circ}\text{C}$  e oxigénio dissolvido de  $7.0\text{ mg l}^{-1}$ , valores observados na albufeira do Touvedo, à cota de descarga (cerca de 0.5 m abaixo do nível da superfície livre).

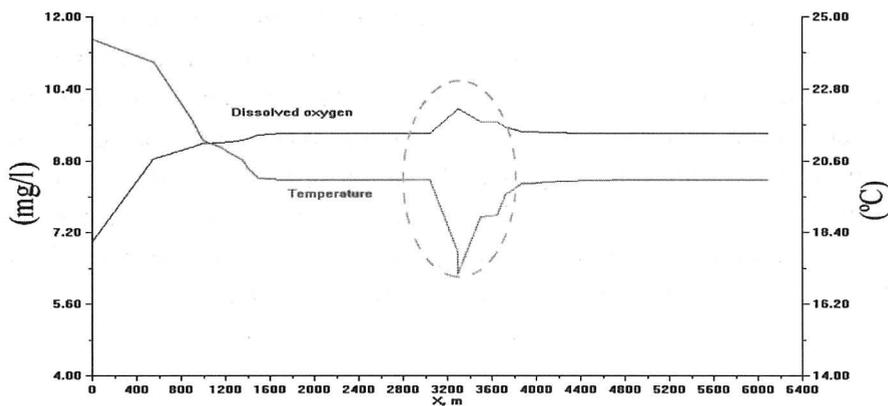


Figura 8.16 - Variação espacial do oxigênio dissolvido e da temperatura da água para uma descarga de  $4.0 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ , com uma temperatura de  $24.3^\circ\text{C}$  e um teor em oxigênio dissolvido de  $7.0 \text{ mg l}^{-1}$ , no Troço Touvedo - Ponte da Barca (Lopes *et al.*, 2002). O círculo a tracejado identifica a confluência com o rio Tora, a cerca de  $3200 \text{ m}$ .

Pela análise da Figura 8.16 conclui-se que aproximadamente aos  $1000 \text{ m}$  da fonte o fluido já adquiriu cerca de 90 a 95% da saturação em oxigênio dissolvido por rearejamento com a atmosfera, mantendo-se praticamente constante em toda a restante extensão do troço.

As variações bruscas na temperatura e no oxigênio dissolvido verificadas aos  $3200 \text{ m}$  são explicadas pela mistura das águas do rio Tora com as águas do rio Lima. Com efeito, o rio Tora contribui com um caudal de  $0.5 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  à temperatura de  $15^\circ\text{C}$  e um teor em oxigênio dissolvido de  $10.0 \text{ mg l}^{-1}$ . Da mistura das duas massas de água resulta uma diminuição da temperatura de  $20^\circ\text{C}$  do rio Lima para um mínimo de cerca de  $16^\circ\text{C}$ ; por seu turno, o oxigênio dissolvido teve um comportamento inverso, subiu para  $9.8 \text{ mg l}^{-1}$ . Como se verifica, este efeito é pontual, limitado à confluência do rio Tora com o rio Lima, numa extensão não superior a cerca de  $800 \text{ m}$ .

Alterando a situação de descarga no Touvedo, mostram-se na Figura 8.17 as distribuições espaciais da temperatura e do oxigênio dissolvido correspondentes a uma descarga de  $4.0 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  nesta barragem, seis horas após o início da descarga, com as seguintes características: oxigênio dissolvido  $5.0 \text{ mg l}^{-1}$  e temperatura  $14.5^\circ\text{C}$ , correspondentes a um ponto de descarga situado cerca de  $20 \text{ m}$  abaixo da superfície livre da água na albufeira.

Verifica-se uma recuperação da temperatura, para valores da massa de água no rio, e do oxigénio dissolvido, para valores na ordem dos 90 a 95% de saturação, a apenas cerca de 1500 m da barragem. Este aspecto é extremamente importante, pois comparando as duas simulações efectuadas demonstra-se claramente que não basta quantificar o valor do caudal ecológico, é igualmente necessário associar a este valor as características dos constituintes de qualidade da água para assim satisfazer as necessidades de conservação e manutenção dos ecossistemas existentes.

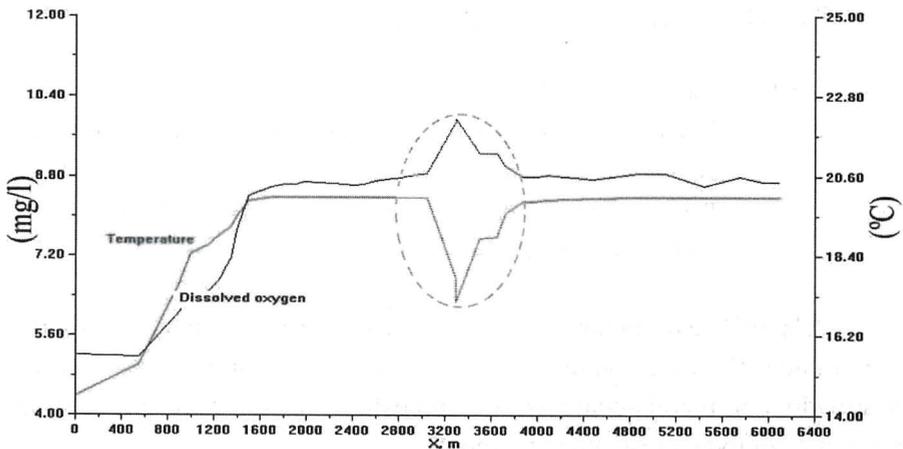


Figura 8.17 - Variação espacial do oxigénio dissolvido e da temperatura da água para uma descarga de  $4.0 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ , com uma temperatura de  $14.5^\circ\text{C}$  e um teor em oxigénio dissolvido de  $5.0 \text{ mg l}^{-1}$ , no Troço Touvedo - Ponte da Barca (Lopes *et al.*, 2002).

Muitas outras análises e conclusões foram observadas em estudos efectuados sobre esta matéria, considerando descargas na barragem do Touvedo com diferentes distribuições e características. Para um conhecimento mais profundo dos resultados obtidos, consulte-se Lopes (2001) e Lopes *et al.* (2003).

O programa QUAL2E é um modelo sobejamente conhecido e largamente utilizado em simulações de qualidade da água em rios, sendo capaz de simular até 15 constituintes de qualidade da água. Entre outras capacidades, este modelo permite simular fontes de descargas múltiplas, tributários e caudais distribuídos (entradas e saídas).

Os constituintes simulados são:

- Oxigénio dissolvido ( $O_2$ );
- Carência bioquímica de oxigénio ( $CBO$ );
- Temperatura;
- Algas como clorofila  $a$ ;
- Nitrogénio orgânico;
- Amónia;
- Nitrito;
- Nitrato;
- Fósforo orgânico;
- Fósforo dissolvido;
- Coliformes;
- Constituinte não-conservativo;
- Constituinte conservativo I;
- Constituinte conservativo II; e,
- Constituinte conservativo III.

Estes constituintes, bem como os processos simulados no modelo de qualidade da água QUAL2E, versão de Brown & Barnwell (1987), com interface para visualização de resultados desenvolvida por Lahlou *et al.* (1995), estão representados na Figura 8.18.

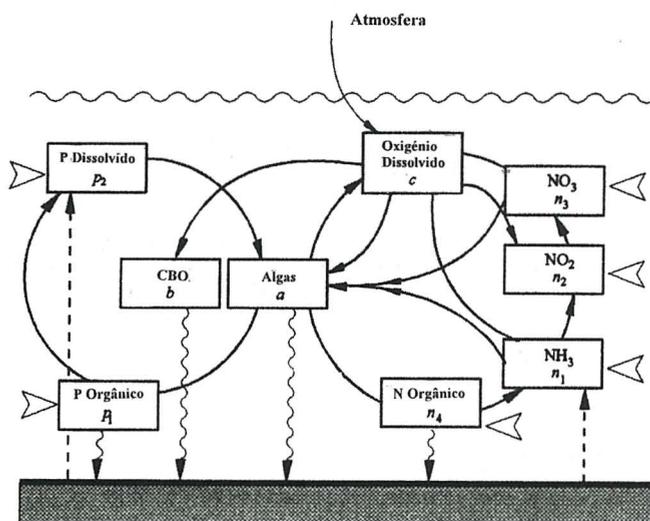


Figura 8.18 - Constituintes e processos simulados no modelo de qualidade da água QUAL2E (adaptada de Singh & Hager, 1996).

A evolução dos diversos constituintes de qualidade da água ao longo do sistema é obtida através do seguinte modelo (8.53):

$$\underbrace{V \frac{\partial C}{\partial t}}_{\text{Acumulação}} = \underbrace{\frac{\partial \left( A_s D_{lx} \frac{\partial C}{\partial x} \right)}{\partial x}}_{\text{Dispersão}} dx - \underbrace{\frac{\partial (A_s U C)}{\partial x}}_{\text{Advecção}} dx + \underbrace{V \frac{dC}{dt}}_{\text{Cinética}} + \underbrace{\sum}_{\text{Fontes / Sumidouros externos}} \quad (8.53)$$

Transporte

em que  $V$  é o volume;  $C$  é a concentração do constituinte;  $U$  é a velocidade média do escoamento;  $D_{lx}$  é o coeficiente de dispersão longitudinal, e  $A_s$  é a área da secção transversal.

A equação (8.53) é resolvida pelo esquema de diferenças finitas (8.54), com o termo do 2º membro  $dC/dt = rC + p$ , em que  $rC$  representa reacções de 1ª ordem e  $p$  traduz as fontes ou sumidouros internos:

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = \frac{(A_s D_{lx})_{i,i+1} (C_{i+1}^{n+1} - C_i^{n+1})}{V_i \Delta x_i} + \frac{(A_s D_{lx})_{i-1,i} (C_{i-1}^{n+1} - C_i^{n+1})}{V_i \Delta x_i} + \frac{Q_{i-1} C_{i-1}^{n+1} - Q_i C_i^{n+1}}{V_i} + r_i C_i^{n+1} + p_i + \frac{S_i}{V_i} \quad (8.54)$$

Juntando termos, a equação (8.54) poderá escrever-se na seguinte forma:

$$a_i C_{i-1}^{n+1} + e_i C_i^{n+1} + o_i C_{i+1}^{n+1} = z_i$$

com,

$$a_i = - \left[ (A_s D_{lx})_{i-1} \frac{\Delta t}{V_i \Delta x_i} + \frac{Q_{i-1} \Delta t}{V_i} \right]$$

$$e_i = 1 + \left[ (A_s D_{lx})_{i-1} + (A_s D_{lx})_i \right] \frac{\Delta t}{V_i \Delta x_i} + \frac{Q_i \Delta t}{V_i} - r_i \Delta t$$

$$o_i = - \left[ (A_s D_{lx})_i \frac{\Delta t}{V_i \Delta x_i} \right]$$

$$z_i = C_i^n + \frac{S_i \Delta t}{V_i} + p_i \Delta t$$

O sistema de equações (8.54) é tridiagonal, pelo que pode ser resolvido de forma muito eficiente, obtendo-se valores para a concentração em todo o domínio após cada instante de cálculo  $\Delta t$ .

### 8.6.3 Modelo 1DV para albufeiras e lagos profundos

O modelo *WQRRS – Water Quality for River-Reservoir Systems* (HEC, 1978) realiza o balanço global hídrico tendo em conta as variações da cota da superfície livre, em função do volume de água armazenado e das contribuições das aflúncias, das descargas, da precipitação, da evaporação e da infiltração. A formulação matemática do modelo baseia-se no facto de a dinâmica de cada parâmetro se poder expressar através dos princípios de conservação da massa e da energia. A equação diferencial geral que permite simular a temperatura da massa de água e a concentração dos diferentes constituintes escreve-se:

$$V \frac{\partial C}{\partial t} = \Delta z Q_z \frac{\partial C}{\partial z} + \Delta z A_z D_c \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + Q_i C_i - Q_o C \pm VS \quad (8.55)$$

em que  $C$  é a temperatura ou concentração de qualquer constituinte, em unidades apropriadas;  $V$  é o volume de cada elemento do sistema, em  $m^3$ ;  $t$  é o tempo, em  $s$ ;  $z$  é a coordenada espacial vertical, em  $m$ ;  $Q_z$  é a advecção vertical, em  $m^3 s^{-1}$ ;  $A_z$  representa a área superficial de cada elemento do sistema, normal à direcção do fluxo, em  $m^2$ ;  $D_c$  é o coeficiente de difusão efectiva, em  $m^2 s^{-1}$ ;  $Q_i$  representa o caudal lateral entrado em cada elemento, em  $m^3 s^{-1}$ ;  $C_i$  representa o fluxo de energia térmica ou de concentração de qualquer constituinte, em unidades apropriadas;  $Q_o$  é o caudal lateral entrado em cada elemento, em  $m^3 s^{-1}$ , e  $S$  representa todas as fontes e sumidouros, em unidades apropriadas.

A equação (8.55) é resolvida numericamente, utilizando uma técnica que consiste na resolução matricial de um conjunto de equações de diferenças finitas, cada uma das quais aplicada a um elemento do sistema.

A aplicação deste modelo à barragem da Aguieira permitiu analisar os efeitos sobre os valores dos parâmetros de qualidade da água temperatura e oxigénio dissolvido, decorrentes do bombeamento de água a partir do contra-embalse da Raiva (Capítulo 4 – Figura 4.20), considerando três diferentes cenários de simulação:

- *cenário 1* – correspondente à simulação da situação real do ano de 1998, no mês de Julho, em que se bombeou um caudal médio de  $6 m^3 s^{-1}$  para a Aguieira;
- *cenário 2* – correspondente à situação hipotética de não se verificar qualquer bombeamento de água naquele período; e,

- *cenário 3* – correspondente à situação de naquele mesmo período se ter bombeado para a Aguieira um caudal médio de  $35 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ .

Os resultados apresentados na Figura 8.19 (Coelho *et al.*, 1999) evidenciam diferenças com algum significado, comparando os cenários 1 e 2 com o cenário 3, reflectidas num ligeiro aumento da temperatura e, sobretudo, no aumento dos valores da concentração de oxigénio dissolvido entre os 5 m e os 35 m de profundidade.

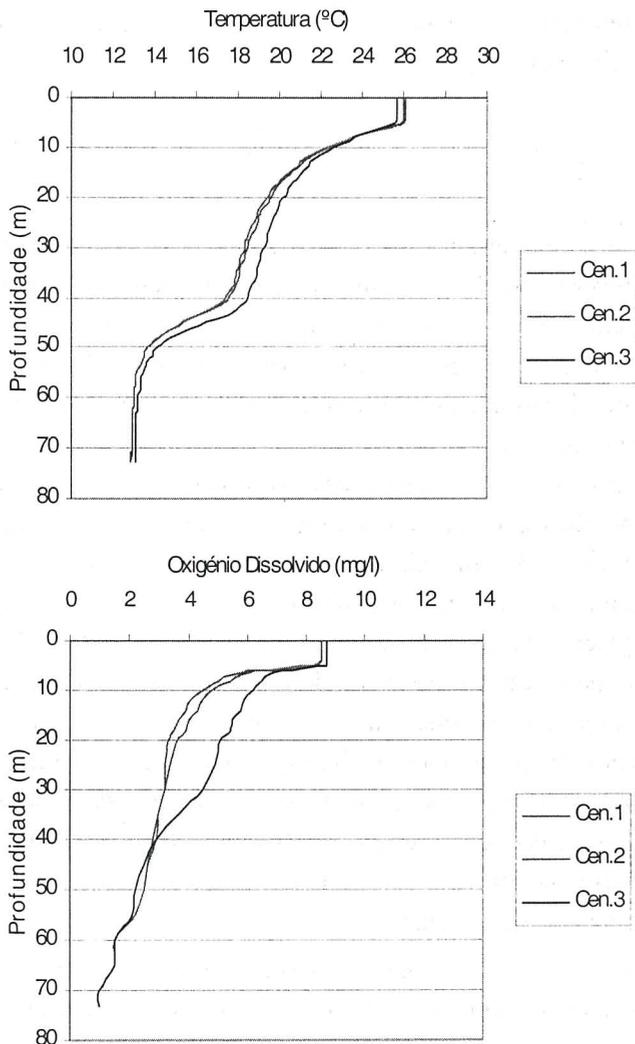


Figura 8.19 - Comparação de resultados do modelo para os cenários considerados (reprodução de Coelho *et al.*, 1999).

#### 8.6.4 Modelos 2DH “STERNA” e “RMA4-UMQ” para estuários pouco estratificados

O sistema STERNA tem vindo a ser desenvolvido desde 1985 por docentes e investigadores do IST (UTL) e do LNEC, datando daquela altura a primeira versão do modelo hidrodinâmico (Neves, 1985); foi prosseguido por Portela & Neves em 1993 e teve a sua primeira versão, incluindo o modelo de transporte e os módulos de qualidade da água que se descrevem em seguida, com o trabalho de Portela (1998). Trata-se de uma estrutura bidimensional integrada na vertical (2DH) que utiliza um método de diferenças finitas para a resolução das equações. A estrutura está organizada de forma sequencial, com o modelo hidrodinâmico na base do sistema, o modelo de transporte para o cálculo dos termos de advecção e difusão necessários à simulação das concentrações de constituintes conservativos a um nível intermédio e os módulos de qualidade da água no topo do sistema (Figura 8.20).

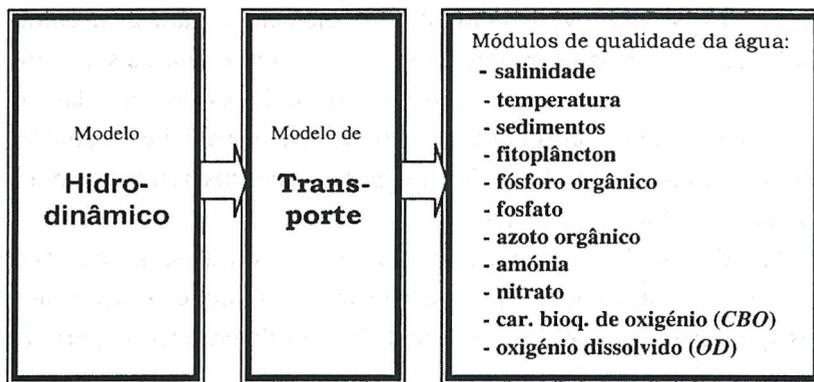


Figura 8.20 - Estrutura computacional STERNA (Neves, 1985; Portela & Neves, 1993; Portela, 1998).

Estes módulos calculam os termos adicionais de fonte/sumidouro, específicos de cada constituinte, necessários à simulação das concentrações de constituintes não-conservativos.

O modelo de transporte e os módulos de qualidade da água do sistema STERNA permitem simular os seguintes parâmetros físicos, químicos e biológicos:

- Salinidade;
- Temperatura;

- Sedimentos em suspensão;
- Clorofila *a*;
- Fósforo orgânico;
- Fosfato ( $PO_4^{3-}$ );
- Azoto orgânico;
- Amónia ( $NH_4^+$ );
- Nitrato ( $NO_3^-$ );
- Carência bioquímica de oxigénio (*CBO*); e,
- Oxigénio dissolvido ( $O_2 \rightarrow OD$ ).

A estrutura computacional RMA4-UMQ constitui uma versão do programa RMA4 que, para além de um modelo hidrodinâmico, resolve complementarmente equações de transporte de escalares (temperatura, salinidade, poluentes, etc.); por conseguinte, de substâncias conservativas.

O modelo RMA4 utiliza as soluções hidrodinâmicas do programa RMA2 para a resolução das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos integradas na vertical, baseado num método de elementos finitos (WES-HL, 1996) totalmente implícito. Os elementos para a discretização espacial poderão ser triangulares e/ou quadrangulares de seis e oito nós, respectivamente. As funções de forma são quadráticas no caso das velocidades e lineares para a profundidade. A integração espacial é efectuada pelo método de Gauss e as derivadas temporais são discretizadas por uma aproximação de diferenças finitas.

O modelo RMA2 permite simular regiões intertidais, ou, de um modo geral, zonas ou situações cuja hidrodinâmica implique a ocorrência de regiões que apenas se encontram inundadas em determinados períodos de tempo (zonas de *cobre-descobre*).

Apresenta-se na Figura 8.21 uma aplicação do modelo RMA2 na zona de jusante do estuário do rio Cávado (Pinho *et al.*, 2001).

O programa PROCESSOS foi desenvolvido por Pinho (2001) e integrado no modelo RMA4, dando origem à estrutura computacional RMA4-UMQ, para a modelação de processos biogeoquímicos; por conseguinte, de substâncias não-conservativas. O programa PROCESSOS utiliza um método de Runge-Kutta de 4ª ordem para integrar as relações funcionais utilizadas em modelos de cadeia alimentar, nomeadamente: algas, zooplâncton herbívoro e carnívoro, carbono orgânico particulado e dissolvido, fósforo solúvel, amónia e nitratos. A formulação matemática da estrutura computacional RMA4-UMQ escreve-se:

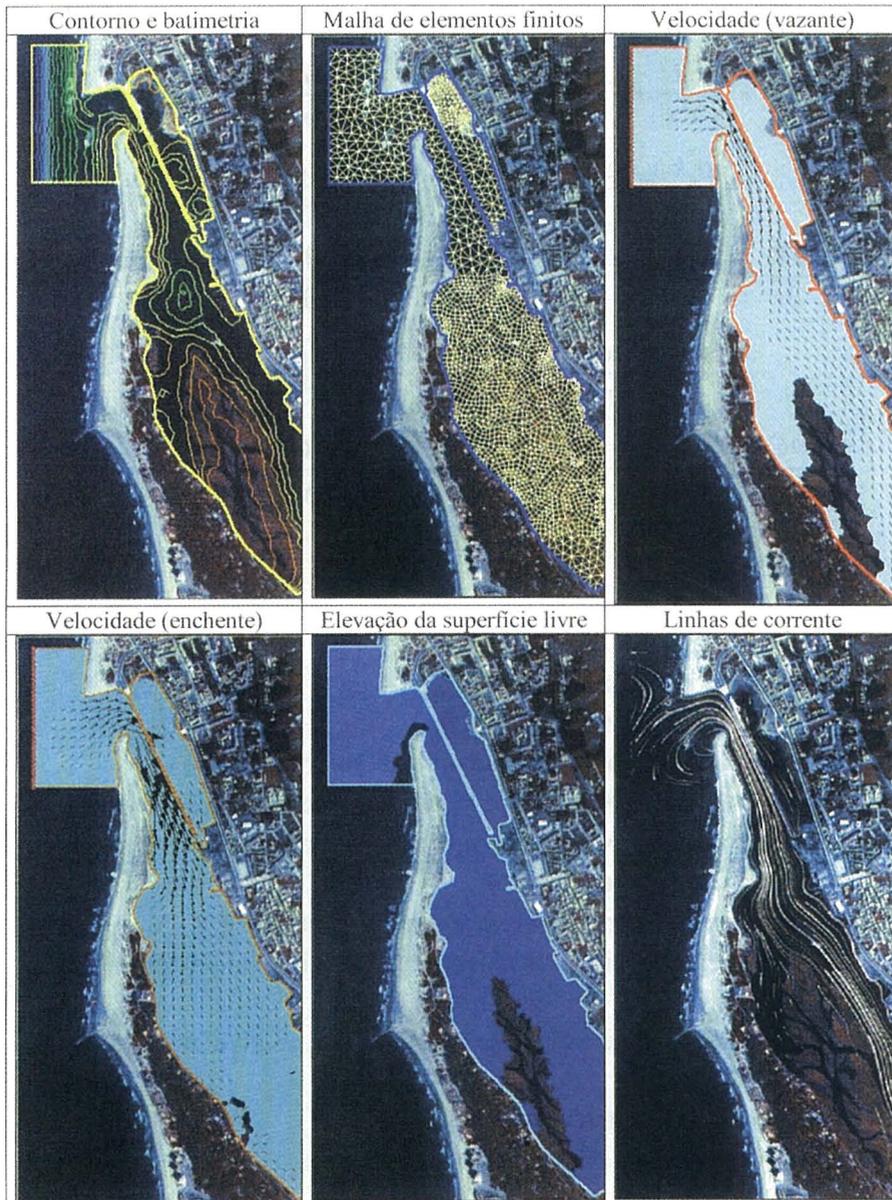


Figura 8.21 - Modelo RMA2: definição do contorno, batimetria, malha de elementos finitos e campos de velocidades, superfície livre e linhas de corrente na zona de jusante do estuário do Rio Cávado (Pinho *et al.*, 2001).

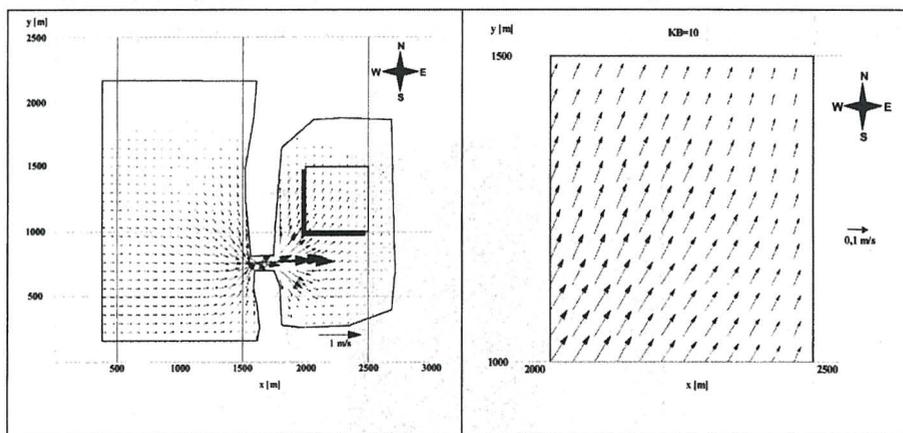
$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [(h+\eta)U]}{\partial x} + \frac{\partial [(h+\eta)V]}{\partial y} = 0 \\
& \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = fV - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{h+\eta}{2} + \\
& \quad + \frac{\rho_a k w_v^2 \cos \varphi}{h+\eta} - \frac{gU\sqrt{U^2+V^2}}{(h+\eta)C^2} + \frac{\varepsilon}{\rho} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \\
& \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -fU - g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{h+\eta}{2} + \\
& \quad + \frac{\rho_a k w_v^2 \sin \varphi}{h+\eta} - \frac{gV\sqrt{U^2+V^2}}{(h+\eta)C^2} + \frac{\varepsilon}{\rho} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\
& \frac{\partial C_m}{\partial t} + U \frac{\partial C_m}{\partial x} + V \frac{\partial C_m}{\partial y} - A_h \left( \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_m}{\partial y^2} \right) = K_d C_m - S_r
\end{aligned} \tag{8.56}$$

em que:

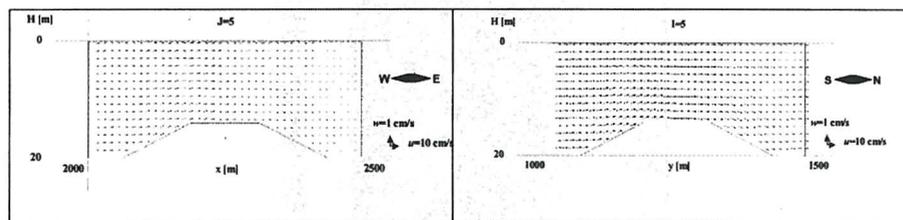
- $C$  = coeficiente de Chézy ( $m^{1/2}s^{-1}$ );  
 $f$  = parâmetro de Coriolis ( $s^{-1}$ );  
 $g$  = aceleração da gravidade ( $ms^{-2}$ );  
 $h$  = profundidade em relação ao nível de referência ( $m$ );  
 $U$  = componente da velocidade média segundo a direção  $x$  ( $ms^{-1}$ );  
 $V$  = componente da velocidade média segundo a direção  $y$  ( $ms^{-1}$ );  
 $w_v$  = velocidade do vento ( $ms^{-1}$ );  
 $x, y$  = coordenadas cartesianas no plano horizontal ( $m$ );  
 $\varepsilon$  = coeficiente médio vertical isotrópico de viscosidade turbulenta ( $m^2s^{-1}$ );  
 $\eta$  = elevação da superfície livre relativamente ao nível de referência ( $m$ );  
 $\varphi$  = direção do vento ( $rad$ );  
 $\rho$  = massa volúmica da água ( $kgm^{-3}$ );  
 $\rho_a$  = massa volúmica do ar ( $kgm^{-3}$ );  
 $C_m$  = concentração média de um constituinte bioquímico genérico ( $kgm^{-3}$ );  
 $A_h$  = difusividade turbulenta horizontal ( $m^2s^{-1}$ );  
 $K_d$  = taxa de decaimento de um constituinte bioquímico ( $dia^{-1}$ );  
 $S_r$  = fonte (ou sumidouro) de um constituinte ( $kgm^{-3}s^{-1}$ ).

### 8.6.5 Modelo *quase*-3D “POM-UMQ” para estuários estratificados e zona costeira

Para aplicações em estuários com estratificação importante e, de um modo geral, em regiões costeiras, foi desenvolvida a estrutura computacional *quase*-3D POM-UMQ. Esta estrutura integra os modelos hidrodinâmico e de simulação de variáveis conservativas (temperatura, salinidade, etc.) do modelo original POM (*Princeton Ocean Model*), cuja estrutura geral pode ser encontrada em Mellor (1998). Apresenta-se na Figura 8.22 uma aplicação deste modelo a duas bacias ligadas por um canal, contendo a bacia da direita uma elevação no fundo. Esta aplicação, embora qualitativa, ilustra bem as potencialidades do modelo POM para a caracterização tridimensional de sub-regiões do domínio.



a) Campos de velocidades máximas instantâneas em planos horizontais.



b) Campos de velocidades máximas instantâneas em planos verticais.

Figura 8.22 - Campos de velocidades máximas instantâneas obtidos por aplicação do modelo *quase*-3D POM.

A introdução do programa PROCESSOS, no modelo original POM, e as correspondentes interfaces e programas de pré- e de pós-processamento deu origem à estrutura POM-UMQ.

Como exemplo de aplicação desta estrutura computacional, apresenta-se na Figura 8.23 a geometria de um domínio com  $5\,000 \times 10\,000\text{ m}$  e a correspondente batimetria, variável na direcção normal à costa, com profundidades desde os  $20,0\text{ m}$  aos  $13,0\text{ m}$ . Neste domínio, junto à costa, foi instalado um exutor submarino para a rejeição final de águas residuais produzidas por agregados populacionais litorais. Em Pinho (2001) e Pinho *et al.* (2001) foram simulados vários cenários, quer em termos de hidrodinâmica (corrente e maré), quer em termos do comprimento do exutor, apresentando-se na Figura 8.24 os resultados à profundidade de  $9\text{ m}$  correspondentes ao exutor com um comprimento de  $2\,000\text{ m}$ , seis horas após o início de uma descarga. O indicador escolhido para a caracterização do estado de qualidade da água foi a concentração em coliformes totais.

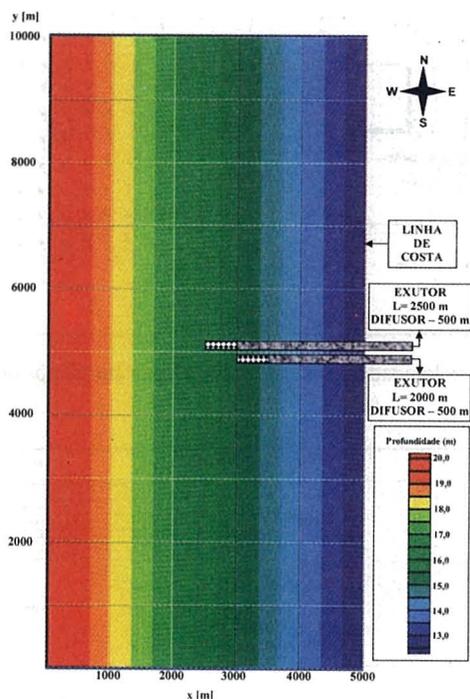


Figura 8.23 - Batimetria, geometria do domínio e implantação de um exutor submarino, para aplicação da estrutura computacional POM-UMQ (Pinho *et al.*, 2001).

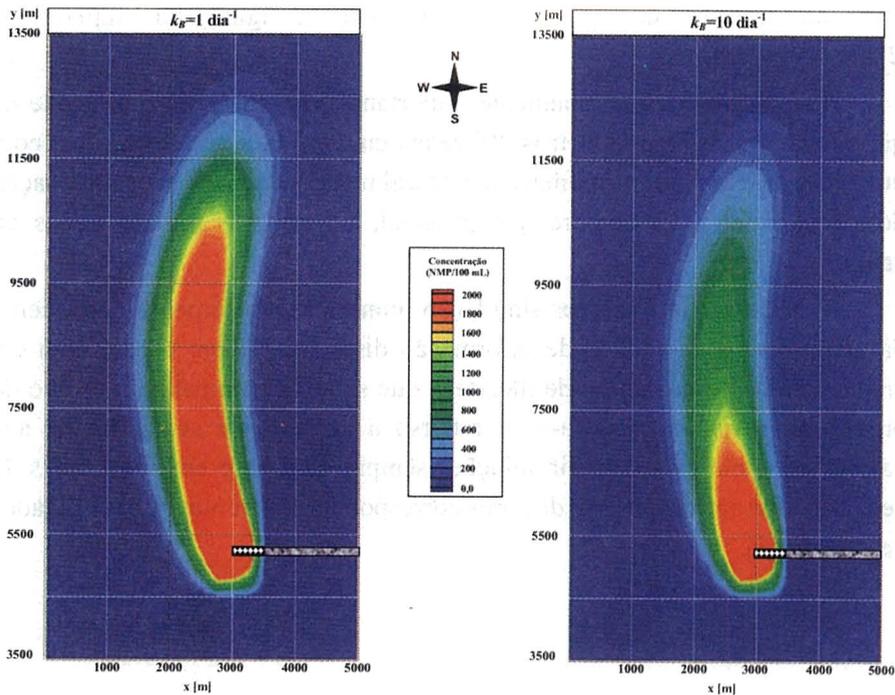


Figura 8.24 - Concentração de coliformes totais à profundidade de 9 m, seis horas após o início da descarga de um exutor submarino, quando no meio se verifica uma corrente longitudinal importante no sentido Sul-Norte. Coeficientes de decaimento:  $k_d = 1 \text{ dia}^{-1}$  (à esquerda) e  $k_d = 10 \text{ dia}^{-1}$  (à direita) (Pinho *et al.*, 2001).

Para o exemplo apresentado, as condições iniciais e de fronteira correspondem a uma corrente longitudinal, no sentido Sul-Norte, com uma velocidade de  $0.20 \text{ ms}^{-1}$ . A descarga foi simulada admitindo-se uma concentração de coliformes totais constante e igual a  $10\,000 \text{ NMP}/100 \text{ ml}$  junto ao difusor (após a diluição inicial), desprezando-se o caudal das águas residuais. Consideraram-se dois valores distintos para o coeficiente de decaimento,  $k_d \equiv k_B = 1$  e  $10 \text{ dia}^{-1}$ .

Embora os resultados apresentados devam ser interpretados apenas do ponto de vista qualitativo, dadas as hipóteses simplificativas consideradas, importa no entanto realçar a importante diferença de área afectada pela descarga do exutor quando o coeficiente de decaimento passa de  $10 \text{ dia}^{-1}$  para  $1 \text{ dia}^{-1}$ . Com efeito, esta área mais que duplica, considerando apenas a

área no interior da qual a concentração é igual ou superior a 2 000 *NMP/100 ml*.

Este aspecto é extremamente importante, revelando a necessidade de quantificar todos os parâmetros utilizados em qualquer simulação real com um elevado grau de aproximação. Naturalmente que para a quantificação destes parâmetros, e sempre que possível, dever-se-ão utilizar dados de campo.

O sucesso de qualquer simulação numérica é fortemente dependente da quantidade e qualidade de informação disponível sobre o problema em análise. Para limitar o grau de incerteza que sempre acompanha o estudo de problemas reais, recomenda-se o recurso a análises de sensibilidade aos valores adoptados e a sugerir soluções sempre com base em simulações de cenários alternativos, a que deverão corresponder diferentes probabilidades de ocorrência.

## BIBLIOGRAFIA

- Abbot, M.B. & Ionescu, F., 1967. On the numerical computation of nearly-horizontal flows, *J. Hydraulic Research*, Vol. 5, Nº 2, 97-117.
- Abecasis, F.M., 1961. *Soleiras descarregadoras: alguns problemas especiais*. LNEC, Lisboa (Memória, 175).
- Ackers, P. & White, W.R., 1973. Sediment transport - New approach and analysis. *J. Hydr. Division, ASCE*, Vol. 99, No. 11, 2041-2060.
- Ahmad, 1953. *Experiments on design and behaviour of spur-dikes*. Proc. 5<sup>th</sup> Congress IAHR, Minneapolis, Minnesota, 145-159.
- Amado Mendes, P.J., 1998. *Modelação dos efeitos dinâmicos sobre uma barragem resultantes da actuação de movimentos oscilatórios do tipo sísmico*. Relatório elaborado no âmbito da disciplina de Processos e Sistemas Fluviais do 3º Curso de Mestrado em Hidráulica e Recursos Hídricos da FCTUC.
- Amado Mendes, P.J., 2001. *Contribuição para o estudo da modelação das ondas de cheia provocadas pela ruptura de barragens: Aspectos hidrodinâmicos e morfodinâmicos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, especialização em Hidráulica e Recursos Hídricos, Universidade de Coimbra.
- Amado Mendes, P.J., Antunes do Carmo, J.S. & Seabra Santos, F.J., 1998. Modelação integrada das potenciais causas e consequências da ruptura de uma barragem. *Seminário sobre Barragens e Ambiente*, Porto, 7 - 9 de Maio.
- Amado Mendes, P.J., Seabra Santos, F.J. & Antunes do Carmo, J.S., 2001. Escoamentos unidimensionais com superfície livre: Análise comparativa de métodos numéricos com ênfase no tratamento dos termos fonte. *Recursos Hídricos*, Vol. 22, Nº 1, 5-24.
- Anderson, Jr. & John, D., 1995. *Computational Fluid Dynamics – The basics with applications*. McGraw-Hill International Editions.
- Antunes do Carmo, J.S., 1990. *Efeitos hidrodinâmicos resultantes de deslizamentos de encostas em albufeiras. Modelação a duas dimensões horizontais*. Dissertação de Mestrado em Hidráulica e Recursos Hídricos, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.

- Antunes do Carmo, J.S., 1995. *Contribuição para o estudo dos processos morfodinâmicos em regiões costeiras e estuarinas*. Tese de Doutoramento em Engenharia Civil, especialidade de Hidráulica, Universidade de Coimbra.
- Antunes do Carmo, J.S., 1996. As cheias: fenómenos naturais e causas de ocorrências excepcionais. Revista *Cadernos de Geografia*, Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra, 85-99.
- Antunes do Carmo, J.S., 1999 *Modelações física e numérica: Complementaridade ou redundância ?*, IV SILUSBA - Congresso dos Países de Língua Oficial Portuguesa, Coimbra, Maio.
- Antunes do Carmo, J.S., 2000. Tsunamis: geração e riscos. Revista *Territorium*, Nº 7, Minerva, Coimbra, 15-24.
- Antunes do Carmo, J.S. & Carreiras, J.L., 2002. *Hydrodynamics around coastal structures*. Hydraulic Information Management, Eds. C.A. Brebbia and W.R. Blain. WITPRESS. ISBN 1-85312-912-7.
- Antunes do Carmo, F.J. & Seabra Santos, F.J., 2002. Near-shore sediment dynamics computation under the combined effects of waves and currents. *Advances in Engineering Software*, Elsevier Science, Vol. 33, Nº 1, 37-48.
- Antunes do Carmo, J.S., Seabra Santos, F.J. & Almeida, A.B., 1993. Numerical solution of the generalized Serre equations with the MacCormack finite-difference scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 16, 725-738.
- Antunes do Carmo, J.S., Temperville, A. & Seabra Santos, F.J., 2003. Bottom friction and time-dependent shear stress for wave-current interaction. *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, Vol. 41, Nº 1, 27-37.
- Ariathurai, R., 1982. *Two and three dimensional models for sediment transport*, Report prepared for U. S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station, Resources Management Associates, Lafayette, CA.
- Avilés, J. & Sánchez-Sesma, F.J., 1986. Hydrodynamic pressures on dams with nonvertical upstream face. *J. of Engineering Mechanics*, Vol 112, Nº 10, 1054-1061.
- Bailard, J.A., 1981. An energetics total load sediment transport model for a plane sloping beach. *J. Geophys. Res.*, Vol. 86, 10, 938-10, 954.
- 350 Belo, J.C.V.M.M., 1992. *Modelação matemática de escoamentos variáveis com leito móvel*. Tese de Mestrado, IST, Lisboa.
- Bento Franco, A., 1996. *Modelação computacional e experimental de escoamentos provocados por roturas de barragens*. Tese de doutoramento em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 384 pp.
- Betâmio de Almeida, A., Matias Ramos, C., Santos, M.A. & Viseu, T., 2003. *Dam break flood risk management in Portugal*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa. ISBN 972-49-1979-X.

- Blumberg, A.F. & Mellor, G.L., 1987. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model, *Three-Dimensional Coastal Ocean Models, Coastal and Estuarine Sciences*, Vol. 4, N. Heaps, ed., AGU, Washington, DC, 1-16
- Breusers, H.N.C. & Raudkivi, A.J., 1991. *Scouring*. IAHR Hydraulic Structures Design Manual. A.A. Balkema, Rotterdam, Netherlands.
- Brown, L.C. & Barnwell, T.O., Jr., 1987. *The Enhanced Stream Water Quality Models QUAL2E and QUAL2E-UNCAS: Documentation and Users Manual*, U. S. Environmental Protection Agency, Athens, GA, Report EPA/600/3-87/007.
- Buchak, E.M. & Edinger, J.E., 1989. Comparison of computed and observed velocities at three estuarine sites, *Estuarine and Coastal Modelling*, M. L. Spaulding, ed., ASCE, 522-531.
- Cao, S. & Knight, D.W., 1998. Design for hydraulic geometry of alluvial channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, N° 5, 484-492.
- Cardoso, A.H., 1998. *Hidráulica Fluvial*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa
- Chadwick, A. & Morfett, J., 1994. *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*, 2ª edição, E & FN Spon, ISBN 0 419 18160 1.
- Chapra, S.C., 1997. *Surface water-quality modelling*. The McGraw-Hill Companies, Inc., ISBN 0-07-011364-5 - ISBN 0-07-843306-1.
- Cheng, R.T., Casulli, V. & Gartner, J.W., 1993. Tidal, Residual, Intertidal Mudflat (TRIM) model and its applications to San Francisco Bay, *California, Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 36, 235-280.
- CIRIA, 2002. *Manual on scour at bridges and other hydraulic structures*. ISBN 0 86017 551 0. Website: [www.ciria.org.uk](http://www.ciria.org.uk).
- Coelho, P.S., Rodrigues, A.C. & Diogo, P.A., 1999. Modelação da qualidade da água no empreendimento de fins múltiplos da Aguieira-Raiva. *Recursos Hídricos*, Vol. 20, N° 1, 83-91.
- Cole, T.M., 1993. *CE-QUAL-W2: a two-dimensional, laterally averaged, hydrodynamics and water quality model*, Instruction Report, U. S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS.
- Correia, L.R.P., Krishnappan, B.G. & Graf, W.H., 1992. Fully coupled unsteady mobile boundary flow model. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 118, N° 3, 476-494.
- Couto L.T., 2000. *Erosões localizadas junto de esporões fluviais e encontros de pontes*. Tese de doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa.
- Cunge, J.A., Holly, F.M., Jr, & Verwey, A., 1980. *Practical aspects of computational river hydraulics*, Pitman Advanced Publishing Program, Computational Hydraulics Series, Delft, The Netherlands.
- Cunha, P. Proença, 2002. Vulnerabilidade e risco resultante da ocupação de uma planície aluvial – o exemplo das cheias do rio Mondego (Portugal central), no Inverno de 2000/2001, *Revista Territorium*, N° 9, Minerva, Coimbra, 13-35.

- Dean, R.G. & Dalrymple, R.A., 1984. *Water wave mechanics for engineers and scientists*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Deng, Zhi-Qiang, Singh, V.P., Fellow & Bengtsson, L., 2001. Longitudinal dispersion coefficient in straight rivers. *J. of Hydraulic Engineering*, Vol. 127, N° 11, 919-927.
- Dongol, D.M.S., 1994. *Local scour at bridge abutments*. PhD thesis. Report N° 544, School of Engineering, University of Auckland, New Zeland.
- Engelund, F. & Fredsøe, J., 1976. A sediment transport model for straight alluvial channels. *Nordic Hydrology*, 7:293-306.
- Escarameia, M. & May, R.W.P., 1992. *Channel protection: Turbulence downstream of structures*. Report SR 313, HR Wallingford.
- Fennema, R.J., & Chaudhry, M.H., 1986. Explicit numerical schemes for unsteady free-surface flows with shocks. *Water Resources Research*, Vol. 22, N° 13, 1923-1930.
- Field, W.G., 1968. Effects of density ratio on sedimentary similitude. *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 94, N° HY3, 705-719.
- Fischer, H.B., 1968. Dispersion predictions in natural streams. *J. San. Engr. Div.*, ASCE 94 (SA5): 927-944.
- Franca, M.J.R.P., 2001. Fotografias pessoais oferecidas pelo autor.
- Fredsøe, J. & Deigaard, R., 1992. *Mechanics of coastal sediment transport*, Advanced Series on Coastal Engineering, Volume 3, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. ISBN 9810208405 - ISBN 9810208413 (pbk).
- Froehlich, D.C., 1989. *Local scour at bridge abutments*, in Hydraulic Engineering. Proc. Of the 1989 National Conference on Hydraulic Engineering, M. A. Ports ed., ASCE, New York, 13-18.
- Garde, R.J., Subramanya, K. & Nambudripad, K.D., 1961. Study of scour around spur-dikes. *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 87, N° HY 6, 23-37
- Ghosh, S.N., 1998. *Tidal Hydraulic Engineering*, A.A. Balkema, Rotterdam, The Netherlands. ISBN 90 5410 735 9.
- Gill, M.A., 1972. Erosion of sand beds around spur dikes. *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 98, N° HY9, 1587-1602.
- Graf, W.H. & M.S. Altinakar, M.S., 1996. *Traité de Génie Civil de l'École Polytechnique Fédéral de Lausanne, Hydraulique Fluviale*, Vol. 16, Tome 2, Ecoulement non permanent et phénomènes de transport, 1ª edição, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. ISBN 2-88074-300-1.
- Halcrow Group Ltd & HR Wallingford Ltd., 1997. *ISIS Flow User Manual*. Vol. 1: *User Guide*; Vol. 2: *Hydraulic Unit Reference*.
- Hall, R.W., 1987. *Application of CE-QUAL-W2 to the Savannah River Estuary*, Technical Report EL 87-4, U. S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS.

- Hallermeier, R.J., 1980. Sand motion initiation by water waves: two asymptotes. *J. of Water, Port, Coastal Ocean Division*, ASCE, Vol. 106, 229-318.
- Hanna, Y.G. & Humar, J.L., 1982. Boundary element analysis of fluid domain. *J. of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 108, No. EM2, 436-449.
- Hayter, E.J., Bergs, M.A., Gu, R. & McCutcheon, S.C., 1993. *Finite element hydrodynamic cohesive sediment transport modeling system SED2D*, draft report, U. S. Environmental Protection Agency, Athens, GA.
- Hayter, E.J., Bergs, M.A., Gu, R. & McCutcheon, S.C., 1997. *HSCTM-2D, a finite element model for sediment and contaminant transport*, draft report, U. S. Environmental Protection Agency, Athens, GA.
- HEC-Hydrological Engineering Center, 1978. "*Water Quality for River-Reservoir Systems*", U.S. Army Corps of Engineers, USA.
- HEC-Hydrological Engineering Center, 2002. "*HEC-RAS River Analysis System, User's Manual, Version 3.1*", U.S. Army Corps of Engineers, Davis, California, USA.
- Hess, K.W., 1989. *MECCA programs documentation*, NOAA Technical Report NESDIS 46.
- Hung, Tin-Kan & Chen, Bang-Fuh, 1990. Nonlinear hydrodynamic pressure on dams. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, N° 6, 1372-1391.
- Huynh Thanh, S. & Temperville, A., 1991. A numerical model of the rough turbulent boundary layer in combined wave and current interaction. *Euromech 262. Sand transport in rivers, estuaries and the sea*, 93-100.
- HydroQual, Inc., 2002. A Primer for ECOMSED, Version 1.3, *Users Manual*.
- Inglis, C.C., 1949. *The behaviour and control of rivers and canals*. Central Water Power Irrigation and Navigation, Research Publication 13, Part I and II, Poona Research Station, 248-327.
- Iwagaki, Y., 1956. Hydrodynamical study on critical tractive force. *Transactions, JSCE*, N° 41.
- Jansen, P. Ph , Bendegom, L., J. den Berg, M. de Vries & Zanen, A., 1979. *Principles of River Engineering. The non-tidal alluvial river*, 1ª edição, Pitman Ed., ISBN 0-273-01139-1.
- Johnson, B.H., Kim, K.W., Sheng, Y.P. & Heath, R.E., 1989. Development of a three-dimensional hydrodynamic model of Chesapeake Bay, *Estuarine and Coastal Modeling*, M. L. Spaulding , ed., ASCE, 162-171.
- Kandasamy, J.K., 1989. *Local scour at skewed abutments*. Msc thesis. Report N° 375. School of Engineering, University of Auckland, New Zealand.
- Koutitas, C.G., 1988. *Mathematical models in Coastal Engineering*. Pentech Press, London, 156 p.
- Kwan, T.F., 1984. *Study of abutment scour*. MSc. Thesis. Report N° 328. School of Engineering, University of Auckland, New Zealand.

- Lacey, G., 1929. *Stable channels in alluvium*. Min. of Proc. Inst. of Civil Engrs., 229, 1, 1929-1930, 259-384.
- Lacey, G., 1953. Uniform flow in alluvial rivers and canals. *Proc. Instn. Civ. Engrs.* 237, p. 421.
- Lacey, G., 1958. *Flow in alluvial channels with sandy mobile beds*. Institute of Civil Engineers, London.
- Lahlou, M., Choudhury, S., Wu, Yin & Baldwin, K., 1995. *QUAL2E Windows Interface Users Manual*. EPA-823-B-95-003. U. S. Environmental Protection Agency, Washington, DC.
- Lane, E.W., 1953. Progress Report of studies on the design of stable channels of the Bureau of Reclamation. *Proceedings, ASCE*, Vol. 79, N° 280.
- Lane, E.W., 1955. Design of stable channels. *Transactions, ASCE*, Vol. 120, 1234-1279.
- Laursen, E.M., 1958. *The total sediment load of streams*. Proc. ASCE, New York, Vol. 84, N° HY1, 1530.1-1530.36.
- Laursen, E.M., 1960. Scour at bridge crossings. *Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 86, N° HY2, 39-54.
- Laursen, E.M. & Toch, A., 1956. *Scour around bridge piers and abutments*. Iowa Highway Research Board Bulletin, N° 8, Iowa Institute of Hydraulic Research, State University of Iowa, Iowa City.
- Legendertse, J.J., 1967. *Aspects of a computation model for long-period water-wave propagation*, Memorandum Report No. RM-5294-PR, U. S. Air Force Project RAND, Rand Corp., Santa Monica, CA.
- Leendertse, J.J., 1970. *A water quality simulation model for well mixed estuaries and coastal seas*, Vol. I, principles of computation, Report No. RM-6230-RC, Rand Corp., Santa Monica, CA, 71.
- Leendertse, J.J. & Gritton, E.C., 1971. *A water quality simulation model for well mixed estuaries and coastal seas*, Vol. II, computation procedures, Report No. R-708-NYC, Rand Inst., New York, 53.
- Lencastre, A.E. & Franco, F.M., 1984. *Lições de Hidrologia*, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.
- LeVeque, R.J., 1998. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: The quasi-study wave-propagation algorithm. *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, 346-365.
- Lim, S.Y., 1997. Equilibrium clear-water scour around an abutment. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 123, N° 3, 237-243.
- Liu, H.K., Chang, F.M. & Skinner, M.M., 1961. *Effect of bridge constriction on scour and backwater*. Report CER60HKL22, Bureau of Public Roads, Civil Engineering Section. Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

- Lopes, L.F.G., 2001. *Estudos de hidrodinâmica e de qualidade ambiental da água: Aplicação na definição do caudal ecológico num segmento do rio Lima*. Dissertação de Mestrado em Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente, FCTUC.
- Lopes, L.F.G, Antunes do Carmo, J.S. & Cortes, R.M.V., 2002. *Estudo integrado e de modelação da qualidade ambiental da água do rio Lima*. 6º Congresso da Água, Porto, 18-22 de Março.
- Lopes, L.F.G, Antunes do Carmo, J.S. & Cortes, R.M.V., 2003. *Influence of dam-reservoirs exploitation on the water quality*. River Basin Management 2003 Conference, Las Palmas – Gran Canária (Espanha), 28 - 30 de Abril.
- MacCormack, R.W., 1971. Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. *Lectures Notes in Physics*. Springer-Verlag, Vol. 8, 151-163.
- Martin, J.L. & McCutcheon, S.C., 1999. *Hydrodynamics and transport for water quality modeling*, Lewis Publishers, CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida. ISBN 0-87371-612-4.
- Maynard, S.T., 1995. Corps riprap design guidance for channel protection. Paper 3 of *River, coastal and shoreline protection: erosion control using riprap and armourstone*. International Riprap Workshop, Fort Collins.
- McGhee, T.J., 1991. *Water Supply and Sewerage*, 6ª edição, McGraw-Hill International Editions, ISBN 0-07-100823-3.
- Mellor, G., 1998. *Users Guide for a Three-Dimensional, Primitive Equation, Numerical Ocean Model*. Princeton University, Princeton.
- Melville, B.W., 1992. Local scour at bridge abutments. *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 114, Nº 4, 615-631.
- Melville, B.W., 1995. Pier and abutment scour in compound channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 121, Nº 12, 863-868.
- Melville, B.W., 1997. Bridge abutment scour: Integrated approach. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 123, Nº 2, 125-136.
- Meyer-Peter & Müller, 1948. *Formulas for bed-load transport*. Proc. 3rd Meeting IAHR, Stockholm, 39-64.
- Neves, R.J., 1985. *Étude Expérimentale et Modélisation Mathématique des Circulations Transitoire et Résiduelle dans l'Estuaire du Sado*. Ph.D Thesis, University de Liège, Liège.
- Pilarczyk, R.W., 1990. Stability criteria for revetments. Proceedings of the *National Conference on Hydraulic Engineering*. American Society of Engineers, USA.
- Pinho, J.L.S., 2001. *Aplicação de modelação matemática ao estudo da hidrodinâmica e da qualidade da água em zonas costeiras*, Tese de doutoramento em Engenharia Civil, Universidade do Minho.
- Pinho, J.L.S, Vieira, J.M.P. & Antunes do Carmo, J.S., 2001. *Ambiente hidro-informático para o estudo de problemas de hidrodinâmica e da qualidade da*

- água em zonas costeiras. Seminário sobre “A Hidroinformática em Portugal”, Lisboa.
- Portela, L.I. & Neves, R., 1993. Modelling of salt distribution in the Tejo estuary using the QUICK scheme. In L.C. Wrobel & C.A. Brebbia (eds.), *Water Pollution II: Modelling, Measuring and Prediction*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 121-128.
- Portela, L.I., 1998. *Modelação matemática de processos hidrodinâmicos e de qualidade da água no estuário do Tejo*. Tese de doutoramento em Engenharia do Ambiente, IST – Universidade Técnica de Lisboa.
- Preissmann, A., 1961. Propagation des intumescences dans les canaux et rivières. 1<sup>er</sup> Congrès de l'Association Française de Calcul, Grenoble, France, 433-442.
- Quintela, A.C., 1981. *Hidráulica*, 2<sup>a</sup> ed., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Rashed, A.A., ASCE, A. M. & Iwan, W.D., 1984. Hydrodynamic pressure on short-length gravity dams. *J. of Engineering Mechanics*, Vol 110, N° 9, 1264-1283.
- Ritter, A., 1982. The propagation of water waves. *Deutsch Ingenieur Zeitschr.*, Berlin, Vol. 36, Part 2, N° 33, 947-954.
- Rodrigues, A.C., 1992. *Modelação matemática da qualidade da água em albufeiras*. Tese de doutoramento, UNL – FCT, Lisboa.
- Roe, P.L., 1981. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, 357-372.
- Roig, L.C., 1996a. *CEWS hydrodynamics modeling of Florida Bay*, Overheads, Florida Bay Inter-agency Modeling Workshop, April 17-18, Marathon, FL.
- Roig, L.C., 1996b. *Hydrodynamics/salinity model to evaluate the impact of alternative freshwater releases on salinity in Florida Bay*, Program and Abstracts, 1996 Florida Bay Science Conference, Dec. 10-12, Key Largo, FL, 70-71.
- Rutherford, J.C., 1994. *River mixing*, J. Wiley & Sons, Ltd., Chichester, GB.
- Sheng, Y.P., Eliason, X.J. & Choi, J.K., 1992. *SED3D, a three-dimensional numerical model of hydrodynamics and sediment transport in lakes and estuaries: theory, model development and documentation*, draft report, U. S. Environmental Protection Agency, Environmental Research Laboratory, Athens, G.A.
- Simons, D.B. & Albertson, M.L., 1963. Uniform water conveyance in alluvial material. *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs.*, 128(1), 65-167.
- Simons, D.B. & Sentürk, F., 1976. *Sediment Transport Technology*. Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado 80522, USA.
- Singh, V.P. & Hager, W.H., 1996. *Environmental Hydraulics*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. ISBN 0-7923-3983-5

- Slingerland, R., Harbaugh, J.W. & Furlong, K., 1994. *Simulating Clastic Sedimentary Basins*, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. ISBN 0-13-814054-5.
- Soulsby, R.L., 1997. *Dynamics of Marine Sands*. Thomas Telford Publications, London.
- Soulsby, R.L. & Whitehouse, R.J.S., 1997. *Threshold of sediment motions in coastal environments*. Proc. Pacific Coasts and Ports'97 Conf., Christchurch, University of Canterbury, New Zealand, 1, 149-54.
- Steele, J.H. & Baird, I.E., 1962. Further relations between primary production, chlorophyll and particulate carbon. *Limnology and Oceanography*, 7, 42-47
- Stefanovic, D.L. & Stefan, H., 2001. Accurate two-dimensional simulation of advective-diffusive-reactive transport. *J. of Hydraulic Engineering*, Vol. 127, No 9, 728-737.
- Stoker, J.J., 1957. *Water waves*. Interscience Publishers, Inc. 291-341.
- Sweby, P.K., 1984. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 21, N° 5, 995-1011.
- Temperville, A.M., 1985. *Contribution à la théorie des ondes de gravité en eau peu profonde*. Thèse d'État. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, França.
- Temperville, A.M. & Thanh, S.H., 1990. *Modelisation de la couche limite turbulente oscillatoire generée par l'interaction houle-courant en zone cotière*. Rapport de recherche concernant la modelisation en domaine littoral et cotier, Institut de Mécanique de Grenoble.
- Tey, C.B., 1984. *Local scour at bridge abutments*. Msc thesis. Report N° 329. School of Engineering, University of Auckland, New Zealand.
- Tran Thu, T., 1995. *Modélisation numérique de l'interaction houle-courant-sédiment*, Tese de Doutoramento, Université Joseph Fourier – Grenoble I, France.
- Ursell, F., 1953. The long-wave paradox in the theory of long gravity waves. Proc. Camb. Phil. Soc., 49, 685-694.
- Vasiliev, O.F., 1970. Numerical solution of the non-linear problems of unsteady flow in open channels. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Berkeley, 410-421.
- Veiga da Cunha, L., 1971. *Erosões localizadas junto de obstáculos salientes de margens*. Tese de doutoramento em Engenharia Civil, IST-Universidade Técnica de Lisboa.
- Veiga da Cunha, L., 1973. *Erosões localizadas junto de obstáculos salientes de margens*. Memória n° 428, LNEC, Lisboa.
- Wang, J.D., 1978. Real time flow in unstratified shallow water. *ASCE J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng. Div.*, (104) WW1, 53-68.

- Wang, J.D. & Monjo, C., 1995. *A study to define model and data needs for Florida Bay*, Technical Report, Applied Marine Physics, Rosensteel School of Marine and Atmospheric Science, University of Miami, Miami, FL.
- WES-HL, 1996. *Users Guide to RMA2 Versions 4.3*. US Army Corps of Engineers – Waterways Experiment Station Hydraulics Laboratory, Vicksburg, USA.
- WEST Consultants, 1996. *Evaluation hydrodynamic and contaminant transport computer models for application to Duwamish River and Elliot Bay*, prepared for King Country Department of Natural Resources, Seattle, WA.
- White, W.R, Bettess, R. & Paris, E., 1982. analytical approach to river regime. *Journal of the Hydraulic Division*, ASCE, Vol. 108, HY10.
- William Halcrow & Partners Ltd & HR Wallingford Ltd., 1998. *ISIS Quality User Manual*.
- Wong, W.H., 1982. *Scour at bridge abutments*. MSc thesis. Report N° 275. School of Engineering, University of Auckland, New Zealand.
- Yalin, M.S., 1971. *Theory of Hydraulic Models*. Macmillan, London.
- Yang, C.T., 1973. Incipient motion and sediment transport. *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 99, N° HY10. Proc. Paper 10067, 1679-1704.
- Yang, C.T., 1996. *Sediment Transport: Theory and Practice*. MacGraw-Hill series in Water Resources and Environmental Engineering. ISBN 0-07-072309-5.
- Zaghloul, N.A., 1983. Local scour around spur-dikes. *Journal of Hydrology*, Vol. 60, 123-140.

## ANEXO I

C

C \* Sequência de PREVISÃO (diferenças regressivas)\*

C

+ SUBROUTINE PREREG (AA, AP, HA, QA, QP, CSI, B, QL,  
+ UT, RMD, RME, CK, G, DT, DTDX, NP, ND)

INTEGER I, NP, ND

+ REAL AA(ND), AP(ND), HA(ND), QA(ND), QP(ND),  
+ CSI(ND)

+ REAL B(ND), QL(ND), UT(ND), RMD(ND), RME(ND),  
+ CK(ND)

+ REAL ASM, HSM, QSM, BSM, DMD, DME, PMOL, RH,  
+ G, DT, DTDX

DO I = 2, NP

ASM = 0.50\*(AA(I) + AA(I-1))

HSM = 0.50\*(HA(I) + HA(I-1))

QSM = 0.50\*(QA(I) + QA(I-1))

BSM = 0.50\*(B(I) + B(I-1))

DMD = 0.50\*(RMD(I) + RMD(I-1))

DME = 0.50\*(RME(I) + RME(I-1))

+ PMOL = BSM + HSM\*(SQRT(1.0 + DMD\*DMD) +  
+ SQRT(1.0 + DME\*DME))

RH = ASM/PMOL

AI

+ AP(I) = AA(I) - DTDX\*(QA(I) - QA(I-1)) +  
+ DT\*QL(I)

+ QP(i) = QA(I) - DTDX\*(QA(I)\*QA(I)/AA(I) -

+ QA(I-1)\*QA(I-1)/AA(I-1)) -

+ G\*DTDX\*ASM\*(HA(I) + CSI(I) - HA(I-1) -

```

+      CSI(I-1)) - G*DT*ABS(QSM)*QSM/
+      (CK(I)*CK(I)*ASM*RH**(4.0/3.0)) -
+      DT*(QL(I)*(QSM/ASM - UT(I)))

```

```

END DO

```

```

RETURN
END SUBROUTINE

```

```

C
C      *Sequência de CORRECÇÃO (diferenças progressivas)*
C
SUBROUTINE CORPRO (AA, AP, AC, HP, QA, QP, QC,
+      CSI, B, QL, UT, RMD, RME, CK, G, DT, DTDX, NP,
+      ND)

```

```

INTEGER I, NP, ND
REAL AA(ND), AP(ND), AC(ND), HP(ND), QA(ND),
+      QP(ND), QC(ND)
REAL CSI(ND), B(ND), QL(ND), UT(ND), RMD(ND),
+      RME(ND), CK(ND)
REAL ASM, HSM, QSM, BSM, DMD, DME, PMOL, RH,
+      G, DT, DTDX

```

```

DO I = 1, NP-1

```

```

      ASM = 0.50*(AP(I+1) + AP(I))
      HSM = 0.50*(HP(I+1) + HP(I))
      QSM = 0.50*(QP(I+1) + QP(I))
      BSM = 0.50*(B(I+1) + B(I))

```

```

      DMD = 0.50*(RMD(I+1) + RMD(I))
      DME = 0.50*(RME(I+1) + RME(I))

```

```

      PMOL = BSM + HSM*(SQRT(1.0 + DMD*DMD) +
+      SQRT(1.0 + DME*DME))

```

RH = ASM/PMOL

AC(I) = 0.50\*(AA(I) + AP(I) - DTDX\*(QP(I+1) -  
+ QP(I)) + DT\*QL(I))

QC(I) = 0.50\*(QA(I) + QP(I) -  
+ DTDX\*(QP(I+1)\*QP(I+1)/AP(I+1) -  
+ QP(I)\*QP(I)/AP(I)) - G\*DTDX\*ASM\*  
+ (HP(I+1) + CSI(I+1) - HP(I) -  
+ CSI(I)) - G\*DT\*ABS(QSM)\* QSM/  
+ (CK(I)\*CK(I)\*ASM\*RH\*\*(4.0/3.0)) -  
+ DT\*QL(I)\*(QSM/ASM - UT(I)))

END DO

RETURN

END SUBROUTINE

C  
C  
C

\* Sequência de PREVISÃO (diferenças progressivas)\*

SUBROUTINE PREPRO (AA, AP, HA, QA, QP, CSI, B, QL,  
+ UT, RMD, RME, CK, G, DT, DTDX, NP, ND)

INTEGER I, NP, ND

REAL AA(ND), AP(ND), HA(ND), QA(ND), QP(ND),  
+ CSI(ND)

REAL B(ND), QL(ND), UT(ND), RMD(ND), RME(ND),  
+ CK(ND)

REAL ASM, HSM, QSM, BSM, DMD, DME, PMOL, RH,  
+ G, DT, DTDX

DO I = 1, NP-1

ASM = 0.50\*(AA(I+1) + AA(I))

HSM = 0.50\*(HA(I+1) + HA(I))

$$QSM = 0.50*(QA(I+1) + QA(I))$$

$$BSM = 0.50*(B(I+1) + B(I))$$

$$DMD = 0.50*(RMD(I+1) + RMD(I))$$

$$DME = 0.50*(RME(I+1) + RME(I))$$

$$+ \quad PMOL = BSM + HSM*(SQRT(1.0 + DMD*DMD) +$$
$$\quad \quad \quad SQRT(1.0 + DME*DME))$$

$$RH = ASM/PMOL$$

$$+ \quad AP(I) = AA(I) - DTDX*(QA(I+1) - QA(I)) +$$
$$\quad \quad \quad DT*QL(I)$$

$$+ \quad QP(I) = QA(I) - DTDX*(QA(I+1)*QA(I+1)/$$
$$\quad \quad \quad AA(I+1) - QA(I)*QA(I)/AA(I)) -$$
$$+ \quad \quad \quad G*DTDX*ASM*(HA(I+1) + CSI(I+1) -$$
$$+ \quad \quad \quad HA(I) - CSI(I)) - G*DT*ABS(QSM)*$$
$$+ \quad \quad \quad QSM/(CK(I)*CK(I)*ASM*RH**(4.0/3.0)) -$$
$$+ \quad \quad \quad DT*(QL(I)*(QSM/ASM - UT(I)))$$

END DO

RETURN

END SUBROUTINE

A4

C  
C  
C

\*Sequência de CORRECÇÃO (diferenças regressivas) \*

+ SUBROUTINE CORREG (AA, AP, AC, HP, QA, QP, QC,  
+ CSI, B, QL, UT, RMD, RME, CK, G, DT, DTDX, NP, ND)

+ INTEGER I, NP, ND  
+ REAL AA(ND), AP(ND), AC(ND), HP(ND), QA(ND),  
+ QP(ND), QC(ND)

```

REAL CSI(ND), B(ND), QL(ND), UT(ND), RMD(ND),
+       RME(ND), CK(ND)
REAL ASM, HSM, QSM, BSM, DMD, DME, PMOL, RH,
+       G, DT, DTDX

```

```

DO I = 2, NP

```

```

    ASM = 0.50*(AP(I) + AP(I-1))

```

```

    HSM = 0.50*(HP(I) + HP(I-1))

```

```

    QSM = 0.50*(QP(I) + QP(I-1))

```

```

    BSM = 0.50*(B(I) + B(I-1))

```

```

    DMD = 0.50*(RMD(I) + RMD(I-1))

```

```

    DME = 0.50*(RME(I) + RME(I-1))

```

```

    PMOL = BSM + HSM*(SQRT(1.0 + DMD*DMD) +
+       SQRT(1.0 + DME*DME))

```

```

    RH = ASM/PMOL

```

```

    AC(I) = 0.50*(AA(I) + AP(I) - DTDX*(QP(I) -
+       QP(I-1)) + DT*QL(I))

```

```

    QC(I) = 0.50*(QA(i) + QP(i) -
+       DTDX*(QP(I)*QP(I)/AP(I) -
+       QP(I-1)*QP(I-1)/AP(I-1)) -
+       G*DTDX*ASM*(HP(I) + CSI(I) - HP(I-1) -
+       CSI(I-1)) - G*DT*ABS(QSM)*QSM/
+       (CK(I)*CK(I)*ASM*RH**(4.0/3.0)) -
+       DT*QL(I)*(QSM/ASM - UT(I)))

```

```

END DO

```

```

RETURN

```

```

END SUBROUTINE

```

(Página deixada propositadamente em branco)

## ANEXO II

C

C

C

---

### 3.9.3 EXTENSÃO TVD DO ESQUEMA DE MACCORMACK

---

C

C

C

C

---

Celeridade [CEL(i)] e mom. estático [I1->RI1A(i)]

---

DO i = -1, NP+2

CEL(i) = SQRT(G\*AA(i)/B(i))

CALL MOMEST (VINT, HA, BF, RMD, RME, NSEC,  
+ i, NP, ND)

RI1A(i) = VINT

END DO

C

C

C

C

---

Variáveis U -> UAR, C -> CAR, Lambda, Delta,  
Alfa e Niu -> CFL

---

DO i = -1, NP+1

UAR(i) = (QA(i+1)/SQRT(AA(i+1)) + QA(i)/

+ SQRT(AA(i)))/(SQRT(AA(i+1)) + SQRT(AA(i)))

DIF = AA(i+1) - AA(i)

DR1A = (RI1A(i+1) - RI1A(i))\*(AA(i+1) - AA(i))

IF ((ABS(DIF).LE.1e-6).OR.DR1A.LT.0.0) THEN

CAR(i) = 0.50\*(CEL(i+1) + CEL(i))

ELSE

CAR(i) = SQRT(G\*(RI1A(i+1) -

+ RI1A(i))/(AA(i+1) - AA(i)))

END IF

LAMB1(i) = UAR(i) + CAR(i)

AMB2(i) = UAR(i) - CAR(i)

+ DELTA1 = AMAX1(0.0,(LAMB1(i) - (UA(i) +  
CEL(i))), ((UA(i+1) + CEL(i+1)) - LAMB1(i)))

+ DELTA2 = AMAX1(0.0,(LAMB2(i) - (UA(i) -  
CEL(i))), ((UA(i+1) - CEL(i+1)) - LAMB2(i)))

IF (ABS(LAMB1(i)).GE.DELTA1) THEN

ABLA1(i) = ABS(LAMB1(i))

ELSE

ABLA1(i) = DELTA1

END IF

IF (ABS(LAMB2(i)).GE.DELTA2) THEN

ABLA2(i) = ABS(LAMB2(i))

ELSE

ABLA2(i) = DELTA2

END IF

+ ALFA1(i) = 0.50\*(AA(i+1) - AA(i)) +  
+ (0.50/CAR(i))\*((QA(i+1) - QA(i)) -  
+ UAR(i)\*(AA(i+1) - AA(i)))

+ ALFA2(i) = 0.50\*(AA(i+1) - AA(i)) -  
+ (0.50/CAR(i))\*((QA(i+1) - QA(i)) -  
+ UAR(i)\*(AA(i+1) - AA(i)))

DTDX = DT/(X(2) - X(1))

IF (i.GT.1.AND.i.LT.np) DTDX = DT/(X(i+1) - X(i))

CRL1(i) = DTDX\*LAMB1(i)

CRL2(i) = DTDX\*LAMB2(i)

A8

END DO

C -----  
C Argumento e limitador de fluxo numérico:  
C TETA1, F11  
C -----

DO i = 0, NP

IF (ABS(ALFA1(i)).LT.1.0E-6) THEN

FI1(i) = 0.0

ELSE IF (LIMIT.EQ.1) THEN

C Primeiro limitador de fluxo Minmod

C (MacCormack)

IF ((ALFA1(i-1).LT.0.0).AND. (ALFA1(i).LT.0.0)

+ .AND. (ALFA1(i+1).LT.0.0)) THEN

ALIM = -1.0\*AMIN1(ABS(ALFA1(i-1)),

+ ABS(ALFA1(i)), ABS(ALFA1(i+1)))

FI1(i) = ALIM/ALFA1(i)

ELSE IF ((ALFA1(i-1).GT.0.0).AND.

+ (ALFA1(i).GT.0.0).AND.(ALFA1(i+1)

+ .GT.0.0)) THEN

ALIM = AMIN1(ABS(ALFA1(i-1)),

+ ABS(ALFA1(i)),ABS(ALFA1(i+1)))

FI1(i) = ALIM/ALFA1(i)

ELSE

FI1(i) = 0.0

END IF

ELSE

C Argumento do primeiro limitador de fluxo

C (Roe)

IF (CRL1(i).GT.0.0) THEN

TETA1(i) = ALFA1(i-1)/ALFA1(i)

ELSE IF (CRL1(i).LT.0.0) THEN

TETA1(i) = ALFA1(i+1)/ALFA1(i)

ELSE

TETA1(i) = 1.0

END IF

C -----

C Limitadores de fluxo numérico, FI1

C -----

```

IF (LIMIT.EQ.2) THEN
C      Limitador Minmod de Roe
      FI1(i) = AMAX1(0.0,AMIN1(1.0,TETA1(i)))

      ELSE IF (LIMIT.EQ.3) THEN
C      Limitador Superbee de Roe
      FI1(i) = AMAX1(0.0,AMIN1(1.0,2.0*
+      TETA1(i),AMIN1(2.0,TETA1(i)))

      ELSE IF (LIMIT.EQ.4) THEN
C      Limitador de van Leer
      FI1(i) = (TETA1(i) +
+      ABS(TETA1(i)))/(1.0 +
+      ABS(TETA1(i)))

      ELSE IF (LIMIT.EQ.5) THEN
C      Limitador de van Albada
      FI1(i) = (TETA1(i) +
+      TETA1(i)*TETA1(i))/
+      (1.0+TETA1(i)*TETA1(i))

      ELSE
+      STOP ' LIMITADOR NAO
      PREVISTO.'

      END IF
END IF

```

```

-----
A10 C -----
C      Argumento e limitador de fluxo numérico:
C      TETA2, FI2
C      -----

```

```

IF (ABS(ALFA2(i)).LT.1.0E-6) THEN
      FI2(i) = 0.0

```

```

ELSE IF (LIMIT.EQ.1) THEN
c      Segundo limitador de fluxo Minmod (MacCormack)
      IF ((ALFA2(i-1).LT.0.0)
+         .AND.(ALFA2(i).LT.0.0).AND.
+         (ALFA2(i+1).LT.0.0)) THEN
      ALIM = -1.0*AMIN1(ABS(ALFA2(i-1)),
+         ABS(ALFA2(i)),ABS(ALFA2(i+1)))
      FI2(i) = ALIM/ALFA2(i)
      ELSE IF ((ALFA2(i-1).GT.0.0)
+         .AND.(ALFA2(i).GT.0.0).AND.
+         (ALFA2(i+1).GT.0.0)) THEN
      ALIM = AMIN1(ABS(ALFA2(i-1)),
+         ABS(ALFA2(i)),ABS(ALFA2(i+1)))
      FI2(i) = ALIM/ALFA2(i)
      ELSE
      FI2(i) = 0.0
      END IF

```

```

      ELSE
C      Argumento do segundo limitador de fluxo (Roe)
      IF (CRL2(i).GT.0.0) THEN
      TETA2(i) = ALFA2(i-1)/ALFA2(i)
      ELSE IF (CRL2(i).LT.0.0) THEN
      TETA2(i) = ALFA2(i+1)/ALFA2(i)
      ELSE
      TETA2(i) = 1.0
      END IF

```

```

C -----
C      Limitadores de fluxo numérico, FI2
C -----

```

A11

```

      IF (LIMIT.EQ.2) THEN
C      Limitador Minmod de Roe
      FI2(i) = AMAX1(0.0,AMIN1(1.0,
+         TETA2(i)))

```

```

ELSE IF (LIMIT.EQ.3) THEN
C      Limitador Superbee de Roe
      FI2(i) = AMAX1(0.0,AMIN1(1.0,
+          2.0*TETA2(i)),AMIN1(2.0,
+          TETA2(i)))

      ELSE IF (LIMIT.EQ.4) THEN
C      Limitador de van Leer
      FI2(i) = (TETA2(i) +
+          ABS(TETA2(i)))/(1.0 +
+          ABS(TETA2(i)))

      ELSE IF (LIMIT.EQ.5) THEN
C      Limitador de van Albada
      FI2(i) = (TETA2(i) +
+          TETA2(i)*TETA2(i))/
+          (1.0+TETA2(i)*TETA2(i))

      ELSE
+          STOP ' LIMITADOR NAO
          PREVISTO.'

      END IF
    END IF
  END DO

```

A12

```

C -----
C   Correção TVD dos valores das variáveis obtidos pelo método
C   clássico de MacCormack, AC e QC, e actualização de UC.
C -----

```

DO i = 1, NP

DTDX = DT/(X(2) - X(1))

IF (i.GT.1) DTDX = DT/(X(i) - X(i-1))

```

AC(i) = AC(i)+ 0.50*DTDX*(ALFA1(i)*ABLA1(i)*
+
(1.0 - ABS(CRL1(i)))*(1.0 - FI1(i)) +
+
ALFA2(i)*ABLA2(i)*(1.0 - ABS(CRL2(i)))*
+
(1.0 - FI2(i)) - ALFA1(i-1)*ABLA1(i-1)*
+
(1.0 - ABS(CRL1(i-1)))*(1.0 - FI1(i-1))-
+
ALFA2(i-1)*ABLA2(i-1)*(1.0 -
+
ABS(CRL2(i-1)))* (1.0 - FI2(i-1)))

```

```

QC(i) = QC(i) + 0.50*DTDX*(ALFA1(i)*
+
LAMB1(i)*ABLA1(i)*(1.0 - ABS(CRL1(i)))*
+
(1.0 - FI1(i)) + ALFA2(i)*LAMB2(i)*
+
ABLA2(i)*(1.0 - ABS(CRL2(i)))*(1.0 -
+
FI2(i)) - ALFA1(i-1)*LAMB1(i-1)*
+
ABLA1(i-1)*(1.0 - ABS(CRL1(i-1)))*
+
(1.0 - FI1(i-1)) - ALFA2(i-1)*
+
LAMB2(i-1)*ABLA2(i-1)*(1.0 -
+
ABS(CRL2(i-1)))*(1.0 - FI2(i-1)))

```

```

IF (ABS(AC(i)).LT.1.0E-8) AC(i) = 0.0

```

```

IF (ABS(QC(i)).LT.1.0E-8) QC(i) = 0.0

```

```

UC(i) = 0.0

```

```

IF (ABS(AC(i)).GE.1.0E-8) UC(i) = QC(i)/AC(i)

```

```

END DO

```

```

C -----
C Actualização de HC após correcção TVD
C -----

```

\_\_\_\_\_

A13

```

DO i = 1, NP

```

```

CALL PROF (PH, AC, BF, RMD, RME, NSEC, i, NP, ND)

```

```

HC(i) = PH

```

```

END DO

```

```

C -----
C   SUBPROGRAMAS
C -----
C
      SUBROUTINE LARSUP (BS, H, B, RD, RE, NSEC, k, NP, ND)

C -----
C   Cálculo da largura da secção à superfície -> BS
C -----
      INTEGER NSEC, k, NP, ND
      REAL BS
      REAL, DIMENSION (-1:ND) :: H, B, RD, RE

      IF (NSEC.EQ.1) THEN
C   * Secção rectangular *
          BS = B(k)

          ELSE IF (NSEC.EQ.2) THEN
C   * Secção triangular com defs. incs. dos taludes *
          BS = (RD(k) + RE(k))*H(k)

          ELSE IF (NSEC.EQ.3) THEN
C   * Secção trapezoidal com defs. incs. dos taludes *
          BS = B(k) + (RD(k) + RE(k))*H(k)

          ELSE
              STOP ' SECCAO NAO PREVISTA.'

      END IF

      RETURN
      END SUBROUTINE

```

SUBROUTINE PROF (PH, A, B, RD, RE, NSEC, k, NP, ND)

```
C -----  
C   Cálculo da profundidade do escoamento -> HP  
C -----  
   INTEGER NSEC, k, NP, ND  
   REAL PH  
   REAL, DIMENSION (-1:ND) :: A, B, RD, RE  
  
   IF (NSEC.EQ.1) THEN  
C   * Rectangular *  
       PH = A(k)/B(k)  
  
       ELSE IF (NSEC.EQ.2) THEN  
C   * Triangular com difs. incs. dos taludes *  
       PH = SQRT(2.0*A(k)/(RD(k) + RE(k)))  
  
       ELSE IF (NSEC.EQ.3) THEN  
C   * Trapezoidal com difs. incs. dos taludes *  
       PH = (-B(k) + SQRT(B(k)*B(k) + 2.0*  
+       (RD(k) + RE(k))*A(k)))/(RD(k) + RE(k))  
       ELSE  
           STOP ' SECCAO NAO PREVISTA'  
  
   END IF  
  
   RETURN  
   END SUBROUTINE
```

SUBROUTINE AREA (AR, H, B, RD, RE, NSEC, k, NP, ND)

```
C -----
C  Cálculo da área molhada do escoamento -> AR
C  -----
      INTEGER NSEC, k, NP, ND
      REAL AR
      REAL, DIMENSION (-1:ND) :: H, B, RD, RE

      IF (NSEC.EQ.1) THEN
C  * Secção rectangular *
          AR = B(k)*H(k)

          ELSE IF (NSEC.EQ.2) THEN
C  * Secção triangular com difs. incs. dos taludes *
          AR = 0.50*(RD(k) + RE(k))*H(k)*H(k)

          ELSE IF (NSEC.EQ.3) THEN
C  * Secção trapezoidal com difs. incs. dos taludes *
          AR = (B(k) + 0.50*(RD(k) +
+          RE(k))*H(k))*H(k)

          ELSE
              STOP ' SECCAO NAO PREVISTA.'

      END IF

      RETURN
      END SUBROUTINE
```

```

+      SUBROUTINE MOMEST (VINT, H, B, RD, RE, NSEC, k,
+                          NP, ND)
C      -----
C      Cálculo do momento estático da área molhada do escoamento -> I1
C      -----
      INTEGER NSEC, k, NP, ND
      REAL VINT
      REAL, DIMENSION (-1:ND) :: H, B, RD, RE

      IF (NSEC.EQ.1) THEN
C      * Secção rectangular *
          VINT = 0.5*B(k)*H(k)*H(k)

          ELSE IF (NSEC.EQ.2) THEN
C      * Secção triangular com difs. incs. dos taludes *
          VINT = H(k)*H(k)*H(k)*(RD(k) + RE(k))/6.0

          ELSEIF (NSEC.EQ.3) THEN
C      * Secção trapezoidal com difs. incs. dos taludes *
          VINT = (H(k)*H(k)/2.0)*(B(k) +
+              H(k)*(RD(k) + RE(k))/3.0)

          ELSE
              STOP ' SECCAO NAO PREVISTA.'

      END IF

      RETURN
      END SUBROUTINE

```

(Página deixada propositadamente em branco)

### ANEXO III

C\*\*\*\*\*SUBROUTINE ACKERS\*\*\*\*\*

C-----  
SUBROUTINE ACKERS

REAL\*8 D50, SG, U, USTAR, Q, VISC, RH  
REAL\*8 G, DGR, P, F1, F2, F3, GGR, Y, AN, AA, AM,  
+ CA, QST, RQS

C-----  
C BLOCO COMMON

C-----  
COMMON D50, SG, U, USTAR, Q, VISC, RH

C-----  
C CÁLCULO DE ALGUMAS CONSTANTES

C-----

G = 9.81D0  
GR = D50\*((G\*(SG - 1.0D0)/(VISC\*VISC))\*\*0.333)

IF (DGR.GT.60.0D0) THEN

AN = 0.0D0  
AA = 0.17D0  
AM = 1.50D0  
CA = 0.025D0  
ELSE

P = DLOG10 (DGR)  
AN = 1.0D0 - 0.56\*P  
AA = 0.23/DSQRT (DGR) + 0.14D0  
AM = 9.66/DGR + 1.34D0  
CA = 10.0\*\*(2.86\*P - P\*P - 3.53D0)

ENDIF

```

C-----
C   CAUDAL SÓLIDO E CONCENTRAÇÃO
C   (SOLUÇÃO DE ACKERS & WHITE)
C-----

```

```

      F1 = USTAR**AN/(DSQRT (G*D50*(SG - 1.0D0)))
      F2 = (U/(DSQRT (32.0D0)*
+         DLOG10 (10.0D0*RH/D50)))*(1.0D0 - AN)
      F3 = F1*F2/AA - 1.0D0

      IF(F3.LE.0.0D0) THEN
          QST = 0.0D0
          RQS = 0.0D0
      ELSE
          GGR = CA*F3**AM
          QST = (GGR*Q*D50*(U/USTAR)**AN)/RH
          RQS = (QST/Q)*SG*1.0D6
      END IF

      WRITE (*,5) QST,RQS
5   FORMAT(/' * CAUDAL SOLIDO, Qst =',F9.6', m2/s/'
+ ' * CONCENTRACAO, Cs =',F9.2,' ppm em peso.')
```

```

      RETURN
      END SUBROUTINE
```

A20

```

C*****SUBROUTINE YANG*****
C-----

```

```

      SUBROUTINE YANG
```

```

      REAL*8 VISC, D50, U, SG, RH, DECLIVE
      REAL*8 VISC2, W50, VCR, PAR, USW, CONC, A, B, C,
+         D, E, F
```

C-----

C BLOCO COMMON

C-----

COMMON VISC, D50, U, SG, RH, DECLIVE

C-----

C CÁLCULO DA VELOCIDADE DE QUEDA

C CORRESPONDENTE AO D50

C-----

VISC2 = VISC\*VISC

W50 = DSQRT (2.0D0\*(SG-1.0D0)\*9.81D0\*D50/3.0D0 +  
+ 36.0D0\*VISC2/(D50\*D50)) - 6.0D0\*VISC/D50

C-----

C VALORES DE CONSTANTES

C-----

IF (D50.LE.0.004D0) THEN

A = 5.435D0

B = 0.286D0

C = 0.457D0

D = 1.799D0

E = 0.409D0

F = 0.314D0

ELSE

A = 6.681D0

B = 0.633D0

C = 4.816D0

D = 2.784D0

E = 0.305D0

F = 0.282D0

ENDIF

C-----

C CÁLCULO DA VELOCIDADE DE ATRITO

C-----

USTAR = DSQRT (9.81D0\*RH\*DECLIVE)

C-----  
C     CÁLCULO DA VELOCIDADE CRÍTICA  
C-----

IF (USTAR\*D50/VISC.LT.70.0D0) THEN

          UCR = W50\*(2.5D0/(DLOG10 (USTAR\*D50/VISC) -  
+                   0.06D0) + 0.66D0)

          ELSE

          UCR = 2.05D0\*W50

ENDIF

C-----  
C     CÁLCULO DA CONCENTRAÇÃO (SOLUÇÃO DE YANG)  
C-----

IF ((U-UCR).GT.0.0D0) THEN

          PAR = W50\*D50/VISC

          USW = USTAR/W50

          CONC = A - B\*DLOG10 (PAR) - C\*DLOG10 (USW) +  
+                   (D - E\*DLOG10 (PAR) - F\*DLOG10 (USW))\*

+                   DLOG10 ((DECLIVE/W50)\*(U-UCR))

          CONC = 10.0D0\*\*CONC

          ELSE

          CONC = 0.0D0

ENDIF

WRITE (\*,5) CONC

A22     5     FORMAT(/' \* CONCENTRACAO, Cs = ',F9.2,' ppm em peso.')

RETURN

END SUBROUTINE

C\*\*\*\*\*SUBROUTINE BAILARD\*\*\*\*\*

C-----

SUBROUTINE BAILARD

REAL\*8 D50, D90, SG, FI, DERIV, RH, U, Q  
REAL\*8 G, UCL, VIS, VIS2, SM1, PI, WQ, TANFI, CKR  
REAL\*8 EBSA, EBSS, DEN, FAC, CF, U2, U3, QSP, RQS

C-----

C BLOCO COMMON

C-----

COMMON D50, D90, SG, FI, DERIV, RH, U, Q

C-----

C CONSTANTES E VELOCIDADE DE QUEDA  
C CORRESPONDENTE AO D50

C-----

G = 9.810D0  
UCL = 1.50D0  
VIS = 1.20D-6  
VIS2 = VIS\*VIS  
SM1 = (SG - 1.0D0)  
PI = 4.0D0\*DATAN (1.0D0)

WQ = DSQRT (2.0D0\*SM1\*G\*D50/3.0D0 +  
+ 36.0D0\*VIS2/(D50\*D50)) - 6.0D0\*VIS/D50  
TANFI = DATAN (FI\*PI/180.0D0)

C-----

C RUGOSIDADE E EFICIÊNCIAS: CKR, EBSA, EBSS

C-----

CKR = 3.0D0\*D90  
EBSA = 0.200D0  
EBSS = 0.025D0

C-----  
C CAUDAL SÓLIDO E CONCENTRAÇÃO (SOLUÇÃO DE BAILARD)  
C-----

```
DEN = DLOG10 (12.0D0*RH/CKR)
FAC = 0.06D0/(DEN*DEN)
CF = FAC
U2 = U*U
U3 = DABS (U2*U)
QST = (CF/(G*SM1))*((EBSA/TANFI)*(U2*U -
+      (DERIV/TANFI)*U3) + (EBSS/WQ)*(U3*U -
+      (EBSS/WQ)*DERIV*U2*U3))
RQS = (QST/Q)*SG*1.0D6

WRITE (*,5) QST,RQS
5  FORMAT('/ * C. SOLIDO, Qst =',F9.6', m2/s/'
+  ' * CONCENTRACAO, Cs = ',F9.2,' ppm em peso.')
```

RETURN  
END SUBROUTINE

## ANEXO IV

C

C-----

C      Previsão da profundidade de erosão junto de obstáculos  
C      salientes de margens. Critérios de Melville e Dongol.

C-----

PROGRAM EROSAO\_OBS

WRITE (\*,1)

1    FORMAT (/' Introduza os seguintes dados: '/

+    ' - do escoamento h0, Umed, hch, Lch -> ',\$,,\$,\$,,\$)

READ (\*,\*) h0,U0,hc,CLc

WRITE (\*,2)

2    FORMAT (' - dos sedimentos D16, D50, D84, Dmax -> ',\$,,\$,\$,\$)

READ (\*,\*) D16,D50,D84,Dmax

WRITE (\*,3)

3    FORMAT (' - do obstaculo Lco, F\_forma, F\_ori-> ',\$,,\$,\$)

READ (\*,\*) CLco,F\_forma,F\_ori

WRITE (\*,\*)

If (CLc.GT.CLco) STOP ' Lch tera de ser inferior a Lco.'

C-----

c      hch - Altura do escoamento no leito de cheias.

c      Lch - Comprimento do obstáculo no leito de cheias.

c      Lco - Comprimento da projecção do obstáculo na direcção do  
c      escoamento.

C-----

A25

C-----

C      Constantes

C-----

g = 9.81

dens = 2.65

C-----  
C      Velocidades  $U_{oc}$  e  $U_{oa}$   
C-----

$U_{ocGonch} = ALOG10(8.8*h0/D50)*$   
+       $SQRT(2.0*g*(dens-1.0)*D50/1.75)$   
 $U_{ocNeill} = 1.414*(h0/D50)**(1.0/6.0)*$   
+       $SQRT((dens-1.0)*g*D50)$   
 $U_{ocGarde} = (0.50*ALOG10(h0/D50) + 1.63)*$   
+       $SQRT((dens-1.0)*g*D50)$   
 $U_{oc} = (U_{ocGonch} + U_{ocNeill} + U_{ocGarde})/3.0$

$D50a = Dmax/1.80$   
 $U_{ocGoa} = ALOG10(8.8*h0/D50a)*$   
+       $SQRT(2.0*g*(dens-1.0)*D50a/1.75)$   
 $U_{ocNea} = 1.414*(h0/D50a)**(1.0/6.0)*$   
+       $SQRT((dens-1.0)*g*D50a)$   
 $U_{ocGaa} = (0.50*ALOG10(h0/D50a) + 1.63)*$   
+       $SQRT((dens-1.0)*g*D50a)$   
 $U_{ca} = (U_{ocGoa} + U_{ocNea} + U_{ocGaa})/3.0$   
 $U_{oa} = AMAX1(U_{oc}, 0.80*U_{ca})$

C-----  
C      Coeficiente de gradação  $S_D$   
C-----

$relL = CLco/D50$   
 $relU_{oc} = (U_0 - (U_{oa} - U_{oc}))/U_{oc}$   
 $SD = 0.5*(D84/D50 + D50/D16)$

A26 C-----  
C      Parâmetros  $K_U$  e  $K_D$   
C-----

IF (SD.LT.1.5) THEN  
     $relU = U_0/U_{oc}$   
    if (relU.LT.0.5) then  
         $CK_u = 0.0$   
    else if (relU.GE.0.5.AND.relU.LT.1.0) then

```

        CKu = 2.0*relU - 1.0
        else
            STOP ' Ku indeterminado.'
    end if

    if (relL.LT.40.0) then
        CKd = 0.44*(relL)**0.22
    else
        CKd = 1.0
    end if
    ELSE
        if (relU0ac.LT.1.0) then
            CKu = relU0ac
        else
            CKu = 1.0
        end if
        if (relL.LT.40.0) then
            CKd = 0.57*ALOG10(2.24*relL)
        else
            CKd = 1.0
        end if
    END IF

```

```

C-----
C      Parâmetro Ks
C-----

```

```

IF (relU0ac.LE.1.0) Then
    Cks = 1.520 - 0.475*SD + 0.055*SD*SD
    Else If (relU0ac.GT.1.0.AND.relU0ac.LE.2.0) Then
        CKs1 = 1.520 - 0.475*SD + 0.055*SD*SD
        CKs2 = 1.413 - 0.372*SD + 0.042*SD*SD
        CKs = 0.50*(CKs1 + CKs2)
    Else If (relU0ac.GT.2.0.AND.relU0ac.LE.3.0) Then
        CKs1 = 1.413 - 0.372*SD + 0.042*SD*SD
        CKs2 = 1.325 - 0.296*SD + 0.036*SD*SD
        CKs = 0.50*(CKs1 + CKs2)

```

Else If (relU0ac.GT.3.0.AND.relU0ac.LE.3.5) Then

$$CKs1 = 1.325 - 0.296*SD + 0.036*SD*SD$$

$$CKs2 = 1.219 - 0.202*SD + 0.026*SD*SD$$

$$CKs = 0.50*(CKs1 + CKs2)$$

Else

$$CKs = 1.219 - 0.202*SD +$$

$$0.026*SD*SD$$

+

END IF

C-----

C      Parâmetro  $K_g$

C-----

$$relLc = CLc/CLco$$

$$relHc = hc/h0$$

$$CKg = \text{SQRT}(1.0 - relLc*(1.0-(relHc)**(5.0/3.0)))$$

C-----

C      Parâmetro  $K_f$

C-----

$$relLH = CLco/h0$$

IF (relLH.LE.2.0) THEN

$$CKf = F\_forma$$

Else If (relLH.GT.2.0.AND.relLH.LE.25.0) Then

$$CKf = F\_forma + 0.087*(1.0-F\_forma)*(0.5*relLH-1.0)$$

Else

$$CKf = 1.0$$

END IF

A28

C-----

C      Parâmetro  $K_t$

C-----

IF (relLH.GE.3.0) THEN

$$CKt = F\_ori$$

Else If (relLH.GT.1.0.AND.relLH.LT.3.0) Then

```

+           CKt = F_ori + (1.0 - F_ori)*(1.5 -
           0.5*relLH)
           Else
               CKt = 1.0
           END IF

```

```

C-----
C   Parâmetro KL e profundidade máxima de erosão, he
C-----

```

```

           IF (relLH.LT.2.0) THEN
               CKh = (relLH)**(-0.20) - 0.20
               he = (2.0*CKh*CKf*CKt*CKs*CKd*CKu*CKg)*CLco
           ELSE IF (relLH.GE.2.0.AND.relLH.LE.100.0) THEN
               CKl = 0.19*(relLH)**0.30+0.10*(relLH)**0.20
               he = (10.0*CKl*CKf*CKt*CKs*CKd*CKu*CKg)*h0
           ELSE
               CKl = 1.0
               he = (10.0*CKl*CKf*CKt*CKs*CKd*
+           CKu*CKg)*h0
           END IF

```

```

           WRITE(*,5) he
5   FORMAT('// Profundidade maxima de erosao de
+ equilibrio, He = ',F7.3,' m.')

```

```

STOP
END

```

(Página deixada propositadamente em branco)

## ANEXO V

PROGRAM CONC\_ANA

C

C\*\*\*\*\*

C Programa para calcular a solução da equação de: \*

C - Convexão-dispersão 1DH de uma fonte contínua. Equação (7.18) \*

C\*\*\*\*\*

C

PARAMETER (NOUT = 10)

C

CHARACTER\*1 PRFIN

CHARACTER\*40 FICHS

DOUBLE PRECISION COEFD, U, T, XMIN, XMAX, XPAS,

+ PI, CKS, TAU

DOUBLE PRECISION X, XU, XM, XP, XN

DOUBLE PRECISION A, B, DJ, F1, F2, F3

C

PI = 4.0D0\*DATAN(1.0D0)

C

C Leitura interactiva de dados do problema

CALL DADOS (COEFD,U,T,XMIN,XMAX,XPAS,CKS,

+ NOUT,FICHS)

C

C No instante T, calcula o perfil da concentração sobre um troço

C desde XMIN até XMAX utilizando um incremento espacial XPAS

CKS = CKS/(24.0D0\*3600.0D0)

TAU = DSQRT(1.0D0 + 4.0D0\*CKS\*COEFD/(U\*U))

DO 100 X = XMIN,XMAX,XPAS

XU = (U\*X)\*(1.0D0 + TAU)/(2.0D0\*COEFD)

XM = (U\*X)\*(1.0D0 - TAU)/(2.0D0\*COEFD)

XP = (X + U\*T\*TAU)/DSQRT(4.0D0\*COEFD\*T)

$$XN = (X - U * T * \text{TAU}) / \text{DSQRT}(4.0\text{D}0 * \text{COEFD} * T)$$

C

IF(XU.GT.100..OR.DABS(XP).GT.20.) THEN

C

C A concentração é calculada utilizando uma expansão assintótica  
 C (Ver Tabela 7.2 do texto)

C

$$F1 = \text{DEXP}(-(X-U * T) * (X-U * T) * 0.25\text{D}0 / \text{COEFD} / T) / \text{DSQRT}(\text{PI})$$

+

$$A = 1.0\text{D}0$$

$$I = 2$$

$$J = 1$$

$$B = -1.0\text{D}0 / \text{XP} / \text{XP} / 2.0\text{D}0$$

$$A = A + B$$

DO WHILE (DABS(B).GT.1.0D-15.AND.I.LT.100)

$$I = I + 1$$

$$J = J + 2$$

$$\text{DJ} = J$$

$$B = -B * \text{DJ} / \text{XP} / \text{XP} / 2.0\text{D}0$$

$$A = A + B$$

ENDDO

$$F2 = A / \text{XP}$$

$$F4 = \text{DEXP}(\text{XM})$$

CALL ERF(XN,F3)

$$\text{CFXT} = 0.5\text{D}0 * (F1 * F2 + F4 * (1.0\text{D}0 - F3))$$

ELSE

$$F1 = \text{DEXP}(XU)$$

$$F4 = \text{DEXP}(\text{XM})$$

CALL ERF(XP,F2)

CALL ERF(XN,F3)

$$\text{CFXT} = 0.5\text{D}0 * (F1 * (1.0\text{D}0 - F2) +$$

$$F4 * (1.0\text{D}0 - F3))$$

+

END IF

WRITE(NOUT,90) X,CFXT

90 FORMAT(1X,F10.3,F14.10)

100 CONTINUE

```
WRITE(*,110)
110 FORMAT(/ Programa concluido normalmente.//
+ ' Carregue em CR para sair do programa.')
```

```
READ(*,120) PRFIN
120 FORMAT(A)
```

```
STOP
END
```

```
C
SUBROUTINE DADOS (COEFD, U, T, XMIN, XMAX, XPAS,
+ CKS, NOUT, FICHS)
```

```
C
C*****
```

```
C Subprograma para a leitura interactiva de dados *
C problema e abertura de ficheiro para resultados. *
```

```
C*****
C
```

```
CHARACTER*40 FICHS
DOUBLE PRECISION COEFD, U, T, XMIN, XMAX, XPAS, CKS
```

```
C
WRITE(*,10)
10 FORMAT(/' PROGRAMA CONC_ANA//
```

```
1 ' *****'//
2 ' PROGRAMA PARA CALCULAR A SOL. DA EQUACAO DE://
3 ' * CONVECCAO-DISPERSAO UNIDIMEN. DE UMA FONTE '/
4 ' CONTINUA, REACTIVA OU NAO-REACTIVA. EQ. 7.18 '//)
```

```
WRITE(*,20)
20 FORMAT(' UMA FONTE SITUADA EM X = 0 (m) COMECA NO
+ INSTANTE T = 0 (s) A//
1 ' INJECTAR UMA SUBSTANCIA NAO-REACTIVA, OU REAC.//
2 ' DE FORMA CONTINUA E CONSTANTE, POR TEMPO ILIM. /')
```

3 ' NUM ESCOAMENTO COM VELOCIDADE MEDIA  $U_x$  (m/s). '/  
4 ' O PROGRAMA CALCULA O PERFIL DA CONC. ENTRE AS '/  
5 ' ESTACOES XMIN (m) E XMAX (m), COM INCREMENTOS '/  
6 ' ESPACIAIS XPAS, NO TEMPO T(s) APOS REJEICAO.//)

C

C       Leitura dos dados do problema

C

      WRITE(\*,50)

50    FORMAT(/' LEITURA DOS DADOS DO PROBLEMA:/'

      +   ' ====='/)

C

100   WRITE(\*,110)

110   FORMAT(' ESPECIFICAM-SE:/'

      1 ' - COEF. DE DISP. LONG. (DISPERSIV. TURBULENTA)./'

      2 ' QUAL O VALOR DESTES COEF., COEFD (m<sup>2</sup>/S) ? = ', \$)

      READ(\*,\*,ERR=100) COEFD

C

120   WRITE(\*,130)

130   FORMAT(/' VEL. MEDIA DO ESCOAMENTO, U(m/s) = ', \$)

      READ(\*,\*,ERR=120) U

C

140   WRITE(\*,150)

150   FORMAT(/' TEMPO PARA O QUAL SE DESEJA CALCUL. A/'

      +   ' REPARTICAO LONGITUDINAL DA CONC., T (s) ? = ', \$)

      READ(\*,\*,ERR=140) T

C

160   WRITE(\*,170)

170   FORMAT(/' INCR. ESPACIAL SEG. X, XPAS(m) = ', \$)

      READ(\*,\*,ERR=160) XPAS

A34

C

180   WRITE(\*,190)

190   FORMAT(/' COEFICIENTE DE REACCAO, Ks (1/d) = ', \$)

      READ(\*,\*,ERR=180) CKS

C

      WRITE(\*,195)

195   FORMAT(// ' PARA REGISTO DE RESULTADOS:')

C

```
200 WRITE(*,210)
210 FORMAT(/ INICIO DO TROCO A, XMIN(m) = ', $)
    READ(*,*,ERR=200) XMIN
```

C

```
220 WRITE(*,230)
230 FORMAT(/ FIM DO TROCO A, XMAX (m) = ', $)
    READ(*,*,ERR=220) XMAX
```

C

C Leitura do nome do ficheiro de saída

C

```
900 WRITE(*,910)
910 FORMAT(/ FICHEIRO PARA RESULT.( < 40 car) = ', $)
    READ(*,920) FICHS
920 FORMAT(A)
```

```
    OPEN(UNIT=NOUT,FILE=FICHS,STATUS='UNKNOWN',
+       ERR=900)
```

C

```
    WRITE(*,930)
930 FORMAT(/ Aguarde com calma !!!)
```

RETURN

END

C

SUBROUTINE ERF (X, ERFX)

C

C\*\*\*\*\*

C Subprograma para cálculo da função ERRO de X. \*

C (Tabela da função complementar de erro no texto) \*

C O valor obtido é passado ao Programa que chamou ERF \*

C (ERFX). A variável X pode ser positiva ou negativa. \*

C NOTA: Se  $X < 0 \implies \text{ERF}(X) = -\text{ERF}(\text{ABS}(X))$ . \*

C\*\*\*\*\*

C

C Variáveis definidas localmente por este Subprograma.

```

C
C      Tipo Nome   Explicação
C      =====
C
C      R*8 A      = Denominador na fórmula aproximada da
C                          função de ERRO
C      R*8 A1     = Coeficiente na fórmula aproximada da
C                          função de ERRO.
C      R*8 A2     = idem A1
C      R*8 A3     = idem A1
C      R*8 A4     = idem A1
C      R*8 A5     = idem A1
C      R*8 A6     = idem A1
C      R*8 ERFX   = ERF(X) calculado pelo Subprograma
C      R*8 X      = Valor enviado pelo Programa
C                          para o cálculo de ERF
C      R*8 X0     = Variável intermédia para armazenar X
C

```

C\*\*\*\*\*

C Declaração de variáveis

C DOUBLE PRECISION X,X0,A,A1,A2,A3,A4,A5,A6,ERFX

C Definição de constantes

```

A1 = 0.0705230784D0
A2 = 0.0422820123D0
A3 = 0.0092705272D0
A4 = 0.0001520143D0
A5 = 0.0002765672D0
A6 = 0.0000430638D0

```

C Cálculo da função de erro, ERF(X)

C Armazena o valor original de X vindo do Programa

X0 = X

C

C Se X é negativo, troca o sinal para positivo

C

IF(X.LT.0.0D0) X = -X

C

C Utiliza uma fórmula aproximada para o cálculo de ERF(X)

C (Tabela da função complementar de erro)

C

A = 1.0D0 + A1\*X + A2\*X\*X + A3\*X\*X\*X +  
+ A4\*X\*X\*X\*X + A5\*X\*X\*X\*X\*X + A6\*X\*X\*X\*X\*X\*X  
ERFX = 1.0D0 - 1.0D0/A\*\*16

C

C Se X é negativo, recupera o valor original de X

C e troca o sinal de ERF(X)

IF(X0.LT.0.0D0) THEN

X = X0

ERFX = -ERFX

ENDIF

RETURN

END SUBROUTINE

Série

Ensino

•

Coimbra  
Imprensa da Universidade

2004