Teresa Pedroso de Lima

Lições de Álgebra Linear

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS

COIMBRA 2010

(Página deixada propositadamente em branco)

E N S I N O

I

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS

U

EDIÇÃO
Imprensa da Universidade de Coimbra
Email: imprensa@uc.pt
URL: http://www.uc.pt/imprensa_uc
Vendas online http://livrariadaimprensa.uc.pt

CONCEPÇÃO GRÁFICA
António Barros

EXECUÇÃO GRÁFICA
Sereer, soluções editoriais

ISBN
978-989-26-0046-8

ISBN DIGITAL
978-989-26-0191-5

DOI
http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-0191-5

DEPÓSITO LEGAL
310774/10

Teresa Pedroso de Lima

Lições de Álgebra Linear

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS

• COIMBRA 2010

Ao António

Ao Luís e à Joana

Índice

Capítulo III • Determinantes

Capítulo IV • Valores Próprios e Vectores Próprios

AGRADECIMENTOS

Várias pessoas tiveram um papel importante na produção deste manual:

- os meus colegas e os meus alunos da Faculdade/Universidade que, ao longo de mais de três décadas, influenciam a minha forma de estar como professora de Matemática;

- o Prof. Doutor José Vitória que me deu o gosto de escrever o Prefácio e cujas sugestões melhoraram a redacção do texto;

- e, finalmente, a equipa da Imprensa da Universidade de Coimbra que apoiou e incentivou a execução da obra.

(Página deixada propositadamente em branco)

PREFÁCIO

Ensinar e estudar álgebra linear – nos primeiros anos do Ensino Superior – continua, parece, a ser uma tarefa árdua.

A precedente afirmação fundamenta-se em factos de dois tipos: as queixas dos ensinantes/ autores e dos estudantes/ leitores; e os vários estudos que têm vindo a lume sobre o "problema da álgebra linear", com relevância, ao que conhecemos, para autores franceses e americanos.

O queixume tem: um nó – o carácter abstracto dos temas abordados; e um horizonte – a (aparente) falta de aplicação dos conceitos.

Pois bem!

Quanto à abstracção: continua a haver dois trilhos essenciais – uns autores partem do conceito de espaço vectorial; outros amaciam o caminho, apoiando-se na teoria das matrizes. A abstracção estará sempre lá, e ainda bem!

Quanto às aplicações: muito se tem escrito, em textos didácticos, sobre a vasta gama de aplicações da álgebra linear – sobretudo devido à larga difusão dos computadores amigáveis – razão por que não é difícil convencer o estudante/leitor da utilidade prática deste assunto.

E o texto que temos em mãos?

Dirige-se, essencialmente, a estudantes do 1º ciclo de estudos em Economia e Gestão. É, porém, texto adaptável para estudantes de qualquer ramo do conhecimento que seja cliente da álgebra linear: ciências duras ou ciências moles; ciências exactas ou naturais; ciências humanas ou sociais.

A autora – com prática longa, diversificada, diferenciada, reflectida – resistiu a duas tentações: a do egoísmo disciplinar (não pondo todo o peso na sua disciplina em detrimento de outras); e a da inovação a todo o custo.

De facto, o texto em apreço: é modesto na sua ambição – texto de apoio a estudantes que (passe a redundância...) vão às aulas; está escrito em linguagem simples, rigorosa, densa e, mesmo, tensa; é pouco retórico e as notações são adequadas e não suscitam confusão.

Para quê mais um livro de álgebra linear e, ainda por cima, em língua portuguesa?
Esta pergunta ocorrerá a muita gente: ensinantes, avaliadores de diversos painéis... e, mesmo, estudantes.
Aberto este livro, encontramos um texto: breve, bem elaborado, bem estruturado e escrito em bom Português.
Pensando nos principais destinatários e olhando pormenorizadamente para o conteúdo, concluímos que estas Lições de Álgebra Linear têm futuro.
Destinando-se a alunos do primeiro ciclo de Economia e Gestão, está entendido por que se trata de texto curto, rigoroso mas não presunçoso.

Alunos que vão às aulas! Se vão às aulas, que necessidade há para este texto?
A aula dá ao estudante o ambiente: para a motivação, para participar na construção dos conceitos, para pressentir a aplicação, para medir a tensão entre o rigor e a intuição.

Ter um texto destes à disposição permite ao estudante várias coisas: estar disponível para usufruir das aulas em toda a plenitude, sem a preocupação de registar informação; antecipar a ida à aula ou tentar suprir a lacuna, se lá não foi; ter tempo, noutro espaço, para meditar sobre a matéria que lhe é proposta; e medir forças com um texto que, apesar da escrita densa e tensa – como já dissemos – encaminha, pacientemente, o leitor em passos seguros e sem atalhos enganadores.
Escolhidos os principais destinatários, o conteúdo, adequadamente, centra-se nas ferramentas que são as matrizes e os determinantes – com a finalidade de tratar dos sistemas de equações algébricas lineares e, de caminho, estudar o problema dos valores próprios.
No delicado tema dos valores próprios e vectores próprios vai-se longe, a ponto de se incidir sobre os espaços próprios e fazer uma incursão pela decomposição espectral duma matriz.
Ao longo do texto, há numerosos exemplos e exercícios, alguns dos quais, pelo simples facto da sua formulação, indiciam a larga experiência docente da autora.

Este é um texto para os alunos se iniciarem na Álgebra Linear. Ficam estes estudantes matematicamente maduros, mesmo que, com aturado esforço, consigam dominar os conceitos aqui apresentados? É claro que não! Nem com este texto, nem com nenhum outro.

O que é um estudante maduro? É alguém que, no fim dum ciclo, mais ou menos demorado, de estudos, seja capaz de: manejar a verruma da intuição, empunhar a enxó do rigor, afilar a ponta analítica, tecer a rede sintética, amolar o gume crítico, abrir o dique da iniciativa, exercitar o músculo organizativo, rodar a dobadoira da perseverança.

Para que um aluno devenha um estudante sazonado, não há livro de texto que baste! Há que dar vida a um texto, isto é, há que acrescentar: o professor – profissionalmente lúcido e civicamente empenhado; a escola – aberta e culta; e o próprio estudante – que tem que trabalhar. Trabalhar no sentido seguinte: no dever que tem de aproveitar o direito ao acesso ao abstracto, de não desperdiçar a concedida oportunidade da prática da abstracção.

Vale a pena fazer tal esforço.

Coimbra, Abril de 2010

José Vitória

Professor Catedrático de Matemática Aposentado

Universidade de Coimbra

(Página deixada propositadamente em branco)

PALAVRAS INICIAIS

Como tornar a Álgebra Linear acessível aos alunos?

Como incutir-lhes o gosto por este ramo da matemática? Como desafiá-los, através do domínio de conceitos e técnicas específicas, a desenvolver o raciocínio lógico, a intuição, a imaginação, a iniciativa, a criatividade, a capacidade crítica e a autonomia intelectual?

À medida que a experiência se acumula, a nossa motivação torna-se cada vez mais clara: a resposta, essa, permanece um desafio.

Todos os anos, na unidade curricular de Álgebra Linear do 1º ciclo de Economia, deparamo-nos com a mesma dificuldade. Quando passamos da rotina dos cálculos na resolução de sistemas de equações lineares e operações com matrizes para a abordagem de ideias e conceitos como valor próprio e vector próprio de uma matriz (ou, ainda, espaço próprio e diagonalização de uma matriz), gera-se uma autêntica barreira entre nós e os que nos ouvem. A verdade é que a compreensão destes tópicos requer mais trabalho, persistência e concentração da parte dos alunos, independentemente do nosso esforço e empenho. Por isso, embora se espere que estejamos a incentivar a autonomia intelectual dos nossos estudantes, as mais das vezes limitamo-nos a treinar a sua capacidade de reproduzir informação e/ou efectuar cálculos sem rumo.

Sabendo que, enquanto matemáticos, estudamos Matemática a partir de um estímulo – que pode ser uma conferência, uma aula, um livro ou simplesmente uma ideia que nos ocorre – que nos incentiva a elaborar exemplos, fazer conjecturas, resolver problemas e demonstrar teoremas, como podemos, afinal, ajudar os nossos alunos (não-matemáticos) a estudar Matemática, em particular Álgebra Linear?

Tal como referimos, a resposta escapa-nos ainda. Todavia, a experiência alertou-nos para as seguintes questões:

- Porque que é que os matemáticos têm tanta dificuldade em se fazer compreender?
- Porque é que as pessoas que têm má relação com a Matemática culpam quase sempre os seus professores?
- Porque é que grande parte dos nossos alunos se queixa da linguagem codificada/cifrada usada nos livros de textos e pelos professores?

Uma das principais razões prende-se com o facto de as nossas aulas não serem frequentadas por matemáticos, mas sim por estudantes que não têm a mínima intenção em tornar-se futuros matemáticos. Talvez por isso uma definição abstracta lhes desperte menor atenção!
Não pondo, de forma alguma, em causa a importância da abstracção e generalização no desenvolvimento desta disciplina, certo é que, neste âmbito, temos em vista, mais do que abordar a sua criação, falar de comunicação da Matemática.

Por isso, com este texto não pretendemos publicar outro (mais um ...) manual de Álgebra Linear, mas sim criar um instrumento de apoio para cursos que visem iniciar os estudantes no estudo desta disciplina.

Trata-se de um texto, breve e auto contido, preferencialmente dirigido a alunos que frequentem o 1º Ciclo em Economia ou Gestão. Por assim ser, ao escrevê-lo tentámos observar algumas regras que nos parecem fundamentais:
(i) Utilizar, apenas, a terminologia necessária, reconhecendo que nem todos pensam como um matemático;
(ii) Evitar confundir abordagem coerente e rigorosa com estudo exaustivo e completo, e, nesse sentido, substituir algumas das demonstrações mais exigentes por exemplos esclarecedores;
(iii) Assumir que os estudantes/leitores podem não estar familiarizados com o nosso vocabulário e que as palavras que utilizamos muitas vezes não significam o mesmo para os outros do que para nós.

As dificuldades com o vocabulário são terrivelmente inibidoras, embora não sejam, apenas, característica da Matemática. O que torna frustrante as conversas de um leigo com um economista, um jurista ou um físico são dificuldades semelhantes. Muitos destes profissionais insistem numa linguagem técnica extremamente apurada, com a justificação de que "é muito mais precisa". Não discordando desta última afirmação, parece-nos importante contrapor que a terminologia sofisticada só é clara quando são necessárias distinções muito finas e rigorosas e que, de um modo geral, num curso introdutório a sua utilização se torna inútil e até nociva.

Mas, se é verdade que em Matemática não se pode avançar muito sem recorrer a símbolos, também é certo que não nos podemos deixar fascinar pelo simbolismo a ponto de nos afastarmos do nosso objectivo inicial. Ou seja, não devemos esquecer que a nossa audiência (sejam ouvintes ou leitores) está menos familiarizada com certo tipo de terminologia do que nós próprios. Assim, e a título de exemplo, na maior parte das vezes, não é aconselhável dizer «Seja v um elemento do espaço vectorial real $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$» em vez de «Seja v um vector do plano». Além disso, se não vamos utilizar $\mathbb{R}^2$ como um espaço vectorial, mas apenas as propriedades dos seus elementos enquanto pares ordenados, chamar a atenção, de quem nos ouve ou lê, em determinado contexto, para a estrutura de espaço vectorial pode ser irrelevante e, até mesmo, roçar o puro espalhafato.

Deste modo, parece-nos desaconselhável criar novos símbolos ou, sem justificação, alterar os que são de uso corrente. Por outro lado, se o par $(1, \sqrt{3})$ pode representar um ponto do plano, um vector de comprimento 2, uma matriz coluna do tipo 2×1 ou um elemento do espaço vectorial real $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$, devemos admitir todas as diferentes utilizações e explicá-las cuidadosamente. Porque este é um dos aspectos mais fascinantes da Álgebra Linear: associar uma enorme simplicidade teórica a um poder absoluto nas aplicações.

Todavia, trata-se de uma disciplina em que o domínio das técnicas, se dissociado da compreensão das ideias e dos conceitos, de nada vale. Assim, é com efectiva apreensão que continuamos a constatar que a maioria dos estudantes que ingressam na universidade recebera uma educação matemática, reduzida à mera manipulação de números e símbolos, na qual foram obrigados a repetir, exaustivamente, colecções de exercícios análogos e pouco estimulantes.

É neste sentido que nos empenhamos em sensibilizar os estudantes para a importância do papel que a Matemática desempenha na compreensão das questões sociais e (não menos importante) alertá-los para o uso, não uso, mau uso e abuso que dela se faz constantemente.

Com este objectivo, esperamos que, também com estas lições, consigamos:

- esclarecer os nossos alunos de que embora, nalgumas circunstâncias, a Matemática possa complicar e intimidar, ela é indispensável na decisão da escolha dos números, das relações ou associações que são fiáveis;
- e, simultaneamente, fazê-los sentir que o seu afastamento nos pode colocar em grande desvantagem quando nos dispomos a reflectir sobre a multiplicidade de questões que surgem no nosso quotidiano.

Esta é, do nosso ponto de vista, a melhor forma de os preparar para um futuro que se adivinha incerto e exigente.

Coimbra, 27 de Janeiro de 2010

Teresa Pedroso de Lima

CAPÍTULO I • MATRIZES

I.1 – Conceito de vector. Operações com vectores e algumas propriedades: adição de vectores e multiplicação de um vector por um escalar. Combinação linear de um conjunto de vectores

Vamos falar de «vectores» enquanto elementos do plano ordinário

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2): x_i \epsilon \mathbb{R}, i = 1,2\},$$

do espaço ordinário

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3): x_i \epsilon \mathbb{R},\ i = 1,2,3\},$$

e, de um modo geral, do conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \epsilon \mathbb{R},\ i = 1,2, \cdots, n\};^{i}$$

e, ainda, de «escalares» que, no nosso contexto, são números reais[ii].

Começamos pela seguinte

Questão I.1.1.

O que é um vector?

---

[i] Repare-se que podemos definir $\mathbb{R}^2$ como o conjunto dos pares ordenados de números reais, $\mathbb{R}^3$ como o conjunto dos ternos ordenados de números reais e, finalmente, $\mathbb{R}^n$ como o conjunto das sequências ordenadas de números reais.

[ii] Excepto no Capítulo IV, onde os escalares podem ser valores próprios de uma matriz, e, como tal, raízes de uma equação polinomial.

Exercício I.1.2.

Recordando o que estudou anteriormente e depois de ter lido o texto seguinte – http://www.infopedia.pt/$vector>[iii] –, responda à Questão I.1.1.

«Vector – Designa-se por vector o conjunto infinito de todos os segmentos de recta orientados, equipolentes entre si, ou seja, o conjunto infinito de todos os segmentos de recta orientados que possuem o mesmo comprimento, a mesma direcção e o mesmo sentido. Na prática, para representar um vector, tomamos apenas um dos infinitos segmentos orientados que o compõe. (...)

Durante muito tempo o segmento de recta orientado foi designado por vector aplicado e o vector actual de vector livre. Na Matemática, a designação de vector aplicado caiu em desuso mas, na Física, ainda se aplica tal designação e, por vezes, simplificada para vector, o que faz com que neste caso se tenha de considerar também um ponto de aplicação para caracterizar este "vector".

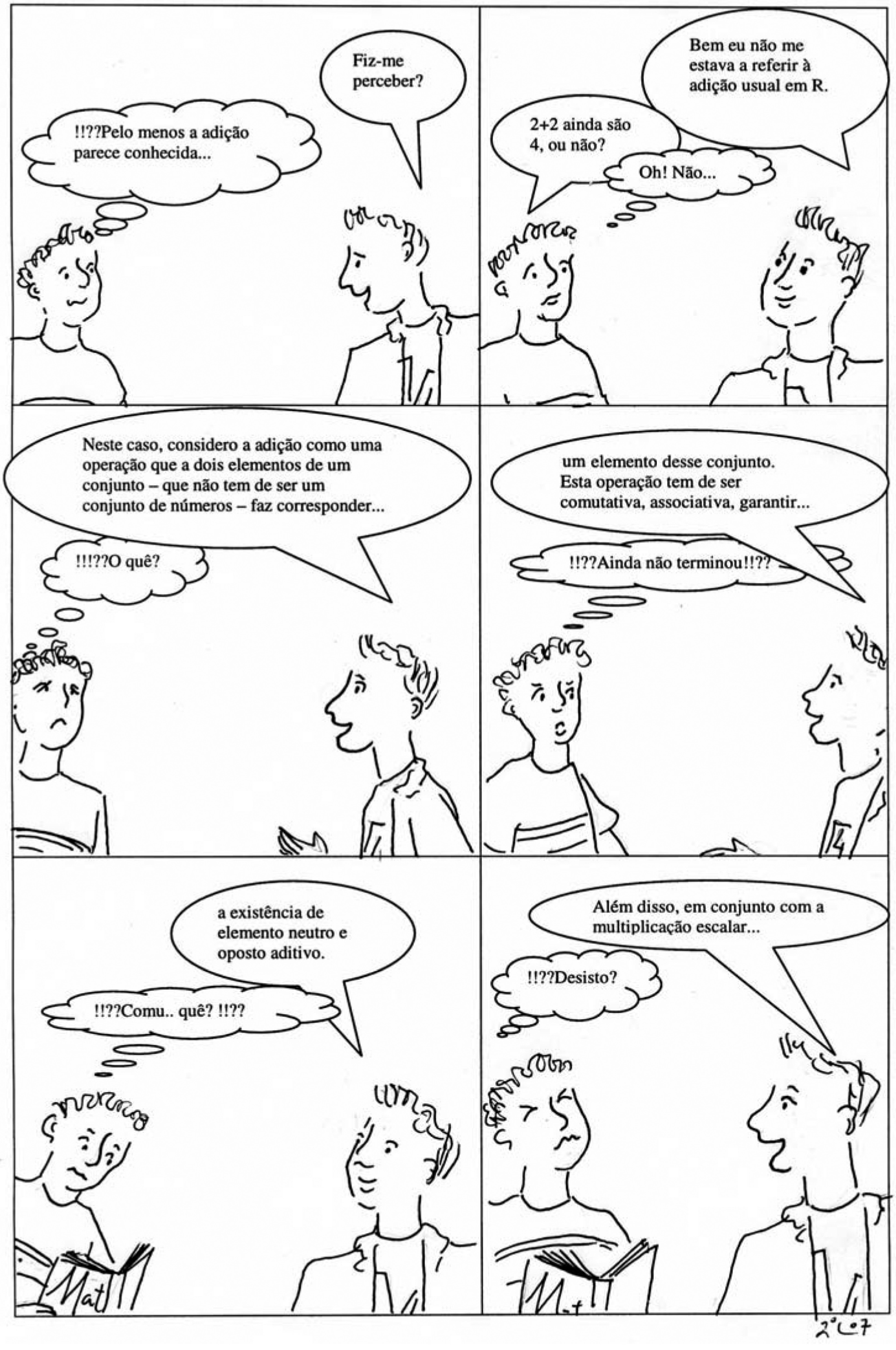
Muitas grandezas como, por exemplo, a força que actua sobre um corpo, a velocidade de um determinado objecto em movimento ou a posição de um outro relativamente a um ponto fixo são representadas por vectores (no sentido da designação de Física), dado que, ao contrário de outras grandezas como a área, o volume ou a temperatura (a que se dá o nome de grandezas escalares ou, simplesmente, escalares), não podem ser totalmente definidos por um simples valor numérico. Com efeito, se quisermos indicar a posição de um objecto relativamente a um dado ponto não basta dizer que aquele se encontra a uma distância determinada deste. É, também, necessário saber em que direcção e, dentro dessa direcção, em que sentido ele se encontra.»

E se se perguntar a um matemático o que é um "vector", qual será a resposta? Muito provavelmente será: "É um elemento de um espaço vectorial."

Ora esta informação só é útil para um grupo restrito de pessoas que utilizam a mesma linguagem científica. Pois, o diálogo acima iniciado teria – quase de certeza – um desfecho análogo ao que seguir se descreve:

[iii] *vector*. In Infopédia [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2010. [Consult. 2010-01-03]. Disponível na www: <URL: http://www.infopedia.pt/$vector>.


O que é um vector?
É um elemento de um espaço vectorial.
!!!???
E o que é um espaço vectorial?
É uma estrutura algébrica. Concretizando...
!!??Estrutura algébrica?
Consideramos um conjunto munido de duas operações...
!!??Que confusão? !!??
Uma adição e uma multiplicação escalar.
!!??Escalar? Será uma multiplicaçãopara alpinistas?



!!??Pelo menos a adição parece conhecida...
Fiz-me perceber?
2+2 ainda são 4, ou não?
Bem eu não me estava a referir à adição usual em R.
Oh! Não...
Neste caso, considero a adição como uma operação que a dois elementos de um conjunto – que não tem de ser um conjunto de números – faz corresponder...
!!!??O quê?
um elemento desse conjunto. Esta operação tem de ser comutativa, associativa, garantir...
!!??Ainda não terminou!!??
a existência de elemento neutro e oposto aditivo.
!!??Comu.. quê? !!??
Além disso, em conjunto com a multiplicação escalar...
!!??Desisto?

Os objectivos que delineámos para estas Lições de Álgebra Linear não se alcançam, seguramente, com diálogos deste género. Façamos, pois, um esforço para os evitar!

Neste manual vamos definir vector de um modo mais abrangente do que o utilizado no Ensino Secundário. Assim, recapitulemos algumas ideias e conceitos.

Como sabemos, $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2): x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R}\}$ pode representar o conjunto de todos os pontos do plano onde, previamente, definimos um sistema de eixos coordenados ortogonais e monométricos de origem $O(0,0)$.

Consideremos, agora, o par ordenado $x = (x_1, x_2)$ onde x_1 e x_2 são números reais. Associamos a x um segmento de recta orientado $\overrightarrow{OP}$ com origem no ponto $O(0,0)$ e extremidade no ponto $P(x_1, x_2)$.

Note-se que

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (x_1, x_2) - (0,0).$$

Reciprocamente, podemos associar a um segmento de recta orientado $\overrightarrow{OP}$ [iv] o par ordenado $x = (x_1, x_2)$. Isto é,

$$\underbrace{x = (x_1, x_2)}_{\text{par ordenado}} \leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{OP}}_{\text{vector}} \leftrightarrow \underbrace{P(x_1, x_2)}_{\text{ponto do plano}} .$$

Assim, — dado que a cada vector livre (representante de uma classe de equivalência de segmentos orientados de igual comprimento, direcção e sentido) podemos associar um segmento de recta orientado com origem em $O(0,0)$ e a cada segmento de recta orientado com origem em $O(0,0)$ podemos associar um vector livre — estabelecemos a seguinte correspondência biunívoca

---

[iv] Com origem no ponto $O(0,0)$ e extremidade no ponto $P(x_1, x_2)$.

$$\overrightarrow{OP} \leftrightarrow \ x = (x_1, x_2).$$

Isto é, confundimos propositadamente pares ordenados, segmentos orientados com origem em $O(0,0)$, vectores e pontos do plano.

Note-se que o comprimento e a direcção de um vector (do plano $\mathbb{R}^2$) são o comprimento e a direcção de qualquer segmento de recta orientado que lhe esteja associado.

Deste modo passaremos a definir um vector x (do plano $\mathbb{R}^2$) como um par ordenado (x_1, x_2), em que os números reais x_1 e x_2 são chamados coordenadas do referido vector x e escrevemos $x = (x_1, x_2)$.[v]

Generalizando,

Definição I.1.3. [vector]

Chamamos **vector** a uma sequência ordenada de números reais.

Mais concretamente, se $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, e,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n vezes}} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \colon x_i \epsilon \mathbb{R}, i = 1,2, \cdots, n\},$$[vi]

então dizemos que $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é um vector de $\mathbb{R}^n$.

Assim, representamos o vector $x \in \mathbb{R}^n$ pelo n-uplo[vii] $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Todavia, também o designamos, algumas vezes, por uma coluna, neste caso $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.[viii]

[v] Dado que a cada vector (do plano $\mathbb{R}^2$) podemos fazer associar, de modo único, um ponto de $\mathbb{R}^2$.

[vi] Recorde-se o conceito de produto cartesiano de conjuntos, $A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$.

[vii] O que quer dizer sequência ordenada de n elementos.

[viii] Quando optamos por uma letra, nesta circunstância, x, escolhemos, geralmente, entre as últimas do alfabeto.

Deste modo, podemos escrever

$$x \underbrace{=}_{\text{notação}} (x_1, x_2, \cdots, x_n) \underbrace{=}_{\text{notação}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

No que se segue chamaremos aos n números reais $x_1, x_2, \cdots, x_n$ coordenadas do vector $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Exemplos I.1.4.

(i) $(1, \quad 2)$, $\begin{bmatrix} 0.1 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$, $\left(\frac{21}{3}, \quad \frac{21}{3}\right)$, $(0, \quad 0)$ e $\begin{bmatrix} \pi \\ 9 \end{bmatrix}$ são elementos de $\mathbb{R}^2$.

Recorde-se que $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2): x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R}\}$ e, consequentemente, qualquer par ordenado de números reais é um vector de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Analogamente,

$(1, \quad 2, \quad 0)$, $\begin{bmatrix} 0.1 \\ \sqrt{7} \\ 3.2 \end{bmatrix}$, $\left(\frac{21}{3}, \quad \frac{21}{3}, \quad \frac{21}{3}\right)$, $(0, \quad 0, \quad 0)$ e $\begin{bmatrix} \pi \\ 9 \\ \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$ são vectores de $\mathbb{R}^3$.

Saliente-se, mais uma vez, que qualquer terno ordenado de números reais é um vector de $\mathbb{R}^3$.

Definição I.1.5. [Igualdade de vectores]

Dizemos que dois vectores de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, são **iguais** se e só se $x_i = y_i$, para todo o $i = 1,2, \cdots, n$.

Exemplo I.1.6.

Os vectores $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ são iguais. Todavia se $w = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ então $u \neq w$. (Porquê?)

Recordemos, agora, as operações básicas para vectores do plano.

Definição I.1.7.

Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ dois vectores do plano $\mathbb{R}^2$. A soma **dos** vectores u **e** v é o vector $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ que se designa por $u + v$.

Seja $u = (u_1, u_2)$ um vector do plano $\mathbb{R}^2$ e α um número real.

O produto do vector u pelo número α é o vector $(\alpha u_1, \alpha u_2)$ que se designa por αu.

Geometricamente: se v é um vector, $2v$ é um vector com a mesma direcção, o mesmo sentido e com o dobro do comprimento. Por outro lado, na adição de vectores utilizamos a Regra do Triângulo ou a Regra do Paralelogramo.

Generalizamos, facilmente, estas operações aos vectores de $\mathbb{R}^n$.

Definição I.1.8. [Adição em $\mathbb{R}^n$]

Sejam $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dois vectores de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que o vector $x + y$, resultado da operação

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x,y) &\longrightarrow x+y, \end{aligned}$$

é a soma de x com y, e definimos $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$.

Mais concretamente, se $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ e $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, tem-se

$$x+y=(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n) \underbrace{=}_{\substack{\text{por}\\ \text{definição}}} (x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n).$$

Definição I.1.9. [Multiplicação escalar em $\mathbb{R}^n$]

Seja $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ um vector de $\mathbb{R}^n$ e α um número real[ix]. Definimos multiplicação escalar em $\mathbb{R}^n$ como se segue

$$\begin{aligned} \bullet\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha,x) &\longrightarrow \alpha \bullet x \end{aligned}.$$

Neste caso, o resultado da operação é, também, um vector de $\mathbb{R}^n$. Mais concretamente, o produto do vector x pelo número real α é o vector

$$\alpha \bullet x \underbrace{=}_{\text{notação}} \alpha x \underbrace{=}_{\substack{\text{por}\\ \text{definição}}} (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n).$$

Exercícios I.1.10.

a) Sejam $x=(1,\quad 2,\quad 3)$ e $y=(-1,\quad 0,\quad -5)$ dois vectores de $\mathbb{R}^3$.

[ix] Recorde-se que, neste manual, designamos os números (reais) por escalares.

Calcule:

(a-i) $u = x + y$ e $v = x - y$;

(a-ii) $w = 5x + 3y$ e $z = 2x - y$.

b) Sabendo que $a + b = (3, \quad 1)$ e $a - b = (1, \quad 3)$, determine os vectores $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$. Descreva geometricamente a resolução por si escolhida.

Observação I.1.11.

Na alínea a-ii) do exercício anterior constatamos que, para determinar os vectores $w = 5x + 3y$ e $z = 2x - y$, temos que combinar as duas operações anteriores — a adição e a multiplicação escalar em $\mathbb{R}^3$.

Os vectores assim obtidos — $w = 5x + 3y$ e $z = 2x - y$ — dizem-se combinações lineares dos vectores iniciais $x = (1, \quad 2, \quad 3)$ e $y = (-1, \quad 0, \quad -5)$.

Verificamos, também, que a adição de vectores e a multiplicação de um vector por um número (escalar) satisfazem as seguintes

Propriedades I.1.12.

1. A adição de vectores é associativa, isto é, para quaisquer u, v e w:

$$u + (v + w) = (u + v) + w.$$

2. A adição de vectores é comutativa, isto é, para quaisquer u e v:

$$u + v = v + u.$$

3. Existe um único vector de comprimento igual a zero que se diz vector nulo e se designa por $0 = (0,0, \cdots, 0)$.

Além disso, para todo o vector u:

$$u + 0 = 0 + u = u.$$

4. Para cada vector u, existe um e um só vector $(-1)u = -u$, tal que:

$$u + (-u) = (-u) + u = 0.$$

5. Para todo o vector u e todos os números reais α e β,

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u).$$

6. Para qualquer vector u,

$$1u = u,$$

sendo 1 o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{R}$.

7. Para qualquer vector u e quaisquer números reais α e β,

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$$

8. Para todos os vectores u e v e todo o número real α,

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

Definimos, de seguida, combinação linear de um conjunto de vectores.

Definição I.1.13. [Combinação linear de um conjunto de vectores]

Seja $p \geq 1$.

Consideremos p vectores de $\mathbb{R}^n$, $v_1, v_2, \cdots, v_p$, e p escalares, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$.

Nestas condições, dizemos que o vector

$$\begin{bmatrix} v \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_p \begin{bmatrix} v_p \end{bmatrix}$$

é uma combinação linear dos vectores $v_1, v_2, \cdots, v_p$.

Exercícios I.1.14.

a) Sejam $u = (3, \quad 7)$ e $v = (-1, \quad 1)$ dois vectores de $\mathbb{R}^2$.

(a-i) Determine as coordenadas das combinações lineares dos vectores u e v a seguir indicadas:

$$w = u + 3v,$$

$$y = -2u + 4v,$$

$$z = \alpha u + \beta v,$$

onde α e β são números reais.

(a-ii) Indique dois números, θ_1 e θ_2, de modo que

$$\theta_1 u + \theta_2 v = (5, \quad 5).$$

b) Calcule as coordenadas dos vectores $-x - y$, $x + y + z$ e $2x + 2y + z$, sendo

$$x = (1, \quad 2, \quad 3),\ y = (-3, \quad 1, \quad -2) \text{ e } z = (2, \quad -3, \quad -1).$$

c) Verifique que se $x = (x_1, x_2, x_3)$ é uma combinação linear dos vectores $u = (5, \quad -2, \quad -3)$ e $v = (-1, \quad 0, \quad 1)$ então a soma das suas coordenadas é zero, isto é, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

d) Seja $[ABCD]$ um paralelogramo do qual apenas se conhecem três dos seus vértices, nomeadamente, $(1,1)$, $(4,2)$ e $(1,3)$.

(d-i) Que pontos do plano $\mathbb{R}^2$ podem ser escolhidos para quarto vértice? Faça um esboço geométrico das possibilidades encontradas.

(d-ii) Resolva o problema anterior para o caso em que os três vértices conhecidos são $(1,-2)$, $(0,0)$ e $(4,2)$.

e) No plano XOY represente as nove combinações lineares a seguir indicadas

$$\alpha(5, \quad 2)+\beta(0, \quad 1), \text{ para } \alpha=0,1,2 \text{ e } \beta=0,1,2.$$

f) Dados dois vectores $x=(1, \quad 2, \quad 3)$ e $y=(-1, \quad 0, \quad -5)$ de $\mathbb{R}^3$, verifique se:

(f-i) $u=(2, \quad 6, \quad 6)$ é uma combinação linear de x e y;

(f-ii) $v=(-9, \quad -2, \quad 5)$ é uma combinação linear de x e y.

g) Sejam $u=(-4, \quad 0, \quad \frac{1}{4})$ e $v=(-|\theta+1|, \quad 0, \quad \gamma^2)$, onde $\theta,\gamma \in \mathbb{R}$, dois vectores de $\mathbb{R}^3$.

(g-i) Determine:

(g-i1) um vector $w=(w_1,w_2,w_3)$ com a mesma direcção que u mas com sentido contrário ao de u.

(g-i2) $\theta,\gamma \in \mathbb{R}$ de modo que $u=v$.

(g-ii) Faça $\theta=\gamma=0$. Verifique se $y=(-1, \quad 0, \quad 1)$ é uma combinação linear dos vectores u e v.

h) Considere os vectores de $\mathbb{R}^3$

$$u_1=(2, \quad 3, \quad 6),\ u_2=(1, \quad 1, \quad 2) \text{ e } u_3=(10, \quad 1, \quad 2).$$

(h-i) Calcule as seguintes combinações lineares dos vectores u_1, u_2 e u_3:

(h-i1) u_1-u_2;

(h-i2) $u_1 + u_2 - 3u_3$.

(h-ii) Verifique se u_3 é uma combinação linear de u_1 e u_2.

(h-iii) O vector nulo é combinação linear de u_1 e u_2? E de u_1, u_2 e u_3? Justifique a sua resposta.

i) Calcule $u \in \mathbb{R}^4$ de modo que

$$\sqrt{2}u - u = u + (2u - u_0) + u + 4u_0,$$

sendo $u_0 = (1, \quad -2, \quad 6, \quad \pi)$.

I.2 - Produtos com vectores e normas: vectores ortogonais; conjunto ortogonal de vectores; conjunto ortonormal de vectores

Vamos definir, agora, produto interno de dois vectores de $\mathbb{R}^n$, bem como norma euclidiana (ou comprimento euclidiano) de um vector.

Definição I.2.1. [Produto interno em $\mathbb{R}^n$]

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que o resultado da operação

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

é o produto interno[x] do vector x pelo vector y.

Mais concretamente, note-se que se $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ então

$$\langle x, y \rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

Observação com exemplos I.2.2.

(i) No caso particular de $\mathbb{R}^2$ temos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ e, consequentemente,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

[x] Alguns autores também utilizam a designação “produto escalar”.

Deste modo, se $u = (\frac{14}{3}, \quad \frac{1}{6})$ e $v = (1, \quad 8)$ então

$$\langle u, v\rangle = \left(\frac{14}{3}\right)(1) + \left(\frac{1}{6}\right)(8) = 6.$$

(ii) Em $\mathbb{R}^3$ temos $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ pelo que

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Neste caso, verificamos que se $u = \left(\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{6}, \quad 0\right)$ e $v = (1, \quad 0, \quad 8)$ então

$$\langle u, v\rangle = \left(\frac{1}{3}\right)(1) + \left(\frac{1}{6}\right)(0) + (0)(8) = \frac{1}{3}.$$

Também constatamos que

$$\langle u, u\rangle = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + (0)(0) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

e

$$\langle v, v\rangle = (1)(1) + (0)(0) + (8)(8) = 65.$$

Definição I.2.3. [Vectores ortogonais]

Dois vectores, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, dizem-se ortogonais em $\mathbb{R}^n$ se e só se o seu produto interno é nulo, isto é, se e só se $\langle x, y\rangle = 0$.

Exemplos I.2.4.

(i) Seja $x = (1, \quad 2)$ e $y = (-2, \quad 1)$. Então

$$\langle x, y\rangle = (1)(-2) + (2)(1) = 0$$

e podemos garantir que os vectores $x = (1, \quad 2)$ e $y = (-2, \quad 1)$ são ortogonais;

(ii) Sejam $x = (2, \quad -3, \quad 1)$, $y = (1, \quad 1, \quad 1)$ e $z = (4, \quad 3, \quad 2)$.

Verificamos que

$$\langle x, y \rangle = (2)(1) + (-3)(1) + (1)(1) = 0,$$

$$\langle 2x, y \rangle = (4)(1) + (-6)(1) + (2)(1) = 0,$$

$$\langle x, (-3)y \rangle = (2)(-3) + (-3)(-3) + (1)(-3) = 0,$$

$$\langle y, x \rangle = (1)(2) + (1)(-3) + (1)(1) = 0$$

e

$$\langle (-3)y, 2x \rangle = (-3)(4) + (-3)(-6) + (-3)(2) = 0.$$

Todavia

$$\langle x, z \rangle = (2)(4) + (-3)(3) + (1)(2) = 1$$

e

$$\langle y, z \rangle = (1)(4) + (1)(3) + (1)(2) = 9.$$

Além disso

$$\langle 2x, z \rangle = (4)(4) + (-6)(3) + (2)(2) = 2 = 2\langle x, z \rangle,$$

$$\langle x, \left(-\tfrac{1}{2}\right)z \rangle = (2)(-2) + (-3)\left(-\tfrac{3}{2}\right) + (1)(-1) = -\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}\langle x, z \rangle,$$

$$\langle y, \left(-\tfrac{1}{2}\right)z \rangle = (1)(-2) + (1)\left(-\tfrac{3}{2}\right) + (1)(-1) = -\tfrac{9}{2} = -\tfrac{1}{2}\langle y, z \rangle,$$

$\langle(-3)y,\left(-\frac{1}{2}\right)z\rangle = (-3)(-2) + (-3)\left(-\frac{3}{2}\right) + (-3)(-1) = \frac{27}{2} = (-3)\left(-\frac{1}{2}\right)\langle y, z\rangle$

e

$\langle x + y, z\rangle = (3)(4) + (-2)(3) + (2)(2) = 10 = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Neste caso dizemos que:

(i) os vectores $x = (2, \quad -3, \quad 1)$ e $y = (1, \quad 1, \quad 1)$ são ortogonais;

(ii) os vectores $2x = (4, \quad -6, \quad 2)$ e $y = (1, \quad 1, \quad 1)$ são ortogonais;

(iii) os vectores $x = (2, \quad -3, \quad 1)$ e $(-3)y = (-3, \quad -3, \quad -3)$ são ortogonais;

(iv) os vectores $2x = (4, \quad -6, \quad 2)$ e $(-3)y = (-3, \quad -3, \quad -3)$ são ortogonais;

(v) os vectores $x = (2, \quad -3, \quad 1)$ e $z = (4, \quad 3, \quad 2)$ não são ortogonais;

(vi) os vectores $y = (1, \quad 1, \quad 1)$ e $z = (4, \quad 3, \quad 2)$ não são ortogonais;

(vii) os vectores $x + y = (3, \quad -2, \quad 2)$ e $z = (4, \quad 3, \quad 2)$ não são ortogonais.

Definição I.2.5. [Vector nulo]

Chamamos vector nulo ao n-uplo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se e só se

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Exercícios I.2.6.

a) Mostre que:

(i) O vector nulo $(0, \quad 0)$ é ortogonal a todos os vectores de $\mathbb{R}^2$;

(ii) O vector nulo $(0,\quad 0,\quad 0)$ é ortogonal a todos os vectores de $\mathbb{R}^3$;

(iii) Os vectores $(4,\quad -10)$ e $(5,\quad 2)$ são ortogonais em $\mathbb{R}^2$;

(iv) Os vectores $(7,\quad 3,\quad -10)$ e $(1,\quad 1,\quad 1)$ são ortogonais em $\mathbb{R}^3$;

b) Determine dois vectores, com coordenadas não nulas, ortogonais em $\mathbb{R}^5$.

Definição I.2.7. [Conjunto ortogonal de vectores]

Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_p$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ é um conjunto ortogonal de vectores de $\mathbb{R}^n$ se e só se

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \text{ sempre que } i \neq j.$$

Exemplo I.2.8.

a) O conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde

$v_1 = (-1,\quad 1,\quad 0,\quad 0)$, $v_2 = (-1,\quad -1,\quad 2,\quad 0)$,

$v_3 = (-1,\quad -1,\quad -1,\quad 3)$ e $v_4 = (1,\quad 1,\quad 1,\quad 1)$,

é um conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^4$ uma vez que

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_4 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, v_4 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle = 0.$$

b) O conjunto $\{(0,\quad 0,\quad 0)\}$ é um conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^3$?

c) Seja $u = (4, \quad 0, \quad -4)$ um vector de $\mathbb{R}^3$. Determine um vector não nulo, $w = \{w_1, w_2, w_3\}$, que seja ortogonal a u, e, além disso, se escreva como combinação linear dos vectores $(-1, \quad 1, \quad 0)$ e $(1, \quad 2, \quad -3)$.

Associado à noção de produto interno surge o conceito de comprimento de um vector.

Definição I.2.9. [Comprimento euclidiano (ou norma euclidiana) em $\mathbb{R}^n$]

Dado $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dizemos que o número real

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

é o comprimento euclidiano (ou norma euclidiana) do vector$x$.

Exemplos I.2.10. [Comprimento euclidiano[xi] em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$]

a) Em $\mathbb{R}^2$, se $x = (1, \quad 2)$ e $y = (1, \quad -1)$ então

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \|y\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

b) Em $\mathbb{R}^3$, dados os vectores

$$x = (-2, \quad -3, \quad -1), \; y = (-1, \quad 0, \quad -1) \quad \text{e} \quad z = (-4, \quad -3, \quad 0),$$

temos, sucessivamente,

$$\|x\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14},$$

[xi] Ou norma euclidiana.

$$\|y\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\|z\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Além disso, constatamos que

$$\|(-5)y\| = \|(5, \quad 0, \quad 5)\| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 5\|y\|,$$

$$\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)x\right\| = \left\|\left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \quad \frac{-3}{\sqrt{14}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)^2} = 1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\|x\|$$

e

$$\|x + z\| = \|(-6, \quad -6, \quad -1)\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (-1)^2} = \underbrace{\sqrt{73}}_{\approx 8.5} <$$

$$< \|x\| + \|z\| = \underbrace{\sqrt{14}}_{\approx 3.7} + 5 \approx 8.7.$$

Exercício I.2.11.

Sejam três vectores de $\mathbb{R}^4$

$u = (-1, \quad -1, \quad 1, \quad 1)$, $v = (1, \quad 1, \quad 5, \quad -3)$ e $w = (\ 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1)$.

Verifique que:

a) $\langle u, u \rangle \geq 0$;

b) $\langle w, w \rangle \neq 0$;

c) $\langle u, v \rangle = 0$;

d) $\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$;

e) $\|6w\| = 6\|w\|$;

f) $\|-w\| = \|w\|$;

g) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$;

h) $\|u+w\| \leq \|u\|+\|w\|$.

Exercício I.2.12.

Prove que se x, y e z são vectores arbitrários de $\mathbb{R}^n$ e α e β quaisquer dois números reais então:

a) $\langle x, x\rangle \geq 0$;

b) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

c) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

d) $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

Resolução (algumas sugestões)

Seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
Nas alíneas a) e b) note que

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Nas alíneas c) e d) utilize as propriedades das operações com números reais.

Exercício I.2.13.

Mostre que se $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, para $v \in \mathbb{R}^n$, então:
a) $\|v\| \geq 0$;

b) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;

c) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$, para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$;

d) $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade triangular).

Resolução (algumas sugestões)

Na alínea d) verifique que se $u \neq 0$, $v \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ então

$$\|\alpha u + v\| = \langle \alpha u + v, \alpha u + v\rangle = \alpha^2\langle u, u\rangle + 2\alpha\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle.$$

Atendendo a que $\|\alpha u + v\| \geq 0$, podemos escrever

$$\alpha^2\langle u, u\rangle + 2\alpha\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \geq 0$$

e, consequentemente,

$$\langle u, u\rangle\left(\alpha + \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}\right)^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2 - \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle}{\langle u,u\rangle} \geq 0.$$

Deste modo, concluímos que $\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$.

Definição I.2.14. [Conjunto ortonormal de vectores]

Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_p$ vectores de $\mathbb{R}^n$.

Dizemos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ é um conjunto ortonormal se e só se é um conjunto ortogonal de vectores unitários (isto é, de norma 1).

Doutra forma:

$\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ é dito um conjunto ortonormal de vectores se e só se

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}, \text{ sendo } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \; se \; i = j \\ 0 \; se \; i \neq j. \end{cases}$$

Exemplo I.2.15.

O conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde

$v_1 = (-1, \quad 1, \quad 0, \quad 0)$, $v_2 = (-1, \quad -1, \quad 2, \quad 0)$,

$$v_3 = (-1, \quad -1, \quad -1, \quad 3) \text{ e } v_4 = (1, \quad 1, \quad 1, \quad 1),$$

não é um conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

Note que $\|v_1\| = \sqrt{2}$; $\|v_2\| = \sqrt{6}$, $\|v_3\| = \sqrt{12}$ e $\|v_4\| = 2$.

Observação I.2.16.

Dado qualquer conjunto ortogonal de vectores não nulos, $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$, podemos formar um conjunto ortonormal, $\{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$, definindo

$$u_i = \left(\frac{1}{\|v_i\|}\right) v_i, \text{ para } i = 1,2, \cdots, p.$$

Exemplo I.2.17.

O conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, onde

$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1, \quad 1, \quad 0, \quad 0)$, $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)(-1, \quad -1, \quad 2, \quad 0)$,

$$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(-1, \quad -1, \quad -1, \quad 3) \text{ e } u_4 = \left(\frac{1}{2}\right)(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1)$$

é um conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

Exercício I.2.18.

Considere os vectores

$$v_1 = (1, \quad 0, \quad 0),\ v_2 = (0, \quad 2, \quad 1) \text{ e } v_3 = (0, \quad 1, \quad -2),$$

assim como os vectores

$$u_1 = (1, \quad 0, \quad 0),\ u_2 = \left(0, \quad \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ e } u_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{-2}{\sqrt{5}}\right).$$

Podemos afirmar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto ortogonal? E ortonormal?

E quanto ao conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$, o que podemos concluir?

Exemplo I.2.19.

Considere, em $\mathbb{R}^3$, os vectores

$$u = (1, \quad 2, \quad 1),\ v = (1, \quad 0, \quad -1) \quad \text{e} \quad w = (2, \quad 1, \quad 0).$$

Determine:

a) um vector não nulo, $z = (z_1, z_2, z_3)$, ortogonal a w, que seja uma combinação linear dos vectores u e v.

b) um vector $y = (y_1, y_2, y_3)$ de modo que $\left\{\left(\frac{1}{\|u\|}\right)u, \quad \left(\frac{1}{\|v\|}\right)v, \quad y\right\}$ seja um conjunto ortonormal.

(Página deixada propositadamente em branco)

I.3 - Conceito de matriz. Matrizes especiais: matriz linha, matriz coluna, matriz triangular, matriz diagonal, matriz escalar, matriz identidade; matriz transposta, matriz ortogonal.

Generalizamos, de seguida, o conceito de vector enquanto sequência ordenada de números reais. Assim, vamos estudar tabelas[xii] de números reais dispostos em linhas e em colunas que designaremos por matrizes.

Definição I.3.1.

Sejam m e n dois números inteiros positivos.

Chamamos matriz de números reais ou matriz real a todo o quadro de dupla entrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde $a_{ij} \epsilon \mathbb{R}$, $i = 1,2,..,m$ e $j = 1,2,..,n$.

Numa representação simplificada, é vulgar escrever-se, em vez do quadro acima descrito, $A = [a_{ij}]$, $i = 1,2,..,m$ e $j = 1,2,..,n$.

Os elementos da matriz são números reais que, de um modo geral, serão designados por escalares.

O tamanho (ou dimensão) de uma matriz é dado por dois números inteiros positivos que indicam, respectivamente, o número de linhas e o número de colunas. Deste modo, uma matriz cujo número de linhas é m e de colunas é n é dita uma matriz $m \times n$ ou uma matriz do tipo m por n, ou ainda do tipo (m, n).

[xii] Quadros de dupla entrada

No que se segue representamos por L_i a linha que numa matriz ocupa a posição i a contar do topo, e, por C_j a coluna que ocupa a posição j a contar da esquerda.[xiii]

Notações I.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \text{ ou } A\epsilon M_{m\times n}(\mathbb{R}), \text{ ou, ainda, } A\epsilon\mathbb{R}^{m\times n}.$$

Chamamos a a_{ij} elemento genérico de A.

Uma matriz $A\epsilon\mathbb{R}^{m\times n}$ é dita rectangular se $m \neq n$; no caso contrário, quando $m = n$, dizemos que A é quadrada.

Em particular, se A tem apenas uma linha e uma coluna, escrevemos

$$A = [a]_{1\times 1} \underbrace{=}_{notação} a.$$

Exemplos I.3.3.

$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ matriz do tipo $(2,3)$ ou matriz 2×3;

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ matriz do tipo $(5,1)$ ou matriz 5×1, ou, ainda, matriz coluna;

$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matriz do tipo $(1,4)$ ou matriz 1×4, ou, ainda, matriz linha;

[xiii] Nalguns casos também denotamos por $A_{i.}$ e $A_{.j}$, respectivamente, a linha i e a coluna j da matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \pi & 0.2 & -1 \\ 11 & -3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ matriz do tipo $(3{,}3)$ ou matriz 3×3, ou, ainda, matriz quadrada de ordem 3.

$[3] = 3$ matriz do tipo $(1{,}1)$ ou matriz 1×1, ou, ainda, matriz quadrada de ordem 1.

Definição I.3.4. [Igualdade de matrizes]

Dizemos que duas matrizes, do mesmo tipo, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, são iguais se e só se têm iguais elementos homólogos, isto é, se e só se

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ para } i = 1,2,..,m \text{ e } j = 1,2,..,n.$$

Exemplos e Exercício I.3.5.

(a) Verificamos que $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^3 & 3^2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Repare-se que $\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$, todavia $\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 2-2 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Sejam as matrizes reais e rectangulares

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Justifique que $A \neq B$, $A \neq C$ e $A = D$.

(d) Determine $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$ de modo que $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 7\beta - \alpha \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(e) Calcule $\theta, \gamma \epsilon \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{bmatrix} -5 & -14 & 0 \\ |\theta - 1| & 2 & 1 \\ 7 & \gamma^2 & |\theta - 1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & \gamma^2 - 9\gamma & 0 \\ |\theta + 1| & 2 & 1 \\ 7 & 9\gamma - 14 & |1 + \theta| \end{bmatrix}.$$

Definição I.3.6. [Diagonal principal e diagonal secundária de uma matriz quadrada]

A diagonal principal duma matriz quadrada, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, é constituída pelos elementos principais, isto é, pelos elementos a_{ii}, $i = 1,2,..,m$ (de índices iguais).

Designamos a soma dos elementos principais de A por traço de A e escrevemos

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

A diagonal secundária[xiv] de $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é constituída pelos elementos a_{ij}, tais que $i + j = n + 1$.

Os elementos a_{ij} e a_{ji} dizem-se simétricos ou opostos.

Exemplos I.3.7.

(i) 1, 1 e 1 são os elementos principais da matriz identidade $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $tr(I_3) = 3$;

[xiv] Também designada por segunda diagonal de A.

(ii) Os elementos principais da matriz quadrada $\begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{2} & -1 & 1 & 1 \\ 11 & -3 & \mathbf{7} & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ são $3,\ 2,\ 7, 1$ e 2 e o seu traço é igual a 15;

(iii) $1, 1, 7, 4$ e 0 são os elementos da diagonal secundária da matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 2 & -1 & \mathbf{1} & 1 \\ 11 & -3 & \mathbf{7} & 5 & 0 \\ -3 & \mathbf{4} & 5 & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & 1 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definição I.3.8. [Tipos de matrizes]

1. Matriz nula – matriz cujos elementos são iguais a $0 \epsilon \mathbb{R}$.

Uma matriz nula, do tipo $m \times n$, representa-se por $0_{m\times n}$ ou, apenas, por 0.

Exemplos: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 5}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $[0]_{1\times 1}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 4}$.

2. Matriz linha – matriz do tipo $1 \times n$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 1^0 & 6 & 0 & \sqrt{225} & -4 & 2^3 \end{bmatrix}_{1\times 6}$.

3. Matriz coluna – matriz do tipo $m \times 1$.

Usualmente chamamos vector coluna ou simplesmente vector a uma matriz coluna.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4. Matriz triangular – matriz quadrada em que são nulos os elementos situados para um dos lados da diagonal principal.

Consideramos dois tipos: matriz triangular superior (quando abaixo da diagonal principal só se encontram zeros) e matriz triangular inferior (quando acima da diagonal principal só se encontram zeros).

Exemplos: Sejam $A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 11 & -3 & \mathbf{7} & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$.

Dizemos que A é uma matriz triangular superior e que B é triangular inferior.

5. Matriz diagonal – matriz quadrada cujos elementos não diagonais — ou não principais — são nulos.

Isto é, a matriz A diz-se diagonal se for tal que $A = \left[\delta_{ij}a_{ij}\right]_{n\times n}$, onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker definido por $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ o, se\ i \neq j \end{cases}$.

Escreve-se:

$$diag(A) = diag(a_{11},\quad a_{22},\quad \cdots,\quad a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplos: $diag(5,\quad \sqrt{3},\quad 2,\quad 4) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathbf{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $diag(0,\quad 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e $diag(1,\quad 1,\quad 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Matriz escalar – matriz diagonal cujos elementos principais são iguais.

Exemplos: $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Matriz identidade – matriz escalar cujos elementos significativos (isto é, elementos não nulos) são iguais a $1 \in \mathbb{R}$.

Escreve-se: $I_n = \left[\delta_{ij}\right]_{n\times n} = diag(1, \quad 1, \quad \cdots, \quad 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Matriz transposta de $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ – matriz que se obtém de A trocando linhas por colunas, isto é, $A^T = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0.2 \\ 11 & -3 \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 0 & 0.2 & -3 \end{bmatrix}$ e, consequentemente,

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 0 & 0.2 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0.2 \\ 11 & -3 \end{bmatrix} = A.$$

9. Matriz ortogonal – matriz cujas colunas constituem um conjunto ortonormal de vectores.

Exemplos: As matrizes $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ são ortogonais.

Exercícios I.3.9.

(a) Usando uma matriz genérica, $A = \left[a_{ij}\right]_{3\times 4}$, prove que $A^{TT} = (A^T)^T = A$.

(b) Construa uma matriz, não nula, que:

(b-i) seja simultaneamente triangular inferior e triangular superior;

(b-ii) coincida com a sua transposta;

(b-iii) seja escalar e cujo traço seja igual a $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

(c) Podemos afirmar que:

(c-i) «Toda a matriz nula é diagonal»? Justifique.

(c-ii) «A transposta de uma matriz nula é ela própria»? Justifique.

(d) Calcule, se possível, quatro números reais — $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \epsilon \mathbb{R}$ — de modo que:

(d-i) $\begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 3x_{11} + 4x_{21} & 3x_{12} + 4x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(d-ii) $\begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ -2x_{11} - 4x_{21} & -2x_{12} - 4x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Mostre que $tr(A^T) = tr(A)$.

(f) Prove que $tr(I_n) = n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n.

(g) Seja $A = [a_{ij}]_{7 \times 7}$ uma matriz escalar. Prove que:

(g-i) $A = A^T$;

(g-ii) $tr(A) = 7a_{11}$.

(g-iii) A é ortogonal se e só se $a_{44} = 1$.

I.4 - Operações com matrizes e algumas propriedades: adição de matrizes, multiplicação de uma matriz por um escalar e multiplicação de matrizes.

Analisamos, agora, algumas operações com matrizes e suas propriedades. Constataremos que a adição de matrizes, a multiplicação de uma matriz por um escalar e a multiplicação de matrizes podem ser combinadas de diversos modos e, ainda, que estas operações satisfazem algumas das regras das operações básicas com números reais.

Definição I.4.1. [Adição de matrizes]

Dadas duas matrizes, do mesmo tipo, $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, chamamos soma de A e B à matriz $C = A + B$, em que $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, sendo $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $i = 1,2,\cdots,m$ e $j = 1,2,\cdots,n$.

Exemplo I.4.2.

Sejam $A = \begin{bmatrix} -11 & 0.9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 10 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Verificamos que

(i) $A + B = \begin{bmatrix} -1 & -0.1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$;

(ii) Não é possível definir a soma $A^T + B$;

(ii) $A^T + B^T = \begin{bmatrix} -1 & -0.1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Note-se que só podemos adicionar matrizes do mesmo tipo e os elementos da matriz soma obtêm-se adicionando os elementos homólogos das matrizes parcelas.

Exercício I.4.3. [Propriedades da adição de matrizes]

Sejam $A, B, C \epsilon M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Prove que a adição de matrizes possui as seguintes propriedades:

(i) $A + B = B + A$ (comutatividade);

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associatividade);

(iii) Existe uma matriz — a matriz nula $0_{m\times n} = 0$ — tal que:

$$A + 0 = 0 + A \text{ (existência de elemento neutro);}$$

(iv) $tr(A + B) = tr(B + A)$, quando m = n;

(v) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Definição I.4.4. [Multiplicação de uma matriz por um escalar]

Dada uma matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, o produto da matriz A pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é obtido multiplicando por λ cada elemento de A, isto é, $\lambda \cdot A = \left[\lambda a_{ij}\right]_{m\times n}$.

Exemplos I.4.5

a) $5 \cdot \begin{bmatrix} -11 & 0.9 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5)(-11) & (5)(0.9) & (5)(5) \\ (5)(4) & (5)(2) & (5)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 & 4.5 & 25 \\ 20 & 10 & 0 \end{bmatrix}$;

b) Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, então $3 \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & 27 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ e $(-1) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício I.4.6. [Propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar]

Sejam $A, B \epsilon M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Prove que a multiplicação de uma matriz por um escalar possui as seguintes propriedades:

(i) Para cada A existe $-A = (-1)\cdot A$ tal que $A + (-A) = 0_{m\times n}$;

(ii) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;

(iii) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;

(iv) $\lambda(\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$;

(v) $1 \cdot A = A$;

(vi) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$;

(vii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Notação I.4.7.

Considere a soma

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Podemos indicar esta soma, de forma mais abreviada, recorrendo à noção de somatório que utiliza a letra maiuscula grega Σ (sigma), do seguinte modo

$$\sum_{k=1}^{5} a_k.$$

Exemplos I.4.8.

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = \sum_{i=1}^{6} 2i$;

b) $7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = \sum_{j=0}^{4} 7^j$;

c) $a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}+\cdots+a_{i29}=\sum_{j=1}^{29} a_{ij}$;

d) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_{31}b_{31}=\sum_{k=1}^{31} a_kb_k$;

e) $\underbrace{u_{11}v_{11}}_{k=1}+\underbrace{u_{12}v_{21}}_{k=2}+\underbrace{u_{13}v_{31}}_{k=3}+\cdots+\underbrace{u_{1n}v_{n1}}_{k=n}=\sum_{k=1}^{n} u_{1k}v_{k1}$;

f) $\underbrace{a_{i1}b_{1j}}_{k=1}+\underbrace{a_{i2}b_{2j}}_{k=2}+\underbrace{a_{i3}b_{3j}}_{k=3}+\cdots+\underbrace{a_{in}b_{nj}}_{k=n}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Definição I.4.9. [Multiplicação de uma matriz linha por uma matriz coluna (ou vector)]

Dada uma matriz linha

$$U=\left[u_{1j}\right]_{1\times n}=\begin{bmatrix}\mathrm{u}_{11} & \mathrm{u}_{12} & \cdots & \mathrm{u}_{1\mathrm{n}}\end{bmatrix}_{1\times \mathrm{n}}$$

e um vector coluna

$$V=[v_{i1}]_{n\times 1}=\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ \vdots\\ v_{n1}\end{bmatrix}_{\mathrm{n}\times 1},$$

o produto $U\times V$ é uma matriz do tipo 1×1, $W=[W]_{1\times 1}$, cujo único elemento é dado por

$$w=u_{11}v_{11}+u_{12}v_{21}+u_{13}v_{31}+\cdots+u_{1n}v_{n1}=\sum_{k=1}^{n} u_{1k}v_{k1}.$$

Exemplos I.4.10.

a) Seja $U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}_{1\times 3}$ e $V=\begin{bmatrix}-4\\ -5\\ -6\end{bmatrix}_{3\times 1}$.

Então $U\times V=[(1)(-4)+(2)(-5)+(3)(-6)]_{1\times 1}=[-32]_{1\times 1}=-32$.

b) Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, então

$A \times B = (-2)(1) + (1)(2) + (4)(5) + (5)(0) = -2 + 2 + 20 + 0 = 20.$

c) Note-se que o primeiro membro da equação

$$2x - 3y + 7z + 3t = 4$$

se pode escrever como o produto da matriz linha

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \textit{(matriz dos coeficientes)}$$

pela matriz coluna (ou vector)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad \textit{(vector das incógnitas)},$$

isto é,

$$2x - 3y + 7z + 3t = 4 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 4.$$

(d) Verificamos, também, que se $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ então

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^T y.$$

Exercícios I.4.11.

Calcule $A \times B$, sendo:

a) $A = \begin{bmatrix} -0.1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.2 & 3 \times 10^{-3} \end{bmatrix}^T$;

b) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -6 & \sqrt{8} \end{bmatrix}^T$;

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}^T$;

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}^T$;

e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}^T$;

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}^T$.

Exercício I.4.12.

Suponha que, no final deste semestre, um grupo de cinco alunos que frequentou a disciplina de Álgebra Linear – em regime de avaliação contínua[xv] – obteve as seguintes classificações:

	Participação nas aulas	1º Teste	2º Teste	3ºTeste	Exame Final
Aluno A	13	13	10	15	16
Aluno B	9	14	17	4	14
Aluno C	18	16	19	18	17
Aluno D	14	7	16	9	6
Aluno E	12	13	8	9	8

Tabela 1

Mostre que as notas finais dos alunos em causa podem ser calculadas como, a seguir, se indica.

[xv] Nota final = 30% participação nas aulas + 30% média de três testes escritos intermédios + 40% exame final.
Tem aprovação na disciplina de Álgebra Linear quem obtiver classificação igual ou superior a 8 (oito) valores no exame final e, ainda, atingir classificação igual ou superior a 10 (dez) valores na nota final.

De acordo com as regras de avaliação de Álgebra Linear (Licenciatura em Economia), discuta o caso do Aluno D.

(i) Nota final do Aluno A: $\begin{bmatrix} 13 & 13 & 10 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 14.1 \longrightarrow 14$;

(ii) Nota final do Aluno B: $\begin{bmatrix} 9 & 14 & 17 & 4 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 12.7 \longrightarrow 13$;

(iii) Nota final do Aluno C: $\begin{bmatrix} 18 & 16 & 19 & 18 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 17.5 \longrightarrow 18$;

(iv) Nota final do Aluno D: $\begin{bmatrix} 14 & 7 & 16 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 9.8 \longrightarrow \text{NA}$;[xvi]

(v) Nota final do Aluno E: $\begin{bmatrix} 12 & 13 & 8 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 9.8 \longrightarrow 10$.

Repare-se que podemos construir uma matriz que compile os dados da Tabela 1; chamamos matriz das classificações intermédias a

---

[xvi] NA – Não aprovado

$$\mathcal{M}_{CI} = \begin{bmatrix} 13 & 13 & 10 & 15 & 16 \\ 9 & 14 & 17 & 4 & 14 \\ 18 & 16 & 19 & 18 & 17 \\ 14 & 7 & 16 & 9 & 6 \\ 12 & 13 & 8 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

e, ainda, coluna das ponderações a

$$\mathcal{C}_P = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

Verificamos que podemos sintetizar os cálculos descritos em (i)-(v), do seguinte modo

$$\begin{bmatrix} 13 & 13 & 10 & 15 & 16 \\ 9 & 14 & 17 & 4 & 14 \\ 18 & 16 & 19 & 18 & 17 \\ 14 & 7 & 16 & 9 & 6 \\ 12 & 13 & 8 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.1 \\ 12.7 \\ 17.5 \\ 9.8 \\ 9.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 18 \\ NA \\ 10 \end{bmatrix};$$

isto é, constatamos que o produto de uma matriz do tipo 5×5 por um vector do tipo 5×1 é igual a um vector do tipo 5×1.

Formalizamos

Definição I.4.13. [Multiplicação de uma matriz por uma matriz coluna (ou vector)]

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e um vector coluna $V = [v_{k1}]_{n \times 1}$, o produto $A \times V$ é o vector coluna, do tipo $m \times 1$, $Z = [z_{i1}]_{m \times 1}$, cuja componente i-ésima é dada por

$$z_{i1} = a_{i1}v_{11} + a_{i2}v_{21} + \cdots + a_{in}v_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}v_{k1}.$$

Como vimos, vectores coluna são matrizes de um certo tipo, isto é, são matrizes com uma única coluna. É, portanto, de esperar que o produto de uma matriz por um vector seja generalizado para produtos de duas matrizes.

Consideremos agora, os dois produtos seguintes, onde o primeiro factor é comum:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [①]$ $(linha \times coluna)$, onde $① = (2)(\mathrm{x}) + (3)(\mathrm{y}) = 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y}$

e

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [②]$ $(linha \times coluna)$, onde $② = (2)(\mathrm{a}) + (3)(\mathrm{b}) = 2\mathrm{a} + 3\mathrm{b}$,

ou, de modo equivalente,

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & a \\ y & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ① & ② \end{bmatrix}$ $(linha \times matriz)$,

onde $\begin{cases} ① = (2)(\mathrm{x}) + (3)(\mathrm{y}) = 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} \\ ② = (2)(\mathrm{a}) + (3)(\mathrm{b}) = 2\mathrm{a} + 3\mathrm{b}. \end{cases}$

Analogamente, quando temos o segundo factor comum, verificamos que

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [①]$ $(linha \times coluna)$, onde $① = (2)(\mathrm{x}) + (3)(\mathrm{y}) = 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y}$,

(v) $\begin{bmatrix} -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [③]$ $(linha \times coluna)$,

onde $③ = (-5)(\mathrm{x}) + (6)(\mathrm{y}) = -5\mathrm{x} + 6\mathrm{y}$,

ou, de forma compactada,

(vi) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ① \\ ③ \end{bmatrix}$ $(matriz \times coluna)$,

onde $\begin{cases} ① = (2)(\mathrm{x}) + (3)(\mathrm{y}) = 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} \\ ③ = (-5)(\mathrm{x}) + (6)(\mathrm{y}) = -5\mathrm{x} + 6\mathrm{y}. \end{cases}$

Examinemos, agora, o seguinte caso

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & a \\ y & b \end{bmatrix} \ (matriz \times matriz).$$

Repare-se que

$$\begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 3} \\ \boxed{-5 \quad 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 3} \ \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} & \boxed{2 \quad 3} \ \boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \\ \boxed{-5 \quad 6} \ \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} & \boxed{-5 \quad 6} \ \boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ① & ② \\ ③ & ④ \end{bmatrix},$$

onde

- na posição (1,1) da matriz produto temos o elemento ① que resulta do produto da linha 1, $[2 \quad 3]$, pela coluna 1, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$;
- na posição (1,2) da matriz produto temos o elemento ② que resulta do produto da linha 1, $[2 \quad 3]$, pela coluna 2, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$;
- na posição (2,1) da matriz produto temos o elemento ③ que resulta do produto da linha 2, $[-5 \quad 6]$, pela coluna 1, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$;
- na posição (2,2) da matriz produto temos o elemento ④ que resulta do produto da linha 2, $[-5 \quad 6]$, pela coluna 2, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Exemplos e Exercícios I.4.14.

a) Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ -29 & 64 \end{bmatrix}$.

b) Se pretendemos multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, do tipo 3×3:

(b.i) pela matriz $B = \begin{bmatrix} x & a \\ y & b \\ z & c \end{bmatrix}$, do tipo 3×2 [xvii], definimos o produto $A \times B$ como uma matriz de duas colunas, em que cada coluna se obtém multiplicando a matriz A pelo vector constituído pela correspondente coluna de B. Assim,

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & a \\ y & b \\ z & c \end{bmatrix} = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{1^{\underline{a}}\ coluna} \ \vdots \ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{2^{\underline{a}}\ coluna} \right] =$$

$$= \left[\begin{bmatrix} x + 3y - z \\ 3x + 4y - 4z \\ 3x + 6y + 2z \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{bmatrix} a + 3b - c \\ 3a + 4b - 4c \\ 3a + 6b + 2c \end{bmatrix} \right].$$

(b.ii) pela matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, do tipo 3×2, definimos

$$A \times C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1)(1) + (3)(0) + (-1)(-3) & \vdots & (1)(2) + (3)(-1) + (-1)(5) \\ (3)(1) + (4)(0) + (-4)(-3) & \vdots & (3)(2) + (4)(-1) + (-4)(5) \\ (3)(1) + (6)(0) + (2)(-3) & \vdots & (3)(2) + (6)(-1) + (2)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \cdots \\ \cdots & -18 \\ -3 & \cdots \end{bmatrix}.$$

c) Determine $P \times Q$, sendo $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt[3]{-8} \\ -3 & 4^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$.

Consideramos, agora, o produto de duas matrizes em que o número de colunas do primeiro factor é igual ao número de linhas do segundo factor.

[xvii] Isto é, B tem duas colunas.

Definição I.4.15 [Multiplicação de matrizes]

Dadas as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ dizemos que a matriz $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ é o produto de A por B — por esta ordem —, isto é, $C = A \times B$, se e só se

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

para $i = 1,2,\cdots,m$ e $j = 1,2,\cdots,n$.

Observação I.4.16. [Possibilidade de se efectuar a multiplicação de matrizes]

(i) Só é possível efectuar a multiplicação de duas matrizes A e B — por esta ordem — quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\quad A_{1*} \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad A_{i*} \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad A_{m*} \quad} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \boxed{B_{*1}} & \cdots & \boxed{B_{*j}} & \cdots & \boxed{B_{*n}} \end{bmatrix}$$

— onde $A_{1*}, A_{2*}, \cdots, A_{m*}$ representam as linhas de A, enquanto $B_{*1}, B_{*2}, \cdots, B_{*n}$ representam as colunas de B — então $C = A \times B = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, e

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad A_{i*} \quad \end{bmatrix}}_{linha\ i\ de\ A} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ B_{*j} \\ \\ \end{bmatrix}}_{coluna\ j\ de\ B} .$$

(ii) Note-se que:

(ii-1) Cada elemento de $A \times B$ é o produto de uma linha de A por uma coluna de B;

(ii-2) Cada coluna de $A \times B$ é o produto da matriz A por uma coluna de B;

(ii-3) Cada linha de $A \times B$ é o produto de uma linha de A pela matriz B.

Exercício I.4.17. [Propriedades da multiplicação de matrizes]

Prove que, para quaisquer três matrizes A, B, C (de ordem conveniente) e qualquer escalar λ, se verifica:

(i) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (associatividade);

(ii) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributividade);

(iii) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (distributividade);

(iv) $\lambda \times (A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$ (associatividade mista).

Exercício I.4.18. [Propriedades da multiplicação de matrizes]

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, 0_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ -- \\ 0_{2\times 2} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B| \quad I_2].$$

Calcule:

a) $A \times B$ e $B \times A$ e verifique que $A \times B \neq B \times A$;

b) $A \times I_2$ e $I_2 \times A$ e verifique que $A \times I_2 = I_2 \times A = A$;

c) $A \times 0_{2\times2}$ e $0_{2\times2} \times A$ e verifique que $A \times 0_{2\times2} = 0_{2\times2} \times A = 0_{2\times2}$;

d) $A \times E$ e verifique que $A \times E = 0_{2\times2}$, sendo A e E matrizes não nulas;

e) $A \times B$ e $A \times C$ e verifique que $A \times B = A \times C$, sendo $B \neq C$;

f) $M \times N$ e verifique que $M \times N = \begin{bmatrix} A \times B & | & A \times I_2 \\ --- & - & --- \\ 0_{2\times2} \times B & | & 0_{2\times2} \times I_2 \end{bmatrix}$;

g) $N \times M$ e verifique que $N \times M = [B \times A]$;

h) $M + N^T$ e $A + B^T$ e verifique que $M + N^T = \begin{bmatrix} A + B^T \\ --- \\ I_2 \end{bmatrix}$.

Exercício I.4.19. [Propriedades da multiplicação de matrizes]

Sejam matrizes A e B duas matrizes de ordem conveniente.

Prove que:

a) a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, não é verdade que se verifique $A \times B = B \times A$, mesmo quando é possível efectuar os dois produtos;

b) pode ter-se $A \times B = 0$ sem que A ou B sejam matrizes nulas, ou seja, na multiplicação de matrizes existem divisores de zero;

c) a matriz identidade é o elemento neutro para a multiplicação de matrizes, ou, de modo equivalente,

$$A \times I = I \times A = A \quad \text{e} \quad B \times I = I \times B = B,$$

onde $I = diag(1, \quad 1, \quad \cdots, \quad 1)$.

d) na multiplicação de matrizes, a lei do corte não é válida, ou seja, sendo A uma matriz não nula e X,Y duas matrizes de ordem conveniente, a igualdade $A \times X = A \times Y$ não permite concluir que $X = Y$.[xviii]

Exercício I.4.20.

Em cada uma das alíneas seguintes, dê exemplos de matrizes reais de ordem dois que satisfaçam a propriedade indicada:

$a)$ $A^2 = -I_2$;

b) $B^2 = 0_{2\times 2}$ com $B \neq 0_{2\times 2}$;

c) $CD = -DC$ com $DC \neq 0_{2\times 2}$;

d) $EF = 0_{2\times 2}$ sendo os elementos de E e F todos diferentes de zero;

e) $AS = SD$ sendo D uma matriz diagonal.

Exercícios I.4.21.

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ uma matriz diagonal de elementos principais não nulos.

(a-i) Calcule DA. Descreva o efeito da multiplicação, à esquerda, de uma matriz real qualquer de tipo 3×3, pela matriz diagonal D.

[xviii] A partir de agora, e de um modo geral, escrevemos AB para designar o produto $A \times B$.

(a-ii) Calcule AD. Descreva o efeito da multiplicação, à direita, de uma matriz real qualquer de tipo 3×3, pela matriz diagonal D.

(a-iii) Determine E tal que $ED = DE = I_3$.

b) Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$.

(b-i) Calcule LA, LB e AB.

(b-ii) Verifique que o produto de duas matrizes triangulares inferiores com elementos principais iguais a 1 ainda é uma matriz triangular inferior com elementos principais iguais a 1.

(b-iii) Determine $M \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $ML = LM = I_3$.

c) Considere $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c-i) Calcule UC, UF e CF.

(c-ii) Verifique que o produto de duas matrizes triangulares superiores com elementos principais iguais a 1 ainda é uma matriz triangular superior com elementos principais iguais a 1.

(c-iii) Determine $N \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $NU = LU = I_3$.

d) Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Calcule $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \epsilon \mathbb{R}$, tais que $Au = \lambda_1 u$, $Av = \lambda_2 v$ e $Aw = \lambda_3 w$.

e) Considere as duas matrizes quadradas, de ordem 2,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e-i) Calcule $C = AB$ e $C^2 = (AB)^2 = (AB)(AB)$;

(e-ii) O que pode dizer sobre os elementos da matriz $C^{21} = (AB)^{21}$?

f) Sejam $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ duas matrizes. Calcule:

(f-i) $M^2 = M \times M$;

(f-ii) $M^3 = M^2 \times M = M \times M \times M$;

(f-iii) $M^p = \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{p\ vezes}$, sendo p um número natural;

(f-iv) $N^2 = N \times N$;

(f-v) $N^3 = N^2 \times N = N \times N \times N$;

(f-vi) $N^q = \underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{q\ vezes}$, sendo q um número natural.

g) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Calcule:

(g-i) os produtos $A^2 = AA$ e $A^3 = AAA$;

(g-ii) a matriz $-A^3 + 3A^2 + A - 3I$.

h) Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = BA$. Prove que:

(h-i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(h-ii) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

i) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i-i) Calcule os produtos A^2, A^3 e A^n, sendo n um inteiro positivo;

(i-ii) Verifique se $A + A^2 + \cdots + A^n = nA^{\frac{n+1}{2}}$, para todo n inteiro positivo e ímpar.

I.5 - Matrizes fraccionadas: conceito de submatriz, adição e multiplicação de matrizes fraccionadas. Espaço coluna de uma matriz. Matrizes Elementares e Matriz de Permutação.

A análise de subconjuntos dos elementos de uma matriz, que iremos designar por submatrizes (ou blocos) pode revelar-se extremamente útil quando, nomeadamente, queremos evidenciar algumas das suas propriedades ou simplificar cálculos que a envolvam.

Em particular, quando as dimensões das matrizes ultrapassam a memória disponível num computador pondo em causa a execução ou eficiência de determinadas operações, a decomposição em blocos da matriz pode permitir que, nos algoritmos em causa, se utilizem matrizes de menor dimensão.

Constataremos, na definição que se segue, que nem todas as matrizes constituídas por elementos de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são submatrizes de A.

Definição I.5.1.

Consideremos uma matriz real A do tipo $m \times n$ e dois números inteiros positivos r e s tais que $r \leq m$ e $s \leq n$.

Chamamos **submatriz** de A do tipo $r \times s$ a toda a matriz formada por elementos comuns a r linhas e s colunas de A (situadas nas posições correspondentes em A).

Deste modo, quando suprimimos $m - r$ linhas e $n - s$ colunas de A obtemos uma matriz A' do tipo $r \times s$ que é uma submatriz de A.

Quando decompomos uma matriz A em submatrizes dizemos que A é uma matriz fraccionada ou uma matriz de blocos.

Exemplos I.5.2.

(a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$.

Se eliminarmos, em A, as 2ª, 4ª e 5ª linhas bem como a 1ª coluna obtemos a submatriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Todavia a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ não é uma submatriz de A. Porquê?

Em particular, cada linha (e cada coluna) de A é uma submatriz.

(b) Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ então as matrizes

$$L_1 = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 6] \in \mathbb{R}^{1\times 4} \text{ e } L_2 = [4 \quad 5 \quad 6 \quad 15] \in \mathbb{R}^{1\times 4}.$$

são submatrizes de B, assim como as matrizes

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1},\ C_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1},\ C_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \text{ e } C_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

(c) Seja $M = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. A matriz $M' = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ é uma submatriz de ordem 3 de M, obtida da matriz inicial por supressão da 2ª linha e da 3ª coluna.

Exercícios I.5.3.

Descreva as matrizes fraccionadas indicando todos os seus elementos:

a) $A = \begin{bmatrix} I_2 & \vdots & 0_{2\times2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{2\times2} & \vdots & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$, onde $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $M = \begin{bmatrix} M_{11} & \vdots & M_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{21} & \vdots & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times4}$,

onde $M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, $M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_{21} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \end{bmatrix}$ e $M_{22} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0.1 \end{bmatrix}$.

c) $C = \begin{bmatrix} C_1 & \vdots & C_2 & \vdots & C_3 & \vdots & C_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times4}$,

onde $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times1}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times1}$, $C_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times1}$ e $C_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times1}$.

Observação I.5.4.

Nas ocasiões em que se torna vantajoso fazer a partição (ou fraccionamento) de uma matriz em blocos (submatrizes) é importante ter em conta que as operações sobre matrizes fraccionadas são efectuadas segundo as mesmas regras formais que utilizamos no caso em que temos números reais em vez de blocos.

Todavia, a multiplicação de matrizes fraccionadas (ou multiplicação por blocos) implica algumas precauções.

Sabemos que, para se fazer a multiplicação de duas matrizes A e B basta que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B. Todavia, para a multiplicação por blocos, também é necessário, além disso, que o fraccionamento em blocos seja tal que a partição das colunas de A combine com a partição das linhas de B, isto é, seja de tal modo que as dimensões dos blocos sejam compatíveis para efeitos do produto.

Exemplo I.5.5.

Sejam A e B duas matrizes do mesmo tipo e fraccionadas exactamente do mesmo modo

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 2 & 2 \\ 0 & -1 & \vdots & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ -3 & 4 & \vdots & -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 4}$$

e

$$B=\begin{bmatrix} 6 & 8 & \vdots & 5 & 5 \\ 7 & 8 & \vdots & 5 & 6 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 10 & 3 & \vdots & 9 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{21} & \vdots & B_{22} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Verificamos que

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Exemplo I.5.6.

Consideremos as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & | & -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ \cdots & | & \cdots \\ A_{21} & | & A_{22} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 4}$$

e

$$B=\begin{bmatrix} 6 & 8 & \| & 5 \\ 7 & 8 & \| & 5 \\ -- & -- & \| & -- \\ 10 & 3 & \| & 2 \\ 11 & 7 & \| & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & \| & B_{12} \\ -- & \| & -- \\ B_{21} & \| & B_{22} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 3}.$$

Pretendemos calcular $A\times B$.

Repare-se que o "separador" vertical no factor da esquerda, a matriz A , corresponde a um "separador" horizontal no factor da direita, a matriz B.

Deste modo

$$A \times B = \begin{bmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ \cdots & | & \cdots \\ A_{21} & | & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & \| & B_{12} \\ -- & \| & -- \\ B_{21} & \| & B_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & \| & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ --------- & \| & --------- \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & \| & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} & \| & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ ---------------- & \| & ----------- \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} & \| & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42 & 20 \\ 42 & 20 \end{bmatrix} & \| & \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} \\ --------- & \| & ----- \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 1 \end{bmatrix} & \| & [0] + [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 & 28 \\ 49 & 28 \end{bmatrix} & \| & \begin{bmatrix} 17 \\ 17 \end{bmatrix} \\ ---- & \| & -- \\ \begin{bmatrix} -9 & 1 \end{bmatrix} & \| & [0] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 48 & 28 & \| & 17 \\ 49 & 28 & & 17 \\ -- & -- & \| & -- \\ -9 & 1 & \| & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercícios I.5.7.

Utilizando a multiplicação por blocos, calcule $A \times B$, sabendo que:

a) $A = [A_{11} \quad A_{12}] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & | & 1 & 3 \\ 0 & | & \frac{1}{5} & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ 5 & 5 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ - & - & | & - \\ 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$ e $B = A$;

c) $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 3 & 1 & | & 0 \\ \cdots & \cdots & | & \cdots \\ 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ 2 & \vdots & 1 \\ - & - & - \\ 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ - & - & - & - & - \\ -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \vdots & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

e) $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & | & 0 & 0 \\ -4 & 2 & | & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 & 0 \\ 4 & 2 & | & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & | & 2 & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo I.5.8. [Espaço-Coluna de uma matriz]

Consideremos uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} \underbrace{A_{.1}}_{1^{\text{a}} \text{ coluna de } A} & | & \underbrace{A_{.2}}_{2^{\text{a}} \text{ coluna de } A} & | & \underbrace{A_{.3}}_{3^{\text{a}} \text{ coluna de } A} & | & \underbrace{A_{.4}}_{4^{\text{a}} \text{ coluna de } A} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4},$$

onde $A_{.1} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $A_{.2} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, $A_{.3} = \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$ e $A_{.4} = \begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}$ e

um vector-coluna $x = \begin{bmatrix}x_1\\ -\\ x_2\\ -\\ x_3\\ -\\ x_4\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Utilizando a multiplicação por blocos, calculamos

$$y = Ax = [A_{.1} \quad | \quad A_{.2} \quad | \quad A_{.3} \quad | \quad A_{.4}]\begin{bmatrix}x_1\\ -\\ x_2\\ -\\ x_3\\ -\\ x_4\end{bmatrix} =$$

$$= [A_{.1}][x_1] + [A_{.2}][x_2] + [A_{.3}][x_3] + [A_{.4}][x_4] =$$

$$= \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}[x_1] + \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}[x_2] + \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}[x_3] + \begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}[x_4] =$$

$$= \underbrace{\underbrace{x_1}_{\text{escalar}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \underbrace{x_2}_{\text{escalar}}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} + \underbrace{x_3}_{\text{escalar}}\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix} + \underbrace{x_4}_{\text{escalar}}}_{\text{combinação linear das colunas de A}} .$$

Assim, temos que qualquer vector $y = Ax \in \mathbb{R}^2$ é uma combinação linear das "colunas" da matriz A.

Deste modo definimos o conjunto

$$\mathcal{R}(A) = \left\{x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3,4\right\}$$

e chamamos a $\mathcal{R}(A)$ — conjunto de todas combinações lineares das colunas de A — espaço das colunas, ou espaço-coluna, da matriz A.

Exercícios I.5.9.

a) Verifique se o vector $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertence ao espaço-coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Determine dois vectores

$$v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ e } w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4,$$

de modo que $v \in \mathcal{R}(B)$ e $w \notin \mathcal{R}(B)$, sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Defina o conjunto de todos os pares ordenados que se podem escrever como combinação linear das colunas da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Terminamos esta secção com a definição de matrizes elementares e matrizes de permutação.

Definição I.5.10. [Matriz de permutação ou matriz elementar do tipo 1]

Chamamos matriz elementar do tipo 1, e denotamos por E_{ij}, a toda a matriz quadrada que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, trocando a linha i com a linha j.

Exemplos I.5.11.

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes de permutação (ou matrizes elementares do tipo 1, visto que

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{troca da linha 1} \\ \text{com a linha 2}}]{} E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{troca da linha 1} \\ \text{com a linha 2}}]{} E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{troca da linha 1} \\ \text{com a linha 3}}]{} E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição I.5.12. [Matriz Elementar do tipo 2]

Chamamos matriz elementar do tipo 2, e denotamos por $E_i(\alpha)$, a toda a matriz quadrada que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, multiplicando a linha i por um número $\alpha \neq 0$.

Exemplos I.5.13.

$E_2(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$, $E_1\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_3\left(\sqrt{5}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ são matrizes elementares do tipo 2, dado que

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{multiplicação da} \\ \text{linha 2 por } (-7)}]{} E_2(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{multiplicação da} \\ \text{linha 1 por } \left(\frac{1}{3}\right)}]{} E_1\left(\tfrac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{multiplicação da} \\ \text{linha 3 por } (\sqrt{5})}]{} E_3(\sqrt{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Definição I.5.14. [Matriz Elementar do tipo 3]

Chamamos matriz elementar do tipo 3, e denotamos por $E_{ij}(\alpha)$, a toda a matriz quadrada que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, substituindo a linha i pela que dela se obtém subtraindo-lhe a linha j, previamente multiplicada pelo número $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplos I.5.15.

$E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **e** $E_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **são matrizes elementares do tipo 3.**

Note-se que

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{substituição da linha 2 pela que} \\ \text{dela se obtém subtraindo-lhe a} \\ \text{linha 1 previamente multiplicada por } (7)}]{} E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{substituição da linha 2 pela que} \\ \text{dela se obtém subtraindo-lhe a} \\ \text{linha 1 previamente multiplicada por } (7)}]{} E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{substituição da linha 3 pela que} \\ \text{dela se obtém subtraindo−lhe a} \\ \text{linha 1 previamente multiplicada por } (-1)}]{} E_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios I.5.16.

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $E_{23}A$ e $E_{31}(-2)E_{23}A$.

b) Determine $U = E_{32}(-3)E_{31}(-1)E_{21}(2)B$, sendo $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Sejam $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mostre que:

(c-i) $I_3 = e_1e_1^T + e_2e_2^T + e_3e_3^T$;

(c-ii) se $E_{32}\,(\,5\,) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ então $E_{32}(\,5\,) = I_3 + (-5)e_3e_2^T$.

(Página deixada propositadamente em branco)

I.6 - Inversão de matrizes

Nesta secção utilizamos, apenas, matrizes quadradas.

Apresentaremos a noção de matriz inversa e verificaremos que nem todas as matrizes (quadradas) têm inversa.

Definição I.6.1.

Dada uma matriz A, quadrada de ordem n — ou do tipo $n \times n$ — chama-se matriz inversa de A à matriz B (se existir), quadrada, de ordem n, tal que

$$AB = BA = I_n,$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem n.

Notação I.6.2.

Quando existe a matriz inversa de A, esta designa-se por A^{-1}.

Temos, assim, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Exemplos resolvidos I.6.3.

Calcule, usando a definição, a inversa da matriz:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$;

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Começamos por procurar uma matriz X tal que $AX = I_n$.

Seja $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$. Temos, no nosso caso, sucessivamente

$$AX = I_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_{11} + 3x_{21} & 2x_{12} + 3x_{22} \\ -3x_{11} - 4x_{21} & -3x_{12} - 4x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ 2x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -3x_{11} - 4x_{21} = 0 \\ -3x_{12} - 4x_{22} = 1. \end{cases}$$

Repare-se que, à primeira vista, parece-nos que esta questão passa pela resolução de um sistema de 4 equações e 4 incógnitas $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$. Todavia, um olhar mais atento, permite-nos perceber que o sistema inicial é equivalente a 2 sistemas de 2 equações e 2 incógnitas, isto é,

$$\begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ 2x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -3x_{11} - 4x_{21} = 0 \\ -3x_{12} - 4x_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ -3x_{11} - 4x_{21} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -3x_{12} - 4x_{22} = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Por outro lado, e atendendo às propriedades da multiplicação de matrizes, também podemos escrever

$$AX = I_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

.

Assim, tudo se resume a resolver dois sistemas de 2 equações e 2 incógnitas.

Deste modo, obtemos

$$\begin{cases} 2x_{11}+3x_{21}=1 \\ -3x_{11}-4x_{21}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_{11}+9x_{21}=3 \\ -6x_{11}-8x_{21}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_{11}+9x_{21}=3 \\ x_{21}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11}=-4 \\ x_{21}=3 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2x_{12}+3x_{22}=0 \\ -3x_{12}-4x_{22}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_{12}+9x_{22}=0 \\ -6x_{12}-8x_{22}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_{12}+9x_{22}=0 \\ x_{22}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{12}=-3 \\ x_{22}=2, \end{cases}$$

ou seja, $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Uma vez que $XA = I_n$, podemos concluir que X é a inversa de A.

(b) Neste caso, pretendemos resolver a equação matricial $BX = I_n$, sendo

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

Ora

$$BX = I_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \\ 2x_{11}+2x_{21} & 2x_{12}+2x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_{11}+x_{21}=1 \\ 2x_{11}+2x_{21}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_{12}+x_{22}=0 \\ 2x_{12}+2x_{22}=1. \end{cases} \end{cases}$$

Assim somos conduzidos a um sistema impossível, uma vez que

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{11}+x_{21}=1 \\ 2x_{11}+2x_{21}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_{12}+x_{22}=0 \\ 2x_{12}+2x_{22}=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_{11}-2x_{21}=-2 \\ 2x_{11}+2x_{21}=0 \\ -2x_{12}-2x_{22}=0 \\ 2x_{12}+2x_{22}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_{11}-2x_{21}=-2 \\ \boxed{0=-2} \\ -2x_{12}-2x_{22}=0 \\ \boxed{0=1}. \end{cases}$$

Logo não existe inversa de B.

Exercícios I.6.4.

Sejam $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ e $C = [c_{ij}]_{n\times n}$. Prove que:

a) Se A admite matriz inversa, ela é única.

b) Se A e B são duas matrizes invertíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

c) Determine $(ABC)^{-1}$ em função das matrizes inversas A^{-1}, B^{-1} e C^{-1}.

Observação I.6.5.

É importante salientar que a inversa de uma matriz

- pode não existir;
- se existir, é única.

Exercícios I.6.6.

a) Calcule, se possível, as inversas das matrizes:

a-i) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

a-ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$;

a-iii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$;

a-iv) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$;

a-v) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

a-vi) $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

a-vii) $E_2(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$, $E_1\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_3\left(\sqrt{5}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$;

a-viii) $E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{21}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Sejam

$$E_1(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, E_{21}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_{12}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b-i) Calcule as inversas para cada uma das quatro matrizes elementares apresentadas.

(b-ii) Sabendo que $A = E_1(2)E_{21}(3)E_{12}(-3)E_2\left(\frac{1}{2}\right)$ determine A^{-1} usando as inversas da alínea anterior.

Exercícios I.6.7.

a) Seja $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ uma matriz diagonal de elementos principais não nulos.

(a-i) Calcule a inversa da matriz D, isto é, D^{-1}.

(a-ii) Verifique que a inversa de uma matriz diagonal de elementos principais não nulos ainda é uma matriz diagonal de elementos principais não nulos.

(b) Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$.

(b-i) Calcule as inversas das matrizes A, B e L, isto é, A^{-1}, B^{-1} e L^{-1}.

(b-ii) Verifique que a inversa de uma matriz triangular inferior com elementos principais iguais a 1 ainda é uma matriz triangular inferior com elementos principais iguais a 1.

c) Considere $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c-i) Calcule as inversas das matrizes C, F e U, isto é, C^{-1}, F^{-1} e U^{-1}.

(c-ii) Verifique que a inversa de uma matriz triangular superior com elementos principais iguais a 1 ainda é uma matriz triangular superior com elementos principais iguais a 1.

d) Construa uma matriz $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que:

(d-i) $M \neq I_3$ e $M^{-1} = M$;

(d-ii) $M \neq I_3$ e $M^{-1} = M^T$.

e) Mostre que se $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ então $BB^T = B^T B = I_2$.

O que pode concluir sobre a inversa da matriz B?

f) Seja $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. Verifique que $T^{-1} = T^T$.

g) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(g-i) Mostre que $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$;

(g-ii) Calcule a inversa da matriz utilizando a igualdade da alínea anterior.

h) Suponha que M é uma matriz quadrada de ordem 4, tal que $M^3 = 0$.

(h-i) Calcule $(I_4 - M)(I_4 + M + M^2)$;

(h-ii) Verifique que a matriz $I_4 - M$ tem inversa, sendo $(I_4 - M)^{-1} = I_4 + M + M^2$.

(Página deixada propositadamente em branco)

CAPÍTULO II • SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

II.1 – Sistemas de equações algébricas lineares – breve revisão dos métodos gráfico, de substituição e de adição ordenada a partir de um exemplo.

Muitos dos problemas que surgem nas mais diversas áreas da ciência e da indústria utilizam equações lineares não só na pesquisa de soluções mas também na procura de respostas aproximadas por intermédio de aproximações lineares adequadas.

Começamos este capítulo com um exemplo, com o objectivo de recordar conceitos fundamentais na resolução e discussão de sistemas de equações lineares.

Exemplo II.1.1.

Um inspector da Polícia recebe a seguinte informação: «No mercado negro dos produtos roubados venderam-se dois candelabros de prata e um jarrão mandarim por 1500€ euros».

Embora o informador fosse de máxima confiança desconhece o preço de mercado de cada um dos objectos.

Sendo necessário completar aquela informação para continuar com o trabalho de investigação em curso o inspector convocou três dos seus agentes tendo-os incumbido de averiguar os preços em questão.

Os investigadores (António, Bernardo e Carolina) optaram por trabalhar de forma isolada e, ciosos do resultado das respectivas pesquisas, não o confrontaram com o dos outros colegas.

Assim, António descobriu que seis candelabros e três jarrões mandarim foram vendidos por 5600€. Por seu lado, Bernardo concluiu que quatro candelabros e dois jarrões mandarim foram comprados por 3000€. Finalmente Carolina assegura que três candelabros e dois jarrões mandarim foram vendidos por 2475€.

Só uma destas informações se revelou útil. Porquê?

Resolução:

Comecemos por designar por c o preço de um candelabro e por j o preço de um jarrão mandarim.

Desta forma, podemos descrever a primeira informação com a seguinte equação

$$2c + 1j = 1500€.$$

Completando esta informação com a do António — descrita pela equação $6c + 3j = 5600€$— construímos o seguinte sistema de equações lineares

$$(I)\begin{cases} 2c + 1j = 1500€ \\ 6c + 3j = 5600€ \end{cases}.$$

Vamos resolvê-lo por adição ordenada:

$$(-3)\begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ 6c + 3j = 5600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6c - 3j = -4500 \\ \underline{\quad 6c + 3j = 5600} \\ \qquad\qquad 0 = 1100. \end{cases}$$

Verificamos que

- (I) é um sistema impossível;
- As informações em causa não são compatíveis;
- A informação do António está errada.

Logo, se a primeira informação é fiável, os dados fornecidos pelo António estão, seguramente, errados.

Considerando, agora, o resultado da pesquisa do segundo investigador, Bernardo, — descrito pela equação $4c + 2j = 3000€$ — e, combinando-o com a informação inicial, obtemos

$$(II)\begin{cases} 2c + 1j = 1500€ \\ 4c + 2j = 3000€. \end{cases}$$

Resolvemos este novo sistema de equações por adição ordenada:

$$(-2)\quad\begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ 4c + 2j = 3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4c - 2j = -3000 \\ \underline{\quad 4c + 2j = 3000} \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Concluímos, assim, que

- (II) é um sistema possível e indeterminado;
- As informações em causa são compatíveis;
- A informação do Bernardo é redundante.

Ou seja, os dados conseguidos por Bernardo são equivalentes aos do informador, não acrescentando, portanto, nada ao desenrolar da investigação.

O que se sabe é que se um jarrão mandarim custa α euros — sendo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *(porquê?)* — então um candelabro custa $750 - \frac{1}{2}\alpha$ euros. Porquê?

Deste modo, podemos escrever:

$$\begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ \quad j = \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 1500 - j \\ \quad j = \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 750 - \dfrac{1}{2}\alpha \\ \quad j = \alpha \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Nestas condições dizemos que o sistema tem uma infinidade de soluções do tipo

$$(c, j) = \left(750 - \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \alpha\right), \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Finalmente verificamos que a conjunção da primeira informação com o resultado da investigação conduzida pela investigadora Carolina — descrito pela equação $3c + 2j = 2475€$ — permite-nos escrever o seguinte sistema de equações lineares

$$(III)\begin{cases} 2c + 1j = 1500€ \\ 3c + 2j = 2475€ \end{cases}$$

que também resolvemos pelo método da adição ordenada:

$$(-^3/_2) \quad \begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ 3c + 2j = 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3c - \dfrac{3}{2}j = -2250 \\ \quad 3c + 2j = 2475 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}j = 225 \quad \Rightarrow j = 450.$$

Constatamos que

- (III) é um sistema possível e determinado;
- As informações em causa são compatíveis;
- A informação da Carolina é relevante.

Neste caso, dizemos o sistema tem uma única solução $(c, j) = (525{,}450)$, visto que

$$\begin{cases} 2c + 1j = 1500 \\ j = 450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 1500 - 450 \\ j = 450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1050}{2} = 525 \\ j = 450. \end{cases}$$

Concluímos, assim, que a informação obtida pela Carolina foi a única que nos permitiu determinar o preço dos objectos referidos.

Exercício II.1. 2

Uma fábrica produz quatro tipos de bombons de chocolate, A, B, C e D. Utiliza cacau, leite, café e frutos secos como principais ingredientes. A produção de 1000 bombons do tipo A requer a utilização de 6 unidades de cacau, 2 unidades de leite, 1 de café e 1 de frutos secos. Na confecção dos bombons do tipo B são necessárias de 5 unidades de cacau, 2 de leite, 3 de café e 1 de frutos secos, enquanto os bombons do tipo C exigem 5 unidades de cacau, 4 de leite, 2 de café e 2 de frutos secos. Finalmente o fabrico dos bombons do tipo D pressupõe o uso de 4 unidades de cacau, 4 de leite e 2 de frutos secos.

Semanalmente a empresa dispõe de 370 unidades de cacau, 240 unidades de leite, 120 de café e 120 de frutos secos.

a) Verifique que se a fábrica pretender esgotar o stock semanal de cacau, leite, café e frutos secos então é necessário que produza igual número de bombons de tipo B e D.

b) Para garantir a produção de 25000 bombons do tipo A, numa semana e esgotar todos os ingredientes, que quantidade de bombons de tipo B, C e D deve a fábrica produzir?

c) A fábrica em questão tem capacidade para assegurar a produção semanal de 40000 bombons do tipo D? Justifique a sua resposta.

Observação II.1.3. – Sistemas com duas incógnitas

No estudo de sistemas de equações lineares com duas incógnitas, do tipo

$$(\Sigma)\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \cdots\ \cdots \\ a_mx + b_my = c_m \end{cases}, m \in \mathbb{N},$$

podemos destacar três métodos:

(i) método gráfico;

(ii) método de substituição;

(iii) método da adição ordenada.

Os exercícios, que se seguem, têm como objectivo a revisão dos processos acima elencados.

Exercícios II.1.4. – Sistemas com duas incógnitas

(a) Num mesmo referencial faça o esboço gráfico das seguintes curvas:

(a.1) $r: 4x - 2y = -10$ e $s: 2x + y = 6$;

(a.2) $r: 2x - y = 1$, $s: 2x - y = 0$ e $t: 2x - y = -3$;

(a.3) $r: 4x + 5y = 20$ e $s: 4x - 5y = 20$;

(a.4) $r: 3y + 4x = 12$ e $s: 4y - 3x = 12$;

(a.5) $r: 2x + 3y = 5$ e $s: 2x - 3y = 5$;

(a.6) $p: y = 0$ e $q: x = -1$;

(a.7) $r: 2x - y = 4$ e $s: 2x + y = 4$;

(a.8) $p: x = -2$, $q: y = -3.5$, $s: y = 4$ e $t: x = 0$;

(a.9) $r: y - x = 9$, $s: y + x = 0$ e $t: 5y + 7x = 0$;

(a.10) $r: y = x$, $s: -x + y = 2$ e $t: -x + y + 3 = 0$;

(a.11) $r: y = -2x$, $s: 2x + y = 3$ e $t: 2x + y + 2 = 0$.

(b) Tendo em conta o estudo efectuado na alínea anterior classifique os seguintes sistemas quanto às soluções:

(b.1) $\begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$;

(b.2) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$;

(b.3) $\begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 4x - 5y = 20 \end{cases}$;

(b.4) $\begin{cases} 3y + 4x = 12 \\ 4y - 3x = 12 \end{cases}$;

(b.5) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$;

(b.6) $\begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$;

(b.7) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$;

(b.8) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3.5 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$;

(b.9) $\begin{cases} y - x = 0 \\ y + x = 0 \\ 5y + 7x = 0 \end{cases}$;

(b.10) $\begin{cases} y = x \\ -x + y = 2 \\ -x + y + 3 = 0 \end{cases}$;

(b.11) $\begin{cases} y = -2x \\ 2x + y = 3 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$.

(c) Utilizando o método de substituição resolva, quando possível, os sistemas:

(c.1) $\begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$;

(c.2) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$;

(c.3) $\begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 4x - 5y = 20 \end{cases}$;

(c.4) $\begin{cases} 3y + 4x = 12 \\ 4y - 3x = 12 \end{cases}$;

(c.5) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$;

(c.6) $\begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$;

(c.7) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$;

(c.8) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3.5 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$;

(c.9) $\begin{cases} y - x = 0 \\ y + x = 0 \\ 5y + 7x = 0 \end{cases}$;

(c.10) $\begin{cases} y = x \\ -x + y = 2 \\ -x + y + 3 = 0 \end{cases}$;

(c.11) $\begin{cases} y = -2x \\ 2x + y = 3 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$.

(d) Utilizando o método da adição ordenada determine o conjunto solução dos sistemas:

(d.1) $\begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$;

(d.2) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$;

(d.3) $\begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 4x - 5y = 20 \end{cases}$;

(d.4) $\begin{cases} 3y + 4x = 12 \\ 4y - 3x = 12 \end{cases}$;

(d.5) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$;

(d.6) $\begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$;

(d.7) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$;

(d.8) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3.5 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$;

(d.9) $\begin{cases} y - x = 0 \\ y + x = 0 \\ 5y + 7x = 0 \end{cases}$;

(d.10) $\begin{cases} y = x \\ -x + y = 2 \\ -x + y + 3 = 0 \end{cases}$;

(d.11) $\begin{cases} y = -2x \\ 2x + y = 3 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$.

(Página deixada propositadamente em branco)

II.2 – Resolução e discussão de sistemas de equações algébricas lineares. Condensação de matrizes. Característica de uma matriz. Algoritmo de Gauss.

Recapitulemos, agora, alguns conceitos importantes da teoria dos sistemas lineares.

Definição II.2.1. [Equação Linear]

Uma equação algébrica linear nas incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é uma equação do tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e b são números. Chamamos a b segundo membro ou termo independente da equação.

Exemplo II.2.2.

$x + y - z + t = 5$ é uma equação linear nas incógnitas x, y, z e t.

Definição II.2.3. [Sistema de Equações Lineares]

Um sistema de equações algébricas lineares é uma colecção finita de equações lineares (nas mesmas incógnitas) consideradas em conjunto.

Um sistema de m equações e n incógnitas pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

onde os $m \times n$ coeficientes a_{ij} $(i = 1,2, \cdots, m; j = 1,2, \cdots, n)$ e os termos independentes b_i $(i = 1,2, \cdots, m)$ são números dados.

Se os termos independentes b_i $(i = 1,2, \cdots, m)$ são nulos, dizemos que o sistema é homogéneo.

Exemplo II.2.4.

a) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 4 \end{cases}$ é um sistema de 3 equações e 3 incógnitas;

b) $\begin{cases} m + bn - s + 3t = 0 \\ am - 30n + s - t = 0 \end{cases}$ é um sistema homogéneo.

Tem 2 equações e 4 incógnitas. Neste caso as incógnitas são m, n, s e t;

c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ z + 4w = -1 \\ x + y = 7 \\ -z + 3w = 10 \end{cases}$ é um sistema de 4 equações e 4 incógnitas.

Definição II.2.5. [Solução de um Sistema de Equações Lineares]

Uma solução de um sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$, é uma sequência ordenada $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ de números tais que as substituições $x_j = \xi_j$ $(j = 1,2, \cdots, n)$ transformam todas as equações do sistema em identidades.

Exemplo II.2.6.

a) O par $(2,1)$ é solução do sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=5 \end{cases}$, visto que

$$\begin{cases} 2+1=3 \\ 2(2)+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=3 \\ 5=5 \end{cases}.$$

b) O terno $(0,\quad 0,\quad 0)$ é solução do sistema $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$,

$$\text{porque} \begin{cases} 0+0-0=0 \\ 2(0)+3(0)+0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \end{cases}.$$

Por outro lado, o terno $(0,\quad 1,\quad 1)$ não é solução do sistema

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases},$$

$$\text{já que} \begin{cases} 0+1-1=0 \\ 2(0)+3(1)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0 \\ 4=0 \end{cases}.$$

Definição II.2.7. [Classificação de Sistemas de Equações Lineares quanto às soluções]

Um sistema de equações lineares que tenha pelo menos uma solução é dito possível (determinado se tiver uma, indeterminado se tiver mais do que uma).

Um sistema de equações que não tenha nenhuma solução é dito impossível.

Exemplos II.2.8.

a) Verificamos que o sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ é possível e determinado, tendo em conta que

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 2x+5-x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ x=-2 \end{cases}.$$

b) O sistema $(\Sigma)\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$ é possível e indeterminado visto que

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 2x+2y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 2x+2(5-x)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 10=10 \end{cases}.$$

Deste modo, podemos concluir que todos os pares do tipo

$(x,y)=(5-\alpha,\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, são soluções deste sistema.

Ou, ainda, que

$$\boldsymbol{S}=\{(5-\alpha,\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

é o conjunto solução de (Σ).

c) Uma vez que

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 2x+2(5-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ \underbrace{10=0!!}_{condição\ impossível} \end{cases},$$

podemos afirmar que o sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ é impossível.

Definição II.2.9. [Discussão e Resolução de um Sistema de Equações Lineares]

Discutir um sistema de equações lineares é averiguar em que casos tal sistema é possível (isto é, tem solução) ou impossível (isto é, não tem solução).

Resolver um sistema de equações lineares é calcular todas as suas soluções.

Exemplos II.2.10.

a) O sistema

$$(I)\begin{cases}3x+y=1\\2x+y=3\end{cases}$$

é possível e determinado, visto que o par $(-2{,}7)$ é a única solução de (I).

Note-se que $(I)\begin{cases}3x+y=1\\2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y=1\\y=3-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+3-2x=1\\y=3-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=7\end{cases}$.

b) O sistema

$$(II)\begin{cases}3x+y=0\\x-y=0\end{cases}$$

é homogéneo. Como tal, é sempre possível. Porquê?

Repare-se que $(0{,}0)$ é solução de (II), visto que $\begin{cases}3(0)+0=0\\0-0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\0=0\end{cases}$.

Além disso, (II) é determinado, pois $(0{,}0)$ é solução única.

c) O sistema

$$(III)\begin{cases}3x+y=1\\-6x-2y=-2\end{cases}$$

é possível e indeterminado.

Note-se que $\begin{cases}3(0)+1=1\\-6(0)-2(+1)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=1\\-2=-2\end{cases}$,

mas também $\begin{cases}3(1)+(-2)=1\\-6(1)-2(-2)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=1\\-2=-2\end{cases}$,

e, ainda, $\begin{cases}3(-2)+7=1\\-6(-2)-2(7)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=1\\-2=-2\end{cases}$, etc.

De um modo geral, concluímos que

$$\boldsymbol{S}=\left\{\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\beta,\quad \beta\right),\ \beta\in\mathbb{R}\right\} \text{ é o conjunto solução de } (III).$$

d) O sistema

$$(IV)\begin{cases} 3x+y=1 \\ 6x+2y=0 \end{cases}$$

é impossível, uma vez que

$$\begin{cases} 3x+y=1 \\ 6x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-3x \\ 6x+2(1-3x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=1 \\ 6x+2-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-3x \\ 2=0 \end{cases}$$

e $2=0$ é uma condição impossível.

DefiniçãoII.2.11. [Sistemas de Equações Lineares Equivalentes]

Dois sistemas de equações lineares com o mesmo número de equações e o mesmo número de incógnitas dizem-se equivalentes se têm exactamente as mesmas soluções.

Exemplos II.2.12.

a) Os sistemas $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x-y=-9 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$ são equivalentes.

Verificamos que o par $(-2,7)$ é a única solução destes sistemas.

b) Os sistemas $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x-y=-9 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x-y=-9 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$ não são equivalentes.

Porquê?

c) Os sistemas

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -9 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - b = -9 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3m + n = 1 \\ m - n = -9 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3\theta + \eta = 1 \\ \theta - \eta = -9 \end{cases}$$

são equivalentes. Porquê?

Suponhamos, agora, que pretendemos resolver (i.e., calcular todas as soluções de) os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -9 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - b = -9 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3m + n = 1 \\ m - n = -9 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3\theta + \eta = 1 \\ \theta - \eta = -9. \end{cases}$$

Isto é, pretendemos obter os valores dos pares ordenados (x, y), (a, b), (m, n) e (θ, η).

Dado que são sistemas equivalentes basta-nos determinar uma das sequências referidas: (x, y), (a, b), (m, n) ou (θ, η).

Tratando-se de sistemas com o mesmo conjunto solução qual é a informação essencial (à resolução, claro!) que contêm?

São, necessariamente, os coeficientes das incógnitas e os termos independentes.

Repare-se, ainda, que estes elementos podem ser dispostos numa matriz na forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ para os coeficientes das incógnitas,}$$

e numa coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}, \text{ para os termos independentes.}$$

Ou de forma compacta $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -9 \end{array}\right]$.

Deste modo, surge a "notação matricial" para os sistemas de equações lineares.

No primeiro caso temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Procedendo de forma análoga para os restantes escrevemos:

Sistema de equações	Notação matricial
$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -9 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - b = -9 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 3m + n = 1 \\ m - n = -9 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 3\theta + \eta = 1 \\ \theta - \eta = -9 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}.$

Exercícios II.2.13.

a) Utilizando o método de substituição (ascendente) determine todas as soluções dos sistemas. Preencha, ainda, os espaços em branco.

(a-i) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ \quad\quad y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix};$

(Note-se que, neste caso, pretendemos determinar todos os pares de números reais (x, y) *que satisfazem as duas equações anteriores)*

(a-ii) $x + 2y = 5 \Leftrightarrow [\cdots \quad \cdots]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\cdots]$;

(Também, neste caso, pretendemos determinar todos os pares de números reais (x, y) *que satisfazem a equação anterior)*

(a-iii) $\begin{cases} x + 6y + 4z = -1 \\ \qquad y + 2z = \frac{-10}{3} \\ \qquad\qquad z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dots & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \frac{-10}{3} \\ \dots \end{bmatrix}$;

(Agora queremos obter todos os ternos de números reais (x, y, z) *que satisfazem as três equações anteriores)*

(a-iv) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad y - 2z = 5 \\ \qquad z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$;

(Aqui o objectivo é descobrir todos os ternos de números reais (x, y, z) *que satisfazem as três equações anteriores)*

(a-v) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ \quad 7y - 5z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \dots \end{bmatrix}$;

(Neste caso, estamos interessados em determinar todos os ternos de números reais (x, y, z) *que satisfazem as duas equações anteriores)*

(a-vi) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ \qquad\qquad y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \dots \end{bmatrix}$;

(Também, neste caso, queremos calcular todos os ternos de números reais (x, y, z) *que satisfazem as duas equações anteriores)*

$$\text{(a-vii)} \begin{cases} x + 2y - z + w = 6 \\ \quad y + 3z + 2w = 2 \\ \qquad z - w = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dots & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix};$$

(Neste exemplo, pretendemos obter todos os 4-uplos de números reais (x, y, z, w) *que satisfazem as três equações anteriores)*

$$\text{(a-viii)} \begin{cases} x - 3y + 2z - w = 0 \\ \quad y + 3z + w = -2 \\ \qquad z + 2w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dots & -3 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix};$$

(Finalmente, neste sistema, queremos calcular todos os 4-uplos de números reais (x, y, z, w) *que satisfazem as três equações anteriores)*

b) O terno $\left(1, \ \frac{-7}{4} \ \ \frac{1}{4}\right)$ é solução do sistema (a-v)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}?$$

Justifique a sua resposta.

c) Os sistemas (a-i) e (a-ii) têm soluções comuns? Quais?

E os sistemas (a-iii) e (a-iv)?

d) Indique:

(d-i) um sistema de 4 equações cujo conjunto solução seja igual ao conjunto solução do sistema

$$\text{(a-vii)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix};$$

(d-ii) dois sistemas equivalentes ao sistema (a-vii).

De seguida, vamos descrever um método – que designaremos por método de eliminação de Gauss – que nos vai permitir substituir um sistema por um outro equivalente mas mais fácil de resolver.

As operações elementares – que iremos apresentar no próximo exemplo – desempenham um papel fundamental neste contexto.

Exemplo II.2.14.

Consideremos o seguinte sistema

$$(\Sigma_1)\begin{cases} \mathrm{x}+3\mathrm{y}-\mathrm{z}=1 \\ 3\mathrm{x}+4\mathrm{y}-4\mathrm{z}=7 \\ 3\mathrm{x}+6\mathrm{y}+2\mathrm{z}=-3 \end{cases}.$$

Temos como objectivo transformar (Σ_1) num sistema "triangular" equivalente, isto é, num sistema do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{33}z=b_3 \end{cases}.$$

Para o efeito, utilizamos as operações:

$\mathcal{O}_1$- Troca entre si de duas equações;

$\mathcal{O}_2$ - Multiplicação de uma equação por um número diferente de zero;

$\mathcal{O}_3$- Substituição de uma equação pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto de outra equação por um número[i].

---

[i] Tal como as anteriores, esta operação elementar já foi utilizada no método de adição ordenada. A utilização da expressão «… subtraindo-lhe o produto de outra equação por um número.» em vez de ««… adicionando-lhe o produto de outra equação por um número.» tem a ver com as particularidades da factorização LU de uma matriz. Embora este tópico não seja aqui abordado, a sua importância no contexto da Álgebra Linear foi decisiva na escolha da notação.

Assim, note-se que se substituirmos:

(i) a 2ª equação,

$$3x + 4y - 4z = 7,$$

que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 1ª equação,

$$x + 3y - z = 1,$$

por (3), passamos a considerar $-5y - z = 4$ como 2ª equação

e, ainda,

(ii) a 3ª equação,

$$3x + 6y + 2z = -3,$$

pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 1ª equação,

$$x + 3y - z = 1,$$

por (3) obtemos $-3\text{y} + 5\text{z} = -6$ como substituta da 3ª equação.

Surge, assim, um sistema equivalente ao inicial

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ \quad -5y - z = 4 \\ -3y + 5z = -6; \end{cases}$$

Se, de seguida,

(iii) multiplicarmos a 2ª equação por $\left(-\frac{1}{5}\right)$, temos

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ \quad y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5}; \\ -3y + 5z = -6 \end{cases}$$

E se, finalmente,

(iv) substituirmos a 3ª equação,

$$-3\text{y} + 5\text{z} = -6,$$

pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 2ª equação,

$$y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5},$$

por (-3), deparamos com um outro sistema, também equivalente a (Σ_1),

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5}. \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases}$$

Sistematizando os passos anteriores, onde utilizámos as operações $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, e $\mathcal{O}_3$, atrás elencadas, concluímos que

$$(\Sigma_1)\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 7 \\ 3x + 6y + 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ -5y - z = 4 \\ -3y + 5z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ -3y + 5z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5}. \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases}$$

Recorrendo, agora, ao método de substituição (ascendente) constatamos que

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y + z \\ y = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5}z \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y + z \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x, \quad y, \quad z) = \left(1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{2}\right)$$

o que nos permite afirmar que o conjunto $\boldsymbol{S}$ das soluções de (Σ_1) é dado por

$$\boldsymbol{S} = \left\{\left(1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{2}\right)\right\}.$$

Desta forma, concluímos dizendo que o sistema

$$(\Sigma_1)\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 7 \\ 3x + 6y + 2z = -3 \end{cases}$$

é possível e determinado.[ii]

Vamos "codificar" a resolução anterior da seguinte forma

(i) Em vez do sistema

$$(\Sigma_1)\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 7 \\ 3x + 6y + 2z = -3 \end{cases}$$

vamos considerar a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Isto é, vamos substituir

a 1ª equação $x + 3y - z = 1$ pela 1ª linha $[1 \quad 3 \quad -1| \quad 1]$;

a 2ª equação $3x + 4y - 4z = 7$ pela 2ª linha $[3 \quad 4 \quad -4| \quad 7]$;

e a 3ª equação $3x + 6y + 2z = -3$ pela 3ª linha $[3 \quad 6 \quad 2| \quad -3]$.

(ii) Em vez das operações

$\mathcal{O}_1$ - Troca entre si de duas equações,

$\mathcal{O}_2$ - Multiplicação de uma equação por um número diferente de zero,

$\mathcal{O}_3$ - Substituição de uma equação pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto de outra equação por um número.

vamos considerar a operações

$\mathcal{O}_1$ - Troca entre si de duas linhas,

$\mathcal{O}_2$ - Multiplicação de uma linha por um número diferente de zero,

$\mathcal{O}_3$ - Substituição de uma linha pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto de outra linha por um número.

[ii] Possível, porque tem solução; determinado, porque tem uma só solução.

Utilizando esta "nova linguagem", retomamos a resolução do Exemplo II.2.14.

Exemplo II.2.15.

O sistema

$$(\Sigma_1)\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 3x+4y-4z=7 \\ 3x+6y+2z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}}_{\text{notação matricial}}$$

pode ser descrito pela matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Assim, vamos

(i) substituir a 2ª linha pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 1ª linha por (3), e, ainda, a 3ª linha pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 1ª linha por (3), isto é,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-(3)L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3-(3)L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array}\right];$$

(ii) e, de seguida, multiplicar a 2ª linha por $\left(-\frac{1}{5}\right)$, ou seja,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[\left(-\frac{1}{5}\right)L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array}\right];$$

(iii) e, finalmente, substituir a 3ª linha pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto da 2ª linha por (-3), mais concretamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & -\frac{4}{5} \\ 0 & -3 & 5 & | & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-(-3)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{28}{5} & | & -\frac{42}{5} \end{bmatrix}.$$

Deste modo, verificamos que o percurso

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 3 & 4 & -4 & | & 7 \\ 3 & 6 & 2 & | & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2-(3)L_1 \\ L_3-(3)L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & -1 & | & 4 \\ 0 & -3 & 5 & | & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{5}\right)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & -\frac{4}{5} \\ 0 & -3 & 5 & | & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-(-3)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{28}{5} & | & -\frac{42}{5} \end{bmatrix}$$

nos permite concluir que

$$(\Sigma_1)\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 3x+4y-4z=7 \\ 3x+6y+2z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-z=1 \\ -5y+z=4 \\ -3y+5z=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-z=1 \\ y+\frac{1}{5}z=-\frac{4}{5} \\ -3y+5z=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-z=1 \\ y+\frac{1}{5}z=-\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z=-\frac{42}{5}. \end{cases}$$

Note-se que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{28}{5} & | & -\frac{42}{5} \end{bmatrix}$ descreve o sistema “triangular”

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \\ y+\frac{1}{5}z=-\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z=-\frac{42}{5}. \end{cases}$$

Tal como anteriormente, finalizamos a resolução do sistema recorrendo ao método de substituição (ascendente)

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} \\ \frac{28}{5}z = -\frac{42}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y + z \\ y = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{3}{2}\right) \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cdots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss II.2.16.

Vamos, de seguida, passar à descrição do Método de Eliminação de Gauss.

Comecemos por um exemplo. Pretendemos resolver o sistema

$$(\Sigma_2)\begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -x - 3y + z + 2t = 3 \\ x - y + 4z + t = 1 \\ 2x - 3y + 7z + 3t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b} \Leftrightarrow AX = b\ ,$$

isto é, vamos utilizar o método de eliminação de Gauss para obter todas as sequências de quatro números reais, $(x,\ \ y,\ \ z,\ \ t)$, que satisfazem as quatro equações do sistema (Σ_2).

Verificámos anteriormente que a informação essencial à resolução é constituída pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes, que podem ser dispostos em forma de matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \text{para os coeficientes das incógnitas}$$

$$e\ b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$ para os termos independentes.

Ou, de forma compacta, na matriz completa ou ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

Resolvemos o sistema inicial pelo método de adição ordenada e, em simultâneo, traduzi-lo-emos em termos das matrizes acima referidas.

Resolução por Adição Ordenada

$$(\Sigma_2)\begin{cases} x + 2y + 0z - t = -1 \\ -x - 3y + z + 2t = 3 \\ x - y + 4z + t = 1 \\ 2x - 3y + 7z + 3t = 4 \end{cases}$$

Início da "Fase Descendente"

<u>1º passo:</u>

(i) subtrair à 2ª equação a 1ª multiplicada por (-1);

(ii) subtrair à 3ª equação a 1ª equação;

(iii) subtrair à 4ª equação a 1ª multiplicada por (2).

$$\begin{cases} x + 2y + 0z - t = -1 \\ -y + z + t = 2 \\ -3y + 4z + 2t = 2 \\ -7y + 7z + 5t = 6 \end{cases}$$

Matriz Ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Início da "Fase Descendente"

<u>1º passo:</u>

(i) subtrair à 2ª linha a 1ª multiplicada por (-1);

(ii) subtrair à 3ª linha a 1ª linha;

(iii) subtrair à 4ª linha a 1ª multiplicada por (2).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

2º passo:

• subtrair à 3ª equação a 2ª multiplicada por (3);

• subtrair à 4ª equação a 2ª multiplicada por (7).

$$\begin{cases} x + 2y + 0z - t = -1 \\ -y + z + t = 2 \\ z - t = -4 \\ -2t = -8 \end{cases}$$

2º passo:

• subtrair à 3ª linha a 2ª multiplicada por (3);

• subtrair à 4ª linha a 2ª multiplicada por (7).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

Iniciemos, agora, a "Fase Ascendente".

Usando o método de substituição obtemos:

• a partir da 4ª equação, $t = 4$;

• a partir da 3ª equação, $z = 0$;

• a partir da 2ª equação, $y = 2$;

• a partir da 1ª equação, $x = -1$.

Deste modo a solução do sistema (Σ_2) é dada por

$$(x, \quad y, \quad z, \quad t) = (-1, \quad 2, \quad 0, \quad 4).$$

É simples verificar que este método se pode aplicar a qualquer sistema de m equações lineares com n incógnitas.

Assim, de um modo geral:

(i) usamos o 1º coeficiente da 1ª equação (1º pivot ou 1º redutor) para eliminar todos os coeficientes abaixo dele;

(ii) usamos o 2º coeficiente da 2ª equação (2º pivot ou 2º redutor) para eliminar todos os coeficientes abaixo dele;

… … e continuamos (sempre que possível) do mesmo modo. Terminada a "fase descendente", aplicamos o método de substituição – "fase ascendente".

Formalizemos, agora, alguns conceitos:

Definição II.2.17. [Operações elementares]

Designamos por operações elementares sobre linhas (sobre colunas) as seguintes transformações efectuadas numa matriz:

$\mathcal{O}_1$ - Troca entre si de duas linhas (colunas) paralelas;

$\mathcal{O}_2$ - Multiplicação de uma linha (coluna) por um escalar diferente de zero;

$\mathcal{O}_3$ - Substituição de uma linha (coluna) pela que dela se obtém subtraindo-lhe o produto de outra linha (coluna) por um escalar.

Estas operações que se executam sobre as linhas (colunas) de uma matriz, constituem a base de um processo que se designa, usualmente, por condensação da matriz e que, como vimos, é utilizado na "fase descendente" do método de eliminação de Gauss.

No que se segue, e na discussão e resolução de sistemas de equações algébricas lineares, usaremos, essencialmente, operações elementares sobre linhas:

- $\boldsymbol{L_i/L_j}$: troca, entre si, das linhas i e j;
- $\boldsymbol{L_i - \alpha L_j}$: substituição da linha i pela que dela se obtém subtraindo-lhe a linha j multiplicada por α, $i \neq j$;
- $\boldsymbol{\alpha L_i}$: multiplicação da linha i por um número $\alpha \neq 0$.

Todavia, em alguns casos, também recorremos a um tipo de operações elementares sobre colunas:

- $\boldsymbol{C_i/C_j}$: troca, entre si, das colunas i e j.

Deste modo, para resolver um sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss, começamos por efectuar operações elementares sobre a matriz ampliada (ou matriz completa) do sistema, até obtermos uma matriz do tipo

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4r} & \cdots & a_{4n} & b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{array}\right],$$

onde $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1,2,\cdots,r$,

que designamos por matriz condensada.

De seguida, escrevemos o sistema que corresponde à referida matriz condensada[iii] e terminamos a resolução usando o método de substituição.

[iii] Este sistema é equivalente ao inicial.

Definição II.2.18. [Matriz condensada e característica de uma matriz]

Dizemos que uma matriz está condensada se estiver numa das seguintes formas:

$$\text{(i)}\ \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2r} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3r} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4r} & b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & b_r \end{array}\right],$$

onde $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1,2,\cdots,r$;

$$\text{(ii)}\ \left[\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4r} & \cdots & a_{4n} & b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \end{array}\right],$$

onde $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1,2,\cdots,r$;

$$\text{(iii)}\ \left[\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4r} & \cdots & a_{4n} & b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{array}\right],$$

onde $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1,2,\cdots,r$.

Aos elementos não nulos $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1,2,\cdots,r$, chamamos redutores (ou pivots). Os pivots são sempre números diferentes de zero que são usados para criar zeros na coluna correspondente.

Para transformar uma matriz numa matriz condensada recorremos à utilização de operações elementares com o objectivo de criar zeros em todas as posições abaixo dos pivots.

Ao número de pivots obtidos no final da condensação de uma matriz A chamamos característica da matriz A, sendo as seguintes notações as mais usuais $car(A)$, $c(A)$, $rank(A)$, $r(A)$, ou, simplesmente, r.

Observação II.2.19.

Quando é que o processo anterior — método de eliminação de Gauss — não pode ser utilizado?

Surgem dificuldades quando um elemento que se pretende utilizar como pivot é zero.

Por vezes, quando isso acontece, a dificuldade de aplicação do método pode ser ultrapassada trocando a equação em que esse elemento se anula por uma das outras equações.

Pode, porém, acontecer que a troca de equações não resolva a dificuldade, porque o sistema não tem solução ou tem uma infinidade de soluções.

Analisemos os seguintes exemplos.

Exemplos II.2.20.

(a) Pretendemos resolver o sistema

$$(\Sigma_3)\begin{cases} x+2y-t=-1 \\ -x-3y+z+2t=3 \\ x-y+3z+t=1 \\ 2x-3y+7z+3t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b}$$

por intermédio do método de eliminação de Gauss.

Note-se que

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 - L_1 \\ L_4-(2)L_1}]{L_2-(-1)L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4-(7)L_2]{L_3-(3)L_2}$$

$$\xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right].$$

Surge um "zero" na posição $(3,3)$.

Como podemos continuar?

Neste caso torna-se necessário trocar a terceira coluna com a quarta.

No entanto, ao fazê-lo estamos trocar a coluna dos coeficientes da variável z com a coluna dos coeficientes da variável t.

Assim obtemos

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[\text{elementares}]{\text{operações}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -8 \end{array}\right] \end{array}.$$

Prosseguindo, temos

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -8 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{L_4 - (2)L_3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

No final da eliminação de Gauss constatamos que:

- $c(A) = 3$;
- $\boxed{1}$, $\boxed{-1}$ e $\boxed{-1}$ são elementos redutores ou pivots;
- as incógnitas x, y e t correspondem a colunas com pivot;
- a incógnita z corresponde a uma coluna sem pivot.

Deste modo dividimos as incógnitas em duas classes:

- incógnitas principais (as que no final da eliminação de Gauss correspondem a colunas com pivot);
- incógnitas livres (as que no final da eliminação de Gauss correspondem a colunas sem pivot).[iv]

Neste caso dizemos que x, y e t são incógnitas principais e z é uma incógnita livre.

[iv] Que passaremos para o segundo membro na qualidade de parâmetros, isto é, podem assumir qualquer valor real.

Uma vez que a matriz condensada atrás obtida descreve o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -y + t + z = 2 \\ -t = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

concluímos que

$$\begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -y + t + z = 2 \\ -t = -4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -y + t = 2 - z \\ -t = -4 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ t = 4 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Deste modo, dizemos que o sistema (Σ_3) é possível e indeterminado[v] e que o seu conjunto $\boldsymbol{S}$ de soluções é dado por

$$\boldsymbol{S} = \{(-1 - 2\alpha, \quad 2 + \alpha, \quad \alpha, \quad 4), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Consideremos, agora,

$$(\Sigma_4) \begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -x - 3y + z + 2t = 3 \\ x - y + 3z + t = 1 \\ 2x - 3y + 7z + 3t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar o conjunto solução de (Σ_4) por intermédio do método de eliminação de Gauss.

Repare-se que

---

[v] Possível, porque tem solução; indeterminado, porque não tem uma solução única; tem uma infinidade de soluções.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 - L_1 \\ L_4 - (2)L_1}]{L_2 - (-1)L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 5 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 - (7)L_2]{L_3 - (3)L_2}$$

$$\xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right].$$

Também, neste caso, surge um "zero" na posição $(3,3)$. Por troca de colunas obtemos

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{C_3/C_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -7 \end{array}\right] \end{array}.$$

Recorrendo a mais uma operação elementar, concluímos a condensação da matriz ampliada, do seguinte modo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 - (2)L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Assim podemos garantir que (Σ_4) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ -y + t + z = 2 \\ -t = -4 \\ \underbrace{0 = 1}_{\substack{\text{condição} \\ \text{impossível}}} \end{cases}.$$

Deste modo, $\boldsymbol{S} = \{\ \ \}$ e classificamos (Σ_4) como sistema impossível.

Exercícios II.2.21.

(a) Resolva os sistemas indicando, em cada caso, o conjunto solução:

(a.i) $\begin{cases} x+y+2z=7 \\ x-2y-3z=-7 \\ x-y+z=0 \end{cases}$; (a.ii) $\begin{cases} x+y+2z+t=7 \\ x-2y-3z+2t=-7 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$;

(a.iii) $\begin{cases} x+y+2z=7 \\ x-2y-3z=-7 \\ x-y+z=0 \\ 2x-y+6z=7 \end{cases}$; (a.iv) $\begin{cases} x+y+2z=7 \\ x-2y-3z=-7 \\ x-y+z=0 \\ 2x-y+6z=12 \end{cases}$.

(b) Utilizando o método de eliminação de Gauss, determine o conjunto solução para cada um dos seguintes sistemas:

(b.i) $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 3x+3y-z=6 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$; (b.ii) $\begin{cases} 2u-3v+w=1 \\ 3u-2v+w=0 \\ 5u-5v+2w=10 \end{cases}$;

(b.iii) $\begin{cases} -10b-4c+d=1 \\ a+4b-c+d=2 \\ 3a+2b+c+2d=5 \\ a-6b+3c=1 \end{cases}$.

(c) Determine para que valores $k \in \mathbb{R}$ o sistema que se segue

$$\begin{cases} u+2v-3w=4 \\ -3u+v-5w=-2 \\ 4u+v+(k^2-14)w=k+2 \end{cases}$$

(c.i) é impossível;

(c.ii) é possível e determinado;

(c.iii) é possível e indeterminado.

(d) Resolva os seguintes sistemas, utilizando o método de eliminação de Gauss:

(d.i) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=2 \\ 4x-y-z=7 \end{cases}$; (d.ii) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+4y-z=2 \\ x+2y=1 \end{cases}$;

(d.iii) $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ x+y-z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$; (d.iv) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$;

(d.v) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ 3x+4y+5z=2 \end{cases}$; (d.vi) $\begin{cases} x-2y+3z+t=10 \\ x+y-z=1 \\ 3x+z-t=12 \end{cases}$;

(d.vii) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+z=1 \\ x+3y+z=1 \\ x+y+3z=3 \end{cases}$; (d.viii) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \\ 2x+6y+2z=22 \end{cases}$;

(d.ix) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+3y+7z=5 \\ 2x+5y+11z=0 \\ -x-2y-4z=5 \end{cases}$; (d.x) $\begin{cases} 4x-2y-3z=1 \\ x+3y+z=2 \end{cases}$;

(d.xi) $\begin{cases} 2x+y+4z-3t=2 \\ x-y-z-3t=7 \\ x+2y+5z=-5 \end{cases}$; (d.xii) $\begin{cases} 5x+2y=7 \\ 2z-x=1 \\ 2y+x+3z=6 \\ z=0 \end{cases}$.

(e) Discuta, para todos os valores reais de k, os seguintes sistemas:

(e.i) $\begin{cases} x+ky+z=k \\ x-y+kz=0 \\ x-ky+z=k \end{cases}$; (e.ii) $\begin{cases} x+ky+z=0 \\ kx+y+kz=1 \\ x+ky=k \end{cases}$;

(e.iii) $\begin{cases} x+ky+z=1 \\ kx+y+z=2 \\ x+ky+z=3 \end{cases}$; (e.iv) $\begin{cases} x+ky+kz=0 \\ kx+k^2y+kz=k \\ 2kx+k^2y+2z=k+1 \end{cases}$;

(e.v) $\begin{cases} (k-1)x-ky-z=-1 \\ -x+ky=0 \\ 2z=k \end{cases}$; (e.vi) $\begin{cases} -x+ky=-k \\ -ky+kz=2 \\ x-kz=-1 \end{cases}$;

(e.vii) $\begin{cases} 3x+y-2z+4t=-2 \\ 6x+2y+kz+8t=k \\ ky=1 \end{cases}$.

(f) Discuta para todos os valores reais de α e β o sistema

$$\begin{cases} -x+2y-z=2 \\ 3y+z=\alpha \\ x+y+2z=2\beta \end{cases}$$

e resolva-o no caso em que é possível e determinado.

Soluções:

(a.i) $\boldsymbol{S}=\{(2,\quad 3,\quad 1)\}$;

(a.ii) $\boldsymbol{S}=\left\{\left(2-\frac{12}{7}\gamma,\quad 3-\frac{11}{7}\gamma,\quad 1+\frac{8}{7}\gamma,\quad \gamma\right), \gamma\in\mathbb{R}\right\}$;

(a.iii) $\boldsymbol{S}=\{(2,\quad 3,\quad 1)\}$;

(a.iv) $\boldsymbol{S}=\{\quad\}$.

(b.i) $\boldsymbol{S}=\left\{\left(\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad -3\right)\right\}$;

(b.ii) $\mathbf{S}=\{\quad\}$;

(b.iii) $\boldsymbol{S}=\left\{\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\beta,\quad 0,\quad \frac{1}{4}\beta-\frac{1}{4}, \beta\right),\quad \beta\in\mathbb{R}\right\}$.

(c.i) $k=-4$;

(c.ii) $k \notin \{-4, \quad 4\}$;

(c.iii) $k = 4$.

(d.i) $\boldsymbol{S} = \left\{\left(\frac{8}{5}, \quad \frac{3}{20}, \quad -\frac{3}{4}\right)\right\}$;

(d.ii) $\boldsymbol{S} = \{ \quad \}$;

(d.iii) $\boldsymbol{S} = \{(0, \quad 0, \quad 0)\}$;

(d.iv) $\boldsymbol{S} = \{(-\alpha, \quad 0, \quad \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$;

(d.v) $\boldsymbol{S} = \{ \quad \}$;

(d.vi) $\boldsymbol{S} = \left\{\left(4 - \frac{1}{3}\alpha, \quad -3 + \frac{4}{3}\alpha, \quad \alpha, \quad 0\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$;

(d.vii) $\boldsymbol{S} = \{ \quad \}$;

(d.viii) $\boldsymbol{S} = \{(x, \quad y, \quad z) = (1, \quad 3, \quad 1)\}$;

(d.ix) $\boldsymbol{S} = \{ \quad \}$;

(d.x) $\boldsymbol{S} = \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha, \quad \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$;

(d.xi) $\boldsymbol{S} = \{(3 - \alpha + 2\beta, \quad -4 - 2\alpha - \beta, \quad \alpha, \quad \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;

(d.xii) $\boldsymbol{S} = \{ \quad \}$.

(e.i) Se $k = 0$ então o sistema é possível e indeterminado; se $k = 1$ então o sistema é impossível; se $k \notin \{0, \quad 1\}$ então o sistema é possível e determinado;

(e.ii) Se $k = -1 \vee k = 1$ então o sistema é impossível; se $k \neq -1 \wedge k \neq 1$ então o sistema é possível e determinado;

(e.iii) O sistema é impossível para qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$;

(e.iv) Se $k = 0$ então o sistema é possível e indeterminado; se $k = 1$ então o sistema é impossível; se $k \neq 0 \wedge k \neq 1$ então o sistema é possível e determinado;

(e.v) Se $k = 2$ então o sistema é possível e indeterminado; se $k = 0$ então o sistema é impossível; se $k \notin \{0, \quad 2\}$ então o sistema é possível e determinado;

(e.vi) Se $k = 1$ então o sistema é possível e indeterminado; se $k \neq 1$ então o sistema é impossível;

(e.vii) Se $k = 0$ então o sistema é impossível; se $k = -4$ então o sistema é possível e duplamente indeterminado; se $k \notin \{-4, \quad 0\}$ então o sistema é possível e simplesmente indeterminado.

II.3 – Sistemas homogéneos. Conjunto solução de um sistema homogéneo. Espaço nulo ou núcleo de uma matriz. Dependência e independência linear de filas paralelas de uma matriz.

Como referimos anteriormente, chamamos homogéneo ao sistema

$$Ax = 0, \text{ onde } A \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Estes sistemas têm propriedades interessantes. Em particular, são sempre possíveis. Além disso, a partir das soluções de $Ax = 0$, podemos construir o conjunto solução de qualquer sistema do tipo

$$Ax = b, \text{ onde } b \in \mathbb{R}^{m},$$

conhecendo apenas uma das suas soluções particulares.

Nesta secção associaremos o estudo destes sistemas aos conceitos de espaço nulo de uma matriz e de dependência e independência linear de filas paralelas de uma matriz.

Comecemos por alguns

Exercícios com resolução II.3.1.

Resolva os seguintes sistemas

a) $(\Sigma_1)\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

b) $(\Sigma_2)\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

c) $(\Sigma_3)\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

d) $(\Sigma_4)\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

e) $(\Sigma_5)\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

f) $(\Sigma_6)\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

g) $(\Sigma_7)\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

h) $(\Sigma_8)\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

a) (Σ_1) é um sistema homogéneo com três equações, $m = 3$, e três incógnitas, $n = 3$.

Verificamos que a sequência nula $(0,\ \ 0,\ \ 0)$ é solução do sistema, pois fazendo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$ obtemos

$$\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ -0 + 0 = 0 \\ -0 + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Logo podemos garantir que o sistema é possível.

Além disso, constatamos que

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1| & 0 \\ -1 & 1 & 0| & 0 \\ -1 & 1 & 0| & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-(-1)L_1]{L_2-(-1)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1| & 0 \\ 0 & 1 & 1| & 0 \\ 0 & 1 & 1| & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-L_2]{} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1| & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1| & 0 \\ 0 & 0 & 0| & 0 \end{bmatrix}.$$

E verificamos que, no final da eliminação de Gauss:

- $c(A) = 2$;
- $\boxed{1}$ e $\boxed{1}$ são elementos redutores ou pivots;
- as incógnitas x_1 e x_2 correspondem a colunas com pivot, pelo que se dizem incógnitas principais;
- a incógnita x_3 corresponde a uma coluna sem pivot, sendo, por isso, uma incógnita livre.

Assim, temos

$$(\Sigma_1)\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Deste modo concluímos que o conjunto solução é formado por uma infinidade de sequências ordenadas, mais concretamente,

$$\boldsymbol{S}_{\Sigma_1} = \{(-\alpha, \quad -\alpha, \quad \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1, \quad -1, \quad 1), \alpha \in \mathbb{R}\},$$

e, consequentemente, dizemos que o sistema (Σ_1) é possível e indeterminado.

b) Neste caso, temos um sistema homogéneo com quatro equações, $m = 4$, e três incógnitas, $n = 3$.

A sequência nula $(0, \quad 0, \quad 0)$ também é solução do sistema (Σ_2). Por outro lado,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-(-1)L_1 \\ L_4-(-1)L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3-L_2 \\ L_4-L_2 \\ L_3/L_4}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim. podemos afirmar que, no final da eliminação de Gauss:

- $c(A) = 3$;
- $\boxed{1}$, $\boxed{1}$ e $\boxed{1}$ são elementos redutores ou pivots;
- as incógnitas x_1, x_2 e x_3 correspondem a colunas com pivot, pelo que todas as incógnitas são principais.

Logo

$$(\Sigma_2)\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

donde $\boldsymbol{S}_{\Sigma_2} = \{(0, \quad 0, \quad 0)\}$, e concluímos que (Σ_2) é um sistema homogéneo determinado.

c) Relativamente a (Σ_3), observamos que $m = 2 < n = 3$ e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-(-1)L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Desta forma verificamos que

- $c(A) = 2$;
- $\boxed{1}$ e $\boxed{1}$ são elementos redutores ou pivots;

- as incógnitas x_1 e x_2 correspondem a colunas com pivot, pelo que são incógnitas principais;
- a incógnita x_3 é livre, pois corresponde a uma coluna sem pivot.

Logo

$$(\Sigma_3)\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e, consequentemente,

$$\boldsymbol{S}_{\Sigma_3} = \{(-\alpha, \quad -\alpha, \quad \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1, \quad -1, \quad 1), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$ [vi]

Dizemos que (Σ_3) é um sistema homogéneo indeterminado.

d) Uma vez que, para (Σ_4), temos $m = n = 3$ e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-(-1)L_1]{L_2-(-1)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \end{array}\right],$$

podemos afirmar que (Σ_4) é um sistema homogéneo determinado, uma vez que

$$\boldsymbol{S}_{\Sigma_4} = \{(0, \quad 0, \quad 0)\}.$$ [vii]

e) (Σ_5) não é um sistema homogéneo. Tem três equações e três incógnitas.

Verificamos que

[vi] Note que $\mathbf{S}_{\Sigma_1} = \mathbf{S}_{\Sigma_3}$. Podemos afirmar que os sistemas homogéneos (Σ_1) e (Σ_3) são equivalentes? Porquê?

[vii] Note que $\mathbf{S}_{\Sigma_2} = \mathbf{S}_{\Sigma_4}$. Podemos afirmar que os sistemas homogéneos (Σ_2) e (Σ_4) são equivalentes. Porquê?

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-(-1)L_1 \\ L_3-(-1)L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-L_2]{} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que x_1 e x_2 são incógnitas principais, enquanto x_3 é uma incógnita livre.

Deste modo concluímos que

$$(\Sigma_5) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \alpha \\ x_2 = 2 - \alpha, \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

o que nos permite definir o conjunto solução

$$\mathbf{S}_{\Sigma_5} = \{(1 - \alpha, \quad 2 - \alpha, \quad \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Consequentemente, dizemos que o sistema (Σ_5) é possível e indeterminado.

f) (Σ_6) também é um sistema não homogéneo. Tem quatro equações e três incógnitas, logo $m = 4 < n = 3$. Por outro lado, temos que

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-(-1)L_1 \\ L_4-(-1)L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3-L_2 \\ L_4-L_2 \\ L_3/L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & | & \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

Assim, podemos afirmar que (Σ_6)é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = 0, \\ \boxed{0 = -1} \end{cases}$$

o que nos permite concluir que (Σ_6) é um sistema impossível.

g) Estamos perante um sistema não homogéneo em que $m = 2 < n = 3$. Neste caso, observamos que

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1| & 1 \\ -1 & 1 & 0| & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2-(-1)L_1]{} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1| & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1| & 2 \end{bmatrix}.$$

pelo que podemos afirmar que $c(A) = 2 < n$ e concluir que existe uma incógnita livre, x_3. As incógnitas x_1 e x_2 são principais pois correspondem a colunas com pivot.

Assim

$$(\Sigma_7) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \gamma \\ x_2 = 2 - \gamma \\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e, consequentemente,

$$\boldsymbol{S}_{\Sigma_7} = \{(1-\gamma, \quad 2-\gamma, \quad \gamma), \gamma \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(1, \quad 2, \quad 0) + \gamma(-1, \quad -1, \quad 1), \gamma \in \mathbb{R}\}.$$ [viii]

Finalizamos, dizendo que (Σ_7) é um sistema possível e indeterminado.

h) Uma vez que, para (Σ_8), temos $m = n = 3$ e, além disso,

$$c[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1| & 1 \\ -1 & 1 & 0| & 1 \\ -1 & 0 & 1| & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-(-1)L_1 \\ L_3-(-1)L_1}]{} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1| & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1| & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2}| & 2 \end{bmatrix},$$

podemos garantir que $c(A) = 3$ e que todas as incógnitas são principais.

Logo

$$(\Sigma_8) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

[viii] Podemos afirmar que $\mathbf{S}_{\Sigma_5} = \mathbf{S}_{\Sigma_7}$? E que $\mathbf{S}_{\Sigma_3} = \mathbf{S}_{\Sigma_7}$? Porquê?

e podemos afirmar que (Σ_8) é um sistema possível determinado com o seguinte conjunto solução

$$\boldsymbol{S}_{\Sigma_8} = \{(0, \quad 1, \quad 1)\}.$$

Exercícios II.3.2

a) Sabendo que o sistema não homogéneo $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, é possível e determinado, defina, justificando a sua resposta, o conjunto solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

b) Seja $Ax = 0$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, um sistema homogéneo com m equações e n incógnitas. Verifique que o conjunto solução deste sistema satisfaz duas propriedades importantes:

(b-i) Se $u = (u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_n)$ e $v = (v_1, \quad v_2, \quad \cdots, \quad v_n)$ são soluções de $Ax = 0$ então $w = u + v = (u_1 + v_1, \quad u_2 + v_2, \quad \cdots, \quad u_n + v_n)$ também é solução de $Ax = 0$;

(b-ii) Se α é um número real e $u = (u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_n)$ é uma solução de $Ax = 0$ então $z = \alpha u = (\alpha u_1, \quad \alpha u_2, \quad \cdots, \quad \alpha u_n)$ também é solução de $Ax = 0$.

Exercícios II.3.3.

a) Tendo em conta os exercícios anteriores analise a veracidade das seguintes afirmações:

(i) Um sistema homogéneo é sempre possível;

(ii) Se um sistema homogéneo tem uma solução não nula então é indeterminado;

(iii) Se num sistema homogéneo o número de incógnitas é superior ao número de equações então o sistema é indeterminado.

b) Considere o sistema homogéneo $Ax = 0$, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $c(A)$ designa a característica da matriz A. Complete:

(i) Se $m = n$ então $Ax = 0$ é um sistema ______________________________;

(ii) Se $c(A) = m = n$ então $Ax = 0$ é um sistema ________________________;

(iii) Se $c(A) < m = n$ então $Ax = 0$ é um sistema ______________________;

(iv) Se $m < n$ então $Ax = 0$ é um sistema ______________________________;

(v) Se $c(A) = n < m$ então $Ax = 0$ é um sistema ________________________.

c) Considere o sistema <u>não</u> homogéneo $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $c(A)$ designa a característica da matriz A. Complete:

(i) Se $m = n$ então $Ax = b$ é um sistema ______________________________;

(ii) Se $c(A) = m = n$ então $Ax = b$ é um sistema ________________________;

(iii) Se $c(A) < m = n$ então $Ax = b$ é um sistema ______________________;

(iv) Se $m < n$ então $Ax = b$ é um sistema ______________________________;

(v) Se $n < m$ então $Ax = b$ é um sistema ______________________________;

(vi) Se $c(A) = m < n$ então $Ax = b$ é um sistema ______________________.

(vii) Se $c(A) = n < m$ então $Ax = b$ é um sistema ______________________.

d) Prove que o sistema homogéneo $Ax = 0$, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, nunca é impossível.

e) Sabendo que a característica de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é igual ou inferior a $\min\{m, n\}$, classifique o sistema homogéneo $Ax = 0$ quanto ao número de soluções.

f) Seja $A = 0_{3\times 3}$. Defina o conjunto solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Definimos, de seguida, núcleo ou espaço nulo de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Trata-se de um conjunto de vectores — sequências ordenadas de números reais — que, como veremos, está intimamente relacionado com as soluções de um sistema homogéneo.

Definição II.3.4.

Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Chamamos núcleo ou espaço nulo da matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ao conjunto de todos os vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a equação $Ax = 0$.

Assim

$$\text{núcleo de } A \underbrace{=}_{notação} \mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\},$$

e podemos garantir que o espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, contém sempre, pelo menos, um elemento, a sequência nula $(0, \quad 0, \quad \cdots, \quad 0)$.

Exercícios II.3.5.

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Determine o espaço nulo de A, isto é, $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = 0\}$.

b) Sabendo que $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, determine os núcleos das matrizes $B - 3I_3$ e $B + I_3$.

c) Verifique que os elementos do espaço nulo da matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são múltiplos escalares do vector $(0, \quad 1, \quad -1)$.

d) Seja dada a matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Mostre que núcleo de $M + 4I_3$ coincide com o conjunto das combinações lineares dos vectores $(1, \quad -1, \quad 0)$ e $(1, \quad 0, \quad -1)$.

Podemos associar dois conceitos importantes da Álgebra Linear — a dependência e independência linear de filas paralelas de uma matriz — à discussão de um sistema homogéneo.

Definição II.3.6.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

(i) Se $m = n$, isto é, se A é uma matriz quadrada, dizemos que as filas paralelas (linhas ou colunas) de A são linearmente dependentes se o sistema homogéneo

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é indeterminado.}$$

Caso contrário, isto é, quando o sistema anterior for determinado, dizemos que as filas paralelas (linhas ou colunas) de A são linearmente independentes.

(ii) Se $m \neq n$, isto é, se A é uma matriz rectangular, dizemos que:

(ii-a) as colunas de A são linearmente dependentes se o sistema homogéneo

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é indeterminado.}$$

Caso contrário, isto é, quando o sistema anterior for determinado, dizemos que as colunas de A são linearmente independentes.

(ii-b) as linhas de A são linearmente dependentes se o sistema homogéneo

$$A^T x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é indeterminado.}$$

Caso contrário, isto é, quando o sistema anterior for determinado, dizemos que as linhas de A são linearmente independentes.

Exercícios II.3.7.

a) Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a-i) Resolva o sistema $Mx = 0$;

(a-ii) Defina o conjunto solução do sistema homogéneo $M^T z = 0$;

(a-iii) Indique a característica da matriz M;

(a-iv) As linhas de M são linearmente independentes? E as colunas?

(a-v) Calcule a matriz $N = MM^T$;

(a-vi) Determine, caso exista, a inversa da matriz $N = MM^T$.

2. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Prove que «A matriz A é invertível» é equivalente às afirmações seguintes:

(a-i) A característica de A é igual a n;

(a-ii) As colunas de A são linearmente independentes;

(a-iii) As linhas de A são linearmente independentes;

(a-iv) O sistema $Ax = 0$ é determinado, i.e., a solução nula é única;

(a-v) O sistema $Ax = b$ é determinado, i.e., tem uma única solução $x = A^{-1}b$;

(a-vi) $\mathcal{N}(A) = \{(0, \quad 0, \quad \cdots, \quad 0)\}$.

b) E se a afirmação inicial for « A não tem inversa»?

(Página deixada propositadamente em branco)

II.4 – Aplicação do estudo de sistemas de equações lineares na inversão de matrizes.

No Capítulo I, secção I.6, definimos inversa de uma matriz quadrada e verificámos que nem toda a matriz admite inversa e, ainda, que se uma matriz tem inversa, ela é única.

Vamos, de seguida, analisar este tópico utilizando a eliminação de Gauss e o conceito de matriz não-singular.

Definição II.4.1. [Matriz não singular]

Dizemos que uma matriz quadrada é não singular se, no final do método de eliminação de Gauss (onde foram apenas utilizadas operações elementares sobre linhas do tipo $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ e $\mathcal{O}_3$), é transformada numa matriz triangular superior cujos elementos principais são não nulos.

Caso contrário, a matriz diz-se singular.

Exemplos II.4.2.

Considere duas matrizes quadradas de ordem três,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é não singular visto que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\cdots\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \underset{\cdots\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = U_A,$$

Sendo U_A uma matriz triangular cujos elementos principais são não nulos.

Por outro lado, a matriz B é singular dado que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \underset{\cdots\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \underset{\cdots\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_B,$$

onde a matriz U_B obtida tem (dois) elementos nulos na diagonal principal, que não podem ser removidos por troca de linhas.

Vamos agora enunciar (sem demonstração) uma condição necessária e suficiente para a existência de inversa de uma matriz:

Proposição II.4.3. [Condição necessária e suficiente para a existência de inversa de uma matriz]

A matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível se e só se A é não singular.

Uma vez que a determinação da inversa de uma matriz está associada à resolução de um sistema de equações algébricas lineares, vamos recorrer à eliminação de Gauss e, à definição de inversa de uma matriz, para resolver o seguinte

Problema II.4.4.

Seja dada a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Pretendemos calcular uma matriz $X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que $AX = I_n$.

Admitimos que A é uma matriz de terceira ordem.

Deste modo procuramos uma matriz X, do tipo 3×3, tal que:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right].$$

Tendo em conta as propriedades da multiplicação de matrizes, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right] \\ \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right] \\ \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right] \end{cases}.$$

Transformamos, assim, a equação inicial em três sistemas de equações lineares.

Repare-se que, em todos eles, a matriz dos coeficientes é a mesma, sendo as matrizes amplidas as seguintes

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right] \text{ e } \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 1 \end{array}\right].$$

Uma vez que, na resolução de cada sistema, temos de condensar a matriz A por que não dispor os cálculos de modo a efectuar uma só vez a condensação de A?

É o que vamos fazer:

(i) Construímos a matriz ampliada

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & 0 \\ & A & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

(ii) Usando operações elementares (sobre linhas) vamos tentar passar da matriz $[A|I_3]$ à matriz $[I_3|B]$;

(iii) Se se puder formar a matriz $[I_3|B]$, a inversa de A existe, e, então B será a matriz inversa procurada, A^{-1}.

Em resumo:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & 0 \\ & A & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{operações\ elementares \\ por\ linhas}]{}$$

$$\xrightarrow[\dots\dots]{} [I_3|A^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & A^{-1} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right].$$

De um modo geral, podemos concluir, se $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz não singular, então

$$[A|I_n] \xrightarrow[\substack{operações\ elementares \\ por\ linhas}]{} [I_n|A^{-1}].$$

Exemplo II.4.5.

No sentido de determinar a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, temos sucessivamente

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-(-1)L_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\left(\frac{1}{5}\right)L_1]{}$$

$$\xrightarrow[\cdots\cdots]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow[L_1-(2)L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Deste modo, obtemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Exercícios II.4.6.

a) Calcule, se possível, a inversa das seguintes matrizes:

(a-i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

(a-ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$;

(a-iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$;

(a-iv) $D = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

b) Determine a inversa das seguintes matrizes:

(b-i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$;

(b-ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$;

(b-iii) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(b-iv) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

(b-v) $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

c) Usando a inversa A^{-1}, da matriz do exercício (b-i), resolva o sistema

$$\begin{cases} -x + 4z = 11 \\ x - y - 9z = -28 \\ 4x + 5y = 14 \end{cases}.$$

d) Recorrendo ao conceito de inversa de uma matriz, determine a matriz X que satizfaz a relação

$$AXB = C,$$

em que $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

e) Seja $M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(e-i) Calcule a inversa da matriz M.

(e-ii) Usando, se possível, a matriz M^{-1} obtida na alínea anterior, resolva o sistema

$$\begin{cases} 3y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}.$$

f) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(f-i) Calcule $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de modo que $A = LU$;

(f-ii) Determine os produtos $w^T A$ e AX,

sendo $w = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{11}{3} \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$;

(f-iii) Determine a matriz inversa de A;

(f-iv) Verifique que $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

g) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

(g-i) Verifique que S é uma matriz ortogonal;

(g-ii) Calcule os produtos $S^T S$, AS e $S^T AS$;

(g-iii) Determine a matriz inversa de A;

(g-iv) Indique a matriz inversa de S.

(Página deixada propositadamente em branco)

CAPÍTULO III • DETERMINANTES

III.1 – Introdução da noção de determinante. Determinante de primeira ordem e determinante de segunda ordem: definição e propriedades.

Introduzimos a noção de determinante a partir da noção de função de matriz quadrada. Mostramos que, apesar de não desempenhar, presentemente, um papel central no estudo da Álgebra Linear que lhe era atribuído algumas décadas atrás, este conceito tem, ainda, aplicações interessantes. Nomeadamente, o determinante permite obter fórmulas explícitas para a inversa de uma matriz bem como para a solução de um sistema de equações lineares (regra de Cramer), podendo também ser utilizado no cálculo de valores próprios de uma matriz.

Comecemos com matrizes quadradas de 1ª ordem.

Definição III.1.1. [Determinante de 1ª ordem]

Seja $A = [a_{11}] \in \mathbb{R}^{1\times1}$ então

determinante de $A \underbrace{=}_{notação} detA \underbrace{=}_{notação} det[a_{11}] \underbrace{=}_{notação} |A| \underbrace{=}_{notação} |a_{11}| \underbrace{=}_{definição} a_{11}$.

Consideremos, agora, matrizes quadradas de 2ª ordem.

Definição III.1.2. [Determinante de 2ª ordem]

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Estabelecemos que

$$\text{determinante de } A \underbrace{=}_{notação} detA \underbrace{=}_{notação} det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underbrace{=}_{notação}$$

$$= |A| \underbrace{=}_{notação} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \underbrace{=}_{definição} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Repare-se que — em ambos os casos (1ª e 2ª ordem) — definimos uma função determinante

(i) de 1ª ordem:

$$det: \mathbb{R}^{1\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } detA = a_{11}, \text{ sendo } A = [a_{11}] \in \mathbb{R}^{1\times 1};$$

(ii) de 2ª ordem:

$$det: \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \text{ sendo } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Note-se, ainda, que — no nosso contexto — o valor da função determinante é sempre um número real.

Exemplo III.1.3.

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$.

Então $detA = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$,

$$detB = (3)(10) - (-4)(7) = 30 - (-28) = 58,$$

e

$$detC = (3)(14) - (7)(6) = 42 - 42 = 0.$$

Exercício III.1.4. [Propriedades da função determinante de 2ª ordem]

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Prove que:

P.1. O valor do determinante de A é igual ao valor do determinante da matriz transposta de A, isto é, $detA = detA^T$.

Sugestão: Verificamos que

$$detA^T = det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

P.2. O valor do determinante de uma matriz triangular A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de A

Sugestão: Consideremos, neste caso, $c = 0$, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Deste modo,

$$detA = det\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = (a)(d) - (b)(0) = ad$$

P.3. Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tem uma linha (coluna) de zeros, então $detA = 0$.

Sugestão: Constatamos que

---

^{i} Tendo em conta P.1, basta verificar esta propriedade para matrizes triangulares superiores. Porquê?

$$det\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (a)(0) - (b)(0) = 0.$$

P.4. Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tem (as) duas linhas (colunas) iguais então $detA = 0$.

Sugestão: Provamos que

$$det\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = (a)(b) - (b)(a) = 0.$$

P.5. Seja $I_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Então $detI_2 = 1$.

Sugestão: Basta verificar que

$$detI_2 = det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (1)(1) - (0)(0) = 1.$$

P.6. Como função de cada linha (coluna), o determinante de 2ª ordem é uma função linear.[ii]

Sugestão: Constatamos, por exemplo, que

$$det\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{bmatrix} = (a+e)(d) - (b+f)(c) = det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} e & f \\ c & d \end{bmatrix}$$

e

$$det\begin{bmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} = (a)(\lambda d) - (b)(\lambda c) = \lambda det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

P.7. O valor do determinante de A não se altera quando substituímos uma linha (coluna) pela que dela se obtém adicionando-lhe um múltiplo escalar de(a) outra.

Sugestão: Tenhamos em conta que

$$det\begin{bmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} \lambda c & \lambda d \\ c & d \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \lambda \underbrace{det\begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix}}_{=0}.$$

P.8. O valor do determinante de A muda de sinal quando trocamos — entre si — (as) duas linhas (colunas).

Sugestão: De acordo com as propriedades anteriores podemos afirmar que

$$det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} det\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} det\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ a & b \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{=}_{porquê?} det\begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} -det\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$

P.9. O valor do determinante de A é nulo se e só se as suas linhas são linearmente dependentes.

Sugestão: Recorde que, por definição, as duas linhas de A são linearmente dependentes se e só se o sistema homogéneo $Ax = 0$ é indeterminado, bem como as propriedades anteriores **P.3** e **P.7**.

[ii] Seja $f: A \longrightarrow B$ uma função real de variável real. f é linear se e só se $f(a+b) = f(a) + f(b)$ e $f(ka) = kf(a)$.

P.10. Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $det(\alpha A) = \alpha^2 detA$.

Sugestão: Verifique que

$$det(\alpha A) = det\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} \alpha det\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} \alpha^2 det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Exercícios III.1.5.

a) Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

(a-i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

(a-ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$;

(a-iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$;

(a-iv) $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$;

(a-v) $E = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$;

(a-vi) $F = \begin{bmatrix} |\theta + 1| & 1 \\ 1 & |\theta - 1| \end{bmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b) Recorde a definição de matrizes elementares (Secção I.5) e considere E_{ik}, $E_i(\alpha)$, $E_{ik}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Prove que $detE_{ik} = -1$, $detE_i(\alpha) = \alpha$ e $detE_{ik}(\alpha) = 1$.

III.2. - Determinante de ordem n: definição e propriedades. Cálculo do determinante de uma matriz à custa do determinante de uma matriz triangular obtida por eliminação de Gauss.

Analisamos, agora, o caso das matrizes de ordem 3. Definimos determinante de 3ª ordem utilizando a noção de determinante de 2ª ordem.

Definição III.2.1. [Determinante de 3ª ordem]

Seja $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e $A_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a matriz que obtemos de A suprimindo-lhe a linha i e a coluna j.

Definimos

$$detA = a_{i1}(-1)^{i+1}detA_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}detA_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}detA_{i3} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(-1)^{i+j}detA_{ij}.$$

(Desenvolvimento segundo a linha i).

Exercício (resolvido) III.2.2.

Verifique que o número que obtemos para o valor do determinante de A é sempre o mesmo, independentemente da escolha da linha:

(i) Desenvolvimento segundo a linha 1:

$$detA = det\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{detA_{11}} + a_{12}(-1)^{1+2}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{detA_{12}} + a_{13}(-1)^{1+3}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{detA_{13}} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(ii) Desenvolvimento segundo a linha 2:

$$detA = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{21}(-1)^{2+1}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{detA_{21}} + a_{22}(-1)^{2+2}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{detA_{22}} + a_{23}(-1)^{2+3}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{detA_{23}} =$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}.$$

(iii) Desenvolvimento segundo a linha 3:

$$detA = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{31}(-1)^{3+1}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{detA_{31}} + a_{32}(-1)^{3+2}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}_{detA_{32}} + a_{33}(-1)^{3+3}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{detA_{33}} =$$

$$= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

De acordo com o exercício anterior constatamos que o valor do determinante de 3ª ordem é obtido por adição de seis parcelas, em que cada parcela é um produto de três factores.

Dizemos que os produtos

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ \ a_{11}a_{23}a_{32},\ \ a_{12}a_{21}a_{33},\ \ a_{12}a_{23}a_{31},\ \ a_{13}a_{21}a_{32}\ \text{ e }\ a_{13}a_{22}a_{31}$$

são termos da matriz A.

Exercício III.2.3.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcule:

(a-i) $detA$ e $detB$;

(a-ii) $detAB$;

(a-iii) $det(A+B)$;

(a-iv) $detA^{-1}$ e $detB^{-1}$;

(a-v) $det(AB)^{-1}$.

b) Verifique que:

(b-i) $det(A+B) \neq detA + detB$;

(b-ii) $detAB = (detA)(detB)$;

(b-iii) $detA = detA^T$ e $detB = detB^T$;

(b-iv) $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$;

(b-v) $det(AB)^{-1} = det(B^{-1}A^{-1})$.

Resolução:

(a-i)

$$detA = det\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad -3} \\ -2 \quad 4 \quad -1 \\ 0 \quad 5 \quad 0 \end{bmatrix} = (1)(-1)^{\cdots\cdots}det\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \cdots\cdots\cdots +$$

$$+(-3)(-1)^{1+3}det\begin{bmatrix} \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \cdots\cdots\cdots + \cdots\cdots\cdots = 35;$$

$$detB = det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = (\cdots)(-1)^{2+2}det\begin{bmatrix} 2 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} = 30.$$

(a-ii)

$$detAB = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = det\begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -4 & 20 & -5 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (25)(-1)^{3+2}det\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \cdots\cdots ;$$

(a-iii)

$$det(A+B) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = det\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \cdots\cdots;$$

(a-iv)

$$detA^{-1} = det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = det\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \frac{12}{35} \\ 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & -\frac{1}{7} & \cdots \end{bmatrix} = \cdots\cdots;$$

$$detB^{-1} = det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = det\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & -\frac{1}{6} \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \cdots\cdots.$$

Observação III.2.4.

Suponhamos que pretendemos calcular o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 10 \\ 0.3 & 0 & \sqrt{5} \\ 2.41 & 0.1 & {}^{32}/_{6} \end{bmatrix}.$$

Podemos obter o valor do determinante de M utilizando o desenvolvimento segundo uma das colunas[iii]?

Vamos verificar que sim, ou seja, vamos provar que o valor de determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser obtido por intermédio do desenvolvimento segundo qualquer uma das suas colunas.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Calculamos, sucessivamente,

(i) $detA = det\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{bmatrix} =$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

[iii] Neste caso interessa-nos desenvolver segundo a coluna 2.

(ii) $detA = det\begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} =$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

(iii) $detA = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{bmatrix} =$

$$= a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Que podemos concluir?

Podemos afirmar que, para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$detA = a_{i1}(-1)^{i+1}detA_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}detA_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}detA_{i3} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(-1)^{i+j}detA_{ij}.$$

(Desenvolvimento segundo a linha i)

ou, de modo equivalente,

$$detA = a_{1j}(-1)^{1+j}detA_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}detA_{2j} + a_{3j}(-1)^{3+j}detA_{3j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_{ij}(-1)^{i+j}detA_{ij}$$

(Desenvolvimento segundo a coluna j).

De seguida, vamos provar que o valor do determinante de A coincide com o valor do determinante da sua transposta.

Proposição III.2.5.

Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Então $detA = detA^T$.

Demonstração:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$. Deste modo

$$detA^T = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \underbrace{=}_{\substack{desenvolvendo \\ segundo\ a\ linha\ 1}}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \underbrace{=}_{porquê?}$$

$$= a_{11}(-1)^2\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^4\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ 22 & a_{23} \end{vmatrix} = detA.$$

Exercícios III.2.6.

a) Retome as matrizes do Exemplo III.2.3., isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que:

(a-i) $detA = det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{3+2}(5)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$;

(a-ii) $detB = det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = (2)(5)(3)$.

b) Prove que as propriedades enunciadas para determinantes de 2ª ordem (ver **III.1.4.**) se mantém válidas para determinantes de 3ª ordem.

c) Sejam $M = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 \\ -3 & 5 & -9 \end{bmatrix}$.

Utilizando as propriedades referidas na alínea anterior, mostre que:

(c-i) $detM = det\begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = -det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 33 \end{bmatrix} =$

$$= -det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} = -(1)(2)(33) = -66;$$

(c-ii) $detN = det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$;

(c-iii) $detP = det\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 \\ -3 & 5 & -9 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix} = -6$.

d) Mostre que $det\begin{bmatrix} 3179 & \sqrt{3} & 411 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{5}{7} & -2 \end{bmatrix} = (-1)^{\cdots}(3179)(-3)$.

e) Sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$, justifique os seguintes cálculos

$$det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{bmatrix} = det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\0 & b-a & \cdots\cdots\\0 & \cdots\cdots & c^2-a^2\end{bmatrix} = (\cdots - \cdots)det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\0 & 1 & b+a\\0 & \cdots\cdots & c^2-a^2\end{bmatrix} =$$

$$= (\cdots - \cdots)(c-a)det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\0 & 1 & b+a\\0 & 1 & \cdots\cdots\end{bmatrix} = (\cdots - \cdots)(c-a)(c-\cdots).$$

Exercícios III.2.7.

a) Mostre que $|A - kI_3| = (3-k)^2(-3-k)$, sendo $k \in \mathbb{R}$ e

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\-2 & 1 & -2\\-2 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

b) Seja $C = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}$. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $|C - kI_3| = 0$.

c) Considere a matriz $B = \begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\2 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Calcule:

(c-i) o determinante da matriz B;

(c-ii) $p \in \mathbb{R}$ tal que $|B - \lambda I_3| = -\lambda(\lambda + p)(\lambda - 2p)$.

d) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix}3 & 0 & -5\\0 & -2 & 0\\-5 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

(d-i) Calcule o determinante da matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(d-ii) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizando as propriedades dos determinantes prove que:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -5 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -5 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2(8-\lambda).$$

e) Sejam duas matrizes quadradas de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Consideremos, ainda, dois tipos de matrizes elementares:

$E_{ik} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, por troca da linha i pela linha k

e

$E_{ik}(\alpha) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz quadrada que se obtém da matriz identidade, da mesma ordem, substituindo a linha i pela que dela se obtém subtraindo-lhe a linha k, previamente multiplicada pelo número $\alpha \in \mathbb{R}$.

(e-i) Calcule os produtos DA, AD, $E_{12}A$, $E_{12}E_{23}A$ e $E_{21}(4)A$.

(e-ii) Determine o valor dos determinantes $det(DA)$, $det(AD)$, $det(E_{12})$, $det(E_{23})$ e $det[E_{21}(4)A]$

(e-iii) Verifique que:

(e-iiia) $det(E_{23}A) = (detE_{23})(detA) = -detA$;

(e-iiib) $det(E_{12}E_{23}A) = (detE_{12})(detE_{23})(detA) = detA$;

(e-iiic) $det(E_{12}E_{12}E_{23}A) = (detE_{12})(detE_{12})(detE_{23})(detA) = -detA$;

(e-iiid) $det[E_{21}(4)A] = detA$;

(e-iv) Prove que:

(e-iva) $detE_{ik} = -1$.

(e-ivb) $detE_{ik}(\alpha) = 1$.

(e-ivc) $det(E_{ik}A) = (detE_{ik})(detA) = -detA$;

(e-ivd) $det[E_{ik}(\alpha)A] = [detE_{ik}(\alpha)](detA) = detA$.

Vamos definir determinante de ordem $n > 1$, supondo conhecido o determinante de ordem $n - 1$.

Definição III.2.8. [Determinante de ordem n]

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ a matriz que obtemos de A suprimindo-lhe a linha 1 e a coluna 1.

Definimos

$$detA = a_{11}(-1)^{1+1}detA_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}detA_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}detA_{1n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}detA_{1j}.$$

(Desenvolvimento segundo a linha 1*).*

No seguinte resultado, que apresentamos sem demonstração, garantimos que o número que obtemos para o valor do determinante de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não depende da escolha da linha.

Trata-se de uma generalização do que verificámos, no Exemplo III.2.2., para matrizes de ordem **3.**

Proposição III.2.9.

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $n \geq 2$. O valor do determinante de A pode ser obtido por intermédio do desenvolvimento segundo qualquer linha de A, isto é,

$$detA = a_{i1}(-1)^{i+1}detA_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}detA_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}detA_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}detA_{ij},$$

onde $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ representa a matriz que obtemos de A suprimindo-lhe a linha i e a coluna j.

Elencamos, de seguida e apenas com sugestões para demonstração, algumas propriedades:

Proposição III.2.10. [Propriedades da função determinante de ordem n]

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

P.1. O valor do determinante de A é igual ao valor do determinante da matriz transposta de A, isto é, $detA = detA^T$.

Sugestão: Podemos provar este resultado por indução em n. Sabemos que se verifica para $n = 1$, já que se A é uma matriz de ordem 1 então $A = A^T$. Admitimos, ainda, que a afirmação se verifica para matrizes de ordem p e vamos mostrar que também é válida para matrizes de ordem $p + 1$.

Assim, se $A \in \mathbb{R}^{(p+1)\times(p+1)}$ então, escolhendo o desenvolvimento segundo a linha 1, podemos escrever

$$detA = a_{11}(-1)^{1+1}det\underbrace{A_{11}}_{p\times p} + a_{12}(-1)^{1+2}det\underbrace{A_{12}}_{p\times p} + \cdots$$

$$\cdots + a_{1(p+1)}(-1)^{1+(p+1)}det =$$

$$\underbrace{=}_{\substack{por\ hipótese\\ de\ indução}} a_{11}(-1)^{1+1}detA_{11}^{T} + a_{12}(-1)^{1+2}detA_{12}^{T} + \cdots$$

$$\cdots + a_{1(p+1)}(-1)^{1+(p+1)}detA_{1(p+1)}^{T} \underbrace{=}_{porquê?} detA^{T}.$$

P.2. O valor do determinante de uma matriz triangular A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de A

Sugestão: Tenhamos em conta o Exercício III.2.19, alínea b).

P.3. Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem uma linha (coluna) de zeros então $detA = 0$.

Sugestão: Basta-nos calcular o determinante por intermédio do desenvolvimento segundo a linha (coluna) de zeros.

P.4. Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem duas linhas iguais então $detA = 0$.

Sugestão: Podemos provar este resultado por indução em n. Sabemos que se verifica para $n = 2$ (ver Exercício III.1.4), admitimos que a afirmação se verifica para matrizes de ordem p e vamos mostrar que também é válida para matrizes de ordem $p + 1$.

Assim, seja $A \in \mathbb{R}^{(p+1)\times(p+1)}$ uma matriz com duas linhas iguais, a linha i e a linha k. Utilizamos uma linha s, sendo $s \neq i$ e $s \neq k$, para calcular o seu determinante. Obtemos

$$detA = a_{s1}(-1)^{s+1}\underbrace{detA_{s1}}_{=0} + a_{p2}(-1)^{s+2}\underbrace{detA_{s2}}_{=0} + \cdots$$

$$\cdots + a_{s(p+1)}(-1)^{i+(p+1)}\underbrace{detA_{s(p+1)}}_{=0} = 0.$$

P.5. Sejam $I_n, E_{ik}, E_i(\alpha), E_{ik}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Então podemos afirmar que

$$detI_n = detE_{ik}(\alpha) = 1,\ detE_{ik} = -1 \text{ e } detE_i(\alpha) = \alpha.$$

Sugestão: Recordemos a definição de matrizes elementares (Secção I.5).

P.6. Seja $E_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Então

$$det(E_{ik}A) = (detE_{ik})(detA) = -detA,$$

ou seja, o valor do determinante de A muda de sinal quando trocamos — entre si — duas linhas.

Sugestão: Podemos utilizar o método de indução.

P.7. Seja $E_{ik}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Então

$$det[E_{ik}(\alpha)A] = [detE_{ik}(\alpha)](detA) = detA,$$

ou seja, o valor do determinante de A não se altera quando substituímos uma linha pela que dela se obtém adicionando-lhe um múltiplo escalar de outra.

Sugestão: Verificamos que a matriz $E_{ik}(\alpha)$ é a matriz que se obtém de A por substituição da linha i pela que dela se obtém subtraindo-lhe a linha k

multiplicada pelo escalar α.[iv] Calculamos $det[E_{ik}(\alpha)A]$ utilizando o desenvolvimento segundo a sua linha i. Obtemos

$$det[E_{ik}(\alpha)A] = (a_{i1} + \alpha a_{k1})(-1)^{i+1}detA_{i1} + (a_{i2} + \alpha a_{k2})(-1)^{i+2}detA_{i2} + \cdots$$

$$\cdots + (a_{in} + \alpha a_{kn})(-1)^{i+n}detA_{in} = detA +$$

$$+\alpha\left[\underbrace{a_{k1}(-1)^{i+1}detA_{i1} + a_{k2}(-1)^{i+2}detA_{i2} + \cdots + a_{kn}(-1)^{i+n}detA_{in}}_{=0^{v}}\right] = detA.$$

P.8. Como função de cada linha, o determinante de ordem n é uma função linear.

Sugestão: Queremos provar que se $E_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, **então**

$$det[E_i(\alpha)A] = [detE_i(\alpha)](detA) = \alpha detA;$$

e, além disso, que

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \boldsymbol{a_{i1}+b_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}+b_{i2}} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a_{in}+b_{in}} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \boldsymbol{b_{i1}} & \boldsymbol{b_{i2}} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{b_{in}} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

[iv] Ou adicionando-lhe a linha k multiplicada pelo escalar $(-\alpha)$

[v] Trata-se do determinante de uma matriz que tem duas linhas iguais.

P.9. O valor do determinante de A é nulo se e só se as suas linhas são linearmente dependentes.

Sugestão: Sabemos que, por definição, as filas paralelas (linhas ou colunas) da matriz A são linearmente dependentes se o sistema homogéneo $Ax = 0$ é indeterminado, pelo que empregamos as propriedades P.3 e P.7.

P.10. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $det(\alpha A) = \alpha^n detA$.

Sugestão: Começamos por verificar que $\alpha A = E_1(\alpha)E_2(\alpha)\cdots E_n(\alpha)A$ e, depois, aplicamos a propriedade P.8.

Observação III.2.11.

Tendo em conta a propriedade **P.**1 (isto é, que $detA = detA^T$) anterior, podemos escrever, o determinante de uma matriz A, quadrada de ordem n, pode ser calculado recorrendo ao desenvolvimento segundo qualquer uma das suas filas (linha ou coluna), ou seja,

$$detA = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}detA_{ij}}_{\substack{desenvolvimento\\ segundo\ a\ linha\ i}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}detA_{ij}}_{\substack{desenvolvimento\\ segundo\ a\ coluna\ j}}.$$

Definição III.2.12. [Termo de uma matriz]

Chamamos termo de uma matriz quadrada de ordem n a qualquer produto de n elementos da matriz, desde que nele entrem, como factores, um e um só elemento de cada linha e de cada coluna.

Exercício III.2.13.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Complete:

(i) $(a_{11})(a_{22})(a_{33})(a_{44})(a_{\dots 5})$ é termo da matriz A;

(ii) $(a_{11})(a_{22})(a_{33})(a_{44})(a_{\dots 5})$ não é termo da matriz A;

(iii) $(a_{51})(a_{43})(a_{32})(\cdots\dots\dots)(\cdots\dots\dots)$ é termo da matriz A;

(iv) $(a_{15})(a_{22})(\cdots\dots\dots)(\cdots\dots\dots)(\cdots\dots\dots)$ é termo da matriz A;

(v) $(\cdots\dots\dots)(\cdots\dots\dots)(\cdots\dots\dots)(\cdots\dots\dots)(\cdots\dots\dots)$ não é termo da matriz A.

Definição III.2.14. [Complemento algébrico de um elemento de uma matriz]

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Chamamos complemento algébrico — ou cofactor — do elemento a_{ij} da matriz A ao número

$$(-1)^{i+j} det A_{ij},$$

sendo $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ a matriz que obtemos de A suprimindo a linha i e a coluna j.

Exemplos III.2.15.

a) Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. Então

$(-1)^{1+1} det[-1] = -1$ é o complemento algébrico do elemento $b_{11} = 1$;

$(-1)^{1+2}det[5] = -5$ é o complemento algébrico do elemento $b_{12} = 3$;

$(-1)^{2+1}det[\cdots] = \cdots\cdots$ é o complemento algébrico do elemento $b_{21} = 5$;

$(-1)^{\cdots+\cdots}det[\cdots] = \cdots\cdots$ é o complemento algébrico do elemento $b_{22} = -1$.

b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Então

$(-1)^{1+1}det\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \cdots$ é o complemento algébrico do elemento $a_{11} = 1$;

$(-1)^{1+2}det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \cdots$ é o complemento algébrico do elemento $a_{12} = -1$;

$(-1)^{1+3}det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \cdots$ é o complemento algébrico do elemento $a_{\dots} = \cdots$;

$(-1)^{2+1}det\begin{bmatrix} \cdots & 2 \\ \cdots & \dots \end{bmatrix} = \cdots$ é o complemento algébrico do elemento $a_{21} = \cdots$;

$(-1)^{\cdots+\cdots}det\begin{bmatrix} 1 & \cdots \\ \cdots & \dots \end{bmatrix} = \cdots$ é o complemento algébrico do elemento $a_{22} = \cdots$;

$(-1)^{\cdots+\cdots}det\begin{bmatrix} \cdots & -1 \\ \cdots & \dots \end{bmatrix} = \cdots$ é o complemento algébrico do elemento $a_{23} = \cdots$;

$(-1)^{\cdots+\cdots}det\begin{bmatrix} -1 & \cdots \\ \cdots & \dots \end{bmatrix} = \cdots$ é o complemento algébrico do elemento $a_{31} = \cdots$;

$(-1)^{\cdots+\cdots}det\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \dots \end{bmatrix} = \cdots$ é o complemento algébrico do elemento $a_{32} = \cdots$;

$(-1)^{\cdots+\cdots}det\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \dots \end{bmatrix} = \cdots$ é o complemento algébrico do elemento $a_{33} = \cdots$.

Observação III.2.16.

Acabámos de constatar que para qualquer matriz quadrada de ordem n, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o (valor do) determinante de A é igual à soma algébrica dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos respectivos complementos algébricos, isto é,

$$detA = \sum_{j=1}^{n} \left[a_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} detA_{ij}}_{\substack{complemento\ algébrico \\ ou\ cofactor\ de\ a_{ij}}} \right].$$

Por outro lado, importa referir que o valor do complemento algébrico $(-1)^{i+j} detA_{ij}$ não depende do elemento a_{ij}.

Apresentamos, de seguida, um resultado que envolve os cofactores (ou complementos algébricos) de uma matriz.

Proposição III.2.17.

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. É nula a soma algébrica dos produtos dos elementos de uma fila, pelos complementos algébricos dos elementos homólogos de outra fila paralela, isto é,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{k+j} detA_{kj} = 0, \text{ se } j \neq k, \text{ e,}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+k} detA_{ik} = 0, \text{ se } i \neq k.$$

Demonstração:

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i \neq k$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz que se obtém de A substituindo a linha k pela linha i, isto é, $b_{ij} = b_{kj} = a_{ij}$, para $j = 1,2,\cdots,n$.

Então $detB = 0$ visto que, por construção, B tem duas linhas iguais.

Calculemos, agora, o determinante da matriz B utilizando o desenvolvimento segundo a linha k.

Obtemos

$$0 = detB = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(-1)^{k+j} detB_{kj} \underbrace{=}_{porquê?} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{k+j} detA_{kj}.$$

Exemplo III.2.18.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Na matriz A calculemos a soma algébrica dos produtos dos elementos da linha 1, $[1 \quad -1 \quad 2]$, pelos complementos algébricos da linha 2, $[2 \quad 4 \quad 2]$. Obtemos

$$(1)\underbrace{(-1)^{2+1} det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\substack{complemento\ algébrico \\ do\ elemento\ a_{21}=1}} + (-1)\underbrace{(-1)^{2+2} det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\substack{complemento\ algébrico \\ do\ elemento\ a_{22}=4}} + (2)\underbrace{(-1)^{2+3} det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{complemento\ algébrico \\ do\ elemento\ a_{23}=2}} =$$

$$= (-1)(-4-2) + (-1)(4-2) + (-2)[1-(-1)] = 6 - 2 - 4 = 0.$$

Exercícios III.2.19.

a) Calcule:

(a-i) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 12 \\ -1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; (a-ii) $det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(a-iii) $det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$;

(a-iv) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 10 \end{vmatrix}$;

(a-v) $det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$;

(a-vi) $det \begin{bmatrix} 1 & a & b & b \\ a & 1 & b & b \\ b & b & 1 & a \\ b & b & a & 1 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$.

b) Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ duas matrizes triangulares, inferior e superior, respectivamente, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Calcule $detA$ e $detB$.

c) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > a$. Verifique que

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$$

é uma função quadrática e indique, caso existam, os zeros de f.

Exercício III.2.20.

Seja $A = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 3 & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & 2 & 1 & 4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & 6 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Utilizando as propriedades da função determinante de ordem n [Proposição III.2.10.], verifique, sem fazer cálculos, que $detA = 0$ e $detB = 0$.

Exercício III.2.21.

a) Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Prove que:

(a-i) $det(AB) = (detA)(detB)$;

(a-ii) Se A é não singular, então $detA \neq 0$ e $det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$.

b) Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que:

(b-i) $\begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}$;

(b-ii) $det \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}$;

(b-iii) As propriedades (a-i) e (a-ii) continuam válidas para $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Nesta secção, apresentamos, ainda, a seguinte

Definição III.2.22. [Matriz dos cofactores; matriz adjunta]

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Chamamos matriz dos cofactores de A (ou matriz dos complementos algébricos de A) à matriz quadrada de ordem n que se obtém de A substituindo cada elemento pelo respectivo complemento algébrico, isto é,

$$cofA = \left[(-1)^{i+j} detA_{ij}\right]_{n\times n}.$$

Além disso, a matriz adjunta de A é a transposta da matriz dos cofactores de A, ou seja,

$$adjA = (cofA)^T.$$

Exemplos III.2.23.

a) Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. Então

$$cofB = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}det[-1] & (-1)^{1+2}det[5] \\ (-1)^{2+1}det[3] & (-1)^{2+2}det[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

e $adjB = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Então

$$cofA = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}det\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & (-1)^{1+2}det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & (-1)^{1+3}det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ (-1)^{2+1}det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & (-1)^{2+2}det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & (-1)^{2+3}det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ (-1)^{3+1}det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & (-1)^{3+2}det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & (-1)^{3+3}det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

logo

$$cofA = \begin{bmatrix} 14 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } adjA = \begin{bmatrix} 14 & 6 & -10 \\ -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Verificamos, também, que

$$B(adjB) = (adjB)B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix} = \underbrace{-16}_{detB} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (detB)I_2$$

$$A(adjA) = (adjA)A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 6 & -10 \\ -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{16}_{detA} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (detA)I_3$$

Será coincidência?

Isto é, podemos afirmar que $A(adjA) = (adjA)A = (detA)I_n$, para qualquer matriz A de ordem n?

Analisaremos esta questão na secção seguinte.

Atendendo, mais uma vez, às propriedades apresentadas no Proposição III.2.10. podemos demonstrar o resultado seguinte.

Proposição III.2.24.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(i) O determinante de A é igual ao determinante da matriz triangular superior que se obtém de A, através de operações elementares sobre linhas do tipo $\mathcal{O}_3$, ou ao seu simétrico, conforme o número de trocas no processo é par ou ímpar.

(ii) Se na eliminação de Gauss usarmos apenas operações sobre linhas do tipo $\mathcal{O}_3$, o valor do determinante de A é zero se a matriz tem menos de n pivots[vi], ou, por outro lado, se A tem n pivots[vii], é igual ao produto dos pivots.

Observação III.2.25.

A partir desta proposição podemos simplificar o cálculo de determinantes, dado que — como verificámos anteriormente — toda a matriz quadrada pode ser transformada numa matriz triangular através de operações elementares.

Assim é possível convertermos o problema do cálculo do determinante de uma matriz quadrada qualquer, no do cálculo do determinante de uma matriz triangular.

No entanto nem sempre este processo é o mais adequado, por exemplo, para matrizes do tipo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 2000 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

[vi] Isto é, se a matriz A é singular
[vii] Ou seja, se A é não-singular

$$N = \begin{bmatrix} \sqrt{0.0169} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (0.0032)^{-1} & 0.1 & 0 & 3 \times 10^{-5} & 0 \\ 0.06 & 0 & 1 & 222 & 0 \\ 0 & 112{,}34 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

como veremos na alínea c) do Exercício III.2.27.

Exemplo III.2.26.

Utilizando a eliminação de Gauss, pretendemos calcular o determinante da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que

$$detB = det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-16} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = (1)(1)(-1)(-16)(2) = 32\,.$$

Exercícios III.2.27.

a) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

(a-i) Condense A e $[A|b]$;

(a-ii) Indique o determinante de A;

(a-iii) Determine a característica das matrizes A e $[A|b]$;

(a-iv) A matriz A é invertível? Justifique.

(a-v) Resolva o sistema $Ax = 0$;

(a-vi) Qual dos seguintes conjuntos

$\{(8-2\alpha, 1-\alpha,\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\left\{\left(\frac{3}{2},\quad 0,\quad 1\right)\right\}$, $\{\ \}$ e $\{(6+2\beta, \beta, \gamma),\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

é solução do sistema $Ax = b$?

b) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Comente as seguintes afirmações:

(b-i) «Se o $detA = 0$ então o sistema $Ax = 0$ é indeterminado»;

(b-ii) «Se o sistema $Ax = 0$ tem uma solução não nula então $detA = 0$»;

(b-iii) «Se o sistema $Ax = b$ é impossível então $detA = 0$».

c) Calcule os seguintes determinantes

(c-i) $detM = det\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 2000 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$;

(c-ii) $detN = det\begin{bmatrix} \sqrt{0.0169} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (0.0032)^{-1} & 0.1 & 0 & 3\times 10^{-5} & 0 \\ 0.06 & 0 & 1 & 222 & 0 \\ 0 & 112{,}34 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(c-i) $detM = (0.05)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{vmatrix} = (0.05)[(0)(0.7) - (0.2)(0.1)] = 10^{-3}$;

(c-ii) $detN = 100(-1)^{4+5}det\begin{bmatrix} \sqrt{0.0169} & 0 & 0 & 0 \\ (0.0032)^{-1} & 0.1 & 0 & 3\times 10^{-5} \\ 0.06 & 0 & 1 & 222 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} =$

$$= -100(-1)^{3+3}det\begin{bmatrix} \sqrt{0.0169} & 0 & 0 \\ (0.0032)^{-1} & 0.1 & 3\times 10^{-5} \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= -100\sqrt{0.0169}(-1)^{1+1}det\begin{bmatrix} 0.1 & 3\times 10^{-5} \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = -13(0.7 - 0.00012) = 9.09844.$$

d) Recorrendo a operações elementares calcule

(d-i) $det\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ \cdots & 0 & 7 & \cdots \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$

$$= (\cdots)(-1)^{\cdots+\cdots}det\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \cdots\cdots;$$

(d-ii) $det\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ 9 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (-3)(-1)^{\cdots+\cdots}det\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \cdots\cdots$;

(d-iii) $det\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & \cdots & 3 & 0 \end{bmatrix} = \cdots\cdots$;

(d-iv) $det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = (2)(-1)^{\cdots+\cdots} det\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 9 & 3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \cdots\cdots$.

e) Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

(e-i) Mostre que $|A - kI_3| = (-4-k)^2(-1-k)$, $k \in \mathbb{R}$;

(e-ii) Determine para que valores de $k \in \mathbb{R}$ se tem $|A - kI_3| = 0$.

f) Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Calcule, indicando o método que utilizou:

(f-i) uma das linhas da matriz inversa de B;

(f-ii) uma das colunas da matriz inversa de B;

(f-iii) o elemento na posição $(2,3)$ da matriz inversa de B.

g) Construa uma matriz real $Q = \left[q_{ij}\right]_{2\times 2}$ tal que

$$q_{11} = 0.6,\ Q^{-1} = Q^T \text{ e } detQ = 1.$$

h) Sejam $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e $B \in \mathbb{R}^{q\times p}$. Prove que:

(h-i) $det(I - AB) = det(I - BA)$;

(h-ii) $(I - AB)^{-1}A = A(I - BA)^{-1}$.

Sugestão:

Na alínea (h-i) verifique que

$$det\left(\begin{bmatrix} I_p & A \\ B & I_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & -A \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} I_p & -A \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & A \\ B & I_q \end{bmatrix}\right).$$

III.3 - Aplicações dos determinantes no cálculo da matriz inversa e na resolução de sistemas de equações lineares (regra de Cramer).

Retomamos a definição de matriz adjunta.

Atendendo à Definição III.2.22. e à Proposição III.2.17. prova-se que

Proposição III.3.1.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $n \geq 2$. Então

(i) $A(adjA) = (adjA)A = (detA)I_n$;

(ii) $A^{-1} = \left(\frac{1}{detA}\right) adjA$, se $detA \neq 0$.

Demonstração:

(i) Seja $M = A(adjA)$. Então

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{i1}(-1)^{j+1}detA_{j1} + a_{i2}(-1)^{j+2}detA_{j2} + \cdots + a_{in}(-1)^{j+n}detA_{jn}, \ se\ i \neq j \\ a_{i1}(-1)^{i+1}detA_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}detA_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}detA_{in}, \ se\ i = j \end{cases}.$$

Deste modo, tendo em conta as Proposições III.2.9 e III.2.17, podemos concluir que

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ i \neq j \\ detA, & se\ i = j. \end{cases}$$

Procedemos de modo análogo para o produto $(adjA)A$.

(ii) Note-se que se $A(adjA) = (adjA)A = (detA)I_n$ e $detA \neq 0$ então

$$A\left[\left(\frac{1}{detA}\right)adjA\right] = \left[\left(\frac{1}{detA}\right)adjA\right]A = I_n,$$

o que nos permite concluir, pela definição de matriz inversa, que

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{detA}\right) adjA.$$

Exemplos III.3.2.

a) Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ então $detB = -16$ e

$$B^{-1} = \left(\frac{1}{detB}\right) adjB = \left(\frac{1}{-16}\right) \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{-1}{16} \end{bmatrix}.$$

Verifique o resultado calculando os produtos BB^{-1} e $B^{-1}B$.

b) Por outro lado, se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ então

$$detA = det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = (1)(-1)^2 det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 16,$$

e, consequentemente,

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{detA}\right) adjA = \left(\frac{1}{16}\right) \begin{bmatrix} 14 & 6 & -10 \\ -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Confirme o resultado calculando AA^{-1} e $A^{-1}A$.

Observação III.3.3.

Repare, ainda, que este método — em contraste com o que acontece quando recorremos à eliminação de Gauss — nos permite calcular um elemento (ou mais) da matriz inversa independentemente dos restantes.

Por exemplo,

$$\text{elemento na posição } (1,3) \text{ de } A^{-1} = \text{elemento na posição}(1,3) \text{ de } \left(\frac{1}{detA}\right) adjA =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{detA}\right)}_{1/16} [\text{elemento na posição}(3,1) \text{ de } cofA] =$$

$$= \left(\tfrac{1}{16}\right) \text{ complemento algébrico de } a_{31} =$$

$$= \left(\tfrac{1}{16}\right) \left[(-1)^{3+1} det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right] = \left(\tfrac{1}{16}\right)(-2-8) = -\tfrac{5}{8}.$$

Exercícios III.3.4.

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(a-i) Mostre que $\left(-\frac{2}{7}\right)$ é o elemento na posição (3,3) da matriz inversa de A.

(a-ii) Calcule a inversa da matriz A.

b) Sejam $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -11 & -9 & 4 \\ 2 & 26 & -19 \\ 16 & 7 & -18 \end{bmatrix}$.

(b-i) Verifique que $detB = -67$;

(b-ii) Indique o elemento na posição $(2,1)$ de B^{-1};

(b-iii) Calcule a matriz CB;

(b-iv) Determine a inversa da matriz B.

Admitindo, agora, que a matriz A é não singular, vamos apresentar a regra de Cramer, recorrendo à noção de determinante e respectivas propriedades.

Isto é, vamos obter uma fórmula para a solução de um sistema de equações lineares $Ax = b$ expressa em termos das matrizes A e b.

Começamos por analisar o caso de ordem dois.

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, matriz não singular, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

Consequentemente,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Definimos

$$D = detA = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ D[x_1] = det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } D[x_2] = det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}.$$

Repare-se que:

(i) $D \neq 0$ é o determinante da matriz A;

(ii) $D[x_1]$ é o determinante da matriz que se obtém de A substituindo a 1ª coluna, $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$;

(ii) $D[x_2]$ é o determinante da matriz que se obtém de A substituindo a 2ª coluna, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Verificamos que

$$x_1 D = x_1 detA = x_1 det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} det \begin{bmatrix} x_1 a_{11} & a_{12} \\ x_1 a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{=}_{porquê?} det \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} & a_{12} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} = D[x_1],$$

ou seja,

$$\underbrace{x_1}_{1^{\text{a}}\ incógnita} \underbrace{D}_{\substack{número \\ real}} = \underbrace{D[x_1]}_{\substack{número \\ real}} \underbrace{\Leftrightarrow}_{porquê?} x_1 = \frac{D[x_1]}{D}.$$

Do mesmo modo concluímos que

$$x_2 D = x_2 detA = x_2 det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} det \begin{bmatrix} a_{11} & x_2 a_{12} \\ a_{21} & x_2 a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{=}_{porquê?} det \begin{bmatrix} a_{11} & x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ a_{21} & x_1 a_{21} + x_2 a_{22} \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix} = D[x_2].$$

Logo

$$\underbrace{x_2}_{2^{\underline{a}}\, incógnita} \underbrace{D}_{\substack{número\\ real}} = \underbrace{D[x_2]}_{\substack{número\\ real}} \underbrace{\Leftrightarrow}_{porquê?} x_2 = \frac{D[x_2]}{D}.$$

Exercícios III.3.5.

Resolva – utilizando quando possível a regra anterior – os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = -50 \\ 2x_1 + x_2 = -7 \end{cases}$;   b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 16 \\ -6x_1 + 4x_2 = -32 \end{cases}$.

Resolução:

a) Neste caso temos

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = -50 \\ 2x_1 + x_2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -7 \end{bmatrix},$$

isto é, $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é a coluna das incógnitas e $\begin{bmatrix} -50 \\ -7 \end{bmatrix}$ é a coluna dos termos independentes.

Deste modo

$$D = detA = det \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (7)(1) - (-5)(2) = 7 + 10 = 17,$$

$$D[x_1] = det \begin{bmatrix} -50 & -5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = (-50)(1) - (-5)(-7) = -50 - 35 = -85,$$

e, finalmente,

$$D[x_2] = det \begin{bmatrix} 7 & -50 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = (7)(-7) - (-50)(2) = -49 + 100 = 51.$$

Logo

$$x_1 = \frac{D[x_1]}{D} = \frac{-85}{17} = -5 \text{ e } x_2 = \frac{D[x_2]}{D} = \frac{51}{17} = 3$$

o que nos permite concluir que $\boldsymbol{S} = \{(-5, \quad 3)\}$ é o conjunto solução do sistema dado.

b) Verificamos que

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 16 \\ -6x_1 + 4x_2 = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -32 \end{bmatrix},$$

isto é, $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é a coluna das incógnitas e $\begin{bmatrix} 16 \\ -32 \end{bmatrix}$ é a coluna dos termos independentes.

Todavia $D = detA = det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = (3)(4) - (-2)(-6) = 12 - 12 = 0$, o que nos impede de utilizar o método acima descrito.

Note-se, no entanto, que podemos recorrer à eliminação de Gauss.

Assim,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 16 \\ -6 & 4 & -32 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-(-2)L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

e, consequentemente,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 16 \\ -6x_1 + 4x_2 = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 16 \\ x_2 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{16}{3} + \frac{2}{3}\beta \\ x_2 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases},$$

pelo que $\boldsymbol{S} = \left\{\left(\frac{16}{3} + \frac{2}{3}\beta, \quad \beta\right), \ \beta \in \mathbb{R}\right\}$ é o conjunto solução do sistema inicial.

Analisemos o caso de ordem 3.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$,

com $detA \neq 0$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times1}$, e

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Definimos

(i) $D = detA = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, determinante da matriz dos coeficientes;

(ii) $D[x_1] = det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, determinante da matriz que se obtém de A substituindo a 1ª coluna, $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$;

(iii) $D[x_2] = det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$, determinante da matriz que se obtém de A substituindo a 2ª coluna, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$;

(iv) $D[x_3] = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$, determinante da matriz que se obtém de A substituindo a 3ª coluna, $\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$, pela coluna dos termos independentes, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Também, neste caso, verificamos que

$$x_1D = x_1detA = x_1det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} det\begin{bmatrix} x_1a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_1a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_1a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{=}_{porquê?} det\begin{bmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ x_1a_{31} + x_2a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \underbrace{=}_{porquê?} det\begin{bmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{porquê?} det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = D[x_1],$$

ou seja,

$$x_1D = D[x_1] \Leftrightarrow x_1 = \frac{D[x_1]}{D}.$$

Analogamente, concluímos que

$$x_2D = D[x_2] \Leftrightarrow x_2 = \frac{D[x_2]}{D} \quad \text{e} \quad x_3D = D[x_3] \Leftrightarrow x_3 = \frac{D[x_3]}{D} \ .$$

Exercícios III.3.6.

Resolva — utilizando quando possível a regra anterior — os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

Resolução:

a) Uma vez que

$$D = det\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & -2 & 5\end{bmatrix} = -54,\ D[x_1] = det\begin{bmatrix}6 & 1 & 3\\ -2 & 3 & -4\\ 7 & -2 & 5\end{bmatrix} = -27,$$

$$D[x_2] = det\begin{bmatrix}1 & 6 & 3\\ 2 & -2 & -4\\ 3 & 7 & 5\end{bmatrix} = -54 \text{ e } D[x_3] = det\begin{bmatrix}1 & 1 & 6\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 7\end{bmatrix} = -81,$$

concluímos que

$$x_1 = \frac{D[x_1]}{D} = \frac{-27}{-54} = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{D[x_2]}{D} = \frac{-54}{-54} = 1 \text{ e } x_3 = \frac{D[x_3]}{D} = \frac{-81}{-54} = \frac{3}{2}.$$

Assim $\boldsymbol{S} = \left\{\left(\frac{1}{2},\quad 1,\quad \frac{3}{2}\right)\right\}$ é o conjunto solução do sistema dado.

b) Neste caso obtemos $D = det\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix} = -6$,

$$D[x_1] = 0,\ D[x_2] = 0 \text{ e } D[x_3] = 0 \text{ (porquê?)},$$

o que nos permite afirmar que $\boldsymbol{S} = \{(0,\quad 0,\quad 0)\}$ é o conjunto solução do sistema dado.

c) Repare-se que

$$D = det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & -1 & -1\end{bmatrix} = 20,\ D[x_1] = det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 7 & -1 & -1\end{bmatrix} = 32,$$

$$D[x_2] = det\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\2 & 2 & 1\\4 & 7 & -1\end{bmatrix} = 3 \text{ e } D[x_3] = det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -3 & 2\\4 & -1 & 7\end{bmatrix} = -15,$$

e, consequentemente,

$$x_1 = \frac{D[x_1]}{D} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5},\ x_2 = \frac{D[x_2]}{D} = \frac{3}{20} \text{ e } x_3 = \frac{D[x_3]}{D} = \frac{-15}{20} = -\frac{3}{4},$$

ou seja, $\boldsymbol{S} = \left\{\left(\frac{8}{5}, \quad \frac{3}{20}, \quad -\frac{3}{4}\right)\right\}$.

d) $\mathbf{S} = \left\{\left(\frac{11}{67}, \quad -\frac{2}{67}, \quad -\frac{16}{67}\right)\right\}$.

Enunciamos, agora, sem demonstração, a Regra de Cramer no caso geral:

Proposição III.3.7.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não singular.

Então, o sistema

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

é possível e determinado, sendo

$$x_i = \frac{D[x_i]}{D}, i = 1,2,\cdots,n,$$

onde D é o determinante da matriz A (matriz dos coeficientes do sistema) e $D[x_i]$ o determinante da matriz que se obtém de A, substituindo a coluna i pela coluna b dos termos independentes.

Exercícios III.3.8.

a) Resolva — utilizando, quando possível e oportuno, a Regra de Cramer — os seguintes sistemas:

(a-i) $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$;

(a-ii) $\begin{cases} -x+y+z=1 \\ 3x+2y-z=2 \\ x+4y+2z=3 \end{cases}$;

(a-iii) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ -x+2z=2 \\ 3x+y+3z=-2 \end{cases}$;

(a-iv) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ 3x+5y+7z=3 \end{cases}$;

(a-v) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ -x+y=2 \end{cases}$;

(a-vi) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y+4z=0 \\ x+2y-2z=3 \end{cases}$;

(a-vii) $\begin{cases} -4x+y-3z=7 \\ x-2y+z=1 \\ -2x-3y-z=9 \end{cases}$.

b) Considere o sistema $\begin{cases} 2x+k_1y-z=1 \\ -x+2k_2y+3z=0 \\ x-5k_3y+3z=-1 \end{cases}$, onde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

Sabendo que o determinante da matriz dos coeficientes é 2, determine o valor da incógnita y.

c) Seja $B = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 4 & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 4 \end{bmatrix}$ e $C = [B \ \vdots \ 0_{3\times1}]$.

Indique o conjunto solução de cada um dos sistemas:

(c-i) $Bx = 0$;

(c-ii) $C^T y = 0$.

CAPÍTULO IV • VALORES PRÓPRIOS E VECTORES PRÓPRIOS DE UMA MATRIZ QUADRADA

IV.1 – Conceito de valor próprio e vector próprio de uma matriz quadrada.

No que se segue, iniciamos o estudo dos valores próprios e vectores próprios de uma matriz quadrada, abordando, no final da secção, a diagonalização de matrizes utilizando os conceitos de multiplicidade algébrica e geométrica de um valor próprio.

Definição IV.1.1.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O vector $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é um vector próprio de A se e só se

$$Ax = \lambda x$$

sendo λ um escalar[i].

Neste caso, λ diz-se um valor próprio da matriz A associado ao vector próprio x.

Exemplos IV.1.2.

a) Se $A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, então

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x$$

---

[i] Que, neste capítulo, pode ser um número complexo (ver alínea a) do Exercício IV.5.4). Todavia, no que se segue, escolhemos, apenas, matrizes com valores próprios reais.

e podemos concluir que

$$Ax = 1x$$

e afirmar que todos os vectores $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ são vectores próprios de A associados ao valor próprio 1.

Todavia, esta situação não é usual!

b) Seja $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Consideremos, também, dois vectores $u = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ verificamos que

$$Au = 1u \text{ e } Av = \frac{1}{2}v.$$

Deste modo, dizemos que u e v são vectores próprios da matriz A e, ainda, que os números 1 e $\frac{1}{2}$ são valores próprios de A, ou seja, afirmamos que

(i) u é um vector próprio de A associado ao valor próprio 1; e

(ii) v é um vector próprio de A associado ao valor próprio $\frac{1}{2}$.

Por outro lado, verificamos que

$A^2u = A(Au) = A(1u) = Au = 1u$, isto é, $A^2u = 1u$,

e

$A^2v = A(Av) = A\left(\frac{1}{2}v\right) = \frac{1}{2}(Av) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 v = \frac{1}{4}v$, isto é, $A^2v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 v$.

O que podemos concluir?

Constatamos que

(i) 1 é valor próprio de A^2 associado ao vector próprio u;

(ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ é valor próprio de A^2 associado ao vector próprio v.

Surge , então, a seguinte questão:

O que se passa quando analisamos $A^3, A^4, A^5, \cdots$?

3) Consideremos, finalmente, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Verificamos, agora, que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Bu = (-2)u;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Bv = (-2)v;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Bw = 7w.$$

Deste modo, podemos afirmar que:

(i) u é um vector próprio de B associado ao valor próprio -2;

(ii) v é outro vector próprio de B associado ao valor próprio -2;

(iii) w é um vector próprio de B associado ao valor próprio 7.

Retomando a igualdade

$$Ax = \lambda x,$$

e recordando que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (escalar), sendo x um vector próprio de A, associado ao valor próprio λ, escrevemos

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ x \\ \\ \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \\ x \\ \\ \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ x \\ \\ \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \\ x \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} & & \\ & I_n & \\ & & \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \\ x \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, constatamos que x é um vector próprio de A, associado ao valor próprio λ, se e só se,

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ e } x \in \mathcal{N}(A - \lambda I_n),$$[ii]

ou seja, de modo equivalente, se e só se,

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ é solução do sistema homogéneo } (A - \lambda I_n)z = 0.$$

Observação IV.1.3.

Relativamente ao sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)z = 0$ recordemos que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) o sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)z = 0$ é indeterminado;

(ii) a matriz $A - \lambda I_n$ não é invertível;

(iii) a característica de $A - \lambda I_n$ é inferior a n;

(iv) a matriz $A - \lambda I_n$ é singular;

(v) as colunas de $A - \lambda I_n$ são linearmente dependentes;

(vi) as linhas de $A - \lambda I_n$ são linearmente dependentes;

(vii) o determinante de $A - \lambda I_n$ é igual a zero.

[ii] Ver definição de espaço nulo ou núcleo de uma matriz (secção II.3).

IV.2 – Polinómio característico de uma matriz quadrada.

Consideremos, de seguida, o

Problema IV.2.1.

Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que exista um **vector** $u = (u_1, \quad u_2, \quad u_3) \in \mathbb{R}^3$, **não nulo**, tal que

$$Au = \lambda u, \text{ sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Uma vez que

$$Au = \lambda u \Leftrightarrow Au - \lambda u = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)u = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

podemos enunciar o Problema **IV.2.1.** doutra forma.

Problema IV.2.2.

Quando é que o sistema homogéneo $(A - \lambda I_3)u = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tem soluções não nulas?

Tendo em conta o que estudámos anteriormente sobre a discussão e resolução de sistemas de equações lineares, podemos dizer que este sistema tem soluções não nulas se e só se a matriz $A-\lambda I_3$ é singular, ou seja, se e só se

$$det(A-\lambda I_3)=0.$$

Assim, podemos formular o problema anterior do seguinte modo

Problema IV.2.3.

Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $det(A-\lambda I_3)=0$.

Então, uma vez que

$$det(A-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1)(-1)^{1+3}[(6)(-2)-(-1-\lambda)(-1)]+$$

$$+(-1-\lambda)(-1)^{3+3}[(1-\lambda)(-1-\lambda)-(2)(6)]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3-\lambda^2+12\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2+\lambda-12) \Leftrightarrow \lambda(\lambda+4)(\lambda-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-4 \vee \lambda=0 \vee \lambda=3,$$

podemos afirmar que se $\lambda \in \{-4, \quad 0, \quad 3\}$ então existe um **vector não nulo** $u=(u_1, \quad u_2, \quad u_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $Au=\lambda u$.

A $p(\lambda) = (-1)^3\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda$ chamamos polinómio característico da matriz A, enquanto chamamos equação característica a $(-1)^3\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0$.[iii]

Note-se que $p(\lambda) = det(A - \lambda I_3)$ e que

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0 \Leftrightarrow det(A - \lambda I_3) = 0$$

Aos escalares $\lambda \in \mathbb{R}$, que são soluções do Problema IV.2.1., chamamos valores próprios (ou valores característicos) da matriz A.

Os vectores, não nulos $u = (u_1, \ \ u_2, \ \ u_3) \in \mathbb{R}^3$, soluções do sistema homogéneo $(A - \lambda I_3)u = 0$, chamam-se vectores próprios (ou vectores característicos) de A associados ao valor próprio λ.

Neste caso, temos vectores próprios associados a $\lambda_1 = -4$, a $\lambda_2 = 0$ e a $\lambda_3 = 3$.

Consideremos $\lambda_1 = -4$. Atendendo a que

$(A - \lambda_1 I_3)u = 0 \Leftrightarrow (A + 4I_3)u = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

constatamos que os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = -4$ são todos os vectores da forma

$$u = (u_1, \ \ u_2, \ \ u_3) = \alpha(-1, \ \ 2, \ \ 1), \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

[iii] Trata-se de uma equação polinomial, consequentemente, pode ter raízes reais e complexas, embora, como referimos anteriormente, só abordemos casos com raízes reais.

Ao conjunto

$$E(\lambda_1) = E(-4) = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = \alpha(-1, \quad 2, \quad 1),\ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

chamamos espaço próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_1 = -4$.

Seja, agora, $\lambda_2 = 0$.

Dado que

$(A - \lambda_2 I_3)v = 0 \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} \\ -\frac{6}{13} \\ 1 \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

podemos garantir que os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 0$ são todos os vectores da forma

$$v = (v_1, \quad v_2, \quad v_3) = \beta\left(-\frac{1}{13}, \quad -\frac{6}{13}, \quad 1\right), \text{ onde } \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Neste caso, o espaço próprio de A, associado ao valor próprio $\lambda_2 = 0$, é o conjunto

$$E(\lambda_2) = E(0) = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : v = \beta\left(-\frac{1}{13}, \quad -\frac{6}{13}, \quad 1\right),\ \beta \in \mathbb{R}\right\},$$

Por outro lado, se $\lambda_3 = 3$, temos

$(A - \lambda_3 I_3)w = 0 \Leftrightarrow (A - 3I_3)w = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

o que implica que:

(i) todos os vectores da forma

$$w = (w_1, \quad w_2, \quad w_3) = \gamma\left(-1, \quad -\tfrac{3}{2}, \quad 1\right), \text{ onde } \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

são vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_3 = 3$;

(ii) o conjunto

$$E(\lambda_3) = E(3) = \left\{w \in \mathbb{R}^3 : w = \gamma\left(-1, \quad -\tfrac{3}{2}, \quad 1\right), \ \gamma \in \mathbb{R}\right\},$$

é o espaço próprio de A, associado ao valor próprio $\lambda_3 = 3$.

Repare-se, finalmente, que

$$p(\lambda) = (-1)^3\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda + \underbrace{0}_{detA}$$

é um polinómio de grau $n = 3$ [iv] em que o coeficiente do termo de grau 3 é $(-1)^n = (-1)^3$ e o termo independente é $detA = 0$.

Deste modo podemos afirmar que uma matriz quadrada de ordem 3 tem 3 valores próprios que podem ser distintos ou não.

Curiosamente também verificamos que

$$trA = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + (-1) + (-1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4 + 0 + 3,$$

e

[iv] Sendo $n = 3$ a ordem da matriz A.

$$\det(A) = 0 = (\lambda_1)(\lambda_2)(\lambda_3) = (-4)(0)(3).$$

Será coincidência?

Ou seja, podemos garantir que a soma dos valores próprios de uma matriz coincide com o seu traço? E, também, que o valor do determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus valores próprios?

Além disso, é importante reter que

(i) $E(\lambda_i) = \{\text{vectores próprios de } A \text{ associados ao valor próprio } \lambda_i\} \cup \{(0,0,0)\},$
$i = 1,2,3;$

(ii) $E(\lambda_i) = \{\text{conjunto das soluções do sistema homogéneo } (A - \lambda_i I_3)u = 0\},$
$i = 1,2,3;$

(iii) $E(\lambda_i) = \mathcal{N}(A - \lambda_i I_3),\ i = 1,2,3.$

IV.3 – Espaço próprio, multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de um valor próprio.

Formalizemos, agora, a definição de valor próprio, vector próprio e espaço próprio para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definição IV.3.1. [Valor próprio e vector próprio de uma matriz quadrada]

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

Dizemos que um escalar λ é valor próprio de A se existe um vector, não nulo, $u \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$Au = \lambda u.$$

Todo o vector não nulo $u \in \mathbb{R}^n$, que satisfaz a equação anterior, é dito um vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Dado um valor próprio λ de A, chamamos espaço próprio de A associado ao valor próprio λ ao conjunto

$$E(\lambda) = \{u \in \mathbb{R}^n : Au = \lambda u\}.$$

Finalmente, dizemos que $det(A - \lambda I_n) = 0$ é a equação característica da matriz A e que $det\,(A - \lambda I_n)$ é o polinómio característico de A, e, consequentemente, os valores próprios da matriz A são as raízes da equação característica de A.

Note-se, ainda, que

(i) $E(\lambda)$ ={vectores próprios de A associados ao valor próprio λ}∪{(0,0,⋯,0) }=

$$= \{u \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)u = 0\} = \mathcal{N}(A - \lambda I_n);$$

(ii) λ é um valor próprio de A se e só se o núcleo da matriz $A - \lambda I_n$ contém vectores não nulos, isto é, se e só se $\mathcal{N}(A - \lambda I_n) \neq \{(0,0,\cdots,0)\}$,ou, de modo equivalente, λ é um valor próprio de A se e só se $det(A - \lambda I_n) = 0$.

(iv) $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ é um polinómio em λ, de grau n, a que chamamos polinómio característico de A, sendo $(-1)^n$ o coeficiente do termo de grau n e $p(0) = detA$ o termo constante.

(v) Designamos a diferença entre a ordem de A e a característica de $A - \lambda I_n$ por multiplicidade geométrica do valor próprio λ e adoptamos a notação $m.g.(\lambda)$; enquanto chamamos multiplicidade algébrica de λ, referindo-a como $m.a.(\lambda)$, à multiplicidade de λ como raiz da equação característica de A.

Listamos, de seguida, algumas das propriedades dos valores próprios de uma matriz:

Proposição IV.3.2.

(i) Duas matrizes semelhantes[v] têm o mesmo polinómio característico.

(ii) A soma dos valores próprios de uma matriz é igual ao traço[vi] dessa matriz.

(iii) Uma matriz é singular se e só se tem um valor próprio nulo.

(iv) Os valores próprios de uma matriz triangular (superior ou inferior) são os elementos da diagonal principal.

---

[v] Dizemos que $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são semelhantes se e só se existe uma matriz $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, não singular, tal que $B = S^{-1}AS$.

[vi] O traço de uma matriz quadrada é a soma dos seus elementos diagonais.

(v) Seja A uma matriz quadrada, de ordem n, invertível. Se λ é valor próprio de A então λ^{-1} é valor próprio de A^{-1}.

(vi) Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se λ é valor próprio de A então $\alpha\lambda$ é valor próprio de αA.

(vii) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se λ é valor próprio de A então λ é valor próprio da matriz transposta A^T de A.

(viii) O produto dos valores próprios de uma matriz é igual ao seu determinante.

Por outras palavras, seja A uma matriz quadrada de ordem n.

Se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são os valores próprios de A, então $detA = (\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_n)$.

Exercício IV.3.3.

Demonstre as propriedades apresentadas na Proposição IV.3.2.

Exercício (resolvido) IV.3.4.

Determine os valores próprios (indicando as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas) e os vectores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Resolução:

Como vimos anteriormente, dizemos que um escalar λ é valor próprio de A se existe um vector, não-nulo, $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $Au = \lambda u$, e, ainda, que todo o vector não nulo $u \in \mathbb{R}^3$, que satisfaz a equação $Au = \lambda u$, é dito um vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Também verificámos que os valores próprios de A são as raízes da equação característica de A.

Assim, começaremos por calcular todas as raízes λ da equação

$$det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow det\begin{bmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-1)^{2+2} det\begin{bmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 0 \vee \lambda - 1 = 0 \vee \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 1\,.$$

Dizemos que

$$\lambda_1 = -2 \text{ (raiz simples)} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 \text{ (raiz dupla)}$$

são valores próprios da matriz A, sendo $m.a.(\lambda_1) = m.a.(-2) = 1$ e $m.a.(\lambda_2) = m.a.(1) = 2$.

Quanto às multiplicidades geométricas, e uma vez que

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

podemos concluir que

$$m.g.(\lambda_1) = m.g.(-2) = \text{ordem de } A - c(A + 2I_3) = 3 - 2 = 1$$

e

$$m.g.(\lambda_2) = m.g.(1) = \text{ordem de } A - c(A - I_3) = 3 - 2 = 1.$$

Repare-se, também, que:

(i) o grau de $p(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2$, polinómio característico da matriz A, coincide com a ordem da matriz dada, isto é,

$$\text{grau de } p(\lambda) = \text{ordem de } A;$$

(ii) o produto dos valores próprios de A, $(-2)(1)(1)$, coincide com o determinante de A, ou seja,

$$(-2)(1)(1) = detA = p(0) = -2;$$

(iii) a soma dos valores próprios de A, $(-2) + (1) + (1)$, é igual ao seu traço, visto que

$$(-2) + (1) + (1) = trA = (-4) + (1) + (3).$$

De seguida, procuramos os vectores próprios de A, isto é,

(i) todos o vectores não nulos $u \in \mathbb{R}^3$ que satisfaçam a equação $Au = (-2)u$;

assim como,

(ii) todos o vectores não nulos $v \in \mathbb{R}^3$ que satisfaçam a equação $Av = (1)v$.

Como podemos calcular os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = -2$?

Determinando as soluções não nulas do sistema homogéneo

$$(A - \lambda_1 I_3)u = 0.$$

Ora

$$(A - \lambda_1 I_3)u = 0 \Leftrightarrow (A + 2I_3)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Logo, os vectores próprios, associados ao valor próprio $\lambda_1 = -2$, são todos os vectores da forma

$$u = \alpha(-1, \quad 0, \quad 1), \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

e o espaço próprio correspondente é o conjunto

$$E(\lambda_1) = E(-4) = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = \alpha(-1, \quad 0, \quad 1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

E relativamente aos vectores próprios de A, associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$? Como devemos proceder?

Pesquisando todas as soluções não nulas do sistema homogéneo

$$(A - \lambda_2 I_3)v = 0.$$

Neste caso, observamos que

$$(A-\lambda_2 I_3)v=0 \Leftrightarrow (A-I_3)v=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

e concluímos que os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2=1$ são todos os vectores da forma

$$v=\beta\left(-\frac{2}{5}, \quad 0, \quad 1\right), \text{ onde } \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

sendo o espaço próprio correspondente o conjunto

$$E(\lambda_2)=E(1)=\left\{v \in \mathbb{R}^3 \colon v= \ \beta\left(-\frac{2}{5}, \quad 0, \quad 1\right), \ \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercícios IV.3.5.

a) Verifique que, embora sendo de ordem três, a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

tem, apenas, dois valores próprios distintos $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=2$, e, além disso, que

$$E(0)=\{u \in \mathbb{R}^3 \colon u=\alpha(1, \quad 0, \quad 1), \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

e

$$E(2)=\{v \in \mathbb{R}^3 \colon v=\beta(1, \quad 0, \quad -1)+\theta(0, \quad 1, \quad 0), \ \beta,\theta \in \mathbb{R}\}.$$

b) Mostre que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

tem 3 valores próprios distintos $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 7$. Compare, ainda, o valor do traço de B com a soma dos seus valores próprios, assim como o valor do determinante de B com o produto dos seus valores próprios.

c) Prove que a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

tem um único valor próprio $\lambda_1 = 8$, que é uma raiz tripla da equação $|C - \lambda I_3| = 0$. Mostre, ainda, que

$$m.a.(\lambda_1) = m.a.(8) = 3, \quad m.g.(\lambda_1) = m.g.(8) = 1$$

e

$$E(8) = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = \gamma(1, \quad 0, \quad 0), \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Finalmente, verifique que, neste caso, podemos afirmar que os vectores próprios da matriz C, todos eles associados ao valor próprio $\lambda_1 = 8$, são múltiplos escalares do vector $(1, \quad 0, \quad 0)$.

d) Seja $M = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Determine uma matriz $S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, invertível, tal que

$$MS = SD, \text{ sendo } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

IV.4 – Diagonalização de matrizes.

Retomamos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

da alínea a) dos Exercícios IV.3.5, cujos espaços próprios são os seguintes

$$E(0) = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = \alpha(1,\quad 0,\quad 1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

e

$$E(2) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = \beta(1,\quad 0,\quad -1) + \theta(0,\quad 1,\quad 0),\ \beta, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Escolhemos três vectores próprios da matriz A,

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in E(0), \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in E(2) \quad \text{e} \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in E(2).$$

Note-se que

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{0}_{\substack{valor \\ próprio}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0u,$$

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_{\substack{valor \\ próprio}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2v,$$

$$Aw = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_{\substack{valor \\ próprio}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2w,$$

ou, de forma compactada,

$$\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{u} & \boxed{v} & \boxed{w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\boxed{u} & 2\boxed{v} & 2\boxed{w}\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{u} & \boxed{v} & \boxed{w}\end{bmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{u} & \boxed{v} & \boxed{w}\end{bmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}}_{\Lambda_A}.$$

Além disso, observamos que

$$detS = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} = 2 \neq 0,$$

pelo que existe

$$S^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

o que nos permite escrever

$$AS = S\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = S^{-1}S\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = I_3\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda_A \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} & S^{-1} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & S & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \Lambda_A & \end{bmatrix}.$$

Neste caso, dizemos que $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ é diagonalizável visto que a matriz A é semelhante a uma matriz diagonal Λ_A, isto é,

$$S^{-1}AS = \Lambda_A = diag(0,\quad 2,\quad 2).$$

Sistematizemos algumas considerações sobre a diagonalização da matriz anterior:

(i) Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Verificamos que A é diagonalizável se e só se tem três vectores próprios u, v, w, tais que

$$S = \begin{bmatrix} \boxed{u} & \boxed{v} & \boxed{w} \end{bmatrix} \text{ é invertível,}$$

isto é, tais que as colunas $\boxed{u}$, $\boxed{v}$ e $\boxed{w}$ de S são linearmente independentes.

Nestas condições,

$$AS = S\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda_A = diag(\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3).$$

(ii) Constataremos que se $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tem três valores próprios distintos então A é diagonalizável.

Observações IV.4.1.

De um modo geral, dizemos que uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalizável – isto é, é semelhante a uma matriz diagonal – se e só se tem n vectores próprios, $v_1, v_2, \cdots, v_n$, associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, tais que a matriz

$$S = \begin{bmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{v_2} & \cdots & \boxed{v_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ é invertível.}$$

Neste caso

$$AS = S\Lambda_A \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda_A = diag(\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \cdots, \quad \lambda_n).$$

Prova-se que:

(i) Nem todas as matrizes são diagonalizáveis;

(ii) Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem n valores próprios, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, distintos, então A é diagonalizável.

Surge, assim, a seguinte questão:

Em que condições existem n vectores próprios, $v_1, v_2, \cdots, v_n$, associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tais que a matriz

$$S = \begin{bmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{v_2} & \cdots & \boxed{v_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ é invertível?}$$

A resposta está relacionada com as multiplicidades algébricas e geométricas dos valores próprios da matriz e é dada, sem demonstração, na seguinte

Proposição IV.4.2.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $p \leq n$ valores próprios distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$.

A matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalizável — isto é, é semelhante a uma matriz diagonal — se e só se $m.g.(\lambda_i) = m.a.(\lambda_i)$, para $i = 1,2,\cdots,p$.

Exercícios IV.4.3.

a) Seja $C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Verifique que não é possível construir uma matriz $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, invertível, tal que

$$S^{-1}CS = \Lambda_C = diag(8, \quad 8, \quad 8).$$

b) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b-i) Calcule os valores próprios de A.

(b-ii) Determine $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ de modo que $BA = 6I_3$. Verifique, justificando a sua resposta, que B é a matriz adjunta de A.

(b-iii) Sendo $p(\lambda) = -\lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3$ o polinómio característico da matriz A, determine a relação existente entre os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, o determinante de A, o traço de A e o traço da matriz adjunta de A.

c) Seja B uma matriz, quadrada, real, de ordem 3, tal que

$$\begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c-i) Indique os valores próprios de B. Justifique.

(c-ii) Determine, caso exista, uma matriz diagonal semelhante a B. Justifique.

(c-iii) Defina uma matriz B nas condições do enunciado.

d) Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 20 & -1 & 1 \\ 1 & 20 & -1 \\ -1 & 1 & 20 \end{bmatrix}$ e os vectores $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $d = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$.

(d-i) Resolva o sistema $Bx = d$. *(Sugestão:Utilize a Regra de Cramer)*

(d-ii) Determine um dos valores próprios de B, bem como um vector próprio que lhe esteja associado.

(d-iii) Determine $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ de modo que $CB = 8060I_3$.

e) Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, singular, que satisfaz as seguintes condições:

$$Av = (-2)v \text{ para } v = (0, \quad 1, \quad 0),$$

$$Aw = (-1)w \text{ para } w = (0, \quad 0, \quad 1).$$

(e-i) Determine dois dos valores próprios de A.

(e-ii) Averigue para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + (\alpha + 1)\lambda^2 - \alpha\lambda.$$

é o polinómio característico de A.

(e-iii) Sabendo que $Au = 0$ para $u = (1, \quad 2, \quad -1)$, determine uma matriz S tal que $S^{-1}AS$ seja uma matriz diagonal. Justifique.

(e-iv) Construa uma matriz A nas condições do enunciado.

f) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e os vectores $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \gamma \end{bmatrix}$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(f-i) Verifique que a matriz A tem um valor próprio, λ_1, que é um número racional, enquanto os outros dois, λ_2e λ_3, são números irracionais.

(f-ii) Determine $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de modo que se verifiquem simultaneamente as condições seguintes:

- v é vector próprio de A associado ao valor próprio racional λ_1.
- u, v, w constituem as colunas de uma matriz não singular, sendo $w = (0, \quad 0, \quad 1)$.

(f-iii) Calcule a matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ de modo que $AB = -4I_3$, sendo I_3 a matriz identidade de ordem 3.

Problemas finais IV.4.4.

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a-i) Mostre que:

(a-i1) $|A - kI_3| = (3-k)^2(-3-k)$, $k \in \mathbb{R}$;

(a-i2) $\frac{1}{9}$ é o elemento na posição (1,1) da matriz inversa de A.

(a-ii) Resolva os sistemas:

(a-ii1) $(A + 3I_3)u = 0$;

(a-ii2) $(A - 3I_3)v = 0$.

(a-iii) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas.

(a-iv) Determine o espaço próprio de A associado ao valor próprio:

(a-iv1) $\lambda_1 = -3$;

(a-iv2) $\lambda_2 = 3$.

(a-v) Defina $S \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $S^{-1}AS = diag(3, \quad -3, \quad 3)$.

(a-vi) É possível escolher $T \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $T^T AT = diag(3, \quad -3, \quad 3)$?

b) Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(b-i) Calcule $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tais que $Au = \lambda_1 u$, $Av = \lambda_2 v$ e $Aw = \lambda_3 w$.

(b-ii) Resolva os sistemas:

(b-ii1) $(A - 10I_3)y = 0$;

(b-ii2) $Az = 0$.

(b-iii) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas.

(b-iv) Encontre algum $S \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $S^{-1}AS = diag(-10, \quad 0, \quad 10)$.

(b-v) É possível escolher $T \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $T^T AT = diag(-10, \quad 0, \quad 10)$?

c) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c-i) Calcule:

(c-i1) $k \in \mathbb{R}$ tal que $|A - \lambda I_3| = -\lambda(\lambda + k)(\lambda - 2k)$;

(c-i2) o determinante da matriz A;

(c-i3) uu^T, sendo $u^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$;

(c-i4) Av, sendo $v = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

(c-ii) Resolva os sistemas:

(c-ii1) $(A - 4I_3)x = 0$;

(c-ii2) $Ay = 0$.

(c-iii) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas.

(c-iv) Encontre algum $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $S^TAS = diag(-2, \quad 0, \quad 4)$.

d) Seja $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$.

(d-i) Resolva os sistemas:

(d-i1) $Bu = 0$;

(d-i2) $(B - I_4)v = 0$.

(d-ii) Calcule:

(d-ii1) o produto Bw;

(d-ii2) os valores próprios de B.

(d-iii) Indique $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $S^{-1}BS = diag(\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \lambda_4)$.

e) Seja $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ uma matriz tal que $det(M - \lambda I_5) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^3$. Determine, justificando a sua resposta:

(e-i) $tr(M^T)$;

(e-ii) $det(M)$;

(e-iii) $det(M^T)$;

(e-iv) $det(M - 2I_5)$.

f) Seja $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ uma matriz singular tal que

$$det(M - \lambda I_5) = -(\lambda - ?)^3(\lambda - 3)(\lambda - 7).$$

Determine, justificando a sua resposta:

(f-i) os valores próprios de M;

(f-ii) $tr(M^T)$;

(f-iii) $det(M - 7I_5)$;

(f-iv) $det\left(\frac{1}{9}M\right)$.

IV.5 - Matrizes simétricas e matrizes antisimétricas. Diagonalização de matrizes simétricas. Espectro e decomposição espectral de uma matriz simétrica.

Verificámos, anteriormente, que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalizável se e só se é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se e só se existem uma matriz invertível S e uma matriz diagonal D tais que $SAS^{-1} = D$.

Além disso, constatámos que nem todas as matrizes quadradas são diagonalizáveis, e, vamos, ainda, comprovar que uma matriz real não tem necessariamente valores próprios reais. Todavia esta situação simplifica-se significativamente quando estudamos matrizes simétricas.

Definição IV.5.1.

Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

(i) é simétrica se $A = A^T$;

(ii) é anti-simétrica se $A = -A^T$.

Exemplo IV.5.2.

A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica e anti-simétrica;

As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2 & -36 & 0 \\ -36 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ são simétricas mas não são anti-simétricas;

As matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -7 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ são anti-simétricas mas não são simétricas;

As matrizes $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ não são simétricas nem anti-simétricas.

Exercícios IV.5.3. [Propriedades das matrizes simétricas]

a) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica. Prove que se $k \in \mathbb{N}$ então a matriz A^k é simétrica.

b) Mostre que se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ então:

(b-i) $B^T B$ é simétrica;

(b-ii) $\frac{1}{2}(B + B^T)$ é simétrica.

Exercícios IV.5.4. [Propriedades das matrizes anti-simétricas]

a) Considere $B = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$.

(a-i) Verifique que B é anti-simétrica;

(a-ii) Calcule os valores próprios de B.

b) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz anti-simétrica. Prove que:

(b-i) $tr(A) = 0$;

(b-ii) se n é ímpar então $detA = 0$;

(b-iii) se k é ímpar então A^k é anti-simétrica;

(b-iv) se k é par então A^k é simétrica;

(b-v) $M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica de ordem $2n$.

c) Mostre que:

(c-i) se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é anti-simétrica e $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ então $B^T AB$ é anti-simétrica;

(c-ii) se $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ então $\frac{1}{2}(B - B^T)$ é anti-simétrica.

De seguida, analisamos, apenas, o caso das matrizes simétricas. Assim, começamos com alguns exemplos e exercícios onde verificaremos que os valores próprios destas matrizes são números reais. Além disso, teremos oportunidade de constatar que toda a matriz simétrica é diagonalizável.

Exemplos e Exercícios IV.5.5.

a) Para mostrar que a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável basta ter em conta que $\lambda_1 = 7$ é o único valor próprio da matriz A e que, além disso,

$$m.a.(7) = 2 > m.g.(7) = 1,$$

uma vez que $|A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow (7 - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 7 \vee \lambda = 7$ e, que, por outro lado, $(\text{ordem de A}) - c(A - \lambda I_2) = 1$.

b) Pretendemos, agora, verificar se a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

Note-se que $|A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 50)$.

Logo

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee \lambda = 5 \ \vee \lambda = 10 .^{vii}$$

Constatamos, também, que

$$E(5) = \{\alpha(1, \quad 0, \quad 0) + \beta(0, \quad 2, \quad 1), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

sendo $m.a.(5) = m.g.(5) = 2$

e

$$E(10) = \{\gamma(0, \quad 1, \quad -2), \qquad \gamma \in \mathbb{R}\}$$

pelo que $m.a.(10) = m.g.(10) = 1$.[viii]

Se escolhermos os vectores próprios

$$v_1 = (1, \quad 0, \quad 0),\ v_2 = (0, \quad 2, \quad 1) \text{ e } v_3 = (0, \quad 1, \quad -2)$$

e construirmos a matriz

$$S = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

verificamos que S é invertível sendo

[vii] $\lambda_1 = 5$ é uma raiz dupla e $\lambda_2 = 10$ é uma raiz simples.

[viii] Recorde a definição de multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de um valor próprio.

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}.$$

Deste modo, obtemos

$$S^{-1}AS = \Lambda_A,$$

onde

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Note-se que os vectores v_1, v_2, v_3 satisfazem as condições

$$v_1^T v_2 = 0,\ v_1^T v_3 = 0 \text{ e } v_2^T v_3 = 0,$$

isto é, são ortogonais dois a dois, pelo que dizemos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto ortogonal.[ix]

Por outro lado, podemos, em vez dos vectores v_1, v_2, v_3, considerar os vectores próprios

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (1, \quad 0, \quad 0),\ u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(0, \quad \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ e } u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(0, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{-2}{\sqrt{5}}\right),$$

que, além de serem ortogonais, dois a dois, são unitários, pelo que constituem um conjunto ortonormal. [x]

Se definirmos

[ix] Se $v_i^T v_j = 0$, sempre que $i \neq j$, dizemos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ é um conjunto ortogonal de vectores.

[x] $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ é dito um conjunto ortonormal se é um conjunto ortogonal de vectores unitários (isto é, de norma 1).

$$T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

verificamos que T é uma matriz que satisfaz a condição

$$T^{-1} = T^T,$$

ou de modo equivalente, que T é uma matriz ortogonal.[xi]

Consequentemente podemos afirmar que

$$T^T AT = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

e dizemos que a matriz A é ortogonalmente diagonalizável.

b) Seja $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(b-i) Verifique que $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ são vectores próprios de C associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.

(b-ii) $\{u_1, u_2\}$ é um conjunto ortonormal;

(b-iii) a matriz C é ortogonalmente diagonalizável.

O resultado seguinte explica-nos a razão pela qual, por exemplo, o conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ da alínea b) do Exemplo IV.5.5. é ortogonal.

[xi] $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz ortogonal se e só se as suas colunas constituem um conjunto ortonormal. Prova-se que se $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz ortogonal então $Q^T Q = I_n$.

Proposição IV.5.6.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica de espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$.[xii] Se v_i e v_j são vectores próprios de A associados, respectivamente, aos valores próprios distintos λ_i e λ_j então $v_i^T v_j = 0$, para $i, j \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Demonstração:

Seja $i, j \in \{1,2,\cdots,n\}$. Escolhemos dois valores próprios distintos, λ_i e λ_j, um vector próprio v_i associado a λ_i e um vector próprio v_j associado a λ_j. Pretendemos provar que $v_i^T v_j = 0$.

Assim consideremos

$$\lambda_i\left(v_i^T v_j\right) = (\lambda_i v_i)^T v_j = (Av_i)^T v_j = ({v_i}^T A^T) v_j = {v_i}^T A^T v_j =$$

$$= v_i^T\left(Av_j\right) = v_i^T\left(\lambda_j v_j\right) = \lambda_j v_i^T v_j.$$

Ora, por hipótese, $\lambda_i \neq \lambda_j$, logo

$$\lambda_i\left(v_i^T v_j\right) = \lambda_j v_i^T v_j \Leftrightarrow \left(\lambda_i - \lambda_j\right)\left(v_i^T v_j\right) = 0 \Leftrightarrow v_i^T v_j = 0.$$

Este resultado, bem como os dois exemplos anteriores, chamam a nossa atenção para uma forma de diagonalização especial que apresentamos na seguinte

[xii] Ao *conjunto* dos valores próprios de A, $\sigma(A)$, chamamos espectro de A. Repare-se que $\sigma(A)$ pode ter elementos repetidos, pelo que $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ é um multi-conjunto, uma estrutura similar à de um conjunto mas com a diferença de os seus elementos não terem que ser forçosamente distintos.

Definição IV.5.7.

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diz-se ortogonalmente diagonalizável se e só se existirem uma matriz ortogonal $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz diagonal $\Lambda_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $S^T AS = \Lambda_A$.

Provamos, sem dificuldade, que se uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonalmente diagonalizável então é simétrica. Com efeito, se A é uma matriz ortogonalmente diagonalizável então podemos escrever

$$S^T AS = \Lambda_A \Leftrightarrow A = S\Lambda_A S^T.$$

E, consequentemente,

$$A^T = (S\Lambda_A S^T)^T = (S^T)^T(\Lambda_A)^T S^T = S\Lambda_A S^T = A.$$

O resultado que se segue é mais forte e muito importante neste contexto. Todavia a sua demonstração é bastante mais complicada pelo que será omitida.

Proposição IV.5.8.

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonalmente diagonalizável se e só se é uma matriz simétrica.

Exercícios IV.5.9.

a) Verifique se a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ é ortogonalmente diagonalizável.

Resposta:

Uma vez que $B = B^T$ podemos concluir que[xiii] B é ortogonalmente diagonalizável.

De facto, temos

$$\sigma(B) = \{-2, \quad 1, \quad 4\},$$

e, ainda,

$E(-2) = \{\alpha(1, \quad -1, \quad -2),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$,

$E(1) = \{\beta(1, \quad -1, \quad 1), \qquad \beta \in \mathbb{R}\}$

e $E(4) = \{\gamma(1, \quad 1, \quad 0),\ \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Consequentemente, $S^T B S = \Lambda_B$, ou seja,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}}_{S^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\Lambda_B}.$$

b) Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diz-se normal se $MM^T = M^T M$. Mostre que se M é uma matriz simétrica então M é normal.

E se M for antisimétrica, o que pode concluir?

De seguida, apresentamos uma forma de representar uma matriz simétrica por intermédio dos seus valores e vectores próprios.

[xiii] Tendo em conta a Proposição IV.5.8.

Proposição IV.5.10. [Decomposição espectral de uma matriz simétrica]

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica tal que:

(i) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são valores próprios, não necessariamente distintos, de A;

(ii) $A = SDS^T$ onde as colunas, $u_1, u_2, \cdots, u_n$, de S são vectores próprios de A associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Além disso, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ é um conjunto ortogonal constituído por vectores unitários.

Então

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \cdots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

Esta representação chama-se decomposição espectral de A.

Exemplos IV.5.11.

Retomando o Exemplo IV.5.5. e o Exercício IV.5.9., verificamos que:

a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ pode ser decomposta do seguinte modo

$$A = (5)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (5)\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + (10)\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

b) A matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ admite a seguinte decomposição espectral

$$B = (-2)\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} + (4)\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercícios IV.5.12

a) Mostre que

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (7)u_1u_1^T + (7)u_2u_2^T + (-2)u_3u_3^T,$$

sendo $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{18}}, \quad \frac{4}{\sqrt{18}}, \quad \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{-2}{3}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{2}{3}\right)$.

b) Seja $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ uma matriz tal que

$$B\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = (2)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = (4)\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Prove que B é simétrica.

c) Seja $u = (1, \quad 0, \quad 2) \in \mathbb{R}^3$. Prove que:

(c-i) $M = uu^T$ é simétrica. Faça a sua decomposição espectral.

(c-ii) $N = I_3 - \left(\frac{2}{u^Tu}\right)uu^T$ é uma matriz simétrica e ortogonal.

d) Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d-i) Calcule $k \in \mathbb{R}$ tal que $|A - \lambda I_3| = -\lambda(\lambda + k)(\lambda - 2k)$;

(d-ii) Resolva os sistemas:

(d-ii1) $(A - 6I_3)x = 0$;

(d-ii2) $Ay = 0$;

(d-ii3) $(A + 3I_3)z = 0$.

(d-iii) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas.

(d-iv) Determine um conjunto ortogonal de vectores unitários constituído por vectores próprios de A.

(d-v) Indique $S \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $S^T AS = diag(-3, \quad 0, \quad 6)$.

e) Considere, em $\mathbb{R}^4$, os vectores

$v_1 = (1, \quad -1, \quad 0, \quad 0)$, $v_2 = (1, \quad 0, \quad -1, \quad 1)$ e $v_3 = (1, \quad 0, \quad 0, \quad -1)$

Mostre que:

(e-i) $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é um conjunto ortogonal;

(e-ii) $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é um conjunto ortonormal;

(e-iii) se $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \left(\frac{v_2^T u_1}{u_1^T u_1}\right) u_1$ e $u_3 = v_3 - \left(\frac{v_3^T u_1}{u_1^T u_1}\right) u_1 - \left(\frac{v_3^T u_2}{u_2^T u_2}\right) u_2$ então $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto ortogonal.

f) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(f-i) Prove que

$$|A - kI_4| = \begin{vmatrix} 2-k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5-k & 5-k & 5-k & 5-k \\ 1 & 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-k \end{vmatrix} = (5-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-k \end{vmatrix} =$$

$$= (5-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = (5-k)(1-k)^3.$$

(f-ii) Indique os valores próprios de A bem como as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

(f-iii) Resolva os sistemas homogéneos

(f-iii1) $(A - I_4)x = 0$;

(f-iii2) $(A - 5I_4)y = 0$.

(f-iv) Determine o espaço próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_2 = 5$.

(f-v) Verifique que o conjunto

$$\{\alpha(-1, \quad 1, \quad 0, \quad 0) + \beta(-1, \quad 0, \quad 1, \quad 0) + \gamma(-1, \quad 0, \quad 0, \quad 1), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

coincide com o espaço próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1$.

(f-vi) Mostre que $\{u_1, u_2, u_3\}$, onde

$u_1 = (-1, \quad 1, \quad 0, \quad 0)$, $u_2 = (\frac{-1}{2}, \quad \frac{-1}{2}, \quad 1, \quad 0)$ e $u_3 = (\frac{-1}{3}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{-1}{3}, \quad 1)$,

é um conjunto ortogonal formado por vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$.

(f-vii) Indique $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $S^T A S = diag(1, \quad 1, \quad 1, \quad 5)$.

(f-viii) Considere os vectores

$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad 0\right)$, $w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{-2}{\sqrt{6}}, \quad 0\right)$,

$w_3 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{-3}{2\sqrt{3}}\right)$ e $w_4 = (\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2})$.

Determine $M = w_1 w_1^T + w_2 w_2^T + w_3 w_3^T + 5 w_4 w_4^T$.

g) Sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Indique, justificando a sua resposta:

(g-i) a matriz inversa de A.

(g-ii) e utilizando o método de eliminação de Gauss, o conjunto solução de cada um dos sistemas:

(g-ii1) $Ax = b$;

(g-ii2) $(A - 9I_3)y = 0$.

(g-iii) $\theta \epsilon \mathbb{R}$ de modo que $A^2 + \theta I_3 = 10A$.

(g-iv) os valores próprios de A, indicando as respectivas multiplicidades algébricas.

(g-v) o espaço próprio associado ao menor valor próprio de A.

(g-vi) um conjunto ortonormal constituído por três vectores próprios de A.

(g-vii) a decomposição espectral de A.

h) Construa uma matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, tal que $Cv = v$ e $Cw = 5w$, sendo $v = (-2, \quad 1)$ e $w = (2, \quad 1)$.

(i) Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ duas matrizes reais de ordem 3.

(i-i) Indique o conjunto solução do sistema$(A + I_3)z = 0$.

(i-ii) Calcule a matriz inversa da matriz A.

(i-iii) Verifique que $C = B^T B = 2I_3 - A$.

i-iv) Sabendo que $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ são dois valores próprios da matriz A, o que pode concluir acerca dos valores próprios da matriz $C = B^T B$? Justifique.

(i-v) Determine $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sabendo que $S^T A S = \Lambda_A$, onde Λ_A é uma matriz diagonal.

(Página deixada propositadamente em branco)

PALAVRAS FINAIS

Se da leitura deste texto, acompanhada de outras sessões de trabalho individuais e conjuntas (incluindo as aulas, obviamente!), resultar:

- um contributo para a formação dos nossos alunos, não enquanto simples técnicos, mas sim como indivíduos cultos, pessoas com boa preparação de base e elevada autonomia intelectual;
- o desencadear de medidas que fomentem o seu desenvolvimento pessoal nas suas múltiplas exigências e não apenas as de um treino para a profissão;
- e, finalmente, lhes incutir o gosto/despertar o interesse pela Matemática;

então teremos alcançado o nosso propósito inicial.

(Página deixada propositadamente em branco)

BIBLIOGRAFIA

Indicamos, por ordem alfabética, alguns livros de texto que consideramos adequados para quem inicia e queira aprofundar o estudo da Álgebra Linear.

Kolman, Bernard. Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1987.

Lay, David C. Álgebra Linear e suas Aplicações. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1999.

Leon, Steven J. Álgebra Linear com Aplicações. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1999.

Strang, Gilbert. Introduction to Linear Algebra. Massachusetts: Wellesley-Cambridge Press, 1998.

Vitória, José e Teresa Pedroso de Lima. Álgebra Linear. Lisboa: Universidade Aberta, 1998.