

# Programação L i n e a r Multiobjectivo

Do modelo de programação linear clássico à  
consideração explícita de várias funções objectivo

JOÃO NAMORADO CLÍMACO  
CARLOS HENGGELER ANTUNES  
MARIA JOÃO GOMES ALVES



Coimbra • Imprensa da Universidade

(Página deixada propositadamente em branco)

JOÃO NAMORADO CLÍMACO  
CARLOS HENGGELER ANTUNES  
MARIA JOÃO GOMES ALVES

# PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIOBJECTIVO

Do modelo de programação linear clássico à  
consideração explícita de várias funções objectivo



Coimbra • Imprensa da Universidade

COORDENAÇÃO EDITORIAL  
**Imprensa da Universidade de Coimbra**

CONCEPÇÃO GRÁFICA  
**António Barros**

PAGINAÇÃO  
**Victor Hugo Fernandes**

EXECUÇÃO GRÁFICA  
**Imprensa de Coimbra, Lda.  
Couraça dos Apóstolos, 126  
3000-372 Coimbra**

ISBN  
**972-8704-13-5**

ISBN Digital  
**978-989-26-0479-4**

DOI  
**<http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-0479-4>**

DEPÓSITO LEGAL  
**202677/03**

© 2003, IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

## PREFÁCIO

Na investigação operacional clássica as preferências dos agentes de decisão são modeladas à priori, isto é, todos os valores aparecem agregados numa função objectivo (ou critério) única(o), pretendendo-se determinar a solução óptima para o problema em estudo. A convicção de que se podem utilizar, de forma mais ou menos generalizada, modelos deste tipo é, para além do mais, uma imagem ideológica duma certa visão do mundo. A título de exemplo, referimos um texto de Frank Rich (1999), que apareceu numa publicação especial do New York Times dedicada ao “Melhor do Milénio”. Diz o autor a dado passo: “Temos tendência para esquecer que quase todas as nossas noções para medir, catalogar e quantificar o melhor são relativamente recentes... . Foi no século XX, e especialmente no século XX americano, que a nossa incessante sede de classificar quase tudo se transformou num empreendimento cultural que raia a obsessão... . O impulso que nos leva a fazer listas e catálogos do Melhor é muito compreensível neste *fin de siècle*. Vivemos num tempo em que o volume do que sabemos sobre o Universo é mais do que conseguimos absorver, e o desesperado desejo de o perceber é uma das nossas ansiedades milenares... . Não admira que nos agarremos mais do que nunca à ideia do Melhor – simultaneamente como âncora e como radar, mesmo que se discorde mais do que nunca sobre o que significa”<sup>1</sup>.

Todavia, é hoje reconhecido por diversas correntes de opinião que a investigação operacional clássica é demasiado redutora, sendo inadequada à abordagem de muitos problemas reais. Num contexto muito amplo, já em 1980, Edgar Morin escrevia em *La Méthode*: “se a optimização comporta a integração de desordens, incertezas, especulações, concorrências, antagonis-

---

<sup>1</sup> Rich, Frank (1999), “Porquê o Melhor”, em “As Melhores Histórias, Ideias e Invenções dos Últimos Mil Anos”, pp. 20-21, editado por The New York Times Magazine.

mos, então, uma tal optimização comporta o inoptimizável..."<sup>2</sup>. Uma das vias mais promissoras para superar a racionalidade optimizante em investigação operacional consiste no estudo de modelos em que se consideram explicitamente critérios múltiplos e conflituosos entre si. Este é um tema de grande actualidade e importância, dado que a realidade é intrinsecamente multi-dimensional, sendo em muitos casos redutoras as aproximações monocritério.

Este livro é dedicado à generalização para *multicritério* de um dos assuntos mais estudados em cursos de investigação operacional, isto é, a programação linear. Em programação linear multicritério os modelos traduzem apenas parcialmente a agregação de preferências do agente de decisão, deixando para análise posterior as opções mais controversas conducentes à tomada de decisões. Tratando-se de um texto de carácter pedagógico destinado a alunos, decidimos dedicar a primeira parte ao estudo dos principais resultados da programação linear, aparecendo o caso multicritério como uma extensão natural do primeiro, permitindo fazer o contraponto entre o carácter normativo do modelo monocritério e a simbiose entre aspectos quantitativos e subjectivos que, de uma forma ou de outra, aparece nos procedimentos interactivos dedicados à programação linear multiobjectivo (ou multicritério), que constituem o núcleo central deste texto. Nesta parte do trabalho dá-se conta dos avanços de natureza metodológica e do desenvolvimento de *software* e aplicações, decorrentes do trabalho de investigação e desenvolvimento, que realizámos na Universidade e no INESC, em Coimbra. Presta-se especial atenção ao interface Ser Humano-Computador. Para que o leitor possa usufruir de forma mais completa deste livro, o pacote de *software* TRIMAP encontra-se disponível através do sítio do INESC-Coimbra, a saber: [www.inescc.pt](http://www.inescc.pt).

O livro destina-se essencialmente a cursos de graduação e pós-graduação nas várias áreas da engenharia e em gestão. É convicção dos autores que a análise multicritério é um tópico indispensável no ensino da investigação operacional, nomeadamente porque permite integrar, num mesmo método, aspectos quantitativos e aspectos subjectivos associados ao estabelecimento de preferências do agente de decisão.

---

<sup>2</sup> Morin, Edgar (1980), *La Méthode 2*. La Vie. Éditions du Seuil.

## ÍNDICE

PREFÁCIO .....	III
INTRODUÇÃO GERAL .....	1
<b>CAPÍTULO I. PROGRAMAÇÃO LINEAR .....</b>	<b>19</b>
1. Introdução .....	19
2. Resolução gráfica .....	21
Soluções óptimas alternativas .....	24
Casos particulares .....	25
3. Forma padrão e variáveis desvio .....	27
4. O Método simplex .....	28
Introdução ao método através de um problema particular.....	28
Generalização .....	37
A matriz da base "B" .....	39
Método dos M's e das duas fases .....	41
Problemas de minimização .....	47
Detecção de casos particulares de PL a partir do simplex .....	48
5. Dualidade .....	57
Exemplo de maximização .....	57
Exemplo de minimização .....	59
Formulação do dual .....	61
Teoria da dualidade .....	62
Interpretação económica da dualidade .....	69
6. Análise de sensibilidade.....	71
Análise de sensibilidade em relação a variações dos termos independentes das restrições.....	71
Análise de sensibilidade em relações a variações dos coeficientes da função objectivo.....	74
Introdução de uma nova actividade (variável de decisão).....	77
Introdução de uma nova restrição (desigualdade) .....	79
Exemplo de análise de sensibilidade .....	80

CAPÍTULO II. <b>PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTICRITÉRIO</b> .....	89
1. Introdução .....	89
2. Conceitos elementares .....	90
3. Cálculo de soluções eficientes .....	98
A. Optimização de uma das funções objectivo transformando as restantes p-1 em restrições .....	98
B. Optimização de uma soma pesada (ponderada) das funções objectivo .....	103
C. Minimização da distância de Tchebycheff a um ponto de referência .....	113
4. Classificação dos Principais Métodos Dedicados a Programação Linear com Objectivos Múltiplos .....	121
4.1. Métodos de articulação a priori de preferências .....	122
4.2. Métodos em que a articulação de preferências é realizada a <i>posteriori</i> .....	126
4.3. Métodos em que a articulação de preferências do agente de decisão é progressiva.....	130
5. Análise de sensibilidade em PLMO – algumas abordagens.....	131
6. Exercícios propostos .....	133

CAPÍTULO III. <b>MÉTODOS INTERACTIVOS EM PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTICRITÉRIO</b> .....	141
1. Introdução.....	141
2. Método STEM .....	143
2.1. Descrição Genérica.....	143
2.2. Algoritmo STEM.....	146
2.3. Comentários finais.....	149
2.4. Exemplos ilustrativos do método STEM.....	150
3. Método de Zionts e Wallenius.....	159
3.1. Introdução.....	159
3.2. Algumas Noções Básicas.....	160
3.3. Algoritmo de Zionts e Wallenius .....	165
3.4. Diagrama de blocos esquemático do método de Zionts e Wallenius .....	172
3.5. Comentários Finais.....	173
3.6. Exemplo ilustrativo do método de Zionts e Wallenius.....	173
4. Método TRIMAP.....	188
4.1. Apresentação do Método.....	188
4.2. O TRIMAP no ensino da Programação Linear Multicritério .....	193
4.3. Comentários finais .....	196
4.4. Exemplo ilustrativo do método TRIMAP.....	197
5. Método Interval Criterion Weights .....	215
5.1. Introdução.....	215
5.2. Algoritmo ICW (Interval Criterion Weights).....	217



5.3.	Diagrama dos blocos esquemático sobre o ICW.....	220
5.4.	Comentários finais .....	221
5.5.	Exemplo ilustrativo do método Interval Criterion Weights.....	221
6.	Método Pareto Race.....	232
6.1.	Descrição do Método.....	232
6.2.	Diagrama de blocos esquemático do método Pareto Race.....	238
6.3.	Comentários finais.....	238
6.4.	Exemplo ilustrativo do método Pareto Race.....	239
7.	Exercícios propostos.....	250

**CAPÍTULO IV. TOMMIX: UMA BASE DE MÉTODOS INTERACTIVOS DE**

	<b>PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIOBJECTIVO .....</b>	<b>259</b>
1.	Introdução.....	259
2.	TOMMIX – Uma base de métodos interactivos de programação linear multiobjectivo.....	261
2.1.	TOMMIX vs. outras aproximações de integração de métodos ....	263
3.	Principais características do TOMMIX.....	265
4.	Interação Ser Humano-computador.....	268
4.1.	Formas de apresentação de informação.....	269
5.	A componente metodológica no TOMMIX .....	271
5.1.	Categorização dos métodos incluídos no TOMMIX.....	271
5.2.	Transições entre métodos .....	276
6.	Uma visão geral do funcionamento do TOMMIX.....	280
6.1.	Utilização dos métodos no quadro operacional da base de métodos TOMMIX.....	283
7.	Exemplo ilustrativo do uso do TOMMIX .....	285
8.	Conclusões.....	292

**CAPÍTULO V. SOMMIX: UMA BASE DE PROCEDIMENTOS BASEADA NUM**

	<b>PAINEL DE CONTROLO .....</b>	<b>295</b>
1.	Introdução.....	295
2.	Identificação dos processos básicos incluídos no SOMMIX.....	296
3.	Uma visita guiada à implementação computacional do SOMMIX.....	301
4.	Utilização mais frequente de alguns procedimentos elementares.	314
5.	Conclusões.....	315

**CAPÍTULO VI. APLICAÇÕES .....**

A.	Apoio Multicritério à Decisão num Problema de Planeamento Energético.....	318
A1.	Introdução.....	318
A2.	Modelação do planeamento da expansão de sistemas geradores de energia eléctrica.....	321

A2.1. Modelação do sistema gerador .....	321
A2.2. Modelo de carga.....	322
A2.3. Funções objectivo.....	323
A2.4. Restrições.....	326
A3. Exemplo ilustrativo .....	328
A3.1. Pesquisa com o TRIMAP .....	329
A3.2. Pesquisa com o STEM .....	334
A3.3. Pesquisa com o Zionts-Wallenius .....	335
A4. Algumas conclusões .....	341
B. Apoio Multicritério à Decisão em Planeamento Estratégico da Modernização de Redes de Telecomunicações .....	343
B1. Introdução.....	343
B2. Outras abordagens para o problema de planeamento da modernização de redes de telecomunicações .....	345
B3. Um modelo de programação linear multiobjectivo para o planeamento estratégico de redes de telecomunicações .....	347
B3.1. Funções objectivo.....	352
B3.2. Restrições.....	354
B4. Um estudo de um problema de planeamento da evolução de redes de telecomunicações .....	356
B4.1. Análise e justificação dos dados iniciais.....	357
B4.2. Um exemplo de aplicação .....	361
APÊNDICE. Estrutura de algumas soluções do modelo dedicado ao planeamento da evolução de redes de telecomunicações .....	369
REFERÊNCIAS .....	379

## INTRODUÇÃO GERAL

A Investigação Operacional (IO) desenvolveu-se como disciplina científica durante a década de 50, tendo-se criado então a (falsa) expectativa de que a IO acabaria por desenvolver métodos e técnicas adequados à resolução, se não de todos, pelo menos de grande parte dos problemas de decisão que se colocam a diversos níveis, quer na indústria, quer no sector dos serviços. Passados alguns anos, no início da década de 70, a crescente complexidade do ambiente económico e social e a cadência vertiginosa da inovação tecnológica, particularmente nos domínios da informática e das comunicações, tornaram claro que o progresso dependia cada vez mais da adopção de procedimentos de planeamento e de gestão inovadores, esbatendo-se a fronteira entre a componente tecnológica e a componente metodológica do sistema produtivo. Nestas circunstâncias, os tradicionais métodos quantitativos de IO não têm podido, isoladamente, revelar-se adequados à resolução de muitos problemas.

Foi neste contexto que Geoffrion (1983) escreveu um artigo intitulado *"Can Management Science / Operations Research evolve fast enough?"*. Em nossa opinião, não há ainda uma resposta definitiva para esta questão. Contudo, os avanços conseguidos em diversas áreas de natureza interdisciplinar permitem-nos encarar o futuro com algum optimismo, sendo os desafios intelectuais que se colocam cada vez mais estimulantes. Talvez a IO, como foi entendida no passado, tenha os dias contados, mas sem dúvida que a ciência e a arte do apoio à decisão está agora a dar os primeiros passos. A IO, entendida nesta perspectiva, faz apelo ao uso conjugado de modernas técnicas de sistemas de informação, de sofisticados *interfaces* Ser Humano-computador, de métodos quantitativos, de novas técnicas de modelação, de técnicas de inteligência artificial, e de certas disciplinas normalmente incluídas nas chamadas Ciências Humanas, de que destacamos a psicologia cognitiva e a sociologia das organizações.

Neste contexto, o estudo de modelos em que se consideram critérios múltiplos e conflituosos entre si, é um tema de grande actualidade e importância, dado que a realidade é intrinsecamente multidimensional, sendo em muitos casos redutoras as aproximações monocritério.

Neste trabalho, começamos por fazer a ponte entre os modelos de programação linear (PL) monocritério, a partir dos quais a determinação do óptimo é uma questão meramente técnica, e os casos em que se modela explicitamente mais do que um critério, pondo-se assim em causa o paradigma da optimalidade. Nestes casos, os modelos traduzem, apenas parcialmente, a agregação de preferências do agente de decisão, deixando para análise posterior as opções mais controversas conducentes à tomada de decisões. Tratando-se de um texto de carácter pedagógico destinado a alunos, decidimos dedicar a primeira parte ao estudo dos principais resultados da programação linear, aparecendo o caso multicritério como uma extensão natural do primeiro, permitindo fazer o contraponto entre o carácter normativo do modelo monocritério e a simbiose entre aspectos quantitativos e qualitativos do processo de decisão que, de uma forma ou de outra, aparece nos procedimentos interactivos dedicados a PL multicritério (também designada por PL multiobjectivo). Na segunda parte deste trabalho dá-se conta dos avanços de natureza metodológica e do desenvolvimento de *software* e aplicações, decorrentes do trabalho de investigação e desenvolvimento, que realizámos na Universidade e no INESC, em Coimbra. Presta-se especial atenção ao uso dos microcomputadores, nomeadamente no que se refere ao *interface* Ser Humano-computador.

Quando há cerca de duas décadas nos dedicámos ao estudo de um problema de planeamento da expansão de sistemas electroprodutores, utilizando um modelo de programação linear, fomos confrontados com as vantagens de considerar explicitamente várias funções objectivo conflituosas entre si: o custo global, uma função relacionada com a fiabilidade do abastecimento e uma função penalizadora de agressões ambientais. Chama-se de novo a atenção para que a consideração de um modelo multicritério põe em causa o paradigma da optimalidade, que pressupõe uma relação de completa comparabilidade entre as alternativas e a transitividade das comparações. Se isto é, por um lado, indispensável em muitos problemas de IO, como aponta B. Roy<sup>1</sup> ao escrever

---

<sup>1</sup> Nesta introdução faz-se apelo, em diversas ocasiões, às ideias expressas por B. Roy. No essencial, os dois livros incluídos nas referências (Roy, 1985) e (Roy e Bouyssou, 1993) expressam

*"Il faut désoptimiser la recherche opérationnelle"*, por outro lado, coloca novas questões no que se refere à intervenção dos agentes de decisão para seleccionar a solução a pôr em prática. Enquanto num modelo de optimização monocritério se pressupõe que a função objectivo traduz as preferências do agente de decisão, num modelo multicritério, com funções objectivo conflituosas entre si, há necessidade de agregar as preferências do agente de decisão relativas aos vários critérios considerados.

O estudo do problema de planeamento energético referido levou-nos não só a recorrer a diversos métodos de programação linear multicritério, mas também ao desenvolvimento de uma nova abordagem interactiva que viemos a designar por TRIMAP. Nos parágrafos que se seguem procuraremos reconstituir o processo de evolução da nossa investigação ao longo destes anos, assim como perspectivá-la dentro das várias correntes que se têm desenvolvido na literatura científica da especialidade. Começaremos por visitar, através de uma breve nota, a evolução histórica da programação matemática multicritério.

Os métodos de optimização – desenvolvidos, em muitos casos, pelo estímulo de possíveis aplicações – mergulham as suas raízes na teoria económica. Assim, por exemplo, o método simplex, apresentado em 1947 por Dantzig para resolver problemas de programação linear, surge na sequência de trabalhos de economistas consagrados: Leontieff – criador do modelo *input-output*; Koopmans – criador dum modelo de transportes; Von Neumann e Morgenstern – criadores da teoria dos jogos. A relativa simplicidade do método simplex, no que se refere à sua implementação, e a eficácia que veio a revelar, abriram largas perspectivas à aplicação da programação linear a problemas concretos da sociedade. Este impulso foi decisivo para a elaboração, durante a década de 50, duma boa parte das bases da programação matemática. A elaboração do suporte teórico da matemática da optimização, o desenvolvimento dos computadores e o êxito, mesmo que parcial, de algumas aplicações levaram os arautos da teoria neoclássica da empresa a sobrevalorizar a utilização de modelos matemáticos de optimização. Para os defensores desta teoria, todos os modelos se baseiam numa função objectivo, função valor ou função utilidade, que se pretende

---

de forma bastante completa o seu pensamento. Deve também notar-se que nem sempre uma realidade multidimensional justifica o uso de modelos multicritério. Por exemplo, D. Bouyssou (1993) afirma que, no essencial, a decisão de usar modelos multicritério é uma *questão de fé*.

optimizar. A formulação da função objectivo é considerada um problema menor, como se pode ver, por exemplo, em Hitch (1953) que refere o problema da escolha de critério — função objectivo — como o mais simples em investigação operacional. A unidade monetária aparece como a única medida do benefício social. Não é nosso objectivo neste texto fazer uma crítica global a esta teoria, mas apenas justificar o aparecimento dos modelos multicritério.

A dificuldade dos agentes de decisão em participar na formulação da função objectivo, e a não inclusão de aspectos de natureza social, não quantificáveis em unidades monetárias, justificam que, já na década de 50, diversos autores tenham proposto a utilização de modelos de natureza diversa. Para Keen (1977), a complexidade dos problemas concretos da sociedade é essencialmente marcada por objectivos múltiplos e o agente de decisão é muitas vezes confrontado com a necessidade de arbitrar o conflito entre os objectivos, mais do que com a procura de soluções óptimas.

Surge então um novo ramo da programação matemática, a programação matemática com objectivos múltiplos.

É oportuno fazer aqui um parêntesis para referir que, sob a designação comum de métodos com critérios múltiplos, aparecem na literatura especializada dois ramos distintos:

- a) métodos de apoio à decisão com atributos múltiplos;
- b) métodos de apoio à decisão com objectivos múltiplos.

A primeira destas designações refere-se a métodos de selecção, ordenação ou categorização de entre um número finito de alternativas, explicitamente conhecidas, enquanto a segunda diz respeito a problemas nos quais as alternativas são implicitamente definidas por um conjunto de restrições. Este trabalho refere-se apenas a problemas da categoria b), e, dentro destes, ao caso particular da programação linear com objectivos múltiplos.

Tal como no caso da programação matemática com uma única função objectivo, as raízes da programação matemática com objectivos múltiplos mergulham na teoria económica.

Pareto, em 1906, definiu um conceito que se veio a revelar fundamental para a programação matemática com objectivos múltiplos, o conceito de conjunto de soluções óptimas de Pareto (também designado ao longo do texto por conjunto de soluções eficientes ou não dominadas). Diz-se que uma dada solução é eficiente quando não existe qualquer outra solução admissível que melhore um dos objectivos sem piorar, pelo menos, um dos outros.

Von Neumann e Morgenstern (1947), no seu livro clássico sobre a teoria dos jogos e o comportamento económico, referem-se à necessidade de utilizar mais do que uma função objectivo nos seguintes termos: “O problema de optimização no contexto de uma economia de mercado não é certamente um problema de optimização, mas uma mistura peculiar e desconcertante de vários problemas de optimização conflituosos...”.

Koopmans na monografia “*Analysis of Production as Efficient Combination of Activities*” (1951), que viria a constituir um dos principais trabalhos por que lhe foi atribuído em 1975, em conjunto com Kantorovich, o Prémio Nobel da Economia, introduz a noção de solução eficiente no contexto da análise de modelos lineares de produção. Trata-se dum artigo muito rico no que se refere às relações entre o conceito de solução eficiente e a teoria económica da produção.

Foram, no entanto, Kuhn e Tucker (1951) quem considerou, pela primeira vez, em programação matemática, várias funções objectivo. Usaram a designação de função objectivo vectorial e estabeleceram condições para que uma dada solução seja eficiente.

Até aos anos 60 não existiu investigação sistemática neste ramo, havendo a registar apenas algumas publicações. Em 1967-68 Geoffrion publicou dois importantes artigos sobre este assunto. Desde então contam-se por alguns milhares as publicações, quer de carácter teórico, quer de natureza computacional e aplicações, sobre programação matemática com objectivos múltiplos. Mais recentemente começaram não só a realizar-se diversas conferências internacionais dedicadas a esta área e a criar-se grupos de trabalho no âmbito de associações internacionais, como também a aparecer livros e artigos em que é feito o ponto da situação do *estado da arte* neste tema.

Voltemos agora ao nosso problema de planeamento energético e às opções que tivemos de fazer quando, após a sua formulação, nos propusemos a estudá-lo com vista a apoiar o agente de decisão. Não é objectivo deste trabalho discutir em pormenor a fase de modelação dos problemas, mas não queremos, contudo, deixar de chamar desde já a atenção para que um modelo é uma representação idealizada da realidade, descrevendo algum fenómeno de que se pretende realçar o comportamento. No nosso caso optou-se por um modelo de programação linear, como compromisso entre o esforço computacional exigido e o grau de aproximação da realidade requerido. Entre outros factores, destaque-se que é muito grosseira a

aproximação linear da função fiabilidade e que ao considerar um modelo de programação linear não se tem em conta o carácter modular dos equipamentos. A opção feita justifica-se, visto que se pretende fazer apenas um estudo esquemático para planeamento a longo prazo, permitindo de modo expedito analisar diversos cenários, como forma de ter em conta o carácter impreciso e incerto de muitos dos dados e parâmetros utilizados. Obtêm-se assim indicações estratégicas relativas ao planeamento a longo prazo, que se tornam indispensáveis quando, utilizando ferramentas de análise adequadas, se efectua o planeamento a curto e médio prazos.

As questões relacionadas com a imprecisão e incerteza tornam a utilização de um modelo multicritério particularmente atraente, visto que permite certo gradualismo na agregação de preferências. Os critérios do modelo traduzem apenas o grau de agregação julgado aceitável, nesta fase do processo, pelo agente de decisão (porventura assessorado por um analista).

Formulado o problema de programação linear multiobjectivo, havia que encontrar os métodos de análise adequados à obtenção/aprendizagem das preferências do agente de decisão a partir do modelo.

Tradicionalmente os métodos de programação linear multicritério classificam-se em três categorias, de acordo com o processo utilizado para agregar as preferências do agente de decisão, com vista a seleccionar a melhor solução de compromisso. A saber:

- métodos em que é feita uma agregação *a priori* de preferências;
- métodos de articulação progressiva de preferências (interactivos);
- métodos em que não há articulação de preferências (geradores das soluções eficientes).

Nos métodos do primeiro tipo, em que, apesar dos vários critérios serem modelados explicitamente, a agregação de preferências é feita antes de qualquer fase de cálculo, o problema é transformado *a priori* num problema monocritério, por exemplo através da construção de uma função utilidade. Como veremos, as características especiais da geometria do poliedro admissível, correspondente ao nosso estudo de caso, tornam particularmente gravosa a aplicação de métodos em que tudo é decidido *a priori*, sem a possibilidade do agente de decisão se aperceber das consequências. Pensámos então que o mais adequado seria a utilização de métodos em que não há articulação de preferências, sendo esta tarefa realizada *a posteriori* pelo



agente de decisão. Referimo-nos aos chamados métodos geradores das soluções eficientes, em que, no caso particular da programação linear, se destacam os que correspondem a extensões do método simplex, por forma a determinar todos os vértices eficientes do poliedro admissível, havendo a possibilidade de, em seguida, determinar quais as arestas e faces<sup>2</sup> eficientes. Os primeiros algoritmos geradores, dedicados a programação linear multicritério, foram desenvolvidos no início da década de 70, sendo de destacar as aproximações de Yu e Zeleny (1975) e de Evans e Steuer (1973). No nosso estudo optámos pela utilização da aproximação de Yu e Zeleny e publicámos um primeiro artigo sobre o assunto em 1981 (Clímaco e Almeida, 1981). Contudo, quando mais tarde realizámos experiências utilizando um modelo com um número relativamente elevado de variáveis e de restrições, por forma a obter aproximações da realidade mais adequadas ao estudo que pretendíamos efectuar, as questões associadas aos métodos geradores começaram a surgir. Acima de certos limites o esforço computacional torna-se impraticável e, mesmo quando é possível calcular todos os vértices eficientes, pudemos verificar que se trata de um esforço grande, não compensado pela qualidade da informação que fica à disposição dos agentes de decisão. De facto, o agente de decisão revela-se incapaz de fazer uma escolha fundamentada quando é confrontado com uma grande quantidade de informação, isto é, com um grande número de soluções eficientes, principalmente quando muitas delas apresentam apenas variações ligeiras no que se refere aos valores das funções objectivo.

Note-se que, em muitos problemas reais, a geometria dos poliedros que representam as soluções admissíveis conduz a situações em que há zonas da região eficiente onde as variações dos valores das funções objectivo são muito suaves e outras que são perfeitas *ravinas*. Como veremos mais tarde, é o que se passa no nosso estudo de caso de planeamento energético. Para complicar ainda mais as coisas, nestes casos é frequente que o agente de decisão, se lhe for dada essa possibilidade, prefira soluções eficientes pertencentes a alguma face eficiente, em detrimento dos vértices, o que dificulta ainda mais o estudo do ponto de vista computacional.

Fomos assim levados a concluir que só os métodos de articulação progressiva de preferências, métodos interactivos, nos permitiriam ter em conta as questões apontadas.

---

<sup>2</sup> O termo face está a ser usado para designar hiper-faces de dimensão igual ou superior a 2.

Esta constatação está directamente relacionada com as opiniões expressas por B. Roy (1992) em "*Science de la Décision ou Science de l'Aide à la Décision*". Citando B. Roy "*L'aide à la décision (AD) peut être définie comme l'activité de celui qui, par des voies dites scientifiques, aide à obtenir des acteurs impliqués dans un processus de décision, éléments concourant à éclairer la décision en vue de favoriser un comportement des éléments de réponses à des questions que se posent des acteurs de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus d'une part, les objectifs et le système de valeurs au service desquels ces auteurs se trouvent placés d'autre part. En ce sens, l'AD prend appui sur la RO (Recherche Opérationnelle) mais aussi sur d'autres disciplines et sur d'autres démarches. Toute contribution de RO ne relève pas nécessairement de l'AD dans la mesure où certains travaux purement mathématique mis sous l'étiquette RO ne sont pas directement trouvés vers une aide à la décision...*"; ou ainda por Saul Gass quando afirma "*We hope that the decision maker would behave in a rational manner and correctly use the results of decision analysis. This does not mean that a decision maker cannot, or should not use judgmental, and experimental factors in making a decision...*". (Ver Gass, 1985).

Estes pontos de vista devem, em nosso entender, estar subjacentes a qualquer procedimento verdadeiramente interactivo, pois, como veremos, recorrendo mais uma vez ao nosso estudo de caso, abordagens doutro tipo revelam-se ineficazes.

Esquemáticamente, um método interactivo clássico de programação linear multicritério inclui duas fases essenciais, fase de cálculo e fase de diálogo (entre o agente de decisão/analista e o computador), que se repetem alternadamente até se atingir uma condição de paragem, variável de método para método. Note-se que, devido à complexidade dos métodos utilizados, a comunicação entre o agente de decisão e o computador é geralmente mediada por um técnico, o analista. A fase de diálogo é regulada através dum protocolo de comunicação implementado computacionalmente, e com ela pretende-se preparar uma nova fase de cálculo. Em programação linear multicritério cada fase de cálculo consiste na resolução de um problema (ou vários, dependendo dos métodos) de programação linear monocritério, procurando garantir-se que a função escalar que se constrói a partir da informação obtida do agente de decisão, uma vez otimizada, conduza a uma solução eficiente, visto que a solução de compromisso a seleccionar

deverá, em princípio, pertencer a este conjunto. Dizemos, em princípio, porque, se não nos esquecermos que o modelo representa apenas parcialmente a realidade, pode justificar-se uma análise *a posteriori*, em que se consideram como interessantes soluções não necessariamente eficientes, sempre que forem indiferentes em relação a uma solução eficiente tida como satisfatória, por dela diferirem muito pouco no valor das funções objectivo. Neste caso, uma análise *a posteriori*, tendo em conta pontos de vista não incluídos no modelo matemático, pode conduzir à escolha duma solução interessante para o agente de decisão não necessariamente eficiente. Mais ainda, não será de estranhar, a partir do que ficou dito atrás, que se tenha como essencial a realização de estudos de análise de sensibilidade em relação aos parâmetros do modelo, e que esta não seja em muitos casos suficiente, visto deverem ser procuradas soluções de compromisso tendo em conta várias instâncias possíveis do problema, o que implica estudos de análise de robustez.

Como é enfatizado por Vanderpooten e Vincke (1989), por um lado é essencial que o esforço computacional na fase de cálculo não seja demasiado elevado e, por outro, que as questões colocadas ao agente de decisão sejam simples e compreensíveis. O primeiro requisito é indispensável para garantir que o processo de decisão seja verdadeiramente interactivo no que se refere ao tempo de espera por cada nova solução, e o segundo condiciona a qualidade das soluções que vão sendo sucessivamente propostas ao agente de decisão, evitando indicações erradas dadas pelo agente de decisão na fase de diálogo. Para garantir um bom funcionamento do processo interactivo Roy propõe a inclusão de uma terceira fase a que chama fase de sensibilização. Pretende-se chamar a atenção do agente de decisão para as características, potencialidades e limitações do método a utilizar em cada caso. No capítulo em que abordamos em mais detalhe o estudo de caso de planeamento energético, utilizando vários métodos interactivos, veremos a real importância prática dos pontos aqui focados.

Em resumo, num processo interactivo, um ciclo de propostas e reacções sucessivas prossegue até se atingir uma solução de compromisso satisfatória.

Chegou a altura de discutir a questão central que se coloca quando estudamos a interactividade no apoio multicritério à decisão, e, em particular, em programação linear multiobjectivo. A atitude que o investigador assume quando desenvolve um novo método tem a ver com os seus pontos de vista face às seguintes questões chave:

- fará sentido falar na procura da solução óptima de uma qualquer função utilidade que se admite existir, mas da qual se desconhece a representação analítica (isto é, na convergência do processo interactivo para o óptimo da função utilidade implícita) quando se pretende implementar um procedimento verdadeiramente interactivo?
- quais as condições de paragem do algoritmo?
- qual o significado da solução final escolhida?

Os métodos interactivos mais conhecidos de programação linear multicritério baseiam-se na informação local recolhida (quando se optimiza na fase de cálculo uma, ou várias, funções escalares) para colocar questões aos agentes de decisão que permitam obter a informação necessária, quer em termos de parâmetros, tais como pesos, níveis de aspiração, valores mínimos admissíveis para as funções objectivo, quer de outros parâmetros destinados a preparar uma nova fase de cálculo. À informação assim obtida chamou Vanderpooten (1989) informação preferencial, e aos parâmetros que a permitem obter, parâmetros de preferência. O compromisso entre a complexidade e a riqueza da informação desejável, e a capacidade do agente de decisão para responder às questões formuladas é um problema delicado que transcende questões técnicas de programação matemática, implicando a consideração de estudos sobre a racionalidade nos processos de decisão. Note-se que estudos das ciências da cognição têm revelado a dependência do comportamento racional de conceitos básicos da linguagem e de certos valores específicos de cada realidade cultural. Voltaremos a estes assuntos quando estudarmos os métodos interactivos de programação linear multicritério que seleccionámos como mais representativos, e dedicaremos especial atenção a estudos empíricos, quer apresentados na literatura científica da especialidade, quer realizados por nós próprios, com vista a analisar quais os parâmetros preferenciais com que o agente de decisão se sente mais à vontade, e certas questões que a utilização destes métodos levanta, como, por exemplo, o problema das escalas quando se usa informação intercritério.

Nesta fase da exposição interessa-nos distinguir duas atitudes marcadamente antagónicas no desenvolvimento desta área (para detalhes veja-se Roy, 1987) A primeira via, a que Roy chama "*la voie du réalisme: l'attitude descriptive*", interpretada em termos de programação linear

multicritério pode resumir-se no seguinte: existe uma função utilidade do agente de decisão que otimizada conduziria à solução de compromisso óptimo entre os critérios. Contudo, esta função não é conhecida pelo agente de decisão explicitamente, cumprindo aos processos interactivos a descoberta dessa função utilidade, servindo-se para isso de protocolos de diálogo de natureza algorítmica. A solução óptima a seleccionar não depende, portanto, da evolução do processo interactivo, sendo uma primitiva do agente de decisão para o problema em estudo. Então, um método interactivo é tanto melhor quanto mais fácil e rapidamente permite a descoberta da função utilidade do agente de decisão, e conseqüentemente a convergência para o seu óptimo. Um exemplo paradigmático deste tipo de métodos é o método de Zionts-Wallenius (1976, 1983). Esta abordagem pressupõe que o agente de decisão seja coerente nas respostas às questões que o protocolo de comunicação do método lhe coloca. Por exemplo, no método de Zionts-Wallenius estas questões são de natureza dicotómica, isto é, cada resposta conduz à divisão em duas partes, mutuamente exclusivas, de um espaço de pesos auxiliar que é utilizado para construir a função escalar a otimizar em cada iteração, o que implica que daí para a frente só podem ser seleccionados pontos deste espaço que nunca mais seriam considerados se a resposta tivesse sido a oposta. Torna-se, portanto, muito arriscado optar pela utilização de procedimentos deste tipo. Quando, mais adiante, estudarmos este método em pormenor, veremos que a sua versão mais recente é um pouco mais flexível, mas, no essencial, os problemas aqui referidos permanecem em muitos casos.

Repare-se que, quando aplicado ao nosso estudo de caso, este método se revela inadequado, visto que, devido à geometria especial da região admissível eficiente, o agente de decisão é sucessivamente confrontado com opções difíceis, quer por corresponderem a verdadeiros saltos no escuro (quando há brusquíssimas variações dos valores das funções objectivo), quer por ser difícil optar em zonas em que a suavidade da variação é muito grande... . Por outro lado, este tipo de métodos nega a aprendizagem ao longo do processo de decisão, isto é, nega a possibilidade do agente de decisão aprender novas facetas do problema em estudo, com reflexos na criação do seu sistema de preferências. A nossa experiência, que relataremos mais tarde, confirma as opiniões de Roy que considera irrealista este tipo de abordagem. Outros investigadores de nomeada têm feito afirmações no mesmo sentido. Por exemplo, French (1984) escreveu *"I believe that good*

*decision aid should help the decision maker explore not just the problem, but also himself. It should bring to his attention possible conflicts and inconsistencies in his preferences so that he can think about their resolution"*; e Lewandowski e Wierzbicki (1988) fizeram notar que: *"A rational decision does not have to be based on all the available information, nor does it have to be optimal. It should only take into account the possible consequences of the decision and be intended not to be detrimental to the values and interests of the decision maker."*. Na terminologia de Roy a via que se contrapõe à do realismo é a via construtivista. Segundo Roy *"l' attitude prescriptive, lorsqu'elle est associée à la voie constructiviste, est tournée vers la production de connaissances concernant la manière d'agir (insertion dans un processus de décision) tout autant que vers le contenu de la prescription, lequel ne repose pas sur la prétendue découverte d'une réalité"*. Isto é, estimula-se a aprendizagem durante a análise interactiva do problema através do processo tentativa-erro. Por exemplo, passar duas vezes pela mesma solução durante o processo interactivo, seria um *sacrilégio* na óptica da convergência para o óptimo numa função utilidade, enquanto aqui é um facto natural, sendo até possível que, devido à aprendizagem, o agente de decisão não reaja da mesma maneira quando é confrontado segunda vez com uma solução já anteriormente proposta.

Voltando ao nosso caso de planeamento energético, chegou a altura de justificar o desenvolvimento da *package* TRIMAP, que será motivo de estudo pormenorizado noutro capítulo. Mais uma vez as características do nosso estudo de caso (geometria especial da região admissível eficiente), assim como experiências realizadas com alguns métodos interactivos clássicos (Zionts-Wallenius e outros que se referem adiante), encorajou o desenvolvimento de um ambiente interactivo de análise que não só se baseasse numa atitude construtivista, mas também que permitisse uma pesquisa livre do conjunto das soluções eficientes, tendo em vista uma apreensão tão rápida quanto possível do essencial da forma da região eficiente. Isto é, achámos essencial encontrar uma ferramenta que nos desse uma visão holística do problema em estudo, antes de nos focarmos sobre uma determinada região para se continuar a pesquisa, usando então procedimentos que recorrem a informação local. O conjunto de procedimentos desenvolvido chama-se TRIMAP (Programação Linear Tricritério – Método de Aprendizagem Progressiva) e é dedicado a problemas com três funções objectivo, visto que

é este o caso do problema que motivou o seu desenvolvimento e o de muitos outros problemas reais (Clímaco e Antunes, 1987, 1989). Como veremos, a exploração desta característica vai revelar-se importante.

O TRIMAP baseia-se numa aprendizagem progressiva e selectiva do conjunto das soluções eficientes. O objectivo não é convergir para uma solução de compromisso, óptima de qualquer função utilidade, mas antes apoiar o agente de decisão na eliminação do subconjunto das soluções eficientes que se revelem sem interesse prático. Não há decisões irrevogáveis durante o processo interactivo, sendo permitido ao agente de decisão rever opções anteriores. Em cada interacção (quando se prepara uma nova fase de cálculo) o agente de decisão limita-se a dar indicações sobre as regiões em que a pesquisa de soluções eficientes deve continuar, e/ou a introduzir restrições no valor das funções objectivo (especificando níveis inferiores). O processo interactivo termina quando o agente de decisão considera já conhecer o bastante sobre o conjunto das soluções eficientes. Usando a terminologia de Roy, podemos dizer que no TRIMAP a *convergência* é substituída pela *criação* e que o processo interactivo é um processo construtivo (e não a descoberta de qualquer função utilidade implícita pré-existente).

Um problema, sempre presente nos processos interactivos, diz respeito à capacidade limitada dos seres humanos em processar informação. O TRIMAP é dedicado a problemas com três funções objectivo. Apesar de constituir uma limitação, esta característica permite o uso de meios gráficos particularmente adequados ao diálogo com o agente de decisão/analista, o que indubitavelmente aumenta a sua capacidade de processamento de informação, simplificando a fase de diálogo. O *software* por nós desenvolvido, utilizado neste livro, faz apelo à combinação de meios gráficos com mecanismos de diálogo Ser Humano-computador, no que se refere à troca de informação, quer qualitativa, quer quantitativa. Usando a terminologia de Feyerabend (1975) privilegia-se a comunicação aberta, e este ambiente interactivo revela-se adequado não só para uma análise do problema em estudo, mas também para avaliar por contraste as várias soluções. Ora, como afirma Feyerabend (1975), os preconceitos são descobertos essencialmente por contraste e não por análise, sendo, portanto, esta abordagem particularmente adequada para ultrapassar problemas comuns a outros procedimentos interactivos, como, por exemplo, a questão da ancoragem em relação à primeira solução proposta durante o processo de interacção.

A utilização do TRIMAP, e as experiências realizadas anteriormente com diversos métodos, levaram-nos a concluir que não existe um método interactivo melhor do que todos os outros, independentemente das circunstâncias. Quando se procede a um estudo concreto há, por vezes, vantagens em poder dispor do que chamamos uma *base de métodos*. Este conceito designa um conjunto de métodos interactivos implementados de forma integrada, permitindo ao utilizador mudar de método para método durante o processo interactivo, garantindo a existência de mecanismos de transferência e a possibilidade de utilização da informação que vai sendo recolhida.

A primeira questão com que nos deparámos, quando resolvemos iniciar o projecto de construção da base de métodos, foi decidir que métodos incluir, tendo por objectivo cobrir os vários tipos de pesquisa interactiva possível. Seguindo uma classificação próxima da utilizada por Steuer (1986), dividimos os métodos de programação linear interactivos nas seguintes categorias:

- métodos de pesquisa direccional;
- métodos de redução do espaço dos pesos;
- métodos de redução da região admissível;
- métodos de contracção do cone dos gradientes das funções objectivo.

Seleccionámos para a base de métodos um de cada categoria: *Pareto Race*, *Zionts-Wallenius*, *Step Method* (STEM) e *Interval Criterion Weights* (ICW), respectivamente. A estes juntámos o TRIMAP que permite, pelas suas características, não só a utilização como *pivot* em muitas das passagens de método para método durante o processo interactivo, como também uma análise holística prévia, antes de iniciar o uso de métodos baseados em informação local. Por exemplo, o agente de decisão pode não estar disposto a utilizar procedimentos que impliquem uma comparação entre pares de soluções antes de conhecer melhor o problema de forma global. O estudo das potencialidades desta base de métodos, em comparação com a implementação dos mesmos métodos de forma isolada, assim como o estudo das sequências mais comuns de utilização dos vários métodos serão feitos num capítulo deste livro. Salientam-se aqui apenas algumas das principais características da base de métodos, que lhe conferem grande flexibilidade.



A saber:

- do ponto de vista conceptual pode mudar-se dum método para qualquer outro em qualquer interacção, mas o grau de aprendizagem com a experiência anterior depende da situação;
- é sempre possível abandonar um método voltando o processo ao estado em que se encontrava antes de o termos começado a utilizar;
- é possível rever decisões prévias durante a aplicação de cada método;
- em muitos casos um método é usado com objectivos diferentes dos originalmente definidos pelos autores (por exemplo, o agente de decisão pode estar interessado em proceder a uma pesquisa local efectuando uma ou várias iterações do tipo das utilizadas no método de Zionts-Wallenius, sem se preocupar com os pressupostos do método, como seja, a existência duma função utilidade implícita do agente de decisão);
- com a utilização da base de métodos temos em vista uma aprendizagem progressiva do sistema de preferências do agente de decisão, procurando-se identificar soluções eficientes satisfatórias (inspirado na noção de solução satisfatória introduzida por Simon – ver Simon, 1981). Contudo, ao impor-se que as soluções sejam eficientes, está-se talvez mais próximo da noção de solução quasi-satisfatória de Wierzbicki (1983), que combina a ideia de racionalidade limitada dos agentes de decisão conducente à pesquisa de soluções satisfatórias, no sentido dado por Simon, com a tendência para otimizar (racionalidade otimizante) sempre que possível. Neste contexto, a designação convergência psicológica, sugerida por Vincke, parece-nos particularmente feliz;
- o interface Ser Humano-computador põe à disposição do agente de decisão menus, caixas de diálogo, botões, *potenciómetros* de variação contínua, etc., com vista a facilitar, quer a entrada dos dados, quer a troca de informações durante o processo interactivo;
- a implementação dos métodos é integrada, havendo partilha do código e do interface Ser Humano-computador, que inclui gráficos e informação numérica, constituindo uma base de diálogo.

Trata-se, portanto, de um sistema de apoio à decisão (SAD) de 4ª geração, na terminologia de Jelassi e Ozernoy (1989), isto é, um sistema

informático interactivo, dedicado a problemas de programação linear multiobjectivo, que inclui uma base de métodos e uma base de diálogo. Este sistema, para além do interesse prático e para o ensino, revelou-se um auxiliar precioso para o estudo empírico sobre as possibilidades de, em cada método, se obter informação fiável dos agentes de decisão, assim como para avaliar a respectiva coerência estrutural. Sendo especialmente adaptada a problemas com três funções objectivo, esta base de métodos foi chamada de TOMMIX (Three Objective Methods Mixed).

Numa última fase procurou-se estender a base de métodos (procedimentos) interactivos a modelos com mais de três funções objectivo. O *interface* Ser Humano / computador é, neste caso, baseado num painel de controlo de instrumentos, que foi designado por SOMMIX. Embora se mantenham, na medida do possível, os princípios de funcionamento desenvolvidos para a base de procedimentos TOMMIX, a utilização do SOMMIX pelo analista é muito mais difícil, visto que é grande a complexidade técnica associada à correlação da informação lida nos diversos instrumentos.

Em qualquer uma destas *packages* (TRIMAP, TOMMIX e SOMMIX) a complexidade técnica inerente requer a existência dum analista/mediador, entendido como parte integrante do SAD, para facilitar a interacção com o agente de decisão.

O texto que se segue, dedicado à programação linear, faz a ponte entre o caso monocritério e o modelo multicritério (enfatizando neste caso os métodos/procedimentos interactivos), e está organizado da forma que se segue.

No capítulo I estuda-se o essencial da teoria da programação linear, destinando-se a leitores com formação adequada. Não se pretendeu escrever um texto completo do ponto de vista matemático, mas apenas introduzir as noções fundamentais necessárias a uma melhor compreensão dos capítulos seguintes.

---

16

No capítulo II analisa-se a passagem do caso monocritério ao multicritério, assim como o essencial da teoria da PL multicritério, nomeadamente no que vai ser necessário para a exposição dos capítulos seguintes.

No capítulo III introduzem-se de forma genérica as questões relacionadas com o desenvolvimento de métodos/procedimentos interactivos na área coberta por este texto. Discutem-se brevemente os paradigmas cognitivos subjacentes, e a classificação dos métodos existentes. Apresentam-se

exemplos de quatro métodos interactivos de programação linear multiobjectivo, representativos das várias categorias de métodos. Estuda-se ainda o método TRIMAP, que se pode caracterizar como um ambiente interactivo dedicado ao cálculo progressivo e selectivo de soluções eficientes.

No capítulo IV estuda-se, e ilustra-se com um exemplo, a base de métodos/procedimentos TOMMIX, dedicada a problemas de programação linear com três funções objectivo.

No capítulo V estuda-se a base de procedimentos SOMMIX, que permite, de forma flexível, o estudo de problemas com mais do que três funções objectivo.

Na parte A do capítulo VI é apresentado um modelo de programação linear multiobjectivo para planeamento da expansão de um sistema electroprodutor, comparando-se a aplicação de diversos métodos interactivos no estudo deste problema. Na parte B do capítulo VI é apresentado um modelo para planeamento estratégico de redes de telecomunicações, tendo em vista a introdução de novas tecnologias e de novos serviços, e analisando-se o problema com a base de métodos TOMMIX.

O livro destina-se a ser utilizado para ensinar disciplinas dos últimos anos de licenciatura e de mestrado em cursos de investigação operacional, engenharia e gestão.

É opinião dos autores que nas disciplinas de investigação operacional de cursos das áreas referidas se justifica o ensino da programação linear num sentido mais amplo do que é habitual. Isto é, a passagem da aproximação monocritério ao uso de modelos multicritério é, do nosso ponto de vista, um tema, não só indicado, mas quase indispensável para um ensino moderno da investigação operacional. Nestas circunstâncias, o texto foi construído por forma a que os capítulos I, II e III sejam particularmente adequados ao ensino de disciplinas de investigação operacional e de programação linear.

(Página deixada propositadamente em branco)

## CAPÍTULO I

### PROGRAMAÇÃO LINEAR

#### 1. INTRODUÇÃO

Um problema de programação linear (PL) consiste na maximização ou minimização de uma função linear de várias variáveis, designada por *função objectivo*, em que as variáveis estão sujeitas a um conjunto de *restrições* também lineares. As variáveis de decisão representam, em geral, níveis de actividades, as restrições podem resultar de limitações na disponibilidade de recursos ou de requerimentos mínimos que devem ser atingidos e a função objectivo representa uma medida do desempenho do sistema. De uma forma genérica, um problema de PL formula-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \max (\min) \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

onde  $n$  é o número de variáveis de decisão e  $m$  o número de restrições funcionais, sendo cada uma delas do tipo ' $\leq$ ', ' $\geq$ ' ou ' $=$ '. Para além das restrições funcionais, as variáveis estão sujeitas a restrições de não

negatividade ( $x_j \geq 0$ ). O problema anterior pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{aligned} \max (\min) z &= \underline{c} \underline{x} \\ \text{s.a:} \quad A\underline{x} &(\leq, \geq, =) \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

onde  $\underline{c}$  é o vector  $1 \times n$ ,  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $\underline{x}$  é o vector  $n \times 1$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\underline{b}$  é o vector  $m \times 1$ ,  $(b_1, b_2, \dots, b_m)^T$  e  $A$  é uma matriz  $m \times n$  cujo elemento genérico é  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ).

Um vector  $\underline{x}$  que satisfaça todas as restrições chama-se *solução admissível*. O conjunto de todas as soluções admissíveis é um poliedro convexo e designa-se por *região admissível*. A uma solução admissível que optimize a função objectivo chama-se *solução óptima*.

Em problemas de PL apenas existem óptimos globais (figura I.1a), o que não acontece em outros tipos de problemas, como, por exemplo, de programação não linear (figura I.1b). Desta forma, qualquer solução que satisfaça as condições de óptimo local é uma solução óptima (global) do problema. Esta propriedade facilita a resolução dos problemas de PL.

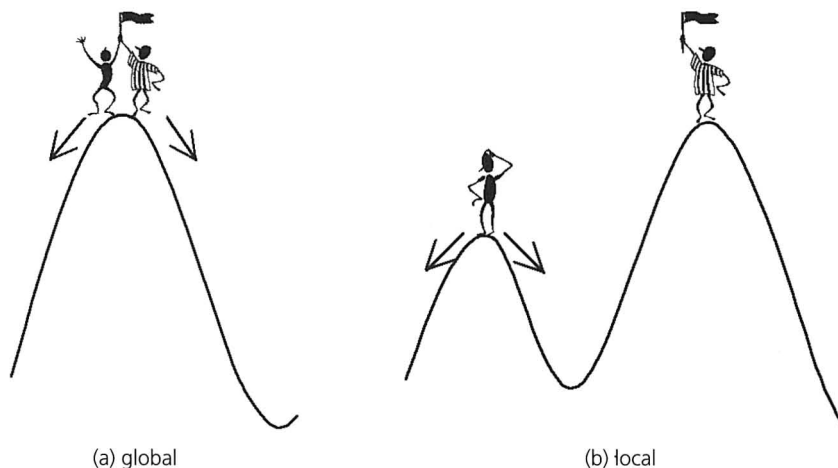


Figura I.1 – Óptimos.

Sem perda de generalidade, assume-se ao longo deste texto que a função objectivo é a MAXIMIZAR, salvo indicação em contrário.

## 2. RESOLUÇÃO GRÁFICA

Para introduzir o processo de resolução de um problema de programação linear, começa por se apresentar o método de resolução gráfica que, em virtude da facilidade das considerações geométricas ser limitada a duas dimensões, é apenas adequado para problemas com duas variáveis de decisão.

### Problema 1 (plano de produção):

Uma pequena oficina fabrica dois produtos diferentes – produto I e produto II. O fabrico destes produtos requer a utilização de 3 tipos diferentes de máquinas – A, B e C. Cada unidade do produto I requer 1h nas máquinas do tipo A, 2h nas máquinas do tipo B e 2h nas máquinas do tipo C. Cada unidade do produto II requer 1h nas máquinas do tipo A, 1h nas máquinas do tipo B e 5h nas máquinas do tipo C. A oficina possui várias máquinas destes 3 tipos que possibilitam uma utilização máxima semanal de 50h nas máquinas do tipo A, 80h nas do tipo B e 220h nas do tipo C. Sabe-se que o lucro de 1 unidade, de cada um dos produtos, é 25 unidades monetárias (u.m.) para o produto I e 20 u.m. para o produto II, respectivamente. Supõe-se que toda a produção é vendida.

Qual deve ser a produção semanal de modo a maximizar o lucro resultante?

*Modelo matemático:* Sejam as variáveis de decisão  $x_1$ , o número de unidades do produto I, e  $x_2$  o número de unidades do produto II, a fabricar semanalmente. As restrições (do tipo ' $\leq$ ') referem-se às disponibilidades de cada tipo de máquina e a função objectivo operacionaliza a medida de desempenho do sistema (maximizar o lucro). O problema formula-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max z &= 25x_1 + 20x_2 && \text{(u.m.)} \\ \text{s.a:} \quad x_1 + x_2 &\leq 50 && \text{(h/semana) - máquinas tipo A} && (1) \\ 2x_1 + x_2 &\leq 80 && \text{(h/semana) - máquinas tipo B} && (2) \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 220 && \text{(h/semana) - máquinas tipo C} && (3) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver graficamente o problema, começa por se representar a região de pontos  $(x_1, x_2)$  que satisfazem todas as restrições – *região admissível* (a sombreado na figura I.2).

Para um valor concreto de  $z$ ,  $z = 25x_1 + 20x_2$  representa uma recta. Se variarmos o valor de  $z$  obtemos rectas paralelas entre si – *rectas de nível da função objectivo* – e perpendiculares ao gradiente da função objectivo (o vector  $\underline{c} = (25, 20)$ ). A solução admissível com maior valor para  $z$  será a *solução óptima*. Como a função objectivo é crescente no sentido do seu gradiente, para encontrar a solução óptima basta traçar uma recta de nível da função objectivo e deslocá-la, no sentido do gradiente, o mais possível dentro da região admissível – ver figura I.2.

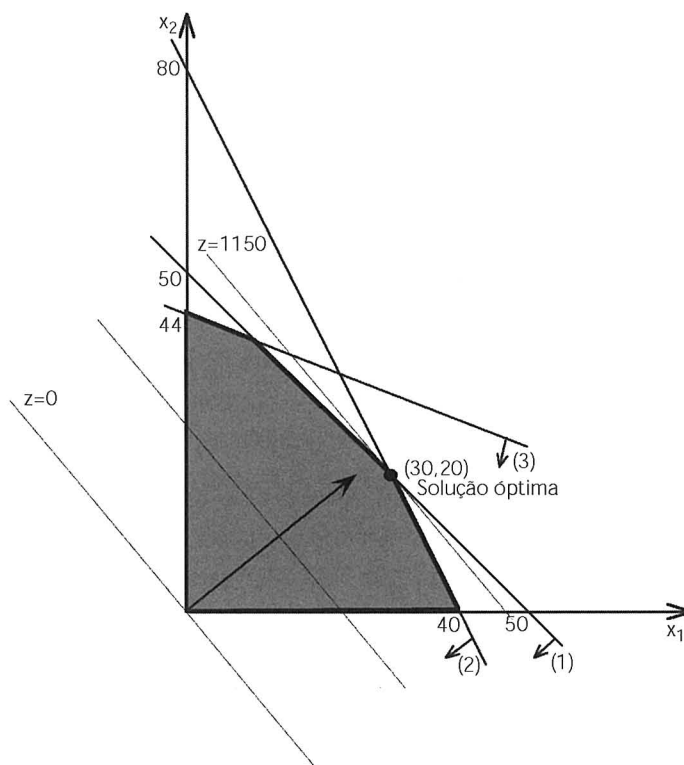


Figura I.2 – Representação gráfica do Problema 1.

A solução óptima deste problema é o ponto de intersecção de  $x_1 + x_2 = 50$  com  $2x_1 + x_2 = 80$ , o que resulta  $x_1^* = 30$ ,  $x_2^* = 20$  e  $z^* = 25 \times 30 + 20 \times 20 = 1150$ .

*Interpretação da solução:* devem produzir-se, semanalmente, 30 unidades do produto I e 20 unidades do produto II, sendo o lucro resultante de 1150 u.m.

Considere-se agora um problema de minimização.



### Problema 2 (dieta):

Uma família pretende definir uma dieta de custo mínimo que satisfaça determinados requisitos em nutrientes. Considerando apenas dois alimentos, I e II, esta família pretende conhecer as quantidades que deve consumir, de cada um deles, de modo a ingerir pelo menos 200 unidades (u.) de vitamina A, 66 u. de vitamina B e 60 u. de vitamina C. Cada 100gr do alimento I possui 5 u. de vitamina A, 3 u. de vitamina B e 1 u. de vitamina C e custa 72 unidades monetárias (u.m.); cada 100gr do alimento II possui 4 u. de vitamina A, 1 u. de vitamina B e 4 u. de vitamina C e custa 35 u.m..

A formulação deste problema é:

$$\min z = 72x_1 + 35x_2 \quad (\text{u.m.})$$

$$\text{s.a:} \quad 5x_1 + 4x_2 \geq 200 \quad (\text{u.}) \quad \text{requisito de vitamina A} \quad (1)$$

$$3x_1 + x_2 \geq 66 \quad (\text{u.}) \quad \text{requisito de vitamina B} \quad (2)$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 60 \quad (\text{u.}) \quad \text{requisito de vitamina C} \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Representa-se graficamente a região admissível (neste caso não limitada) e traça-se uma recta de nível da função objectivo para um valor concreto de  $z$  – figura I.3. Esta recta é deslocada o mais possível dentro da região admissível, no sentido da minimização – sentido contrário ao do gradiente da função objectivo (o vector  $\underline{c} = (72, 35)$ ).

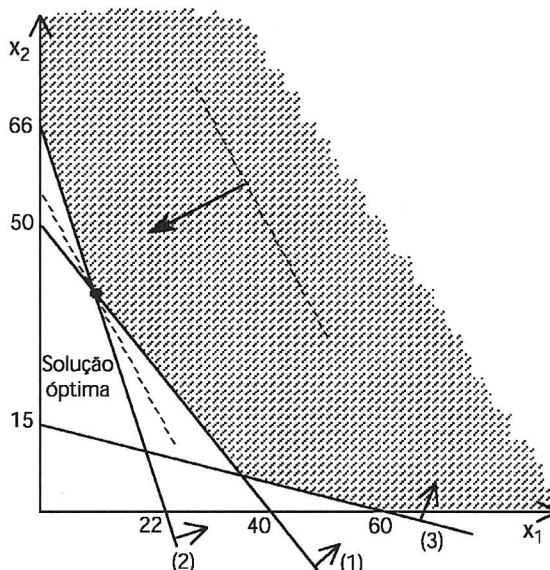


Figura I.3 – Representação gráfica do Problema 2.

A solução óptima é  $x_1^*=9.143$ ,  $x_2^*=38.571$ . Como cada uma das variáveis representa o peso (em unidades de 100gr) de cada um dos alimentos, a dieta de custo mínimo estabelece que devem ser consumidos 914.3gr do alimento I e 3857.1gr do alimento II. O custo mínimo total é  $z^*=72 \times 9.143 + 35 \times 38.571 = 2008.281$  u.m.

#### SOLUÇÕES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS

Nos problemas anteriores, as soluções óptimas são *únicas*. Contudo, podem ocorrer situações em que mais do que uma solução otimiza a função objectivo.

Considere-se que a função objectivo do problema 1 é alterada para  $z=25x_1 + 25x_2$ . Neste caso, todos os pontos sobre a recta  $x_1 + x_2=50$  (correspondente à 1ª restrição) têm valor igual para  $z$  e máximo dentro da região admissível. Repare-se que o declive de  $z=25x_1 + 25x_2$  é igual ao de  $x_1 + x_2=50$ . Assim, todas as soluções sobre a aresta [PQ] – figura I.4 – são soluções *óptimas alternativas*. Observe-se, em particular, os valores das soluções P e Q:

(P)  $x_1=30$  ;  $x_2=20$  ;  $z=1250$

(Q)  $x_1=10$  ;  $x_2=40$  ;  $z=1250$

Como seria de esperar, estas soluções apresentam o mesmo valor para a função objectivo.

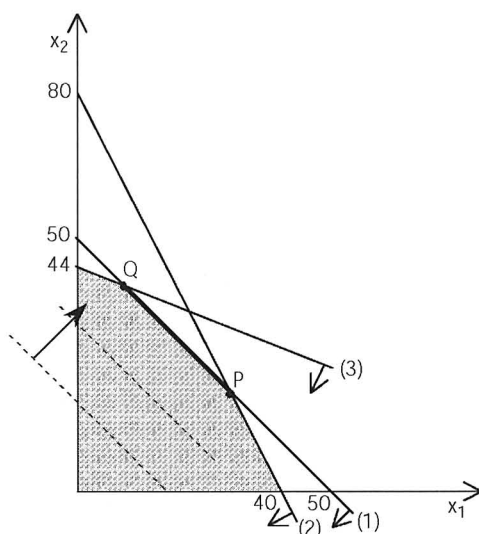


Figura I.4 – Soluções óptimas alternativas na região admissível do problema 1, com  $z=25x_1 + 25x_2$ .

A figura I.5 mostra uma situação de óptimos alternativos para o problema 2, considerando  $z=105x_1 + 35x_2$ .

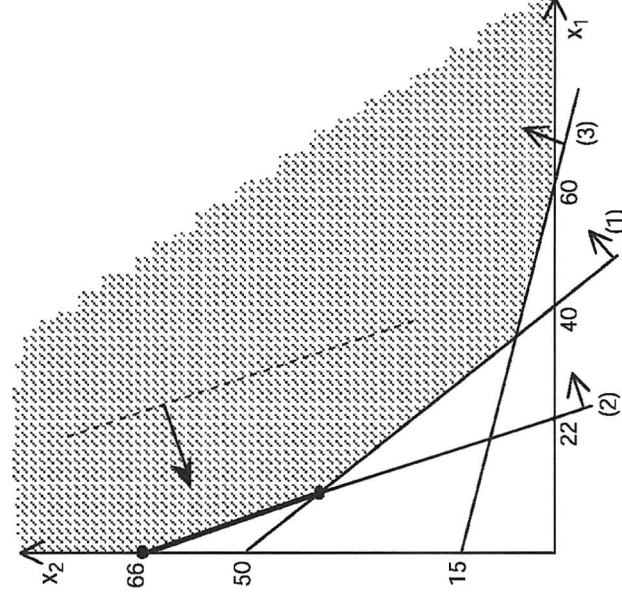


Figura I.5 – Soluções óptimas alternativas na região admissível do problema 2, com  $z=105x_1+35x_2$ .

#### CASOS PARTICULARES

##### (i) SOLUÇÕES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS NUMA ARESTA ILIMITADA

O exemplo seguinte – figura I.6 – mostra uma situação em que há soluções óptimas alternativas cujas variáveis podem tomar valores arbitrariamente elevados, mas o valor óptimo de  $z$  é finito. Repare-se que todos os pontos da semi-recta  $r$ , com início em  $P$ , têm o mesmo valor para  $z$ , e este valor é máximo dentro da região admissível.

No ponto  $P$  obtém-se:  $x_1=1$ ,  $x_2=4$  e  $z=1$ . Em qualquer outro ponto da semi-recta  $r$ , por exemplo em  $x_1=1000$  e  $x_2=2002$ ,  $z$  é igualmente 1. Assim, existem valores infinitamente grandes de  $x_1$  e  $x_2$  para os quais  $z$  continua igual a 1.

$$\begin{aligned} \max z = & -x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.a:} & \quad x_1 + x_2 \geq 5 \quad (1) \\ & \quad -2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2) \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

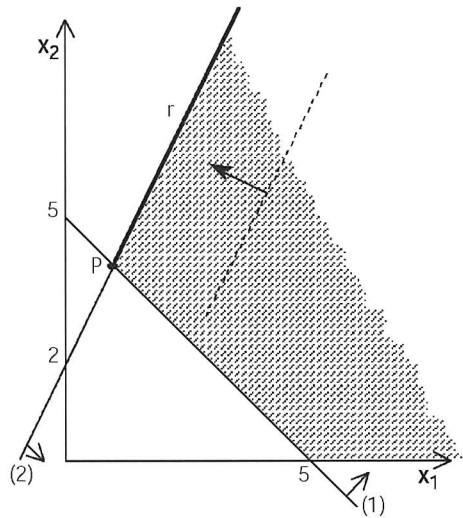


Figura I.6 – Soluções óptimas alternativas numa aresta ilimitada.

(II) SOLUÇÃO ÓPTIMA ILIMITADA

O exemplo seguinte – figura I.7 – mostra uma situação em que a função objectivo pode tomar valores infinitamente grandes dentro da região admissível (que é a mesma do exemplo anterior), não existindo valor óptimo finito para  $z$ .

$$\begin{aligned} \max z = & \quad x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a:} & \quad x_1 + x_2 \geq 5 \quad (1) \\ & \quad -2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2) \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

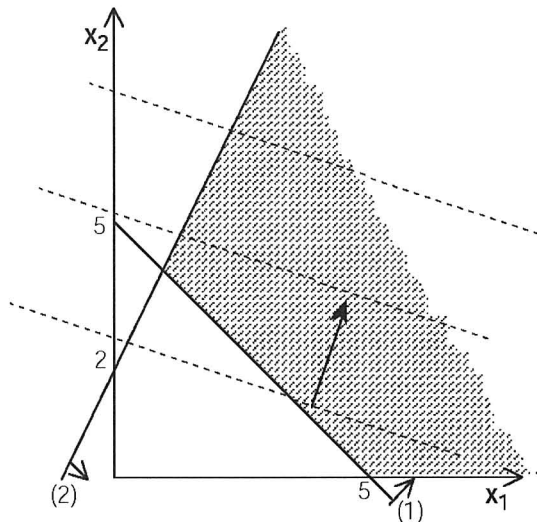


Figura I.7 – Solução óptima ilimitada.

(III) REGIÃO ADMISSÍVEL VAZIA

O exemplo seguinte – figura I.8 – mostra uma situação em que as restrições definem um conjunto vazio, não existindo qualquer solução admissível.

Restrições:

$$x_1 + x_2 \leq 50 \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \geq 80 \quad (2)$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 220 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

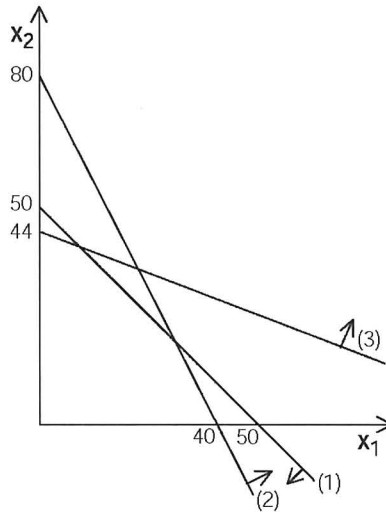


Figura I.8 – Região admissível vazia.

### 3. FORMA PADRÃO E VARIÁVEIS DESVIO

Qualquer problema de PL pode ser escrito de forma equivalente, com todas as restrições convertidas em igualdades e com termos independentes ( $b_i$ ) não negativos. Para tal, começa por se transformar cada restrição com  $b_i < 0$  numa equivalente com  $b_i \geq 0$ , através da multiplicação de ambos os membros por  $(-1)$ , e da troca do sentido da desigualdade, quer seja do tipo ' $\leq$ ', ou do tipo ' $\geq$ '. Todas as restrições do tipo ' $\leq$ ' ou ' $\geq$ ' são depois convertidas no tipo ' $=$ ', acrescentando-se uma *variável desvio* a cada restrição:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i, \quad \text{com } s_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i, \quad \text{com } s_i \geq 0$$

As variáveis desvio associadas a restrições do tipo ' $\leq$ ' designam-se frequentemente por *slacks* (folga), enquanto que as que estão associadas a restrições do tipo ' $\geq$ ' se designam por *surplus*. As variáveis de decisão  $x_j$  são muitas vezes chamadas de *variáveis principais* do problema.

Este processo de transformação do problema designa-se habitualmente por redução à forma *padrão* ou redução à forma *standard*.

A formulação do problema 1, na forma padrão, é a seguinte:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 25x_1 + 20x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + s_1 && = 50 \\ & 2x_1 + x_2 &+ s_2 &= 80 \\ & 2x_1 + 5x_2 && + s_3 = 220 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

As *slacks*  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  representam o número de horas não utilizadas semanalmente em máquinas do tipo A, B e C, respectivamente. No plano de produção óptimo,  $x_1^*=30$  e  $x_2^*=20$ ,  $s_1^*=0$ ,  $s_2^*=0$  e  $s_3^*=60$ , o que significa que são esgotadas as horas disponíveis nas máquinas A e B e sobram 60h nas máquinas C.

#### 4. O MÉTODO SIMPLEX

##### INTRODUÇÃO AO MÉTODO ATRAVÉS DE UM PROBLEMA PARTICULAR

Na forma padrão, o problema 1 apresenta um conjunto de restrições formado por um sistema de 3 equações com 5 incógnitas ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ ), acrescido das restrições de não-negatividade.

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \underline{c} \cdot \underline{x} \\ \text{s.a:} \quad A\underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

$$\text{com } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 220 \end{bmatrix}, \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \text{ e } \underline{c} = [25 \ 20 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Se se atribuírem valores não negativos às variáveis de decisão, o sistema de equações passa a ser determinado. A sua resolução conduz a uma solução que será admissível se os valores resultantes para  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  forem não negativos, ou não admissível, se surgir algum valor negativo.

Em particular, se  $x_1=x_2=0$  (ou seja, se nada for produzido dos produtos I e II), obtém-se uma solução admissível em que  $s_1=50$ ,  $s_2=80$  e  $s_3=220$  (ou seja, a quantidade não usada de cada recurso é igual à respectiva disponibilidade). Soluções com estas características, em que se atribuiu 0 a algumas variáveis para tornar o sistema determinado, designam-se por *soluções básicas*. As variáveis a que é atribuído um valor nulo chamam-se *variáveis não básicas*. As outras variáveis, em ordem às quais o sistema de equações é resolvido, chamam-se *variáveis básicas*. Se da resolução do sistema resultarem valores não negativos para todas as variáveis básicas, então a solução é *básica admissível*.

Contudo, não se pretende obter uma solução admissível qualquer, mas aquela que garante o melhor valor para o indicador de desempenho do sistema (função objectivo), neste caso a maximização do lucro. Em PL, quando o óptimo existe e é finito, ele é atingido em pelo menos uma solução básica admissível. Ou seja, se a solução óptima for única, ela é certamente básica e, no caso de haver mais do que uma solução óptima, há pelo menos uma que é básica. Sendo assim, o método simplex opera apenas com soluções básicas, garantindo que, se o óptimo existir, ele é atingido.

A solução básica admissível actual, que corresponde a um lucro 0, é representada no espaço das variáveis de decisão pelo ponto O da figura I.9 (origem do espaço das variáveis de decisão, onde  $x_1=x_2=0$ ).

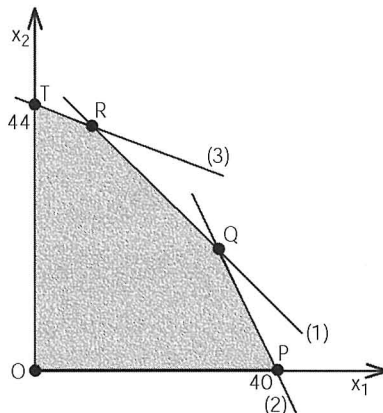


Figura I.9 – Região admissível do problema 1.

Tendo em atenção a função objectivo, observa-se que, por cada unidade produzida do produto I (II), o valor de  $z$  melhora de 25 (20). Se se escolher produzir o produto I, porque é o mais vantajoso para o lucro por unidade produzida, a variável  $x_1$  tornar-se-á estritamente positiva. O limite para o aumento de  $x_1$  está condicionado pela manutenção da admissibilidade da solução. Aumentando  $x_1$ , ou seja efectuando um deslocamento a partir de O ao longo do eixo  $0x_1$ , observa-se que  $x_1$  está limitado pelo valor de 40 (ponto P). Note-se que ao aumentar  $x_1$  mantendo  $x_2=0$ , as variáveis desvio  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  devem diminuir para continuar a satisfazer o sistema. Mas esta diminuição das variáveis básicas é feita com ritmos diferentes: por cada unidade que  $x_1$  aumente,  $s_1$  diminui de 1,  $s_2$  diminui de 2 e  $s_3$  diminui de 2. Estas *taxas de variação* das variáveis básicas são dadas pelos coeficientes de  $x_1$  em cada restrição, isto é, o vector coluna  $A_{\bullet 1}$ . Repare-se que a produção de uma unidade do produto I requer 1 hora em máquinas do tipo A, 2h em máquinas do tipo B e 2h em máquinas do tipo C. No plano actual, toda a disponibilidade de cada uma destas máquinas está atribuída à respectiva variável desvio  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  (que representam as horas não utilizadas em cada tipo de máquina). Então, para activar unitariamente a produção do produto I, é necessário retirar a  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ , respectivamente 1h, 2h e 2h. Quando  $x_1$  atinge o valor 40,  $s_2$  atinge zero e  $x_1$  não pode aumentar mais, porque, caso contrário,  $s_2$  tornar-se-ia negativa. Esta situação corresponderia na figura I.9 a progredir para além do ponto P.

Resumindo, escolhe-se para se tornar básica aquela variável que apresenta o maior aumento da função objectivo por unidade da variável. No entanto, o aumento desta variável é limitado pela manutenção da admissibilidade da solução.

Analicamente, como  $x_2=0$ ,

$$\begin{aligned} s_1 &= 50 - x_1 \\ s_2 &= 80 - 2x_1 \\ s_3 &= 220 - 2x_1 \end{aligned}$$

Como as variáveis desvio  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  devem permanecer não negativas:

$$\begin{aligned} s_1: & \begin{cases} 50 - x_1 \geq 0 \\ 80 - 2x_1 \geq 0 \\ 220 - 2x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 50 \\ x_1 \leq 40 \\ x_1 \leq 110 \end{cases} \\ s_2: & \\ s_3: & \end{aligned}$$



O maior valor de  $x_1$  que garante a manutenção da admissibilidade da solução é  $x_1=40$ , ou seja, o menor dos quocientes  $\{50/1, 80/2, 220/2\}$ .

Com  $x_1=40$ , a nova solução será  $x_1=40, x_2=0, s_1=10, s_2=0$  e  $s_3=140$ , e o valor do lucro é  $z=1000$ . Esta solução básica admissível é representada graficamente pelo ponto P (figura I.10). A variável  $s_2$ , anteriormente básica, tornou-se não básica (assumindo o valor zero) para dar lugar a  $x_1$ . Graficamente, é fácil verificar (figura I.10) que, no ponto P, as variáveis básicas são  $x_1$  (que tem valor estritamente positivo),  $s_1$  e  $s_3$  (que têm também um valor estritamente positivo, porque as restrições respectivas não estão *activas*, isto é, não são satisfeitas como igualdades), e as variáveis não básicas são  $x_2$  (com valor nulo) e  $s_2$  (também com valor nulo, porque a restrição respectiva é satisfeita como igualdade).

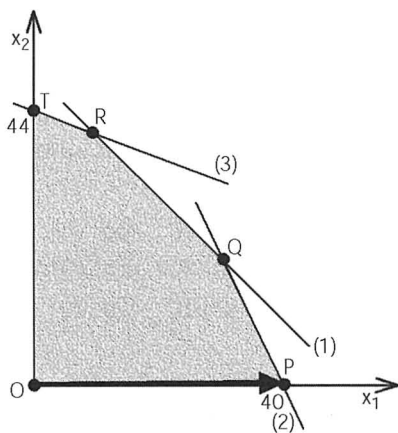


Figura I.10 – Primeira iteração da aplicação do método simplex ao problema 1.

O sistema de equações do problema,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 &= 50 \text{ (Eq1)} && \text{[Sistema original]} \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 80 \text{ (Eq2)} \\ 2x_1 + 5x_2 + s_3 &= 220 \text{ (Eq3)} \end{aligned}$$

pode ser reescrito, de forma equivalente, de tal modo que cada variável básica ( $s_1, x_1$  e  $s_3$ ) seja eliminada de todas as equações, excepto duma. Desta forma,

devem manter-se os vectores unitários  $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  para  $s_1$  e  $\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  para  $s_3$

e, para a variável  $x_1$  que substituiu  $s_2$ , o vector deve ser  $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Para que  $x_1$

fique com coeficiente 1 na 2ª equação, deve dividir-se esta equação por  $a_{21}=2$ , ficando  $x_1 + 1/2 x_2 + 1/2 s_2=40$  ( $Eq'2$ ). Agora, para eliminar  $x_1$  da 1ª equação ( $Eq1$ ), sem afectar o coeficiente 1 de  $s_1$  e 0 de  $s_3$ , deve substituir-se esta equação por  $Eq1-Eq'2$ . Analogamente, para eliminar  $x_1$  da 3ª equação ( $Eq3$ ), sem alterar o coeficiente 0 de  $s_1$  e 1 de  $s_3$ , deve substituir-se esta equação por  $Eq3-2Eq'2$ .

Em resumo, devem fazer-se as seguintes operações:

$$Eq'2 \leftarrow \frac{1}{a_{21}} Eq2, \quad Eq'1 \leftarrow Eq1 - a_{11}Eq'2, \quad Eq'3 \leftarrow Eq3 - a_{31}Eq'2,$$

onde  $a_{11}=1$ ,  $a_{21}=2$  e  $a_{31}=2$ .

A  $Eq2$  é a *linha pivot* (linha da variável que se torna não básica) e  $a_{21}$  é o *elemento pivot* (elemento no cruzamento da linha *pivot* com a coluna *pivot*, coluna da variável que se torna básica).

O sistema original é, então, equivalente ao seguinte sistema, em que a matriz A deu lugar a outra que se designa por  $A'$ , e o vector b deu lugar a  $b'$ :

$$\begin{array}{rclcl} 1/2 x_2 + s_1 - 1/2 s_2 & = & 10 & (Eq' 1) & [Sistema 1] \\ x_1 + 1/2 x_2 + 1/2 s_2 & = & 40 & (Eq' 2) & \\ 4x_2 - s_2 + s_3 & = & 140 & (Eq' 3) & \end{array}$$

Como as variáveis  $x_2$  e  $s_2$  são nulas na solução actual (são não básicas), este sistema evidencia os valores das variáveis básicas que são os termos independentes das equações (tal como acontecia no sistema original para as variáveis básicas iniciais):

$$s_1=10, \quad x_1=40, \quad s_3=140$$

O valor do lucro é 1000 u.m., dado por  $z = \underset{\text{coef. } s_1}{0} \times 10 + \underset{\text{coef. } x_1}{25} \times 40 + \underset{\text{coef. } s_3}{0} \times 140$ .

32

Para calcular z basta considerar as variáveis básicas, visto que as outras são nulas.

Há agora que avaliar se a função objectivo ainda pode ser melhorada. Observando a expressão da função objectivo ( $z=25x_1+20x_2$ ), verifica-se que, se o produto II passar a ser produzido, ele oferecerá um lucro de 20 u.m. por unidade produzida. Contudo, não é este o ganho líquido que se verifica na função objectivo porque, para que o produto II passe a ser produzido, é necessário diminuir o valor das actuais variáveis básicas (de modo a que o

sistema de equações continue a ser satisfeito), em particular o valor de  $x_1$ , que tem uma contribuição positiva para o lucro na solução actual.

Aumentar  $x_2$ , mantendo  $s_2=0$ , corresponde a um deslocamento a partir do ponto P ao longo do segmento [PQ]. Outro deslocamento possível a partir do ponto P seria manter  $x_2=0$  e aumentar  $s_2$ . Contudo, este deslocamento (ao longo de [PO]) é o inverso do último efectuado e, como é natural, piora a função objectivo.

Observe-se então o [Sistema 1] com  $s_2=0$ :

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} x_2 + s_1 & = & 10 \\ x_1 + \frac{1}{2} x_2 & = & 40 \\ 4x_2 + s_3 & = & 140 \end{array}$$

Aumentar uma unidade em  $x_2$  requer a diminuição de  $\frac{1}{2}$  em  $s_1$ ,  $\frac{1}{2}$  em  $x_1$  e 4 em  $s_3$ , para continuar a satisfazer o sistema. A diminuição em  $s_1$  e  $s_3$  não afecta o lucro porque estas variáveis têm uma contribuição nula para o lucro, mas a diminuição de  $\frac{1}{2}$  em  $x_1$  acarreta uma perda de  $\frac{1}{2} \times 25 = 12.5$  no valor de  $z$ . Este valor, que se designa por  $z_2$ , chama-se *custo de oportunidade* da activação unitária de  $x_2$ . Desta forma, o aumento de uma unidade em  $x_2$  conduz a um ganho líquido de  $c_2 - z_2 = 20 - 12.5 = 7.5$  em  $z$ . Isto permite concluir que a solução actual não é óptima, visto que o lucro pode ser aumentado por  $x_2$  se tornar básica.

O aumento de  $x_2$  está condicionado pela manutenção da admissibilidade da solução. As taxas de variação das actuais variáveis básicas  $x_1$ ,  $s_1$  e  $s_3$  são dadas pelos coeficientes de  $x_2$  nas equações do [Sistema 1], ou seja, o vector coluna  $A'_{\cdot 2}$ .

Considerando  $s_2=0$ ,

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & 10 - \frac{1}{2} x_2 \\ x_1 & = & 40 - \frac{1}{2} x_2 \\ s_3 & = & 140 - 4x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} s_1: \\ x_1: \\ s_3: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 10 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \\ 40 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \\ 140 - 4x_2 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq 80 \\ x_2 \leq 35 \end{array} \right.$$

O maior valor de  $x_2$  que garante a admissibilidade é 20, ou seja o menor quociente de  $\left\{ \frac{10}{\frac{1}{2}}, \frac{40}{\frac{1}{2}}, \frac{140}{4} \right\}$ . Com  $x_2=20$ , a nova solução será  $x_1=30$ ,  $x_2=20$ ,

$s_1=0, s_2=0, s_3=60$  e  $z=25 \times 30 + 20 \times 20 + 0 \times 60 = 1150$ . De facto, o lucro anterior era 1000 e já se sabia que iria aumentar de uma quantidade dada por  $(c_2 - z_2)x_2 = 7.5 \times 20 = 150$ .

Em resumo: a variável  $x_2$  tornou-se básica porque permitiu aumentar o lucro – a sua escolha é ditada pela intenção de atingir a optimalidade; o maior valor possível para  $x_2$  é 20, reduzindo a zero a variável  $s_1$ , que se torna não básica; o valor de  $x_2$  é definido pelas condições de admissibilidade. Graficamente, esta solução é representada pelo ponto Q (figura I.11).

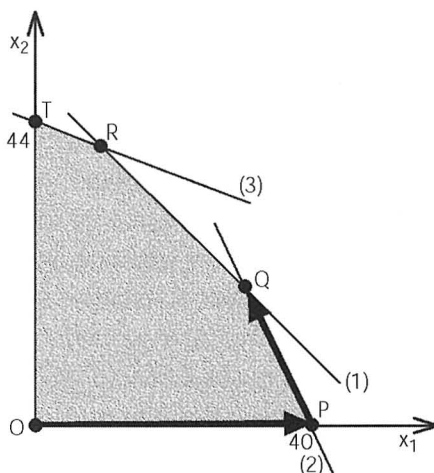


Figura I.11 – Duas iterações do método simplex aplicado ao problema 1.

O sistema de equações [Sistema 1] pode ser reformulado de modo a que, mantendo os vectores unitários  $\underline{e}_2$  e  $\underline{e}_3$  para  $x_1$  e  $s_3$ , respectivamente, apresente o vector unitário  $\underline{e}_1$  como coluna da nova variável básica,  $x_2$ . A linha *pivot* é a primeira e o elemento *pivot* é o coeficiente de  $x_2$  na 1ª equação, ou seja  $1/2$ . Então, fazendo as operações adequadas a partir do [Sistema 1], obtém-se o [Sistema 2]:

34

$$\begin{array}{rcll}
 x_2 & + 2s_1 - s_2 & = 20 & \text{[Sistema 2]} \\
 x_1 & - s_1 + s_2 & = 30 & \\
 & -8s_1 + 3s_2 + s_3 & = 60 & 
 \end{array}$$

Mais uma vez, com o sistema nesta forma, os termos independentes das equações são os valores das variáveis básicas ( $x_2, x_1$  e  $s_3$ ), porque as variáveis não básicas ( $s_1$  e  $s_2$ ) são nulas.

Para testar se esta solução é ou não óptima, há que avaliar novamente se a função objectivo pode ser melhorada. Como se pode constatar, este processo de cálculo é *iterativo*, repetindo-se um conjunto de passos de iteração para iteração.

As variáveis não básicas são agora  $s_1$  e  $s_2$ . Aumentar  $s_1$  de uma unidade, mantendo  $s_2=0$ , requer que  $x_2$ ,  $x_1$  e  $s_3$  diminuam de 2, -1 e -8, respectivamente. O custo de oportunidade de activar unitariamente  $s_1$  é  $z_3=20 \times 2 + 25(-1) + 0(-8) = 15$  e  $c_3 - z_3 = 0 - 15 = -15$ , o que significa que o lucro diminuiria de 15 por cada unidade que se aumentasse em  $s_1$ . Conclui-se, então, que não compensa tornar  $s_1$  básica, o que corresponderia a um deslocamento a partir de Q em direcção a P, precisamente o movimento inverso do último efectuado.

Por outro lado, aumentar  $s_2$  mantendo  $s_1=0$ , ou seja, efectuar um deslocamento de Q em direcção a R, requer que  $x_2$ ,  $x_1$  e  $s_3$  diminuam de -1, 1 e 3, respectivamente, por cada unidade de  $s_2$ . O custo de oportunidade é  $z_4 = 20 \times (-1) + 25 \times 1 + 0 \times 3 = 5$  e  $c_4 - z_4 = 0 - 5 = -5$ , o que significa que também não compensa tornar  $s_2$  básica.

Como qualquer deslocamento para *soluções básicas adjacentes* (que diferem apenas numa variável básica) piora o valor da função objectivo, então a solução actual é *óptima*.

Todo o processo de cálculo descrito atrás pode ser apresentado na forma tabular, onde  $\underline{x}_B$  designa o vector (3x1) das variáveis básicas e  $\underline{c}_B^T$  o vector (3x1) dos coeficientes  $c_j$  das variáveis básicas. Este método chama-se *método simplex*.

1ª solução básica [sistema original]:

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	25	20	0	0	0	$\underline{b}$
0	$s_1$	1	1	1	0	0	50
0	$s_2$	2	1	0	1	0	80 →
0	$s_3$	2	5	0	0	1	220
	$z_j$	0	0	0	0	0	$z=0$
	$c_j - z_j$	25	20	0	0	0	
		↑					

$x_1$  torna-se básica porque corresponde ao  $\max\{c_j - z_j | c_j - z_j > 0\}$ ;  
 $s_2$  torna-se não básica porque corresponde ao  $\min\left\{\frac{50}{1}, \frac{80}{2}, \frac{220}{2}\right\}$ .

2ª solução básica [sistema 1]:

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	25	20	0	0	0	$\underline{b}'$
0	$s_1$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	10 →
25	$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	40
0	$s_3$	0	4	0	-1	1	140
	$z_j$	25	12.5	0	12.5	0	$z=1000$
	$c_j - z_j$	0	7.5	0	-12.5	0	

$x_2$  torna-se variável básica;

$s_1$  torna-se variável não básica (  $\min \left\{ \frac{10}{1/2}, \frac{40}{1/2}, \frac{140}{4} \right\}$  ).

3ª solução básica [sistema 2]:

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	25	20	0	0	0	$\underline{b}''$
20	$x_2$	0	1	2	-1	0	20
25	$x_1$	1	0	-1	1	0	30
0	$s_3$	0	0	-8	3	1	60
	$z_j$	25	20	15	5	0	$z=1150$
	$c_j - z_j$	0	0	-15	-5	0	

A solução é ótima porque todos os  $c_j - z_j \leq 0$ .

A solução ótima é  $x_1^*=30$ ,  $x_2^*=20$ ,  $s_1^*=0$ ,  $s_2^*=0$ ,  $s_3^*=60$  e  $z^*=1150$ .

Na forma acima utilizada, cada *quadro simplex* apresenta, nas primeiras colunas, os coeficientes da função objectivo correspondentes às variáveis básicas ( $\underline{c}_B^T$ ) e as variáveis básicas ( $\underline{x}_B$ ); os elementos de cada linha são os coeficientes das equações, escritas de modo a que a coluna da variável básica associada à linha  $i$  seja o vector unitário  $\underline{e}_i$ . Consequentemente, os termos independentes das equações (última coluna do quadro) representam os valores das variáveis básicas. Os valores das variáveis não básicas não figuram explicitamente no quadro porque são sempre 0.

As duas últimas linhas referem-se aos custos de oportunidade, ( $z_j$ ), e aos valores dos ( $c_j - z_j$ ). Esta última linha permite avaliar se a solução é ótima e, se não for, determinar qual a variável que se deve tornar básica.

É também frequente usar-se  $z_j - c_j$  em vez de  $c_j - z_j$ . Nesse caso, os valores devem interpretar-se de forma simétrica da anterior. Por razões de maior simplicidade na exposição de conceitos que surgirão mais adiante, passa-se a considerar  $z_j - c_j$  em vez de  $c_j - z_j$ .

#### GENERALIZAÇÃO

Seja um problema de PL escrito na forma padrão com  $n$  variáveis (incluindo as variáveis de decisão e as desvio) e  $m$  restrições funcionais:

$$\begin{aligned} \max \quad & \underline{c} \cdot \underline{x} \\ \text{s.a:} \quad & A\underline{x} = \underline{b} \quad (\underline{b} \geq \underline{0}) \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

O método simplex opera do seguinte modo:

- determina uma solução básica admissível inicial;
- enquanto a solução actual não for óptima:
  - selecciona a variável não básica que se tornará básica;
  - determina a variável básica que se tornará não básica;
  - actualiza o quadro simplex usando a eliminação de Gauss.

O quadro simplex correspondente a uma iteração representa um sistema de equações,  $A'\underline{x} = \underline{b}'$ , equivalente ao sistema original  $A\underline{x} = \underline{b}$ . Em particular, se o problema original tiver apenas restrições do tipo ' $\leq$ ' (em que as variáveis desvio adicionadas na passagem à forma padrão são *slacks*), o quadro inicial representa o sistema original  $A\underline{x} = \underline{b}$ .

Cada linha  $i \in \{1, \dots, m\}$  dum quadro simplex é uma equação do seguinte tipo:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in N} a'_{ij} x_j = b'_i \quad i=1, \dots, m$$

em que  $N$  é o conjunto dos índices das variáveis não básicas da solução actual e  $x_{B_i}$  a variável básica da linha  $i$ . Como as variáveis não básicas são nulas, então  $x_{B_i} = b'_i$ ,  $i=1, \dots, m$ , valores estes que figuram na última coluna do quadro.

Designando por  $\underline{c}_B$  o vector dos coeficientes da função objectivo correspondentes às variáveis básicas  $\underline{x}_B$ , o valor da função objectivo é dado por  $z = \underline{c}_B \underline{x}_B = \underline{c}_B \underline{b}'$ . O custo de oportunidade de  $x_j$  é  $z_j = \underline{c}_B A'_{\cdot j}$ .

Quadro I.1– Esquema de um quadro simplex

		$\underline{c}$	
		$\underline{x}$	
$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$A'$	$\underline{b}'$
	$z_j$	$\underline{c}_B A'$	$\underline{c}_B \underline{b}'$
	$z_j - c_j$	$\underline{c}_B A' - \underline{c}$	

*Condição de optimalidade*

Uma solução básica admissível é óptima se  $z_j - c_j \geq 0$  para todo o  $j=1, \dots, n$ .

Caso contrário, a variável não básica seleccionada para se tornar básica é aquela que oferece o maior ganho líquido na função objectivo, por unidade dessa variável. O ganho líquido unitário é dado pela diferença entre o rendimento directo ( $c_j$ ) e o respectivo custo de oportunidade ( $z_j$ ). Ou seja, torna-se básica a variável  $x_p$  em que  $c_p - z_p = \max_{j \in N} \{c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0\}$ , ou seja  $z_p - c_p = \min_{j \in N} \{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\}$ .

A variável  $x_p$  passará de 0 (isto é, não básica) ao maior valor possível que mantém a admissibilidade, mantendo-se nulas as outras variáveis não básicas. Com todas as outras variáveis não básicas ( $x_j: j \in N \setminus \{p\}$ ) nulas, as equações do sistema reduzem-se a:

$$x_{B_i} + a'_{ip} x_p = b'_i \quad i=1, \dots, m$$

A admissibilidade mantém-se se  $x_{B_i} = b'_i - a'_{ip} x_p \geq 0$  para todo o  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Os valores  $a'_{ip} \leq 0$  não condicionam a admissibilidade porque, usando-os como *pivot*, os elementos de  $\underline{x}_B$  nunca se tornam negativos. Ou seja, o maior valor que pode assumir a variável que se torna básica não é superiormente limitado, uma vez que, sendo  $a'_{ip} \leq 0$ , os valores das variáveis  $x_{B_i}$  não se modificam na direcção da não admissibilidade. Note-se que o mesmo não acontece com os  $a'_{ip} > 0$ . Pode, então, estabelecer-se a seguinte *condição de admissibilidade*:

O valor máximo de  $x_p$  é dado por:

$$\frac{b'_r}{a'_{rp}} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{b'_i}{a'_{ip}} \mid a'_{ip} > 0 \right\}$$



Sendo  $b'_r/a'_{rp}$  o menor quociente, a variável  $x_{B_r}$  (variável básica da linha  $r$ ) irá diminuir até zero. É, então, esta a variável que se torna não básica, dando lugar a  $x_p$ . Para fazer esta substituição, é necessário actualizar o quadro através de operações de eliminação de Gauss.

O actual sistema de equações  $A'x=b'$  é substituído por outro equivalente  $A''x=b''$ . A  $p$ ésima coluna ( $A'_{\bullet p}$ ) é a coluna *pivot* porque  $x_p$  é a variável que se torna básica, a  $r$ ésima linha ( $A'_{r\bullet}$ ) é a linha *pivot* porque  $x_{B_r}$  é a variável que se torna não básica, e  $a'_{rp}$  é o elemento *pivot*. Para actualizar o sistema de equações procede-se do seguinte modo:

actualização da linha *pivot*  $r$ :  $A''_{r\bullet} = \frac{1}{a'_{rp}} A'_{r\bullet}$        $b''_r = \frac{b'_r}{a'_{rp}}$

actualização das outras linhas  $i \neq r$ :  $A''_{i\bullet} = A'_{i\bullet} - a'_{ip} A''_{r\bullet}$        $b''_i = b'_i - a'_{ip} b''_r$

#### A MATRIZ DA BASE "B"

Cada quadro simplex apresenta uma solução básica que está associada a uma base. O vector  $\underline{x}_B$  é o vector das variáveis básicas, e  $B$  é a matriz da base, que é formada pelas colunas de  $A$  correspondentes às variáveis  $\underline{x}_B$ . A matriz  $A$  pode então ser decomposta em duas sub-matrizes,  $A=[NB]$ , em que  $N$  é constituída pelas colunas de  $A$  correspondentes às variáveis não básicas (em  $\underline{x}_N$ ). O sistema de equações original  $Ax=b$  pode escrever-se como:

$$\begin{aligned} [N|B] \begin{bmatrix} \underline{x}_N \\ \underline{x}_B \end{bmatrix} = \underline{b} & \Leftrightarrow N\underline{x}_N + B\underline{x}_B = \underline{b} \\ & \Leftrightarrow B^{-1}N\underline{x}_N + I\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} \quad (\text{porque } B \text{ é não-singular}) \end{aligned}$$

É esta a configuração do sistema de equações de um quadro simplex, anteriormente designado de forma genérica por  $A'x=b'$ . As colunas de  $A'$  correspondentes a  $\underline{x}_B$  formam a matriz identidade  $I$ , as outras colunas, correspondentes a  $\underline{x}_N$ , são  $B^{-1}N$ , e  $\underline{b}'=B^{-1}\underline{b}$ . Assim, conhecida uma base admissível de matriz  $B$ , pode construir-se directamente o quadro simplex que lhe está associado. O sistema de equações que deve figurar no quadro é  $B^{-1}(Ax)=B^{-1}(b)$ , em que  $B^{-1}$  é a inversa da matriz da base  $B$ . O esquema do quadro simplex no Quadro I.1 é equivalente ao apresentado no Quadro I.2.

Os valores das variáveis básicas são dados por  $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$  e o valor da função objectivo é  $z = \underline{c}_B B^{-1}\underline{b}$ .

Quadro I.2 – Esquema do quadro simplex associado a uma base B.

		$\underline{c}$			$\underline{c}_N$	$\underline{c}_B$			
		$\underline{x}$			$\underline{x}_N$	$\underline{x}_B$			
$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$B^{-1}A$	$B^{-1}\underline{b}$	$\Leftrightarrow$	$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$B^{-1}N$	$I$	$B^{-1}\underline{b}$
$z_j$		$\underline{c}_B B^{-1}A$	$\underline{c}_B B^{-1}\underline{b}$		$z_j$		$\underline{c}_B B^{-1}N$	$\underline{c}_B$	$\underline{c}_B B^{-1}\underline{b}$
$z_j - c_j$		$\underline{c}_B B^{-1}A - \underline{c}$			$z_j - c_j$		$\underline{c}_B B^{-1}N - \underline{c}_N$	$\underline{0}$	

Note-se que, se todas as restrições forem do tipo ' $\leq$ ', o primeiro quadro simplex refere-se ao sistema original na forma padrão,  $A\underline{x} = \underline{b}$ . Como a matriz da base inicial é a matriz identidade I, que corresponde às variáveis desvio das restrições (*slacks*), então  $B^{-1}A\underline{x} = B^{-1}\underline{b} \Leftrightarrow I\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{b}$ , o que significa que  $A\underline{x} = \underline{b}$  figura no quadro inicial. Assim, para esta base, a decomposição  $A = [N|B]$  é  $A = [A|I]$ , onde "A" designa a sub-matriz de "A" formada pelas colunas das variáveis de decisão (variáveis não básicas no quadro inicial). O esquema do Quadro I.2, associado a uma base genérica de matriz B, representa o estado do quadro simplex após uma qualquer iteração genérica, e pode ser apresentado para a partição de colunas de  $A = [A|I]$  (isto é, colunas das variáveis de decisão e colunas das *slacks*). É o que se apresenta no Quadro I.3.

Quadro I.3 – Esquema de um quadro simplex associado a uma base B de um problema em que todas as restrições são do tipo ' $\leq$ '.

		$\underline{c}_A$	$\underline{0}$		
		variáveis de decisão	slacks		
$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$B^{-1}A$	$B^{-1}$	$B^{-1}\underline{b}$	
$z_j$		$\underline{c}_B B^{-1}A$	$\underline{c}_B B^{-1}$	$\underline{c}_B B^{-1}\underline{b}$	
$z_j - c_j$		$\underline{c}_B B^{-1}A - \underline{c}_A$	$\underline{c}_B B^{-1}$		

Veja-se, no parágrafo seguinte, o quadro correspondente ao Quadro I.3 para problemas com restrições do tipo ' $\geq$ ' e/ou ' $=$ '.

Nota: Nesta secção foi usada a notação de " $A$ " e " $c$ " para a forma padrão, e de " $A$ " e " $c_A$ " para a forma original do problema de PL. O vector " $c$ " difere de " $c_A$ " por incluir coeficientes nulos para as variáveis desvio. Por questões de simplicidade de notação, e sempre que não houver ambiguidade, a notação de " $A$ " e " $c$ " será usada para a formulação original (como, aliás, já aconteceu no início deste capítulo).

#### MÉTODO DOS M'S E DAS DUAS FASES

Como foi visto anteriormente, em qualquer quadro simplex está presente uma matriz identidade. No caso em que o problema tem apenas restrições do tipo ' $\leq$ ', a matriz identidade inicial é assegurada pelas colunas das variáveis desvio das restrições (*slacks*). Contudo, se existir alguma restrição do tipo ' $\geq$ ', a sua transformação em igualdade requer uma variável desvio (*surplus*) com coeficiente  $-1$ , que não contribui com uma coluna para a matriz identidade. Esta questão coloca-se de igual modo para as restrições que são originalmente do tipo ' $=$ ', em que não são necessárias variáveis desvio (qualquer variável desvio teria que ser necessariamente nula para satisfazer a igualdade). Para que o método simplex possa operar de modo semelhante ao anteriormente descrito, é necessário acrescentar novas variáveis às restrições do tipo ' $\geq$ ' ou ' $=$ '. A cada uma destas restrições é acrescentada uma nova variável com coeficiente 1, contribuindo assim com a coluna requerida para ser incluída na matriz identidade. Estas variáveis não têm qualquer significado físico ou económico para o problema, pelo que se designam habitualmente por variáveis **artificiais**. Elas são incluídas com a única intenção de permitir obter, de forma fácil, uma solução básica inicial. As variáveis artificiais são inicialmente básicas, definindo uma solução, em geral *não admissível* para o problema original. Estas variáveis não podem ter valor positivo em nenhuma solução admissível do problema, em particular na solução óptima. Para assegurar que assim seja, elas são penalizadas ao nível da função objectivo. Em funções a maximizar, é-lhes atribuído um coeficiente negativo de valor absoluto arbitrariamente elevado. Geralmente não se quantifica este coeficiente, designando-o por  **$-M$** .

Este tratamento das variáveis artificiais é vulgarmente designado pelo **método dos M's**. Para ilustrar o seu funcionamento, considere-se o seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 80 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 = 150 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

O problema escrito na forma padrão tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 80 \\ & x_1 + 2x_2 - s_2 = 40 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 = 150 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver o problema usando o simplex é necessário acrescentar duas variáveis artificiais. Sejam  $t_1$  e  $t_2$ , introduzidas na 2ª e 3ª restrições, respectivamente. Sendo assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - Mt_1 - Mt_2 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 80 \\ & x_1 + 2x_2 - s_2 + t_1 = 40 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 + t_2 = 150 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Opera-se agora com o método simplex, como habitualmente, considerando que M representa uma quantidade muito superior a qualquer outra que figure no quadro:

42

$C_B^T$	$X_B$	3	2	-2	0	0	-M	-M	$b'$
0	$s_1$	1	1	1	1	0	0	0	80
-M	$t_1$	①	2	0	0	-1	1	0	40 →
-M	$t_2$	3	1	-1	0	0	0	1	150
	$z_j$	-4M	-3M	M	0	M	-M	-M	-190M
	$z_j - C_j$	-4M-3	-3M-2	M+2	0	M	0	0	
		↑							

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	3	2	-2	0	0	-M	-M	
0	$s_1$	0	-1	1	1	1	-1	0	40
3	$x_1$	1	2	0	0	-1	1	0	40
-M	$t_2$	0	-5	-1	0	3	-3	1	30 →
	$z_j$	3	5M+6	M	0	-3M-3	3M+3	-M	-30M+120
	$z_j - c_j$	0	5M+4	M+2	0	-3M-3	4M+3	0	

↑

Uma vez tornada não básica, uma variável artificial pode ser eliminada, assim como a respectiva coluna do quadro simplex, porque ela não voltará a ser básica. É o caso de  $t_1$ .

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	3	2	-2	0	0	-M	
0	$s_1$	0	2/3	4/3	1	0	-1/3	30 →
3	$x_1$	1	1/3	-1/3	0	0	1/3	50
0	$s_2$	0	-5/3	-1/3	0	1	1/3	10
	$z_j$	3	1	-1	0	0	1	150
	$z_j - c_j$	0	-1	1	0	0	M+1	

↑

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	3	2	-2	0	0	
2	$x_2$	0	1	2	3/2	0	45
3	$x_1$	1	0	-1	-1/2	0	35
0	$s_2$	0	0	3	5/2	1	85
	$z_j$	3	2	1	3/2	0	195
	$z_j - c_j$	0	0	3	3/2	0	

Este é o quadro óptimo porque é satisfeita a condição de optimalidade, ou seja, todos os  $z_j - c_j$  são não negativos.

A solução óptima é:  $x_1^* = 35$ ,  $x_2^* = 45$ ,  $x_3^* = 0$ ,  $s_1^* = 0$ ,  $s_2^* = 85$  e  $z^* = 195$ .

Uma outra forma de tratar as variáveis artificiais é o chamado **método das duas fases**.

A primeira fase tem por objectivo tornar não básicas as variáveis artificiais de modo a alcançar uma solução básica admissível para o problema original. O quadro inicial é semelhante ao do método dos M's variando apenas a função objectivo, cujos coeficientes são todos nulos, excepto os das variáveis artificiais que são -1 (o que corresponde a minimizar o valor das variáveis artificiais). Esta função objectivo cumpre a tarefa de anular as variáveis artificiais (não negativas por definição), dado que o máximo possível para a função objectivo é 0, e é atingido apenas quando todas as variáveis artificiais forem 0.

Partindo da solução obtida no final da primeira fase, prossegue-se normalmente com o método simplex até atingir a solução óptima do problema original (segunda fase). Nesta segunda fase considera-se a função objectivo original, podendo ser omitidas as colunas correspondentes às variáveis artificiais.

Veja-se, então, a aplicação do método das duas fases ao exemplo anterior.

*Primeira fase:*

A função objectivo da primeira fase é  $\max z_1 = -t_1 - t_2$ , ou seja, o vector dos coeficientes desta função objectivo é  $\underline{c}_1 = (0,0,0,0,0,-1,-1)$ .

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$\underline{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	$\underline{b}'$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	
0	$s_1$		1	1	1	1	0	0	0	80
-1	$t_1$		1	2	0	0	-1	1	0	40 →
-1	$t_2$		3	1	-1	0	0	0	1	150
	$z_j$		-4	-3	1	0	1	-1	-1	-190
	$z_j - c_j$		-4	-3	1	0	1	0	0	
			↑							

44

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$\underline{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	$\underline{b}'$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	
0	$s_1$		0	-1	1	1	1	-1	0	40
0	$x_1$		1	2	0	0	-1	1	0	40
-1	$t_2$		0	-5	-1	0	3	-3	1	30 →
	$z_j$		0	5	1	0	-3	3	-1	-30
	$z_j - c_j$		0	5	1	0	-3	4	0	
							↑			

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$\underline{c}$	0	0	0	0	0	-1	
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$t_2$	$\underline{b}'$
0	$s_1$		0	$2/3$	$4/3$	1	0	$-1/3$	30
0	$x_1$		1	$1/3$	$-1/3$	0	0	$1/3$	50
0	$s_2$		0	$-5/3$	$-1/3$	0	1	$1/3$	10
	$z_j$		0	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$		0	0	0	0	0	1	

Este é o quadro final da primeira fase porque otimiza a respectiva função objectivo. Todas as variáveis artificiais são nulas porque são não básicas. Trata-se de uma solução básica admissível que é a solução inicial para a segunda fase. Assim, alterando apenas a função objectivo, este é o quadro inicial da segunda fase.

*Segunda fase:*

A função objectivo da segunda fase é a original, isto é:

$$\max z_{II} = \underline{c}_{II} \underline{x} = \underline{c} \underline{x} = (3, 2, -2, 0, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2)^T \Leftrightarrow \max z_{II} = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3.$$

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$\underline{c}$	3	2	-2	0	0		$\underline{b}'$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$		
0	$s_1$		0	$2/3$	$4/3$	1	0		30 →
3	$x_1$		1	$1/3$	$-1/3$	0	0		50
0	$s_2$		0	$-5/3$	$-1/3$	0	1		10
	$z_j$		3	1	-1	0	0		150
	$z_j - c_j$		0	-1	1	0	0		

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$\underline{c}$	3	2	-2	0	0		$\underline{b}'$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$		
2	$x_2$		0	1	2	$3/2$	0		45
3	$x_1$		1	0	-1	$-1/2$	0		35
0	$s_2$		0	0	3	$5/2$	1		85
	$z_j$		3	2	1	$3/2$	0		195
	$z_j - c_j$		0	0	3	$3/2$	0		

Tal como no método dos M's, o método das duas fases permitiu atingir a solução óptima do problema.

Esta é uma solução básica, em que as variáveis básicas são  $x_2$ ,  $x_1$  e  $s_2$  e

a matriz da base óptima é  $B^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ , ou seja, é constituída pelas colunas

de A (matriz dos coeficientes das restrições na forma padrão) correspondentes a  $x_2$ ,  $x_1$  e  $s_2$ , respectivamente.

Tal como foi referido na secção anterior, os valores das variáveis básicas  $\underline{x}_B$  podem ser obtidos pela operação matricial  $B^{*-1}\underline{b}$ ,

$$\underline{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 35 \\ 85 \end{bmatrix}$$

A matriz  $B^{*-1}$  está acessível directamente do quadro simplex óptimo.  $B^{*-1}$  é formada pelas colunas do quadro final correspondentes às variáveis básicas iniciais, neste caso,  $s_1$ ,  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente.

Repare-se que um dos processos de inverter uma matriz consiste no seguinte:

$$[B | I] \xrightarrow{\text{método de Gauss-Jordan}} [I | B^{-1}]$$

Ou seja,  $B^{-1}$  surge no lugar onde estava originalmente I. É precisamente o que acontece no método simplex, em que as operações de eliminação de Gauss, feitas ao longo das iterações, levam a que  $B^{-1}$  surja no lugar da matriz identidade do quadro inicial, ou seja, as colunas correspondentes às variáveis básicas iniciais. Isto é válido para qualquer quadro simplex e, em particular, para o quadro final, em que  $B^{-1} = B^{*-1}$ .

No entanto, se se pretender obter  $B^{*-1}$  desta forma, deve-se actualizar as colunas de  $t_1$  e  $t_2$  até ao último quadro, o que não foi feito neste exemplo.

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & ? & ? & \\ \frac{5}{2} & & & \end{bmatrix}$$



Se a actualização tivesse sido feita, o quadro final seria o seguinte:

$\underline{c}$		3	2	-2	0	0			
$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	$\underline{b}'$
2	$x_2$	0	1	2	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	45
3	$x_1$	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	35
0	$s_2$	0	0	3	$\frac{5}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	85
$z_j$		3	2	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	195
$z_j - c_j$		0	0	3	$\frac{3}{2}$	0			

Obtém-se:

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Repare-se que a actualização das colunas das variáveis artificiais apenas é necessária para as variáveis associadas a restrições originalmente do tipo ' $=$ ' (neste caso  $t_2$ ). Uma restrição do tipo ' $\geq$ ' possui uma variável desvio (*surplus*) cuja coluna é sempre simétrica da respectiva variável artificial (compare-se as colunas de  $s_2$  e  $t_1$  em qualquer quadro). Assim, é imediata a obtenção da respectiva coluna de  $B^{*-1}$ .

No caso geral, a representação esquemática de um quadro simplex é apresentada no Quadro I.2, ou, como no Quadro I.3, substituindo a designação de *slacks* por *variáveis básicas iniciais* e admitindo que, para além das colunas destas variáveis e das variáveis de decisão, podem ainda existir outras colunas correspondentes a variáveis *surplus*.

Quando a função objectivo é a minimizar, pode ser adoptado um de 2 processos para resolver o problema.

### Processo 1

Converte-se a função objectivo para maximização multiplicando-a por (-1):

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad \rightarrow \quad \max z' = -z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$$

Esta transformação não altera a solução óptima, i.e. conduz a valores iguais para as variáveis, mas, por outro lado, conduz a um valor da função objectivo simétrico, i.e.  $\min z = -\max z'$ . Note-se que o gradiente de  $z$  é simétrico do de  $z'$ .

### Processo 2

Não se faz qualquer tipo de conversão, adaptando a condição de optimalidade. Se todos os elementos da linha dos  $(z_j - c_j)$  forem  $\leq 0$ , a solução é óptima. Caso contrário, escolhe-se, para tornar básica, a variável cujo  $z_j - c_j$  é o maior de entre os positivos:  $\max\{z_j - c_j \mid z_j - c_j > 0\}$ .

## DETECÇÃO DE CASOS PARTICULARES DE PL A PARTIR DO SIMPLEX

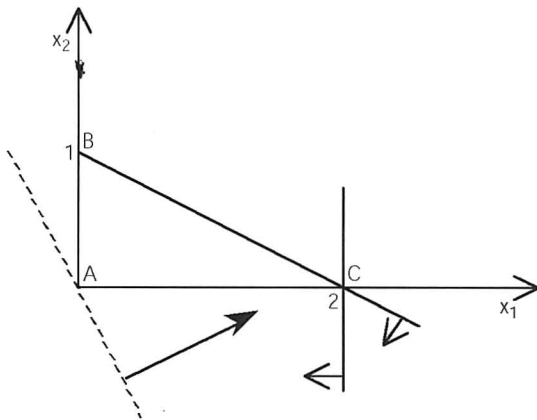
### (i) ÓPTIMOS ALTERNATIVOS

Quando há alguma variável não básica associada a um elemento  $z_j - c_j = 0$  no quadro simplex óptimo, então o problema admite *soluções óptimas alternativas*. Se uma dessas variáveis se tornar básica, usando as regras normais de selecção da variável que se torna não básica, e actualizando o quadro, então a variação da função objectivo é nula, o que significa que se obtém outra solução básica óptima alternativa da primeira.

### (ii) SOLUÇÕES DEGENERADAS

Quando existe uma ou mais variáveis básicas com valor nulo, então a solução diz-se *degenerada*. A uma solução básica degenerada está associada mais do que uma base.

Veja-se o seguinte exemplo representado graficamente na figura I.12.:



$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + \frac{1}{2} x_2 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma padrão:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + \frac{1}{2} x_2 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 2 \\ & x_1 + s_2 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Figura I.12 – Solução ótima degenerada.

A solução ótima é o ponto C onde  $x_1^*=2$ ,  $x_2^*=0$ ,  $s_1^*=0$  e  $s_2^*=0$ .

Sabe-se que:

- o ponto C é uma solução básica admissível porque é um vértice do poliedro admissível;
- como o problema tem duas restrições funcionais, uma base é formada por dois vectores correspondentes a duas variáveis básicas;
- como apenas uma variável é positiva, a outra variável básica em C terá que ser nula.

Assim, ao contrário de A ou B, C é uma *solução básica degenerada*.

As variáveis básicas e as matrizes das bases associadas a esta solução são:

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2) & (x_1, s_1) & (x_1, s_2) \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Um quadro simplex ótimo é:

		1	1/2	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
1	$x_1$	1	2	1	0	2
0	$s_2$	0	-2	-1	1	0
$z_j - c_j$		0	3/2	1	0	2

Para se conhecerem as outras soluções básicas degeneradas faz-se uma troca da variável básica nula, podendo, para o efeito, considerar-se excepcionalmente *pivots* negativos. Como a quantidade da variável que se torna básica é sempre nula, nem a optimalidade, nem a admissibilidade são afectadas. Daí que se possam escolher elementos *pivots* negativos.

- $x_2$  torna-se variável básica por troca com  $s_2$ :

		1	$\frac{1}{2}$	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
1	$x_1$	1	0	0	1	2
$\frac{1}{2}$	$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
	$z_j - c_j$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	2

- $s_1$  torna-se variável básica por troca com  $s_2$ :

		1	$\frac{1}{2}$	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
1	$x_1$	1	0	0	1	2
0	$s_1$	0	2	1	-1	0
	$z_j - c_j$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	2

Note-se que, apesar de a solução ser a mesma em qualquer um dos quadros, as bases são diferentes, e apenas nas duas primeiras se verifica a *condição de optimalidade*. De facto, a condição de optimalidade usada no método simplex é apenas uma condição suficiente para a obtenção do óptimo. Esta condição é também condição necessária quando não há degenerescência.

50

Graficamente, uma solução básica degenerada é um vértice onde o número de restrições activas (incluindo as de não negatividade) é maior do que a dimensão do espaço das variáveis de decisão. No vértice C da figura I.12 intersectam-se 3 rectas, duas correspondentes às restrições funcionais e ainda a da restrição de não negatividade de  $x_2$ .

Ao contrário do que se possa pensar a partir de exemplos a duas dimensões, as soluções básicas degeneradas nem sempre estão associadas a

restrições redundantes. Um exemplo deste facto é apresentado na figura I.13, onde o ponto P é uma solução básica degenerada, em que estão activas 4 restrições num espaço tridimensional, mas nenhuma delas é redundante.

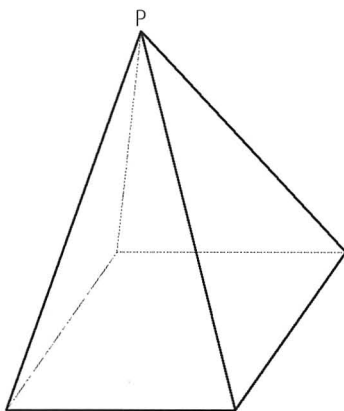


Figura I.13 – Solução degenerada que não é devida a restrições redundantes.

### (III) SOLUÇÃO ÓPTIMA ILIMITADA

Durante a resolução de um problema de PL pode acontecer que exista ainda um elemento negativo na linha dos  $(z_j - c_j)$ , isto é, tornar básica essa variável permite melhorar a função objectivo, e não haver *pivot* possível porque não existem elementos positivos nessa coluna. Esta variável pode ser incrementada indefinidamente, sem que haja perda de admissibilidade. Consequentemente, o problema tem *solução óptima ilimitada*.

*Exemplo:*

O quadro simplex seguinte refere-se ao exemplo da figura I.7.

		1	3	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
1	$x_1$	1	0	$-1/3$	$-1/3$	1
3	$x_2$	0	1	$-2/3$	$1/3$	4
$z_j - c_j$		0	0	$-7/3$	$2/3$	13

Apesar de existir um elemento negativo na linha dos  $(z_j - c_j)$ , não é possível efectuar uma nova iteração por não haver elemento *pivot* positivo. Isto, porque, neste caso, não é limitado superiormente o aumento de  $s_1$ , para garantir que se verifique a condição de admissibilidade em  $x_1$  e  $x_2$ . Por cada unidade de aumento de  $s_1$ ,  $x_1$  e  $x_2$  aumentam  $1/3$  e  $2/3$ , respectivamente.

(IV) PROBLEMA SEM REGIÃO ADMISSÍVEL

Durante a execução do método dos M's, ou na 1ª fase do método das duas fases, se for atingida a condição de optimalidade (todos os elementos  $z_j - c_j$  são não negativos) com uma ou mais variáveis artificiais com valor estritamente positivo, então o método simplex termina com uma solução que não é admissível para o problema original. Dado que o objectivo inicial é minimizar o valor das variáveis artificiais, então não existe nenhuma solução com todas as variáveis artificiais nulas (condição necessária para a satisfação das restrições correspondentes). Conclui-se, então, que o problema *não tem nenhuma solução admissível*, pelo que é *impossível*.

(V) VARIÁVEIS ARTIFICIAIS BÁSICAS COM VALOR NULO

Quando todas as variáveis artificiais se tornam não básicas no método dos M's, ou no das duas fases, obtém-se uma solução básica admissível do problema original. Pode, contudo, acontecer que se verifique a condição de optimalidade na 1ª fase do método das duas fases com alguma variável artificial básica com valor nulo. Trata-se de uma solução básica admissível (degenerada) do problema original, mas é necessário tornar não básica(s) a(s) variáveis artificial(ais) para poder prosseguir com a 2ª fase. As situações possíveis, considerando que há no final da 1ª fase uma variável básica artificial com valor nulo na linha  $i$ , são:

52

- (v.1) se existir algum elemento não nulo no cruzamento da linha  $i$  com a coluna de uma variável não artificial, então este elemento pode ser o *pivot* das operações de substituição da variável artificial pela não artificial;
- (v.2) caso contrário, a linha  $i$ , e a respectiva variável básica artificial, podem ser eliminadas do quadro, porque esta linha corresponde a uma restrição redundante.

Depois de tornar não básicas as variáveis artificiais, o método simplex prossegue normalmente.

*Exemplos:*

(v.1) Seja a região admissível definida por:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

O quadro óptimo da 1ª fase é o seguinte, onde t é a variável artificial associada à 2ª restrição e  $s_1, s_2$  são as variáveis desvio da 1ª e 2ª restrições, respectivamente:

		0	0	0	0	0	-1	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	t	
0	$x_2$	2	1	1	1	0	0	2
-1	t	-5	0	-2	-4	-1	1	0 →
$z_j - c_j$		5	0	2	4	1	0	0

A variável t pode ser substituída por  $x_1, x_3, s_1$  ou  $s_2$ , porque estas colunas possuem elementos não nulos na linha de t. Se escolhermos, por exemplo  $s_2$ , o quadro actualizado é:

		0	0	0	0	0	-1	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	t	
0	$x_2$	2	1	1	1	0	0	2
0	$s_2$	5	0	2	4	1	-1	0
$z_j - c_j$		0	0	0	0	0	1	0

Repare-se que, nesta substituição, apenas se alterou a base associada à solução, mas os valores das variáveis mantêm-se. Trata-se de soluções degeneradas.

(v.2) Seja a região admissível definida por:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

O quadro óptimo da 1ª fase é o seguinte (onde  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  são as variáveis artificiais associadas a cada uma das restrições):

		0	0	0	-1	-1	-1	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
0	$x_1$	1	1	1	1	0	0	2
-1	$t_2$	0	-1	-1	-2	1	0	0
-1	$t_3$	0	-1	-1	-5	0	1	0
$Z_j - C_j$		0	2	2	8	0	0	0

Começa-se por tornar  $t_2$  não básica, escolhendo, por exemplo,  $x_2$  para se tornar básica (em alternativa, poder-se-ia ter escolhido  $x_3$ ):

		0	0	0	-1	-1	-1	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
0	$x_1$	1	0	0	-1	1	0	2
0	$x_2$	0	1	1	2	-1	0	0
-1	$t_3$	0	0	0	-3	-1	1	0
$Z_j - C_j$		0	0	0	4	2	0	0

Neste caso, não existe qualquer variável não artificial em condições de substituir  $t_3$ , porque não há *pivot*. A linha associada a  $t_3$  (3ª linha), bem como a respectiva coluna, podem ser eliminadas, dado que a restrição correspondente é *redundante*:

		0	0	0	-1	-1	-1	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
0	$x_1$	1	0	0	-1	1	0	2
0	$x_2$	0	1	1	2	-1	0	0
-1	$t_3$	0	0	0	-3	-1	1	0
$Z_j - C_j$		0	0	0	4	2	0	0

De facto, repare-se que a 3ª equação do sistema original é uma combinação linear das outras duas, isto é:  $Eq3 = 3 \times Eq1 + Eq2$ .



Na escolha da variável que se vai tornar básica, o menor valor (negativo) de  $z_j - c_j$  pode ocorrer em mais do que uma variável. Neste caso, escolhe-se arbitrariamente um deles.

Também na escolha da variável que se deve tornar não básica pode existir mais do que uma variável básica em situação de empate. Mais uma vez, a escolha pode ser arbitrária. Esta situação leva a que a solução seguinte seja degenerada, o que se explica da seguinte forma:

– suponhamos que  $x_p$  é a variável que se torna básica e que há duas variáveis básicas candidatas a ser substituídas,  $x_{B_r}$  e  $x_{B_k}$ , em situação de

empate. Ambas satisfazem  $\frac{b'_r}{a'_{rp}} = \frac{b'_k}{a'_{kp}} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{b'_i}{a'_{ip}} \mid a'_{ip} > 0 \right\}$  (condição de admissibilidade da pivotação). Admita-se que é escolhida  $x_{B_r}$ . Em seguida, actualiza-se o quadro simplex de acordo com as regras:

$$A''_{r\bullet} = \frac{1}{a'_{rp}} A'_{r\bullet} \quad , \quad b''_r = \frac{b'_r}{a'_{rp}} \quad (\text{linha } r)$$

$$A''_{i\bullet} = A'_{i\bullet} - a'_{ip} A''_{r\bullet} \quad , \quad b''_i = b'_i - a'_{ip} b''_r \quad (\text{linhas } i \neq r)$$

$$\text{Então, } b''_k = b'_k - a'_{kp} b''_r = b'_k - a'_{kp} \frac{b'_r}{a'_{rp}} = b'_k - a'_{kp} \frac{b'_k}{a'_{kp}} = 0. \text{ Como } b''_k \text{ é}$$

o novo valor da variável básica  $x_{B_k}$ ,  $x_{B_k} = 0$ , o que significa que estamos perante uma solução básica degenerada.

Uma regra possível para situações de empate, na entrada ou na saída, é escolher a primeira variável nessas circunstâncias.

*Exemplo:*

Para ilustrar o caso da existência de soluções degeneradas, considere-se o problema 1 com a restrição adicional  $4x_1 + 3x_2 \leq 180$ , sendo a *slack* que lhe está associada  $s_4$ .

O quadro simplex correspondente ao vértice P é:

$\underline{X}_B$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$		quocientes
$s_1$	0	0.5	1	-0.5	0	0	10	$10/0.5=20$
$x_1$	1	0.5	0	0.5	0	0	40	$40/0.5=80$
$s_3$	0	4	0	-1	1	0	140	$140/4=35$
$s_4$	0	1	0	-2	0	1	20	$20/1=20$
$z_j - c_j$	0	-7.5	0	12.5	0	0	1000	

Existindo empate na determinação da variável que se torna não básica (entre  $s_1$  e  $s_4$ ), tal significa que estas variáveis atingem simultaneamente o valor zero, à medida que  $x_2$  (variável que se torna básica) aumenta. Nestas circunstâncias, a variável que não é escolhida para se tornar básica permanece como variável básica com um valor nulo.

O quadro ótimo, correspondente ao ponto Q, é então:

$\underline{X}_B$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	
$x_2$	0	1	2	-1	0	0	20
$x_1$	1	0	-1	1	0	0	30
$s_3$	0	0	-8	3	1	0	60
$s_4$	0	0	-2	-1	0	1	0
$z_j - c_j$	0	0	15	5	0	0	1150

onde  $s_1$  e  $s_4$  são ambas nulas, dado que as restrições respectivas são activas. Note-se que uma delas é variável não básica e a outra é uma variável básica com valor zero.

Representando graficamente a região admissível, é fácil verificar que a nova restrição é redundante (ou seja, a sua inclusão no problema não altera a região admissível). Contudo, tal como já foi chamado a atenção, utilizando o exemplo da pirâmide (figura I.13), a degenerescência nem sempre deriva do facto de existirem restrições redundantes.

## 5. DUALIDADE

### EXEMPLO DE MAXIMIZAÇÃO

Considere-se novamente o problema 1, em que se pretende determinar o plano óptimo de produção de uma pequena oficina, e, em que,  $x_1$  e  $x_2$  representam o número de unidades a fabricar dos produtos I e II, respectivamente. Relembre-se a sua formulação matemática:

$$\begin{array}{llll} \max z = 25x_1 + 20x_2 & \text{lucro} & & [\text{u.m.}] \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 \leq 50 & \text{máquinas tipo A} & [\text{h}] \\ & 2x_1 + x_2 \leq 80 & \text{máquinas tipo B} & [\text{h}] \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 220 & \text{máquinas tipo C} & [\text{h}] \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Cada uma das restrições indica que o número total de horas a utilizar semanalmente, em cada um dos tipos de máquinas, não pode exceder a respectiva disponibilidade.

Considere-se agora que uma fábrica concorrente pretende que esta oficina lhe alugue os recursos existentes, isto é, as horas disponíveis de funcionamento das máquinas dos tipos A, B e C. O proprietário da pequena oficina só aceitará o negócio se o ganho que obtiver com a cedência dos equipamentos for pelo menos tão elevado como o que pode obter pelo fabrico dos produtos I e II. Por outro lado, a fábrica concorrente tem interesse em pagar o mínimo possível pelo aluguer das máquinas.

Seja  $y_i$  o preço do aluguer de 1 hora de utilização de máquinas do tipo  $i$ ,  $i=A, B, C$ .

Cada unidade do produto I produzida pela oficina dá um lucro de 25 u.m. e requer 1h nas máquinas do tipo A, 2h nas máquinas do tipo B e 2h nas máquinas do tipo C. Se os recursos necessários ao fabrico de 1 unidade do produto I forem cedidos à fábrica concorrente, a oficina receberá  $1y_A + 2y_B + 2y_C$ . Este valor terá que ser pelo menos igual a 25 u.m., para que o proprietário da oficina aceite o negócio:

$$1y_A + 2y_B + 2y_C \geq 25 \quad [\text{u.m.}]$$

O mesmo tipo de análise pode ser feito relativamente ao produto II, o que conduz à condição:

$$1y_A + 1y_B + 5y_C \geq 20 \quad [\text{u.m.}]$$

A oficina dispõe actualmente de 50h semanais em máquinas A, 80h em máquinas B e 220h em máquinas C. Então, o montante total que receberá pelo aluguer das máquinas é  $50y_A + 80y_B + 220y_C$ . Uma vez que se trata de um custo para a fábrica concorrente, esta pretende minimizá-lo.

A formulação completa deste novo problema de programação linear é:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 50y_A + 80y_B + 220y_C \\ \text{s.a.} \quad & 1y_A + 2y_B + 2y_C \geq 25 \\ & 1y_A + 1y_B + 5y_C \geq 20 \\ & y_A, y_B, y_C \geq 0 \end{aligned}$$

Ao par de problemas, formado por este e pelo original, chama-se *primal-dual*. Se o primeiro problema for chamado de *primal*, este será o *dual*, e vice-versa.

Designando o primeiro problema por primal e o segundo por dual, podem ser evidenciadas as seguintes relações matemáticas entre estes dois problemas:

- (i) enquanto o primal é um problema de maximização, com restrições do tipo ' $\leq$ ', e variáveis não negativas (forma *típica* ou *canónica* de problemas de maximização), o dual é um problema de minimização, com restrições do tipo ' $\geq$ ', e variáveis não negativas (forma *típica* ou *canónica* de problemas de minimização);
- (ii) o número de restrições do dual é igual ao número de variáveis do primal; o número de variáveis do dual é igual ao número de restrições do primal;
- (iii) os coeficientes da função objectivo do primal são os termos independentes das restrições do dual, e vice-versa;
- (iv) a matriz dos coeficientes técnicos do dual é a transposta da matriz dos coeficientes técnicos do primal.

De uma forma geral, o primal, na forma *canónica* de problemas de maximização, e o dual, na forma *canónica* de problemas de minimização, apresentam as seguintes formulações:

*Primal*

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

*Dual*

$$\begin{aligned} \min \quad w &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j=1, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m \end{aligned}$$

EXEMPLO DE MINIMIZAÇÃO

Considere-se agora um exemplo de minimização.

A produção de um determinado bem acarreta níveis elevados de poluição do ar e da água. As entidades governamentais decidiram impor ao produtor do bem uma melhoria da qualidade do ar e da água. Pretende-se uma melhoria de pelo menos 20% no ar e de pelo menos 30% na água. O produtor do bem poderá utilizar matérias-primas menos poluentes para satisfazer estes requisitos. Existem 4 tipos de matérias-primas alternativas (A, B, C e D) que se podem combinar para o efeito.

Cada tonelada de matéria-prima A, B, C, e D garante uma melhoria da qualidade do ar de 0.5%, 0.3%, 0.2% e 0.1%, respectivamente, e uma melhoria da qualidade da água de 0.4%, 1%, 1.5% e 0.5%, respectivamente. Os aumentos de custo em relação à produção tradicional são de 12, 10, 15 e 8 unidades monetárias (u.m.), por tonelada de A, B, C e D, respectivamente. Sabendo que a empresa precisa de grandes quantidades de matéria-prima (da tradicional ou das novas), pretende-se minimizar o aumento de custo devido à utilização das novas matérias-primas.

As variáveis de decisão deste problema são  $x_j, j=1, \dots, 4$ , que representam a quantidade, em toneladas, a considerar por cada uma das matérias-primas A, B, C e D.

A formulação do problema é:

$$\begin{aligned} \min z &= 12x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 8x_4 \quad (\text{custo em u.m.}) \\ \text{s.a:} \quad & 0.5x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 \geq 20 \quad (\% \text{ de melhoria da qualidade do ar}) \\ & 0.4x_1 + x_2 + 1.5x_3 + 0.5x_4 \geq 30 \quad (\% \text{ de melhoria da qualidade da água}) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Suponha-se agora que uma outra empresa pretende convencer a produtora do bem a utilizar uma tecnologia alternativa de produção, em vez das novas matérias-primas. Com esta tecnologia, uma melhoria de 1% na qualidade do ar é conseguida com um custo adicional de  $y_1$  u.m., e a melhoria de 1% na qualidade da água tem como consequência um custo adicional, para a produtora do bem, de  $y_2$  u.m.. A empresa fornecedora da nova tecnologia não decidiu ainda quais os valores adequados para  $y_1$  e  $y_2$ . Ela pretende maximizar a sua receita, mas, obviamente, o produtor do bem não estará disposto a pagar mais do que o custo adicional que lhe acarreta o uso das novas matérias-primas. Sabe-se que 1 ton. da matéria-prima A melhora a qualidade do ar em 0.5% e a qualidade da água em 0.4%, e que custa 12 u.m.. Então, 12 u.m. é o máximo que a produtora estará disposta a pagar por melhorias equivalentes, quando utiliza a nova tecnologia. Esta condição traduz-se por:

$$0.5y_1 + 0.4y_2 \leq 12 \quad [\text{u.m.}]$$

Em seguida, estabelecem-se condições análogas respeitantes às outras matérias-primas:

$$0.3y_1 + y_2 \leq 10 \quad [\text{u.m.}]$$

$$0.2y_1 + 1.5y_2 \leq 15 \quad [\text{u.m.}]$$

$$0.1y_1 + 0.5y_2 \leq 8 \quad [\text{u.m.}]$$

Com certeza, a produtora do bem não pretende melhorias do ar e da água superiores às que lhe foram impostas pelas entidades governamentais, porque isso acarretaria maiores custos. O preço a pagar por essas melhorias, usando a tecnologia alternativa, seria  $20y_1 + 30y_2$ . A empresa proponente da tecnologia alternativa pretende ver este montante maximizado.

Sabendo que  $y_1$  e  $y_2$  nunca serão negativos, o problema da empresa proponente da tecnologia alternativa é:

60

$$\begin{aligned} \max \quad & w = 20y_1 + 30y_2 \\ \text{s.a:} \quad & 0.5y_1 + 0.4y_2 \leq 12 \\ & 0.3y_1 + y_2 \leq 10 \\ & 0.2y_1 + 1.5y_2 \leq 15 \\ & 0.1y_1 + 0.5y_2 \leq 8 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como se pode facilmente verificar, ao problema da produtora do bem corresponde um problema de minimização na forma canónica, enquanto que ao segundo caso corresponde um problema de maximização, também na forma canónica. Tal como no primeiro exemplo, verificam-se as relações enumeradas de (ii) a (iv).

De uma forma geral, o primal, na forma *canónica* de problemas de minimização, e o dual, na forma *canónica* de problemas de maximização, apresentam as seguintes formulações:

<i>Primal</i>	<i>Dual</i>
$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ <p>s.a:</p> $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i=1, \dots, m$ $x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n$	$\max w = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ <p>s.a:</p> $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j=1, \dots, n$ $y_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m$

#### FORMULAÇÃO DO DUAL

Para qualquer problema (primal) pode escrever-se o seu dual. Um dos processos consiste em converter primeiro o primal na forma canónica, escrevendo em seguida o seu dual, com eventuais simplificações no final.

Exemplo:

*Primal (P)*

$\max z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$ <p>s.a:</p> $2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$ $x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\xrightarrow{\text{Forma canónica da maximização}}$	$\max z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$ <p>s.a:</p> $-2x_1 - x_2 - x_3 \leq -5$ $x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10$ $-x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -10$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
--	--	--

$\xrightarrow{\text{Passagem ao dual}}$	$\min w = -5v_1 + 10v_2 - 10v_3$ <p>s.a:</p> $-2v_1 + v_2 - v_3 \geq 3$ $-v_1 + v_2 - v_3 \geq 4$ $-v_1 + 3v_2 - 3v_3 \geq 5$ $v_1, v_2, v_3 \geq 0$
---	--

Fazendo as mudanças de variável,  $y_1 = -v_1$  e  $y_2 = v_2 - v_3$ , vem:

$$\begin{aligned}
 \text{Dual (D)} \quad & \min w = 5y_1 + 10y_2 \\
 \text{s.a:} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 3 \\
 & y_1 + y_2 \geq 4 \\
 & y_1 + 3y_2 \geq 5 \\
 & y_1 \leq 0, \quad y_2 \text{ livre (sem restrição de sinal)}
 \end{aligned}$$

Os problemas (P) e (D) verificam as relações de (ii) a (iv). Além disso, como a 1ª restrição de (P) é do tipo oposto ao da forma canónica de problemas de maximização, então a 1ª variável de (D) é não positiva; a 2ª restrição de (P) é uma igualdade, o que corresponde a uma variável dual ( $y_2$ ) livre, isto é, sem restrição de sinal.

O quadro seguinte sintetiza as regras de formulação do problema dual para um qualquer problema primal, sem a necessidade de este estar escrito na forma canónica:

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO		Passagem ao dual	PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO	
j-ésima restrição	$\leq$ $\geq$ $=$		$\geq 0$ $\leq 0$ livre	j-ésima variável
j-ésima variável	$\geq 0$ $\leq 0$ livre		$\geq$ $\leq$ $=$	j-ésima restrição
matriz dos coeficientes técnicos: A			matriz dos coeficientes técnicos: A <sup>T</sup>	
coeficientes da função objectivo			termos independentes das restrições	
termos independentes das restrições			coeficientes da função objectivo	

## TEORIA DA DUALIDADE

### 1. PROPRIEDADE DA DUALIDADE FRACA

O valor da função objectivo para qualquer solução admissível  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  de um problema primal de maximização não excede o valor da função objectivo para qualquer solução admissível  $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$  do seu problema

dual, isto é,  $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = w$ . Na forma matricial,  $z = \underline{c} \cdot \underline{x} \leq \underline{b}^T \underline{y} = w$ .



Repare-se que, se o problema primal for de minimização e o dual de maximização, a desigualdade verifica-se no sentido contrário, isto é,

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i = w.$$

## 2. CONDIÇÃO SUFICIENTE DE OPTIMALIDADE EM PL

Se  $\underline{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  e  $\underline{y}=(y_1, y_2, \dots, y_m)^T$  são soluções admissíveis para os problemas primal e dual, respectivamente, e se verifica que  $\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ , então  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  são soluções óptimas dos respectivos problemas.

## 3. OUTRAS PROPRIEDADES

3.1 Se um dos problemas (primal ou dual) tem soluções admissíveis, mas a solução óptima é ilimitada, então o outro não tem soluções admissíveis (isto é, é impossível).

3.2 Se um dos problemas (primal ou dual) não tem soluções admissíveis, então o outro ou também não tem soluções admissíveis ou admite solução óptima ilimitada.

## 4. TEOREMA FUNDAMENTAL DA DUALIDADE (FORTE)

A existência de solução óptima finita, para um dos problemas de um par primal-dual, garante a existência de solução óptima finita para o outro problema, e os respectivos valores das funções objectivo são iguais ( $z^*=w^*$ ).

*Demonstração:*

O teorema fundamental da dualidade será demonstrado para o caso em que o primal é um problema de maximização na forma canónica (variáveis não negativas e restrições ' $\leq$ ') e, conseqüentemente, o dual é um problema de minimização na forma canónica (variáveis não negativas e restrições ' $\geq$ ')

$$\begin{aligned} \text{Primal: } \max z &= \underline{c} \underline{x} \\ \text{s.a: } A\underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dual: } \min w &= \underline{b}^T \underline{y} \\ \text{s.a: } A^T \underline{y} &\geq \underline{c}^T \\ \underline{y} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

Seja  $A=[A \mid I]$  a matriz dos coeficientes das restrições do primal convertidas em igualdades. Suponha-se que o primal admite solução óptima finita. Então o método simplex permite alcançar uma solução básica óptima para o problema com um conjunto de variáveis básicas  $\underline{x}_B$ , sendo o critério da optimalidade satisfeito. Seja  $N$  a sub-matriz de  $A$  cujas colunas são as das variáveis não básicas  $\underline{x}_N$ . O quadro óptimo tem a configuração apresentada no Quadro I.2. Como o primal está na forma canónica de problemas de maximização, o quadro tem também a configuração do Quadro I.3 (com  $\underline{c}=\underline{c}_A$  e para a base óptima  $B=B^*$ ). A última linha do quadro óptimo (linha dos  $(z_j-c_j)$ ) é  $\underline{c}_B B^{*-1} A - \underline{c}$  (nas colunas das variáveis de decisão) e  $\underline{c}_B B^{*-1}$  (nas colunas das *slacks*). Por outro lado,  $z = \underline{c}_B B^{*-1} \underline{b}$ . Como a solução é óptima, verifica-se que  $\underline{c}_B B^{*-1} A - \underline{c} \geq \underline{0}$  e  $\underline{c}_B B^{*-1} \geq \underline{0}$ .

Se se definir  $\underline{y}^T = \underline{c}_B B^{*-1}$ , então  $\underline{y}^T A - \underline{c} \geq \underline{0}$  e  $\underline{y}^T \geq \underline{0}$ . Como  $\underline{y}^T A - \underline{c} \geq \underline{0}$  é equivalente a  $A^T \underline{y} \geq \underline{c}^T$ , significa que  $\underline{y}$  é uma solução admissível para o dual, porque verifica todas as restrições funcionais ( $A^T \underline{y} \geq \underline{c}^T$ ) e as de não negatividade ( $\underline{y}^T \geq \underline{0}$ ). Para além disso,  $w = \underline{b}^T \underline{y} = \underline{y}^T \underline{b} = z$ , isto é, os valores das funções objectivo são iguais nos dois problemas. Então, pela *condição suficiente de optimalidade*,  $\underline{y}$  é uma solução óptima do dual. Qualquer problema de PL pode ser transformado num equivalente na forma canónica, o que significa que a prova deste teorema se aplica a qualquer problema de PL.

Em conclusão, o teorema fundamental da dualidade aplica-se a qualquer tipo de problema de PL.

64

A demonstração do *teorema fundamental da dualidade* permite tirar ilações sobre a forma de obter a solução óptima do dual a partir do quadro simplex óptimo do primal.

Considere-se, em primeiro lugar, que o problema **primal é de maximização**, com variáveis não negativas e restrições de qualquer tipo. Consequentemente, o dual é um problema de minimização com restrições do tipo ' $\geq$ ' e as variáveis podem ter qualquer tipo de sinal, dependendo das restrições do primal. Considerando que a função objectivo do primal é  $z = \underline{c} \underline{x}$ ,

a função objectivo do dual é  $w = \underline{b}^T \underline{y}$  com  $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$  e as restrições são  $A^T \underline{y} \geq \underline{c}^T$ , ou de forma equivalente,  $\underline{y}^T A \geq \underline{c}$ .

A demonstração do teorema fundamental da dualidade é uma prova construtiva dos valores óptimos das variáveis duais:  $\underline{y}^{*T} = \underline{c}_B B^{*-1}$ , onde  $\underline{c}_B$  é o vector  $1 \times m$  dos coeficientes da função objectivo correspondentes às variáveis básicas primais e  $B^{*-1}$  é a inversa da matriz da base óptima  $B^*$ . Assim, o quadro simplex óptimo do primal contém também informação relativa à solução óptima do dual, porque  $\underline{c}_B B^{*-1}$  é constituído pelos elementos da linha dos custos de oportunidade (linha dos  $(z_j)$ ) que pertence às colunas das **variáveis básicas iniciais**. Relembre-se que é nas colunas das variáveis básicas iniciais que se encontra  $B^{*-1}$ . Em particular, se a restrição  $i$  do primal for do tipo ' $\leq$ ',  $y_i$  é igual ao elemento da linha dos  $(z_j)$  (ou dos  $(z_j - c_j)$ ) que pertence à coluna da *slack* da restrição  $i$ ; se a restrição  $i$  do primal for do tipo ' $\geq$ ' ou ' $=$ ',  $y_i$  (variável não positiva ou livre, respectivamente) é igual ao elemento da linha dos  $(z_j)$  que pertence à coluna da variável artificial da restrição  $i$ . No caso da restrição do tipo ' $\geq$ ', este elemento é simétrico do  $(z_j)$  (ou do  $(z_j - c_j)$ ) que pertence à coluna da respectiva *surplus*.

Mais ainda, os valores das variáveis desvio do dual (sempre não negativos) podem ser lidos directamente do quadro simplex do primal. Observe-se que os elementos da linha dos  $(z_j - c_j)$ , correspondentes às variáveis de decisão do primal, são dados por  $\underline{c}_B B^{*-1} A - \underline{c}$ , e as restrições do dual são  $\underline{y}^T A \geq \underline{c}$ . Então, a variável desvio da restrição  $j$  do dual é dada por  $\underline{y}^T A_{\bullet j} - c_j$ . Como a solução óptima do dual é  $\underline{y}^{*T} = \underline{c}_B B^{*-1}$ , então  $\underline{y}^{*T} A_{\bullet j} - c_j = \underline{c}_B B^{*-1} A_{\bullet j} - c_j$ , que é o elemento da linha dos  $(z_j - c_j)$  na coluna da variável primal  $x_j$ .

Os quadros seguintes resumem a forma de leitura da solução óptima do dual a partir do quadro simplex óptimo do primal, tanto para problemas de maximização como para problemas de minimização. Seja  $s_i$  a variável desvio (*slack* ou *surplus*) da restrição  $i$  do primal.

PRIMAL DE MAXIMIZAÇÃO	
valor de $y_i$ se a restrição $i$ do primal é do tipo:	$\leq$ elemento na coluna de $s_i$ e na linha dos $(z_j)$ ou dos $(z_j - c_j)$ $\geq$ simétrico do elemento na coluna de $s_i$ e na linha dos $(z_j)$ ou dos $(z_j - c_j)$ $=$ elemento na coluna da artificial e na linha dos $(z_j)$
valor da variável desvio da restrição $j$ do dual	elemento na coluna de $x_j$ e na linha dos $(z_j - c_j)$

---

PRIMAL DE MINIMIZAÇÃO

Processo de resolução 1: o problema foi resolvido pelo método simplex como sendo de maximização ( $\max -z = -\underline{c}x$ ), mas o dual refere-se ao problema original pelo que é um problema de maximização

valor de $y_i$ se a restrição $i$ do primal é do tipo:	$\leq$ simétrico do elemento na coluna de $s_i$ e na linha dos $(z_j)$ ou dos $(z_j - c_j)$ $\geq$ elemento na coluna de $s_i$ e na linha dos $(z_j)$ ou dos $(z_j - c_j)$ $=$ simétrico do elemento na coluna da artificial e na linha dos $(z_j)$
valor da variável desvio da restrição $j$ do dual	elemento na coluna de $x_j$ e na linha dos $(z_j - c_j)$

---

PRIMAL DE MINIMIZAÇÃO

Processo de resolução 2: o problema foi resolvido pelo método simplex com os coeficientes originais, sendo a condição de optimalidade verificada quando  $z_j - c_j \leq 0, \forall j$ .

valor de $y_i$ se a restrição $i$ do primal é do tipo:	$\leq$ elemento na coluna de $s_i$ e na linha dos $(z_j)$ ou dos $(z_j - c_j)$ $\geq$ simétrico do elemento na coluna de $s_i$ e na linha dos $(z_j)$ ou dos $(z_j - c_j)$ $=$ elemento na coluna da artificial e na linha dos $(z_j)$
valor da variável desvio da restrição $j$ do dual	simétrico do elemento na coluna de $x_j$ e na linha dos $(z_j - c_j)$

*Exemplo:*

Considere-se o problema utilizado anteriormente para ilustrar o funcionamento dos métodos dos M's e das duas fases:

$$\begin{aligned}
 \text{(Primal) } \max \quad z &= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\
 \text{s.a:} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 80 \leftarrow (y_1) \\
 x_1 + 2x_2 &\geq 40 \leftarrow (y_2) \\
 3x_1 + x_2 - x_3 &= 150 \leftarrow (y_3) \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

O dual deste problema é:

$$\begin{aligned}
 \text{(Dual) } \min \quad w &= 80y_1 + 40y_2 + 150y_3 \\
 \text{s.a:} \quad y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 3 \\
 y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 2 \\
 y_1 - y_3 &\geq -2 \\
 y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 &\text{ livre}
 \end{aligned}$$

O quadro simplex óptimo do primal é o seguinte:

$c_B^T$	$c$	3	2	-2	0	0			
$x_B$	$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	$b'$
2	$x_2$	0	1	2	$3/2$	0	0	$-1/2$	45
3	$x_1$	1	0	-1	$-1/2$	0	0	$1/2$	35
0	$s_2$	0	0	3	$5/2$	1	-1	$-1/2$	85
	$z_j$	3	2	1	$3/2$	0	0	$1/2$	195
	$z_j - c_j$	0	0	3	$3/2$	0			

em que  $s_1$  e  $s_2$  são as variáveis desvio associadas às 1ª e 2ª restrições, respectivamente, e  $t_1$  e  $t_2$  são as variáveis artificiais associadas às 2ª e 3ª restrições, respectivamente.

Os valores óptimos das variáveis duais (principais) são:

$$y_1^* = 3/2 \quad \text{elemento na coluna de } s_1 \text{ e na linha dos } (z_j) \text{ (ou dos } (z_j - c_j))$$

$$y_2^* = 0 \quad \text{simétrico do elemento na coluna de } s_2 \text{ e na linha dos } (z_j) \text{ (ou dos } (z_j - c_j)) = \text{elemento na coluna de } t_1, \text{ na linha dos } (z_j)$$

$$y_3^* = 1/2 \quad \text{elemento na coluna de } t_2 \text{ e na linha dos } (z_j)$$

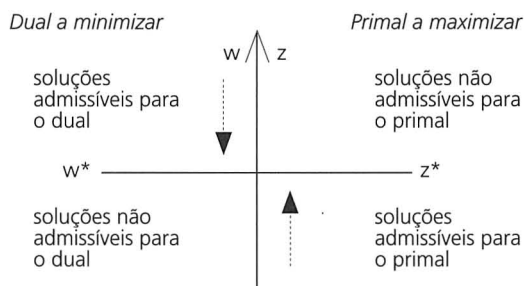
Sejam  $y_4, y_5$  e  $y_6$  as variáveis desvio do dual associadas, respectivamente, à 1ª, 2ª e 3ª restrições. Os valores óptimos das variáveis desvio do dual são:

$$y_4^* = 0 \quad \text{elemento na coluna de } x_1 \text{ e na linha dos } (z_j - c_j)$$

$$y_5^* = 0 \quad \text{elemento na coluna de } x_2 \text{ e na linha dos } (z_j - c_j)$$

$$y_6^* = 3 \quad \text{elemento na coluna de } x_3 \text{ e na linha dos } (z_j - c_j)$$

As relações estabelecidas entre a solução óptima do primal e a solução óptima do dual também se verificam entre qualquer par de soluções primal/dual retirado de um quadro simplex não óptimo. Em qualquer iteração, o método simplex determina simultaneamente um par de soluções primal/dual, mas, enquanto que a solução do primal é admissível, a correspondente do dual é não admissível (excepto após a última iteração). Assim, em cada quadro simplex do primal é identificada uma solução básica admissível  $\underline{x}$  do primal e uma solução *complementar*  $\underline{y}$  do problema dual, em que  $\underline{c} \underline{x} = \underline{b}^T \underline{y}$  (valores iguais para as funções objectivo). Contudo, se  $\underline{x}$  não é óptima, então  $\underline{y}$  não é admissível. Repare-se no diagrama seguinte:



A solução dual identificada no quadro simplex é também uma solução básica. Como se viu atrás, a solução do dual pode ser identificada, de uma forma geral, a partir da linha dos  $(z_j - c_j)$  do quadro simplex do primal (com eventuais trocas de sinal e considerando apenas a linha dos  $(z_j)$ , quando a coluna é de uma variável artificial). Podemos então fazer uma associação de variáveis entre o primal e o dual:

PRIMAL	DUAL
variável principal $x_j$	variável desvio da restrição $j$
variável desvio da restrição $i$	variável principal $y_i$

O elemento associado a uma variável básica na linha dos  $(z_j - c_j)$  é 0. Havendo  $m$  variáveis básicas no primal, então as  $m$  variáveis duais associadas a estas são nulas e, conseqüentemente, são não básicas para o problema dual. As outras variáveis duais são básicas. Esta propriedade de complementaridade entre as duas soluções é estabelecida na *propriedade dos desvios complementares*:

(a) Se uma variável principal  $x_j$  do problema primal for não nula, então a restrição  $j$  do dual encontra-se saturada, isto é, a respectiva variável desvio é nula.

Se uma variável principal  $y_i$  do problema dual for não nula, então a restrição  $i$  do primal encontra-se saturada, isto é, a respectiva variável desvio é nula.

(b) Se uma restrição  $i$  do problema primal não se encontrar saturada, então a variável principal  $y_i$  do dual é nula.

Se uma restrição  $j$  do problema dual não se encontrar saturada, então a variável principal  $x_j$  do primal é nula.

Designando por  $x_{n+i}$  a variável desvio da restrição  $i$  do primal e por  $y_{m+j}$  a variável desvio da restrição  $j$  do dual, a *propriedade dos desvios complementares* é traduzida matematicamente da seguinte forma:

$$(a) \quad x_j \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \text{isto é, } y_{m+j} = 0$$

$$y_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{isto é, } x_{n+i} = 0$$

$$(b) \quad x_{n+i} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_i = 0$$

$$y_{m+j} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_j = 0$$

Em síntese, o produto da  $j$ -ésima variável do primal (dual) pela  $j$ -ésima variável desvio do dual (primal) é sempre nulo; (a) e (b) resumem-se a:

$$x_j y_{m+j} = 0 \quad \text{para todo o } j=1, \dots, n$$

$$y_i x_{n+i} = 0 \quad \text{para todo o } i=1, \dots, m$$

A propriedade dos desvios complementares verifica-se para qualquer par de soluções complementares primal-dual. Em particular, é condição necessária e suficiente de optimalidade para um par de soluções admissíveis primal-dual. Este facto é estabelecido no teorema seguinte.

##### 5. TEOREMA DOS DESVIOS COMPLEMENTARES

As soluções  $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$  e  $\underline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)^T$  admissíveis para o primal e para o dual, respectivamente, são soluções óptimas dos problemas a que dizem respeito se e só se verificam a propriedade dos desvios complementares.

##### INTERPRETAÇÃO ECONÓMICA DA DUALIDADE

As variáveis duais podem ser interpretadas como os *valores marginais* dos itens (por exemplo, recursos no caso de problemas de produção) que correspondem às restrições do problema primal. Em muitos problemas de PL,

tal como no primeiro exemplo apresentado atrás (de maximização), uma restrição representa a limitação da quantidade total que pode ser usada de um item (recurso), isto é, a quantidade utilizada do item terá de ser menor ou igual do que a quantidade disponível desse item. São também comuns as restrições para as quais a quantidade total resultante de um processo deve ser maior ou igual do que um dado nível mínimo requerido, como no segundo exemplo (de minimização). A cada restrição do primal está associada uma variável dual que representa o *valor marginal* desse item no problema primal, desde que o dual tenha uma única solução óptima. O valor óptimo de uma variável dual dá-nos o impacto na função objectivo primal, quando há uma alteração unitária da disponibilidade, ou do nível mínimo requerido, do respectivo item. Estas variáveis são também designadas por *preços sombra*. No primeiro exemplo apresentado, o valor marginal das máquinas do tipo  $i$  ( $i=A, B$  ou  $C$ ), no problema primal, é a taxa de variação do lucro máximo por cada hora a mais disponível nas máquinas do tipo  $i$ . Assim, o valor marginal é o valor líquido da contribuição para o lucro de uma unidade adicional de um recurso.

Interpretemos, então, a solução óptima do dual, face ao problema primal, para o primeiro exemplo apresentado:

Primal (plano de produção)	Dual
$x_1^* = 30$	$y_A^* = 15$
$x_2^* = 20$	$y_B^* = 5$
$z^* = 1150$	$y_C^* = 0$
	$w^* = 1150$

Por cada hora a mais disponível nas máquinas do tipo A, o lucro aumentaria de 15 u.m., e por cada hora a mais disponível nas máquinas do tipo B o lucro aumentaria em 5 u.m. (desde que a base óptima do primal não se alterasse). Estes dois recursos têm valores marginais estritamente positivos porque são recursos escassos que são esgotados no plano óptimo de produção:  $x_1^* + x_2^* = 50$  e  $2x_1^* + x_2^* = 80$ . As variáveis desvio destas restrições são nulas, isto é,  $s_1^* = 0$  e  $s_2^* = 0$ . O mesmo já não se passa com o terceiro recurso (horas disponíveis nas máquinas do tipo C). Este recurso não está esgotado, existindo uma folga de  $s_3^* = 220 - 2x_1^* - 5x_2^* = 60$  h. Assim compreende-se que o seu valor marginal seja nulo ( $y_C^* = 0$ ). Se o recurso não é escasso, o aumento na disponibilidade desse recurso não afecta o lucro.



Poder-se-ia fazer uma análise semelhante para as soluções óptimas do primal e dual do segundo exemplo.

Estas relações entre recursos esgotados/não esgotados e variáveis duais não nulas/nulas são as estabelecidas no *teorema dos desvios complementares*. Repare-se ainda que os valores óptimos das funções objectivo do primal e do dual são iguais. Esta propriedade verifica-se em qualquer par de problemas admissíveis primal-dual e foi estabelecida no teorema fundamental da dualidade.

## 6. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

De uma forma geral, os coeficientes dos modelos de PL estão associados a um maior ou menor grau de incerteza, que resulta sobretudo das dificuldades inerentes ao processo de aquisição de dados. Muitos valores são apenas as melhores estimativas possíveis num dado contexto, mas seria certamente possível admitir como bons outros conjuntos de dados. Para além disso, existem coeficientes que, pela sua própria natureza, apresentam um comportamento variável com o tempo.

Nestas circunstâncias, torna-se necessário obter informação adicional sobre a sensibilidade da solução óptima, em relação a variações previsíveis nos coeficientes do modelo. Nesta secção estudar-se-á como determinar as gamas de variação de parâmetros de perturbação, para as quais a base óptima se mantém.

A análise de sensibilidade (ou pós-optimal) permite ainda conhecer melhor as características da solução óptima do modelo, podendo mesmo sugerir melhorias tecnológicas no sistema modelado, tendo sobretudo em vista a respectiva implementação prática.

Estudar-se-á, em primeiro lugar, a sensibilidade da base óptima em relação aos termos independentes das restrições, alterando-se uma única componente ( $b_k$ ), ou em função de um parâmetro de perturbação escalar  $\lambda$ , isto é,  $\underline{b}(\lambda) = \underline{b} + \lambda \underline{h}$ .

Suponha-se uma perturbação (aditiva) na k-ésima componente do vector de termos independentes das restrições:  $b_k(\lambda_k) = b_k + \lambda_k$ . Designe-se por  $\underline{b}(\lambda_k)$  o vector alterado dos termos independentes, ou seja,  $\underline{b}(\lambda_k) = \underline{b} + \lambda_k \underline{e}_k$ , em que  $\underline{e}_k$  é um vector de zeros com um 1 no elemento k.

O problema consiste na determinação da região de valores de  $\lambda_k$  para a qual a base óptima se mantém.

Na solução óptima anterior, os valores das variáveis básicas são dados por  $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$  (por razões de simplicidade de notação, utiliza-se  $B^{-1}$  em vez de  $B^{*-1}$ , apesar de se estar a analisar a base óptima).

Como  $\underline{b}$  depende agora de  $\lambda_k$ , vem  $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}(\lambda_k)$ .

O valor óptimo da função objectivo  $z^*(\lambda_k) = \underline{c}_B B^{-1}\underline{b}(\lambda_k)$  também depende de  $\lambda_k$ .

Contudo, a condição de optimalidade,  $(z_j - c_j) = \underline{c}_B B^{-1}A_{\bullet j} - c_j \geq 0$ , para todo o j, tal que  $x_j$  é variável não básica, não depende do parâmetro de perturbação  $\lambda_k$ . A solução dual  $\underline{y} = \underline{c}_B B^{-1}$  não se altera.

Para que a base óptima se mantenha admissível é, então, necessário que os valores das variáveis básicas sejam não negativos:

$$B^{-1}\underline{b}(\lambda_k) \geq \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow B^{-1}\underline{b} + \lambda_k B^{-1}\underline{e}_k \geq \underline{0}$$

$\Leftrightarrow \underline{b}^* + \lambda_k B^{-1}\underline{e}_k \geq \underline{0}$ , em que  $\underline{b}^* = B^{-1}\underline{b}$  é o vector dos valores das variáveis básicas na solução óptima não perturbada ( $\lambda_k = 0$ ), cujos valores se encontram no quadro óptimo.

Da resolução do sistema de inequações resulta o intervalo admissível para  $\lambda_k$ , para o qual a base óptima permanece a mesma ( $\lambda_k^{\min} \leq \lambda_k \leq \lambda_k^{\max}$ ):

$$\lambda_k^{\min} = \begin{cases} \max_i \frac{-b_i^*}{\beta_{ik}} & \text{para } \beta_{ik} > 0 \\ -\infty & \text{se } \nexists \beta_{ik} > 0 \end{cases}$$

$$\lambda_k^{\max} = \begin{cases} \min_i \frac{-b_i^*}{\beta_{ik}} & \text{para } \beta_{ik} < 0 \\ +\infty & \text{se } \nexists \beta_{ik} < 0 \end{cases}$$

onde  $\beta_{ik}$  é o elemento (i,k) de  $B^{-1}$ .

Os valores das variáveis básicas, no intervalo admissível  $\lambda_k \in [\lambda_k^{\min}, \lambda_k^{\max}]$ , são dados por:

$$x_B(\lambda_k) = B^{-1} \underline{b}(\lambda_k) = B^{-1} \underline{b} + \lambda_k B^{-1} \underline{e}_k = \underline{b}^* + \lambda_k B_{\bullet k}^{-1}$$

O valor óptimo da função objectivo depende do parâmetro de perturbação, sendo dado, no intervalo admissível para  $\lambda_k$ , por:

$$z^*(\lambda_k) = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b}(\lambda_k) = \underline{y} \underline{b} + \underline{y} \underline{e}_k \lambda_k = z^* + y_k \lambda_k$$

onde  $y_k$  é a variável dual correspondente à restrição perturbada (k).

#### DEPENDÊNCIA DE UM PARÂMETRO ESCALAR

Consideremos agora que o vector dos termos independentes das restrições varia em torno de  $\underline{b}$ , em função do parâmetro de perturbação  $\lambda$ , com uma taxa de variação dada pelos elementos do vector  $\underline{h}$  (que tem a mesma dimensão de  $\underline{b}$ ):  $\underline{b}(\lambda) = \underline{b} + \lambda \underline{h}$ .

Ou seja, ao contrário do caso anterior, em que variava apenas o termo independente de uma restrição, podem eventualmente variar todos, com taxas de variação diferentes ( $h_i$ ), mas de acordo com o mesmo parâmetro de perturbação  $\lambda$ .

Como a condição de optimalidade não depende do parâmetro de perturbação, para que a base óptima se mantenha admissível é apenas necessário que:

$$\begin{aligned} & B^{-1} \underline{b}(\lambda) \geq \underline{0} \\ \Leftrightarrow & B^{-1} \underline{b} + \lambda B^{-1} \underline{h} \geq \underline{0} \\ \Leftrightarrow & \underline{b}^* + \lambda \underline{h}^* \geq \underline{0} \quad , \text{ em que } \underline{h}^* = B^{-1} \underline{h} . \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de inequações, obtém-se o intervalo admissível para o parâmetro de perturbação  $\lambda$ , em que a base óptima não se altera ( $\lambda^{\min} \leq \lambda \leq \lambda^{\max}$ ):

$$\lambda^{\min} = \begin{cases} \max_i \frac{-b_i^*}{h_i^*} & \text{para } h_i^* > 0 \\ -\infty & \text{se } \nexists h_i^* > 0 \end{cases}$$

$$\lambda^{\max} = \begin{cases} \min_i \frac{-b_i^*}{h_i^*} & \text{para } h_i^* < 0 \\ +\infty & \text{se } \nexists h_i^* < 0 \end{cases}$$

O valor óptimo da função objectivo, em função do parâmetro de perturbação  $\lambda$ , dentro do intervalo calculado, é:

$$z^*(\lambda) = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b}(\lambda) = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b} + \lambda \underline{c}_B B^{-1} \underline{h} = z^* + \lambda \underline{c}_B \underline{h}^* = z^* + \underline{y} \underline{h} \lambda$$

Os valores das variáveis básicas, em função de  $\lambda$ , com este dentro do intervalo admissível (isto é:  $\lambda \in [\lambda^{\min}, \lambda^{\max}]$ ), são dados por:

$$\underline{x}_B(\lambda) = B^{-1} \underline{b}(\lambda) = B^{-1} \underline{b} + \lambda B^{-1} \underline{h} = \underline{b}^* + \lambda \underline{h}^*$$

#### ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM RELAÇÃO A VARIAÇÕES DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO OBJECTIVO

Em geral, a incerteza dos dados também afecta os coeficientes da função objectivo. Por exemplo, os lucros unitários associados a cada actividade (variável de decisão) são estimativas e, portanto, envolvem incerteza.

Neste caso, a região admissível não se altera. Logo, a admissibilidade (primal) da base óptima não é afectada ( $B^{-1} \underline{b} \geq \underline{0}$  não depende de variações em  $\underline{c}$ ). Pretende-se, então, determinar o intervalo de variação de coeficientes da função objectivo, para o qual os valores das variáveis, na solução óptima, não se alteram.

Tal como na análise de sensibilidade em relação aos termos independentes das restrições, o estudo consistirá na variação de uma única componente, sendo útil distinguir os casos em que se trata de um coeficiente de uma variável básica, daqueles em que varia um coeficiente de uma variável não básica. Também se estudará a variação simultânea de todas as componentes de  $\underline{c}$ , em função de um parâmetro de perturbação escalar.

#### VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE UMA VARIÁVEL NÃO BÁSICA

74

Considere-se que há apenas uma perturbação (aditiva) no coeficiente de uma dada variável não básica  $x_r$ :

$$c_r(v_r) = c_r + v_r$$

A solução óptima anterior verifica a condição de optimalidade para  $\underline{c}$  não perturbado, ou seja:

$$z_j - c_j = \underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet j} - c_j \geq 0, \text{ para todo o } j, \text{ sendo } x_j \text{ uma variável não básica.}$$

Para simplificar a notação, designe-se por  $\Delta c_j$  o valor de  $z_j - c_j$ . A perturbação de uma única componente  $c_r$ , correspondente à variável não básica  $x_r$ , afecta o valor de  $\Delta c_r$ , mas não afecta os outros valores  $\Delta c_j$ . Assim, para a variável não básica  $x_r$ :

$$\Delta c_r(v_r) = \underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet r} - c_r(v_r) = \underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet r} - c_r - v_r$$

Note-se que os elementos do vector de coeficientes da função objectivo correspondentes às variáveis básicas, isto é,  $\underline{c}_B$ , são independentes de  $v_r$ .

A solução permanece óptima se e só se

$$\begin{aligned} \Delta c_r(v_r) = \underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet r} - c_r(v_r) = \underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet r} - c_r - v_r &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \Delta c_r(v_r) = \Delta c_r - v_r &\geq 0 \end{aligned}$$

O intervalo de variação admissível para o parâmetro de perturbação  $v_r$ , em que a base óptima não se altera, é dado por:

$$v_r \leq \Delta c_r$$

No limite, quando a igualdade se verifica ( $v_r = \Delta c_r$ ), existe uma solução (básica) óptima alternativa, em que  $x_r$  se torna variável básica.

Como os coeficientes das variáveis básicas não são alterados por uma variação do coeficiente de uma variável não básica, o valor da função objectivo não se altera, ou seja,  $z^*(v_r) = z^*$ .

#### VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE UMA VARIÁVEL BÁSICA

Considere-se uma perturbação do mesmo tipo,  $c_r(v_r) = c_r + v_r$ , mas sendo agora  $x_r$  uma variável básica. Uma vez que  $c_r$  é um elemento do vector  $\underline{c}_B$ , esta perturbação afectará todas as expressões que contenham  $\underline{c}_B$ , nomeadamente a linha dos custos reduzidos  $z_j - c_j \equiv \Delta c_j$  e o valor da função objectivo.

Para que a optimalidade da base se mantenha, é necessário que:

$$\Delta c_j(v_r) \geq 0, \text{ para todo o } j, \text{ sendo } x_j \text{ é uma variável não básica.}$$

Para  $c_r(v_r) = c_r + v_r$ , obtém-se a seguinte linha dos custos reduzidos em função de  $v_r$ :

$$\begin{aligned} \Delta c_j(v_r) = \underline{c}_B(v_r) B^{-1} A_{\bullet j} - c_j &= (\underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet j} - c_j) + v_r B_{r\bullet}^{-1} A_{\bullet j} \\ \Leftrightarrow \Delta c_j(v_r) = \Delta c_j + v_r B_{r\bullet}^{-1} A_{\bullet j} \end{aligned}$$

Para que a condição de optimalidade  $\Delta c_j(v_r) \geq 0$ , para todo o  $j$ , se mantenha (sem alteração da base óptima), resulta um conjunto de inequações em  $v_r$ , cuja resolução conduz ao intervalo de variação admissível de  $v_r$ ,  $[v_r^{\min}, v_r^{\max}]$ :

$$v_r^{\min} = \begin{cases} \max_j \frac{-\Delta c_j}{a'_{rj}} & \text{para } a'_{rj} > 0 \\ -\infty & \text{se } \nexists a'_{rj} > 0 \end{cases}$$

$$v_r^{\max} = \begin{cases} \min_j \frac{-\Delta c_j}{a'_{rj}} & \text{para } a'_{rj} < 0 \\ +\infty & \text{se } \nexists a'_{rj} < 0 \end{cases}$$

onde  $a'_{rj} = B_r^{-1} A_{\bullet j}$

O valor óptimo da função objectivo, alterado pela perturbação, é:

$$z^*(v_r) = \underline{c}_B(v_r) B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b} + B_r^{-1} \underline{b} v_r = z^* + B_r^{-1} \underline{b} v_r.$$

#### VARIAÇÃO DE TODOS OS COEFICIENTES COM UM PARÂMETRO ESCALAR

Considere-se agora que todos os coeficientes da função objectivo (associados quer a variáveis básicas, quer a não básicas) podem variar com um mesmo parâmetro de perturbação  $v$ , eventualmente com taxas de variação diferentes dadas pelo vector  $\underline{d}$  (da mesma dimensão que  $\underline{c}$ ), isto é:  $\underline{c}(v) = \underline{c} + v \underline{d}$ .

Para que se mantenha a condição de optimalidade, é necessário que:

$$\Delta c_j(v) = \underline{c}_B(v) B^{-1} A_{\bullet j} - c_j(v) \geq 0, \text{ para todo o } j, \text{ sendo } x_j \text{ uma variável não básica.}$$

Seja  $\underline{d}_B$  o sub-vector de  $\underline{d}$  correspondente às variáveis básicas. Então:

76

$$\Delta c_j(v) = (\underline{c}_B + v \underline{d}_B) B^{-1} A_{\bullet j} - (c_j + v d_j)$$

$$\Leftrightarrow \Delta c_j(v) = (\underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet j} - c_j) + v (\underline{d}_B B^{-1} A_{\bullet j} - d_j)$$

$$\Leftrightarrow \Delta c_j(v) = \Delta c_j + v (\underline{d}_B B^{-1} A_{\bullet j} - d_j)$$

$$\Leftrightarrow \Delta c_j(v) = \Delta c_j + v \Delta d_j$$

onde  $\Delta d_j = \underline{d}_B B^{-1} A_{\bullet j} - d_j$  é o custo reduzido relativo ao elemento  $j$  de  $\underline{d}$ .

A partir deste conjunto de inequações,  $\Delta c_j(v) \geq 0$ , é possível obter o intervalo de variação admissível,  $[v^{\min}, v^{\max}]$ , em que a base óptima se mantém:

$$v^{\min} = \begin{cases} \max_j \frac{-\Delta c_j}{\Delta d_j} & \text{para } \Delta d_j > 0 \\ -\infty & \text{se } \nexists \Delta d_j > 0 \end{cases}$$

$$v^{\max} = \begin{cases} \min_j \frac{-\Delta c_j}{\Delta d_j} & \text{para } \Delta d_j < 0 \\ +\infty & \text{se } \nexists \Delta d_j < 0 \end{cases}$$

O valor óptimo da função objectivo, em termos do parâmetro de perturbação, é dado por:

$$z^*(v) = \underline{c}_B(v) B^{-1} \underline{b} = (\underline{c}_B + v \underline{d}_B) B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b} + v \underline{d}_B B^{-1} \underline{b} = z^* + v \underline{d}_B \underline{b}^*$$

#### INTRODUÇÃO DE UMA NOVA ACTIVIDADE (VARIÁVEL DE DECISÃO)

Uma vez construído um modelo matemático, e obtida a respectiva solução óptima para um conjunto específico de dados, é muitas vezes necessário avaliar o interesse da introdução de uma nova actividade, por exemplo, avaliar a viabilidade do fabrico de um novo produto num plano de produção já estabelecido. A partir do plano de produção óptimo actual (que não considera a produção do novo produto), a questão consiste em determinar se a nova variável de decisão (representando o novo produto) deve, ou não, tornar-se básica.

A introdução de uma nova variável de decisão,  $x_{n+1}$ , num modelo de PL, expande a região admissível. Portanto, após a introdução de uma nova variável de decisão, há duas situações possíveis: o valor óptimo da função objectivo mantém-se (ou seja, a nova variável será não básica para o problema aumentado) ou, pelo contrário, o valor da função objectivo melhora (e, então, a nova variável de decisão será básica na nova solução óptima). No contexto da análise de viabilidade de introdução de um novo produto no plano de produção, estas situações correspondem, respectivamente, aos casos em que não há interesse em fabricar o novo produto e àqueles em que a sua introdução no plano de produção é vantajosa.

A análise de sensibilidade da solução óptima de um modelo de PL, quando se introduzem novas variáveis de decisão, tem assim um grande interesse prático, permitindo, com um custo computacional reduzido, obter a nova solução óptima (para o problema aumentado), a partir da solução óptima do problema inicial. Este tipo de estudo permite ainda determinar a partir de que valor de contribuição unitária para a função objectivo (ou seja, de que valor de  $c_{n+1}$ ) é vantajoso fabricar o novo produto, bem como estimar de que forma os actuais níveis de produção óptimos são afectados pela introdução de novos produtos (Murty, 1983).

Sejam  $A_{\bullet n+1}$  o vector dos coeficientes da nova variável de decisão  $x_{n+1}$  na matriz tecnológica, e  $c_{n+1}$  o respectivo coeficiente na função objectivo.

O problema aumentado é:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \underline{c} \underline{x} + c_{n+1} x_{n+1} \\ \text{s. a:} \quad & [A \quad A_{\bullet n+1}] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{b} \\ & \begin{bmatrix} \underline{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

A base óptima anterior, a que corresponde a matriz da base B, permanece admissível para o problema aumentado, com  $x_{n+1}=0$ .

Pelo critério de optimalidade, a base óptima anterior permanece uma base admissível óptima para o problema aumentado, se o custo reduzido da nova variável  $x_{n+1}$ , em relação à base de matriz B, for não negativo:

$$z_{n+1} - c_{n+1} \equiv \Delta c_{n+1} = \underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet n+1} - c_{n+1} \geq 0$$

Caso contrário, se  $\Delta c_{n+1} < 0$ , partindo do quadro óptimo correspondente a B, como quadro inicial, e tornando básica  $x_{n+1}$ , obtém-se, após o número necessário de pivotações, a solução óptima para o problema aumentado. Eventualmente pode bastar uma única pivotação (ou seja, tornar  $x_{n+1}$  básica) para alcançar a nova solução óptima.



## INTRODUÇÃO DE UMA NOVA RESTRIÇÃO (DESIGUALDADE)

A análise de sensibilidade da solução óptima, quando se introduz uma nova restrição, permite estudar as alterações necessárias nos actuais níveis de produção óptimos, bem como determinar o preço sombra associado ao novo recurso (representado pela nova restrição).

Considere-se a nova restrição  $A_{m+1} \cdot \underline{x} \leq b_{m+1}$ , e seja  $x_{n+1}$  a respectiva variável desvio (*slack*), tal que:

$$A_{m+1} \cdot \underline{x} + x_{n+1} = b_{m+1}$$

O problema modificado é:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \underline{c} \cdot \underline{x} + 0 \cdot x_{n+1} \\ \text{s. a:} \quad & \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{m+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ b_{m+1} \end{bmatrix} \\ & x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n+1 \end{aligned}$$

Quando se introduz uma nova restrição, a região admissível pode manter-se ou ser restringida. Se o problema original tiver uma solução admissível óptima, então o problema com a nova restrição, ou é não admissível, ou tem uma solução admissível óptima em que o valor da função objectivo não pode ser melhor do que o valor do óptimo para o problema original. Isto é:

$$z^*(\underline{x}) = (\max z(\underline{x}): \underline{x} \in S) \geq (\max z(\underline{x}): \underline{x} \in S_1), \text{ em que } S \text{ é a região admissível do problema original e } S_1 \text{ é a região admissível do problema modificado.}$$

Se a solução óptima do problema original,  $\underline{x}^0$ , for tal que  $\underline{x}^0 \in S_1$  (ou seja, satisfizer a nova restrição), então  $\underline{x}^0$  permanece óptima para o problema modificado, e o vector das variáveis básicas na solução óptima é o mesmo do problema original, aumentado da *slack* (não negativa) relativa à nova restrição.

Se  $\underline{x}^0$  não satisfizer a nova restrição, então:

$$x_{n+1} = -A_{m+1} \cdot \underline{x}^0 + b_{m+1} < 0$$

Incluindo  $x_{n+1}$ , como variável básica adicional, podemos aumentar a base óptima do problema original (cuja matriz é B), obtendo uma base para o

problema modificado (cuja matriz é  $B_a$ ). O correspondente vector das variáveis básicas será:

$$x_a = \begin{bmatrix} x_B \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

Contudo, dado que  $x_{n+1} < 0$ ,  $B_a$  corresponde a uma base não admissível para o problema modificado.

Como  $c_{n+1}=0$ , o custo reduzido de  $x_j$ , em relação à base cuja matriz é  $B_a$ , é igual ao custo reduzido de  $x_j$  em relação à base cuja matriz é  $B$ , ou seja:

$$\Delta c_j \geq 0, \text{ para todo o } j$$

Isto significa que  $B_a$  corresponde a uma base dual admissível, mas primal não admissível para o problema modificado. Este problema pode então ser resolvido usando o método dual simplex<sup>1</sup>, tomando  $B_a$  como matriz da base inicial.

No quadro simplex óptimo do problema original, introduz-se a nova restrição (que passa a constituir a linha  $m+1$  do quadro para o problema modificado).  $x_{n+1}$  é a variável básica associada a essa linha. Supondo que se está a trabalhar com o quadro estendido, é necessário efectuar previamente as operações necessárias neste quadro, de modo a *recuperar* a base, dado que no respectivo processo de construção foram eventualmente *destruídos* os vectores unitários nas colunas correspondentes às variáveis básicas. Como  $x_{n+1} < 0$ , a solução é primal não admissível, procedendo-se às iterações necessárias do método dual simplex para obter a nova solução óptima.

#### EXEMPLO DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

80

Nesta secção ilustra-se a análise de sensibilidade da solução óptima de um problema de programação linear, em relação à variação dos termos independentes das restrições e dos coeficientes da função objectivo, bem como em relação à introdução de uma nova restrição e de uma nova variável de decisão.

<sup>1</sup> O método dual simplex está fora do âmbito deste texto. Contudo, torna-se imprescindível introduzi-lo neste parágrafo. Limitámo-nos a tratá-lo sumariamente no exemplo da secção seguinte. O leitor interessado deve consultar, por exemplo, Murty (1983).

Para este efeito usa-se o problema 1, cuja formulação matemática se relembra aqui:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 25x_1 + 20x_2 \\
 \text{s. a} \quad & x_1 + x_2 \leq 50 \quad (\text{slack } s_1) \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 80 \quad (\text{slack } s_2) \\
 & 2x_1 + 5x_2 \leq 220 \quad (\text{slack } s_3) \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

O quadro óptimo deste problema é:

$\underline{x}_B$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$x_2$	0	1	2	-1	0	20
$x_1$	1	0	-1	1	0	30
$s_3$	0	0	-8	3	1	60
$z_j - c_j$	0	0	15	5	0	1150

Qual o intervalo de variação admissível para  $b_1$ , sem que a base óptima se altere? Qual a variação do valor óptimo da função objectivo em função de  $b_1$ ?

Para que a solução se mantenha óptima (dual e primal admissível) é, então, necessário que:

$$\begin{aligned}
 & B^{-1} \underline{b}(\lambda_1) \geq \underline{0} \\
 \Leftrightarrow & B^{-1} \underline{b} + \lambda_1 B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq \underline{0} \\
 \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix} \geq \underline{0} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 \geq -10 \\ \lambda_1 \leq 30 \\ \lambda_1 \leq 7.5 \end{cases} \Leftrightarrow -10 \leq \lambda_1 \leq 7.5
 \end{aligned}$$

ou seja,  $40 \leq b_1 \leq 57.5$ .

O valor óptimo da função objectivo, dentro deste intervalo de variação, em função do parâmetro de perturbação  $\lambda_1$ , é dado pela expressão:

$$z^*(\lambda_1) = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b}(\lambda_1) = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b} + \lambda_1 \underline{y} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = z^* + y_1 \lambda_1 = 1150 + 15 \lambda_1$$

Qual o intervalo de variação admissível para os termos independentes das restrições se estes forem afectados por um parâmetro de perturbação  $\lambda$ , de acordo com elementos do vector  $\underline{h}^T = (2, 3, 2)$ , sem que a base óptima se altere?

$$\begin{aligned} B^{-1} \underline{b}(\lambda) &\geq \underline{0} \\ \Leftrightarrow B^{-1} \underline{b} + \lambda B^{-1} \underline{h} &\geq \underline{0} \\ \Leftrightarrow \underline{b}^* + \lambda \underline{h}^* &\geq \underline{0}, \text{ em que } \underline{b}^* = B^{-1} \underline{b} \text{ e } \underline{h}^* = B^{-1} \underline{h} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \geq \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \geq -20 \\ \lambda \geq -30 \\ \lambda \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow -20 \leq \lambda \leq 12$$

O valor óptimo da função objectivo dentro deste intervalo de variação, em função do parâmetro de perturbação  $\lambda$ , é dado pela expressão:

$$z^*(\lambda) = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b}(\lambda) = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b} + \lambda \underline{c}_B B^{-1} \underline{h} = z^* + \underline{y} \underline{h} \lambda = 1150 + 45 \lambda$$

Qual o intervalo de variação admissível para  $c_2$ , sem que a base óptima se altere? Qual a variação do valor óptimo da função objectivo em função de  $c_2$ ?

82

Como  $c_2$  é um elemento do vector  $\underline{c}_B$ , todas as expressões que contenham  $\underline{c}_B$  serão afectadas, nomeadamente a linha dos custos reduzidos,  $z_j - c_j \equiv \Delta c_j$ , e o valor da função objectivo. Quando a variação é apenas numa única componente, é talvez mais simples, em vez de usar o parâmetro de perturbação, usar o coeficiente que se pretende estudar directamente como incógnita. Adopta-se esta abordagem.

Para que a optimalidade da base se mantenha, é necessário que:

$\Delta c_j(c_2) \geq 0$ , para todo o  $j$ , sendo  $x_j$  uma variável não básica.

As variáveis não básicas são  $s_1$  e  $s_2$ . Então,

$$s_1: \underline{c}_B(c_2) B^{-1} A_{\bullet s_1} - c_{s_1} = (c_2, 25, 0) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix} - 0 \geq 0 \Leftrightarrow 2c_2 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow c_2 \geq 12.5$$

$$s_2: \underline{c}_B(c_2) B^{-1} A_{\bullet s_2} - c_{s_2} = (c_2, 25, 0) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 0 \geq 0 \Leftrightarrow -c_2 + 25 \geq 0 \Leftrightarrow c_2 \leq 25$$

Daqui se conclui que, para  $c_2 \in [12.5, 25]$ , a base óptima mantém-se. Os valores das variáveis não se alteram, mas o valor óptimo da função objectivo é afectado pela perturbação em  $c_2$ :

$$z^*(c_2) = \underline{c}_B(c_2) B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B(c_2) \underline{b}^* = (c_2, 25, 0) \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} = 20 c_2 + 750.$$

Considere-se agora que todos os coeficientes da função objectivo variam com um mesmo parâmetro de perturbação  $v$ , com taxas de variação dadas pelos elementos do vector  $(-1, 2)$ .

Designa-se por  $\underline{d}$ , o vector de dimensão  $(1 \times 5)$  que se obtém, a partir de  $(-1, 2)$ , acrescentando-se 0's para as componentes correspondentes às variáveis desvio. Assim,  $\underline{d} = (-1, 2, 0, 0, 0)$ .

$$\underline{c}(v) = \underline{c} + v \underline{d}$$

Para que a condição de optimalidade se mantenha, é necessário que:

$\Delta c_j(v) = \underline{c}_B(v) B^{-1} A_{\bullet j} - c_j(v) \geq 0$ , para todo o  $j$ , sendo  $x_j$  uma variável não básica.

$\Leftrightarrow \Delta c_j(v) = (\underline{c}_B + v \underline{d}_B) B^{-1} A_{\bullet j} - (c_j + v d_j) \geq 0$ , para todo o  $j$ , sendo  $x_j$  uma variável não básica, e  $\underline{d}_B$  o vector dos elementos de  $\underline{d}$  correspondentes às variáveis básicas, isto é  $\underline{d}_B = (2, -1, 0)$ .

As variáveis não básicas são  $s_1$  e  $s_2$ . Então,

$$s_1: (\underline{c}_B + v \underline{d}_B) B^{-1} A_{\bullet s_1} - (c_{s_1} + v d_{s_1}) \geq 0 \Leftrightarrow (\underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet s_1} - c_{s_1}) + v (\underline{d}_B B^{-1} A_{\bullet s_1} - d_{s_1}) \geq 0$$

$$15 + v (2, -1, 0) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow 15 + 5v \geq 0 \Leftrightarrow v \geq -3$$

$$s_2: (\underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet s_2} - c_{s_2}) + v (\underline{d}_B B^{-1} A_{\bullet s_2} - d_{s_2}) = 5 + v (2, -1, 0) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$5 - 3v \geq 0 \Leftrightarrow v \leq 5/3$$

Logo, para  $v \in [-3, 5/3]$ , a base óptima mantém-se, bem como os valores de todas as variáveis.

O valor óptimo da função objectivo, em termos do parâmetro de perturbação  $v$ , é:

$$z^*(v) = \underline{c}_B(v) B^{-1} \underline{b} = (\underline{c}_B + v \underline{d}_B) B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B B^{-1} \underline{b} + v \underline{d}_B B^{-1} \underline{b} =$$

$$= z^* + \underline{d}_B \underline{b}^* v = 1150 + (2, -1, 0) \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} v = 1150 + 10v.$$

*Se for introduzida uma nova variável  $x_3$ , cujos coeficientes na matriz  $A$  são  $A_{\bullet 3} = (1, 2, 4)^T$ , qual o intervalo de valores do respectivo coeficiente na função objectivo ( $c_3$ ), para que seja vantajoso tornar  $x_3$  variável básica? Qual a variável que se tornaria não básica (por troca com  $x_3$ )?*

A base óptima anterior permanece uma base admissível para o problema aumentado, com  $x_3=0$ . Pelo critério de optimalidade, a base óptima anterior permanece uma base admissível óptima para o problema aumentado, se o custo reduzido da nova variável  $x_3$  for não negativo, isto é, se:

$$(z_3 - c_3) \equiv \Delta c_3 = \underline{c}_B B^{-1} A_{\bullet 3} - c_3 \geq 0$$

84

Como  $\underline{y} = \underline{c}_B B^{-1} = (15, 5, 0)$ , vem:

$$(15, 5, 0) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - c_3 \geq 0 \Leftrightarrow c_3 \leq 25, \text{ para o intervalo de valores de } c_3,$$

em que a base óptima se mantém.

Para  $c_3 > 25$ , o custo reduzido da nova variável  $x_3$ , é  $(z_3 - c_3) < 0$  e, portanto,  $x_3$  deve tornar-se uma variável básica. Usando, por exemplo,  $c_3 = 30$ , vem  $(z_3 - c_3) = -5$ .

Para determinar a variável que se torna não básica, por troca com  $x_3$ , é necessário calcular a coluna de  $x_3$  na matriz A, modificada pela base ótima anterior ( $B^{-1} A_{\bullet 3}$ ):

$$B^{-1} A_{\bullet 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para  $c_3 = 30$ , se se incluir a coluna actualizada de  $x_3$  no quadro ótimo do problema original, vem:

$\underline{x}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$x_2$	0	1	0	2	-1	0	20
$x_1$	1	0	1	-1	1	0	30
$s_3$	0	0	2	-8	3	1	60
$z_j - c_j$	0	0	-5	15	5	0	1150

Tanto  $x_1$  como  $s_3$  são candidatas a tornar-se não básicas, o que indica que a próxima solução básica será degenerada. Escolhendo, por exemplo,  $x_1$ , o quadro correspondente à nova solução básica é:

$\underline{x}_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$x_2$	0	1	0	2	-1	0	20
$x_3$	1	0	1	-1	1	0	30
$s_3$	-2	0	0	-6	1	1	0
$z_j - c_j$	5	0	0	10	10	0	1300

Neste caso, uma única pivotação foi suficiente para alcançar a nova solução ótima.

Note-se que, se se tivesse escolhido  $s_3$  para se tornar não básica, obter-se-ia outra solução básica degenerada, mas que não verificaria a condição de optimalidade. Nesse caso, seria necessário continuar com o processo de

pivotação, até se verificar a condição de optimalidade, para se poder concluir da optimalidade da solução.

*Qual será a alteração na solução óptima do problema, se for introduzida uma nova restrição  $2x_1 + 3x_2 \leq 102$  ?*

Seja  $s_4$  a *slack* da nova restrição:

$$2x_1 + 3x_2 + s_4 = 102$$

A solução óptima anterior ( $x_1=30$ ,  $x_2=20$ ) não satisfaz a nova restrição. Introduzindo esta nova restrição no quadro simplex óptimo do problema original, que passa a constituir a linha 4 do quadro, e sendo  $s_4$  a variável básica associada a essa linha, virá  $s_4 = -18$ . Ou seja, a nova base, assim constituída, é não admissível para o problema aumentado.

Como  $c_{s_4}=0$ , o custo reduzido de qualquer outra variável  $x_j$ , em relação à base do problema modificado, permanece o mesmo, isto é, a base permanece óptima. A nova base é uma base dual admissível (a condição de optimalidade permanece satisfeita), mas primal não admissível para o problema modificado.

Considerando a base modificada (não admissível), como base inicial, é então necessário usar o método **dual simplex**, até recuperar a admissibilidade da base.

O método **dual simplex** não é mais do que o método simplex aplicado às soluções básicas complementares no problem dual.

Se todos os valores na linha dos custos reduzidos ( $z_j - c_j$ ) forem não negativos, mas existirem variáveis básicas com valor negativo, a solução básica correspondente é dual admissível, mas primal não admissível.

A partir desta solução básica, o método dual simplex vai piorando, em iterações sucessivas, o valor da função objectivo, mantendo satisfeita a condição de optimalidade, até que todas as variáveis tenham valores não negativos. A solução assim obtida é óptima (primal e dual admissível).

A variável que se *torna não básica* é a que tem o valor mais negativo. Considerando o esquema do quadro simplex apresentado no Quadro I.1, a variável que se torna não básica é  $x_{B_r}$  (variável básica actual da linha  $r$ ), tal que:

$$b'_r = \min_{i=1, \dots, m} \{b'_i \mid b'_i < 0\}$$



A variável que se *torna básica* é a que tem associado o menor quociente entre os elementos da linha dos custos reduzidos e o valor absoluto dos elementos negativos na linha *pivot* (linha da variável que se torna não básica). Isto é, torna-se básica a variável  $x_p$ , tal que:

$$\left| \frac{z_p - c_p}{a'_{rp}} \right| = \min_{j \in N} \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{a'_{rj}} \right| \mid a'_{rj} < 0 \right\}$$

em que  $N$  é o conjunto dos índices das variáveis não básicas actuais e  $r$  a linha da variável que se torna não básica.

O elemento *pivot* é  $a'_{rp}$  (elemento negativo na intersecção da linha  $r$  com a coluna  $p$ ), e a actualização do quadro é feita como no método simplex.

Acrescentando-se a nova restrição ( $2x_1 + 3x_2 + s_4 = 102$ ) ao quadro óptimo do problema anterior, vem:

$\underline{x}_B$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	
$x_2$	0	1	2	-1	0	0	20
$x_1$	1	0	-1	1	0	0	30
$s_3$	0	0	-8	3	1	0	60
$s_4$	2	3	0	0	0	1	102
$z_j - c_j$	0	0	15	5	0	0	1150

Contudo, é necessário efectuar previamente as operações necessárias neste quadro, de modo a *recuperar* a base, dado que, no seu processo de construção, foram *destruídos* os vectores unitários nas colunas correspondentes às variáveis básicas  $x_1$  e  $x_2$ . Este processo conduz à seguinte actualização progressiva da linha de  $s_4$ :

$s_4$	0	3	2	-2	0	1	42
$s_4$	0	0	-4	1	0	1	-18

O quadro correspondente à nova base (dual admissível, mas primal não admissível), para o problema modificado, é:

$\underline{x}_B$	x1	x2	s1	s2	s3	s4	
x2	0	1	2	-1	0	0	20
x1	1	0	-1	1	0	0	30
s3	0	0	-8	3	1	0	60
s4	0	0	-4	1	0	1	-18
$z_j - c_j$	0	0	15	5	0	0	1150

Usando o método dual simplex,  $s_1$  torna-se básica por troca com  $s_4$ :

$\underline{x}_B$	x1	x2	s1	s2	s3	s4	
x2	0	1	0	$-1/2$	0	$1/2$	11
x1	1	0	0	$3/4$	0	$-1/4$	$69/2$
s3	0	0	0	1	1	-2	96
s1	0	0	1	$-1/4$	0	$-1/4$	$9/2$
$z_j - c_j$	0	0	0	$35/4$	0	$15/4$	1082.5

o que conduz à nova base óptima.

## CAPÍTULO II

### PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTICRITÉRIO

#### 1. INTRODUÇÃO

A Programação Linear Multicritério pode ser encarada como uma extensão do modelo clássico de Programação Linear ao caso em que se considera mais do que uma função objectivo. Contudo, se essas funções forem conflituosas entre si, deixa de fazer sentido falar em solução óptima. Estamos perante uma ruptura de paradigma. A Programação Linear obedece ao paradigma da optimalidade, isto é, verifica-se a completa comparabilidade entre pares de alternativas admissíveis e a transitividade dessas comparações. A um problema deste tipo chama-se, em matemática da optimização, um problema matematicamente bem formulado, visto que se dispõe de utensílios matemáticos suficientes para resolver as três questões fundamentais da análise, a saber: existência, unicidade e construção da solução. Quando se considera mais do que uma função objectivo, estas propriedades deixam de ser válidas. Um problema com objectivos múltiplos (multiobjectivo ou multicritério)

$$\max \underline{z} = \begin{bmatrix} z_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ z_p(\underline{x}) \end{bmatrix} = C \underline{x} \text{ (em que } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} \text{ e } c_1, \dots, c_p \text{ são vectores linha } 1 \times n,$$

cada um dos quais corresponde a uma das funções objectivo), consiste em determinar o(s) vector(es)  $\underline{x}'(s)$ , pertencente(s) à região admissível, que

maximiza(m) simultaneamente os  $p$  objectivos considerados<sup>1</sup>. Uma vez que as funções objectivo são, em geral, conflituosas entre si, não existe óptimo no sentido habitual. Há, no entanto, como se verá em detalhe no próximo parágrafo, um conjunto de soluções privilegiadas – soluções *eficientes*, também designadas na literatura por *não dominadas*, *não inferiores* ou *óptimas de Pareto*.

Zeleny (1982) mostra, de forma muito sugestiva, as diferenças entre modelos de optimização monocritério e multicritério. Seguindo um raciocínio idêntico considere-se um saco de laranjas de que se pretende seleccionar a maior e, numa segunda opção, a maior e a mais doce simultaneamente. Obviamente não se trata de um exemplo de Programação Linear, mas a sua análise é muito sugestiva, e as conclusões válidas em Programação Linear. A selecção da maior laranja é um problema de optimização, portanto puramente técnico. Trata-se de medir e ordenar as laranjas. É assim, em qualquer problema de optimização. No segundo caso, se a maior laranja não for a mais doce, não há solução óptima para o problema proposto. A selecção de uma laranja obriga a um compromisso subjectivo entre os dois critérios, não se limitando a aspectos puramente técnicos. Contudo, há um subconjunto de laranjas a que deverá pertencer a solução de compromisso, o conjunto das soluções eficientes, que é constituído pelas laranjas para as quais não existe qualquer outra que seja simultaneamente maior e mais doce.

## 2. CONCEITOS ELEMENTARES

Para introduzir os principais conceitos básicos da programação linear multiobjectivo (PLMO), considere-se o problema 1 introduzido no capítulo anterior. Suponha-se que, para além do lucro, que se pretende maximizar, os produtos I e II dão lugar a outros benefícios (a maximizar) ou prejuízos (a minimizar) os quais, nomeadamente por não serem medidos em termos monetários, não podem ser agregados na função objectivo lucro.

---

<sup>1</sup> Note-se que, ao longo da exposição, se admite, sem perda de generalidade, que cada função  $z_i(x)$ ,  $i=1, \dots, p$ , tem máximo no domínio considerado e que as funções objectivo são todas a maximizar. Obviamente que, em substância, nada se alteraria se pretendêssemos considerar problemas a minimizar, ou, mesmo, casos em que algumas funções objectivo fossem a maximizar e outras a minimizar. Neste último caso, começa-se por transformar o problema original num outro, em que todas as funções objectivo são a maximizar (ou a minimizar), utilizando o procedimento normal, em programação linear, para transformar um problema de maximização em minimização (ou o oposto).

A maximização do estado de conservação das máquinas ou a minimização do impacto ambiental de resíduos provenientes do processo de fabrico são exemplos de outras funções objectivo possíveis.

De uma forma genérica, um problema de PLMO formula-se da seguinte forma:

$$(II.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \max & z_1 = z_1(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \quad (\text{ou } z_1 = \underline{c}_1 \underline{x}) \\ & \dots \\ \max & z_p = z_p(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n c_{pj} x_j \quad (\text{ou } z_p = \underline{c}_p \underline{x}) \\ \text{s. a:} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i=1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{array} \right. \quad (\text{ou } S = \{ \underline{x} \in \mathfrak{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \})$$

(Sem perda de generalidade, admite-se que a matriz A tem característica m e que todas as restrições foram convertidas em igualdades, com a introdução de variáveis desvio).

Por questões de simplicidade, considere-se, para fins ilustrativos, o problema 1 acrescido de uma função objectivo. Suponhamos que esta função objectivo,  $z_2 = x_1 + 8 x_2$ , é a maximizar e que mede a fiabilidade do sistema produtivo, em função das quantidades produzidas dos produtos I e II.

Seja este o problema 3 cuja formulação é:

$$\begin{array}{ll} \max & z_1 = 25 x_1 + 20 x_2 \quad (\text{lucro}) \\ \max & z_2 = x_1 + 8 x_2 \quad (\text{fiabilidade do sistema produtivo}) \\ \text{s. a:} & x_1 + x_2 \leq 50 \quad (1) - \text{máquinas do tipo A} \\ & 2 x_1 + x_2 \leq 80 \quad (2) - \text{máquinas do tipo B} \\ & 2 x_1 + 5 x_2 \leq 220 \quad (3) - \text{máquinas do tipo C} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Como se pode ver, na figura II.1, não há uma solução que optimize simultaneamente as 2 funções objectivo. A função objectivo  $z_1$  é otimizada na solução  $\underline{x} = (30,20)$ , ponto P, onde  $z_1 = 1150$  e  $z_2 = 190$ ; a função objectivo  $z_2$  é otimizada na solução  $\underline{x} = (0,44)$ , ponto R, onde  $z_1 = 880$  e  $z_2 = 352$ . A solução representada na figura II.1 pelo ponto Q,  $\underline{x} = (10,40)$ , é uma solução intermédia entre as duas anteriores, onde  $z_1 = 1050$  e  $z_2 = 330$ .

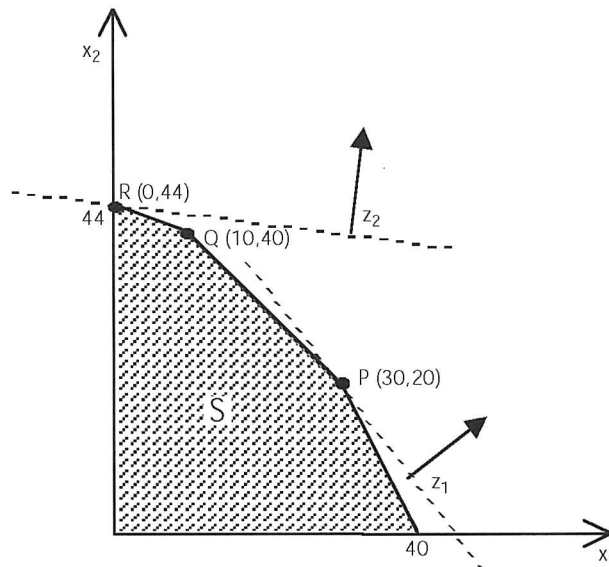


Figura II.1 – S representa a região admissível do problema 3 no espaço (das variáveis) de decisão.

As soluções P, Q e R dizem-se *eficientes*, porque, para qualquer uma delas, não existe nenhuma outra solução admissível que seja igual ou melhor, nas duas funções objectivo, e estritamente melhor em pelo menos numa dessas funções objectivo. O mesmo acontece com qualquer solução das arestas [PQ] e [QR].

A figura II.2 mostra, para P, R e para o ponto U da aresta [PQ], os cones (que se podem designar por cones de dominância) onde se localizariam soluções melhores em ambas as funções objectivo. Como se pode ver, não há, para além dos pontos P, R e U, intersecção desses cones com a região admissível. Daí dizer-se que as soluções de  $[PQ] \cup [QR]$  (incluindo os vértices) são *eficientes*, porque *não são dominadas* por outras soluções admissíveis. O mesmo já não se passa com qualquer outra solução da região admissível.

A título de exemplo, veja-se na figura II.3 as regiões de soluções que *dominam*, respectivamente, duas soluções particulares, V e T. Estas soluções não são eficientes porque existem outras soluções admissíveis que melhoram simultaneamente ambas as funções objectivo.

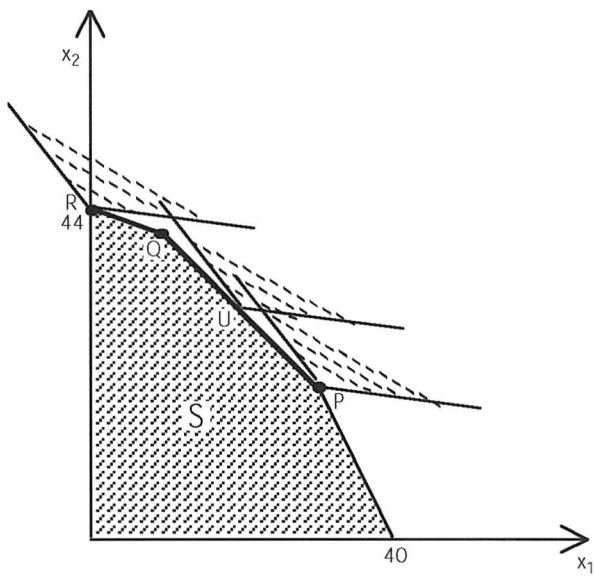


Figura II.2 – Soluções eficientes do problema 3.

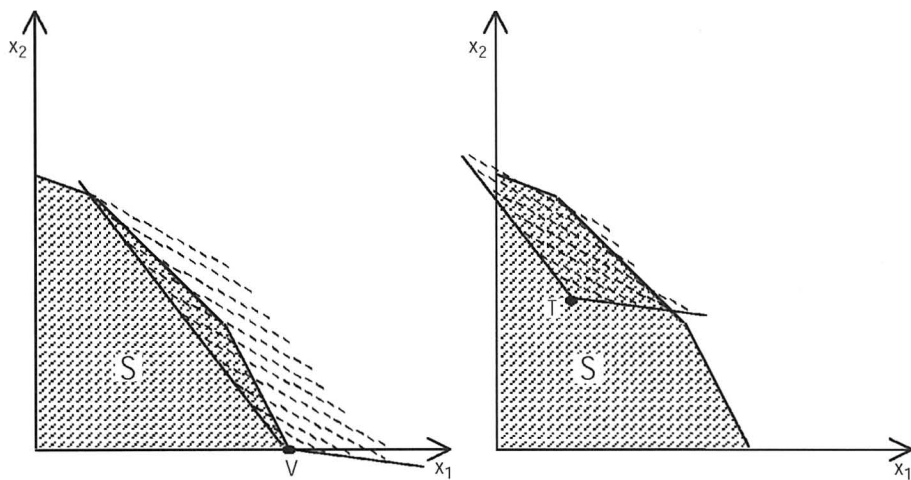


Figura II.3 – Exemplos de soluções não eficientes do problema 3.

Definição de *solução eficiente*<sup>2</sup>:

Uma solução  $\bar{x} \in S$  diz-se *eficiente* se e só se não existe uma outra solução  $x \in S$  tal que  $z_i(x) \geq z_i(\bar{x})$  para todo o  $i$  ( $i=1, \dots, p$ ), e a desigualdade é estrita para pelo menos um  $i$  ( $z_i(x) > z_i(\bar{x})$ ).

Enquanto em PL monocritério, os pontos do espaço das variáveis de decisão têm uma imagem em  $\mathfrak{R}$  dada pela função objectivo, no caso multiobjectivo as imagens são em  $\mathfrak{R}^p$  (isto é, cada solução  $x$  tem como representação no *espaço dos objectivos* um ponto  $z = (z_1(x), \dots, z_p(x))$ ).

Para o problema 3, o *espaço dos objectivos* é de dimensão 2 e, por isso, é fácil visualizá-lo graficamente. Para representar a região admissível do problema no espaço dos objectivos  $Z$ , começa-se por determinar as imagens dos vértices de  $S$ , que serão também vértices em  $Z$ :

	$\underline{x}$		$\underline{z} = \underline{z}(\underline{x})$
O	(0,0)		O'
V	(40,0)	$\Rightarrow$	V'
P	(30,20)		P'
Q	(10,40)		Q'
R	(0,44)		R'
			(880,352)
			(1050,330)
			(1150,190)
			(1000,40)
			(0,0)

As considerações sobre eficiência podem ser transpostas para o espaço dos objectivos – figura II.4.

Enquanto a designação de solução eficiente se refere, geralmente, a pontos do espaço de decisão, a designação de solução *não dominada* utiliza-se para pontos do espaço dos objectivos. Contudo, quando utilizadas de forma genérica, neste texto não faremos distinção entre as designações de solução eficiente e de solução não dominada.

<sup>2</sup> A formulação matemática deste conjunto de soluções pode ser feita de diversas formas. Por exemplo, Yu (1974) fá-la em termos de pontos extremos de cones, Lin (1976) utiliza a noção de convexidade direccional e Payne *et al.* (1975) usam uma *função perturbação*, similar à introduzida por Geoffrion (1971) noutra contexto. Neste capítulo, o conjunto das soluções eficientes é definido no próximo parágrafo, evitando-se fazer apelo a qualquer das formulações acima referidas, preservando a simplicidade, sem abdicar do rigor. Contudo, mais adiante, neste capítulo, a formulação de Payne *et al.* (1975) é utilizada, com vista a interpretar de forma integrada os teoremas em que se baseiam os processos de cálculo de soluções eficientes que vamos utilizar.



Definição de *solução não dominada*:

Um ponto do espaço dos objectivos  $\tilde{z}=(z_1(\tilde{x}), \dots, z_p(\tilde{x})) \in Z$  diz-se *não dominado* se e só se  $\tilde{x}$  é eficiente.

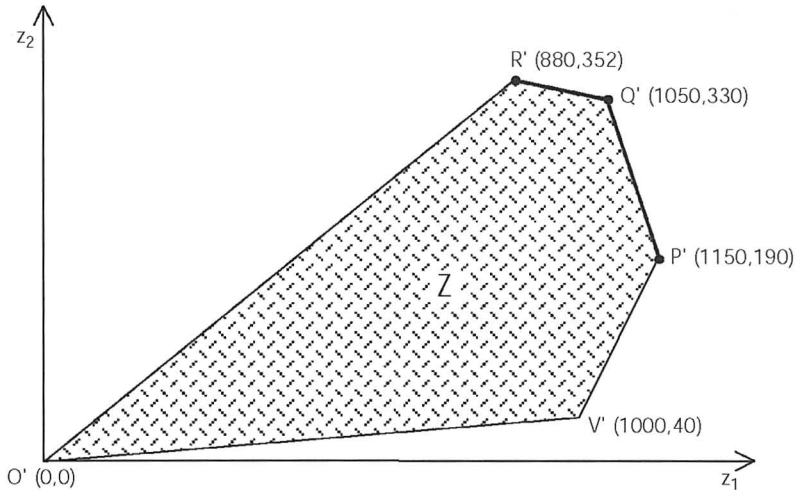


Figura II.4 – Região admissível do problema 3 no espaço dos objectivos.

Para além do conceito de solução eficiente, existe o conceito de solução *fracamente eficiente* (*fracamente não dominada*):

Uma solução  $\tilde{x} \in S$  diz-se *fracamente eficiente* se e só se não existe uma outra solução  $\underline{x} \in S$  tal que  $z_i(\underline{x}) > z_i(\tilde{x})$  para todo o  $i$  ( $i=1, \dots, p$ ).

Note-se que, por definição, o conjunto das soluções fracamente eficientes inclui as soluções estritamente eficientes. Contudo, por razões de natureza prática, quando se fala de soluções fracamente eficientes, neste texto, não se consideram as estritamente eficientes.

No problema 3, não há soluções fracamente eficientes. Para ilustrar esse caso, considere-se temporariamente a alteração da segunda função objectivo para  $z_2 = 2x_1 + 5x_2$ . O conjunto das soluções eficientes reduz-se agora ao segmento [PQ]. Todas as soluções de ]QR] (note-se que Q é excluído) são fracamente eficientes, porque são dominadas por Q, que tem valor igual em  $z_2$  e superior em  $z_1$ . Assim, não há nenhuma solução que melhore as duas funções objectivo em simultâneo relativamente a qualquer solução de [RQ] – ver figura II.5.

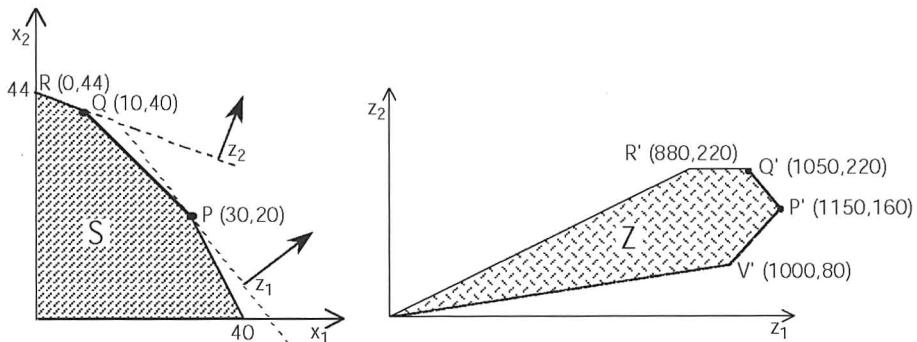


Figura II.5 – Soluções fracamente eficientes (problema 3 modificado).

Num problema multiobjectivo, há que seleccionar uma solução de compromisso, satisfatória para o agente de decisão, de entre as soluções eficientes. Para uma melhor ilustração do compromisso envolvido quando se está na presença de objectivos múltiplos, considere-se o problema 4, com 3 funções objectivo e 2 variáveis de decisão (construído a partir do problema 2 do capítulo anterior).

#### Problema 4

Uma família pretende definir uma dieta com base em dois alimentos, I e II, de modo a maximizar as quantidades obtidas das 3 vitaminas, A, B e C. O custo da dieta não deverá exceder o custo mínimo obtido pela formulação anterior (problema 2), isto é, 2008.281 u.m.. As quantidades de vitaminas obtidas de cada um dos alimentos são as especificadas anteriormente (problema 2).

A formulação deste problema é:

$$\max z_1 = 5x_1 + 4x_2 \quad (\text{vit. A})$$

$$\max z_2 = 3x_1 + x_2 \quad (\text{vit. B})$$

$$\max z_3 = x_1 + 4x_2 \quad (\text{vit. C})$$

$$\text{s. a:} \quad 72x_1 + 35x_2 \leq 2008.281$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

onde, tal como antes,  $x_1$  e  $x_2$  representam as quantidades a consumir de cada um dos alimentos I e II.

A região admissível, no espaço de decisão, e os gradientes das funções objectivo deste problema estão representados na figura II.6.

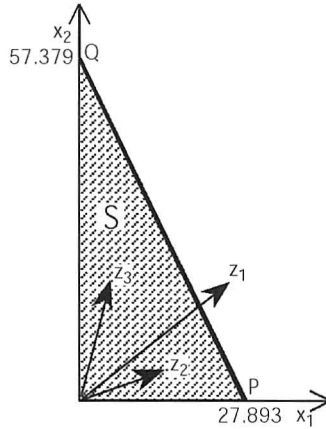


Figura II.6 – Região admissível do problema 4 no espaço de decisão.

Todas as soluções em [PQ] são eficientes para este problema.

A solução P,  $\underline{x} = (27.893, 0)$ ,  $\underline{z} = (139.465, 83.679, 27.893)$ , oferece níveis de vitaminas A e B acima dos requeridos anteriormente (com o máximo para a vitamina B) à custa de um baixo nível de vitamina C. A solução Q,  $\underline{x} = (0, 57.379)$ ,  $\underline{z} = (229.516, 57.379, 229.516)$ , oferece níveis elevados para as vitaminas A e C (os máximos) à custa de um decréscimo na vitamina B. Como se pode ver na figura II.6, P é a solução que maximiza  $z_2$ , enquanto Q maximiza  $z_1$  e  $z_3$ . Qualquer outra solução na aresta que liga P a Q é uma solução de compromisso intermédia, incluindo a solução óptima para o problema 2, que é  $\underline{x} = (9.143, 38.571)$ ,  $\underline{z} = (200, 66, 163.427)$ .

A região admissível deste problema no espaço dos objectivos está representada na figura II.7.

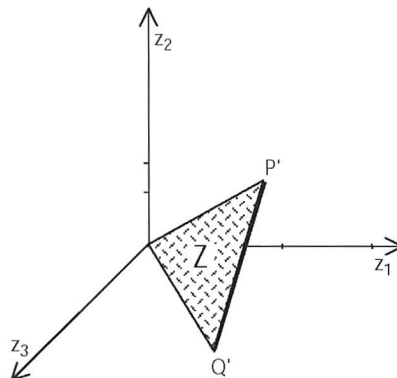


Figura II.7 – Região admissível do problema 4 no espaço dos objectivos.

### 3. CÁLCULO DE SOLUÇÕES EFICIENTES

Neste parágrafo, introduzem-se as proposições que garantem os três processos de cálculo de soluções eficientes, a partir da resolução de problemas de programação linear monocritério, que utilizaremos neste texto.

Os teoremas que fundamentam processos de cálculo de soluções eficientes são apenas condições suficientes da eficiência das soluções. Quando as condições estabelecidas também são necessárias, então o processo de cálculo associado garante a possibilidade de calcular todas as soluções eficientes. Apesar de neste parágrafo darmos especial importância às condições suficientes, as condições necessárias não devem ser esquecidas, visto que é importante saber em que condições se podem obter todas as soluções eficientes, utilizando um determinado processo de cálculo.

#### A. OPTIMIZAÇÃO DE UMA DAS FUNÇÕES OBJECTIVO, TRANSFORMANDO AS RESTANTES P-1 EM RESTRIÇÕES

##### PROPOSIÇÃO 1

Se  $\underline{x}^1$  é a solução óptima única, para algum  $k$ , de

$$\max z_k(\underline{x})$$

s. a:  $\underline{x} \in S$

$$z_i(\underline{x}) \geq w_i \quad i=1, \dots, k-1, k+1, \dots, p,$$

então  $\underline{x}^1$  é uma solução eficiente para o problema de programação linear multiobjectivo (II.1). ■

Se, na proposição 1, não se impusesse a condição do óptimo ser único, poderiam obter-se soluções fracamente eficientes. Esta situação podia ser ultrapassada substituindo a função  $z_k(\underline{x})$  por  $z_k(\underline{x}) + \sum_{i \neq k} \epsilon_i z_i(\underline{x})$ , com  $\epsilon_i$ 's maiores do que zero e suficientemente pequenos.

A validade da proposição 1 pressupõe que a região admissível reduzida não seja vazia, o que pode acontecer se os limites fixados para as funções objectivo transformadas em restrições (isto é, os  $w_i$ ) forem demasiado severos.

A veracidade da proposição 1 mostra-se facilmente por redução ao absurdo. Suponha-se que  $\underline{x}^1$  não é eficiente. Então, por definição de solução eficiente, existe um  $\underline{x}^2 \in S$  tal que  $z_i(\underline{x}^2) \geq z_i(\underline{x}^1)$  para todo o  $i$  ( $i=1, \dots, p$ ), e a desigualdade é estrita para pelo menos um  $i$  (isto é, para esse  $i$ ,  $z_i(\underline{x}^2) > z_i(\underline{x}^1)$ ). Nestas circunstâncias,  $z_i(\underline{x}^2) \geq w_i$  para  $i=1, \dots, k-1, k+1, \dots, p$ . Então  $z_k(\underline{x}^2) \geq z_k(\underline{x}^1)$ , para o problema introduzido no teorema 1, o que contradiz a hipótese de  $\underline{x}^1$  ser óptimo único. Sendo assim,  $\underline{x}^1$  terá de ser eficiente.

Estabeleceu-se uma condição suficiente que permite o cálculo de soluções eficientes resolvendo um problema escalar. O teorema é válido para casos mais gerais, mas neste texto estamos especialmente interessados no caso da Programação Linear Multiobjectivo.

Ilustra-se este processo de cálculo, apresentando um caso simples de Programação Linear Bicritério (figura II.8), em que se pretende maximizar  $z_1 = z_1(\underline{x})$  e  $z_2 = z_2(\underline{x})$ .

A fronteira eficiente, da região admissível  $S$ , é constituída pelas soluções dos segmentos  $[AB]$  e  $[BC]$ . Limitando  $z_1(\underline{x})$  a valores iguais ou maiores do que  $w_1$ , é obtida a solução eficiente  $E$ . Note-se que não se trata dum vértice da região admissível do problema original.

Chama-se a atenção para que as soluções sobre  $[CD]$  (óptimos alternativos de  $z_2(\underline{x})$ ) não são eficientes, à excepção do ponto  $C$ . Estas soluções designam-se por fracamente eficientes, como se viu atrás.

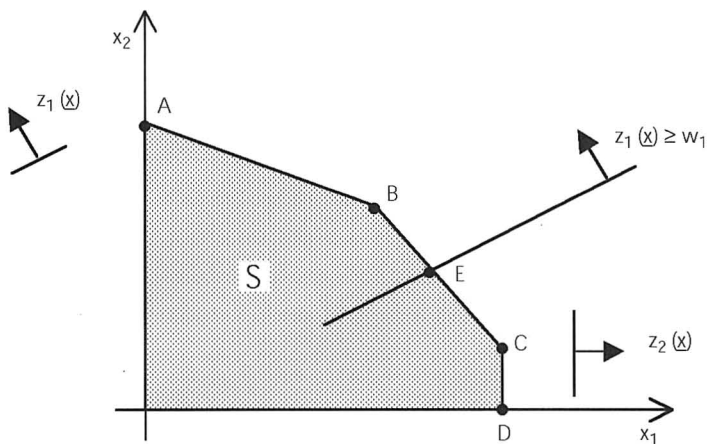


Figura II.8 – Optimização de uma das funções objectivo restringindo a outra.

A condição estabelecida na proposição 1 não é condição necessária à obtenção de soluções eficientes. De facto, podem obter-se soluções eficientes sem que o óptimo do problema escalar da proposição 1 seja único. Neste caso, nem todas as soluções obtidas são garantidamente eficientes. Deve notar-se que, se se deixar de impor que o óptimo seja único, fica-se perante uma condição necessária e suficiente para a obtenção de soluções pelo menos fracamente eficientes.

A figura II.9 ilustra o que se acabou de dizer. Fazendo  $z_1(\underline{x}) \geq w_1$  e otimizando  $z_2$ , o segmento [CE] é óptimo e apenas o ponto C é eficiente. Contudo, todo o segmento [CE] (à excepção de C) corresponde a soluções fracamente eficientes.

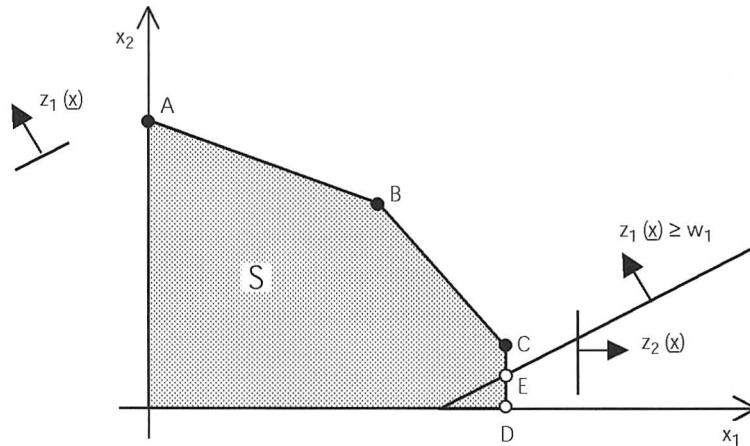


Figura II.9 – Cálculo de soluções fracamente eficientes.

Nota 1: Com vista a interpretar (sem fazer demonstrações formais), de forma integrada, os vários processos de cálculo de soluções eficientes, introduz-se uma função auxiliar que designamos por função perturbação. Ilustra-se aqui o processo introduzido a partir da proposição 1. Mais adiante, neste texto, ilustrar-se-ão outros processos de cálculo.

Começemos por introduzir a *função perturbação*.

Se ao vector dos critérios  $\underline{z}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} z_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ z_p(\underline{x}) \end{bmatrix}$  se retirar o critério  $z_k(\underline{x})$ , designa-se

o restante por  $\bar{z}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} z_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ z_{k-1}(\underline{x}) \\ z_{k+1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ z_p(\underline{x}) \end{bmatrix} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{p-1}$ .

Em  $W = \{\underline{w} \in \mathfrak{R}^{p-1} : \exists \underline{x} \in S : \bar{z}(\underline{x}) \geq \underline{w}\}$ , define-se, então, a *função perturbação*:

$$\pi_k(\underline{w}) = \max_{\underline{x} \in S} \{z_k(\underline{x}) : \bar{z}(\underline{x}) \geq \underline{w}\}$$

### Proposição 2

A função perturbação  $\pi_k(\underline{w})$  é não crescente, isto é, para  $\underline{w}^1, \underline{w}^2 \in W$  e  $\underline{w}^1 \geq \underline{w}^2$ ,  $\pi_k(\underline{w}^1) \leq \pi_k(\underline{w}^2)$ .

Mais ainda, um ponto  $(\underline{w}, \pi_k(\underline{w}))$ , com  $\underline{w} \in W$ , é uma solução não dominada do problema de programação linear multicritério se e só se para qualquer  $\underline{w}^1 \in W$ , tal que  $\underline{w}^1 \geq \underline{w}$  e  $\underline{w}^1 \neq \underline{w}$ , então  $\pi_k(\underline{w}^1) < \pi_k(\underline{w})$ . ■

A demonstração formal desta proposição pode ver-se em Payne *et al.* (1975). Deixamo-la aqui como exercício para o leitor, visto que decorre facilmente da definição de solução não dominada e de uma bem conhecida propriedade da optimização. Isto é, ao restringir-se o domínio de uma dada função a maximizar, o máximo deste último problema será igual ou menor do que o do primeiro.

É também notório que, a veracidade da proposição 2, garante a veracidade da proposição 1, pois, ao exigir-se que o óptimo do problema tratado na proposição 1 seja único, está a calcular-se um ponto da região *não horizontal* da função perturbação.

Vamos agora ilustrar (figura II.10(a) e (b)) os conceitos e resultados aqui apresentados, utilizando o problema 3 do parágrafo anterior.

Considera-se  $k=2$  e, sendo assim, obtém-se:

$$\pi_2(\underline{w}) = \max_{\underline{x} \in S} \{z_2(\underline{x}) : z_1(\underline{x}) \geq w\}$$

definida em  $W = \{w \in \mathfrak{R} : \exists \underline{x} \in S : z_1(\underline{x}) \geq w\}$ .

A partir da proposição 2, confirma-se que  $[P'Q'] \cup [Q'R']$  representa o conjunto das soluções não dominadas.

Mais ainda, o óptimo de problemas monocritério do tipo dos considerados na proposição 1, quando o óptimo existe e é único, conduz certamente a uma solução pertencente a  $[P'Q'] \cup [Q'R']$  e, portanto, não dominada.

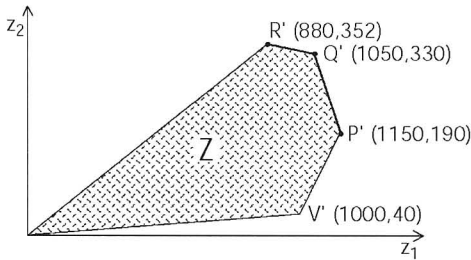


Figura II.10(a)– Região admissível do problema 3 no espaço dos objectivos.

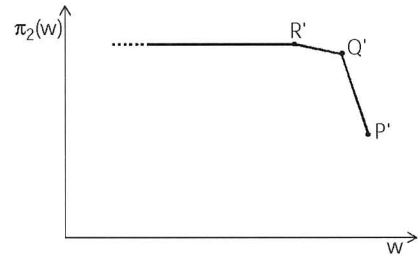


Figura II.10(b) – Representação da função perturbação para o problema 3.

Em programação não linear, a proposição 1 continua a ser aplicável. Considere-se, a título de exemplo, um problema com as duas funções a maximizar em que a imagem do domínio no espaço dos objectivos está representada na figura II.11(a). Neste caso  $\pi_2(w)$  terá o aspecto apresentado na figura II.11(b). Pela proposição 2, serão soluções não dominadas as que pertencem aos troços  $A'B'$  (excepto  $B'$ ) e  $C'D'$  das curvas da figura II.11.

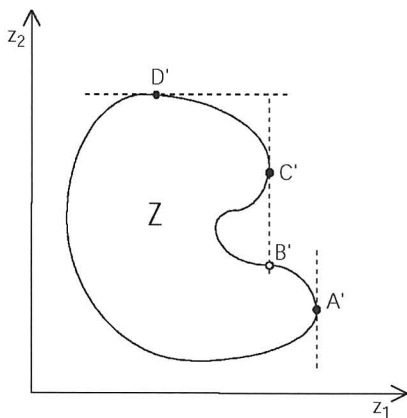


Figura II.11(a)– Região admissível no espaço dos objectivos de um problema não linear.

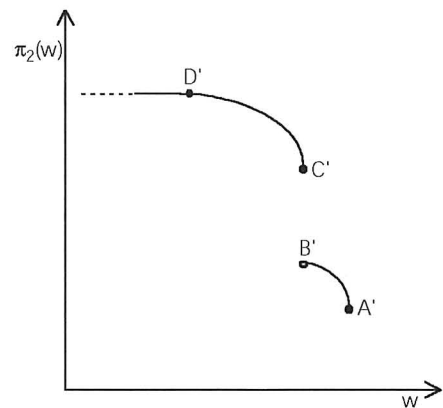


Figura II.11(b) – Função perturbação correspondente ao problema não linear da Figura II.11(a). ■



B. OPTIMIZAÇÃO DE UMA SOMA PESADA (PONDERADA) DAS FUNÇÕES OBJECTIVO

Proposição 3

Se  $\underline{x}^1 \in S$  é solução do problema  $\max_{\underline{x} \in S} \sum_{i=1}^p \lambda_i z_i(\underline{x}) = \max_{\underline{x} \in S} \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i \underline{x}$  para  $\underline{\lambda} = [\lambda_1 \dots \lambda_p]$ , em que  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, p$ , e  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ , então  $\underline{x}^1$  é uma solução eficiente do problema de programação linear multicritério (II.1). ■

Esta proposição pode demonstrar-se facilmente pelo método de redução ao absurdo. Assuma-se que  $\underline{x}^1$  não é eficiente. Então existe um  $\underline{x}^2 \in S$  tal que  $c_i \underline{x}^2 \geq c_i \underline{x}^1, i = 1, \dots, p$ , e a desigualdade é estrita, pelo menos para um  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ). Mas  $\underline{x}^1$  foi obtido optimizando uma soma pesada com pesos estritamente positivos ( $\underline{\lambda}^1$ ). Nestas circunstâncias,

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^1 c_i \underline{x}^2 > \sum_{i=1}^p \lambda_i^1 c_i \underline{x}^1$$

o que contradiz a hipótese de  $\underline{x}^1$  maximizar a soma pesada.

Este processo de cálculo é ilustrado na figura II.12. Esta figura mostra, ainda, como duas somas pesadas das funções objectivo considerando vectores de pesos diferentes (cujos gradientes são representados por  $z'$  e  $z''$ ) podem conduzir ao cálculo da mesma solução eficiente (ponto A).

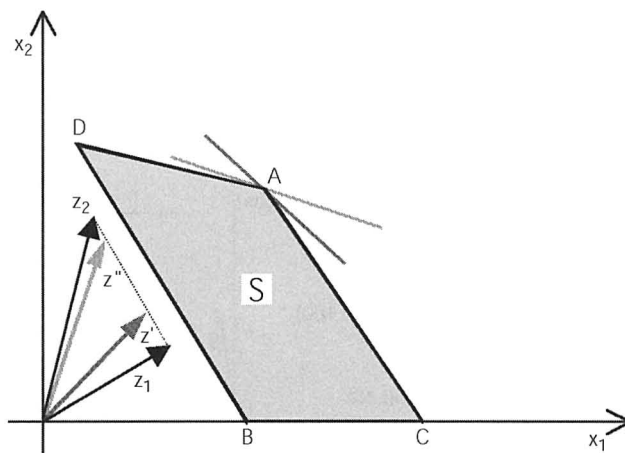


Figura II.12 – Optimização de somas pesadas das funções objectivo.

Nota 2: A proposição 3 também pode ser demonstrada utilizando a mesma função perturbação referida atrás. Neste trabalho, limitar-nos-emos a ilustrá-la para um exemplo com duas funções objectivo.

Refira-se, em primeiro lugar, que a normalização dos pesos proposta na proposição 3, isto é,  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ , pode ser substituída por  $\lambda_k = 1$  (para um qualquer  $k$ , tal que  $1 \leq k \leq p$  e os  $\lambda_i > 0$  e finitos, para  $1 \leq i \leq p$ , com  $i \neq k$ ). Nada de substancial se altera, visto que não está em causa o módulo de  $\underline{\lambda}$ , mas apenas a direcção do vector. Para o caso de dimensão dois, pode-se ilustrar graficamente cada uma das representações (figura II.13).

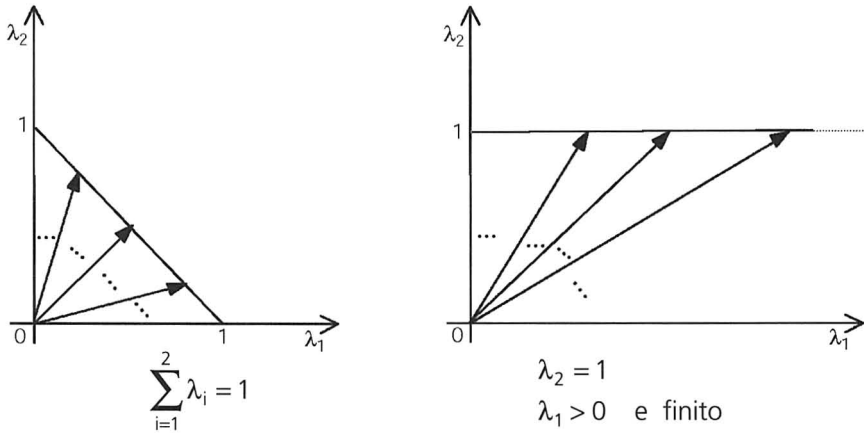


Figura II.13 – Normalização dos pesos.

Voltando ao problema 3:

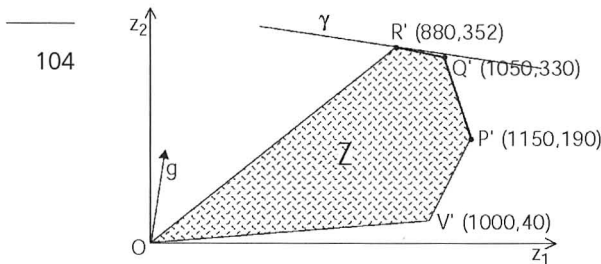


Figura II.14(a) – Região admissível do problema 3 no espaço dos objectivos.

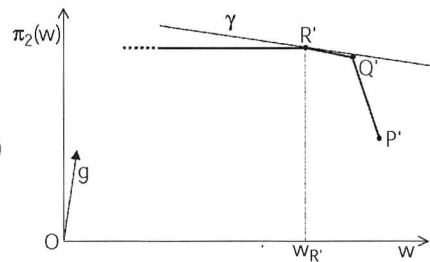


Figura II.14(b) – Representação da função perturbação para o problema 3.

Como se viu na nota 1,  $\pi_2(w) = \max_{\underline{x} \in S} \{z_2(\underline{x}) : z_1(\underline{x}) \geq w\} : W \rightarrow \Re$  e  $W = \{w \in \Re : \exists \underline{x} \in S : z_1(\underline{x}) \geq w\}$ .

Seja  $\gamma$  a recta de nível duma função objectivo  $(\max \{\lambda_1 z_1 + z_2\})$ , cuja direcção do gradiente  $\underline{g}$  é definida por  $(\lambda_1, 1)$ , em que, para o caso da figura II.14(b),  $\underline{g}$  está no interior do cone definido pela direcção e sentido do eixo  $O\pi_2(w)$ , e pelo vector normal a  $[R'Q']$ .

Da definição de  $\pi_2(w)$ , e da figura II.14, resulta:

$$\max_{\underline{x} \in S} \{ \lambda_1 z_1(\underline{x}) + z_2(\underline{x}) \} = \pi_2(w_{R'}) \quad (II.2)$$

Como  $\lambda_1 > 0$ ,  $\pi_2(w_{R'})$  pertence certamente à parte não horizontal de  $\pi_2(w)$  e, neste caso, a proposição 1 e a explicação anterior garantem que a solução do problema (II.2) é eficiente. ■

A proposição 3 é válida para casos mais gerais. Veja-se o exemplo da figura II.15 (em que  $z_1$  e  $z_2$  são côncavas e o domínio das soluções admissíveis é convexo).

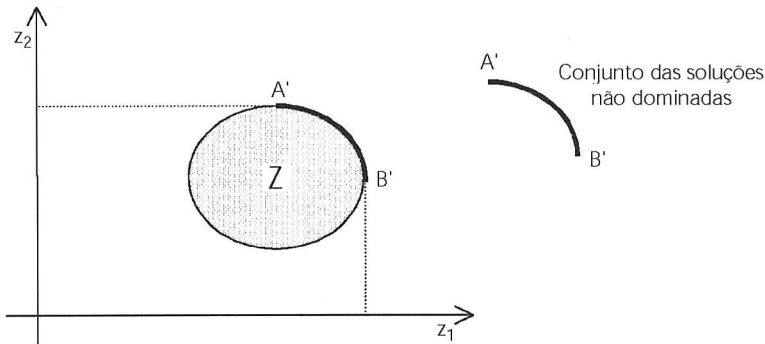


Figura II.15 – Problema convexo.

Trata-se do problema  $\max_{\underline{x} \in S} z_1(\underline{x}), \max_{\underline{x} \in S} z_2(\underline{x})$ . Designa-se por " $\underline{z}(\cdot)$ " o vector  $\begin{bmatrix} z_1(\cdot) \\ z_2(\cdot) \end{bmatrix}$  e por  $Z$  a imagem do conjunto das soluções admissíveis no espaço das funções objectivo.

As soluções correspondentes aos pontos  $A'$  e  $B'$  deste exemplo são eficientes e não é possível obtê-las optimizando  $\max_{\underline{x} \in S} \{ \lambda_1 z_1(\underline{x}) + \lambda_2 z_2(\underline{x}) \}$ , com ambos os pesos,  $\lambda_i (i = 1, 2)$ , estritamente positivos.

A noção de solução eficiente própria, introduzida por Geoffrion (1968), permite ultrapassar esta questão. De facto, no problema da figura II.15 as soluções correspondentes a A' e B' são impróprias, visto que  $\frac{\partial z_2}{\partial z_1}(A') = 0$  e  $\frac{\partial z_2}{\partial z_1}(B') = -\infty$ , isto é, a taxa de variação de  $z_2$  em relação a  $z_1$  é zero e infinito, respectivamente. Apenas nestes casos as soluções eficientes são impróprias. A proposição 3 pode ser formulada como condição necessária, no que se refere às soluções eficientes próprias, isto é, pode mostrar-se que otimizando somas pesadas é possível calcular todas as soluções eficientes próprias. Por conseguinte, em Programação Linear, a proposição 3 pode servir de base a métodos para determinar todo o conjunto das soluções eficientes, que designaremos adiante por métodos geradores. Isermann (1974) mostra que, em programação linear multicritério, todas as soluções eficientes são próprias.

Nota 3: A demonstração do resultado de Isermann utilizando a função perturbação não seria difícil. Neste texto limitar-nos-emos a ilustrá-lo com um exemplo simples.

Considere-se o problema de programação linear com dois objectivos (em que  $\underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$  e Z é a região admissível no espaço dos objectivos) representado na figura II.16.

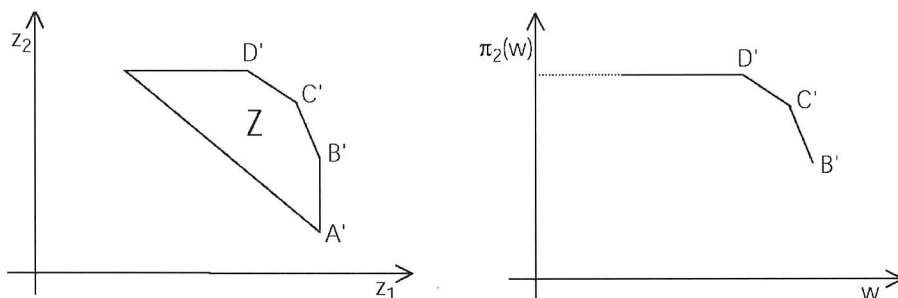


Figura II.16 – Ilustração da identidade entre soluções eficientes e eficientes próprias em PL.

Por se tratar de uma função perturbação poligonal, conclui-se facilmente que os pontos A' e D' ou correspondem a soluções eficientes próprias (caso do ponto D' da figura II.16) ou não são eficientes (caso do ponto A' da figura II.16 que é fracamente eficiente). O ponto A' não corresponde a uma solução

eficiente, visto que é dominado por  $B'$ , que, por sua vez, é uma solução eficiente própria.

Se a condição estabelecida, na proposição 3, para os valores dos pesos fosse relaxada, admitindo-se que podiam tomar valores iguais ou maiores do que zero, podia-se ser conduzido a soluções fracamente eficientes. É o caso, por exemplo, das soluções sobre  $[A'B']$ , na figura II.16, à exceção do ponto  $B'$ .

Note-se que, se o problema em estudo possuir soluções eficientes impróprias, estas podem também ser obtidas a partir da otimização de somas pesadas, desde que se admita que os pesos podem ser nulos. ■

#### REGIÕES DE INDIFERENÇA NO ESPAÇO DOS PESOS

A representação gráfica do conjunto de pesos  $\underline{\lambda}$ , que conduz a uma solução básica eficiente (a cada vértice poderá corresponder mais do que uma solução básica, se houver degenerescência), pode ser obtida através da

$$\text{decomposição do espaço dos pesos } \Lambda = \left\{ \underline{\lambda} : \underline{\lambda} \in \mathfrak{R}^p, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = 1, \dots, p \right\}.$$

As regiões de indiferença dependem dos coeficientes das funções objectivo e da geometria da região admissível. A região de indiferença é, de algum modo, uma medida da robustez da solução, em relação à variação dos pesos, embora seja necessária muita cautela ao tirar conclusões deste tipo, visto que tudo dependerá das escalas associadas às funções objectivo. Como aprofundaremos mais adiante, a análise do espaço dos pesos pode ser usada como um valioso utensílio na aprendizagem da geometria da região admissível não dominada, visto que nos dá o conjunto dos valores dos pesos, para os quais se obtém a mesma solução básica eficiente.

Começemos por exemplificar o cálculo das regiões de indiferença, para um problema com duas funções objectivo:

$$\max z_1 = z_1(\underline{x}) = 5x_1 + 3x_2$$

$$\max z_2 = z_2(\underline{x}) = 2x_1 + 8x_2$$

s. a:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 150 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 200 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{(região admissível S)}$$

Na figura II.17, [AC] representa o conjunto das soluções eficientes, e [A'C'] representa o correspondente conjunto das soluções não dominadas. O declive de [A'C'] é -20. Por outro lado, o declive das rectas de nível das funções objectivo soma pesada  $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$ , no espaço das funções objectivo, é dado por  $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ . Em geral, normalizam-se os pesos, fazendo  $\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1$ , com  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ . Então, obtém-se a região de indiferença relativa a A quando se  $\max_{\underline{x} \in S} \{\lambda_1 z_1(\underline{x}) + \lambda_2 z_2(\underline{x})\}$ , com  $\lambda_1 \in \left(0, \frac{20}{21}\right)$  e  $\lambda_2 \in \left[\frac{1}{21}, 1\right)$ ; e obtém-se a região de indiferença relativa a C quando se  $\max_{\underline{x} \in S} \{\lambda_1 z_1(\underline{x}) + \lambda_2 z_2(\underline{x})\}$ , com  $\lambda_1 \in \left[\frac{20}{21}, 1\right)$  e  $\lambda_2 \in \left(0, \frac{1}{21}\right]$ .

Para o valor dos pesos  $\lambda_1 = \frac{20}{21}$  e  $\lambda_2 = \frac{1}{21}$ , obtém-se simultaneamente os pontos A e C, visto que  $\max_{\underline{x} \in S} \{\lambda_1 z_1(\underline{x}) + \lambda_2 z_2(\underline{x})\}$  conduz a [AC] (óptimos alternativos).

Por último, deve notar-se que, como  $\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1$ , basta fixar um dos  $\lambda_i$ 's, para o outro ficar automaticamente determinado.

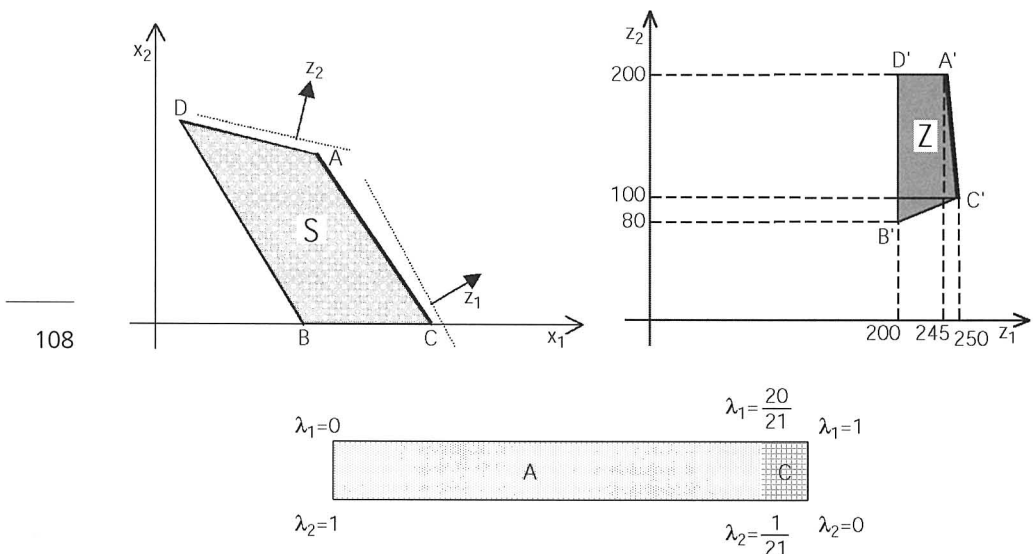


Figura II.17 – Soluções básicas eficientes e regiões de indiferença.

O estudo de situações em que se consideram três funções objectivo é, talvez, mais interessante, visto que, se por um lado permite uma representação gráfica adequada, por outro obriga a fazer o cálculo a partir da informação recolhida do quadro simplex que corresponde à base em estudo (processo geral, válido para qualquer número de funções objectivo). O quadro simplex, correspondente a uma base eficiente, fornece informação suficiente para calcular, no espaço dos pesos, a região do valor dos  $\lambda_i$ 's, para os quais a solução do problema

$$\max_{\underline{x} \in S} \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i \underline{x} \quad (\text{ou } \max_{\underline{x} \in S} \underline{\lambda} C \underline{x}, \text{ em que } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix})$$

conduz à mesma base eficiente.

Para clarificar a veracidade do que se acabou de afirmar, comece-se por rever algumas noções, para o caso de uma única função objectivo.

Uma solução básica admissível de

$$\max_{\underline{x} \in S} \underline{c} \underline{x}$$

com  $S = \{ \underline{x} \in \mathfrak{R}^n : A \underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \}$ , é óptima se e só se  $\underline{y} A - \underline{c} \geq \underline{0}$ , em que os elementos do vector  $\underline{y} A - \underline{c}$  se designam por custos reduzidos, e constituem, em geral, a última linha do quadro simplex.  $\underline{y} = \underline{c}_B B^{-1}$  é um vector linha (de dimensão  $m$ ), cujos elementos são as variáveis duais,  $B$  é a matriz da base correspondente ao quadro em que nos encontramos (uma sub-matriz  $m \times m$  de  $A$ , com característica  $m$ ) e  $\underline{c}_B$  é um sub-vector de  $\underline{c}$ , com dimensão  $1 \times m$ , correspondente às variáveis básicas.

No caso multicritério, o conjunto dos valores de  $\underline{\lambda}$  para os quais a solução básica obtida é óptima da função soma pesada, é dado por:

$$\{ \underline{\lambda} \in \Lambda : \underline{\lambda} (Y A - C) \geq 0 \} \tag{II.3}$$

em que  $Y A - C$  é a matriz dos custos reduzidos, disponível no quadro simplex com objectivos múltiplos, correspondente à base em estudo (o quadro simplex com objectivos múltiplos difere do habitual, visto que se considera uma linha de custos reduzidos por cada função objectivo),  $Y = \underline{c}_B B^{-1}$  é a matriz das variáveis duais,  $B$  é a matriz da base em estudo, e  $\underline{c}_B$  é a sub-matriz de  $C$ , correspondente às variáveis básicas. Portanto, o conjunto de valores de  $\underline{\lambda}$

pretendido pode obter-se, resolvendo o sistema de desigualdades incluídas em II.3.

Para o caso de três funções objectivo, o espaço dos pesos  $\Lambda = \left\{ \underline{\lambda} \in \mathfrak{R}^3: \lambda_i > 0, i=1,2,3 \text{ e } \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \right\}$  pode representar-se pelo triângulo equilátero da figura II.18(a).

Uma vez que  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ , o espaço dos pesos correspondente ao interior do triângulo equilátero definido pelos pontos  $(0,0,1)$ ,  $(1,0,0)$  e  $(0,1,0)$ , pode ser projectado, por exemplo, no plano  $\lambda_1\lambda_2$ , sem perda de *informação* (figura II.18(b)).

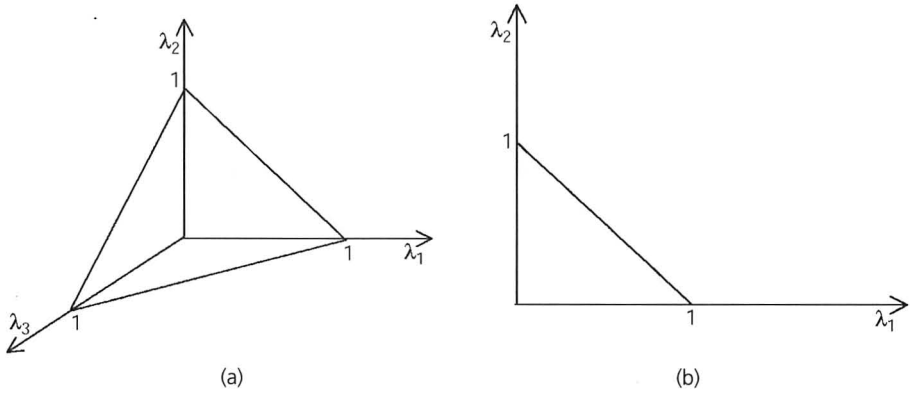


Figura II.18 – Espaço dos pesos.

Veja-se um exemplo concreto:

110

$$\max \quad C\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

s. a:

$$S \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$



Considere-se que se pretende determinar a região de indiferença que conduz à mesma solução básica eficiente que otimiza o problema

$$\max_{\underline{x} \in S} \left\{ \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_3 \right\}, \text{ isto é:}$$

$$\begin{aligned} \max_{\underline{x} \in S} \left\{ \frac{1}{3}(3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) + \frac{1}{3}(x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4) + \frac{1}{3}(-x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4) \right\} = \\ = \max_{\underline{x} \in S} \left\{ x_1 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 \right\} \end{aligned}$$

Vamos utilizar o método simplex para otimizar esta função soma pesada. Acrescenta-se ao quadro uma linha de custos reduzidos por cada uma das funções objectivo do problema original.

Numa primeira fase, otimiza-se o problema  $\max_{\underline{x} \in S} \left\{ \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_3 \right\}$ , e actualizam-se normalmente (sempre que se muda de base) as linhas correspondentes às funções objectivo do problema original.

Quadro inicial:

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	
s <sub>1</sub>	2	1	4	3	1	0	60
s <sub>2</sub>	3	4	1	2	0	1	60
Linha dos custos reduzidos relativa à função objectivo $\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_3$	-1	-5/3	-5/3	-7/3	0	0	0
Matriz dos custos reduzidos relativa a z <sub>1</sub> , z <sub>2</sub> , z <sub>3</sub>	-3	-1	-2	-1	0	0	0
	-1	1	-2	-4	0	0	0
	1	-5	-1	-2	0	0	0

Quadro óptimo de  $\max_{\underline{x} \in S} \left\{ \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_3 \right\}$ :

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	
x <sub>4</sub>	1/2	0	3/2	1	2/5	-1/10	18
x <sub>2</sub>	1/2	1	-1/2	0	-1/5	3/10	6
Linha dos custos reduzidos relativa à função objectivo $\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_3$	1	0	1	0	3/5	4/15	52
Matriz dos custos reduzidos relativa a z <sub>1</sub> , z <sub>2</sub> , z <sub>3</sub>	-2	0	-1	0	1/5	1/5	24
	1/2	0	9/2	0	9/5	-7/10	66
	9/2	0	-1/2	0	-1/5	13/10	66

Escrevendo, para este caso, as desigualdades incluídas na expressão II.3, tendo em conta que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  e  $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ , vem:

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{9}{2}(1 - \lambda_1 - \lambda_2) \geq 0 & (a) \\ -\lambda_1 + \frac{9}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}(1 - \lambda_1 - \lambda_2) \geq 0 & (b) \\ \frac{1}{5}\lambda_1 + \frac{9}{5}\lambda_2 - \frac{1}{5}(1 - \lambda_1 - \lambda_2) \geq 0 & (c) \\ \frac{1}{5}\lambda_1 - \frac{7}{10}\lambda_2 + \frac{13}{10}(1 - \lambda_1 - \lambda_2) \geq 0 & (d) \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} \frac{13}{2}\lambda_1 + 4\lambda_2 \leq \frac{9}{2} & (a) \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 + 5\lambda_2 \geq \frac{1}{2} & (b) \\ \frac{2}{5}\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq \frac{1}{5} & (c) \\ \frac{11}{10}\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq \frac{13}{10} & (d) \end{cases} \quad (II.4)$$

As restrições (a), (b) e (d) delimitam a região de indiferença, D, que pretendíamos determinar (figura II.19). Isto é, qualquer sistema de pesos que satisfaça estas restrições, permite construir uma função soma pesada  $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$  que, quando maximizada em S, conduz à mesma base eficiente (anteriormente determinada maximizando  $1/3 z_1 + 1/3 z_2 + 1/3 z_3$ ). A restrição (c), em II.4, é redundante.

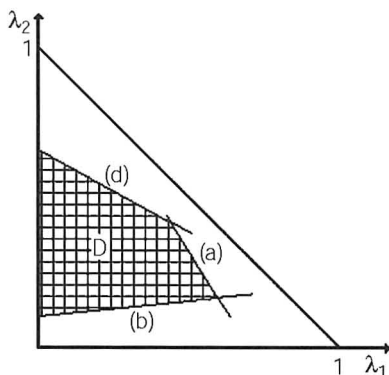


Figura II.19 - Região de indiferença no espaço dos pesos.

Note-se que os segmentos que delimitam  $D$ , definidos por (a), (b) e (d), põem em contacto áreas contíguas no espaço dos pesos, correspondentes a soluções básicas eficientes adjacentes. A variável não básica que se torna básica, quando deixamos  $D$  e nos dirigimos para uma das soluções básicas eficientes adjacentes, através de uma aresta eficiente, chama-se variável não básica eficiente, e pode ser obtida a partir do quadro simplex, como se verá quando se estudar o método de Zions-Wallenius, ou por inspecção directa do espaço dos pesos (em problemas com 3 funções objectivo), identificando a variável não básica que passa a básica quando nos deslocamos para uma solução básica eficiente adjacente da actual. Para a solução básica eficiente deste exemplo, as variáveis não básicas eficientes são  $x_1$ ,  $x_3$  e  $s_2$ , correspondentes a (a), (b) e (d), respectivamente.

### C. MINIMIZAÇÃO DA DISTÂNCIA DE TCHEBYCHEFF A UM PONTO DE REFERÊNCIA

Este processo de cálculo permite obter soluções eficientes minimizando a distância, segundo uma determinada métrica, da região admissível a um qualquer ponto de referência do espaço dos objectivos.

Sem perda de generalidade, usamos neste parágrafo a solução ideal como ponto de referência. Designa-se por solução ideal a solução  $\underline{z}^*$  que optimizaria simultaneamente todas as funções objectivo, ou seja, cujas componentes são o óptimo de cada função objectivo na região admissível, quando optimizadas separadamente. Em geral, a solução ideal não pertence à região admissível (caso contrário, o problema multicritério seria trivial, visto que todas as funções teriam como óptimo a solução ideal), embora cada  $z_i^*$  seja individualmente alcançável.<sup>3</sup>

Vamos começar por rever algumas noções básicas sobre métricas.

Uma métrica é uma função distância que atribui a cada par de vectores  $\underline{z}^1, \underline{z}^2 \in \mathfrak{R}^n$  um escalar  $\|\underline{z}^1 - \underline{z}^2\| \in \mathfrak{R}$ .

Para a métrica  $L_p$  a distância entre dois pontos em  $\mathfrak{R}^n$  é dada por:

$$\|\underline{z}^1 - \underline{z}^2\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n |z_i^1 - z_i^2|^p \right]^{1/p} \quad p \in \{1, 2, \dots\}$$

<sup>3</sup> Note-se que, embora se possa definir sempre a solução ideal  $\underline{z}^*$  no espaço dos objectivos, nem sempre existe a respectiva imagem no espaço de decisão. Ou seja, pode não existir  $\underline{x}^*$  tal que  $\underline{z}^* = \underline{z}^*(\underline{x}^*)$ .

$$\|z^1 - z^2\|_\infty = \max_i |z_i^1 - z_i^2|$$

O lugar geométrico dos pontos à mesma distância de  $z^* \in \mathfrak{R}^2$  (contorno de isodistância), de acordo com as métricas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_\infty$ , é representado na figura II.20.

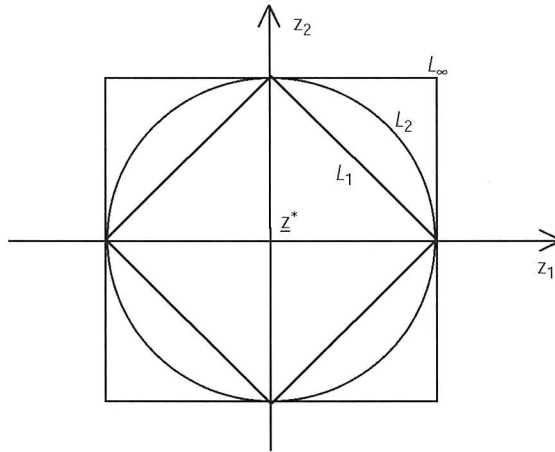
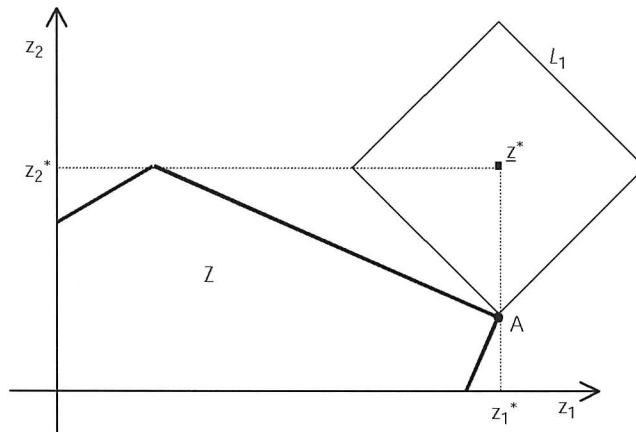
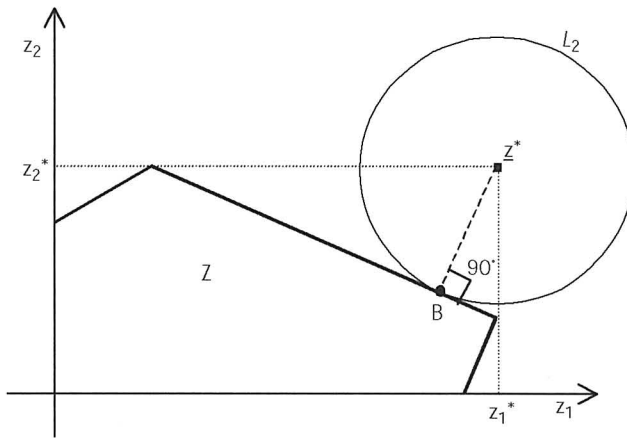


Figura II.20 – Lugar geométrico de pontos equidistantes de  $z^*$  para  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_\infty$ .

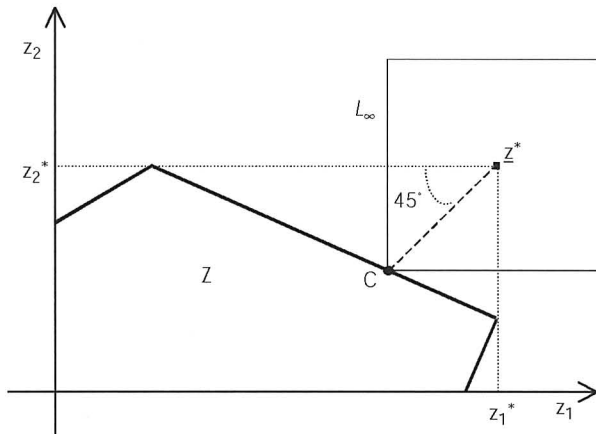
Nas figuras II.21(a), (b) e (c), os pontos A, B e C minimizam as distâncias de  $z^*$  à região Z, usando as métricas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_\infty$ , respectivamente.



(a) Métrica  $L_1$ .



(b) Métrica  $L_2$ .



(c) Métrica  $L_\infty$ .

Figura II.21 – Soluções não dominadas que estão à distância mínima da solução ideal, de acordo com as métricas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_\infty$ .

$L_1$ ,  $L_2$  e  $L_\infty$  são métricas  $L_p$  especialmente importantes.  $L_1$  dá o somatório das componentes de  $|\underline{z}^1 - \underline{z}^2|$  (a distância de quarteirões, *city block*, numa cidade reticulada como *New York*);  $L_2$  é a distância Euclideana; e  $L_\infty$  é a distância de Tchebycheff, em que apenas se considera o pior caso, isto é, a maior diferença de componentes em  $|\underline{z}^1 - \underline{z}^2|$ .

Pode ainda definir-se uma família de métricas  $L_p^\lambda$  pesadas (ou ponderadas), em que o vector  $\underline{\lambda}$ , de pesos não negativos, se destina a atribuir diferentes graus de importância aos vários componentes, isto é:

$$\|z^1 - z^2\|_p^\lambda = \left[ \sum_{i=1}^n (\lambda_i |z_i^1 - z_i^2|)^p \right]^{1/p} \quad p \in \{1, 2, \dots\}$$

$$\|z^1 - z^2\|_\infty^\lambda = \max_i \lambda_i |z_i^1 - z_i^2|$$

O lugar geométrico dos pontos à mesma distância de  $z^* \in \mathfrak{R}^2$ , de acordo com as métricas pesadas  $L_1^\lambda$ ,  $L_2^\lambda$ ,  $L_\infty^\lambda$ , é ilustrado na figura II.22(a), representando-se o contorno para cada tipo de distância, numa situação em que  $\lambda_1 < \lambda_2$ . O contorno exterior, apresentado na figura II.22(b), diz respeito a  $\|z^1 - z^2\|_\infty^\lambda + \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i |z_i^1 - z_i^2|$ , com  $\varepsilon_i$  positivo. Designamos esta distância como distância de Tchebycheff pesada e aumentada,  $L_\infty^{\lambda\varepsilon}$ .

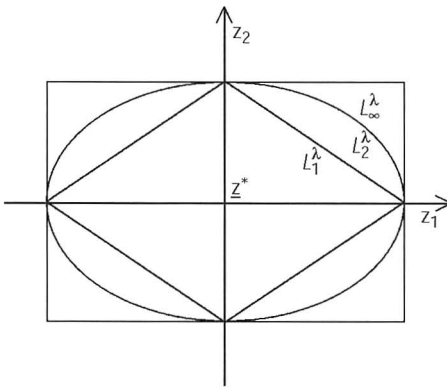


Figura II.22(a) – Lugar geométrico de pontos equidistantes de  $z^*$ , para  $L_1^\lambda$ ,  $L_2^\lambda$  e  $L_\infty^\lambda$ .

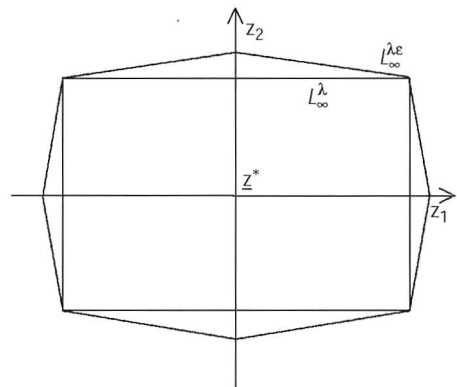


Figura II.22(b) – Lugar geométrico de pontos equidistantes de  $z^*$ , para  $L_\infty^\lambda$  e  $L_\infty^{\lambda\varepsilon}$ .

Apesar de  $L_p^\lambda$ , para  $p \in \{1, 2, \dots\}$ , poderem ser utilizadas na determinação de soluções eficientes, resolvendo problemas de minimização escalares, vamos, devido à sua importância, apresentar formalmente apenas o caso em que se usa a métrica de Tchebycheff ( $L_\infty^\lambda$ ). Em geral, utiliza-se a métrica  $L_\infty^{\lambda\varepsilon}$ , para garantir que as soluções obtidas sejam eficientes.

Proposição 4

Se  $\underline{x}^1 \in S$  é solução do problema

$$\min_{\underline{x} \in S} \left\{ \max_{i=1, \dots, p} \lambda_i (z_i^* - z_i(\underline{x})) - \sum_{i=1}^p \varepsilon_i z_i(\underline{x}) \right\} \text{ para algum } \underline{\lambda} \geq 0, \quad (II.5)$$

em que  $\varepsilon_i$ 's são constantes positivas, então  $\underline{x}^1$  é uma solução eficiente do problema de programação linear multicritério (II.1)<sup>4</sup>. ■

Este processo de cálculo é ilustrado na figura II.23. O ponto D é a solução que minimiza a distância a  $\underline{z}^*$ , segundo  $L_{\infty}^{\lambda \varepsilon}$  (problema II.5), ou  $L_{\infty}^{\lambda}$  (problema II.5 sem o termo  $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i z_i(\underline{x})$ ), considerando um vector de pesos particular  $\underline{\lambda}$ , em que  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Note-se que  $\frac{d_v}{d_h} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ .

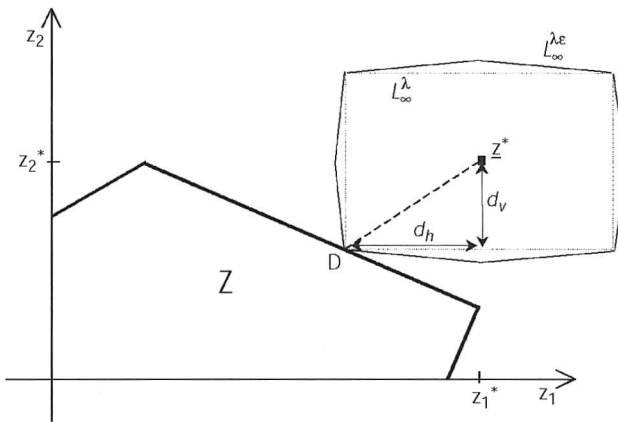


Figura II.23 – Minimização da distância de Tchebycheff pesada e aumentada.

O termo  $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i z_i(\underline{x})$  destina-se a evitar os problemas decorrentes da eventual existência de óptimos alternativos. Sem o último termo, na função objectivo do problema (II.5), podem existir soluções óptimas de (II.5) que são apenas fracamente eficientes (ver figura II.24).

<sup>4</sup> Note-se que o problema (II.5) equivale a minimizar uma distância de Tchebycheff pesada e aumentada entre a região admissível e a solução ideal.

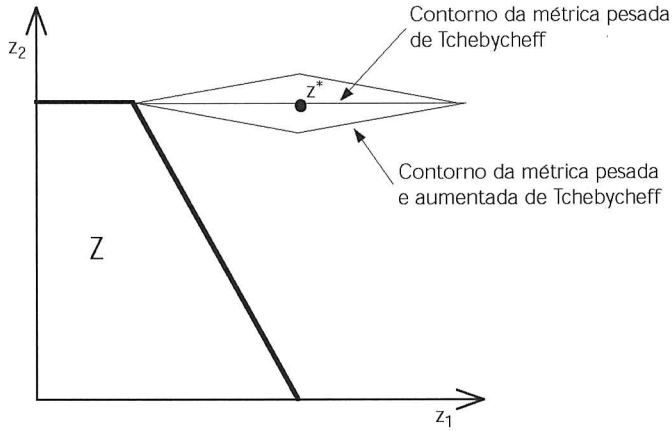


Figura II.24 – Ilustração da métrica de Tchebycheff pesada, e da métrica de Tchebycheff pesada e aumentada.

Note-se ainda que o problema (II.5) é equivalente ao seguinte programa linear:

$$\min \left\{ v - \sum_{i=1}^p \varepsilon_i z_i(\underline{x}) \right\} \quad (II.6)$$

s. a:

$$\begin{aligned} \lambda_i (z_i^* - z_i(\underline{x})) &\leq v \quad i=1, \dots, p \\ \underline{x} &\in S \\ v &\geq 0 \end{aligned}$$

Voltaremos a esta formulação, quando estudarmos os métodos interactivos dedicados a Programação Linear Multicritério.

Em muitos casos, utilizam-se outros pontos de referência, sendo possível, também nestas circunstâncias, calcular soluções eficientes minimizando uma distância de Tchebycheff pesada e aumentada ao ponto de referência, desde que este seja inatingível (ver exemplo na figura II.25). Note-se que, no exemplo da figura II.25, a minimização de uma distância de Tchebycheff não aumentada conduziria a soluções fracamente eficientes.



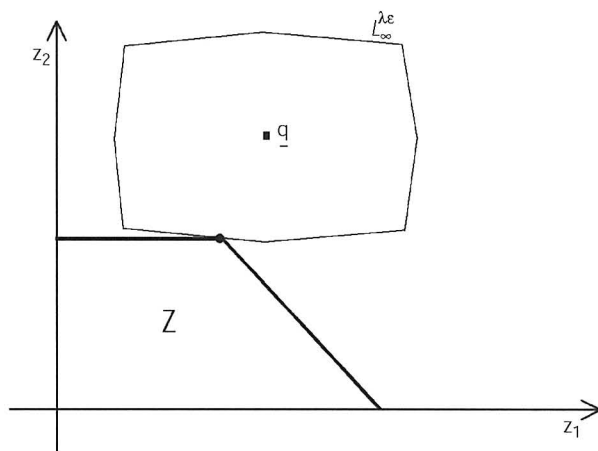


Figura II.25 – Minimização de uma distância de Tchebycheff pesada e aumentada a um ponto de referência.

Se o ponto de referência estiver no interior da região admissível, deixa de se poder falar em métrica de Tchebycheff, mas este processo de cálculo de soluções eficientes continua válido, considerando  $v$  sem restrição de sinal. A figura II.26 mostra a projecção, no conjunto das soluções não dominadas de um problema, de um ponto de referência  $q$  pertencente ao interior da região admissível;  $z(x^1)$  é a solução não dominada que se obtém através da resolução do problema (II.6), com  $\underline{z}^*$  substituído por  $q$ , e considerando  $v$  sem restrição de sinal. No caso ilustrado na figura II.26,  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

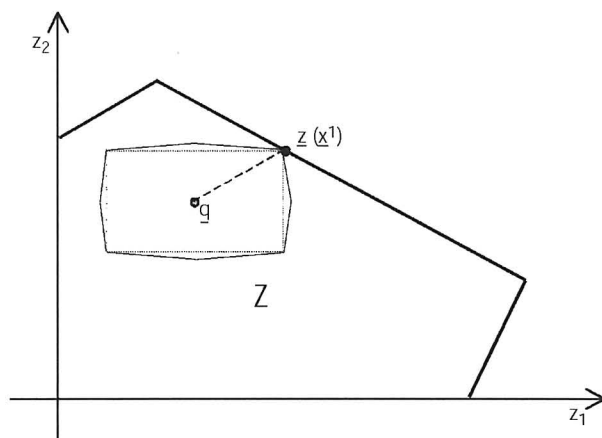


Figura II.26 – Projecção de um ponto de referência do interior da região admissível.

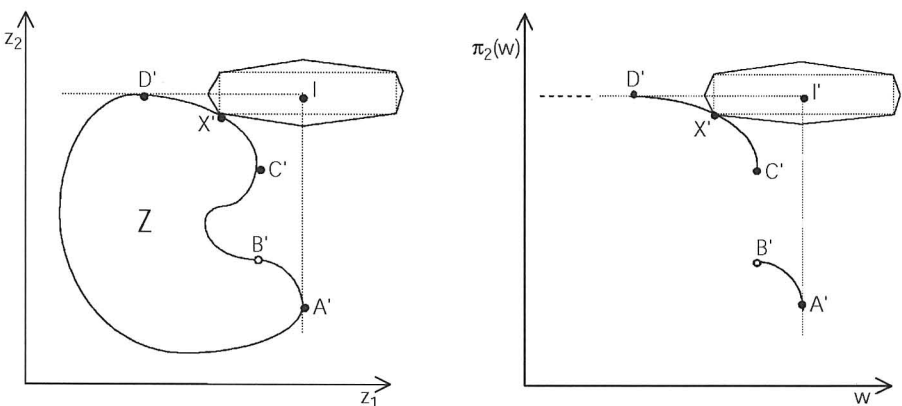
A proposição 4 pode também demonstrar-se pelo método de redução ao absurdo. Em traços gerais: suponha-se que  $\underline{x}^1$  não é eficiente e que é óptimo do problema (II.5), sendo  $v = v_1$ . Então, existe um  $\underline{x}^2$  tal que  $c_i \underline{x}^2 \geq c_i \underline{x}^1$ ,  $i=1, \dots, p$ , e a desigualdade é estrita pelo menos para um  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ). Nestas circunstâncias,  $\lambda_i (z_i^* - z_i(\underline{x}^2)) \leq v_1$ ,  $i=1, \dots, p$ , e  $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i z_i(\underline{x}^2) > \sum_{i=1}^p \varepsilon_i z_i(\underline{x}^1)$ . Sendo assim,  $\underline{x}^1$  não seria óptimo de (II.5), o que contradiz a hipótese. Em conclusão,  $\underline{x}^1$  terá de ser eficiente.

Na proposição 4, dedicada ao caso de Programação Linear, a condição enunciada também é necessária para  $\varepsilon_i$  suficientemente pequenos, pelo que utilizando este processo de cálculo se pode obter todo o conjunto das soluções eficientes.

Nota 4: O processo de cálculo de soluções eficientes, apresentado neste parágrafo, é válido para casos mais gerais do que o da proposição 4.

Como forma de ilustrar a veracidade deste resultado para um caso mais geral (não linear e não convexo) reproduz-se aqui a função perturbação (figura II.11(b)) relativa ao exemplo da figura II.11(a).

Da figura II.27, conclui-se que o ponto de distância mínima à solução ideal  $I$ , utilizando uma métrica de Tchebycheff pesada e aumentada, conduz a uma solução na parte não horizontal da função perturbação (por exemplo, o ponto  $X'$  da figura). Sendo assim, esta solução é não dominada, e corresponde sempre a um ponto sobre os troços das curvas  $A'B'$  (excepto  $B'$ ) e  $C'D'$ .



(a) – Região admissível no espaço dos objectivos. (b) – Função perturbação do problema não linear.

Figura II.27 – Determinação de soluções eficientes, utilizando uma métrica de Tchebycheff pesada e aumentada. ■

#### 4. CLASSIFICAÇÃO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DEDICADOS A PROGRAMAÇÃO LINEAR COM OBJECTIVOS MÚLTIPLOS

Diversos autores têm procurado classificar os métodos dedicados a problemas de optimização com objectivos múltiplos. Destacam-se aqui as seguintes abordagens:

##### 1. CLASSIFICAÇÃO BASEADA NO GRAU DE INTERVENÇÃO DO AGENTE DE DECISÃO

- (a) Articulação *a priori* de preferências do agente de decisão. Neste tipo de métodos, como o próprio nome indica, uma vez escolhido o método (e, eventualmente, fixados alguns parâmetros), a agregação de preferências fica definida à partida.
- (b) Articulação progressiva de preferências do agente de decisão. É o que se passa com os métodos interactivos, em que há uma sequência de fases de cálculo de soluções eficientes e de fases de diálogo, que servem para preparar o cálculo de novas soluções eficientes, com base nas indicações do agente de decisão (fornecidas na fase de diálogo). As características das fases de cálculo e de diálogo, assim como as condições de paragem dos algoritmos interactivos dependem do método. Estudaremos este assunto no capítulo dedicado aos métodos interactivos.
- (c) Articulação *a posteriori* de preferências. É o que se passa quando se usam métodos geradores de todo o conjunto das soluções eficientes, sendo a agregação de preferências do agente de decisão feita *a posteriori*, isto é, a jusante da geração do conjunto das soluções eficientes (sobre o qual irá recair a escolha do agente de decisão).

Uma classificação deste tipo é considerada por Cohon (1978), Hwang e Masud (1979), Goicochea *et al.* (1982) e Steuer (1986).

##### 2. CLASSIFICAÇÃO BASEADA NO TIPO DE MODELAÇÃO DE PREFERÊNCIAS DO AGENTE DE DECISÃO

- (a) consideração duma função utilidade global;
- (b) estabelecimento de prioridades entre critérios;
- (c) fixação de níveis de aspiração ou de metas para os critérios;
- (d) uso de comparações par a par (quer pares de alternativas, quer pares de critérios, dependendo dos casos);
- (e) uso de taxas marginais de substituição.

Uma classificação deste tipo é considerada por Chankong e Haimes (1983).

3. CLASSIFICAÇÃO BASEADA NO NÚMERO DE AGENTES DE DECISÃO

- (a) um único agente de decisão;
- (b) vários agentes de decisão.

Uma classificação deste tipo é considerada por Cohon (1978), Goicochea *et al.* (1982) e Szidarovsky *et al.* (1986).

4. CLASSIFICAÇÃO BASEADA EM CERTEZA/INCERTEZA NA DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

- (a) utilização de uma formulação determinística;
- (b) utilização de uma formulação não determinística, isto é, considerando explicitamente a incerteza associada a coeficientes e parâmetros do modelo utilizado.

Uma classificação deste tipo é considerada por Goicochea *et al.* (1982) e Chankong e Haimes (1983).

5. CLASSIFICAÇÃO BASEADA NAS ENTRADAS REQUERIDAS E/OU NOS RESULTADOS OBTIDOS

Entradas – tipo e fiabilidade dos dados, participação do(s) agente(s) de decisão na modelação.

Resultados – obtidos otimizando uma função utilidade; procurando a melhor solução de compromisso eficiente; procurando uma solução satisfatória; procurando ordenar as alternativas; procurando classificar as alternativas em grupos.

Uma classificação deste tipo é considerada por Chankong e Haimes (1983).

Outros autores classificam os métodos de acordo com as áreas de aplicação a que se destinam.

Exemplo: engenharia de sistemas, avaliação de projectos, etc.

Neste trabalho utiliza-se uma classificação do tipo 1.

Este método é ilustrado utilizando um problema de maximização simples, com duas funções lineares.

O método consiste na determinação da solução  $\underline{x} \in S$ , cuja imagem  $\underline{z}(\underline{x}) \in Z$  minimiza a distância, segundo uma dada métrica em relação à solução ideal  $\underline{z}^*$ , isto é:

$$\min_{\underline{x} \in S} \left\{ \sum_{j=1}^2 [z_j^* - z_j(\underline{x})]^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Para  $p=2$ , consiste na minimização da distância Euclideana ao poliedro transformado de  $S$  (domínio do problema de PL considerado), no espaço dos objectivos, ou seja,  $Z$ . Este caso é ilustrado graficamente na figura II.28. A solução de compromisso obtida é  $\underline{x}^c$  (pertencente ao conjunto das soluções eficientes), cujo ponto no espaço dos objectivos é  $\underline{z}^c$ .

Por vezes, há vantagem em utilizar outras métricas, isto é, em escolher outro escalar  $p$ , sendo  $p \geq 1$ .

A determinação do valor de  $p$ , que conduz à solução mais satisfatória para o agente de decisão, é um problema de difícil abordagem, visto que a sua participação activa neste processo não é fácil, e a escolha de  $p$  modela, de certa forma, as preferências do agente de decisão.

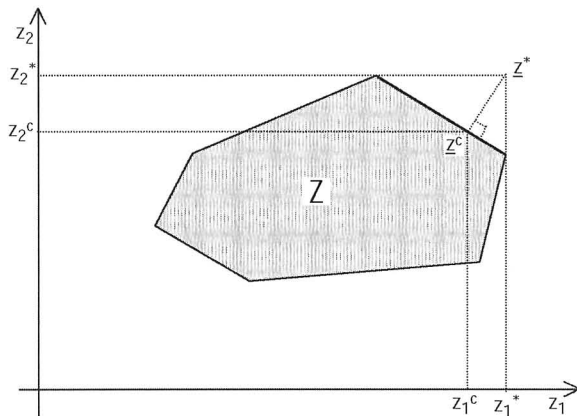


Figura II.28 – Exemplo do método da minimização da distância à solução ideal.

Na classificação que adoptámos, este método é incluído no tipo 1(a), pois utiliza uma única função objectivo. Hwang e Masud (1979) classificam-no de outro modo, pois, atendendo ao que foi exposto, consideram que há articulação de preferências.

Para mais detalhes sobre este método, veja-se Salukvadze (1979).

B – MÉTODOS EM QUE SE UTILIZA UMA FUNÇÃO UTILIDADE, CONSTRUÍDA A PARTIR DAS FUNÇÕES OBJECTIVO DO PROBLEMA ORIGINAL

Sejam  $z_1(x), \dots, z_p(x)$  as funções objectivo dum problema a maximizar. Constrói-se uma função utilidade  $U [z_1(x), \dots, z_p(x)]$ , em que os objectivos  $z_i(x), i=1, \dots, p$  são argumentos dessa função. Se a função  $U$  (côncava) satisfaz certas propriedades, o óptimo de  $U [z_1(x), \dots, z_p(x)]$  pertence ao conjunto das soluções eficientes. Para mais detalhes sobre este assunto veja-se Steuer (1986). Na figura II.29 apresenta-se um exemplo ilustrativo.

As curvas  $U[z_1(x), z_2(x)] = k^i$  (com  $k^i$  constante) chamam-se curvas de indiferença, e o ponto do conjunto das soluções não dominadas, tangente a uma curva de indiferença, chama-se ponto de indiferença ou de compromisso.

Por vezes utilizam-se funções utilidade com a seguinte estrutura:

$$U [z_1(x), \dots, z_p(x)] = U_1[z_1(x)] + \dots + U_p [z_p(x)]$$

A soma ponderada dos objectivos  $z_i(x)$ , isto é:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i z_i(x) \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_i \geq 0,$$

é um caso particular do anterior.

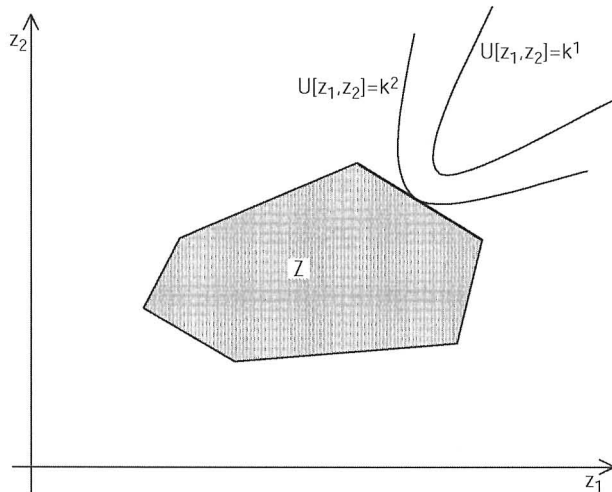


Figura II.29 – Exemplo do método da função utilidade.

Com a atribuição dum vector de pesos, pretende-se explicitar a importância relativa das funções objectivo. Note-se que quando o problema em estudo é linear e  $U [z_1(\underline{x}), \dots, z_p(\underline{x})]$  é linear, o problema final a resolver é um problema de PL monocritério.

#### C – MÉTODO LEXICOGRÁFICO

Neste método é feito um escalonamento das funções objectivo, de acordo com as preferências do agente de decisão. Em seguida procede-se à optimização sequencial dos objectivos. Em cada passo optimiza-se um objectivo e, a partir do valor obtido e da função objectivo em causa, constrói-se uma restrição de igualdade que fará parte dos problemas de optimização seguintes. Por vezes não é imposta a igualdade, mas sim permitidos desvios em relação aos óptimos obtidos, que não ultrapassem uma percentagem pré-determinada dos seus valores. Note-se que em Programação Linear, adoptando a primeira opção, ao optimizarmos a primeira função objectivo, se o óptimo for único, como acontece em geral, o processo termina.

A classificação de Hwang e Masud (1979) sub-divide os métodos de articulação *a priori* de preferências, em métodos para os quais a informação utilizada é exclusivamente cardinal e em métodos que utilizam informação não só cardinal, mas também ordinal. O método lexicográfico pertence à segunda categoria.

#### D – PROGRAMAÇÃO POR METAS (GOAL PROGRAMMING)

Este é um dos métodos mais divulgados. Difere do método da distância mínima à solução ideal, porque nele se procura minimizar o desvio em relação a metas  $(O_1, \dots, O_p)$ , estabelecidas pelo agente de decisão, isto é:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^p (d_j^- + d_j^+)^{\beta} \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad \beta \geq 1$$

s. a:  $\underline{x} \in S = \{ \underline{x} \in \mathfrak{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \}$

$$\begin{aligned}
z_j(\underline{x}) + d_j^- - d_j^+ &= 0_j & j=1, \dots, p \\
d_j^-, d_j^+ &\geq 0 & j=1, \dots, p \\
d_j^- d_j^+ &= 0 & j=1, \dots, p
\end{aligned}$$

em que  $d_j^-$  e  $d_j^+$  são os desvios por defeito e por excesso em relação à meta  $j$ , respectivamente.

Refira-se, para concluir, que as metas estabelecidas pelo agente de decisão podem conduzir a uma solução dominada do problema em estudo e, neste caso, o agente de decisão está a ser pouco ambicioso ao definir o que pretende. A aplicação do método conduz a uma solução satisfatória, mas que pode não pertencer ao conjunto das soluções eficientes. Para que isto não se verifique, o analista deve aconselhar o agente de decisão a formular metas suficientemente ambiciosas. Para mais detalhes, sobre as muitas versões de programação por metas, veja-se, por exemplo, Zeleny (1982), Charnes e Cooper (1977) ou Steuer (1986).

#### 4.2 MÉTODOS EM QUE A ARTICULAÇÃO DE PREFERÊNCIAS É REALIZADA *A POSTERIORI*

Os métodos de geração do conjunto das soluções eficientes podem subdividir-se em duas categorias fundamentais:

- (a) métodos aproximados;
- (b) métodos exactos.

Na categoria (a) destacam-se:

- método dos pesos;
- método das restrições;
- método de estimação do conjunto das soluções não inferiores (NISE).

Na categoria (b) destaca-se:

- método simplex (existindo várias versões).



## MÉTODO DOS PESOS

O problema de programação linear com objectivos múltiplos é transformado num problema com um só objectivo, soma pesada dos  $p$  objectivos do problema

original, sendo os pesos  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , tais que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  e  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

A solução (ou soluções), que maximiza(m) em  $S$ ,  $\lambda_1 z_1(\underline{x}) + \dots + \lambda_p z_p(\underline{x})$ , pertence(m) ao conjunto das soluções eficientes. O método dos pesos obriga à resolução dum problema de programação linear deste tipo, para a obtenção de cada solução (ou, em casos especiais, duma parte do conjunto das soluções) eficiente(s). Calcula-se um certo número de soluções eficientes, fazendo variar os parâmetros  $\lambda_i$ 's (em geral de forma regular) e, a partir dessas soluções, obtém-se uma aproximação do conjunto das soluções eficientes, isto é, gera-se a fronteira do invólucro convexo das soluções exactas previamente calculadas.

O método não fornece qualquer informação acerca da aproximação conseguida.

Para mais detalhes sobre este método veja-se Cohon (1978).

## MÉTODO DAS RESTRIÇÕES

Consiste em reduzir o problema com objectivos múltiplos a um problema com um só objectivo, considerando os restantes como restrições. O problema linear multicritério é convertido em:

$$\max_{x \in S} \left\{ z_i(x) : z_1(x) \geq w_1, \dots, z_{i-1}(x) \geq w_{i-1}, z_{i+1}(x) \geq w_{i+1}, \dots, z_p(x) \geq w_p \right\}$$

A solução (ou soluções) deste problema, para valores dos  $w_i$ 's compreendidos em certos intervalos, conduz a uma solução eficiente (ou, em casos especiais, a uma parte do conjunto das soluções eficientes). A partir deste ponto, o método é semelhante ao método dos pesos. Enquanto no método dos pesos se atribuem diferentes valores aos  $\lambda_i$ 's, aqui variam-se os  $w_i$ 's.

Comparado com o método dos pesos, o método das restrições tem a desvantagem de, se não houver cuidado, conduzir a que se desperdice esforço computacional para resolver problemas sem interesse, ou sem solução admissível.

Para mais detalhes sobre este método veja-se Cohon (1978).

A base teórica do método NISE é a mesma do método dos pesos. Diferença deste porque permite calcular um limite superior para o erro, isto é, o analista pode obter uma aproximação do conjunto das soluções não dominadas (no espaço das funções objectivo), com um erro inferior a um valor previamente especificado. De modo geral, quanto menor for o erro permitido, maior será o número de soluções que terá de ser calculado de modo semelhante ao utilizado no método dos pesos e, portanto, maior será o esforço computacional. Note-se que o método NISE se aplica apenas a problemas biobjectivo.

Para ilustrar os passos deste método considere-se o problema de programação linear com dois objectivos da figura II.30.

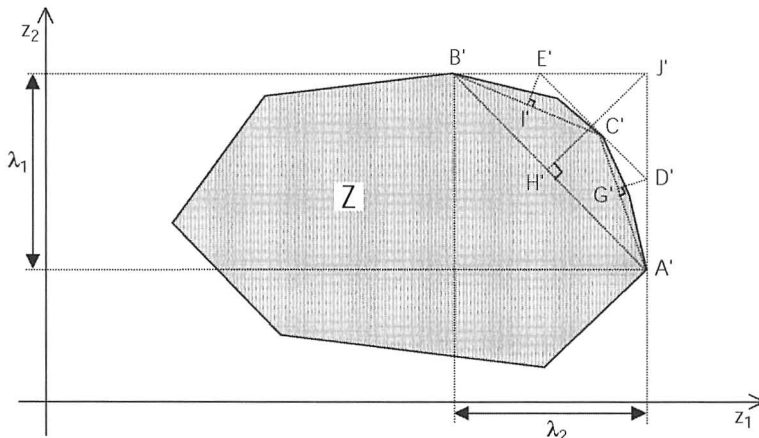


Figura II.30 – Exemplo do método NISE.

Descrição resumida do método:

- 1 – Optimizam-se em  $S$  os objectivos  $z_1(x)$  e  $z_2(x)$ . Obtêm-se, em  $Z$ , os pontos  $A'$  e  $B'$  da figura II.30. O segmento  $[A'B']$  é a primeira aproximação do conjunto das soluções não dominadas, no espaço das funções objectivo.
- 2 – Calcula-se o ponto  $C'$  resolvendo o seguinte problema:
 
$$\max_{x \in S} \{ \lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x) \}$$
 em que  $\lambda_i > 0$ ,  $i=1,2$ ,  $\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1$  e  $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  é o declive do segmento  $[A'B']$  indicado na figura II.30.

A segunda aproximação do conjunto das soluções não dominadas é dada por  $[A'C']$  e  $[C'B']$ . Utilizando um processo análogo obtêm-se novas aproximações.

- 3 – O erro cometido na primeira aproximação  $[A'B']$  é inferior a  $[J'H']$ . Na segunda aproximação o erro no segmento  $[A'C']$  é inferior a  $[D'G']$  e no segmento  $[C'B']$  é inferior a  $[E'I']$ .
- 4 – O conjunto aproximado das soluções não dominadas (no espaço das funções objectivo), e o conjunto aproximado das soluções eficientes (no espaço das variáveis de decisão) correspondentes, consideram-se satisfatórios quando o máximo erro possível não ultrapassa o máximo erro permitido.

Para mais detalhes sobre este método veja-se Cohon (1978).

#### MÉTODO SIMPLEX

Em problemas de programação linear com objectivos múltiplos, os algoritmos (baseados no método simplex) para calcular o conjunto dos vértices não dominados do poliedro admissível podem ser estruturados como segue:

- (a) Cálculo dum vértice não dominado. Obtém-se por um dos processos indicados num parágrafo anterior.
- (b) Cálculo dos restantes vértices não dominados.

Em resumo, os processos conhecidos são:

1. Métodos de cálculo das bases adjacentes não dominadas. Veja-se Zeleny (1974), Yu e Zeleny (1975) e Steuer (1986).
2. Métodos de cálculo dos vértices adjacentes não dominados. Veja-se Evans e Steuer (1973) e Steuer (1986).
3. Método paramétrico.

Em 1. e 2. é utilizado um teorema apresentado, por exemplo, por Yu e Zeleny (1975), em que se demonstra que o conjunto das soluções básicas não dominadas é conexo<sup>5</sup>. Isto significa que o conjunto de todas as bases (ou

---

<sup>5</sup> Seja  $X = \{x^i : i=1, \dots, s\}$  o conjunto das soluções básicas de  $S$  pertencentes ao conjunto das soluções eficientes. Este conjunto diz-se conexo se contém um só elemento ou se para dois quaisquer pontos  $x^j, x^k \in X$ , existe uma sequência  $\{x^1, \dots, x^\ell, \dots, x^i\}$  em  $X$ , tal que  $x^\ell$  e  $x^{\ell+1}$ ,  $\ell=1, \dots, i-1$ , são adjacentes e  $x^1 = x^j$ ,  $x^i = x^k$ .

de todos os vértices) não dominadas(os) pode ser obtido examinando exaustivamente as bases adjacentes do conjunto das bases não dominadas que vão sendo obtidas a partir da inicial, calculada em (b).

Steuer (1986) e Zeleny (1974) utilizam um teste de não dominância para verificar se cada base (ou cada vértice) a ser testada(o) é ou não eficiente.

Zeleny (1974) estabelece várias proposições com o fim de explorar ao máximo a informação contida no quadro simplex para objectivos múltiplos. Trata-se de uma extensão do quadro simplex para problemas com uma única função objectivo, com uma linha por cada função objectivo – evitando, sempre que possível, pivotações desnecessárias e a aplicação do teste de não dominância.

O método paramétrico é semelhante ao método dos pesos. Note-se que, desde que a malha dos  $\lambda_i$ s seja suficientemente apertada, o procedimento do método dos pesos conduz ao conjunto de todos as soluções básicas eficientes do problema linear multicritério.

Os quadros simplex correspondentes às soluções básicas eficientes fornecem informação suficiente para decompor, no espaço dos pesos, as regiões de valores dos  $\lambda_i$  para os quais a solução do problema:

$$\max_{x \in S} \underline{\lambda} \cdot Cx$$

$$S = \{x \in \mathfrak{R}^p : Ax = \underline{b}, x \geq \underline{0}\}$$

conduz a uma mesma solução básica eficiente.

Para terminar, refira-se que o método simplex para objectivos múltiplos, apesar de, nos últimos anos, ter despertado o interesse de numerosos investigadores, é um assunto que ainda contém questões em aberto. O aspecto computacional é particularmente importante, uma vez que os problemas práticos são, em geral, de dimensão elevada.

#### 4.3 MÉTODOS EM QUE A ARTICULAÇÃO DE PREFERÊNCIAS DO AGENTE DE DECISÃO É PROGRESSIVA

Trata-se de métodos em que cada fase de cálculo de uma (ou várias) solução (soluções) eficiente(s) é seguida de uma fase de diálogo em que a reacção do agente de decisão/analista conduz à preparação de nova fase de cálculo. Há uma condição de paragem do algoritmo, muito variável de

método para método. Em alguns métodos admite-se a existência de uma função utilidade implícita do agente de decisão, não sendo, porém, possível conhecê-la explicitamente. Estes métodos propõem-se *descobrir* o ótimo (ou uma aproximação deste) da função utilidade implícita. Noutros casos realiza-se uma pesquisa aberta, progressiva e selectiva das soluções eficientes, que termina quando se obtém uma solução satisfatória. Não prestaremos aqui mais atenção a este tipo de métodos, visto que serão objecto de tratamento específico no capítulo seguinte deste livro.

## 5. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM PLMO – ALGUMAS ABORDAGENS

Tal como em Programação Linear Monobjectivo, a análise da sensibilidade das soluções obtidas, em relação à variação dos coeficientes do modelo de Programação Linear Multiobjectivo, também se revela de grande importância, sobretudo tendo em vista a sua aplicação prática. Contudo, num ambiente caracterizado pela existência de múltiplas funções objectivo, conflituosas e incomensuráveis, em que existe um grande número de soluções não dominadas (mesmo que se limite a análise às soluções básicas) e em que, no quadro dos métodos interactivos, as preferências do agente de decisão têm um papel chave na pesquisa e selecção de soluções, as questões de análise de sensibilidade são encaradas de forma diversa por vários autores. Nos parágrafos seguintes são referidas brevemente algumas abordagens propostas na literatura científica, dedicadas ao estudo da sensibilidade das soluções eficientes, em relação à variação de parâmetros do modelo.

Na abordagem de Kornbluth (1974) são investigadas variações simultâneas na matriz dos coeficientes tecnológicos, na matriz dos coeficientes das funções objectivo e nos termos independentes das restrições, considerando um modelo de PLMO com múltiplos termos independentes, por meio da extensão da teoria da dualidade em programação linear monocritério ao caso multicritério. As gamas de variação admissíveis, para os parâmetros de perturbação, são obtidas através da resolução de um conjunto de desigualdades lineares, num processo tipo *tentativa e erro*.

Deshpande e Zionts (1980) formulam o problema de análise de sensibilidade, em relação a variações da matriz dos coeficientes das funções

objectivo, como a determinação da gama de variação de um parâmetro de perturbação, na qual uma dada solução não dominada permanece a preferida (assumindo a existência e a estabilidade de uma função utilidade implícita do agente de decisão). A gama de variação admissível para o parâmetro é calculada usando um algoritmo de programação linear fraccionária.

Gal e Leberling (1981) designam a sua abordagem por análise de relaxação ou análise pós-eficiente (por analogia com análise pós-optimal no caso monocritério). Assumem que o conjunto de todas as soluções não dominadas foi previamente calculado, e estudam o comportamento deste conjunto, em relação a variações separadas dos coeficientes da função objectivo e dos termos independentes das restrições. No que se refere a perturbações nos coeficientes das funções objectivo, o problema é definido como a determinação de uma gama de variação admissível para os parâmetros de perturbação, na qual o conjunto das soluções não dominadas não se altera. Este processo envolve a resolução de uma série de problemas auxiliares de programação linear, com parâmetros na matriz das restrições, com o fim de testar, para cada solução não dominada, a eficiência das variáveis não básicas. No que diz respeito a perturbações nos termos independentes das restrições, Gal e Leberling consideram o problema da determinação de uma região admissível para os parâmetros de perturbação, na qual o conjunto dos vértices, arestas e faces não dominados permanece inalterado.

Antunes e Clímaco (1992) propõem formas de análise de sensibilidade baseadas na exploração gráfica dos resultados no espaço dos pesos (que podem ser encaradas como uma extensão do método TRIMAP), tendo em vista a respectiva utilização interactiva, para além de evitar a resolução de problemas auxiliares, exigindo muito esforço computacional. Os problemas de análise de sensibilidade de uma solução (básica) não dominada, em relação a variações dos coeficientes das funções objectivo, e a variações dos termos independentes das restrições são formulados como a determinação da gama de variação de um parâmetro de perturbação para a qual a solução é *ainda preferida*, de acordo com um *padrão de preferência*, representado pela região de indiferença desta solução para o problema não perturbado. (Note-se que não implica a assunção da existência de qualquer função utilidade implícita do agente de decisão). O problema de análise de sensibilidade consiste, então, em determinar os valores mínimo e máximo do parâmetro de perturbação,

para a solução não dominada seleccionada pelo agente de decisão, que definem a gama de variação dentro da qual a intersecção entre as regiões de indiferença, perturbada e não perturbada, é não vazia. Este tipo de análise é ainda estendido aos casos em que se introduzem novas restrições e novas variáveis de decisão.

## 6. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considere o problema:

$$\max \underline{z}(\underline{x}) = [ z_1(x_1, x_2), z_2(x_1, x_2) ]$$

$$\text{com } z_1(x_1, x_2) = 5x_1 - 2x_2$$

$$z_2(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2$$

sujeito a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Represente graficamente a região admissível no espaço de decisão e no espaço dos objectivos, assinalando o conjunto das soluções eficientes e o conjunto das soluções não dominadas.
- Identifique a solução ideal.
- Formule o problema que permite determinar a solução admissível que minimiza a distância à solução ideal, de acordo com a métrica  $L_\infty$ . Obtenha, gráfica e analiticamente, a solução deste problema.
- Qual a solução admissível que minimiza a distância à solução ideal, de acordo com a métrica  $L_1$ ? Para esta solução, quais são as variáveis não básicas eficientes?
- Determine as regiões de indiferença, no espaço dos pesos, correspondentes a cada uma das soluções básicas não dominadas.

2. Considere o problema:

$$\max z_1(x_1, x_2) = -x_1 + 3x_2$$

$$\max z_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2$$

$$\max z_3(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. a: } x_2 \leq 4$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\2x_1 + x_2 &\leq 10 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

- Represente a região admissível e os gradientes das funções objectivo, no espaço de decisão.
- Identifique a solução ideal.
- Determine as regiões de indiferença no espaço dos pesos correspondentes às soluções básicas não dominadas que optimizam cada uma das funções objectivo individualmente.
- Para cada uma das soluções determinadas em (b), identifique as variáveis não básicas eficientes.

3. Numa fábrica existem 2 tipos de máquinas integradas nas linhas de produção de 4 produtos. As capacidades disponíveis de cada tipo de máquina (expressas em horas/semana) e o número de horas/semana requerido a cada máquina, por unidade produzida de cada um dos 4 produtos, são dados na tabela:

Tipo de máquina	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	Disponibilidade
A	2	1	4	3	60
B	3	4	1	2	60

A direcção da empresa pretende maximizar o lucro, a qualidade do abastecimento de P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub> e P<sub>4</sub>, e o grau de satisfação dos trabalhadores. Estudos recentes permitiram estabelecer a contribuição para cada um dos objectivos, por unidade de cada um dos produtos:

	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>
Lucro	3	1	2	1
Qualidade	1	-1	2	4
Satisfação laboral	-1	5	1	2

- Formule o problema utilizando um modelo de programação linear multiobjectivo.
- Calcule a região de indiferença, correspondente à solução não dominada que optimiza o lucro.
- Para a solução determinada em (b), quais são as variáveis não básicas eficientes?



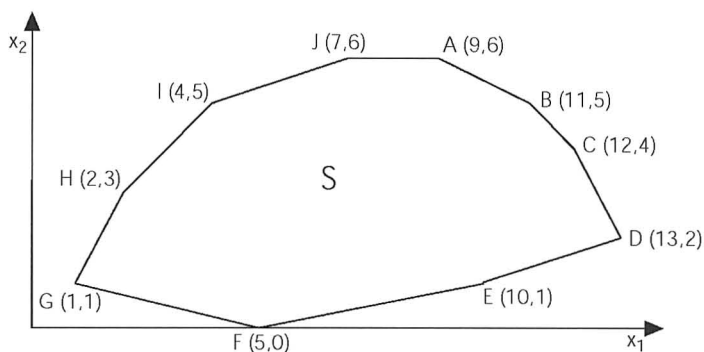
(d) Alguma das soluções não dominadas, obtidas introduzindo na base as variáveis calculadas em (c), é óptima da função objectivo relativa à qualidade? E no que diz respeito à função objectivo que tem em conta a satisfação laboral?

4. Considere o problema de programação linear com duas funções objectivo:

$$\min z_1(\underline{x}) = x_1$$

$$\max z_2(\underline{x}) = x_2$$

$$\text{s. a: } \underline{x} \in S$$



- Identifique a região eficiente e a solução ideal.
- Formule o problema a resolver para determinar a solução eficiente que minimiza a distância à solução ideal, de acordo com a métrica  $L_1$ .
- Resolva graficamente esse problema, representando o gradiente da função objectivo utilizada.
- Represente a decomposição do espaço dos pesos, considerando todas as regiões de indiferença.
- Qual será o conjunto das soluções eficientes, se o problema em estudo for o seguinte:

$$\max z_1(\underline{x}) = x_1$$

$$\min z_2(\underline{x}) = x_1$$

$$\text{s. a: } \underline{x} \in S$$

5. Considere o seguinte problema de programação linear com três funções objectivo:

$$\max z_1 = 3 x_1 + 4 x_2 + x_4$$

$$\max z_2 = 2 x_2 + 3 x_3 + 4 x_4$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & z_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{s. a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 30 \\
& 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 40 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

- (a) Calcule a matriz dos custos reduzidos e determine a região de indiferença no espaço dos pesos, correspondente à solução não dominada que otimiza a função objectivo  $z_1$ .
- (b) Para esta solução, quais são as variáveis não básicas eficientes? Baseie a análise no espaço dos pesos.

6. Considere o seguinte problema de programação linear com três funções objectivo:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\max \quad & z_2 = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \\
\max \quad & z_3 = x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \\
\text{s. a:} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 40 \\
& 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

- (a) Determine a região de indiferença, no espaço dos pesos, correspondente à solução eficiente que otimiza a função objectivo  $z_2$ .
- (b) Para essa solução, quais são as variáveis não básicas eficientes (baseie a análise no espaço dos pesos)?
- (c) Considere o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{aligned}
\min \quad & v \\
\text{s. a:} \quad & \underline{x} \in S \text{ (região admissível original)} \\
& v + 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \geq 35 \\
& v + 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 5 \\
& v + x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 15 \\
& v \geq 0
\end{aligned}$$

A solução deste problema auxiliar é uma solução (estritamente) eficiente do problema multiobjectivo? Em caso negativo, que modificações deveria efectuar na formulação do problema auxiliar, para garantir a obtenção de uma solução (estritamente) eficiente?

7. Mostre a veracidade das seguintes afirmações, no caso de serem verdadeiras, ou apresente um contra-exemplo, no caso de serem falsas. Recorra a exemplos gráficos se tal lhe facilitar a análise.

- (a) Num problema de programação linear com  $p$  funções objectivo ( $p > 2$ ) nunca é possível obter a solução não dominada que optimiza  $z_k(\underline{x})$ ,  $k=1, \dots, p$ , através da optimização de uma função escalar soma ponderada, com  $\lambda_k=0$ .
- (b) Seja  $\underline{z}^*$  a solução ideal (ponto no espaço das funções objectivo, em geral não admissível, que optimizaria simultaneamente todas as funções objectivo na região admissível). É sempre possível definir  $\underline{x}^*$  (no espaço de decisão), tal que  $\underline{z}^* = \underline{z}(\underline{x}^*)$ , onde  $\underline{z}(\underline{x}) = [z_1(\underline{x}), z_2(\underline{x}), \dots, z_p(\underline{x})]$ .
- (c) Num problema de programação linear multiobjectivo, a solução obtida minimizando uma distância, de acordo com a métrica  $L_\infty$ , a um ponto de referência, é sempre um vértice da região admissível original.
- (d) Num problema de programação linear multiobjectivo, a solução obtida minimizando uma distância de acordo com a métrica  $L_1$ , a um ponto de referência, é sempre um vértice da região admissível original.
- (e) Quando se introduz uma restrição adicional num problema de programação linear multiobjectivo, é possível obter soluções eficientes do problema modificado que não são eficientes do problema original.
- (f) Num problema de programação linear com  $p$  funções objectivo é possível que toda a região admissível seja eficiente.
- (g) As soluções, localizadas sobre uma aresta, que une dois vértices eficientes, também são eficientes.
- (h) Considere um problema de programação linear com 3 funções objectivo, de que se conhecem 3 soluções básicas eficientes. A optimização de uma função escalar, cujo gradiente é normal ao plano que passa por essas 3 soluções, garante sempre a obtenção de uma solução eficiente.
- (i) Considere o problema de programação linear multiobjectivo:

$$\max \quad z_1 = \underline{c}_1 \underline{x}$$

$$\max \quad z_2 = \underline{c}_2 \underline{x}$$

$$\max \quad z_3 = \underline{c}_3 \underline{x}$$

$$\text{s. a: } \underline{x} \in S \equiv \{A \underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$$

onde  $\underline{x}$  ( $n \times 1$ ),  $\underline{c}_k$  ( $1 \times n$ ),  $A$  ( $m \times n$ ) e  $\underline{b}$  ( $m \times 1$ ).

(i.1) Será possível obter a solução eficiente que maximiza  $z_3(\underline{x})$ , com

$\lambda_3=0$ , através da resolução de:

$$\max \lambda_1 c_1 x + \lambda_2 c_2 x + \lambda_3 c_3 x$$

$$\text{s. a: } x \in S$$

(em que  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda \equiv \{\lambda_k \geq 0, k=1,2,3, \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$ ). Em caso afirmativo, represente uma decomposição possível do espaço dos pesos que corresponda às circunstâncias referidas.

(i.2) Em que condições é possível garantir que a solução óptima de:

$$\max \lambda_1 c_1 x + \lambda_2 c_2 x + 0 c_3 x$$

$$\text{s. a: } x \in S$$

é uma solução eficiente do problema tricritério original?

(j) Considere o seguinte problema de programação linear multiobjectivo:

$$\max C x$$

$$\text{s. a: } A x = b$$

$$x \geq 0$$

em que  $x$  ( $n \times 1$ ),  $C$  ( $p \times n$ ),  $A$  ( $m \times n$ ) e  $b$  ( $m \times 1$ ). Seja  $x^0$  uma solução admissível para este problema.

Considere o seguinte problema auxiliar:

$$\max \sum_{k=1}^p u_k$$

$$\text{s. a: } c_k x - u_k = c_k x^0, \quad k=1, \dots, p$$

$$A x = b$$

$$x \geq 0$$

$$u_k \geq 0, \quad k=1, \dots, p$$

em que  $c_k$  é a  $k$ -ésima linha de  $C$ .

Que conclusão pode tirar se, no problema anterior,  $\sum_{k=1}^p u_k = 0$ ?

8. Considere o seguinte problema de programação linear multiobjectivo:

$$\max z_1 = 1.5 x_1 + x_2$$

$$\max z_2 = x_2 + 2x_3$$

$$\max z_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.a: } x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 2$$

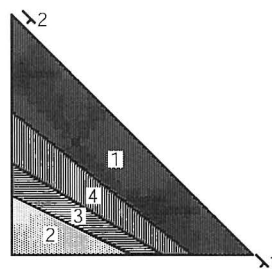
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (a) Calcule uma solução básica eficiente do problema que maximiza  $z_3$ , e a respectiva região de indiferença, no espaço dos pesos.
- (b) Calcule uma solução básica eficiente, adjacente à calculada em a), que melhora a função objectivo  $z_1$ .
- (c) Indique os valores das funções objectivo de uma solução eficiente não básica, cujo valor de  $z_1$  é intermédio, entre o da solução obtida em (a), e o da solução obtida em (b).

9. Considere o seguinte problema de programação linear multiobjectivo:

$$\begin{aligned}
 \max z_1 &= x_2 \\
 \max z_2 &= x_1 + 3x_2 \\
 \max z_3 &= 2x_1 - x_2 \\
 \text{s.a:} \quad &3x_1 + x_2 \leq 30 \\
 &x_1 + x_2 \leq 20 \\
 &x_1 \leq 8 \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

No triângulo à direita encontra-se representada a decomposição do espaço dos pesos, relativa aos vértices eficientes do problema. A partir desta decomposição, que conclusões pode tirar de imediato acerca do problema em estudo?



10. Considere o seguinte problema de programação linear multicritério:

$$\begin{aligned}
 \max z_1 &= 3x_1 + x_2 \\
 \max z_2 &= x_1 + 2x_2 \\
 \max z_3 &= -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a:} \quad &\left. \begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 0.5x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned} \right\} \underline{x} \in S \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- (a) Determine, graficamente, o conjunto das soluções eficientes.
- (b) Pretende-se determinar a solução eficiente que minimiza a distância à solução ideal, utilizando a métrica pesada de Tchebycheff. Sabendo que a solução ideal é  $\underline{z}^*=(21,10,6)$ , formule o problema considerando os seguintes pesos (não normalizados):  $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=1$ .

- (c) Considere o seguinte ponto de referência, no espaço dos objectivos,  $\underline{q} = (14, 8, 0)$ , pertencente ao interior do poliedro admissível. A solução  $(\underline{x}^a, \underline{z}^a)$  é óptima do problema

$$\begin{aligned} \min v \\ \text{s. a: } & \lambda_1 (14 - 3x_1 - x_2) \leq v \\ & \lambda_2 (8 - x_1 - 2x_2) \leq v \\ & \lambda_3 (0 + x_1 - 2x_2) \leq v \\ & \underline{x} \in S \end{aligned}$$

com  $\underline{\lambda} = (1, 1, 1)$ .

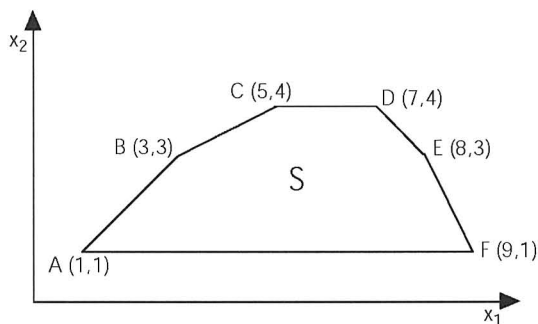
A solução  $(\underline{x}^a, \underline{z}^a)$  é dada por:

$$x_1^a = 4.2, \quad x_2^a = 2.8 \quad \text{e} \quad z_1^a = 15.4, \quad z_2^a = 9.8, \quad z_3^a = 1.4$$

Indique como evoluem as tendências de variação dos valores das funções objectivo, relativamente a  $\underline{z}^a$ , quando se resolve o problema anterior, mas considerando  $\underline{\lambda} = (2, 1, 1)$ .

- 11.** Considere o problema de programação linear com duas funções objectivo:

$$\begin{aligned} \max z_1 &= x_1 - x_2 \\ \max z_2 &= x_1 + 3x_2 \\ \text{s. a: } & (x_1, x_2) \in S \end{aligned}$$



- (a) Identifique o conjunto das soluções eficientes.
- (b) Suponha que se pretende calcular a solução eficiente que otimiza a soma pesada das funções objectivo, com pesos  $(\lambda_1, \lambda_2) = (7/12, 5/12)$ .
- Formule o problema a resolver.
  - Resolva graficamente o problema. Indique os valores de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $z_2$  para a solução encontrada.
  - Determine a região de indiferença no espaço dos pesos, correspondente à solução eficiente calculada em (ii).

## CAPÍTULO III

### MÉTODOS INTERACTIVOS EM PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTICRITÉRIO

#### 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da ciência dos computadores, quer do *hardware*, quer do *software*, tem constituído factores essenciais para o desenvolvimento de métodos interactivos dedicados ao apoio à decisão.

No caso da programação linear multicritério, os métodos geradores do conjunto das soluções eficientes revelam-se pouco interessantes do ponto de vista prático. Por um lado, é grande o esforço computacional requerido para calcular todo o conjunto das soluções eficientes. Para além disso, não é aceitável propor ao agente de decisão centenas ou milhares de soluções eficientes, o que aconteceria em muitos casos, mesmo limitando o cálculo ao conjunto dos vértices eficientes do poliedro admissível.

O uso de métodos de função utilidade não nos parece também o mais adequado. Neste caso, apesar do problema em estudo ser modelado utilizando mais do que uma função objectivo, a sua agregação é feita *a priori*, não havendo interferência do agente de decisão a partir do momento em que se decide passar à fase de cálculo da solução óptima da função utilidade, previamente construída.

Em nossa opinião, os métodos interactivos, em que a articulação de preferências do(s) agente(s) de decisão é progressiva, são, em geral, os mais adequados no apoio multicritério à decisão. Como a própria designação indica, a interactividade implica uma sucessão de fases de cálculo e de

diálogo. Após cada fase de cálculo é proposta uma solução eficiente (ou várias) ao agente de decisão, reagindo este, fornecendo a informação necessária à execução duma nova fase de cálculo, ou dando o processo por terminado.

O processo de articulação das fases de cálculo e de diálogo, atrás referidas, permite categorizar os métodos interactivos em dois tipos. Em primeiro lugar, os métodos interactivos que constituem uma evolução dos métodos de função utilidade, isto é, métodos em que se parte do princípio de que existe uma função utilidade implícita do agente de decisão, não sendo este capaz de a explicitar. O papel do protocolo interactivo é, no essencial, descobrir o óptimo (ou uma aproximação deste) da função utilidade, através de um diálogo, apenas indirectamente relacionado com a procura desse óptimo. Em contraposição, desenvolveram-se métodos de pesquisa livre, isto é, os que não têm por objectivo a convergência para o óptimo de qualquer função utilidade, mesmo que implícita. Em vez disso, o protocolo interactivo tem como objectivo essencial a aprendizagem progressiva, não completamente estruturada, das preferências do agente de decisão, no universo do conjunto das soluções eficientes (Vincke, 1992). Usando a linguagem de Feyerabend (1975), troca-se uma *guided exchange* subjacente à primeira atitude, por aquilo a que o autor chama *open exchange* e tipifica da maneira seguinte: "*An open exchange is guided by a pragmatic philosophy. The tradition adopted by the parties is unspecified in the beginning and develops as the exchange proceeds. The participants get immersed into each other's ways of thinking, feeling, perceiving to such an extent their ideas, perception, world views may be entirely changed – they become different people participating in a new and different tradition*". Estas ideias aparecem associadas a processos de decisão em grupo. Não deixam por isso, em nossa opinião, de ser bem adaptadas aos métodos interactivos de apoio multicritério à decisão baseados na aprendizagem, aliás, também os mais fáceis de adaptar à decisão em grupo. De facto, neste tipo de abordagens não há lugar a convergência matemática; o processo termina quando se obtém uma solução eficiente satisfatória. Em certos casos, é mesmo abusivo falar-se em métodos, sendo no essencial ambientes interactivos de cálculo, particularmente adaptados à inclusão em sistemas de apoio à decisão dedicados a uma pesquisa progressiva e selectiva de soluções eficientes em programação linear multicritério.



No estudo das *packages* TOMMIX e SOMMIX, que descreveremos mais adiante, estes assuntos serão postos em evidência, havendo a combinação de diversos métodos ou procedimentos, visto que não há método (ou procedimento) que seja o melhor em todas as circunstâncias. Não havendo um processo único de utilização destas *packages*, é nossa convicção que se justifica iniciar a pesquisa calculando um conjunto de vértices não dominados bem distribuídos, no que se refere a valores das funções objectivo, quanto possível. Para este efeito, parece adequado usar como processo de cálculo a optimização de somas ponderadas. Numa segunda fase podem delimitar-se os valores com interesse das funções objectivo, através da introdução de restrições. Este procedimento pode, eventualmente, ser conjugado com o cálculo de mais vértices eficientes, procedendo-se à optimização de somas pesadas das funções objectivo. Numa última fase, a pesquisa local, utilizando métodos baseados no cálculo de soluções eficientes a partir da minimização de uma distância de Tchebycheff, parece indicada. Para além disso, em nossa opinião, um sistema de apoio à decisão inclui o (ou os) agente(s) de decisão e o analista envolvidos, havendo lugar a falar-se de um sistema de apoio à decisão diferente, sempre que os actores são diferentes. Neste capítulo descrevem-se cinco métodos interactivos de apoio multicritério à decisão, que serão discutidos, tendo em conta a tipologia referida anteriormente, os processos utilizados no cálculo das soluções eficientes, assim como os protocolos de diálogo destinados à captação de preferências do(s) agente(s) de decisão. A rapidez de cálculo e os aspectos cognitivos associados ao diálogo são postos em evidência.

## **2. MÉTODO STEM**

### **2.1. DESCRIÇÃO GENÉRICA**

O *Step Method* (STEM), desenvolvido por Benayoun *et al.* (1971), é um método interactivo de redução progressiva da região admissível. Em cada interacção, o agente de decisão é chamado a especificar a quantidade que está disposto a sacrificar na função objectivo cujo valor considera mais satisfatório, de modo a tentar melhorar aquelas cujos valores não o

satisfazem. Em cada fase de cálculo é minimizada uma distância ponderada de Tchebycheff à solução ideal.

Cada iteração<sup>1</sup> inclui um problema a otimizar, que reflecte as escolhas do analista/agente de decisão feitas em iterações precedentes, através da redução da região admissível. É apresentada ao agente de decisão a solução de compromisso calculada em cada iteração minimizando uma distância ponderada de Tchebycheff à solução ideal. Se os valores das funções objectivo forem considerados satisfatórios, o processo termina; caso contrário, o analista/agente de decisão deve especificar qual pretende relaxar, e de que quantidade, por forma a melhorar os outros objectivos. A região admissível é, então, reduzida progressivamente, através das limitações nos valores das funções objectivo (calculadas a partir das quantidades de relaxação introduzidas pelo analista/agente de decisão), e o processo repete-se.

A apresentação, passo a passo, deste algoritmo, exige a introdução prévia da noção de tabela de óptimos individuais.

#### TABELA DE ÓPTIMOS INDIVIDUAIS

A tabela de óptimos individuais (ou tabela de *pay-off*, como é normalmente designada) disponibiliza os valores das funções objectivo, para cada solução não dominada, resultante da optimização separada de cada função objectivo do problema em estudo. Esta tabela permite que o analista/ agente de decisão tenha uma primeira visão global sobre a gama de variação das funções objectivo, na região eficiente.

A tabela de óptimos individuais tem a seguinte forma:

$z_1$	...	$z_k$	...	$z_p$
$z_1^1 = z_1^*$	...	$z_k^1$	...	$z_p^1$
...	...	...	...	$z_p^2$
$z_1^k$	...	$z_k^k = z_k^*$	...	$z_p^k$
...	...	...	...	...
$z_1^p$	...	$z_k^p$	...	$z_p^p = z_p^*$

<sup>1</sup> Na versão original do método STEM, apresentada neste trabalho, considera-se que em cada interacção se permite apenas a relaxação de uma única função objectivo, de uma quantidade fixa, não havendo lugar à revisão de relaxações anteriores. Neste caso, o processo é iterativo, coincidindo cada iteração com uma interacção com o utilizador.

em que  $z_k^i$  designa o valor da função objectivo  $k$ , quando se otimiza a função objectivo  $i$  em  $S$  ( $z_k^k = z_k^*$  é o óptimo de  $z_k$ ). Os óptimos das funções objectivo  $z_1, \dots, z_p$  (ou, como se trata de programação linear,  $c_1x, \dots, c_px$ ) encontram-se na diagonal principal da tabela, permitindo, portanto, identificar facilmente a solução ideal.

A partir da tabela de *pay-off* também se define o ponto nadir, seleccionando em cada coluna o pior valor da respectiva função objectivo, isto é,  $n_k = \min_{i=1, \dots, p} z_k^i$ ,  $k=1, \dots, p$ . Este valor  $n_k$  representa uma aproximação do mínimo da função objectivo  $z_k(x)$ , na região eficiente. No entanto, a sua principal virtude diz respeito à facilidade de determinação, visto que, em geral, os  $n_k$  não são os verdadeiros mínimos na região eficiente. Para um problema com  $p$  funções objectivo, uma solução eficiente pode ter valores abaixo do mínimo dado pela tabela de *pay-off*, num número de funções objectivo igual ou menor do que  $p-2$  (para detalhes ver Isermann e Steuer, 1988).

A figura III.1 representa os pontos ideal e nadir, para um exemplo com  $p=2$ . Note-se que, para  $p=2$ , o ponto nadir, obtido da tabela de óptimos individuais, identifica sempre os mínimos de cada função objectivo na região eficiente.

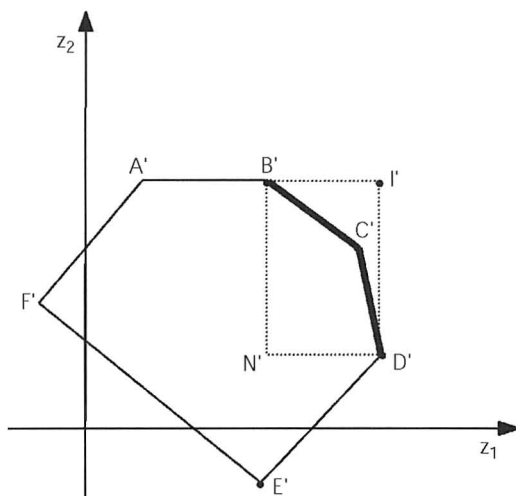


Figura III.1 – Solução ideal (I') e solução nadir (N').

As experiências computacionais de Isermann e Steuer (1988) apontam para um valor de pelo menos 30% da região eficiente *invisível* (isto é, não identificável), se se partir da tabela de *pay-off*, e propõem um algoritmo baseado no método simplex, e no carácter conexo do grafo, cujos nodos são definidos por vértices eficientes e os arcos por arestas eficientes, para determinar os mínimos de cada função objectivo na região eficiente. Este processo envolve um elevado esforço computacional.

Curiosamente, as experiências computacionais relatadas por Reeves e Reid (1988) apenas conduzem a uma expansão da região eficiente entre 3.9% e 7.5%, comparando com o que se obtém calculando os limites inferiores da tabela de *pay-off* e os mínimos reais na região eficiente, para problemas de teste com 3 e 5 funções objectivo. Nestas circunstâncias, e dado o esforço computacional da determinação exacta dos mínimos eficientes, Reeves e Reid afirmam que a relaxação dos limites inferiores dos mínimos, considerando os valores obtidos a partir da tabela de *pay-off*, é suficiente para que os métodos que utilizam esses valores considerem a quase totalidade da região eficiente.

Por fim, note-se que a tabela de *pay-off* pode não ser definida univocamente, se existirem óptimos alternativos eficientes para alguma função objectivo. Neste caso, o nadir também não será único, apesar de a solução ideal continuar a sê-lo.

## 2.2. ALGORITMO STEM

### *Passo 1*

São optimizadas separadamente as funções objectivo, de modo a construir a tabela de óptimos individuais (ou de *pay-off*).

### *Passo 2*

A partir dos valores na tabela de óptimos individuais, são calculados os pesos  $\beta_k$ . Estes pesos utilizam-se na fase de cálculo. Destinam-se a ter em conta as ordens de grandeza e a gama de valores das funções objectivo, no cálculo da solução eficiente que minimiza uma distância pesada de Tchebycheff à solução ideal. A saber:

$$\beta_k = \begin{cases} \frac{z_k^* - n_k}{z_k^*} \left[ \sum_{j=1}^n c_{kj}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} & \text{se } z_k^* > 0 \\ \frac{n_k - z_k^*}{n_k} \left[ \sum_{j=1}^n c_{kj}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} & \text{se } z_k^* \leq 0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, p$$

(A)      (B)

onde  $n_k$  é o menor valor da coluna  $k$  da tabela de óptimos individuais. Relembre-se que este valor  $n_k$  é uma aproximação do mínimo da função objectivo  $z_k(\underline{x})$ , na região eficiente.

O factor A destina-se a dar maior importância às funções objectivo com maiores variações relativas. O factor B é um factor de normalização, usando a norma  $L_2$ , dos gradientes das funções objectivo.

### Passo 3

É definido o conjunto  $R$  que contém os índices das funções objectivo relaxadas até à iteração actual, inclusive, de acordo com as indicações do agente de decisão, ao identificar os valores satisfatórios, susceptíveis de ser relaxados até determinados limites. Na primeira iteração  $R = \emptyset$  e  $S^{(1)} \equiv S$ , em que  $S$  designa a região admissível.

Os pesos usados na métrica ponderada  $L_\infty$ , para a iteração actual ( $h$ ), são:

$$\alpha_k^{(h)} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \in R \\ \frac{\beta_k}{\sum_{i=1}^p \beta_i} & \text{se } k \notin R \end{cases}$$

Note-se que os  $\alpha_k^{(h)}$  das funções objectivo cujos valores foram relaxados até à iteração  $h$ , inclusivé, colocam-se a zero.

Os pesos  $\alpha_k^{(h)}$  são normalizados de tal forma que  $\sum_{k=1}^p \alpha_k^{(h)} = 1$ , isto é:

$$\alpha_k^{(h)} \leftarrow \frac{\alpha_k^{(h)}}{\sum_{i=1}^p \alpha_i^{(h)}} \quad k=1, \dots, p$$

*Passo 4*

Na fase de cálculo é resolvido o problema linear de minimização da distância ponderada de Tchebycheff à solução ideal:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ \text{s. a:} \quad & v \geq \alpha_k^{(h)} \left( z_k^* - c_k \underline{x} \right) \quad , 1 \leq k \leq p \\ & \underline{x} \in S^{(h)} \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

Na fase de diálogo é apresentada ao agente de decisão a solução  $\underline{z}^{(h)} = z(\underline{x}^{(h)})$ , resultante da resolução do problema da iteração  $h$ , onde  $\underline{x}^{(h)}$  é o ponto da região admissível reduzida  $S^{(h)}$  a que corresponde o ponto  $\underline{z}^{(h)}$  mais próximo de  $\underline{z}^*$ , de acordo com a métrica ponderada de Tchebycheff.

*Passo 5*

Se o agente de decisão considerar esta solução satisfatória, o processo termina com  $\underline{x}^{(h)}$  como solução final.

Caso contrário, o agente de decisão é chamado a indicar qual a função objectivo  $z_i(\underline{x})$  ( $R \leftarrow R \cup \{i\}$ ) que está disposto a sacrificar, e qual a quantidade máxima  $\Delta_i$  a relaxar, de modo a tentar melhorar as funções cujos valores não considera ainda satisfatórios.

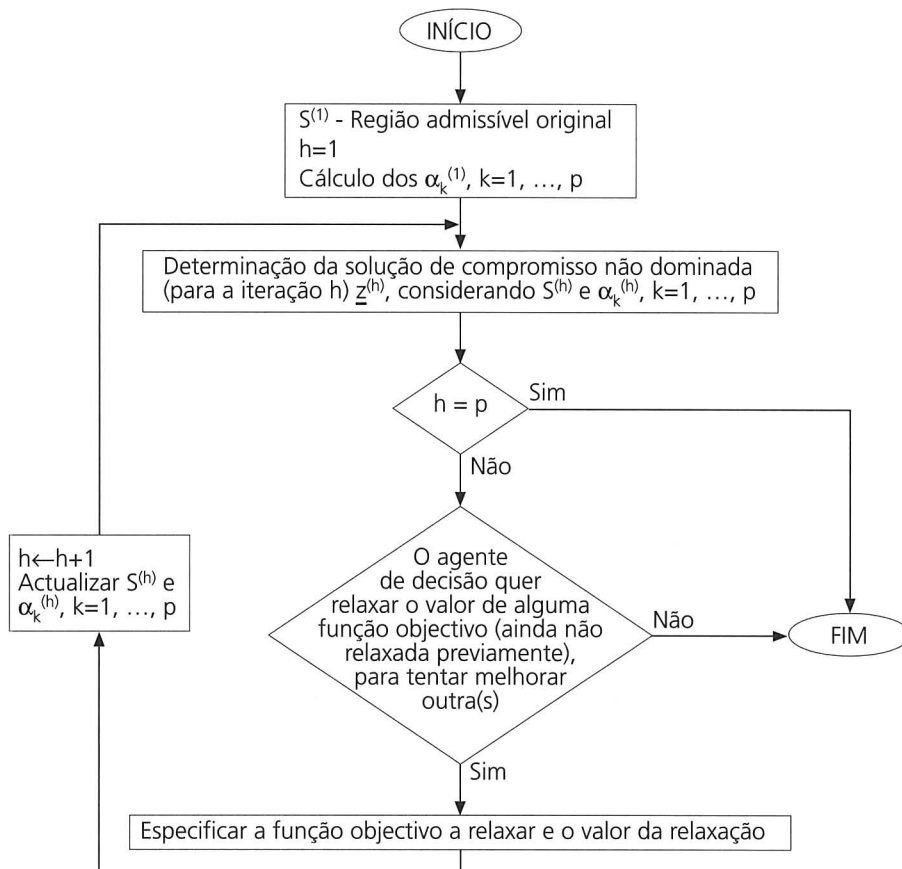
*Passo 6*

Com a informação recolhida na fase de diálogo, o método prepara a nova fase de cálculo, construindo a nova região admissível reduzida através da introdução de restrições nos valores das funções objectivo. A região admissível reduzida para a iteração  $(h+1)$  integrará as restrições:

$$\begin{aligned} z_i(\underline{x}) = c_i \underline{x} &\geq z_i^{(h)} - \Delta_i \quad (\text{corresponde à função objectivo relaxada na iteração } h) \\ z_k(\underline{x}) = c_k \underline{x} &\geq z_k^{(h)} \quad k \neq i \end{aligned}$$

Regressa ao passo 3.

Em resumo, o mecanismo de trabalho do método STEM pode ser traduzido no seguinte diagrama de blocos:



### 2.3. COMENTÁRIOS FINAIS

Embora, na versão originalmente apresentada pelos autores, cada função possa apenas ser relaxada uma vez, e em cada iteração só uma função seja relaxada, nada impede que estas limitações sejam eliminadas, no sentido de tornar o método mais flexível. Deve, no entanto, chamar-se a atenção para que, ao alterar a versão original, o algoritmo perde uma das características essenciais reivindicadas pelos autores. A saber: na versão original o algoritmo converge para uma solução final num máximo de  $p$  iterações. Esta característica era essencial à época do desenvolvimento deste método, não

só devido às limitações computacionais, mas também porque era prevalente, nessa altura, a ideia de que os métodos interactivos deviam convergir para uma certa solução óptima. Como se viu na introdução deste capítulo, hoje co-habitam métodos com estas características, e procedimentos mais flexíveis baseados na *aprendizagem* durante o processo de apoio à decisão. Quando se faz evoluir o método STEM, flexibilizando o número de funções objectivo que se pode relaxar em cada iteração, e se permite rever a quantidade relaxada das funções objectivo em iterações posteriores, é-se conduzido a um procedimento do segundo tipo, isto é, a um processo aberto que só termina quando o agente de decisão considerar ter obtido uma solução satisfatória. Do ponto de vista computacional, perde-se a relativa simplicidade da versão original. Em contrapartida, evita-se a imposição de decisões irrevogáveis e, em especial, a obrigação de estabelecer, de forma rígida (sem possibilidade de reavaliação), as quantidades a relaxar em cada iteração.

De entre as características deste método, deve ainda salientar-se que é muito fácil de implementar, a partir de um código *standard* de programação linear, e que a pesquisa não é limitada a vértices eficientes do poliedro admissível (devido ao processo de cálculo das soluções eficientes). Finalmente, chama-se a atenção para que, na versão apresentada, é possível obter soluções fracamente eficientes, por exemplo quando há óptimos alternativos de uma ou mais das funções objectivo do problema original. Esta questão, ilustrada na figura III.7, pode ser ultrapassada através de um processo semelhante ao que se apresentará na descrição do método *Pareto Race*.

## 2.4. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS DO MÉTODO STEM

### EXEMPLO 1

Considere-se o seguinte problema, com 2 funções objectivo a maximizar:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z_1 = 3x_1 + x_2 \\
 \max \quad & z_2 = x_1 + 4x_2 \\
 \text{s. a:} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1 + x_2 \leq 7 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Como este problema tem apenas 2 variáveis de decisão e 2 funções objectivo, pode-se facilmente visualizar tanto o espaço de decisão (figura III.2), como o espaço das funções objectivo (figura III.3).

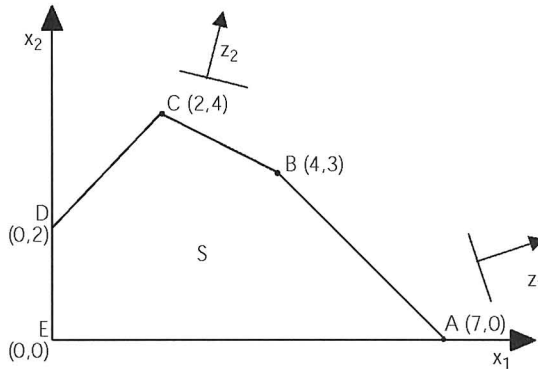


Figura III.2 – Espaço de decisão.

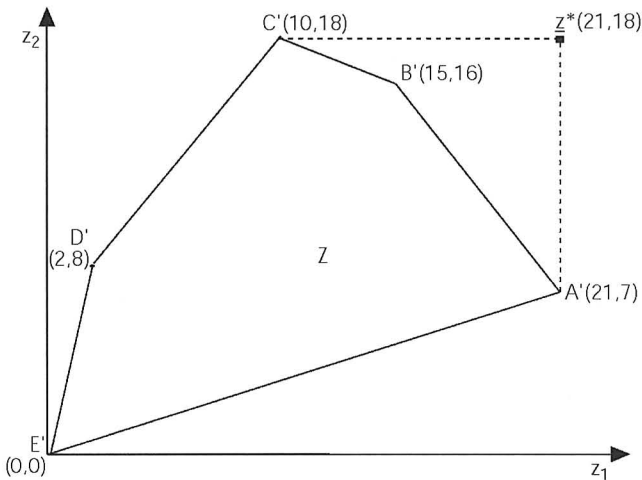


Figura III.3 – Espaço das funções objectivo.

O método STEM começa por otimizar individualmente cada uma das duas funções objectivo, na região admissível original do problema multiobjectivo. Com esta informação é construída a tabela de óptimos individuais (ou de *pay-off*). Neste problema, pode ver-se graficamente que

A (A') é a solução que otimiza  $z_1$ , e que C (C') otimiza  $z_2$ . Assim, a tabela de *pay-off* será:

	$z_1$	$z_2$
A'	<b>21</b>	7
C'	10	<b>18</b>

O ponto ideal,  $\underline{z}^* = (z_1^*, z_2^*) = (21, 18)$ ;

$$\beta_1 = \frac{21-10}{21} \left( \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \right) = 0.1656$$

$$\beta_2 = \frac{18-7}{18} \left( \frac{1}{\sqrt{1^2 + 4^2}} \right) = 0.1482$$

1ª iteração

Seja h o contador de iteração. Faça-se  $h=1$ .

A região admissível da 1ª iteração  $S^{(1)}$  é a região admissível inicial S.

$R=\emptyset$  (conjunto dos índices das funções relaxadas até esta iteração, inclusive)

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} = 0.528$$

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} = 0.472$$

Resolve-se o seguinte problema escalar (que determina a solução que minimiza uma distância ponderada de Tchebycheff à solução ideal):

min  $v$

s. a:  $0.528 (21 - (3x_1 + x_2)) \leq v$

$0.472 (18 - (x_1 + 4x_2)) \leq v$

$-x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 + x_2 \leq 7$

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$v \geq 0$

} região admissível original S

Este problema é equivalente<sup>2</sup> a:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ \text{s. a:} \quad & 1.584x_1 + 0.528x_2 + v \geq 11.088 \\ & 0.472x_1 + 1.888x_2 + v \geq 8.5 \\ & \underline{x} \in S \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

A solução deste problema é  $\underline{x}^{(1)}=(4.9,2.1)$ ,  $\underline{z}^{(1)}=(16.8,13.3)$  – ver figura III.4.

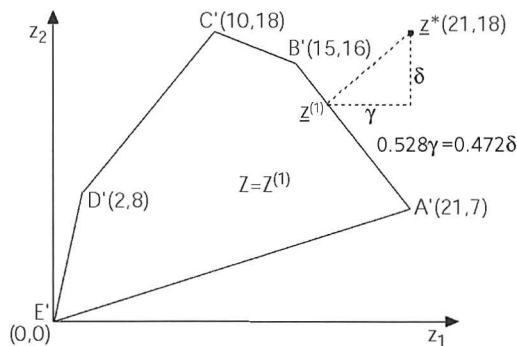


Figura III.4 –  $\underline{z}^{(1)}$  é a solução não dominada obtida na iteração inicial.

Suponha-se que o agente de decisão considera satisfatório o valor de  $z_1$ , nesta solução, e que admite piorá-lo de uma quantidade não superior a 2.8, de modo a tentar melhorar o valor de  $z_2$ .

Então,  $R=\{1\}$  e a quantidade de relaxação é  $\Delta_1=2.8$ .

A região admissível da iteração seguinte,  $S^{(2)}$ , é definida à custa das restrições originais, acrescidas das restrições  $z_1 \geq z_1^{(1)} - \Delta_1$  e  $z_2 \geq z_2^{(1)}$ , que correspondem a  $z_1 \geq 16.8 - 2.8$  e  $z_2 \geq 13.3$ , respectivamente.

Então,  $S^{(2)}$  será definida por:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 14 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 13.3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Algumas discrepâncias de valores devem-se ao facto de se apresentarem valores arredondados a 3 casas decimais, embora se tenham efectuado os cálculos com uma precisão superior.

A figura III.5 mostra a região admissível reduzida no espaço de decisão.

2ª ITERAÇÃO

$$h=2;$$

$$\alpha_1^{(2)} = 0 \text{ (porque } 1 \in R, \text{ ou seja, } z_1 \text{ já foi relaxada)}$$

$$\alpha_2^{(2)} = 1$$

Resolve-se o seguinte problema:

$$\min v$$

$$\text{s. a: } 18 - (x_1 + 4x_2) \leq v$$

$$\underline{x} \in S^{(2)}$$

$$v \geq 0$$

A solução deste problema é  $\underline{x}^{(2)} = (3.6, 3.2)$  (ver figura III.5), com  $\underline{z}^{(2)} = (14, 16.4)$  (ver figura III.6).

O processo termina com  $(\underline{x}^{(2)}, \underline{z}^{(2)})$  como solução final, visto que o problema em estudo tem duas funções objectivo e  $h=2$ .

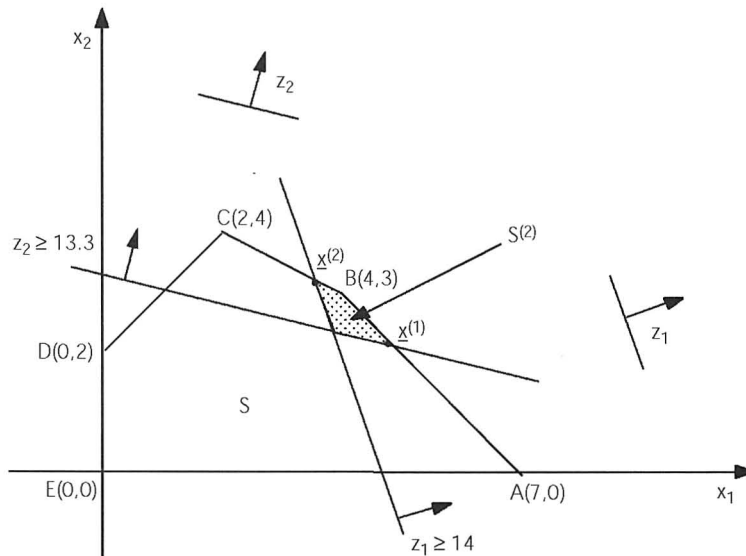


Figura III.5 – Região admissível reduzida no espaço de decisão.

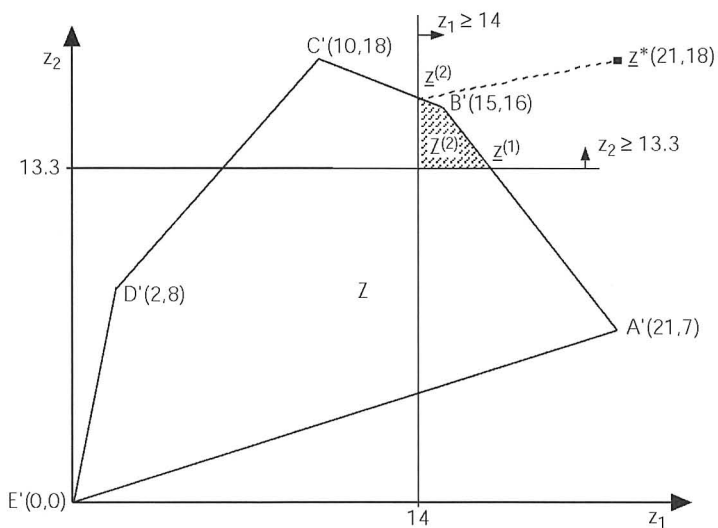


Figura III.6 – Região admissível reduzida no espaço dos objectivos.

Nota: Suponha-se que o problema anterior era ligeiramente alterado, sendo agora  $z_2 = x_1 + 2x_2$ . Esta alteração conduziria, após a primeira iteração, a uma situação do tipo da representada na figura III.7. Por existirem agora óptimos alternativos de  $z_2$  em  $S$ , é possível obter, na segunda iteração,  $\underline{x}^{(2)}$ , que, neste caso, não é solução eficiente do problema original. Relembre-se que a estas soluções, com as características de  $\underline{x}^{(2)}$ , se chama soluções fracamente eficientes.

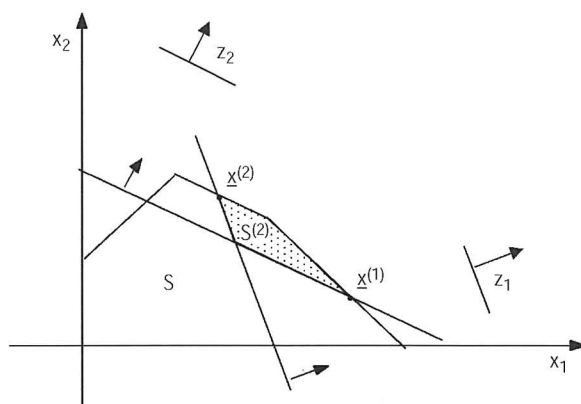


Figura III.7 – Existência de soluções fracamente eficientes.

EXEMPLO 2

Considere-se o seguinte problema com 4 funções objectivo, duas a maximizar e duas a minimizar:

$$\begin{aligned}
 \max z_1 &= x_1 + 4x_2 + x_3 \\
 \max z_2 &= 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\
 \min z_3 &= 10x_1 + 2x_2 + x_3 \\
 \min z_4 &= x_1 + x_2 + 7x_3 \\
 \text{s. a:} \quad &x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 60 \\
 &6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 180 \\
 &x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\
 &x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Começa-se por otimizar individualmente cada uma das funções objectivo, respeitando a região admissível do problema multiobjectivo, o que significa resolver 4 problemas monocritério. Os valores das funções objectivo, para cada uma destas soluções, formarão uma linha da tabela de *pay-off*.

Para este problema, a tabela de *pay-off* é a seguinte:

	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
	<b>120</b>	90	60	30
	45	<b>315</b>	45	315
	10	70	<b>10</b>	70
	40	30	20	<b>10</b>

O ponto ideal,  $z^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*) = (120, 315, 10, 10)$ ;

$$\beta_1 = \frac{120 - 10}{120} \left( \frac{1}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}} \right) = 0.216$$

$$\beta_2 = \frac{315 - 30}{315} \left( \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2}} \right) = 0.115$$

$$\beta_3 = \frac{60 - 10}{60} \left( \frac{1}{\sqrt{10^2 + 2^2 + 1^2}} \right) = 0.081$$

$$\beta_4 = \frac{315 - 10}{315} \left( \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 7^2}} \right) = 0.136$$

### 1ª ITERAÇÃO

Seja  $h$  o contador de iteração,  $h=1$ .

A região admissível da 1ª iteração  $S^{(1)}$  é a região admissível inicial  $S$ .

$R=\emptyset$

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4} = 0.394$$

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4} = 0.210$$

$$\alpha_3^{(1)} = \frac{\beta_3}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4} = 0.148$$

$$\alpha_4^{(1)} = \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4} = 0.247$$

O problema a resolver é:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ \text{s. a:} \quad & 0.394(120 - (x_1 + 4x_2 + x_3)) \leq v \\ & 0.210(315 - (2x_1 + 3x_2 + 7x_3)) \leq v \\ & 0.148(-10 - (-10x_1 - 2x_2 - x_3)) \leq v \\ & 0.247(-10 - (-x_1 - x_2 - 7x_3)) \leq v \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 60 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 180 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, v \geq 0 \end{aligned}$$

A solução deste problema é  $\underline{x}^{(1)} = (12.058, 16.823, 14.295)$ , com  $\underline{z}^{(1)} = (93.647, 174.650, 168.526, 128.945)$ .

Nota: Como já foi referido, o pior valor da tabela de *pay-off*, para uma dada função objectivo, nem sempre corresponde ao pior valor dessa função objectivo na região eficiente. Esta situação é bem visível neste problema, em que o pior valor (máximo) para  $z_3$ , na tabela de *pay-off*, é 60, e na solução  $\underline{z}^{(1)}$  é 168.526.

Vamos utilizar uma versão mais flexível do método STEM. Esta versão difere da apresentada detalhadamente neste texto, por permitir a relaxação simultânea de várias funções objectivo.

Suponha-se que o agente de decisão considera satisfatórios os valores de  $z_1$  e  $z_2$ , na solução obtida na primeira iteração, e que admite relaxar 15 em  $z_1$  e 20 em  $z_2$ , de modo a permitir que os valores de  $z_3$  e  $z_4$  melhorem (isto é, diminuam).

Então,  $R=\{1, 2\}$  e  $\Delta_1=15$ ,  $\Delta_2=20$ .

A região admissível da próxima iteração  $S^{(2)}$  é definida à custa das restrições originais mais as restrições  $z_1 \geq 93.647-15=78.647$ ,  $z_2 \geq 174.650-20=154.650$ ,  $z_3 \leq 168.526$ ,  $z_4 \leq 128.945$ .  $S^{(2)}$  virá:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 60 \\6x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 180 \\x_1 + x_2 + x_3 &\geq 10 \\x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 78.647 \\2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &\geq 154.650 \\10x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 168.526 \\x_1 + x_2 + 7x_3 &\leq 128.945 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

2ª ITERAÇÃO

$h=2$

$$\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} = 0 \quad (\text{porque } 1, 2 \in R), \quad \alpha_3^{(2)} = 0.148 \quad \text{e} \quad \alpha_4^{(2)} = 0.247$$

Os  $\alpha_j^{(2)}$  são normalizados, tal que  $\sum_{j=1}^4 \alpha_j^{(2)} = 1$ , o que conduz a  $\alpha_3^{(2)} = 0.375$  e  $\alpha_4^{(2)} = 0.625$ .

Resolve-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned}\min \quad & v \\ \text{s. a:} \quad & 0.375(-10 - (-10x_1 - 2x_2 - x_3)) \leq v \\ & 0.625(-10 - (-x_1 - x_2 - 7x_3)) \leq v \\ & \underline{x} \in S^{(2)} \\ & v \geq 0\end{aligned}$$

A solução deste problema é  $\underline{x}^{(2)} = (12.058, 18.64, 10.66)$  com  $\underline{z}^{(2)} = (97.283, 154.650, 168.526, 105.309)$ .

Os valores desta solução mostram que a relaxação em  $z_1$  não foi aproveitada, pelo contrário, o valor de  $z_1$  melhorou. Para além disso, o valor de  $z_3$  não melhorou, mantendo-se igual ao da solução anterior.



Pode verificar-se experimentalmente que, neste problema, qualquer relaxação isolada em  $z_1$ , a partir da 2ª iteração, conduz sempre à mesma solução  $\underline{z}^{(2)}$  (assim como, qualquer relaxação isolada em  $z_1$ , a partir da 1ª iteração, conduz sempre à solução  $\underline{z}^{(1)}$ ), o que deixa transparecer uma certa rigidez do método STEM, na versão original, devido à geometria da região eficiente.

### 3. MÉTODO DE ZIONTS E WALLENIUS

#### 3.1. INTRODUÇÃO

O método de Zionts e Wallenius (1976, 1983) reduz progressivamente o espaço dos pesos, de acordo com as preferências do agente de decisão, expressas através das respostas em cada interacção, a partir de comparações entre pares de soluções, e de julgamentos sobre as tendências de variação unitária, ao longo de arestas, que têm origem na solução actual e conduzem a outras soluções eficientes. Em cada fase de cálculo é otimizada uma soma ponderada das funções objectivo.

Partindo das respostas dadas pelo agente de decisão, o método introduz restrições no espaço dos pesos, reduzindo progressivamente o domínio admissível para a selecção de um novo conjunto de pesos. O processo termina quando o espaço dos pesos for reduzido a uma região suficientemente pequena, de tal modo que se possa identificar uma solução final, ou quando a informação de preferências, expressa pelo agente de decisão, indique que a solução actual é a mais interessante. Assim, o processo *converge* para o óptimo de uma função utilidade implícita do agente de decisão, ou mais precisamente, para o vértice eficiente que conduz ao maior valor para essa função. Parte-se do princípio de que as respostas do agente de decisão, nas fases de diálogo, são coerentes com essa função utilidade implícita, embora no caso de serem detectadas incoerências (reveladas por o espaço dos pesos, depois de reduzido, ser vazio), haja a possibilidade de eliminar as restrições mais antigas até o espaço dos pesos deixar de ser vazio, permitindo a continuação da pesquisa.

O estudo deste método exige que comecemos por introduzir algumas noções básicas sobre o método simplex, dedicado a problemas multiobjectivo. É o que faremos no parágrafo seguinte.

### 3.2. ALGUMAS NOÇÕES BÁSICAS

O quadro simplex multiobjectivo inicial difere do quadro simplex clássico por incluir uma linha por cada função objectivo, isto é, apresenta a forma seguinte:

$$\begin{array}{c|c|c} N & I & \underline{b} \\ \hline -C_N & \mathbf{0} & \underline{0} \end{array}$$

em que  $A \equiv [ N \mid I ]$ .

$A$  ( $m \times (n+m)$ ) – matriz dos coeficientes técnicos aumentada do problema de programação linear multicritério. Sem perda de generalidade, considera-se que no problema original (com  $p$  funções objectivo a maximizar)  $N\underline{x} \leq \underline{b}$  (em que os elementos de  $\underline{b}$  são positivos)<sup>3</sup>

$I$  ( $m \times m$ ) – matriz identidade

$N$  ( $m \times n$ ) – sub-matriz de  $A$ , correspondente às variáveis não básicas no quadro inicial (normalmente designada por matriz dos coeficientes técnicos)

$\underline{b}$  – vector ( $m \times 1$ ) dos termos independentes das restrições

$C_N$  – matriz ( $p \times n$ ), em que cada linha é constituída pelos coeficientes de uma das funções objectivo

$\underline{0}$  – vector ( $p \times 1$ ), cujos elementos são 0

$\mathbf{0}$  – matriz ( $p \times m$ ), cujos elementos são 0

Relativamente à base  $B$ , este quadro pode ser transformado em:

$$\begin{array}{c|c|c} B^{-1} N & B^{-1} & B^{-1} \underline{b} \\ \hline C_B B^{-1} N - C_N & C_B B^{-1} & C_B B^{-1} \underline{b} \end{array}$$

160

em que  $C_B$  ( $p \times m$ ) é a parte da matriz  $[C_N \mid \mathbf{0}]$  dos coeficientes das funções objectivo, correspondente às variáveis básicas.

A matriz dos custos reduzidos, relativa à base cuja matriz é  $B$ , é definida por:

$$W = [ C_B B^{-1} N - C_N \mid C_B B^{-1} ]$$

<sup>3</sup> A extensão para o caso geral realiza-se de forma idêntica ao que se passa em programação linear monocritério.

Uma variável não básica  $x_j$  diz-se eficiente, em relação à base eficiente cuja matriz é  $B$ , se e só se existir um  $\underline{\lambda} \in \Lambda$  tal que  $\underline{\lambda}W \geq \underline{0}$  e  $\underline{\lambda}W_{\bullet j} = 0$  (em que  $W_{\bullet j}$  é a coluna de  $W$ , correspondente a  $x_j$ ).

Então, o custo reduzido de  $x_j$  pode ser anulado, na linha dos custos reduzidos de um problema  $\max \{ \underline{\lambda} C \underline{x} \}$ , em que as restrições são as do problema multicritério original. Nestas circunstâncias, garante-se a existência de uma região de indiferença adjacente à actual, interior ao espaço dos pesos, e, portanto, eficiente. Este procedimento corresponde a tornar básica  $x_j$ .

Assim, tornar básica uma variável não básica eficiente corresponde a um deslocamento ao longo duma aresta eficiente.

Este resultado será mostrado a partir de um exemplo.

Nota: Os resultados seguintes são uma consequência do que acaba de ser dito, e da teoria associada à programação linear monocritério. A saber: se  $x_j$  for uma variável não básica eficiente, relativa a uma base eficiente cuja matriz é  $B_1$ , qualquer pivotação admissível associada a  $x_j$  conduz a uma base eficiente adjacente (cuja matriz é  $B_2$ )<sup>4</sup>.

Lembre-se que  $B$  é eficiente se for admissível e  $\exists \underline{\lambda} \in \Lambda: \underline{\lambda}W \geq \underline{0}$ .

Se a pivotação, que conduz a passar de  $B_1$  para  $B_2$ , for não degenerada, os vértices correspondentes a  $B_1$  e  $B_2$  são diferentes, e a aresta que os liga é eficiente.

### Exemplo

Considere-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max C \underline{x} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ \text{s. a: } & \left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned} \right\} S \end{aligned}$$

Faça-se, por exemplo,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ , e calcule-se a correspondente base eficiente.

<sup>4</sup> Para além do que se estudou no capítulo I, também são admissíveis pivotações em que o elemento *pivot* é negativo, desde que corresponda a uma variável básica nula.

O quadro simplex óptimo de  $\max_{x \in S} \underline{\lambda} C \underline{x}$  é:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	$1/2$	0	$3/2$	1	$2/5$	$-1/10$	18
$x_2$	$1/2$	1	$-1/2$	0	$-1/5$	$3/10$	6
	1	0	1	0	$3/5$	$4/15$	52

Se se actualizar uma linha de custos reduzidos por cada uma das funções objectivo  $(z_1, z_2, z_3)$ , pode-se acrescentar três linhas ao quadro anterior. Isto é:

-2	0	-1	0	$1/5$	$1/5$	24
$1/2$	0	$9/2$	0	$9/5$	$-7/10$	66
$9/2$	0	$-1/2$	0	$-1/5$	$13/10$	66

Então, considere-se a sub-matriz de  $W$  (correspondente às variáveis não básicas):

$$\begin{bmatrix}
 x_1 & x_3 & x_5 & x_6 \\
 -2 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
 \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{9}{5} & -\frac{7}{10} \\
 \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{13}{10}
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 w_{1j} \\
 w_{2j} \\
 w_{3j}
 \end{matrix}
 \quad j = 1, 3, 5, 6$$

162

em que  $w_{ij} \left( \begin{matrix} i \in \{1,2,3\} \\ j \in \{1,3,5,6\} \end{matrix} \right)$  é o decréscimo da função objectivo  $\underline{c}_i \underline{x}$ , devido à activação unitária da variável não básica  $x_j$ . Vamos verificar se, por exemplo,  $x_3$  é eficiente.

Com este intuito, formula-se e resolve-se o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \min & \left( -\lambda_1 + \frac{9}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3 \right) \\ \text{s. a:} & \\ & -2\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{9}{2}\lambda_3 \geq 0 \\ & \frac{1}{5}\lambda_1 + \frac{9}{5}\lambda_2 - \frac{1}{5}\lambda_3 \geq 0 \\ & \frac{1}{5}\lambda_1 - \frac{7}{10}\lambda_2 + \frac{13}{10}\lambda_3 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \end{aligned}$$

A justificação deste procedimento decorre da exposição que se segue.

Para a base obtida quando se considera a função objectivo soma pesada, com  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$ , as restrições que definem a respectiva região de indiferença (calculadas pelo processo estudado anteriormente, tendo em conta W e a definição de base eficiente) são:

$$\begin{aligned} -2\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{9}{2}\lambda_3 &\geq 0 && \text{(corresponde a } x_1) \\ -\lambda_1 + \frac{9}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3 &\geq 0 && \text{(corresponde a } x_3) \\ \frac{1}{5}\lambda_1 + \frac{9}{5}\lambda_2 - \frac{1}{5}\lambda_3 &\geq 0 && \text{(corresponde a } x_5) \\ \frac{1}{5}\lambda_1 - \frac{7}{10}\lambda_2 + \frac{13}{10}\lambda_3 &\geq 0 && \text{(corresponde a } x_6) \end{aligned}$$

Para definir a região de indiferença, acrescentam-se, ainda, as seguintes restrições:  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ . Neste caso, fazendo  $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ , obtém-se a região de indiferença assinalada na figura III.8. As restrições  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  correspondem às variáveis não básicas  $x_6$ ,  $x_1$  e  $x_3$ , respectivamente. A restrição  $\delta$ , correspondente a  $x_5$ , é redundante.

É agora fácil perceber que o problema formulado, para testar se  $x_3$  é eficiente, corresponde a excluir a restrição associada a  $x_3$  (mantendo as restantes restrições), minimizando-se em seguida o primeiro membro da restrição associada a  $x_3$ , neste novo domínio. Se o óptimo é negativo, é

possível deixar a região de indiferença pela aresta eficiente do espaço de decisão, que corresponde no espaço dos pesos ao lado do polígono, assinalado a traço grosso, que limita a região de indiferença (figura III.8). É-se conduzido a um vértice eficiente, cuja região de indiferença é adjacente à anterior, sendo comum o lado do polígono referido. A resolução do problema auxiliar atrás formulado destina-se a efectuar este teste. Para as restantes variáveis procedia-se de forma semelhante.

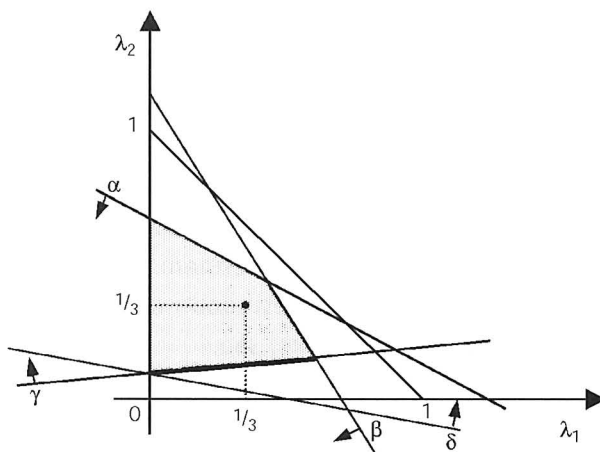


Figura III.8 – Região de indiferença no espaço dos pesos.

Nota 1: Se todos os  $w_{ij}$ , para uma dada variável,  $x_j$ , a testar, forem positivos, pode-se concluir de imediato que  $x_j$  não é uma variável eficiente. É desnecessário resolver qualquer problema auxiliar.

Nota 2: No método de Zionts e Wallenius (como é proposto desde a apresentação do método, em 1976), uma variável não básica é definida como eficiente, quando ao tornar-se básica conduz a uma base adjacente eficiente. Neste texto, alterámos esta noção, visto que é possível que a variável não básica não seja eficiente e a base a que conduz, quando se torna básica, o seja. É o que se passa com a variável  $x_5$ , no exemplo anterior, em que se é conduzido a uma base eficiente através de uma aresta não eficiente. Em De Samblanckx et al. (1982), utilizando o mesmo exemplo, é mostrado, em pormenor, o que se passa quando  $x_5$  se torna básica.

### 3.3. ALGORITMO DE ZIONTS E WALLENIUS

Segue-se o algoritmo apresentado em Zionts e Wallenius (1983). Um estudo detalhado deste algoritmo encontra-se em Steuer (1986).

#### *Passo 1*

Escolhe-se um vector de pesos  $\underline{\lambda}^{(1)} \in \Lambda = \left\{ \underline{\lambda} \in \mathfrak{R}^p : \lambda_k > 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\}$  (espaço dos pesos original), e resolve-se o problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & \underline{\lambda}^{(1)} C \underline{x} \\ \text{s. a:} & \underline{x} \in S \end{array}$$

Obtém-se uma solução básica eficiente  $\underline{x}^{(1)}$ , que tem como imagem, no espaço dos objectivos, o vector não dominado  $\underline{z}^{(1)} = C \underline{x}^{(1)}$ .

Embora possa ser escolhido qualquer vector de pesos inicial,  $\underline{\lambda}^{(1)} \in \Lambda$ , adopta-se geralmente o ponto central de  $\Lambda: \underline{\lambda}^{(1)} = \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p} \right)$ .

#### *Passo 2*

O conjunto das variáveis não básicas eficientes é dividido em dois subconjuntos, A e B:

- A designa o conjunto das variáveis não básicas eficientes que, quando se tornam básicas, dão lugar a vértices eficientes possíveis de alcançar a partir de um vector de pesos  $\underline{\lambda} \in \Lambda^{(h)}$  (onde h é o índice da iteração). Na primeira iteração  $\Lambda^{(1)} = \Lambda$ .
- B designa o conjunto de variáveis não básicas eficientes que não estão em A.

Nota: Para se poder determinar vértices eficientes adjacentes de  $\underline{x}^{(h)}$ , é necessário saber quais as variáveis não básicas que são eficientes (uma variável não básica diz-se eficiente quando, ao tornar-se básica, conduz a um vértice eficiente e, para além disso, a aresta que une os dois

vértices também é eficiente). A rotina de teste, para verificar se uma variável não básica é eficiente, proposta por Zionts e Wallenius (1980), constitui uma variante (mais eficaz) do procedimento que apresentámos anteriormente. Permite calcular as variáveis não básicas eficientes para a base associada à solução actual  $\underline{x}^{(h)}$ , bem como construir os conjuntos A e B.

Faz-se o conjunto  $I=A$ .

### Passo 3

Determinam-se as soluções básicas eficientes adjacentes a  $\underline{x}^{(h)}$ , tornando básica (a partir do quadro simplex multiobjectivo) cada uma das variáveis não básicas eficientes, que pertencem a I.

Temporariamente, não são considerados os vectores de valores das funções objectivo  $\underline{z}^{adj}$  que não sejam suficientemente distintos de  $\underline{z}^{(h)}$ . Considera-se que dois pontos no espaço dos objectivos,  $\underline{z}^{adj}$  e  $\underline{z}^{(h)}$ , são suficientemente distintos, se houver uma diferença mínima de 10% em pelo menos um dos valores das funções objectivo (de modo a evitar que se torne difícil a escolha entre duas soluções, com valores muito parecidos para todos os objectivos). A fixação desta percentagem poderá variar de acordo com as circunstâncias. Aqui adoptámos a percentagem indicada por Steuer (1986).

Para cada ponto  $\underline{z}^{adj}$ , suficientemente distinto de  $\underline{z}^{(h)}$ , o agente de decisão é chamado a efectuar comparações par a par, e a expressar as suas preferências, de acordo com as seguintes respostas:

1. Sim (se o agente de decisão prefere a solução adjacente  $\underline{z}^{adj}$  a  $\underline{z}^{(h)}$ ).
2. Não (se o agente de decisão prefere  $\underline{z}^{(h)}$  a  $\underline{z}^{adj}$ ).
3. Não sabe (se o agente de decisão não consegue expressar uma preferência).

As comparações par a par podem ser efectuadas para todos os  $\underline{z}^{adj}$ , suficientemente distintos de  $\underline{z}^{(h)}$ , ou apenas até à obtenção de uma resposta afirmativa (isto é, até se identificar um  $\underline{z}^{adj}$  que o agente de decisão prefere a  $\underline{z}^{(h)}$ ).

Se o agente de decisão preferir uma solução adjacente  $\underline{z}^a$ , em relação à solução actual  $\underline{z}^{(h)}$ , aquela solução é guardada e segue-se para o passo 7.



Note-se que podem existir mais do que uma solução  $\underline{z}^a$ .

No caso de não haver nenhuma solução  $\underline{z}^a$ , prossegue-se com o passo 4.

#### Passo 4

Chega-se a esta situação porque não existe qualquer solução adjacente (suficientemente distinta), em relação à solução actual, que seja preferida. Dá-se, então, ao agente de decisão a possibilidade de avaliar o interesse de tendências de variação unitária (*trade-offs*) ao longo de arestas eficientes, que conduzam a vértices adjacentes não suficientemente distintos do actual.

Relativamente ao conjunto I, são gerados os vectores que representam as tendências de variação unitária (ao longo de arestas eficientes<sup>5</sup>), para todas as variáveis não básicas eficientes sobre as quais o agente de decisão não foi chamado a pronunciar-se no passo 3 (por conduzirem a soluções eficientes adjacentes não suficientemente distintas, para efectuar comparações par a par).

Cada vector de tendências de variação unitária ( $\underline{w} = W_{\bullet j}$ , onde  $x_j$  é uma variável não básica eficiente<sup>6</sup>) é avaliado pelo agente de decisão, que expressa as suas preferências, através das seguintes respostas:

1. Sim (se o agente de decisão aceita a tendência de variação);
2. Não (se o agente de decisão não aceita a tendência de variação);
3. Não sabe (se o agente de decisão não consegue decidir).

Se o agente de decisão aceita uma tendência de variação associada a uma aresta não limitada, o método termina com uma solução não limitada.

Se o agente de decisão aceita pelo menos uma tendência de variação, correspondente a uma aresta limitada, segue-se para passo 7; caso contrário prossegue com o passo 5.

---

<sup>5</sup> Note-se que não são investigadas tendências de variação ao longo de arestas não eficientes, mesmo que conduzam a vértices eficientes (ver de Samblanckx *et al.*, 1982).

<sup>6</sup> No quadro Simplex, a coluna de  $W$ , correspondente a uma variável não básica eficiente, indica as variações das funções objectivo, por unidade dessa variável não básica, quando ela se tornar básica. Deve ainda notar-se que, utilizando o quadro simplex, como foi introduzido neste trabalho, os valores positivos representam decréscimos.

### *Passo 5*

Chega-se a esta situação porque não existe qualquer solução adjacente (suficientemente distinta, em relação à solução actual) preferida pelo agente de decisão quando a compara com a actual, e porque não são julgadas interessantes as tendências de variação unitária, ao longo de arestas que conduzem a vértices eficientes adjacentes (não suficientemente distintos do actual). Dá-se então a possibilidade ao agente de decisão de identificar arestas ao longo das quais é considerado interessante deslocar-se, embora os vértices a que estas conduzem não tenham sido preferidos relativamente à solução actual (de acordo com as respostas dadas nas comparações par a par).

Então, relativamente ao conjunto I, o agente de decisão é chamado a especificar se aceita alguma tendência de variação associada a arestas que conduzem a vértices eficientes adjacentes à solução actual, que não foram preferidos no passo 3.

Cada vector de tendências de variação unitária nestas condições é avaliado pelo agente de decisão, que expressa as suas preferências através das respostas seguintes:

1. Sim (se o agente de decisão aceita a tendência de variação);
2. Não (se o agente de decisão não aceita a tendência de variação);
3. Não sabe (se o agente de decisão não consegue decidir).

Se o agente de decisão aceita pelo menos uma tendência de variação, vai-se para o passo 7; caso contrário, prossegue-se com o passo 6.

### *Passo 6*

Chega-se a esta situação porque não existe qualquer solução adjacente preferida em relação à solução actual, nem são julgadas interessantes quaisquer tendências de variação ao longo de arestas com origem na solução actual.

Se  $I=A$ , significa que foram examinadas todas as variáveis não básicas eficientes, que geram as soluções eficientes alcançáveis na região do espaço dos pesos actual  $\Lambda^{(h)}$ . Faz-se então  $I=B$ , para ser examinado o outro sub-conjunto de variáveis não básicas eficientes, e volta-se ao passo 3. Deste modo, permite-se que sejam examinadas todas as variáveis não básicas

eficientes, correspondentes a todas as arestas eficientes que partem de  $\underline{x}^{(h)}$ , mesmo que conduzam a vértices eficientes impossíveis de alcançar em  $\Lambda^{(h)}$  (ou seja, incoerentes com as respostas anteriores do agente de decisão).

Se  $I=B$ , significa que já foram examinados todos os vértices adjacentes à solução actual, e todas as tendências de variação ao longo das arestas eficientes, com origem na solução actual. Como as respostas em relação a estas questões foram "não" ou "não sabe", a solução final é  $\underline{x}^{(h)}$ , e a sua imagem no espaço dos objectivos  $\underline{z}^{(h)}$ . Neste caso, a execução do método termina.

### Passo 7

Chega-se a esta situação porque existem respostas positivas em comparações par a par (no passo 3) ou na avaliação de tendências de variação unitária (nos passos 4 ou 5).

Introduzem-se restrições no espaço dos pesos, baseadas nas respostas do agente de decisão relativas às comparações par a par (no passo 3), e à avaliação de tendências de variação unitária (nos passos 4 ou 5).

Cada comparação par a par, entre  $\underline{z}^{adj}$  e  $\underline{z}^{(h)}$ , apresentada ao agente de decisão no passo 3, gera uma restrição no espaço dos pesos (excepto para as respostas "não sabe", pois este caso não dá origem a restrições). A saber:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}(\underline{z}^{adj} - \underline{z}^{(h)}) &\geq \varepsilon && \text{para cada resposta afirmativa} \\ &&& \text{(isto é, o agente de decisão prefere } \underline{z}^{adj} \text{ a } \underline{z}^{(h)}), \\ \underline{\lambda}(\underline{z}^{adj} - \underline{z}^{(h)}) &\leq -\varepsilon && \text{para cada resposta negativa} \\ &&& \text{(isto é, o agente de decisão prefere } \underline{z}^{(h)} \text{ a } \underline{z}^{adj}), \end{aligned}$$

em que  $\varepsilon$  é um valor positivo muito pequeno. Utilizam-se estas desigualdades, em vez de desigualdades estritas com segundo membro nulo, por razões numéricas.

Cada avaliação de tendências de variação unitária (passos 4 e 5) dá lugar a uma restrição no espaço dos pesos. A saber:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda} \underline{w} &\geq \varepsilon && \text{para cada resposta negativa} \\ &&& \text{(isto é, o agente de decisão não aceita a tendência de variação),} \\ \underline{\lambda} \underline{w} &\leq -\varepsilon && \text{para cada resposta afirmativa} \\ &&& \text{(isto é, o agente de decisão aceita a tendência de variação).} \end{aligned}$$

Constrói-se o espaço dos pesos reduzido  $\Lambda^{(h+1)}$ , a partir de  $\Lambda^{(h)}$ , acrescentando as restrições aqui geradas.

*Passo 8*

Determina-se um ponto  $\underline{\lambda}^{(h+1)} \in \Lambda^{(h+1)}$ . Se não é possível determinar  $\underline{\lambda}^{(h+1)}$ , ou seja  $\Lambda^{(h+1)} = \emptyset$ <sup>7</sup>, vai-se eliminando, do conjunto de restrições activas (que delimitam o espaço dos pesos reduzido), as mais antigas, até  $\Lambda^{(h+1)}$  ser não vazio.

Para determinar um ponto  $\underline{\lambda}^{(h+1)} \in \Lambda^{(h+1)}$  resolve-se um problema de programação linear, por forma a que  $\underline{\lambda}^{(h+1)}$  seja o ponto que maximiza o menor desvio (*slack*), nas restrições do espaço dos pesos que definem  $\Lambda^{(h+1)}$  (ver exemplo).

*Passo 9*

Usando  $\underline{\lambda}^{(h+1)}$ , resolve-se o problema ponderado de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & \underline{\lambda}^{(h+1)} C \underline{x} \\ \text{s.a:} \quad & \underline{x} \in S \end{aligned}$$

Obtém-se uma nova solução eficiente  $\underline{x}^{(b)}$ , que tem como imagem no espaço dos objectivos  $\underline{z}^{(b)}$ .

*Passo 10*

Nesta situação, o agente de decisão é chamado a expressar as suas preferências entre a nova solução não dominada  $\underline{z}^{(b)}$  (obtida no passo 9, com um conjunto de pesos central do espaço reduzido) e  $\underline{z}^{(a)}$  (preferida a  $\underline{z}^{(h)}$ , nas comparações par a par, no passo 3) se esta existir. Note-se que, se no passo 3 houver mais do que um  $\underline{z}^{(a)}$  seleccionado, tem que se escolher entre estes o  $\underline{z}^{(a)}$  preferido.

Se  $\underline{z}^{(a)}$  existir, e o agente de decisão conseguir escolher entre  $\underline{z}^{(a)}$  e  $\underline{z}^{(b)}$ , adiciona-se ao espaço dos pesos a restrição correspondente a essa preferência ( $\underline{\lambda}(\underline{z}^{(b)} - \underline{z}^{(a)}) \geq \varepsilon$ , ou  $\underline{\lambda}(\underline{z}^{(b)} - \underline{z}^{(a)}) \leq -\varepsilon$ ), e designa-se a solução preferida por

<sup>7</sup> Pode acontecer que, devido a alterações no sistema de preferências do agente de decisão, ou por engano deste, surjam incoerências nas restrições impostas nos pesos, de tal forma que  $\Lambda^{(h+1)} = \emptyset$ .

$\underline{z}^{(h+1)}$ . Segue-se para o passo 11. Caso contrário, isto é, se o agente de decisão não conseguir manifestar uma preferência entre  $\underline{z}^{(a)}$  e  $\underline{z}^{(b)}$ , faz-se  $\underline{z}^{(h+1)} = \underline{z}^{(b)}$ . Prossegue-se com o passo 11.

Se  $\underline{z}^{(a)}$  não existir (nenhuma solução foi preferida a  $\underline{z}^{(h)}$ , nas comparações par a par, no passo 3), podem ocorrer duas situações:

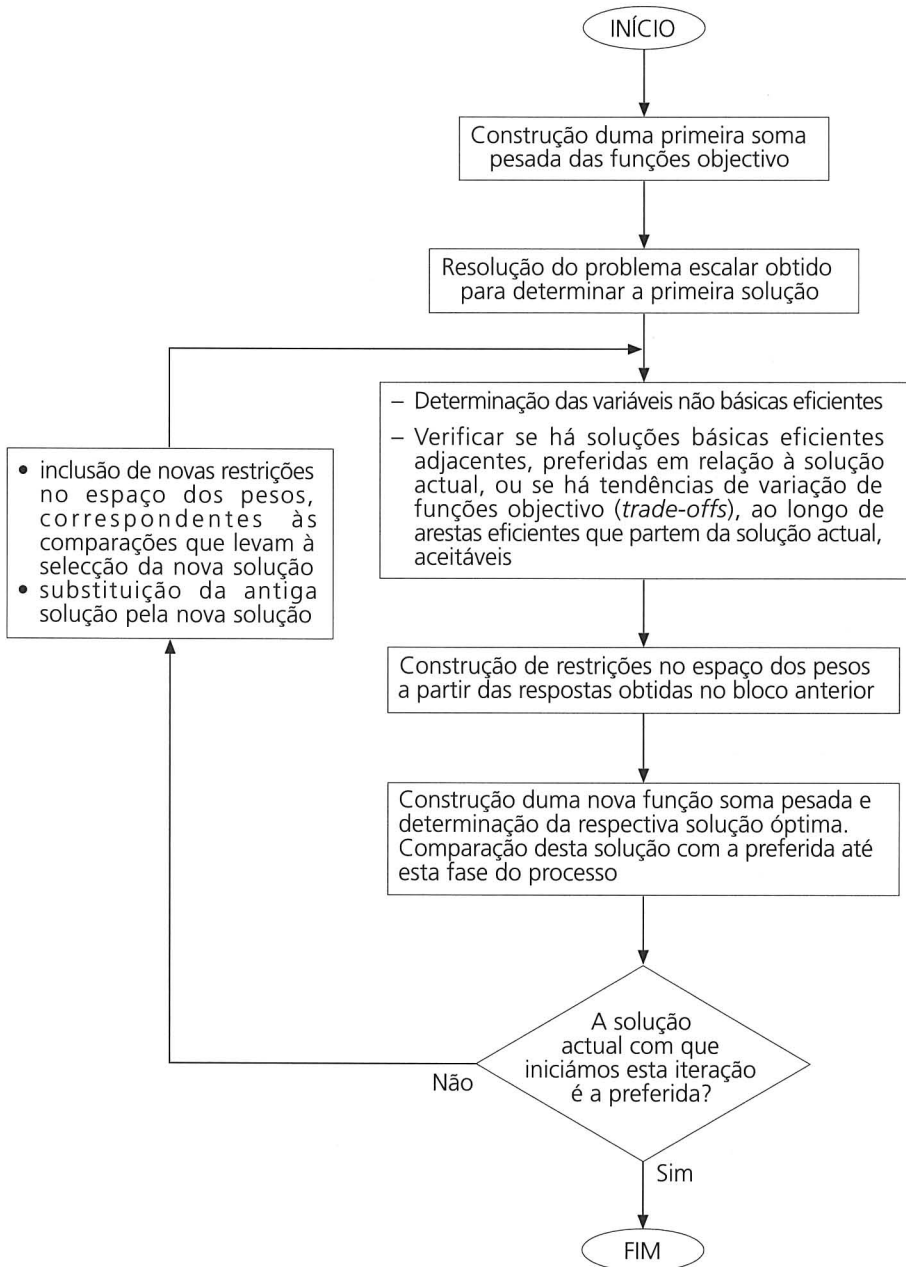
- (i)  $\underline{z}^{(b)}$  é preferida em relação a  $\underline{z}^{(h)}$ . A restrição correspondente a essa preferência  $\lambda(\underline{z}^{(b)} - \underline{z}^{(h)}) \geq \varepsilon$  é adicionada ao espaço dos pesos e  $\underline{z}^{(b)}$  é a nova solução actual, isto é:  $\underline{z}^{(h+1)} = \underline{z}^{(b)}$ . Prossegue-se com o passo 11.
- (ii)  $\underline{z}^{(h)}$  é a solução preferida. Neste caso o método termina com a solução actual  $\underline{x}^{(h)}$  (cuja imagem no espaço dos objectivos é  $\underline{z}^{(h)}$ ) como solução final. Note-se que poderão eventualmente existir melhores soluções (de acordo com a função utilidade implícita do agente de decisão) sobre uma face eficiente, uma vez que o método apenas calcula vértices da região admissível, devido ao tipo de função escalarizante usada.

#### Passo 11

Caso existam,  $\underline{x}^{(a)}$  e  $\underline{z}^{(a)}$  são abandonadas e o espaço dos pesos reduzido  $\Lambda^{(h+1)}$  inclui as novas restrições que tenham sido introduzidas no passo 10. Faz-se uma nova iteração ( $h \leftarrow h+1$ , voltando-se ao passo 2) a partir da nova solução actual, considerando o espaço dos pesos reduzido.

Nota: A possibilidade de incoerência entre as restrições no espaço dos pesos, correspondentes às respostas do agente de decisão, e o facto de o comportamento do método, nestas circunstâncias, consistir na eliminação das restrições mais antigas (para evitar que o espaço dos pesos reduzido seja vazio), levaram Ramesh *et al.* (1989) a propor uma modificação ao método de Zionts e Wallenius, no sentido de evitar a perda de informação sobre a estrutura de preferências do agente de decisão, obtida a partir das suas respostas.

### 3.4. DIAGRAMA DE BLOCOS ESQUEMÁTICO DO MÉTODO DE ZIONTS E WALLENIUS



### 3.5. COMENTÁRIOS FINAIS

Trata-se de um método baseado na existência de uma função utilidade implícita do agente de decisão. O processo interactivo consiste na procura indirecta (já que a função utilidade não é conhecida), através dum protocolo de diálogo com o agente de decisão, do óptimo, ou de uma aproximação do óptimo, da função utilidade implícita. Como o processo de cálculo só permite obter soluções básicas eficientes, a aproximação encontrada está restringida a este tipo de soluções. Do ponto de vista cognitivo, as questões dos tipos comparação par a par de alternativas e avaliação de *trade-offs*, não são fáceis para o agente de decisão, mesmo admitindo que o processo é mediado por um analista conhecedor dos aspectos técnicos envolvidos.

Em particular, no que se refere à avaliação de variações dos valores das funções objectivo, devido à activação unitária duma variável eficiente, deve notar-se que se vai aceitar ou negar um pequeno deslocamento ao longo duma aresta, desconhecendo o seu comprimento, e, portanto, o vértice eficiente que se encontra na sua extremidade.

O número de programas lineares a resolver é, em geral, muito elevado, tratando-se, portanto, dum método muito pesado do ponto de vista computacional.

Por fim, saliente-se que cada resposta do agente de decisão (exceptuando quando evita intervir, dizendo que “não sabe”) corresponde a introduzir uma restrição dicotómica no espaço dos pesos. Percebe-se que não se trata de questões fáceis, já que uma resposta *errada* leva à exclusão de toda a sub-região do espaço dos pesos, que deveria ser explorada nas fases posteriores do uso do método. O problema agrava-se, visto que o número de questões deste tipo é sempre muito elevado. Nestas circunstâncias, apesar de ser possível corrigir certo tipo de erros, o método, no essencial, exige coerência das respostas do agente de decisão com a sua função utilidade implícita.

### 3.6. EXEMPLO ILUSTRATIVO DO MÉTODO DE ZIONTS E WALLENIUS

Considere-se o seguinte problema de programação linear com 3 funções objectivo a maximizar:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z_1 = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\
\max \quad & z_2 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\
\max \quad & z_3 = -x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{s. a:} \quad & \\
& 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 50 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

### 1ª ITERAÇÃO

#### Passo 1

Seja  $h$  o contador de iterações:  $h=1$ .

Calcula-se uma primeira solução básica eficiente, através da optimização de uma soma ponderada das funções objectivo. Por omissão, consideram-se os pesos que representam o ponto central do espaço dos pesos, isto é:  $\lambda^{(1)}=(0.333,0.333,0.333)$ . O problema a resolver é:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 0.333(3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) && (P_{\lambda^{(1)}}) \\
& +0.333(x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4) \\
& +0.333(-x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4) \\
\text{s. a:} \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 50 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

A solução  $\underline{x}^{(1)}=(0, 11.67, 0, 6.67)$  é óptima<sup>8</sup> de  $(P_{\lambda^{(1)}})$  e é eficiente do problema multiobjectivo, tendo como imagem no espaço dos objectivos  $\underline{z}^{(1)}=(18.33, 15.00, 71.67)$ .

<sup>8</sup> Todavia,  $\underline{x}^{(1)}$  não é a única solução que optimiza  $(P_{\lambda^{(1)}})$ , como se pode verificar no respectivo quadro simplex.



O quadro simplex óptimo de  $(P_{\lambda_i})$ , relativo a  $x^{(1)}$  (onde  $x_5, x_6$  e  $x_7$  são as variáveis desvio associadas às restrições), é:

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	1	1.667	1.667	2.333	0	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_5$	1.667	0	1.667	0	1	0.167	-0.833	28.333
1.667	$x_2$	0.833	1	-0.167	0	0	0.333	-0.167	11.667
2.333	$x_4$	-0.167	0	0.833	1	0	-0.167	0.333	6.667
$z_j^1 - c_j^1$		-2.333	0	-1.333	0	0	0.167	0.167	18.333
$z_j^2 - c_j^2$		-2.5	0	1.5	0	0	-1	1.5	15
$z_j^3 - c_j^3$		4.833	0	-0.167	0	0	1.333	-0.167	71.667
$z_j - c_j$		0	0	0	0	0	0.167	0.5	

A região de indiferença da solução 1 (figura III.9), no espaço dos pesos, é definida por:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda} \in \Lambda: & -2.333\lambda_1 - 2.5\lambda_2 + 4.833\lambda_3 \geq 0 \\ & -1.333\lambda_1 + 1.5\lambda_2 - 0.167\lambda_3 \geq 0 \\ & 0.167\lambda_1 - \lambda_2 + 1.333\lambda_3 \geq 0 \\ & 0.167\lambda_1 + 1.5\lambda_2 - 0.167\lambda_3 \geq 0 \end{aligned}$$

com  $\Lambda = \{ \underline{\lambda} \in \mathfrak{R}^3: \lambda_i > 0, i=1, \dots, 3; \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \}$ .

A solução  $(\underline{x}^{(1)}, \underline{z}^{(1)})$  é dada a conhecer ao agente de decisão.

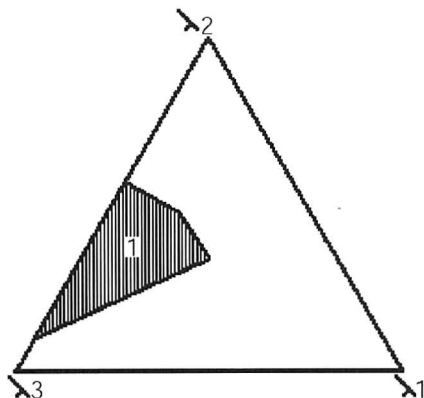


Figura III.9 – Região de indiferença da solução 1.

### Passo 2

A matriz dos custos reduzidos, relativos às variáveis não básicas ( $x_1$ ,  $x_3$ ,  $x_6$  e  $x_7$ ) da solução  $(\underline{x}^{(1)}, \underline{z}^{(1)})$ , é:

$$W = \begin{bmatrix} -2.333 & -1.333 & 0.167 & 0.167 \\ -2.5 & 1.5 & -1 & 1.5 \\ 4.833 & -0.167 & 1.333 & -0.167 \end{bmatrix}$$

O conjunto das variáveis não básicas eficientes é dividido em dois subconjuntos:

- A – variáveis não básicas eficientes que geram soluções não dominadas, possíveis de alcançar a partir de vectores de pesos pertencentes a  $\Lambda^{(1)}$ ;
- B – variáveis não básicas eficientes que não pertencem a A.

Como  $\Lambda^{(1)} = \Lambda$  (porque ainda não foi introduzida nenhuma restrição nos pesos), todas as variáveis eficientes pertencerão a A e  $B = \emptyset$ .

Para determinar as variáveis não básicas eficientes é aplicada a rotina de Zions-Wallenius (Steuer, 1986, cap. 9) à matriz W (como se disse, trata-se de uma variante mais eficaz do processo apresentado neste texto).

Após a aplicação desta rotina, chega-se à conclusão que, de entre  $x_1$ ,  $x_3$ ,  $x_6$  e  $x_7$ , apenas  $x_1$ ,  $x_3$ ,  $x_6$  são eficientes (correspondentes às 1ª, 2ª e 3ª colunas de W). Neste caso, o facto de  $x_7$  não ser eficiente pode observar-se directamente na matriz W. Se se comparar a coluna de  $x_3$  com a coluna de  $x_7$ , verifica-se que apenas a 1ª componente é diferente (-1.333 para  $x_3$  e 0.167 para  $x_7$ ), o que significa que tornar básica  $x_3$  tem impactos em  $z_2$  e  $z_3$  iguais aos resultantes de tornar básica  $x_7$ . Contudo, em  $z_1$  há um aumento de 1.333 por cada acréscimo unitário de  $x_3$ , enquanto que se for  $x_7$  a tornar-se básica, há uma diminuição de 0.167 por cada acréscimo unitário desta variável.

$$A = \{x_1, x_3, x_6\}$$

Faz-se  $I = A$ .

### Passo 3

Geram-se, sequencialmente, todas as soluções eficientes adjacentes a  $(\underline{x}^{(1)}, \underline{z}^{(1)})$ , correspondentes ao conjunto I.

- Torna-se básica  $x_1$  e obtém-se  $\underline{z}^{\text{adj}1} = (51, 50, 4)$ . Esta solução é apresentada ao agente de decisão, que indicará a sua preferência entre  $\underline{z}^{\text{adj}1}$  e a solução actual,  $\underline{z}^{(1)}$ .  
Suponha-se que o agente de decisão, reflectindo uma atitude de insegurança, hesitação ou mesmo ignorância em relação à questão que lhe é colocada, não sabe qual das duas soluções prefere,
- Torna-se básica  $x_6$ , e obtém-se a solução  $\underline{z}^{\text{adj}2} = (12.5, 50, 25)$ .  
Suponha-se que, neste caso, a resposta do agente de decisão é não, isto é, o agente de decisão prefere a solução  $\underline{z}^{(1)}$ .
- Torna-se básica  $x_3$ , e obtém-se a solução  $\underline{z}^{\text{adj}3} = (29, 3, 73)$ .  
Suponha-se que, neste caso, a resposta do agente de decisão é sim, isto é, prefere a solução  $\underline{z}^{\text{adj}3}$ .

Como o agente de decisão preferiu uma das soluções adjacentes, segue-se para o passo 7, e  $\underline{z}^a = (29, 3, 73)$  é candidata a solução preferida, na parte final da iteração em curso.

#### Passo 7

Introduzem-se restrições no espaço dos pesos, baseadas nas respostas do agente de decisão em comparações par a par (passo 3):

A primeira resposta é não sabe, isto é, o agente de decisão não consegue exprimir a sua preferência entre  $\underline{z}^{(1)}$  e  $\underline{z}^{\text{adj}1}$ ; portanto, não lhe corresponde qualquer restrição no espaço dos pesos.

A segunda resposta é não, isto é, o agente de decisão não prefere  $\underline{z}^{\text{adj}2}$  a  $\underline{z}^{(1)}$ ; portanto, dá lugar à restrição:

$$\underline{\lambda} (\underline{z}^{(1)} - \underline{z}^{\text{adj}2}) \geq \varepsilon \Leftrightarrow [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3] \left( \begin{bmatrix} 18.33 \\ 15 \\ 71.67 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12.5 \\ 50 \\ 25 \end{bmatrix} \right) \geq \varepsilon,$$

em que  $\varepsilon$  tem valor positivo muito pequeno.

A terceira resposta é sim, isto é, o agente de decisão prefere  $\underline{z}^{\text{adj}3}$  a  $\underline{z}^{(1)}$ ; portanto, dá lugar à restrição:

$$\underline{\lambda} (\underline{z}^{\text{adj}3} - \underline{z}^{(1)}) \geq \varepsilon \Leftrightarrow [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3] \left( \begin{bmatrix} 29 \\ 3 \\ 73 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18.33 \\ 15.00 \\ 71.67 \end{bmatrix} \right) \geq \varepsilon.$$

A figura III.10 mostra as restrições introduzidas no espaço dos pesos.

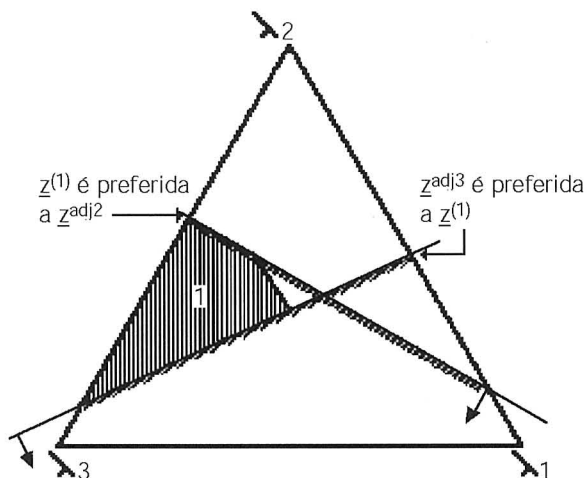


Figura III.10 – Restrições introduzidas no espaço dos pesos no passo 7 da 1ª iteração.

O espaço dos pesos actual,  $\Lambda^{(2)}$ , é formado a partir de  $\Lambda^{(1)} = \Lambda$ , acrescentando-se as restrições acabadas de introduzir nesta iteração.

### Passo 8

Determina-se um ponto<sup>9</sup>  $\underline{\lambda}^{(2)} \in \Lambda^{(2)}$ , no espaço dos pesos reduzido. Para tal, resolve-se o problema que maximiza o menor desvio das restrições que definem  $\Lambda^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} & \max \theta \\ \text{s.a: } & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1 - \theta \geq \varepsilon \\ & \lambda_2 - \theta \geq \varepsilon \\ & \lambda_3 - \theta \geq \varepsilon \\ & 5.83\lambda_1 - 35\lambda_2 + 46.67\lambda_3 - \theta \geq \varepsilon \\ & 10.67\lambda_1 - 12\lambda_2 + 1.33\lambda_3 - \theta \geq \varepsilon \\ & \theta \geq 0 \end{aligned}$$

em que  $\varepsilon$  é uma constante positiva muito pequena.

<sup>9</sup> Note-se que, para obter um ponto central no espaço dos pesos reduzido seria necessário proceder a uma normalização prévia dos coeficientes das restrições no problema auxiliar.

A solução deste problema é  $\underline{\lambda}^{(2)} = (0.354, 0.323, 0.323)$ , com  $\theta = 0.323$ .

*Passo 9*

Usando  $\underline{\lambda}^{(2)}$ , resolve-se o problema linear (soma ponderada):

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.354(3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) && (P_{\lambda^2}) \\ & +0.323(x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4) \\ & +0.323(-x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4) \\ \text{s. a:} \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução obtida é  $\underline{x}^{(b)} = (14.5, 0, 2.5, 7)$ , com  $\underline{z}^{(b)} = (55.5, 47.5, 2)$ .

*Passo 10*

A solução  $(\underline{x}^{(b)}, \underline{z}^{(b)})$  é apresentada ao agente de decisão, que a compara com  $(\underline{x}^{(a)}, \underline{z}^{(a)})$ , e exprime a sua preferência.

Suponha-se que o agente de decisão prefere  $(\underline{x}^{(b)}, \underline{z}^{(b)})$ .

É, então, introduzida uma nova restrição no espaço dos pesos  $\Lambda^{(2)}$  (ver figura III.11a):

$$[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3] \left( \begin{bmatrix} 55.5 \\ 47.5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 29 \\ 3 \\ 73 \end{bmatrix} \right) \geq \epsilon$$

*Passo 11*

Vai começar uma nova iteração,  $h=2$ , em que a nova solução actual é  $(\underline{x}^{(2)}, \underline{z}^{(2)}) = (\underline{x}^{(b)}, \underline{z}^{(b)})$ .

O espaço dos pesos reduzido,  $\Lambda^{(2)}$ , é agora definido pelas restrições originais, e pelas que foram introduzidas nos passos 7 e 10 (figura III.11b).

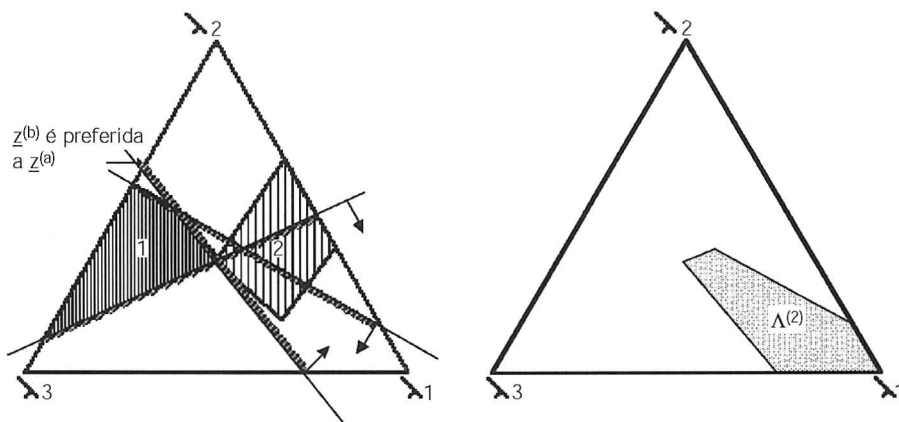


Figura III.11 – Soluções calculadas e restrições introduzidas no espaço dos pesos na 1ª iteração.

## 2ª ITERAÇÃO

### Passo 2

O quadro simplex óptimo de  $(P_{\lambda^2})$ , relativo a  $x^{(2)}$  (onde  $x_5, x_6$  e  $x_7$  são as variáveis desvio das restrições), é:

$C_B^T$	$X_B$	1.061	1.646	1.677	2.293	0	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
1.677	$x_3$	0	-1	1	0	0.5	-0.25	-0.25	2.5
1.061	$x_1$	1	1	0	0	0.1	0.35	-0.25	14.5
2.293	$x_4$	0	1	0	1	-0.4	0.1	0.5	7
$Z_j^1 - C_j^1$		0	1	0	0	0.9	0.65	-0.75	55.5
$Z_j^2 - C_j^2$		0	4	0	0	-0.5	0.25	1.25	47.5
$Z_j^3 - C_j^3$		0	-5	0	0	-0.4	-0.4	1	2
$Z_j - C_j$		0	0.031	0	0	0.028	0.182	0.461	

180

Corresponde-lhe a matriz dos custos reduzidos:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.65 & -0.75 \\ 4 & -0.5 & 0.25 & 1.25 \\ -5 & -0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

relativa às variáveis não básicas  $x_2$ ,  $x_5$ ,  $x_6$  e  $x_7$ . Após a aplicação da rotina de Zions-Wallenius à matriz  $W$ , chega-se à conclusão de que, de entre  $x_2$ ,  $x_5$ ,  $x_6$  e  $x_7$ , apenas  $x_2$ ,  $x_5$  e  $x_7$  (correspondentes às 1ª, 2ª e 4ª colunas de  $W$ ) são eficientes.

Para determinar se  $x_2$  deve pertencer ao conjunto A ou ao conjunto B, basta verificar se o sistema constituído pelas desigualdades de  $\Lambda^{(2)}$ , mais

$$[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \leq \varepsilon \text{ (com } \varepsilon \text{ muito pequeno, por exemplo, } 10^{-5}\text{), admite, ou}$$

não, solução. Se admitir solução,  $x_2$  pertence a A, caso contrário, pertence a B. Este teste pode ser feito usando a 1ª fase do método simplex. O processo repete-se para  $x_5$  e  $x_7$ . Neste caso,  $A=\{x_2, x_7\}$  e  $B=\{x_5\}$ , ou seja, em relação à solução actual, se se tornar básica  $x_2$  ou  $x_7$ , é-se conduzido a vértices eficientes possíveis de alcançar a partir de  $\Lambda^{(2)}$ . (Note-se que não acontece o mesmo com  $x_5$ ).

Faz-se  $I=A$ .

*Passo 3 (para  $I=A$ )*

Geram-se, sequencialmente, todas as soluções eficientes adjacentes a  $(\underline{x}^{(2)}, \underline{z}^{(2)})$ , correspondentes ao conjunto I.

- Torna-se básica  $x_2$  e obtém-se  $\underline{z}^{adj1} = (48.5, 19.5, 37)$ . Esta solução é apresentada ao agente de decisão, que indicará a sua preferência entre  $\underline{z}^{adj1}$  e a solução actual,  $\underline{z}^{(2)}$ .

Suponha-se que a resposta do agente de decisão é não, isto é prefere  $\underline{z}^{(2)}$ .

- Torna-se básica  $x_7$  e obtém-se  $\underline{z}^{adj2} = (66, 30, -12)$ .

Suponha-se que o agente de decisão não sabe qual das duas soluções prefere,  $\underline{z}^{(2)}$  ou  $\underline{z}^{adj2}$ .

*Passo 4 (para  $I=A$ )*

Apesar de não ter sido preferida nenhuma solução adjacente a  $\underline{z}^{(2)}$ , durante o passo 3, já foram avaliadas todas as soluções básicas eficientes obtidas a partir do conjunto I (porque todas as soluções adjacentes são suficientemente distintas da solução actual). Sendo assim, avança-se para o passo 5.

Passo 5 (para  $I=A$ )

Neste passo, dá-se a possibilidade ao agente de decisão de identificar arestas ao longo das quais são considerados aceitáveis tendências de deslocamento a partir da solução actual. Isto, apesar de os vértices a que conduzem não terem sido preferidos em comparação com a solução actual, no passo 3.

Relativamente ao conjunto I, o agente de decisão é chamado a avaliar as seguintes tendências de variação (*trade-offs*):

- *trade-off* (1, 4, -5), coluna de  $x_2$  em  $W$ : significa que, por cada unidade que é activada da variável não básica  $x_2$ , há uma diminuição de 1 em  $z_1$ , uma diminuição de 4 em  $z_2$ , e um aumento de 5 em  $z_3$  (figura III.12).

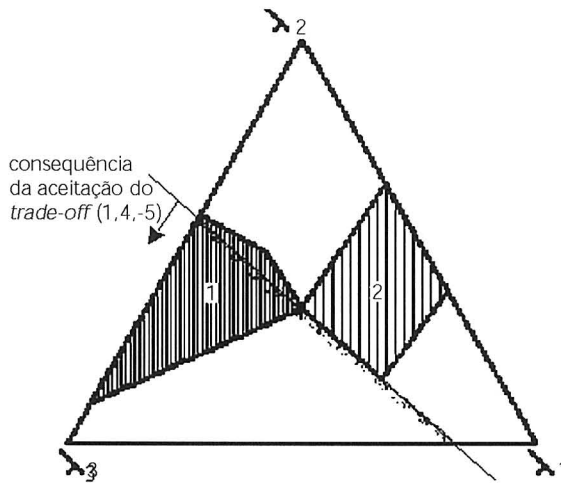


Figura III.12 – Avaliação do *trade-off* (1, 4, -5).

Suponha-se que o agente de decisão não aceita esta tendência de variação.

- *trade-off* (-0.75, 1.25, 1), coluna de  $x_7$  em  $W$ : significa que, por cada unidade que é activada da variável não básica  $x_7$ , há um aumento de 0.75 em  $z_1$ , uma diminuição de 1.25 em  $z_2$ , e uma diminuição de 1 em  $z_3$  (figura III.13).



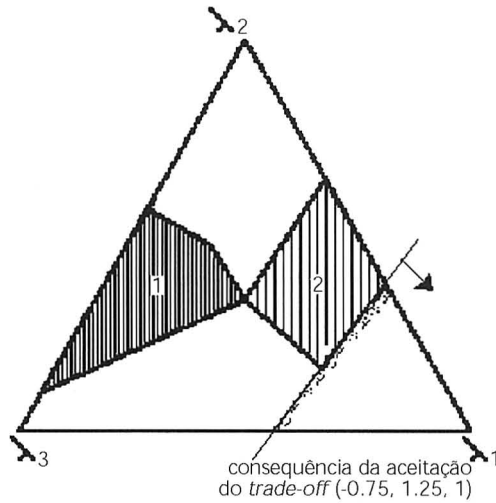


Figura III.13 – Avaliação do trade-off (-0.75, 1.25, 1).

Suponha-se que o agente de decisão também não aceita esta tendência de variação.

*Passo 6*

Faz-se  $I=B=\{x_5\}$ , o que significa que vai ser analisado o outro conjunto de variáveis básicas eficientes, que conduzem a soluções eficientes impossíveis de alcançar no espaço dos pesos reduzido da iteração actual.

Regressa ao passo 3.

*Passo 3 (para  $I=B$ )*

Gera-se a solução eficiente adjacente a  $(\underline{x}^{(2)}, \underline{z}^{(2)})$  correspondente a tornar básica  $x_5$  (única variável do conjunto I). Obtém-se  $\underline{z}^{adj3} = (51, 50, 4)$ . Esta solução é apresentada ao agente de decisão, e este indicará se prefere  $\underline{z}^{adj3}$  à solução actual,  $\underline{z}^{(2)}$ .

Suponha-se que a resposta do agente de decisão é não sabe, isto é, não consegue exprimir uma preferência entre  $\underline{z}^{adj3}$  e  $\underline{z}^{(2)}$ .

*Passo 4 (para  $I=B$ )*

Relativamente ao conjunto I, não há nenhuma solução eficiente adjacente que não tenha sido avaliada no passo 3 (note-se que uma solução não teria

que ser avaliada, se não fosse suficientemente distinta de  $\underline{z}^{(2)}$ ). Sendo assim, avança-se para o passo 5.

*Passo 5 (para  $l=B$ )*

Relativamente ao conjunto I, o agente de decisão é chamado a avaliar a tendência de variação unitária, i. e., a variação das funções objectivo por unidade da variável não básica que se torna básica, correspondente ao deslocamento ao longo da aresta que sai do vértice eficiente actual, e conduz à solução rejeitada no passo 3,  $\underline{z}^{adj3}$ :

- *trade-off* (0.9, -0.5, -0.4), coluna de  $x_5$  em W. Significa que, por cada unidade da variável não básica  $x_5$  que é activada, há uma diminuição de 0.9 em  $z_1$ , um aumento de 0.5 em  $z_2$  e um aumento de 0.4 em  $z_3$  (figura III.14)

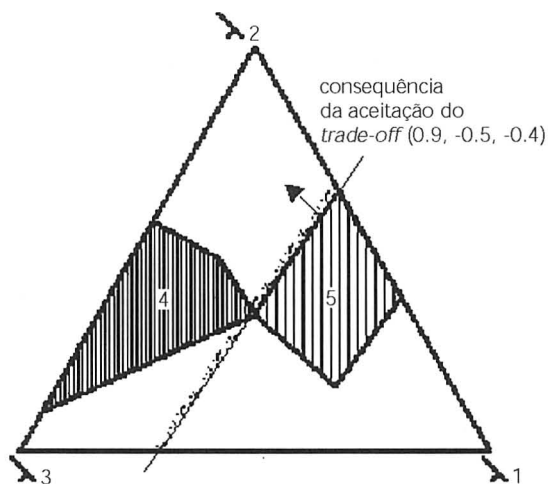


Figura III.14 – Avaliação do *trade-off* (0.9, -0.5, -0.4).

Suponha-se que o agente de decisão aceita esta tendência de variação.

Nesta altura, não existem respostas positivas em comparações par a par, nas duas passagens pelo passo 3, nem foram aceites tendências de variação nas funções objectivo correspondentes a variáveis não básicas pertencentes ao conjunto A. No entanto, foi agora aceite uma tendência de variação correspondente a uma variável não básica do conjunto B. Sendo assim, avança-se para o passo 7.

Passo 7

Acrescentam-se as restrições no espaço dos pesos, baseadas nas respostas dadas pelo agente de decisão nos passos 3 e 5 (para  $l=A$  e  $B$ ), que formarão o espaço dos pesos  $\Lambda^{(3)}$ .

- As respostas dadas pelo agente de decisão, no passo 3 ( $l=A$ ), são as seguintes:

A primeira resposta é não, isto é, o agente de decisão não prefere  $\underline{z}^{adj1}$  a  $\underline{z}^{(2)}$ ; e, portanto, dá lugar à restrição:

$$\underline{\lambda} \cdot (\underline{z}^{(2)} - \underline{z}^{adj1}) \geq \varepsilon \Leftrightarrow [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3] \left( \begin{bmatrix} 55.5 \\ 47.5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 48.5 \\ 19.5 \\ 37 \end{bmatrix} \right) \geq \varepsilon \text{ (ver figura III.15).}$$

A segunda resposta é não sabe (isto é, o agente de decisão não consegue exprimir a sua preferência entre  $\underline{z}^{adj2}$  e  $\underline{z}^{(2)}$ ); portanto, não se introduz qualquer restrição no espaço dos pesos.

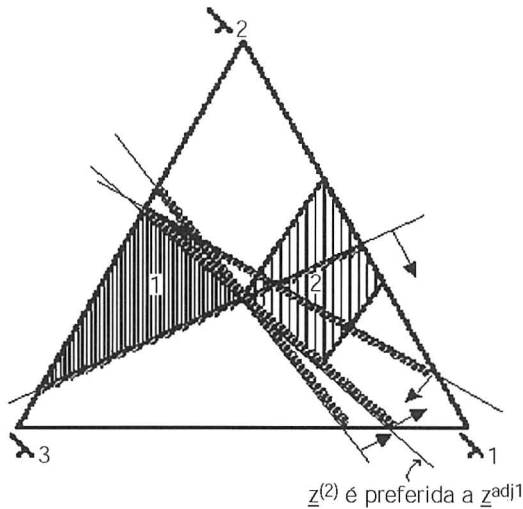


Figura III.15 – Resultado da comparação entre 2 soluções.

- No passo 5 ( $l=A$ ), o agente de decisão deu as seguintes respostas:  
 O agente de decisão não aceitou o *trade-off* (1, 4, -5), o que dá lugar à restrição  $\lambda_1 + 4\lambda_2 - 5\lambda_3 \geq \varepsilon$ , que coincide com a restrição imposta pela preferência de  $\underline{z}^{(2)}$  sobre  $\underline{z}^{adj1}$  (figura III.15).  
 O agente de decisão não aceitou o *trade-off* (-0.75, 1.25, 1), o que gera a restrição  $-0.75\lambda_1 + 1.25\lambda_2 + \lambda_3 \geq \varepsilon$  (figura III.16).

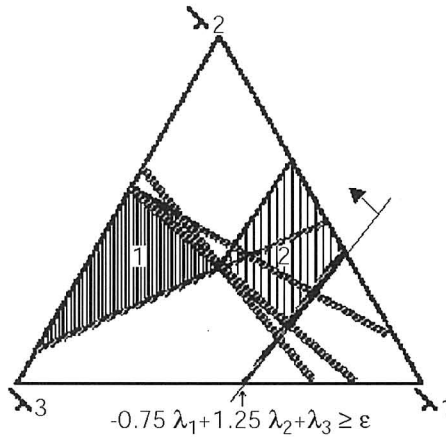


Figura III.16 – Avaliação do *trade-off*  $(-0.75, 1.25, 1)$ .

- A resposta dada no passo 3 (I=B) foi a seguinte:  
O agente de decisão disse que não sabe, isto é, não conseguiu exprimir uma preferência entre  $\underline{z}^{\text{adj}3}$  e  $\underline{z}^{(2)}$ . Não é criada qualquer nova restrição no espaço dos pesos.
- A resposta dada no passo 5 (I=B) foi a seguinte:  
O agente de decisão aceitou o *trade-off*  $(0.9, -0.5, -0.4)$ . Esta resposta dá lugar à restrição:  $-0.9\lambda_1 + 0.5\lambda_2 + 0.4\lambda_3 \geq \epsilon$  (figura III.17, 7ª restrição).

A figura III.17 mostra todas as restrições consideradas até ao momento, e a ordem por que foram introduzidas (as primeiras 3, correspondem à 1ª iteração e as restantes à 2ª iteração). O conjunto de todas as restrições define  $\Lambda^{(3)}$  que, neste caso, é um conjunto vazio.

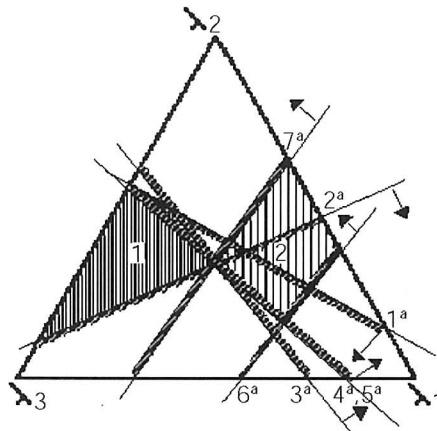


Figura III.17 – Restrições introduzidas no espaço dos pesos.

*Passo 8*

Não é possível determinar  $\underline{\lambda}^{(3)} \in \Lambda^{(3)}$ , porque  $\Lambda^{(3)} = \emptyset$ . Portanto, elimina-se a restrição mais antiga (a 1ª). Mesmo assim, continua a ter-se  $\Lambda^{(3)} = \emptyset$ . Elimina-se, então, a 2ª restrição mais antiga, e resulta  $\Lambda^{(3)} \neq \emptyset$  (figura III.18).

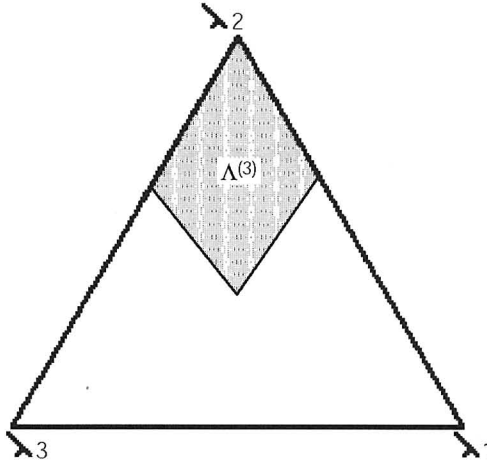


Figura III.18 –  $\Lambda^{(3)}$  após a eliminação das duas restrições mais antigas.

Determina-se um ponto  $\underline{\lambda}^{(3)} \in \Lambda^{(3)}$ , resolvendo-se, para o efeito, o problema que maximiza o menor desvio das restrições que definem  $\Lambda^{(3)}$ . A solução deste problema é  $\underline{\lambda}^{(3)} = (0.2, 0.6, 0.2)$ .

*Passo 9*

Usando  $\underline{\lambda}^{(3)}$ , resolve-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 0.2(3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) && (P_{\lambda^3}) \\
 & +0.6(x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4) \\
 & +0.2(-x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4) \\
 \text{s. a:} \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 50 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

A solução obtida é  $\underline{x}^{(b)} = (14, 0, 0, 9)$  com  $\underline{z}^{(b)} = (51, 50, 4)$ .

#### Passo 10

O agente de decisão é chamado a expressar a sua preferência entre  $\underline{z}^{(b)}$  e a solução actual,  $\underline{z}^{(2)} = (55.5, 47.5, 2)$ .

Repare-se que não é a primeira vez que o agente de decisão compara estas duas soluções, visto que  $\underline{z}^{(b)}$  foi também a solução encontrada no passo 3, para  $l=B$  ( $\underline{z}^{adj3}$ ). Nessa altura, o agente de decisão não conseguiu expressar uma preferência entre estas duas soluções. Suponha-se que agora ele opta por  $\underline{z}^{(2)}$ . Note-se que, nesta fase do processo, o agente de decisão deverá expressar a sua preferência.

Então, o método termina e  $\underline{x}^{(2)} = (14.5, 0, 2.5, 7)$ ,  $\underline{z}^{(2)} = (55.5, 47.5, 2)$  é a solução final.

## 4. MÉTODO TRIMAP

### 4.1. APRESENTAÇÃO DO MÉTODO

O TRIMAP é um ambiente computacional interactivo, dedicado a apoiar os agentes de decisão, na pesquisa de soluções eficientes, em problemas de programação linear tricritério. Pode, portanto, ser usado de formas muito diversas, dependendo do utilizador. Nestas circunstâncias, ao designá-lo por método TRIMAP, estamos a usar a palavra método com um sentido muito abrangente.

O método TRIMAP, desenvolvido por Clímaco e Antunes (1987, 1989), é constituído por um conjunto de procedimentos, que permitem uma pesquisa livre, com base numa aprendizagem progressiva e selectiva do conjunto das soluções eficientes. Combina a redução da região admissível, com a redução do espaço dos pesos. O agente de decisão pode especificar limitações inferiores para os valores da funções objectivo, e/ou impor restrições no espaço dos pesos. Em cada fase de cálculo é otimizada uma soma ponderada das funções objectivo.

A finalidade do método é ajudar o agente de decisão a eliminar progressivamente os sub-conjuntos de soluções eficientes que não lhe parecem interessantes, e não a assegurar a convergência para uma solução de compromisso óptima. O processo interactivo termina, quando o agente

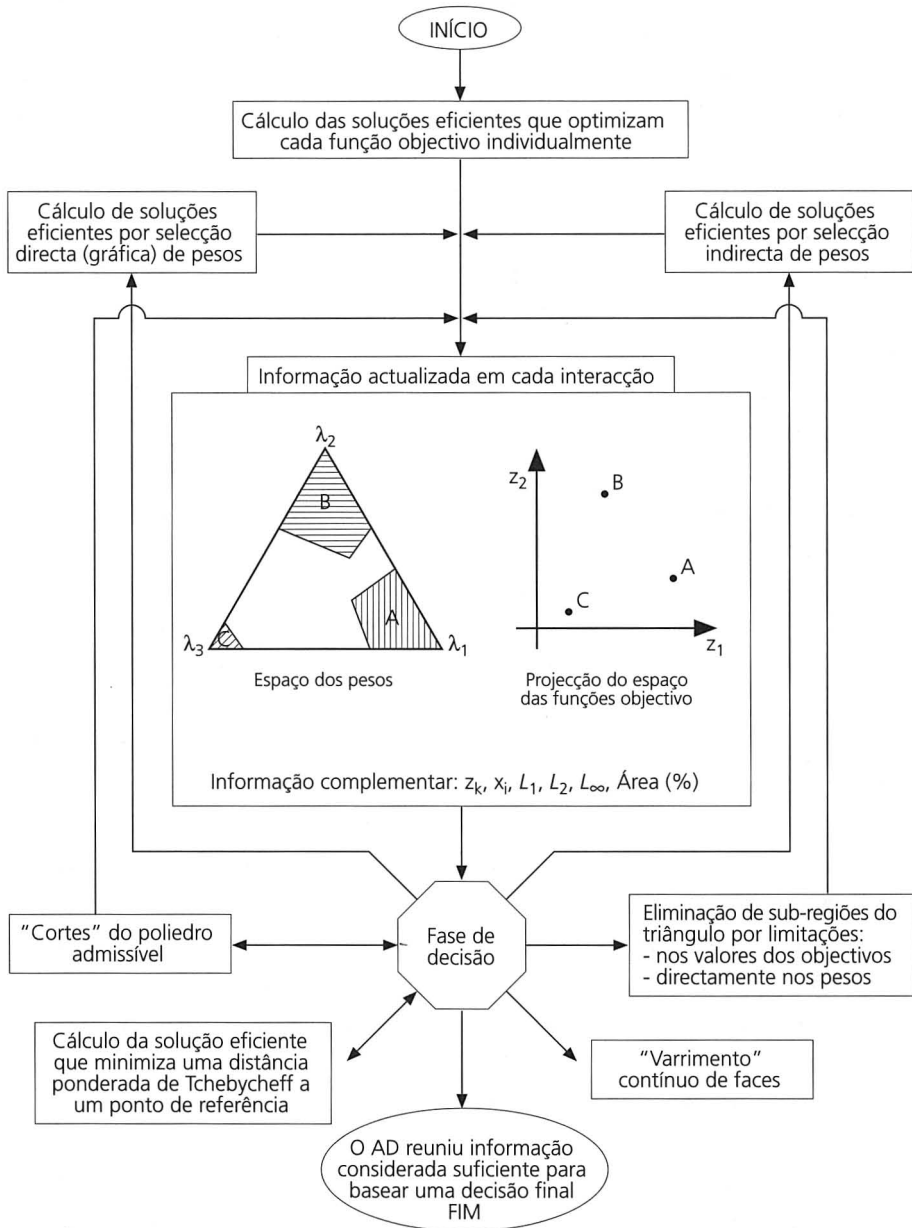
de decisão considera conhecer o suficiente sobre o conjunto das soluções eficientes, permitindo-lhe tomar uma decisão final. O TRIMAP combina três procedimentos fundamentais: decomposição do espaço dos pesos, introdução de restrições no espaço dos objectivos e introdução de restrições no espaço dos pesos. As limitações introduzidas nos valores das funções objectivo são automaticamente traduzidas para o espaço dos pesos, o que é usado como um valioso meio para recolher e apresentar a informação ao agente de decisão. O TRIMAP é vocacionado para problemas com três funções objectivo, o que, embora constitua uma limitação, permite o uso de meios gráficos adequados ao diálogo com o agente de decisão. O principal objectivo é possibilitar ao agente de decisão um preenchimento progressivo e selectivo do espaço dos pesos, que lhe dê informação adequada sobre a região eficiente, evitando, deste modo, um estudo exaustivo de zonas onde os valores das funções objectivo sejam muito semelhantes, ou de zonas que correspondam a valores das funções objectivo já previamente considerados não interessantes.

A redução do âmbito da pesquisa é feita principalmente impondo limitações nos valores das funções objectivo (o tipo de informação, do ponto de vista cognitivo, mais adequado ao diálogo com o agente de decisão), que são traduzidas para o espaço dos pesos. A introdução destas limitações adicionais pode ainda ser usada para obter soluções não dominadas que não sejam vértices do poliedro admissível. É também possível impor restrições directamente no espaço dos pesos, opção utilizada sobretudo quando o TRIMAP é usado no ensino. Através da análise comparativa do espaço dos pesos e do espaço dos objectivos, o agente de decisão pode fazer uma cobertura progressiva e selectiva do espaço dos pesos, decidindo, em cada interacção, qual o interesse de pesquisar soluções em áreas do espaço dos pesos ainda não exploradas.

Como se verá mais adiante neste livro, quando o uso do TRIMAP é combinado com outros procedimentos interactivos, evidencia-se a sua adequação especial numa primeira fase de pesquisa estratégica de soluções eficientes.

Inicialmente são calculadas as soluções eficientes que optimizam cada uma das funções objectivo, fornecendo ao agente de decisão uma primeira aproximação sobre a gama de variação dos valores de cada objectivo na região eficiente. Para ser utilizada como informação complementar, na

definição de direcções de pesquisa de novas soluções eficientes, pode também calcular-se a solução eficiente que minimiza uma distância ponderada de Tchebycheff à solução ideal. Tendo em conta o que se estudou no método STEM, esta solução não é, em geral, uma solução básica do poliedro admissível.





A selecção dos pesos para o cálculo de novas soluções eficientes pode ser feita de duas formas:

- directamente, escolhendo o agente de decisão um vector de pesos de uma zona do triângulo não preenchida, que lhe parece importante para continuar a pesquisa;
- indirectamente, construindo uma função cujo gradiente é normal ao plano que passa por três soluções não dominadas já calculadas, seleccionadas, para o efeito, pelo agente de decisão. Se os pesos assim obtidos não forem todos positivos, é feita uma pequena perturbação no gradiente da função objectivo ponderada, por forma a assegurar essa condição. Esta possibilidade de cálculo dos pesos é, no essencial, o método SIMOLP de Reeves e Franz (1985).

A introdução de limitações adicionais nos valores das funções objectivo, e a respectiva tradução para o espaço dos pesos, permite que o diálogo com o agente de decisão seja feito em termos dos valores das funções objectivo, acumulando a informação resultante no espaço dos pesos. O estabelecimento da limitação adicional  $z_k(\underline{x}) \geq L_k$  ( $L_k \in \mathfrak{R}, k \in \{1,2,3\}$ ) conduz à construção do seguinte problema *auxiliar*:

$$\begin{aligned} \max \quad & z_k(\underline{x}) \\ \text{s. a:} \quad & \underline{x} \in S_a \\ & S_a = \{\underline{x} \in S: z_k(\underline{x}) \leq L_k\} \end{aligned} \tag{III.1}$$

Maximizando  $z_k(\underline{x})$  em  $S_a$  são obtidas soluções (básicas) óptimas alternativas (note-se que o gradiente da função a maximizar é perpendicular à restrição auxiliar  $z_k(\underline{x}) \leq L_k$ ). As soluções básicas eficientes, considerando as funções objectivo do problema original e o poliedro admissível  $S_a$ , que optimizam (III.1) são seleccionadas, e as sub-regiões do espaço dos pesos que correspondem a cada uma delas são calculadas e representadas graficamente. Estas sub-regiões do espaço dos pesos são as regiões de indiferença definidas por  $\underline{\lambda}W \geq 0$ , relativas a cada base eficiente alternativa, em que  $W$  é a matriz dos custos reduzidos. A união de todas estas regiões de indiferença determina a sub-região do espaço dos pesos, onde a limitação adicional no valor da função objectivo (imposta pelo agente de decisão) é satisfeita para o problema original. Se o agente de decisão estiver apenas interessado em

soluções não dominadas que satisfaçam  $z_k(\underline{x}) \geq L_k$ , então é suficiente restringir a pesquisa a esta sub-região. Se o agente de decisão pretender impor mais do que uma limitação, então um problema do tipo de (III.1) é resolvido para cada uma delas, e as sub-regiões correspondentes no espaço dos pesos são preenchidas com padrões (ou cores) diferentes, permitindo assim visualizar claramente as zonas onde existem intersecções. A introdução destas limitações adicionais pode também ser usada para obter soluções não dominadas que, em geral, não são vértices do poliedro admissível original.

É ainda possível eliminar regiões do espaço dos pesos, impondo limitações directamente nos pesos, do tipo  $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \geq u_{ij}$ ,  $i, j \in \{1,2,3\}$ ,  $i \neq j$ ,  $u_{ij} \in \mathfrak{R}^+$ , ou  $0 < u_L \leq \lambda_k \leq u_H < 1$  com  $k \in \{1,2,3\}$ .

Esta opção tem, sobretudo, importância pedagógica, sendo de reduzido interesse em aplicações práticas.

O agente de decisão também pode realizar cortes no poliedro admissível, fixando o valor de uma ou duas funções objectivo. O programa calcula, então, as soluções não dominadas que satisfazem estas restrições adicionais, e que não são geralmente vértices do poliedro admissível. Note-se que, quando se efectua um corte,  $z_k(\underline{x}) = N_k$  ( $N_k \in \mathfrak{R}$ ), e o programa calcula vértices não dominados do novo problema (satisfazendo a restrição adicional), podem obter-se soluções dominadas em relação ao problema original que não são, em geral, vértices deste problema. Esta questão é resolvida no TRIMAP (para detalhes ver Clímaco e Antunes (1987, 1989)).

O TRIMAP permite ainda pesquisar soluções em faces não dominadas entre dois pontos previamente calculados (opção inspirada no método *Pareto Race*). O programa mostra uma linha que avança ou recua sobre a projecção da face, a uma velocidade controlada pelo utilizador. Os valores das funções objectivo, correspondentes aos pontos percorridos, são apresentados num gráfico de barras.

192

Mais ainda, o agente de decisão pode identificar um ponto de referência, no espaço dos objectivos, e o programa calcula a solução não dominada que minimiza uma distância ponderada de Tchebycheff a esse ponto.

Em cada interacção do TRIMAP são apresentados ao agente de decisão dois gráficos principais. O primeiro é o espaço dos pesos, mostrando as regiões de indiferença correspondentes às soluções básicas não dominadas já conhecidas. O segundo é uma projecção do espaço dos objectivos,

mostrando as soluções não dominadas já calculadas. Outro gráfico acessível é o chamado *spider-web* (teia-de-aranha) que mostra as diferenças entre os valores das funções objectivo de cada solução e as componentes respectivas de um ponto de referência (eventualmente a solução ideal). Estão também disponíveis indicadores complementares sobre cada solução, a saber: as distâncias  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_\infty$  à solução ideal e a área da região de indiferença (percentagem que ocupa da área total do triângulo).

Nesta secção, procedeu-se a uma apresentação genérica do TRIMAP. Nos próximos parágrafos referem-se algumas das potencialidades do TRIMAP no ensino da programação linear multicritério, e apresenta-se um exemplo ilustrativo para mostrar como funcionam (para um caso não degenerado) os principais procedimentos de cálculo associados ao TRIMAP.

#### 4.2. O TRIMAP NO ENSINO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTICRITÉRIO

O interesse do TRIMAP no ensino da PL multicritério ressalta do parágrafo anterior e será, mais à frente, objecto de algumas referências específicas a partir de um exemplo ilustrativo da utilização e do funcionamento deste programa. Muitas outras possibilidades podem ser facilmente identificadas. Acreditamos que se trata de um bom exercício para o leitor. Para isso está disponível a implementação computacional do TRIMAP via Internet. Neste parágrafo, exemplifica-se, a partir de exemplos muito simples, o uso do TRIMAP para chamar a atenção de algumas características da programação linear multicritério.

Considere-se o seguinte problema:

$$\text{Max}_{\underline{x} \in S} \underline{z}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} z_1(\underline{x}) \\ z_2(\underline{x}) \\ z_3(\underline{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

$$S = \{\underline{x} \in \mathfrak{R}^2: x_1 \leq 10, x_2 \leq 12, x_1 + x_2 \leq 20, -x_1 + x_2 \leq 7, x_1 - x_2 \leq 8, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

A decomposição total do espaço dos pesos, nas sub-áreas correspondentes aos vértices do problema em estudo, pode calcular-se usando o TRIMAP, obtendo-se a figura III.19.

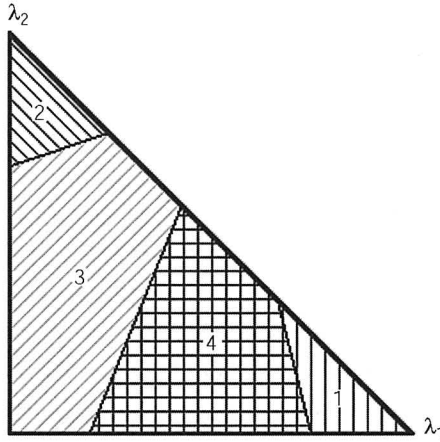


Figura III.19 – Decomposição do espaço dos pesos do problema (III.2).

Desta decomposição pode concluir-se que é possível obter a solução não dominada que corresponde ao óptimo de  $z_3(\underline{x})$ , a partir da optimização de somas ponderadas das funções objectivo, para valores de pesos que intuitivamente não parece possível conduzirem a essa solução. Por exemplo, para  $\lambda_3=0$ ,  $\lambda_2 = 0.64$ ,  $\lambda_1 = 0.36$ , obtém-se o óptimo<sup>10</sup> de  $z_3(\underline{x})$ . Como é óbvio, trata-se de um resultado contra-intuitivo, possível, visto que  $z_3(\underline{x})$  se pode obter a partir de uma combinação linear de  $z_1(\underline{x})$  e  $z_2(\underline{x})$ . Mas, mesmo que não seja este o caso, situação semelhante pode ocorrer quando existe uma grande correlação entre uma função objectivo e qualquer uma das outras.

Neste exemplo, constata-se que a decomposição do espaço dos pesos consiste em regiões de indiferença que vão de um lado ao outro do triângulo (designamos esta situação por uma decomposição *listada*). Note-se que o cone definido pelos gradientes das funções objectivo é plano e, portanto, uma das funções pode sempre ser obtida como combinação linear das outras duas. Nestas circunstâncias, a decomposição é sempre *listada* e ocorrem situações contra-intuitivas, como a indicada acima.

Suponha-se agora que a primeira função objectivo é alterada, mantendo-se o resto de (III.2). Seja  $z_1(\underline{x}) = -10x_1 + 30x_2$ . A nova decomposição do espaço dos pesos está representada na figura III.20.

<sup>10</sup> Note-se que, em geral, exige-se que  $\lambda_i > 0$ ,  $i=1, \dots, p$ . Contudo, neste caso, obtêm-se sempre soluções eficientes, mesmo fixando algum  $\lambda_i=0$ .

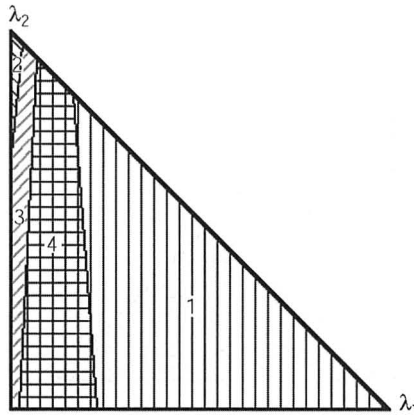


Figura III.20 – Decomposição do espaço dos pesos do problema (III.2) com  $z_1(\underline{x})$  alterada.

As bases não dominadas do problema anterior mantêm-se, mas as sub-áreas do triângulo, correspondentes a cada uma delas, deformam-se profundamente, e a percentagem relativa que ocupam no triângulo também se altera muito.

A alteração processada no problema original traduziu-se apenas numa variação de escala da função objectivo  $z_1(\underline{x})$ , já que o gradiente se manteve. Pode concluir-se que para se atribuir algum sentido prático à decomposição do espaço dos pesos, e, portanto, ao conjunto dos vectores dos pesos que permitem calcular cada vértice não dominado, é necessário proceder a uma normalização prévia das funções objectivo. Voltaremos a este assunto no capítulo em que se aplica o TRIMAP ao estudo de casos.

Pode realizar-se um exercício, do mesmo tipo do anterior, mantendo as funções objectivo, mas alterando a geometria da região admissível. Neste caso, pretende-se estudar as implicações, destas alterações, na decomposição do espaço dos pesos. Deixa-se este exercício para o leitor.

Finalmente, suponha-se que todo o problema (III.2) se mantém, à excepção de  $z_3(\underline{x})$  que passa a ser:  $z_3(\underline{x}) = 3x_1 - 2x_2$ . A nova decomposição do espaço dos pesos é mostrada na figura III.21.

A inspecção visual comparada, da decomposição do espaço dos pesos relativa ao problema (III.2) e desta última, permite concluir que, enquanto no problema original os óptimos das três funções objectivo são distintos, na decomposição da figura III.21 o óptimo de  $z_2(\underline{x})$  e de  $z_3(\underline{x})$  é o mesmo.

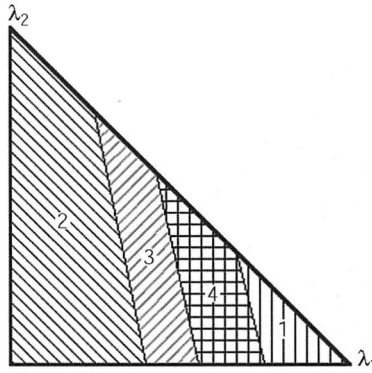


Figura III.21 – Decomposição do espaço dos pesos do problema (III.2) com  $z_3(x)$  alterada.

#### 4.3. COMENTÁRIOS FINAIS

No TRIMAP faz-se uma pesquisa estratégica progressiva e selectiva do conjunto das soluções eficientes, em problemas de programação linear tricritério. Trata-se de um processo construtivo, tendo em conta os mecanismos cognitivos da interactividade. Chama-se a atenção de que, no diálogo com o agente de decisão, se requer que ele estabeleça níveis mínimos de satisfação para os valores das funções objectivo, delimitando progressivamente a sub-região eficiente que mais lhe interessa, tendo em conta o conhecimento que existe do conjunto das soluções eficientes em cada momento do processo interactivo, isto é, sempre que se repete a fase de diálogo. Evita-se assim uma pesquisa exaustiva das soluções eficientes, poupando esforço computacional, procedendo-se a uma focagem progressiva da sub-região eficiente de maior interesse para o agente de decisão. O espaço dos pesos e a optimização de somas pesadas são utilizados essencialmente com fins operacionais. O uso extensivo de gráficos, menus e caixas de diálogo é também indispensável num conjunto de procedimentos do tipo do TRIMAP, mas não dispensam, como na generalidade dos métodos descritos neste capítulo, a mediação do diálogo, com o agente de decisão, por um analista que compreenda os aspectos técnicos envolvidos. Deve-se ainda notar que, como seria de esperar, tendo em conta a metodologia subjacente ao TRIMAP, não

existem decisões irrevogáveis durante o processo interactivo de decisão, assim como também não se pretende convergir para qualquer tipo de *melhor solução*.

#### 4.4. EXEMPLO ILUSTRATIVO DO MÉTODO TRIMAP

Considere-se o seguinte problema de programação linear com 3 funções objectivo<sup>11, 12</sup>:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z_1 = x_1 \\
 \max \quad & z_2 = x_2 \\
 \max \quad & z_3 = x_3 \\
 \text{s. a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Para uma melhor compreensão dos conceitos que se seguem, apresenta-se, na figura III.22, a região admissível no espaço das funções objectivo. Note-se que, neste caso, este espaço é coincidente com o espaço das variáveis de decisão.

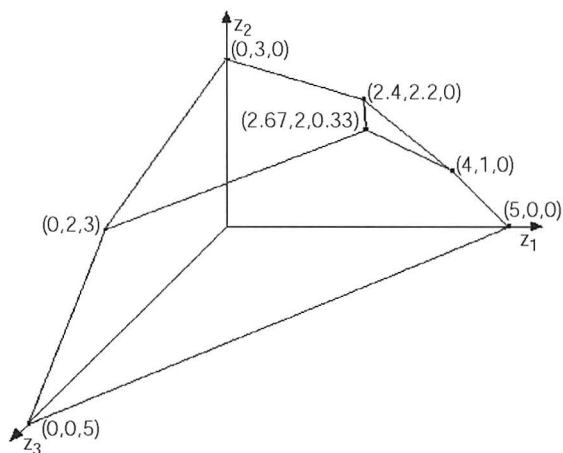


Figura III.22 – Espaço das variáveis de decisão e espaço das funções objectivo.

<sup>11</sup> Este problema foi usado em (Steuer, 1986) para exemplificar o método de Zionts-Wallenius. O leitor poderá assim fazer uma comparação interessante do funcionamento dos dois métodos.

<sup>12</sup> Trata-se de um problema sem soluções degeneradas. Sendo assim, a cada vértice do poliedro admissível corresponde uma, e uma só, base.

No método TRIMAP são calculadas, logo de início, as soluções eficientes que optimizam individualmente as 3 funções objectivo.

A optimização de somas ponderadas das funções objectivo constitui o processo de cálculo de soluções eficientes usado neste método (só em casos excepcionais se usa outro processo de cálculo). Relembre-se que este processo de cálculo consiste na resolução do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^3 \lambda_i z_i(\underline{x}) \\ \text{s. a:} \quad & \underline{x} \in S \end{aligned} \quad (P_{\underline{\lambda}})$$

em que  $S$  é a região admissível do problema e  $\underline{\lambda} \in \Lambda$ .

$\Lambda$  designa o conjunto de todos os vectores de pesos e é definido da seguinte forma:

$$\Lambda = \{ \underline{\lambda} \in \mathfrak{R}^3 : \lambda_i > 0, i = 1, \dots, 3; \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \}$$

Relembre-se, ainda, que o espaço dos pesos para problemas tricritério pode ser representado graficamente, como mostra a figura III.23, ou através de uma sua projecção, como por exemplo no plano  $\lambda_1 \lambda_2$  (ver figura III.24).

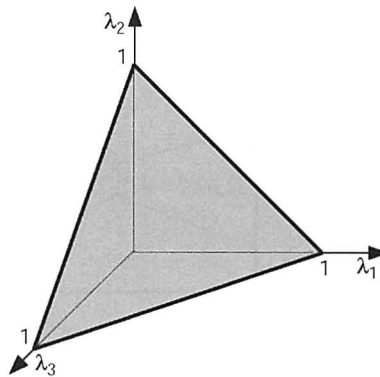


Figura III.23 – Espaço dos pesos para problemas tricritério.

A resolução do problema  $(P_{\underline{\lambda}})$ , para um dado vector de pesos  $\underline{\lambda}^+$ , conduz a uma solução básica (isto é, um vértice do poliedro admissível) eficiente do problema multiobjectivo,  $\underline{x}^+$ , para a qual é possível calcular a respectiva *região de indiferença* no espaço dos pesos (sub-conjunto de  $\Lambda, \Lambda^+$ , tal que a optimização da soma ponderada das funções objectivo, para qualquer  $\underline{\lambda} \in \Lambda^+$ , origina a mesma solução,  $\underline{x}^+$ ).



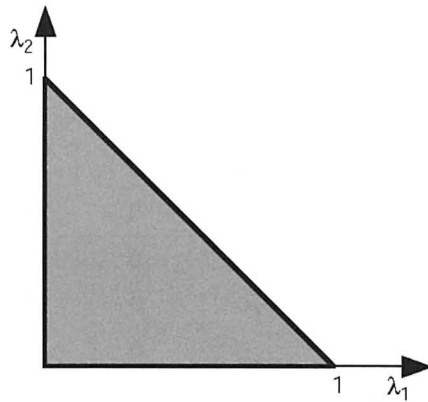


Figura III.24 – Projecção no plano  $\lambda_1\lambda_2$  do espaço dos pesos de problemas tricritério.

Começa-se, então, por calcular a solução eficiente que otimiza  $z_1$  e a respectiva região de indiferença<sup>13</sup>. Para garantir que a solução obtida é eficiente utilizar-se-á  $\lambda_1=0.99$ ,  $\lambda_2=0.005$  e  $\lambda_3=0.005$ , em vez de  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=0$  e  $\lambda_3=0$  (que, aliás, não pertence ao espaço dos pesos tal como foi definido atrás, exactamente porque, em geral, não garante a obtenção de solução(ões) eficiente(s)).

Resolve-se o seguinte problema, usando o método simplex:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 0.99 x_1 + 0.005 x_2 + 0.005 x_3 \\ \text{s. a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Para se poder calcular posteriormente a região de indiferença, acrescentam-se ao quadro simplex três linhas de custos reduzidos, respeitantes a cada uma das funções objectivo. Cada uma dessas linhas é actualizada em todas as iterações do método simplex.

Sejam  $x_4$ ,  $x_5$  e  $x_6$  as variáveis desvio.

<sup>13</sup> Devido à importância de que se reveste a decomposição do espaço dos pesos no TRIMAP, optou-se por apresentar detalhadamente os cálculos associados.

Resolução pelo método simplex:

$\underline{C}_B^T$	$\underline{C}$ $\underline{X}_B$	0.99 $x_1$	0.005 $x_2$	0.005 $x_3$	0 $x_4$	0 $x_5$	0 $x_6$	
0	$x_4$	1	1	1	1	0	0	5
0	$x_5$	1	3	1	0	1	0	9
0	$x_6$	3	4	0	0	0	1	16
$z_j^1 - c_j^1$		-1	0	0	0	0	0	0
$z_j^2 - c_j^2$		0	-1	0	0	0	0	0
$z_j^3 - c_j^3$		0	0	-1	0	0	0	0
$z_j - c_j$		-0.99	-0.005	-0.05	0	0	0	

$\underline{C}_B^T$	$\underline{C}$ $\underline{X}_B$	0.99 $x_1$	0.005 $x_2$	0.005 $x_3$	0 $x_4$	0 $x_5$	0 $x_6$	
0.99	$x_1$	1	1	1	1	0	0	5
0	$x_5$	0	2	0	-1	1	0	4
0	$x_6$	0	1	-3	-3	0	1	1
$z_j^1 - c_j^1$		0	1	1	1	0	0	5
$z_j^2 - c_j^2$		0	-1	0	0	0	0	0
$z_j^3 - c_j^3$		0	0	-1	0	0	0	0
$z_j - c_j$		0	0.985	0.985	0.99	0	0	

A solução óptima do problema auxiliar foi encontrada. É a solução eficiente que otimiza  $z_1$  no problema multiobjectivo:

$$x_1 = 5; x_2 = 0; x_3 = 0;$$

$$z_1 = 5; z_2 = 0; z_3 = 0;$$

200

Repare-se que, os valores da linha  $z_j - c_j$  são iguais a  $\lambda_1(z_j^1 - c_j^1) + \lambda_2(z_j^2 - c_j^2) + \lambda_3(z_j^3 - c_j^3)$  para o vector de pesos considerado (neste caso,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.99, 0.005, 0.005)$ ). Pode determinar-se todos os vectores de pesos que conduzem a esta solução eficiente (*região de indiferença*), verificando em que condições se obtêm todos os  $z_j - c_j \geq 0$  (condição de optimalidade no simplex), isto é:  $\lambda_1(z_j^1 - c_j^1) + \lambda_2(z_j^2 - c_j^2) + \lambda_3(z_j^3 - c_j^3) \geq 0$ . Assim, para a solução em questão, a região de indiferença é dada por:

$$\Lambda = \{\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^3: \lambda_i > 0, i = 1, \dots, 3; \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\} \text{ e}$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$  (condição retirada da coluna da matriz dos custos reduzidos correspondente a  $x_2$ ),

$\lambda_1 - \lambda_3 \geq 0$  (condição retirada da coluna da matriz dos custos reduzidos correspondente a  $x_3$ ) e

$\lambda_1 \geq 0$  (condição retirada da coluna da matriz dos custos reduzidos correspondente a  $x_4$ ).

Para se poder representar esta região na projecção do espaço dos pesos  $\lambda_1 \lambda_2$ , substitui-se a variável  $\lambda_3$  em  $\lambda_1 - \lambda_3 \geq 0$  ( $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ , dado que  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ ). Esta desigualdade é, então, equivalente a  $2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$ .

A região de indiferença da primeira solução está representada na figura III.25.

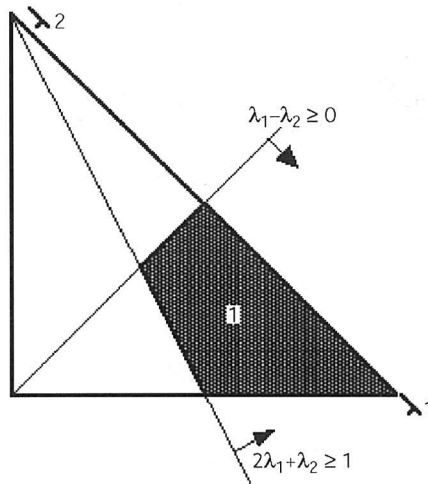


Figura III.25 – Região de indiferença da primeira solução.

Utilizando um processo semelhante ao descrito para o cálculo da solução que otimiza  $z_1$ , o método TRIMAP calcula também as soluções eficientes que otimizam  $z_2$  e  $z_3$ . Estas soluções são apresentadas ao agente de decisão através da sua representação em 2 gráficos: o espaço dos pesos (ou uma

projectão deste) e a projecção bidimensional do espaço dos objectivos. A figura III.26 mostra a projecção do espaço dos pesos em  $\lambda_1\lambda_2$  e a projecção bidimensional do espaço dos objectivos em  $z_1z_2$ . Neste último, cada solução é identificada da seguinte forma: índice da solução/valor de  $z_3$ ; e a solução ideal é representada por um pequeno quadrado a preto. A partir da figura III.26, pode concluir-se que existe uma aresta eficiente que une as soluções 1 e 3, porque as respectivas regiões de indiferença são contíguas, isto é, incluem um segmento de recta comum.

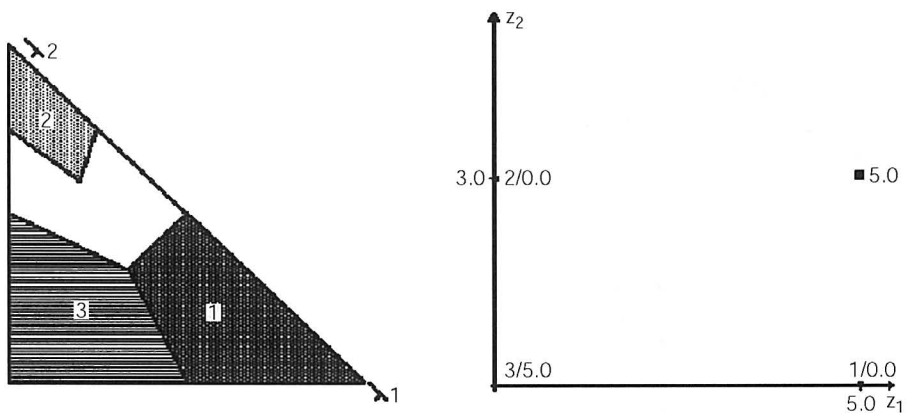


Figura III.26 – Soluções que optimizam cada uma das funções objectivo.

Solução 1:  $\underline{x}^{(1)} = \underline{z}^{(1)} = (5,0,0)$ ;

Solução 2:  $\underline{x}^{(2)} = \underline{z}^{(2)} = (0,3,0)$ ;

Solução 3:  $\underline{x}^{(3)} = \underline{z}^{(3)} = (0,0,5)$ .

A existência de apenas uma sub-área que toca (na fronteira) cada um dos vértices do triângulo da figura III.26, garante a não existência de óptimos alternativos eficientes, para qualquer uma das funções objectivo. Veremos mais adiante um exemplo em que existem óptimos alternativos eficientes. Por outro lado, como já vimos, o problema em estudo é não degenerado. Neste caso, conhecer-se-ão todos os vértices eficientes quando o triângulo estiver totalmente preenchido, e a cada sub-área do triângulo corresponde um vértice eficiente. Se um problema em estudo tiver soluções degeneradas,

a certos vértices corresponde mais do que uma base e, portanto, a decomposição do triângulo é mais complicada. De facto, em muitos casos é possível obter todos os vértices eficientes sem preencher completamente o triângulo. As bases correspondentes ao mesmo vértice eficiente podem corresponder sub-áreas diferentes do triângulo, eventualmente sobrepostas em parte. Situações deste género não inibem, mas complicam, a utilização do TRIMAP.

A partir da selecção directa ou indirecta, por parte do agente de decisão, de outros vectores de pesos, pertencentes à região do triângulo ainda não preenchida, podem calcular-se outras soluções eficientes que são vértices do poliedro admissível.

Suponha-se que o agente de decisão pretende conhecer a solução eficiente que se obtém optimizando a função ponderada cujo gradiente é normal ao plano que passa pelas três soluções já calculadas (selecção indirecta de pesos). O cálculo dos pesos é feito da seguinte forma:

Sejam  $\underline{v}^1$  e  $\underline{v}^2$  dois vectores do espaço dos objectivos definidos por  $\underline{v}^1 = \underline{z}^{(2)} - \underline{z}^{(1)} = (-5, 3, 0)$  e  $\underline{v}^2 = \underline{z}^{(3)} - \underline{z}^{(1)} = (-5, 0, 5)$ . Estes dois vectores definem um plano paralelo ao que passa pelos pontos  $\underline{z}^{(1)}$ ,  $\underline{z}^{(2)}$  e  $\underline{z}^{(3)}$ . Então, o vector  $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,

em que  $v_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$ ,  $v_2 = (-1) \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 25$  e  $v_3 = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 15$ , é perpendicular ao plano definido por  $\underline{v}^1$  e  $\underline{v}^2$ . Como a função ponderada é  $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$ , o respectivo gradiente no espaço dos objectivos é dado por  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Assim,  $\underline{\lambda}$  será igual ao vector  $\underline{v}$  normalizado, isto é:  $(0.273, 0.455, 0.273)$ .

Resolve-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 0.273 x_1 + 0.455 x_2 + 0.273 x_3 \\ \text{s. a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução deste problema é a solução eficiente 4,  $\underline{x}^{(4)} = \underline{z}^{(4)} = (2.67, 2, 0.33)$ , cuja região de indiferença se apresenta na figura III.27.

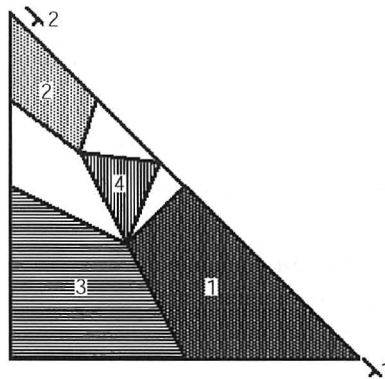


Figura III.27 – Decomposição do espaço dos pesos após o cálculo da solução 4.

A figura III.27 permite concluir que as soluções 1, 3 e 4 pertencem a uma face eficiente (porque existe um ponto do espaço dos pesos, interior ao triângulo, comum às regiões de indiferença destas 3 soluções). Os pontos 2 e 4 pertencem a outra face eficiente.

De entre as possibilidades oferecidas pelo TRIMAP, há uma particularmente útil para o agente de decisão: trata-se da imposição de limitações nos valores das funções objectivo e da sua tradução para o espaço dos pesos.

A imposição de limitações adicionais permite reduzir a região admissível e, conseqüentemente, reduzir a zona de pesquisa de novas soluções eficientes, se o agente de decisão assim o desejar.

Quando o agente de decisão impõe uma ou mais limitações nos valores das funções objectivo, essa informação é traduzida para o espaço dos pesos, sendo apresentada a zona onde se situam os vectores de pesos que conduzem a soluções que satisfazem essa(s) limitação(ões). Suponha-se que o agente de decisão decide impor a limitação adicional  $z_3 \geq 2$ . Para calcular a região do espaço dos pesos que lhe está associada resolve-se o seguinte problema *auxiliar*:

204

$$\begin{aligned} \max \quad & z_3 \\ \text{s. a:} \quad & \underline{x} \in S \\ & z_3 \leq 2 \end{aligned}$$

Repare-se que o sentido da restrição introduzida no problema *auxiliar*,  $z_3 \leq 2$ , é oposto ao da limitação que o agente de decisão pretende impor no problema multiobjectivo,  $z_3 \geq 2$ .

Para o problema *auxiliar*, calculam-se todos os óptimos alternativos, e as respectivas regiões de indiferença. A reunião destas sub-regiões define a região que procuramos.

O problema a resolver é, então:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z_3 = x_3 \\ \text{s. a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolução pelo método simplex:

( $x_4, x_5, x_6$  e  $x_7$  são variáveis desvio)

$\underline{C}_B^T$	$\underline{C}$ $\underline{X}_B$	0	0	1	0	0	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_4$	1	1	1	1	0	0	0	5
0	$x_5$	1	3	1	0	1	0	0	9
0	$x_6$	3	4	0	0	0	1	0	16
0	$x_7$	0	0	<b>1</b>	0	0	0	1	2
$Z_j^1 - C_j^1$		-1	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j^2 - C_j^2$		0	-1	0	0	0	0	0	0
$Z_j^3 - C_j^3$		0	0	-1	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$		0	0	<b>-1</b>	0	0	0	0	

2ª ITERAÇÃO:

$\underline{C}_B^T$	$\underline{C}$ $\underline{X}_B$	0	0	1	0	0	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_4$	1	1	0	1	0	0	-1	3
0	$x_5$	1	3	0	0	1	0	-1	7
0	$x_6$	3	4	0	0	0	1	0	16
1	$x_3$	0	0	1	0	0	0	1	2
$Z_j^1 - C_j^1$		-1	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j^2 - C_j^2$		0	-1	0	0	0	0	0	0
$Z_j^3 - C_j^3$		0	0	0	0	0	0	1	2
$Z_j - C_j$		<b>0</b>	<b>0</b>	0	0	0	0	1	

Esta é uma das soluções óptimas do problema *auxiliar*, mas há óptimos alternativos, como se pode verificar a partir do respectivo quadro óptimo, pois há 2 valores nulos na linha  $z_j - c_j$ , correspondentes a variáveis não básicas ( $x_1$  e  $x_2$ ). A solução obtida ( $x_1=0, x_2=0, x_3=2$ ) não é uma solução eficiente do problema *multiobjectivo auxiliar*. Chama-se problema *multiobjectivo auxiliar* ao problema *auxiliar* acrescido das outras funções objectivo do problema original. Ao calcular-se a respectiva região de indiferença, a partir de condições retiradas do quadro simplex, constata-se que não há nenhum vector de pesos que satisfaça todas as condições, como se pode verificar:

$$\Lambda = \{\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^3: \lambda_i > 0, i = 1, \dots, 3; \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\} \text{ e}$$

$-\lambda_1 \geq 0$  (condição retirada da coluna da matriz dos custos reduzidos correspondente a  $x_1$ ),

$-\lambda_2 \geq 0$  (condição retirada da coluna da matriz dos custos reduzidos correspondente a  $x_2$ ) e

$\lambda_3 \geq 0$  (condição retirada da coluna da matriz dos custos reduzidos correspondente a  $x_7$ ).

A conjunção destas condições define o conjunto vazio (porque cada um dos pesos deve ser estritamente positivo).

Calculem-se, então, todos os óptimos alternativos da solução anterior (para um estudo detalhado, ver o algoritmo para o cálculo de óptimos alternativos proposto em Steuer (1986, cap. 4)).

Há duas hipóteses de pivotação:

- 1) tornar básica  $x_1$ , e não básica  $x_4$ ;
- 2) tornar básica  $x_2$ , e não básica  $x_5$ .



Comece-se pela 1ª hipótese:

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	0	0	1	0	0	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_1$	1	1	0	1	0	0	-1	3
0	$x_5$	0	2	0	-1	1	0	0	4
0	$x_6$	0	1	0	-3	0	1	3	7
1	$x_3$	0	0	1	0	0	0	1	2
$z_j^1 - c_j^1$		0	1	0	1	0	0	-1	3
$z_j^2 - c_j^2$		0	-1	0	0	0	0	0	0
$z_j^3 - c_j^3$		0	0	0	0	0	0	1	2
$z_j - c_j$		0	<b>0</b>	0	0	0	0	1	

Designe-se esta solução por **A**, em que  $x_1=3$ ,  $x_2=0$ ,  $x_3=2$  e  $z_1=3$ ,  $z_2=0$ ,  $z_3=2$ .

Cálculo da região de indiferença:

$$\underline{\lambda} \in \Lambda = \{ \underline{\lambda} \in \mathfrak{R}^3 : \lambda_i > 0, i = 1, \dots, 3; \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \} \text{ e}$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$  (condição retirada da coluna da matriz dos custos reduzidos correspondente a  $x_2$ ),

$\lambda_1 \geq 0$  (condição retirada da coluna da matriz dos custos reduzidos correspondente a  $x_4$ ) e

$-\lambda_1 + \lambda_3 \geq 0$  (condição retirada da coluna da matriz dos custos reduzidos correspondente a  $x_7$ ).

Como  $-\lambda_1 + \lambda_3 \geq 0 \Leftrightarrow -2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ , então a região de indiferença da solução **A** pode ser representada graficamente, como mostra a figura III.28. A solução **A** possui uma região de indiferença não vazia, o que garante que é uma solução eficiente do problema *multiobjetivo auxiliar*.

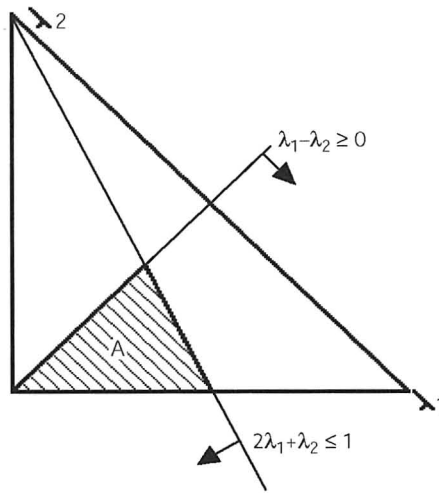


Figura III.28 – Uma solução eficiente do problema *multiobjectivo auxiliar*.

Continue-se o cálculo de soluções ótimas alternativas do problema *auxiliar* considerando, agora, a 2ª hipótese de pivotação possível, a partir do 1º quadro óptimo (torna-se básica  $x_2$  e não básica  $x_5$ ):

$\underline{c}_B^T$	$\underline{x}_B$	0	0	1	0	0	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_4$	$2/3$	0	0	1	$-1/3$	0	$-2/3$	$2/3$
0	$x_2$	$1/3$	1	0	0	$1/3$	0	$-1/3$	$7/3$
0	$x_6$	$5/3$	0	0	0	$-4/3$	1	$4/3$	$20/3$
1	$x_3$	0	0	1	0	0	0	1	2
$z_j^1 - c_j^1$		-1	0	0	0	0	0	0	0
$z_j^2 - c_j^2$		$1/3$	0	0	0	$1/3$	0	$-1/3$	$7/3$
$z_j^3 - c_j^3$		0	0	0	0	0	0	1	2
$z_j - c_j$		0	0	0	0	0	0	1	

208

Designa-se esta solução por **B**, em que  $x_1=0$ ;  $x_2=7/3$ ;  $x_3=2$  e  $z_1=0$ ;  $z_2=7/3$ ;  $z_3=2$ , e cuja região de indiferença é definida por:

$$\Lambda^B = \left\{ \underline{\lambda} \in \mathfrak{R}^3: \lambda_i > 0, i = 1, \dots, 3; \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, -\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 \geq 0, \frac{1}{3}\lambda_2 \geq 0, -\frac{1}{3}\lambda_2 + \lambda_3 \geq 0 \right\}$$

Esta região é apresentada na figura III.29.

Podemos continuar-se a determinar óptimos alternativos, dado que ainda não se esgotaram as possibilidades de obtenção de bases diferentes. A partir do quadro óptimo da solução **A**, determina-se uma outra solução alternativa, tornando básica  $x_2$  e não básica  $x_5$ :

$C_B^T$	$X_B$	0	0	1	0	0	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_1$	1	0	0	$3/2$	$-1/2$	0	-1	1
0	$x_2$	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	2
0	$x_6$	0	0	0	$-5/2$	$-1/2$	1	3	5
1	$x_3$	0	0	1	0	0	0	1	2
$z_j^1 - c_j^1$		0	0	0	$3/2$	$-1/2$	0	-1	1
$z_j^2 - c_j^2$		0	0	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	2
$z_j^3 - c_j^3$		0	0	0	0	0	0	1	2
$z_j - c_j$		0	0	0	0	0	0	1	

Designa-se esta solução por **C**, em que  $x_1=1$ ;  $x_2=2$ ;  $x_3=2$  e  $z_1=1$ ;  $z_2=2$ ;  $z_3=2$ . A região de indiferença é definida por:

$$\Lambda^C = \left\{ \underline{\lambda} \in \mathfrak{R}^3: \lambda_i > 0, i = 1, \dots, 3; \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, \frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \geq 0, -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \geq 0, -\lambda_1 + \lambda_3 \geq 0 \right\}$$

(apresenta-se na figura III.29).

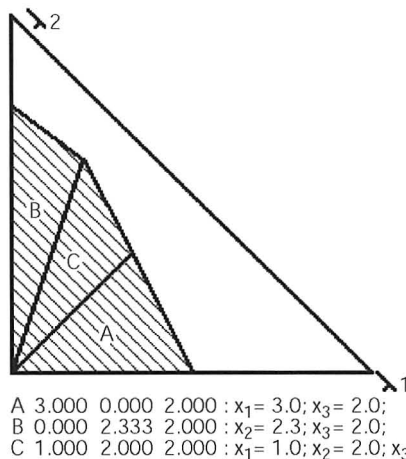


Figura III.29 – Regiões de indiferença das soluções óptimas alternativas de  $z_3$ , considerando o problema *multiobjectivo auxiliar*.

Dado que estão esgotadas todas as possibilidades de obtenção de óptimos alternativos, o TRIMAP apresenta, então, ao utilizador a região do espaço dos pesos onde é satisfeita a limitação adicional (figura III.29). Esta região é constituída pela reunião das regiões de indiferença correspondentes às soluções óptimas alternativas do problema *auxiliar* que são eficientes do problema multiobjectivo original com a restrição auxiliar ( $z_3 \leq 2$ ), isto é, do problema *multiobjectivo auxiliar* definido atrás. Note-se que, em certos casos, podem existir soluções eficientes do problema *multiobjectivo auxiliar* que não são eficientes para o problema original.

Por outro lado, para este exemplo, a inspeção visual das sub-áreas **A**, **B** e **C** da figura III.29 confirma tratar-se de óptimos alternativos de  $z_3$ . Repare-se que todas elas têm na sua fronteira um vértice que é o vértice do triângulo correspondente a  $\lambda_1=0$ ,  $\lambda_2=0$ ,  $\lambda_3=1$ .

Para uma melhor percepção, apresenta-se na figura III.30 o espaço das funções objectivo assinalando a tracejado a fronteira não dominada resultante da imposição da limitação  $z_3 \geq 2$ .

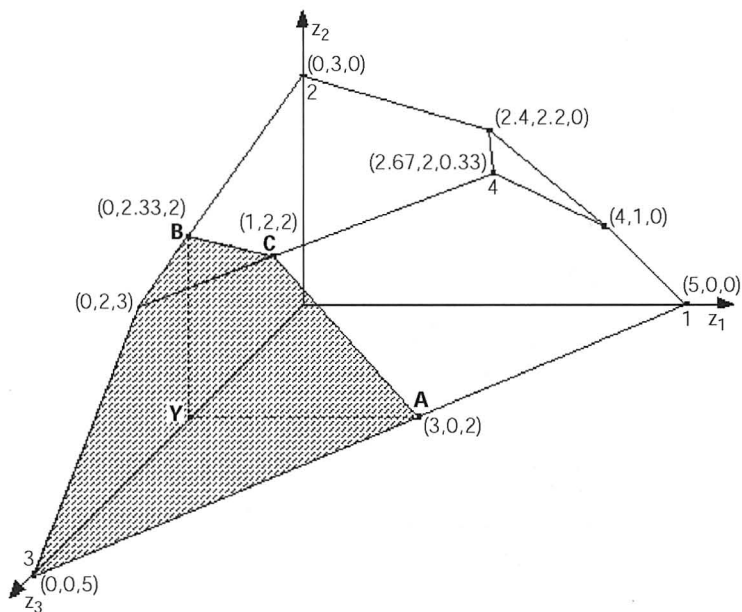


Figura III.30 – Soluções não dominadas que satisfazem  $z_3 \geq 2$ .

A primeira solução óptima obtida a partir da resolução do problema *auxiliar*, e que não é eficiente do problema original com a restrição adicional imposta pelo agente de decisão ( $z_3 \geq 2$ ), está assinalada na figura III.30 por **Y**. As soluções **A**, **B** e **C** são soluções básicas eficientes do problema multiobjectivo que inclui  $z_3 \geq 2$  e, neste caso, são não básicas eficientes para o problema multiobjectivo original.

Suponha-se que o agente de decisão pretende conhecer uma outra solução eficiente que satisfaça a limitação adicional  $z_3 \geq 2$ . Para tal, selecciona um vector de pesos da zona do triângulo a tracejado (reunião das regiões de indiferença da figura III.29) — ver figura III.31.

Se a selecção recair sobre o vector de pesos (0.129, 0.550, 0.321) — figura III.31 — o problema a resolver é:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 0.129 z_1 + 0.550 z_2 + 0.321 z_3 = 0.129 x_1 + 0.550 x_2 + 0.321 x_3 \\ \text{s. a:} \quad &x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ &x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\ &3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

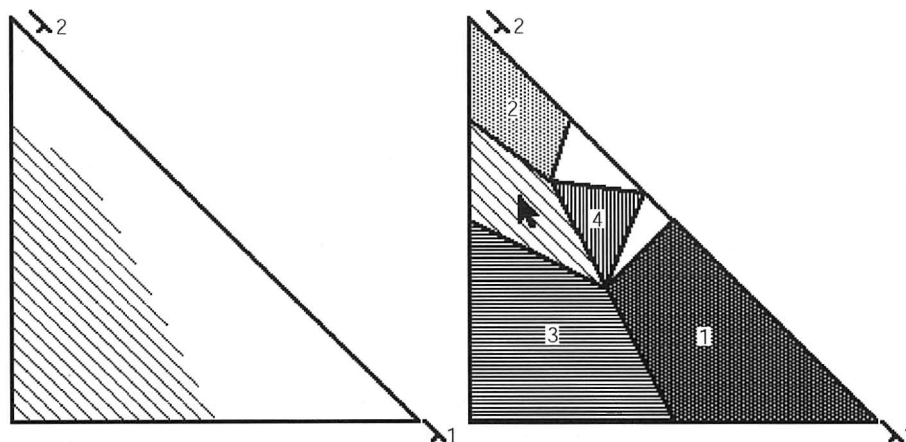


Figura III.31 – Selecção de um vector de pesos para cálculo de uma nova solução que satisfaça  $z_3 \geq 2$ .

Obtém-se uma nova solução eficiente, a solução 5, em que  $\underline{x}^{(5)} = \underline{z}^{(5)} = (0, 2, 3)$  — figura III.32.

Se o agente de decisão pretendesse conhecer todas as outras soluções eficientes que preenchem por completo o triângulo, então seriam encontradas todas as soluções básicas eficientes do problema multiobjectivo. Deve lembrar-se que se trata de um problema não degenerado. Através da análise dos gráficos apresentados pelo TRIMAP, podem também identificar-se faces e arestas não dominadas.

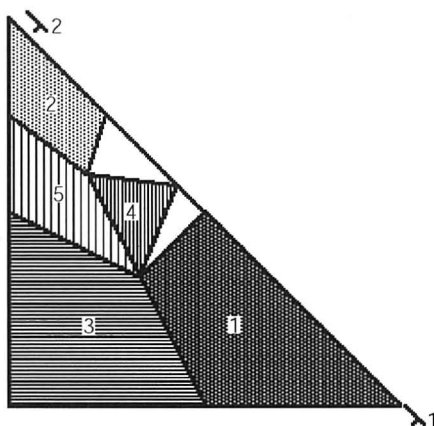


Figura III.32 – Decomposição do espaço dos pesos após o cálculo da solução 5.

A figura III.33 mostra, para este exemplo, a decomposição completa do triângulo. Relembra-se que em problemas sem soluções degeneradas este processo poderia ser utilizado para gerar todo o conjunto das soluções básicas eficientes e, portanto, também todo o conjunto das soluções eficientes, a partir da informação contida nos dois gráficos da figura III.33.

Note-se que, em geral, não é objectivo deste método gerar todo o conjunto das soluções eficientes.

Como vimos atrás, a parte selectiva, da *pesquisa progressiva e selectiva* preconizada pelo TRIMAP, pode materializar-se através da introdução de restrições nos valores das funções objectivo, traduzidas automaticamente, por um procedimento do TRIMAP, para o espaço dos pesos. Contudo, a inspecção visual dos dois gráficos da figura III.33, num dado momento da pesquisa, pode também aconselhar o abandono de determinadas zonas do triângulo ainda não calculadas. De facto, se, por hipótese, nesse instante, as soluções 2, 3 e 4 fossem já conhecidas, e se os respectivos valores das funções

objectivo fossem considerados muito próximos entre si, poderia não valer a pena pesquisar a zona a que corresponde a solução 5. Como a região admissível é um poliedro convexo, os valores das funções objectivo na solução 5 terão de estar abaixo do máximo e acima do mínimo do valor da respectiva função, para os pontos 2, 3 e 4. É claro que a eliminação de sub-áreas do triângulo ainda não pesquisadas não é particularmente interessante para pequenos problemas. Mas, em problemas reais de média ou grande dimensão, numa sub-área como aquela a que corresponde, neste caso, a solução 5, podem existir centenas de bases eficientes. Ora, se os valores das funções objectivo de soluções envolventes, no espaço dos pesos, forem considerados suficientemente próximos, pode evitar-se um grande esforço computacional, prescindindo-se da pesquisa que, nesse caso, poderia ser irrelevante do ponto de vista prático. Veremos mais à frente um exemplo deste tipo, num problema de planeamento energético que vamos apresentar.

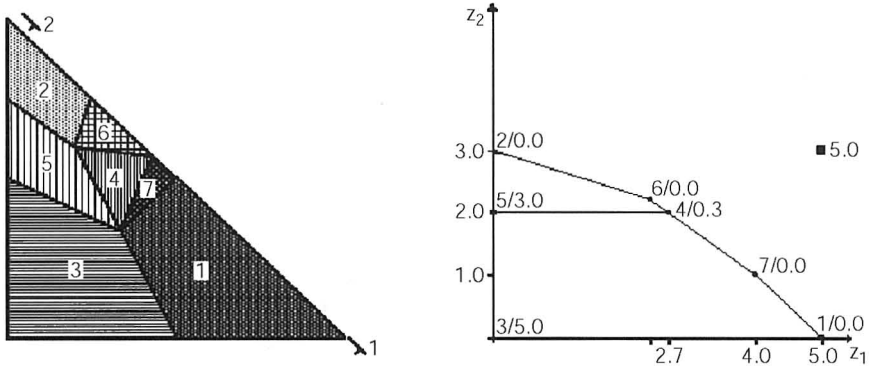


Figura III.33 – Todos os vértices eficientes do problema.

A partir da comparação dos 2 gráficos apresentados na figura III.33, pode-se perceber, em detalhe, a geometria da fronteira eficiente do problema:

Soluções básicas eficientes adjacentes (isto é, ligadas por uma aresta eficiente) possuem regiões de indiferença contíguas. Assim,

- i. a cada ponto (vértice) eficiente no espaço das funções objectivo, corresponde uma sub-área (face) no espaço dos pesos;
- ii. a cada aresta eficiente, corresponde um segmento de recta no espaço dos pesos, comum às regiões de indiferença dos 2 vértices, ligados pela aresta;

iii. a cada face eficiente, corresponde um ponto no espaço dos pesos (isto é, um único vector de pesos estritamente positivos) comum às regiões de indiferença dos vértices eficientes que definem a face.

Neste exemplo, pode-se constatar que há duas faces eficientes, uma definida pelas soluções 2, 6, 4 e 5 e outra definida pelas soluções 1, 3, 5, 4 e 7. A face a que pertencem as soluções 4, 6 e 7 é dominada pelas arestas (4,6) e (4,7). Por inspecção visual do espaço dos pesos, verifica-se que o vector de pesos que corresponde a esta face,  $(0.429, 0.571, 0)$ , tem uma componente nula em  $\lambda_3$ . Note-se que os vértices 6 e 7 são adjacentes, isto é, existe uma aresta admissível que os liga. Uma vez que esta aresta é dominada, a variável que se torna básica, correspondente à deslocação de um deles para o outro, apesar de conduzir a um vértice eficiente, não é uma variável não básica eficiente. Recorde-se que a noção de variável não básica eficiente foi introduzida no método de Zionts e Wallenius.

Para uma melhor compreensão da geometria da região eficiente, apresenta-se, na figura III.34, o espaço dos objectivos tridimensional com a identificação de todas as soluções básicas eficientes.

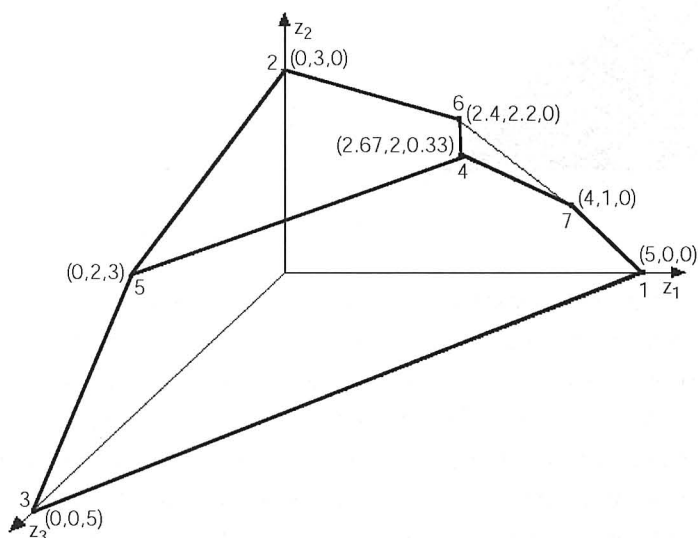


Figura III.34 – Identificação das soluções básicas, das arestas e das faces eficientes no espaço dos objectivos.



(Note-se que, enquanto que a figura III.33 é uma cópia de écran da *package* de computador TRIMAP para Macintosh, a figura III.34 foi elaborada propositadamente para este texto, com vista a uma melhor clarificação dos conceitos.)

Nota: Por razões didácticas optou-se por mostrar a decomposição do espaço dos pesos, deste exemplo, através de uma projecção (figura III.33), em vez da decomposição real (figura III.35). Os cálculos para a representação geométrica das regiões de indiferença são mais claros no caso da projecção, e o tipo de informação que nos é fornecida é idêntico, como já se referiu anteriormente.

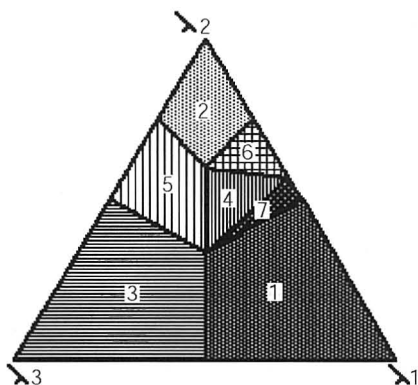


Figura III.35 – Representação real do espaço dos pesos para o problema estudado (cf. projecção na figura III.33).

## 5. MÉTODO INTERVAL CRITERION WEIGHTS

### 5.1. INTRODUÇÃO

O método Interval Criterion Weights (ICW), desenvolvido por Steuer (1977, 1986), é um método interactivo, que reduz progressivamente o cone dos critérios (cone convexo gerado pelos gradientes das funções objectivo). Esta redução é feita, de acordo com as preferências manifestadas pelo agente de decisão, ao escolher que solução prefere de uma amostra de soluções não dominadas, que lhe é apresentada em cada fase de diálogo. Em cada fase de cálculo são optimizadas várias somas ponderadas das funções objectivo.

Por um lado, o método ICW usa vários vectores de pesos regularmente dispersos no espaço dos pesos, para definir um conjunto de somas ponderadas (evitando, assim, que se faça depender a eliciação de informação, sobre as preferências do agente de decisão, da indicação explícita de vectores de pesos). Por outro lado, este método também não faz apelo à especificação de valores satisfatórios para as funções objectivo (como acontece, por exemplo, no STEM). A informação disponibilizada pelo agente de decisão, ao escolher a solução da amostra que corresponde mais de perto às suas preferências, é usada para contrair o cone dos critérios em torno do gradiente da função objectivo usada para calcular essa solução, resultando o cone de critérios reduzido para a interacção (ou iteração) seguinte. O cone dos critérios é assim gradualmente contraído em torno de direcções específicas, até se focar a pesquisa numa pequena parte da região admissível, que se supõe conter o vértice eficiente com maior valor para a função utilidade implícita do agente de decisão.

Nota: A apresentação deste método não se inicia com um parágrafo introdutório de noções fundamentais pelas seguintes razões:

1. A redução progressiva da região a pesquisar é baseada na contracção do cone dos critérios. A fundamentação do método algébrico, usado para reduzir o cone dos critérios, encontra-se exposta detalhadamente em Steuer (1986) e transcende os objectivos deste livro, já que não é específico da programação linear multicritério. Neste texto, optou-se por apresentar a sua aplicação, sem fundamentar o cálculo das matrizes T usadas no processo de contracção.
2. A informação requerida do agente de decisão, nas fases de diálogo, diz respeito às suas preferências de entre várias alternativas propostas. Os aspectos cognitivos relacionados com este tipo de escolha referem-se no capítulo IV. O cálculo das soluções eficientes a propor ao agente de decisão baseia-se na optimização de somas pesadas das funções objectivo, com a especificidade de se usar um processo especial, para garantir que em cada iteração se obtêm exactamente  $2p+1$  vectores de pesos (em que  $p$  é o número de funções objectivo), dispersos no espaço dos pesos. O processo de determinação desses vectores de pesos

apresenta-se durante a exposição do algoritmo. Para mais detalhes ver Steuer (1986). Deve ainda notar-se que o número de soluções eficientes com que se confronta o agente de decisão, em cada fase de diálogo, é fixo e, em geral, menor do que o calculado pelo processo referido. Tem, portanto, lugar um processo de filtragem que se refere brevemente durante a aplicação do algoritmo. A discussão detalhada sobre este e outros processos de filtragem também está para além dos objectivos deste trabalho, dedicando-lhe Steuer (1986) um capítulo específico.

## 5.2. ALGORITMO ICW (*INTERVAL CRITERION WEIGHTS*)

Apresenta-se uma versão simplificada, em relação à apresentada em Steuer (1986).

### *Passo 1*

Inicialmente são especificados alguns parâmetros do algoritmo (segundo as indicações dadas em Steuer, 1986, cap. 13). O agente de decisão é chamado a especificar:

- o tamanho  $Q$  da amostra de soluções não dominadas, a apresentar em cada fase de diálogo ( $p \leq Q < 2p + 1$ );
- o número de iterações  $I$  ( $I \approx p$ ).

Steuer sugere ainda a normalização prévia dos objectivos (devido às diferentes ordens de grandeza), multiplicando os coeficientes das variáveis de decisão, em cada função objectivo, por uma potência de 10 apropriada (em vez de usar uma qualquer norma  $L_p$ , como acontece noutros casos).

### *Passo 2*

Em cada iteração formam-se  $2p+1$  combinações convexas dos gradientes das funções objectivo, tendo em vista obter vértices não dominados bem dispersos sobre a região não dominada (relativa ao cone dos critérios da iteração actual).

As combinações convexas dos gradientes das funções objectivo são dadas pelo seguinte conjunto de vectores de pesos:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_1 &= (1, 0, \dots, 0) && \text{combinações convexas extremas} \\ \underline{\lambda}_2 &= (0, 1, \dots, 0) && \text{(conduzem ao óptimo de cada função objectivo)} \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{\lambda}_p &= (0, 0, \dots, 1) \\ \underline{\lambda}_{p+1} &= \left(\frac{1}{p^2}, r, \dots, r\right) && \text{combinações convexas não centrais} \\ \underline{\lambda}_{p+2} &= \left(r, \frac{1}{p^2}, \dots, r\right) \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{\lambda}_{2p} &= \left(r, r, \dots, \frac{1}{p^2}\right) \\ \underline{\lambda}_{2p+1} &= \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right) && \text{combinação convexa central} \end{aligned}$$

em que  $r = \frac{p+1}{p^2}$ .

Nas combinações convexas extremas, usa-se  $1 - \epsilon$  em vez de 1, para os pesos a 1, e  $0 + \epsilon/p$  em vez de zero, para os pesos a zero (as razões para se evitar a fronteira do espaço dos pesos foram já explicadas atrás).

*Passo 3*

Em cada fase de cálculo são resolvidos os seguintes  $2p+1$  problemas lineares:

$$\max_{x \in S} \left\{ \underline{\lambda}_k C_h x \right\} \quad k = 1, \dots, 2p+1$$

onde

$$C_h = \begin{cases} T_{h-1} T_{h-2} \dots T_1 C & \text{para } h > 1 \\ C & \text{para } h = 1 \end{cases}$$

ou seja, na iteração inicial,  $h=1$ , a matriz dos coeficientes das funções objectivo é a matriz inicial  $C$ , eventualmente normalizada (isto é, transformando  $C$  em  $C' = N C$ , onde  $N$  é a matriz diagonal, de dimensões  $p \times p$ , cujos elementos são os factores de normalização de cada linha de  $C$ ).

Note-se que a operação de normalização não altera o cone dos gradientes dos critérios, embora tenha influência no gradiente da função objectivo ponderada, e, conseqüentemente, nas soluções eficientes resultantes de cada optimização. Existe uma matriz  $T$  definida para cada uma das combinações dos pesos e a pré-multiplicação de  $C$ , por sucessivas matrizes  $T$ , vai conduzindo, iteração a iteração, aos novos coeficientes das funções objectivo.

#### *Passo 4*

As soluções eficientes, obtidas optimizando as  $2p+1$  somas pesadas das funções objectivo calculadas no passo 3, são filtradas para obter uma amostra de tamanho  $Q$ , e o agente de decisão é chamado a escolher aquela que melhor corresponde às suas preferências.

A filtragem tem por objectivo seleccionar os  $Q$  pontos *mais distintos*, para constituir a amostra referida anteriormente. Usa-se uma técnica de cálculo específica (para detalhes ver Steuer, 1986, cap. 9, que sugere as seguintes técnicas de filtragem: *primeiro ponto*, *ponto mais próximo* e *ponto mais afastado*).

Com esta informação constrói-se então a matriz dos coeficientes das funções objectivo da iteração seguinte, através da pré-multiplicação por uma matriz  $T$ , resultando um novo cone dos gradientes contraído e deslocado em relação ao anterior. O novo cone contraído é, tendencialmente, centrado na combinação convexa de gradientes que originou a solução preferida pelo agente de decisão, na iteração agora terminada. Este cone tem as mesmas proporções geométricas e orientação do cone contraído da iteração anterior, constituindo um sub-conjunto deste. Contudo, a sua secção é  $1/p$  da secção do anterior.

Se ainda não foram efectuadas as  $l$  iterações especificadas pelo agente de decisão, regressa-se ao passo 3. Caso contrário, vai-se para o passo 5.

#### *Passo 5*

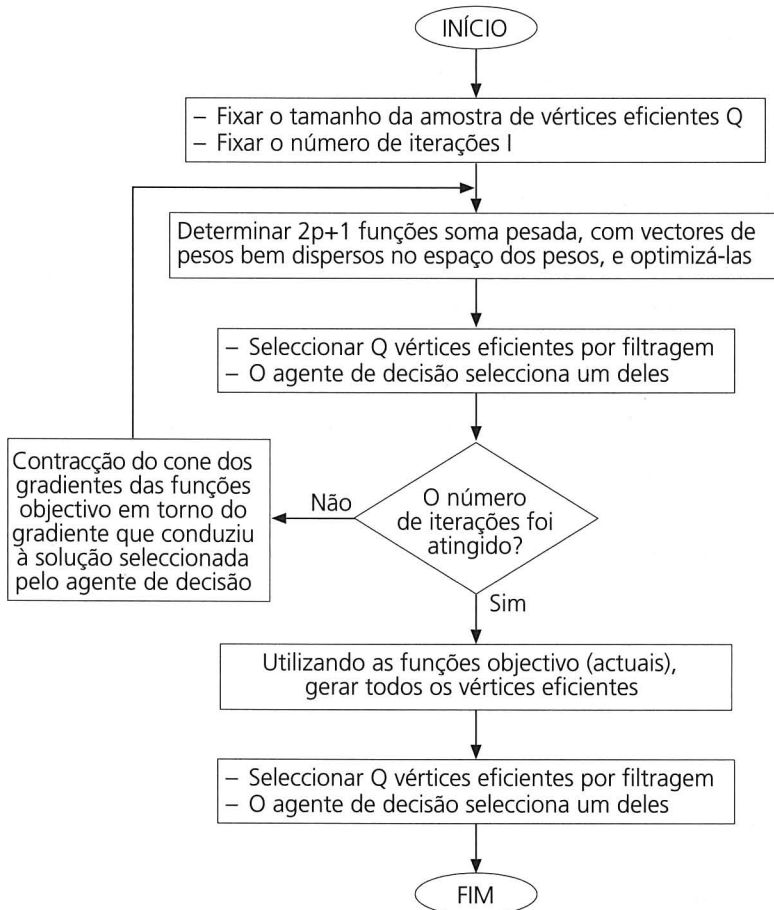
Utilizando as funções objectivo *actuais*, geram-se todos os vértices eficientes.

#### *Passo 6*

Por filtragem, determina-se uma amostra de dimensão  $Q$  dos vértices calculados no passo anterior. Finalmente, o agente de decisão procede à escolha de uma destas soluções.

Nota: À medida que o cone dos critérios se vai contraindo gradualmente, em cada iteração, de acordo com as preferências do agente de decisão, o número de vértices não dominados alcançáveis é cada vez menor. Por esta razão, Steuer propõe que, ao fim do número pré-especificado de iterações  $I$ , seja aplicado um algoritmo para calcular todos os vértices eficientes, considerando a matriz dos objectivos actual,  $C_I$ . Estas soluções serão novamente filtradas para apresentar uma amostra final ao agente de decisão, para que seleccione a solução final.

### 5.3. DIAGRAMA DOS BLOCOS ESQUEMÁTICO SOBRE O ICW



#### 5.4. COMENTÁRIOS FINAIS

Este método tem a vantagem de calcular, em cada iteração, soluções potencialmente bem diferenciadas, visto que, para o cálculo, se parte de funções objectivo somas ponderadas, em que os vectores de pesos são bem dispersos no espaço dos pesos. Contudo, é demasiado rígido em certos aspectos, fixando, por exemplo, o número máximo de iterações e não permitindo rever decisões tomadas em fases de diálogo anteriores. É claro que estes aspectos têm em vista a obtenção de um método em que o esforço computacional não seja demasiado elevado. Por outro lado, não é muito fácil (do ponto de vista cognitivo) seleccionar, em cada iteração, uma alternativa em  $Q$ .

Por fim, convém notar que o autor constrói o método no pressuposto de que existe uma função utilidade implícita do agente de decisão, procurando garantir a convergência para o vértice que mais se aproxima do óptimo dessa função.

#### 5.5. EXEMPLO ILUSTRATIVO DO MÉTODO *INTERVAL CRITERION WEIGHTS*

Considere-se o seguinte problema de programação linear com 3 funções objectivo:

$$\begin{aligned} \max \quad z_1 &= 5x_1 + x_2 + x_3 \\ \max \quad z_2 &= 4.5x_2 \\ \max \quad z_3 &= x_1 + 4x_3 \\ \text{s. a:} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 9 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 16 \\ 3x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ x_3 &\leq 4.5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ região admissível } S$$

A figura III.36 mostra o espaço das variáveis de decisão do problema, onde estão também representados (usando uma escala diferente) os gradientes das 3 funções objectivo ( $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ).

### Passo 1

Inicialmente, o agente de decisão é chamado a especificar o tamanho da amostra de soluções eficientes,  $Q$ , e o número de iterações  $I$ . O autor sugere que  $Q$  deve estar compreendido entre  $p$  (número de funções objectivo do problema) e  $2p+1$  (número de combinações convexas dos gradientes das funções objectivo usadas em cada iteração, para o cálculo de soluções eficientes).

Suponha-se que o agente de decisão pretende conhecer todas as soluções calculadas em cada iteração. Desta forma,  $Q=2p+1=7$ , o que significa que não haverá nenhum processo de filtragem de soluções<sup>14</sup>.

Considere-se o número de iterações  $I=3$ .

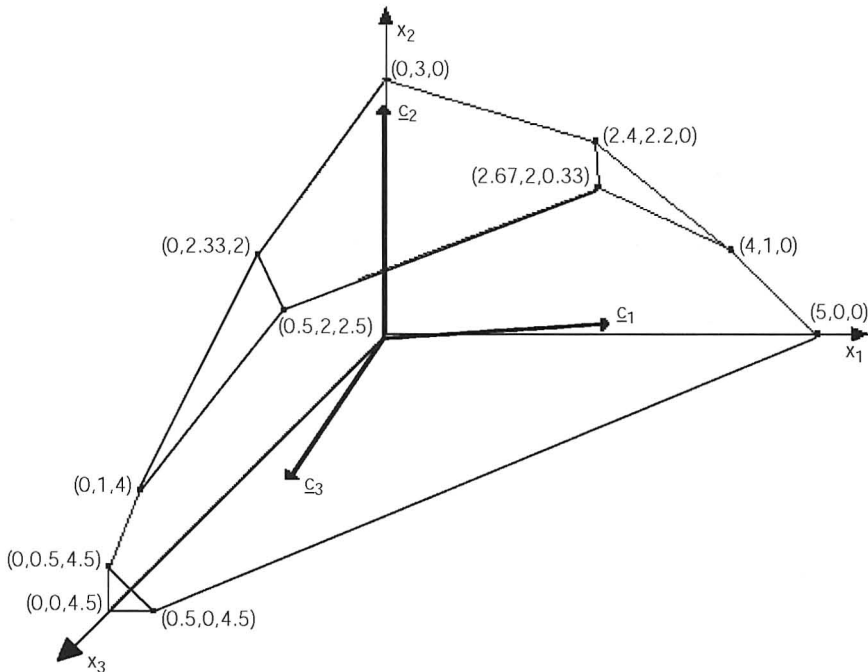


Figura III.36 – Região admissível no espaço das variáveis de decisão.

<sup>14</sup> A filtragem tem por objectivo seleccionar uma amostra de  $Q$  pontos, considerados os *mais distintos*, de um máximo possível de  $2p+1$  soluções distintas calculadas em cada iteração. Pretende-se evitar que o agente de decisão tenha que comparar um número elevado de soluções. Para detalhes sobre as diversas técnicas que podem ser usadas, ver Steuer (1986, cap. 9).



Passo 2

Constrói-se um conjunto de  $2p+1=7$  vectores de pesos bem dispersos (figura III.37) a partir dos quais se formarão combinações convexas dos gradientes das funções objectivo:

$$\underline{\lambda}_1 = (1, 0, 0) \quad (\text{combinações convexas extremas}^{15})$$

$$\underline{\lambda}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\underline{\lambda}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\underline{\lambda}_4 = \left(\frac{1}{p^2}, r, r\right) = (0.111, 0.444, 0.444) \quad (\text{combinações convexas não centrais})$$

$$\underline{\lambda}_5 = \left(r, \frac{1}{p^2}, r\right) = (0.444, 0.111, 0.444)$$

$$\underline{\lambda}_6 = \left(r, r, \frac{1}{p^2}\right) = (0.444, 0.444, 0.111)$$

$$\underline{\lambda}_7 = \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) = (0.333, 0.333, 0.333) \quad (\text{combinação convexa central}),$$

em que  $r = \frac{p+1}{p^2} = \frac{4}{9} = 0.444$ .

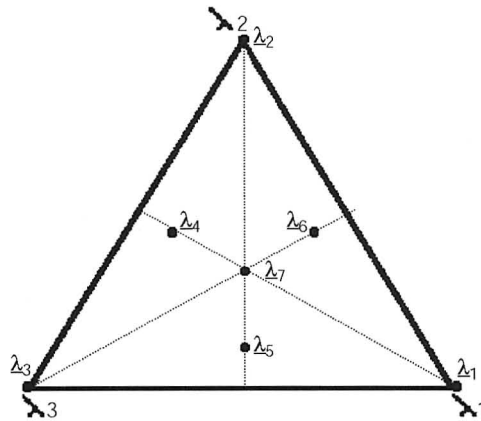


Figura III.37 – Vectores de pesos pré-determinados, bem dispersos no espaço dos pesos.

<sup>15</sup> Na prática utilizam-se vectores de pesos em que os zeros são substituídos por um valor positivo muito pequeno, por forma a garantir que as soluções obtidas no passo 3, sejam todas (estritamente) eficientes.

1ª ITERAÇÃO:

*Passo 3*

Como se está a executar a 1ª iteração, a matriz das funções objectivo  $C_1$  é a matriz inicial  $C$ :

$$C_1 = C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4.5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Neste problema não é necessário normalizar os coeficientes das funções objectivo, porque eles já são da mesma ordem de grandeza.

Resolvem-se os sete problemas lineares seguintes:

$$\max_{\underline{x} \in S} \lambda_k C_1 \underline{x} \quad k = 1, \dots, 7 \quad (P_{\lambda_k})$$

O primeiro problema a resolver ( $P_{\lambda_1}$ ) é, então:

$$\max [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4.5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s. a: } \underline{x} \in S$$

A solução óptima deste problema (que é solução eficiente do problema multiobjectivo) é designada por solução 1:  $\underline{x}_1 = (5, 0, 0)$ ,  $\underline{z}_1 = (25, 0, 5)$ .

Usando os outros vectores de pesos (de  $\lambda_2$  a  $\lambda_7$ ), resolvem-se os restantes 6 problemas do tipo ( $P_{\lambda_k}$ ). As soluções eficientes encontradas são:

$$(P_{\lambda_2}) - \text{solução 2} \quad \underline{x}_2 = (0, 3, 0) \quad \underline{z}_2 = (3, 13.5, 0)$$

$$(P_{\lambda_3}) - \text{solução 3} \quad \underline{x}_3 = (0.5, 0, 4.5) \quad \underline{z}_3 = (7, 0, 18.5)$$

$$(P_{\lambda_4}) - \text{solução 4} \quad \underline{x}_4 = (0, 1, 4) \quad \underline{z}_4 = (5, 4.5, 16)$$

$$(P_{\lambda_5}) - \text{solução 1} \quad \underline{x}_1 = (5, 0, 0) \quad \underline{z}_1 = (25, 0, 5)$$

$$(P_{\lambda_6}) - \text{solução 5} \quad \underline{x}_5 = (4, 1, 0) \quad \underline{z}_5 = (21, 4.5, 4)$$

$$(P_{\lambda_7}) - \text{solução 1} \quad \underline{x}_1 = (5, 0, 0) \quad \underline{z}_1 = (25, 0, 5)$$

Note-se que, apesar de se resolverem sete problemas lineares, apenas se obtiveram cinco soluções eficientes distintas, dado que a solução de ( $P_{\lambda_5}$ ) e a de ( $P_{\lambda_7}$ ) é a mesma de ( $P_{\lambda_1}$ ).

A figura III.38 apresenta as regiões de indiferença destas soluções no espaço dos pesos.

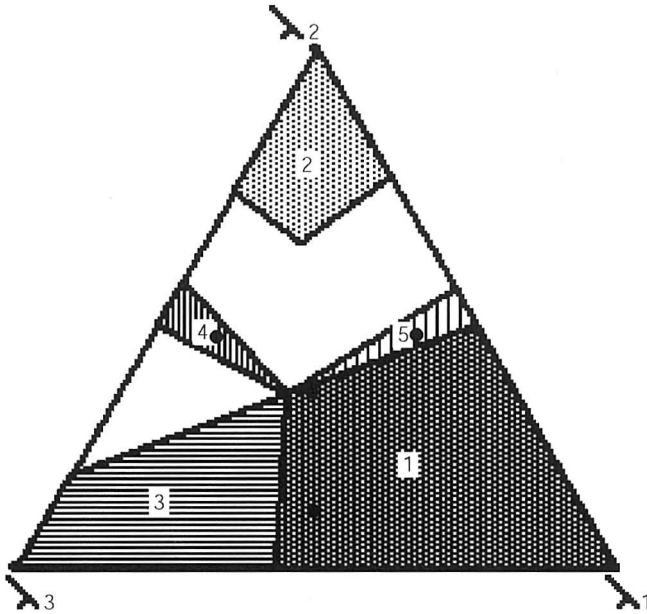


Figura III.38 – Regiões de indiferença das soluções calculadas na 1ª iteração.

*Passo 4*

As soluções calculadas no passo 3 são apresentadas ao agente de decisão, para ele escolher a que *melhor* corresponde às suas preferências.

Suponha-se que o agente de decisão escolhe a solução 4, obtida a partir da combinação convexa dos gradientes das funções objectivo correspondente ao vector de pesos  $\underline{\lambda}_4=(0.111,0.444,0.444)$ .

A este vector de pesos corresponde a matriz  $T^{(4)}$ , usada para obter o cone dos critérios da próxima iteração, contraído e deslocado em relação ao da iteração que agora termina.

A matriz dos objectivos da segunda iteração é obtida, a partir da matriz da iteração actual, fazendo  $C_2 = T_1 C_1$ , em que  $T_1 = T^{(4)}$ .

A matriz  $T_1$  é obtida de modo a que o novo cone dos critérios seja contraído em torno de  $\underline{\lambda}_4 C_1$ . Como já se disse, existe uma matriz  $T$  pré-definida para cada uma das  $2p+1$  combinações convexas possíveis (para detalhes técnicos ver (Steuer, 1986, cap. 9)):

$$\underline{\lambda}_1: T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 1-q & 0 \\ q & 0 & 1-q \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda}_2: T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1-q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 1-q \end{bmatrix}$$

(combinações convexas extremas)

$$\underline{\lambda}_3: T^{(3)} = \begin{bmatrix} 1-q & 0 & q \\ 0 & 1-q & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda}_4: T^{(4)} = \begin{bmatrix} 1-q & \frac{q}{a} & \frac{q}{a} \\ 0 & 1-(p-2)\frac{q}{a} & \frac{q}{a} \\ 0 & \frac{q}{a} & 1-(p-2)\frac{q}{a} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda}_5: T^{(5)} = \begin{bmatrix} 1-(p-2)\frac{q}{a} & 0 & \frac{q}{a} \\ \frac{q}{a} & 1-q & \frac{q}{a} \\ \frac{q}{a} & 0 & 1-(p-2)\frac{q}{a} \end{bmatrix}$$

(combinações convexas não centrais)

$$\underline{\lambda}_6: T^{(6)} = \begin{bmatrix} 1-(p-2)\frac{q}{a} & \frac{q}{a} & 0 \\ \frac{q}{a} & 1-(p-2)\frac{q}{a} & 0 \\ \frac{q}{a} & \frac{q}{a} & 1-q \end{bmatrix}$$

226

$$\underline{\lambda}_7: T^{(7)} = \begin{bmatrix} 1-q\frac{a}{p} & \frac{q}{p} & \frac{q}{p} \\ \frac{q}{p} & 1-q\frac{a}{p} & \frac{q}{p} \\ \frac{q}{p} & \frac{q}{p} & 1-q\frac{a}{p} \end{bmatrix}$$

(combinação convexa central)

em que  $a=p-1$  e  $q=1-p^{-\frac{1}{a}}$

Para  $p=3$ , vem:

$$T_1 = T^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.577 & 0.211 & 0.211 \\ 0 & 0.789 & 0.211 \\ 0 & 0.211 & 0.789 \end{bmatrix}$$

2ª ITERAÇÃO:

Passo 3

A matriz das funções objectivo, correspondente ao cone contraído, é dada por:

$$C_2 = T_1 C_1 = \begin{bmatrix} 0.577 & 0.211 & 0.211 \\ 0 & 0.789 & 0.211 \\ 0 & 0.211 & 0.789 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4.5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.098 & 1.528 & 1.423 \\ 0.211 & 3.549 & 0.845 \\ 0.789 & 0.951 & 3.155 \end{bmatrix}$$

Na figura III.39 estão assinaladas as soluções já conhecidas e representados os gradientes das funções objectivo do cone contraído relativos à matriz  $C_2$  (a que correspondem os vectores  $\underline{c}_1^2$ ,  $\underline{c}_2^2$  e  $\underline{c}_3^2$ ).

Resolvem-se os sete problemas lineares seguintes:

$$\max_{\underline{x} \in S} \lambda_k C_2 \underline{x} \quad k = 1, \dots, 7 \quad (P_{\lambda_k})$$

As soluções eficientes obtidas são:

$(P_{\lambda_1})$ – solução 1	$\underline{x}_1 = (5, 0, 0)$	$\underline{z}_1 = (25, 0, 5)$
$(P_{\lambda_2})$ – solução 2	$\underline{x}_2 = (0, 3, 0)$	$\underline{z}_2 = (3, 13.5, 0)$
$(P_{\lambda_3})$ – solução 6	$\underline{x}_6 = (0, 0.5, 4.5)$	$\underline{z}_6 = (5, 2.24, 18)$
$(P_{\lambda_4})$ – solução 4	$\underline{x}_4 = (0, 1, 4)$	$\underline{z}_4 = (5, 4.5, 16)$
$(P_{\lambda_5})$ – solução 3	$\underline{x}_3 = (0.5, 0, 4.5)$	$\underline{z}_3 = (7, 0, 18.5)$
$(P_{\lambda_6})$ – solução 7	$\underline{x}_7 = (2.667, 2, 0.333)$	$\underline{z}_7 = (15.667, 9, 4)$
$(P_{\lambda_7})$ – solução 4	$\underline{x}_4 = (0, 1, 4)$	$\underline{z}_4 = (5, 4.5, 16)$

A figura III.40 apresenta as regiões de indiferença destas soluções:

- no espaço dos pesos correspondente ao cone contraído;
- no espaço dos pesos original, onde é também visível o espaço dos pesos do cone contraído (a tracejado), sobreposto ao original.

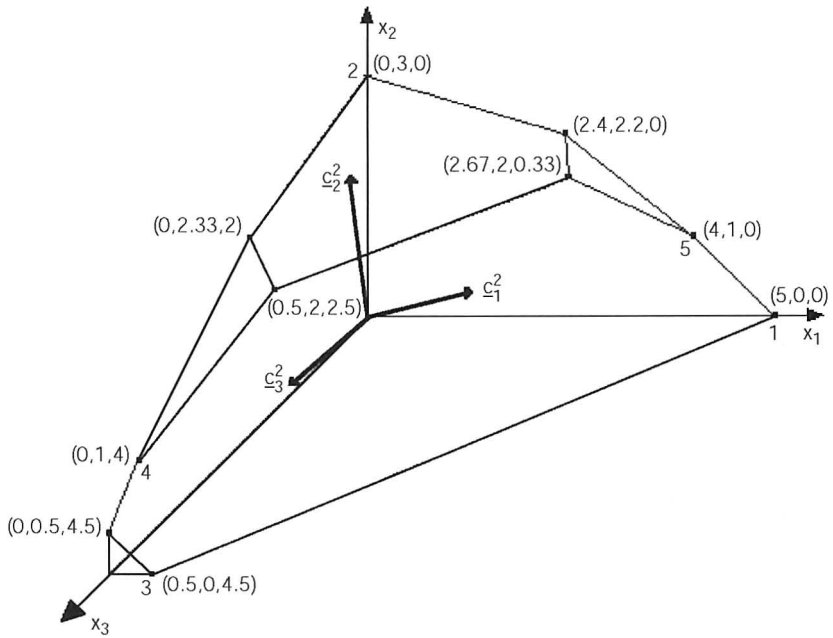
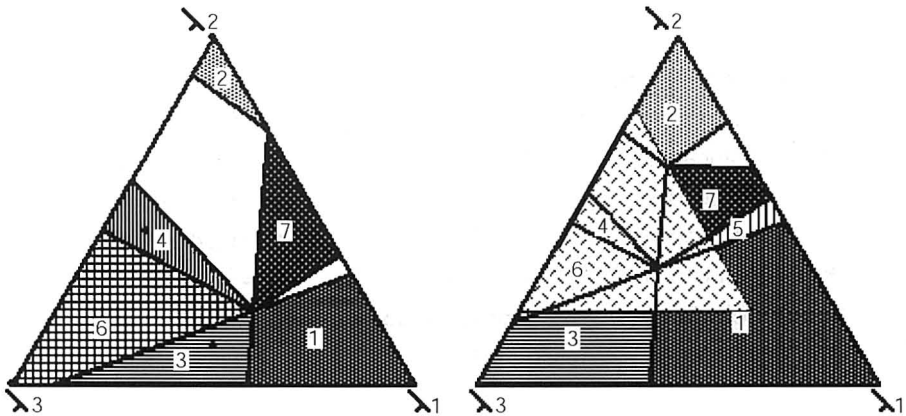


Figura III.39 – Gradientes das funções objetivo do cone contraído da 2ª iteração.



(a) Espaço dos pesos correspondente ao cone contraído.

(b) Espaço dos pesos original (onde é também visível, a tracejado, o espaço dos pesos correspondente ao cone contraído).

Figura III.40 – Regiões de indiferença das soluções da 2ª iteração.

#### Passo 4

As soluções calculadas no passo 3 são apresentadas ao agente de decisão, para ele escolher a que melhor corresponde às suas preferências.

Suponha-se que o agente de decisão escolhe a solução 6, obtida a partir da combinação convexa dos gradientes dos objectivos do cone contraído, para o vector de pesos  $\underline{\lambda}_3 = (0,0,1)$ . Com esta informação é obtida a matriz de contracção da 2ª iteração,  $T_2$ :

$$T_2 = T^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.577 & 0 & 0.423 \\ 0 & 0.577 & 0.423 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes das funções objectivo, para a próxima iteração, é  $C_3 = T_2 C_2 = T_2 T_1 C$ , resultando um novo cone dos critérios contraído e deslocado em relação ao anterior.

3ª ITERAÇÃO:

#### Passo 3

A matriz das funções objectivo  $C_3$ , correspondente ao cone contraído, é dada por<sup>16</sup>:

$$C_3 = T_2 C_2 = \begin{bmatrix} 0.577 & 0 & 0.423 \\ 0 & 0.577 & 0.423 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.098 & 1.528 & 1.423 \\ 0.211 & 3.549 & 0.845 \\ 0.789 & 0.951 & 3.155 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.122 & 1.284 & 2.155 \\ 0.455 & 2.451 & 1.821 \\ 0.789 & 0.951 & 3.155 \end{bmatrix}$$

Na figura III.41 estão assinaladas as soluções já conhecidas, e representados os gradientes das funções objectivo do cone contraído, relativos à matriz  $C_3$ .

Resolvem-se os sete problemas lineares seguintes:

$$\max_{\underline{x} \in S} \underline{\lambda}_k C_3 \underline{x} \quad k = 1, \dots, 7 \quad (P_{\underline{\lambda}_k})$$

<sup>16</sup> Com os valores aqui apresentados, o produto destas duas matrizes é ligeiramente diferente da matriz do lado direito da igualdade. Lembra-se que estas discrepâncias se devem ao facto de os cálculos terem sido efectuados com uma precisão superior.

As soluções eficientes encontradas são:

$(P_{\lambda_1})$  – solução 3

$(P_{\lambda_2})$  – solução 4

$(P_{\lambda_3})$  – solução 6

$(P_{\lambda_4})$  – solução 6

$(P_{\lambda_5})$  – solução 3

$(P_{\lambda_6})$  – solução 6

$(P_{\lambda_7})$  – solução 6

todas já conhecidas das iterações anteriores. Contudo, deve notar-se que existem vértices eficientes ainda não calculados até esta fase de pesquisa (figura III.42-b).

A figura III.42 apresenta as regiões de indiferença destas soluções:

(a) no espaço dos pesos correspondente ao cone contraído;

(b) no espaço dos pesos original, onde é também visível o espaço dos pesos do cone contraído (a tracejado), sobreposto ao original.

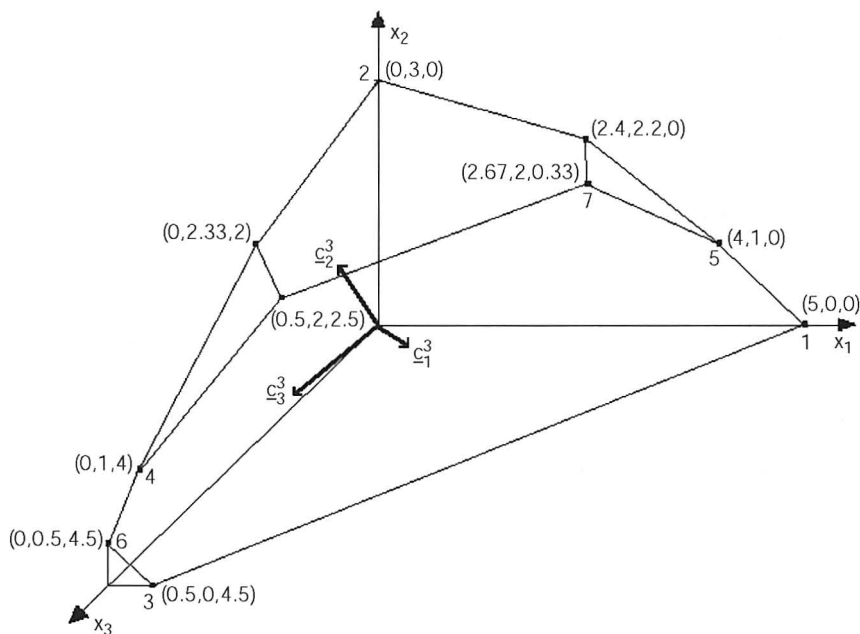


Figura III.41 – Gradientes das funções objectivo do cone contraído da 3ª iteração.



Como já foram efectuadas três iterações, o processo iterativo termina.

O autor do método propõe que no final seja aplicado um algoritmo para calcular todas as soluções básicas eficientes (portanto, também todos os vértices eficientes) considerando as funções objectivo do cone contraído final (matriz  $C_3$ ) – *Passo 5*. No entanto, neste caso, não são requeridos quaisquer cálculos adicionais. Como se pode comprovar por observação da figura III.42, as regiões de indiferença das soluções 3, 4 e 6 preenchem por completo o espaço dos pesos correspondente ao cone contraído, o que significa que estas soluções formam o conjunto de todas as soluções básicas eficientes para a matriz  $C_3$ .

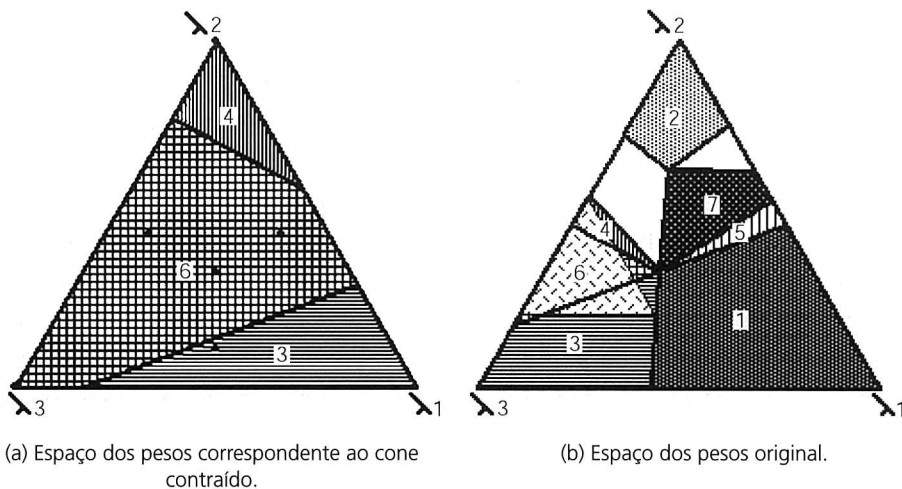


Figura III.42 – Regiões de indiferença das soluções da 3ª iteração.

#### Passo 6

Neste caso, o número de soluções obtidas não justifica a aplicação de um processo de filtragem. O agente de decisão deverá então escolher uma solução de compromisso de entre as soluções 3, 4 e 6.

## 6. MÉTODO PARETO RACE

### 6.1. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

O método Pareto Race, proposto por Korhonen e Wallenius (1988), é baseado em trabalhos de Korhonen (1987) e de Korhonen e Laakso (1986a, 1986b). Trata-se de um método de pesquisa direccional, que permite ao agente de decisão mover-se livremente sobre a região eficiente. A informação requerida ao agente de decisão consiste fundamentalmente na especificação das funções objectivo a melhorar alterando a direcção do movimento. As soluções eficientes são obtidas por meio da optimização de uma função escalarizante, construída a partir de um ponto de referência, e utilizando programação paramétrica em relação aos termos independentes das restrições.

A partir de níveis de aspiração para os valores das funções objectivo, especificados inicialmente pelo agente de decisão, é construída uma direcção de referência. Esta direcção parte de um ponto no espaço dos objectivos, e oferece uma variação nos valores das funções objectivo, que está de acordo com as preferências do agente de decisão. A direcção de referência é, então, projectada sobre o conjunto das soluções eficientes utilizando uma métrica de Tchebycheff pesada, gerando uma trajectória (sub-conjunto das soluções eficientes) que é apresentada ao agente de decisão. O agente de decisão pode assim percorrer a fronteira eficiente, controlando a direcção do movimento (privilegiando as funções objectivo à sua vontade) e a velocidade (permitindo obter soluções mais ou menos próximas umas das outras), como se estivesse a conduzir um automóvel (daí a denominação Pareto Race) sobre essa superfície.

De acordo com a programação por metas generalizada, uma restrição pode ser encarada como uma meta não flexível. O método Pareto Race considera o conjunto  $G$  das metas flexíveis, em que o termo independente representa o nível de aspiração para cada função objectivo, e o conjunto  $R$  das metas não flexíveis (restrições).

Inicialmente o agente de decisão é chamado a especificar os valores dos níveis de aspiração para cada função objectivo, que constituem o ponto de referência inicial. Com esta informação é definido o vector  $\underline{b}$ , de dimensão  $m+p$ , que contém os valores dos termos independentes das restrições

(m metas não flexíveis), e os níveis de aspiração de cada função objectivo (p metas flexíveis).

As gamas de variação pretendidas para os valores das funções objectivo ( $\Delta b_i$ ) são também especificados pelo agente de decisão. Estes valores condicionam implicitamente a importância relativa inicial de cada função objectivo, através de:

$$w_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \in R \\ \Delta b_k & \text{se } k \in G \end{cases}$$

$\underline{d}$  é o vector de referência que controla a direcção do movimento. Inicialmente  $\underline{d} = \underline{w}$ .

A normalização das direcções é conseguida mantendo s constante, em todas as iterações:

$$s = \sum_k d_k.$$

Para calcular soluções eficientes que resultam da projecção da semi-recta  $\underline{b} + t \underline{d}$ , resolve-se o seguinte problema de programação linear paramétrica:

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\{ v - \varepsilon \sum_{k=1}^p c_k \underline{x} \right\} && (P_{\varepsilon}) \\ \text{s. a: } & A_{i \bullet} \underline{x} = b_i && i \in R \\ & c_j \underline{x} + v w_j \geq b_j + t d_j && j \in G \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \\ & v \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

em que  $\varepsilon$  é um número positivo muito pequeno e o termo  $(\varepsilon \sum_{k=1}^p c_k \underline{x})$  é uma perturbação destinada a forçar a escolha de uma solução eficiente (no caso de existirem óptimos alternativos para o problema anterior sem o termo relativo à perturbação). Omitindo este termo, apenas há a garantia da solução obtida ser fracamente eficiente. Os vectores  $A_{i \bullet}$ ,  $i=1, \dots, m$ , contêm os coeficientes das variáveis de decisão nas restrições (metas não flexíveis), bem como os coeficientes associados às variáveis auxiliares necessárias para a conversão de todas as desigualdades em igualdades. As restrições  $A_{i \bullet} \underline{x} = b_i$ ,  $i \in R$ , são equivalentes a  $A_{i \bullet} \underline{x} = b_i + t d_i$ ,  $i \in R$ , dado que  $d_i = 0$  para  $i \in R$ .

Note-se que a variável  $v$  não tem restrição de sinal, visto que o ponto de referência pode estar dentro ou fora da região admissível. Como é sabido, por razões computacionais pode fazer-se  $v = v^+ - v^-$ , com  $v^+, v^- \geq 0$ .

O parâmetro escalar  $t$  é o passo ao longo da direcção, que controla a velocidade do movimento.

Nota: A projecção do ponto de referência sobre a região não dominada é obtida minimizando uma função de escalarização definida utilizando uma métrica de Tchebycheff pesada. O cálculo da trajectória sobre a região não dominada é feito utilizando programação paramétrica relativamente aos segundos membros de restrições. Seja o ponto de referência  $\underline{b}_G$  (i.e. a parte do vector  $\underline{b}$  de componentes  $b_j$ , tais que  $j \in G$ );  $\underline{\lambda}$  – vector dos pesos relativos à métrica de Tchebycheff (note-se que, neste contexto, aquilo a que chamamos pesos, diz respeito, essencialmente, a factores de escala). A função de escalarização utilizada será:

$$\max_{j=1, \dots, p} \left\{ \lambda_j (b_j - c_j \underline{x}) \right\} - \varepsilon \sum_{k=1}^p c_k \underline{x}$$

Por razões análogas ao explicado anteriormente,

$$\min \left\{ \max_{j=1, \dots, p} \left\{ \lambda_j (b_j - c_j \underline{x}) \right\} - \varepsilon \sum_{k=1}^p c_k \underline{x} \right\}$$

s. a:  $A_{i \bullet} \underline{x} = b_i \quad i \in R$   
 $\underline{x} \geq \underline{0}$

é equivalente a:

$$\min \left\{ v - \varepsilon \sum_{k=1}^p c_k \underline{x} \right\}$$

s. a:  $A_{i \bullet} \underline{x} = b_i \quad i \in R$   
 $c_j \underline{x} + \frac{v}{\lambda_j} \geq b_j \quad j \in G$   
 $\underline{x} \geq \underline{0}, v \in \Re$

Este último problema pode escrever-se:

$$\min \left\{ v - \varepsilon \sum_{k=1}^p c_k \underline{x} \right\}$$

$$\text{s. a: } A_{i \cdot} \underline{x} = b_i \quad i \in R$$

$$\lambda_j (b_j - c_j \underline{x}) \leq v \quad j \in G$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}, v \in \mathfrak{R}$$

Note-se que, é fácil ver que se trata do mesmo problema resolvido

no método STEM, a menos do termo  $\varepsilon \sum_{k=1}^p c_k \underline{x}$  da função objectivo. Este termo também pode ser introduzido no método STEM com o mesmo propósito que aqui o justifica.

Voltando à forma anterior, vê-se que ela difere do problema ( $P_{L_\infty}^\varepsilon$ ), apenas porque, neste caso, ainda não se parametrizaram os segundos membros das restrições, com vista a definir a direcção em que se pretende movimentar o ponto de referência (i.e., restrições com  $j \in G$ , em que se soma  $t d_j$  ao segundo membro  $b_j$ ;  $d_j$  é a componente  $j$  da direcção e  $t$  o parâmetro que controla o deslocamento). O peso  $\lambda_j$  tem um significado semelhante ao  $\alpha_j$  utilizado no método STEM. No método Pareto Race, utiliza-se o peso  $w_j$  definido por  $w_j = \frac{1}{\lambda_j}$ .

Cada vez que se resolve novamente ( $P_{L_\infty}^\varepsilon$ ) começa-se por considerar  $t = 0$ . Usando a análise de sensibilidade clássica em relação aos termos independentes das restrições de ( $P_{L_\infty}^\varepsilon$ ), para a solução óptima associada a um determinado valor de  $t$ , em particular  $t=0$ , calcula-se o intervalo  $[t-t_1, t+t_2]$ , que indica qual a variação possível de  $t$  que mantém a admissibilidade da base.

Resolvendo o problema ( $P_{L_\infty}^\varepsilon$ ) para um valor particular de  $t$ , usando o método simplex, obtém-se:

$$\underline{x}_B = B^{-1}(\underline{b} + t \underline{d})$$

em que  $\underline{x}_B$  é o vector das variáveis básicas e  $B^{-1}$  a matriz inversa da base.

Variando  $t$  para  $t+\theta$ , vem:

$$\underline{x}_B(\theta) = B^{-1}(\underline{b} + (t + \theta) \underline{d})$$

$$\underline{x}_B(\theta) = \underline{x}_B + \theta B^{-1} \underline{d}$$

Os limites inferior e superior de  $\theta$  são calculados de modo a garantir a admissibilidade primal (dado que a admissibilidade dual não é afectada) da solução, ou seja,  $\underline{x}_B(\theta) \geq \underline{0}$ , obtendo-se o intervalo  $[t-t_1, t+t_2]$ .

A partir da solução eficiente inicial, o agente de decisão dispõe de várias opções, que não lhe requerem a especificação de valores concretos, mas apenas a indicação de tendências de variação. Ou seja:

- **Prosseguir** na direcção actual a velocidade constante. O passo é actualizado fazendo

$$t \leftarrow \begin{cases} t + \min \{ \Delta t ; t_2 \} & \text{se } \Delta t > 0 \\ t + \max \{ \Delta t ; -t_1 \} & \text{se } \Delta t < 0 \end{cases}$$

$\Delta t$  representa a velocidade do movimento, e é inicialmente igual a  $\beta$ , uma constante que representa a velocidade base, ou seja o passo base. Se  $t_2 = +\infty$ , é pedido ao agente de decisão para mudar de direcção; Se  $t_2 = 0$  e  $\Delta t > 0$ , significa que não é possível prosseguir na direcção actual, sem que haja mudança de base. Opera-se de modo a obter a nova base e actualiza-se o intervalo  $[t-t_1, t+t_2]$ .

Se  $t_1 = 0$  e  $\Delta t < 0$ , é pedido ao agente de decisão para mudar de direcção.

Se não se verificar nenhum destes casos, prossegue-se na mesma direcção com um passo  $\Delta t$ , sendo a nova solução  $\underline{x}_B \leftarrow \underline{x}_B + B^{-1} \Delta t \underline{d}$ . Actualizam-se os valores de  $t_1$  e  $t_2$ .

- **Mudar de direcção**, de modo a melhorar uma dada função objectivo. A componente da direcção de referência correspondente a essa meta é aumentada:

$$d_j \leftarrow d_j + \sigma_j \Delta b_j \quad j \in G$$

em que  $j$  é o índice da função objectivo escolhida pelo agente de decisão e  $\sigma_j$  é uma constante que determina o grau de variação na direcção do movimento.

O vector direcção é renormalizado, de modo que  $\sum_k d_k = s$ .

Resolve-se o problema  $(P_{Z_\infty}^\varepsilon)$  com  $t=0$ , e recalcula-se o intervalo  $[t-t_1, t+t_2]$ . Os  $b_j, j \in G$ , a considerar em  $(P_{Z_\infty}^\varepsilon)$ , no instante em que se pretende alterar a direcção, são os valores das metas flexíveis  $j$  no ponto da fronteira eficiente em que se iniciou a mudança de direcção.

- **Mudar de sentido**, passando o movimento a ser feito no sentido contrário (para a frente ou para trás) sobre a direcção actual.

$$\Delta t \leftarrow \begin{cases} \beta & \text{se } \Delta t < 0 \text{ inversão do sentido para a frente} \\ -\beta & \text{se } \Delta t > 0 \text{ inversão do sentido para trás} \end{cases}$$

A mudança de sentido inicia-se sempre à velocidade base, embora seja possível manter a velocidade anterior do movimento.

- **Aumentar ou diminuir a velocidade**, passando o movimento a ser feito mais rapidamente ou mais lentamente, no sentido e direcção actuais.

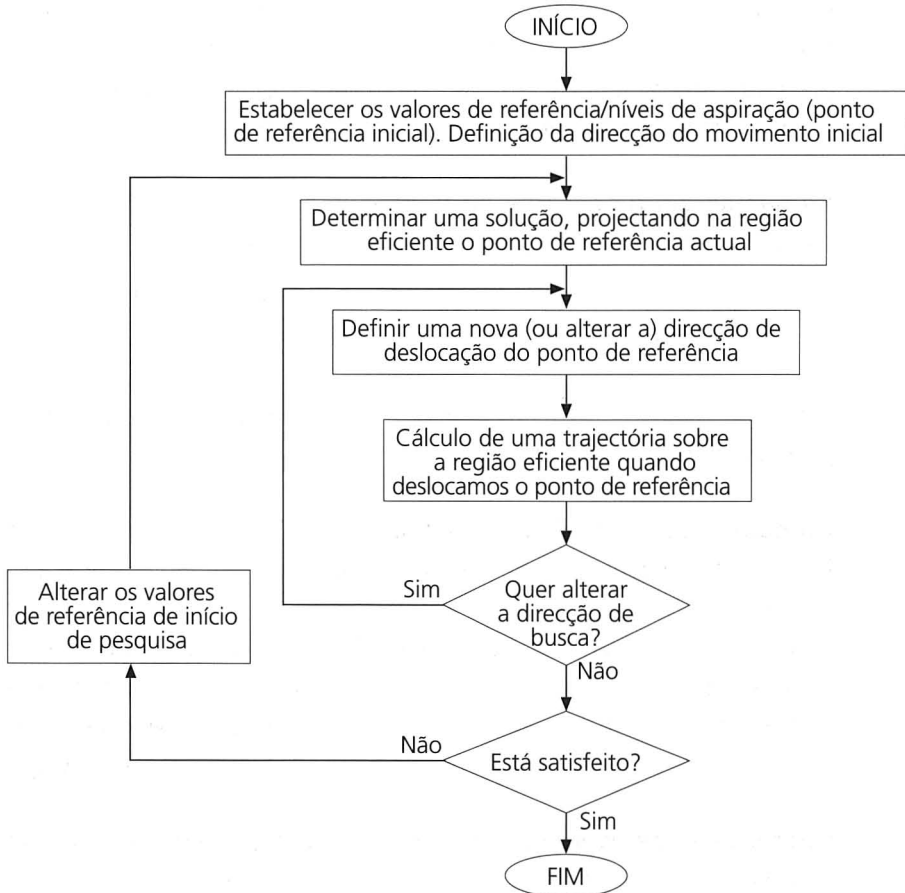
O aumento ou a diminuição da velocidade são obtidos variando no sentido actual o valor absoluto do escalar  $\Delta t$ . Para aumentar a velocidade faz-se  $\Delta t \leftarrow \alpha \Delta t$ , com  $\alpha > 1$ . Para diminuir a velocidade faz-se  $\Delta t \leftarrow \Delta t / \alpha$ , com  $\alpha > 1$  (até um mínimo igual à velocidade base  $\Delta t = \beta$ ).

- **Fixar o nível de aspiração de uma função objectivo**, introduzindo uma limitação inferior numa meta flexível, igual ao respectivo valor actual.

É introduzida uma restrição do tipo  $c_j \underline{x} \geq L_j$ , onde  $L_j$  é o valor inferior fixado para a função objectivo  $z_j(\underline{x}), j \in G$ .

- **Libertar uma função objectivo**, retirando a limitação previamente imposta nessa função objectivo.

## 6.2. DIAGRAMA DE BLOCOS ESQUEMÁTICO DO MÉTODO *PARETO RACE*



## 6.3. COMENTÁRIOS FINAIS

O princípio de funcionamento deste método é particularmente interessante – do ponto de vista cognitivo – para o(s) agente(s) de decisão. Trata-se duma pesquisa livre, em que o agente de decisão vai decidindo para onde pretende deslocar-se sobre a região eficiente. É claro que não havendo uma ideia prévia, nem da forma do poliedro admissível, nem tão pouco da região eficiente, este método só seria adequado em todas as circunstâncias



se fosse muito rápido percorrer por tentativa e erro todas as trajectórias sobre a região eficiente que o agente de decisão pretendesse. Infelizmente, mesmo para problemas de média dimensão, as ferramentas computacionais envolvidas não são (como seria de esperar, se se pensar nos cálculos envolvidos) tão rápidas quanto seria desejável. Nestas circunstâncias, este processo de pesquisa parece particularmente adequado para uma fase final de cálculo, fazendo-se anteriormente uma pesquisa estratégica usando outro(s) procedimento(s). Recorrer-se-ia ao Pareto Race para estudar em profundidade as soluções duma sub-região eficiente bem delimitada.

#### 6.4. EXEMPLO ILUSTRATIVO DO MÉTODO *PARETO RACE*

Considere-se o seguinte problema de programação linear com 3 funções objectivo (problema já usado para ilustrar o método TRIMAP):

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z_1 = x_1 \\
 \max \quad & z_2 = x_2 \\
 \max \quad & z_3 = x_3 \\
 \text{s. a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

O método Pareto Race (PR) começa por pedir ao agente de decisão que especifique níveis de aspiração e gamas de variação desejáveis para os valores das funções objectivo.

Suponha-se que o agente de decisão indica como níveis de aspiração os valores 6, 5 e 5 para  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , respectivamente, e que gostaria que os valores das funções objectivo variassem nos seguintes intervalos: [4.5, 7] para  $z_1$ , [2.5, 6] para  $z_2$  e [2, 6] para  $z_3$  (estes intervalos são apenas indicativos, visto que pode não ser possível obter valores das funções objectivo para estes intervalos). Desta forma, (6, 5, 5) é o ponto de referência original que será projectado sobre a fronteira eficiente do problema e as variações propostas,  $(7-4.5, 6-2.5, 6-2) = (2.5, 3.5, 4)$ , constituem o vector inicial de pesos<sup>17</sup> w.

<sup>17</sup> É usado o itálico para salientar que, neste método, os pesos representam factores de escala.

Os intervalos de variação  $[L_i, LS_i]$  para cada uma das funções objectivo,  $i=1, \dots, 3$ , serão actualizados ao longo do processo.

O vector dos termos do lado direito (*metas*) é  $\underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{b}_G \\ \text{---} \\ \underline{b}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ \text{---} \\ 5 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$  e o

vector dos pesos é  $\underline{w} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.5 \\ 4 \\ \text{---} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , onde as primeiras três componentes se referem

aos objectivos (metas flexíveis) e as últimas três às restrições (metas rígidas).

Inicialmente, considera-se a direcção de referência  $\underline{d} = \underline{w}$ .

As direcções são normalizadas calculando o valor de  $s$  para a direcção de referência inicial, tal que  $s = \sum_k d_k$ . Note-se que  $s$  se mantém constante em todas as iterações. Neste caso,  $s = 10$ .

Para projectar pontos da semi-recta  $\underline{b} + t \underline{d}$  (admite-se, neste exemplo, que  $t \geq 0$ ) sobre o conjunto das soluções eficientes, gerando uma trajectória eficiente, resolve-se o seguinte problema de programação linear paramétrica:

$$\begin{aligned} \min \quad & v - \varepsilon \sum_{i=1}^p c_i x_i && (P_{\mathcal{L}_\infty}^\varepsilon) \\ \text{s. a:} \quad & c_j x_j + v w_j \geq b_j + t d_j && j \in G \\ & A_{i \bullet} x = b_i && i \in R \\ & x \geq \underline{0}, v \in \Re \end{aligned}$$

(em que  $A_{i \bullet} x = b_i$ , para  $i \in R$ , representa cada uma das restrições do problema multiobjectivo, transformada em igualdade).

O problema ( $P_{\frac{\epsilon}{L_{\infty}}}$ ) é resolvido para  $t = 0$ . O cálculo de outras soluções para diferentes valores de  $t$  pode ser feito usando programação paramétrica, em relação aos lados direitos das restrições.

Note-se, ainda, que a variável  $v$  não tem restrição de sinal podendo, por razões computacionais, ser reescrita como  $v = v^+ - v^-$ , com  $v^+, v^- \geq 0$ . Assim, o problema a resolver, neste caso, assume a seguinte formulação (considerando  $\epsilon = 0.001$ ):

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v^+ - v^- - 0.001(x_1 + x_2 + x_3) \\
 \text{s. a:} \quad & 2.5v^+ - 2.5v^- + x_1 \geq 6 \\
 & 3.5v^+ - 3.5v^- + x_2 \geq 5 \\
 & 4v^+ - 4v^- + x_3 \geq 5 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\
 & x_1, x_2, x_3, v^+, v^- \geq 0
 \end{aligned}$$

O quadro simplex ótimo, convertido para maximização, e omitindo as colunas das variáveis básicas, é:

$\frac{c}{c_B}$	$\frac{c}{x_B}$	1	0	0	0	0	
		$v^-$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	
0.001	$x_3$	0	0.4	0.4	-0.6	0.4	0.6
0	$s_5$	0	-0.7	1.3	-0.7	-1.7	1.7
0	$s_6$	0	0.85	1.85	-2.15	-2.15	1.65
0.001	$x_1$	0	-0.75	0.25	0.25	0.25	3.25
0.001	$x_2$	0	0.35	-0.65	0.35	0.35	1.15
-1	$v^+$	-1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	1.1
$z_j - c_j$		0	0.1	0.1	0.1	0.101	

( $s_1, s_2$  e  $s_3$  são as variáveis desvio – *surplus* – das primeiras três restrições, e  $s_4, s_5$  e  $s_6$  são as variáveis desvio – *slack* – das últimas três restrições).

A solução eficiente, encontrada para o problema original em estudo, é  $\underline{x} = (3.25, 1.15, 0.6)$ , tendo como imagem no espaço dos objectivos  $\underline{z} = (3.25, 1.15, 0.6)$ .

Os intervalos de variação  $[L_i, LS_i]$  para cada uma das funções objectivo,  $i = 1, \dots, 3$ , são actualizados:  $[L_1, LS_1] = [3.25, 7]$ ,  $[L_2, LS_2] = [1.15, 6]$ ,  $[L_3, LS_3] = [0.6, 6]$ . Estes intervalos sofrerão alterações sempre que seja calculada uma nova solução, e algum dos valores das funções objectivo não pertença ao respectivo intervalo.

A gama de variação de  $t$  que mantém a base óptima, quando se altera  $\underline{b}$  para  $\underline{b} + t \underline{d}$ , é calculada através de análise de sensibilidade. Se  $\underline{x}_B$  designar o vector das variáveis básicas, então, para  $t=0$ ,  $\underline{x}_B(t) = B^{-1} \underline{b}$ , onde  $B^{-1}$  é a matriz inversa da base. Ao alterar  $\underline{b}$  para  $\underline{b} + t \underline{d}$ , vem  $\underline{x}_B(t) = B^{-1} (\underline{b} + t \underline{d})$ , e  $t$  pode tomar valores que garantam a condição de admissibilidade da base  $\underline{x}_B(t) \geq \underline{0}$ .

Neste caso,

$$\underline{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ s_5 \\ s_6 \\ x_1 \\ x_2 \\ v^+ \end{bmatrix} = B^{-1} (\underline{b} + t \underline{d}) = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.4 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.7 & -1.3 & 0.7 & -1.7 & 1 & 0 \\ -0.85 & -1.85 & 2.15 & -2.15 & 0 & 1 \\ 0.75 & -0.25 & -0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ -0.35 & 0.65 & -0.35 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.7 \\ 1.65 \\ 3.25 \\ 1.15 \\ 1.1+t \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que significa que  $t \in [-1.1, +\infty]$ . Como actualmente  $t=0$ , então a variação inferior é  $t_1 = 1.1$  e a variação superior é  $t_2 = +\infty$ , ou seja,  $[t-t_1, t+t_2] = [-1.1, +\infty]$ .

Suponha-se que o agente de decisão quer prosseguir a pesquisa ao longo da trajectória definida por esta direcção de referência, e que escolhe a opção **prosseguir**. No entanto, como  $t_2 = +\infty$ , não é possível continuar a pesquisa nesta direcção (porque qualquer ponto da semi-recta  $\underline{b} + t \underline{d}$  seria projectado

na solução actual (3.25, 1.15, 0.6)). É, então, pedido ao agente de decisão que indique a função objectivo que pretende melhorar.

#### MUDANÇA DE DIRECÇÃO OBRIGATÓRIA

Suponha-se que o agente de decisão quer melhorar  $z_3$ . Então,  $d_3$  é alterado para  $d_3 + \sigma(LS_3 - LI_3)$ , em que  $\sigma$  é uma constante, por exemplo, igual a 0.5 (valor proposto pelos autores do método):

$$d_1 = 2.5; \quad d_2 = 3.5; \quad d_3 = 4 + 0.5(6 - 0.6) = 6.7$$

O vector  $\underline{d}$  é normalizado, de modo a que  $\sum_k d_k = s = 10$ , isto é,

$$d_k \leftarrow d_k \frac{10}{2.5 + 3.5 + 6.7} \quad k=1, \dots, 3$$

A nova direcção é  $\underline{d} = \begin{bmatrix} 1.969 \\ 2.756 \\ 5.276 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Os pesos são também actualizados através de uma diminuição em  $w_3$  e posteriormente normalizado todo o vector, seguindo um processo semelhante ao de  $\underline{d}$ <sup>18</sup>. Uma forma possível de o fazer é, por exemplo, dividir  $w_3$  por  $(1 + \sigma)$ :

$$w_1 = 2.5; \quad w_2 = 3.5; \quad w_3 = \frac{4}{1.5} = 2.667$$

Após normalização, vem  $\underline{w} = \begin{bmatrix} 2.885 \\ 4.038 \\ 3.079 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

<sup>18</sup> É de notar que os pesos de  $\underline{w}$  produzem um efeito nos valores das funções objectivo que é, em geral, contrário ao que seria de esperar, isto é, um menor peso significa uma maior importância. Isto acontece quando o ponto de referência se situa na fronteira ou fora da região admissível, isto é, quando  $v^+ \geq 0$  e  $v^- = 0$ .

O ponto de referência, actualizado com os valores das funções objectivo da última solução, é<sup>19</sup>:

$$\underline{b}_G = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 1.15 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

Resolve-se o seguinte problema, considerando  $t=0$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & v^+ - v^- - 0.001(x_1 + x_2 + x_3) \\ \text{s. a:} \quad & 2.885 v^+ - 2.885 v^- + x_1 \geq 3.25 + 1.969 t \\ & 4.038 v^+ - 4.038 v^- + x_2 \geq 1.15 + 2.756 t \\ & 3.079 v^+ - 3.079 v^- + x_3 \geq 0.6 + 5.276 t \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2, x_3, v^+, v^- \geq 0 \end{aligned}$$

A solução óptima para  $t=0$  é  $\underline{x} = \underline{z} = (3.25, 1.15, 0.6)$ .

Relativamente a  $(P_{\underline{z}})$ , calcula-se a gama de variação de  $t$ , para a qual a base óptima se mantém:

$$\underline{x}_B(t) = B^{-1}(\underline{b} + t \underline{d}) \geq \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_5 \\ s_6 \\ x_1 \\ x_2 \\ v^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.308 & -0.308 & 0.692 & 0.308 & 0 & 0 \\ 0.808 & -1.192 & 0.808 & -1.808 & 1 & 0 \\ -0.519 & -1.519 & 2.481 & -2.481 & 0 & 1 \\ 0.712 & -0.288 & -0.288 & 0.288 & 0 & 0 \\ -0.404 & 0.596 & -0.404 & 0.404 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 3.25 \\ 1.15 \\ 0.6 \\ 5 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1.969 \\ 2.756 \\ 5.276 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

<sup>19</sup> Chama-se a atenção para o facto de estas actualizações dos pesos e do ponto de referência não terem sido propostas pelos autores do método. Contudo, resultados experimentais mostraram que o desempenho do método, com estas pequenas modificações, é bastante superior ao da versão original, principalmente no que se refere ao comando de mudança de direcção.

$$\begin{bmatrix} 0.6 + 2.199 t \\ 1.7 + 2.565 t \\ 1.65 + 7.879 t \\ 3.25 - 0.916 t \\ 1.15 - 1.283 t \\ 0 + t \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que significa que  $t \in [0, 0.897]$ . Como actualmente  $t=0$ , então  $t_1=0$  e  $t_2=0.897$ .

O agente de decisão pode prosseguir a pesquisa de soluções nesta direcção, sendo o deslocamento feito à velocidade base ( $\Delta t = \beta = 10^{-4}$  – constante pré-definida), ou a velocidade superior. Um aumento da velocidade significa um maior espaçamento entre as soluções eficientes calculadas seguindo a trajectória escolhida, e que são apresentadas ao agente de decisão. A trajectória é, assim, percorrida mais rapidamente.

Suponha-se que o agente de decisão aumenta a velocidade para  $\Delta t = 0.02$ .

A trajectória apresentada ao agente de decisão é formada pelas soluções de  $(P_{L_\infty}^e)$  para valores de  $t$  espaçados de  $\Delta t$ . Estas soluções, em particular para  $t=0.02$ , são calculadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_5 \\ s_6 \\ x_1 \\ x_2 \\ v^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 + 2.199 \times 0.02 \\ 1.7 + 2.565 \times 0.02 \\ 1.65 + 7.879 \times 0.02 \\ 3.25 - 0.916 \times 0.02 \\ 1.15 - 1.283 \times 0.02 \\ 0 + 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.644} \\ 1.751 \\ 1.808 \\ \mathbf{3.232} \\ \mathbf{1.124} \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

Assim, ao **prosseguir** nesta direcção (figura III.43) é apresentado ao agente de decisão, de uma forma sequencial e dinâmica, um conjunto de soluções:

	$z_1$	$z_2$	$z_3$
( $t=0.02$ )	3.232	1.124	0.644
( $t=0.04$ )	3.213	1.099	0.688
( $t=0.06$ )	3.195	1.073	0.732
( $t=0.08$ )	3.177	1.047	0.776
...	...	...	...
( $t=0.897$ )	2.428	0	2.572

em que  $z_3$  aumenta e  $z_1$  e  $z_2$  diminuem.

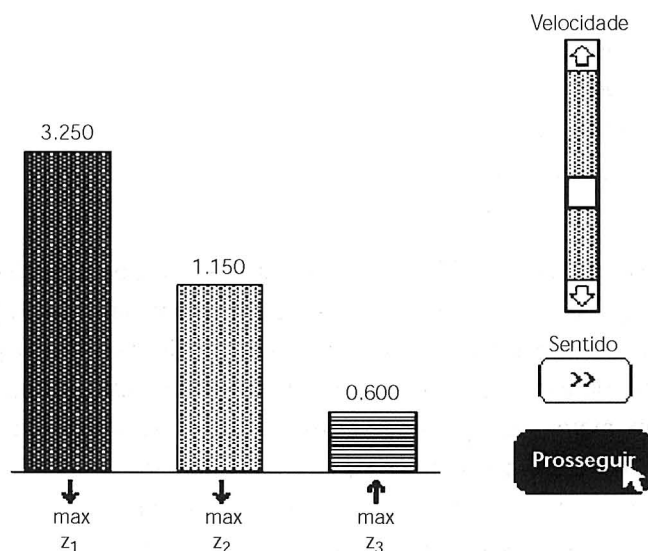


Figura III.43 – As barras com os valores das funções objectivo variam dinamicamente, mostrando os valores das funções objectivo sobre a trajectória percorrida.

Quando  $t$  atinge o valor de 0.897 (solução em que  $z_1 = 2.428$ ,  $z_2 = 0$  e  $z_3 = 2.572$ ), é alcançada uma aresta da região eficiente, e para continuar segundo a mesma direcção é necessário fazer uma mudança de base (ver figuras III.44 e III.46).

#### MUDANÇA DE BASE (SUPONDO QUE FOI DECIDIDO MANTER A DIRECÇÃO DE PESQUISA)

Após ser feita a actualização do quadro simplex para se efectuar a mudança de base (por exemplo, usando o algoritmo dual-simplex), é calculado o novo intervalo de variação para  $t$ . O resultado é  $t_1 = 0$  e  $t_2 = 1.580$ , o que significa que  $t$  (actualmente igual a 0.897) pode variar no intervalo  $[0.897, 0.897+1.580]$ .

Admitindo que o agente de decisão pretende aumentar ligeiramente a velocidade (escolhe  $\Delta t = 0.03$ ), é apresentada a seguinte sequência de soluções, em que  $z_3$  continua a aumentar,  $z_1$  a diminuir, e  $z_2$  se mantém constante (ver figura III.44):



	$z_1$	$z_2$	$z_3$
(t=0.927)	2.382	0	2.618
(t=0.957)	2.335	0	2.655
...	...	...	...
(t=1.047)	2.194	0	2.806

Suponha-se que, nesta altura, perante a solução  $\underline{z} = (2.194, 0, 2.806)$ , o agente de decisão resolve mudar de direcção (antes de conhecer toda a trajectória eficiente, que se pode calcular seguindo a direcção de referência actual).

A figura III.44 mostra os valores de  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , ao longo da trajectória anterior, e o momento em que o agente de decisão resolve mudar de direcção (assinalado por uma linha a tracejado).

#### MUDANÇA DE DIRECÇÃO VOLUNTÁRIA

Admitindo que o agente de decisão pretende melhorar  $z_2$ , incrementa-se a componente de  $z_2$  na direcção  $\underline{d}$ , e diminui-se a respectiva componente no vector de pesos  $\underline{w}$ :

$$d_2 = d_2 + \sigma(LS_2 - LI_2) = 2.756 + 0.5(6 - 0) = 5.756$$

$$w_2 = \frac{w_2}{1.5}$$

Após normalização, vem:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 1.514 \\ 4.428 \\ 4.058 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} 3.333 \\ 3.111 \\ 3.555 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

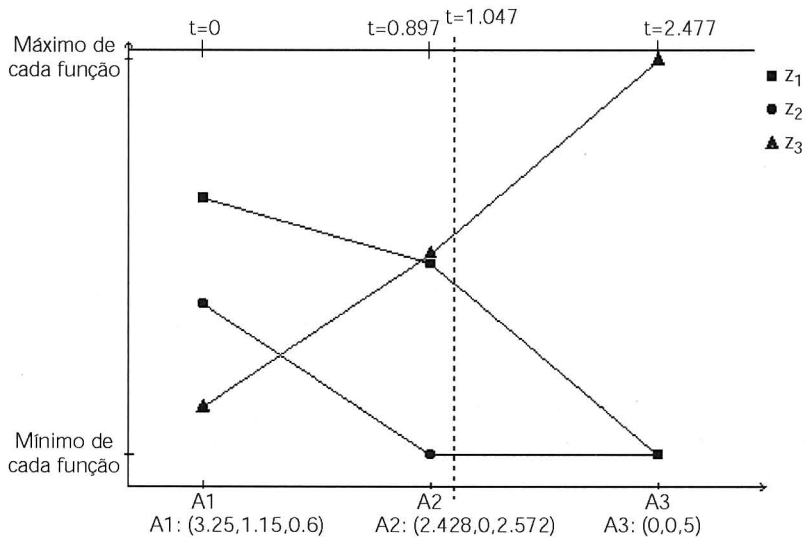


Figura III.44 – Valores das funções objetivo ao longo da primeira trajetória. A tracejado indica-se o momento em que o agente de decisão decidiu interromper a pesquisa nessa direcção.

O ponto de referência é actualizado com os valores das funções objetivo da última solução,

$$\underline{b}_G = \begin{bmatrix} 2.194 \\ 0 \\ 2.806 \end{bmatrix}.$$

Resolve-se o seguinte problema, considerando  $t=0$ :

$$\min \quad v^+ - v^- - 0.001(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\text{s. a:} \quad 3.333 v^+ - 3.333 v^- + x_1 \geq 2.194 + 1.514 t$$

$$3.111 v^+ - 3.111 v^- + x_2 \geq 0 + 4.428 t$$

$$3.555 v^+ - 3.555 v^- + x_3 \geq 0.806 + 4.058 t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2, x_3, v^+, v^- \geq 0$$

Após análise de sensibilidade aos termos independentes das restrições, conclui-se que o intervalo possível para  $t$  é  $[0, 1.206]$ .

Se o agente de decisão escolher novamente a opção **proseguir**, à velocidade anterior ( $\Delta t=0.03$ ), é-lhe apresentada uma nova trajectória de soluções eficientes, em que  $z_1$  diminui,  $z_2$  aumenta e  $z_3$  aumenta:

	$z_1$	$z_2$	$z_3$
( $t=0$ )	2.194	0	2.806
( $t=0.03$ )	2.138	0.04	2.821
( $t=0.06$ )	2.083	0.121	2.852
...	...	...	...
( $t=0.42$ )	1.417	0.562	3.020

Suponha-se que o agente de decisão considera a solução  $\underline{x} = \underline{z} = (1.417, 0.562, 3.020)$  uma boa solução de compromisso. Então, o processo termina.

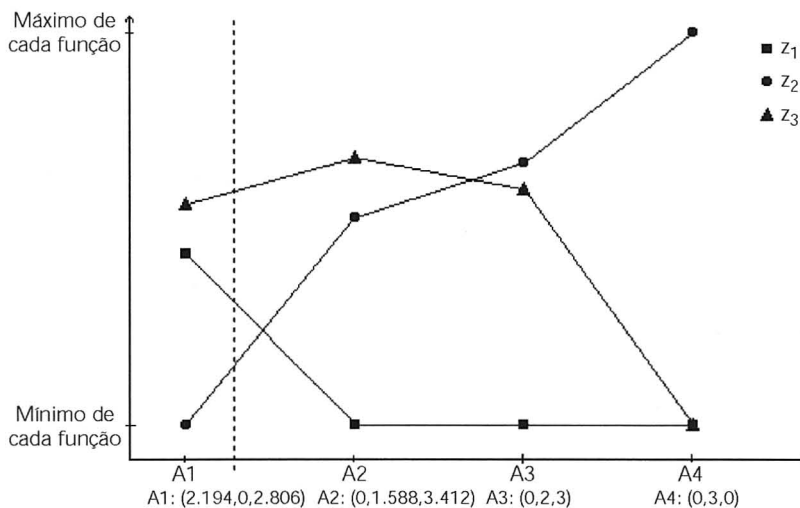


Figura III.45 – Valores das funções objectivo ao longo da primeira trajectória. A tracejado indica-se momento em que o agente de decisão decidiu parar a pesquisa.

A figura III.45 mostra os valores de  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  ao longo desta trajectória, e o momento em que o agente de decisão resolve parar a pesquisa, assinalado por uma linha a tracejado.

A figura III.46 apresenta o espaço dos objectivos, coincidente, neste caso, com o espaço das variáveis de decisão, onde está assinalado (a traço grosso) o conjunto de soluções não dominadas pesquisadas.

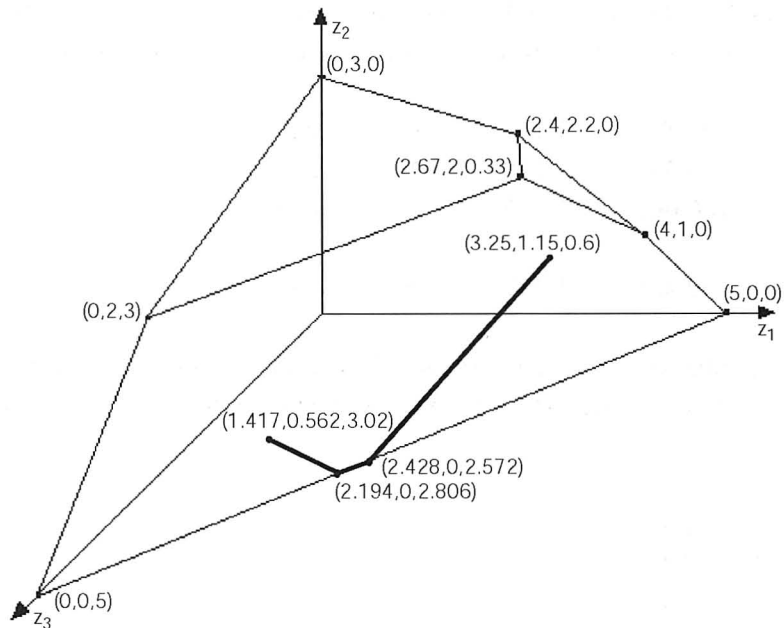


Figura III.46 – Soluções não dominadas pesquisadas no espaço das funções objectivo.

## 7. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considere o problema:

$$\max z_1(\underline{x}) = -x_1 + 4x_2$$

$$\max z_2(\underline{x}) = 3x_1 - x_2$$

$$\text{s. a: } -x_1 + x_2 \leq 6 \quad x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 8 \quad x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Represente a região admissível no espaço de decisão e no espaço dos objectivos, assinalando a região eficiente e a região não dominada.
- Construa a tabela de óptimos individuais (de *pay-off*) e identifique a solução ideal.
- Formule o problema para determinar a primeira solução de compromisso, de acordo com o método STEM.

(d) Considerando que a solução do problema formulado em (c) é  $(x_1, x_2) = (5.46, 4.54)$ , formule o problema que determina a segunda solução gerada pelo método STEM, admitindo que o agente de decisão resolve relaxar  $z_1$  de 2 unidades. Ilustre graficamente a redução da região admissível no espaço de decisão e no espaço dos objectivos. Resolvendo este problema, que nova solução de compromisso se obtém?

2. Para o problema do exercício 4 do capítulo II:

- formule o problema a resolver na iteração inicial do método STEM.
- Calcule a primeira solução proposta ao agente de decisão, quando se utiliza o método STEM.
- Suponha que se pretende efectuar uma segunda iteração, e que o agente de decisão decidiu relaxar  $z_1(\underline{x})$  de duas unidades, em relação à solução obtida em (b).

Formule o novo problema a resolver, e represente graficamente a nova região admissível. Qual a segunda solução a propor utilizando o método STEM?

3. Considere o seguinte problema de programação linear multiobjectivo:

$$\begin{aligned} \max \quad z_1 &= x_1 + 5x_2 \\ \max \quad z_2 &= 6x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a:} \quad &x_1 + x_2 \leq 10 \\ &3x_1 + x_2 \leq 24 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Admita que se pretende aplicar o método STEM ao problema anterior.

- Formule o problema a resolver na primeira iteração do método.
- Seria possível, em alguma iteração do método STEM, alcançar uma solução fracamente eficiente? Em caso afirmativo, indique uma solução nessas circunstâncias.

4. Considere o problema:

$$\begin{aligned} \max \quad z_1(\underline{x}) &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \max \quad z_2(\underline{x}) &= x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ \max \quad z_3(\underline{x}) &= -x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{s. a: } 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 50 \\ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq \underline{0} \end{array} \right\} \equiv S$$

- (a) Determine a região de indiferença no espaço dos pesos (use a projecção no plano  $\lambda_1, \lambda_2$ ), correspondente à solução básica não dominada que otimiza:

$$\max 0.1 z_1(\underline{x}) + 0.6 z_2(\underline{x}) + 0.3 z_3(\underline{x})$$

$$\text{s. a: } \underline{x} \in S$$

Faça os comentários que achar convenientes, sobre a solução obtida.

- (b) Para esta solução, quais são as variáveis não básicas eficientes? Qual a variação de cada função objectivo, por unidade de cada variável não básica eficiente que se torna básica?
- (c) Quais as soluções básicas eficientes que se obtêm, quando cada uma destas variáveis não básicas eficientes se torna básica? Represente graficamente as regiões de indiferença correspondentes.
- (d) Após uma contracção do cone dos gradientes das funções objectivo (como no método ICW) em torno do conjunto de pesos central  $(1/3, 1/3, 1/3)$ , quais as soluções determinadas em (a) e (c) que ainda é possível alcançar? Efectue a análise gráfica no espaço dos pesos.
- (e) No método de Zionts e Wallenius quais as restrições a introduzir no espaço dos pesos se o agente de decisão preferir todos os vértices eficientes adjacentes, em relação à solução calculada em (a)?
- (f) Comente a seguinte afirmação: "As soluções eficientes já conhecidas são suficientes para caracterizar completamente uma face eficiente".
- (g) Seja  $\underline{x}^0 = (5.73, 7.16, 1.63, 6.26)$  a solução eficiente inicial obtida pelo método STEM. Formule o problema a resolver na iteração seguinte do método STEM, se o agente de decisão resolver, uma vez confrontado com esta solução, relaxar  $z_3$  de 14 unidades.
- (h) A solução do problema auxiliar:

$$\begin{array}{l} \min v \\ \text{s. a } \underline{x} \in S \\ 10 - z_1(\underline{x}) \leq v \\ 40 - z_2(\underline{x}) \leq v \\ 20 - z_3(\underline{x}) \leq v \\ v \geq 0 \end{array}$$

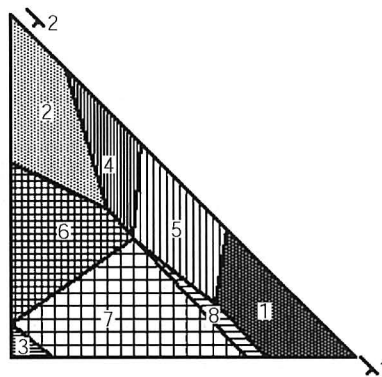
é uma solução eficiente do problema inicial?

Em caso negativo, que modificações deveria efectuar na formulação do problema auxiliar para garantir a obtenção de uma solução eficiente?

(i) Em relação ao problema multiobjectivo original, comente as seguintes afirmações:

- (1) "Todas soluções eficientes conhecidas (básicas e não básicas) pertencem à mesma face eficiente".
- (2) "As soluções básicas eficientes conhecidas são suficientes para caracterizar o plano onde se localiza uma face eficiente, mas não a própria face".
- (3) "Não há soluções eficientes que sejam ótimos alternativos de pelo menos uma função objectivo."
- (4) "É possível obter a solução eficiente que otimiza a função objectivo  $k$ , através da optimização de uma função objectivo ponderada, com  $\lambda_k=0$ , para  $k=1, 2, 3$ ".

5. Considere um problema de programação linear com 3 funções objectivo a maximizar, 4 variáveis de decisão e 3 restrições do tipo ' $\leq$ ' (sendo  $s_1, s_2$  e  $s_3$  as respectivas variáveis *slack*). Suponha que a decomposição do espaço dos pesos é a seguinte:



(a) Faça a correspondência de cada uma das soluções 1 a 5 da figura com as soluções A a E da tabela seguinte:

	$z_1$	$z_2$	$z_3$	variáveis básicas
A	12.5	50	25	$x_4=12.5; s_1=22.5; s_3=5$
B	15	-15	75	$x_2=15; s_1=45; s_3=20$
C	53.3	42.2	-2.2	$x_1=15.6; x_4=6.7; s_1=8.9$
D	66	30	-12	$x_1=18; x_3=6; s_3=5$
E	61.7	37.1	-6.3	$x_1=16.6; x_3=4.6; x_4=29$

(b) Identifique as arestas e faces não dominadas do problema.

6. Suponha que pretende usar o método Visual Interactivo (versão simplificada do Pareto Race) e que, num primeiro passo (completamente idêntico ao método STEM) se obtinha uma 1ª solução, através da resolução de um problema linear do seguinte tipo:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \alpha \\
 \text{s.a} \quad & \lambda_k (z_k^* - \underline{c}_k \underline{x}) \leq \alpha \quad k=1, \dots, p \\
 & A\underline{x} = \underline{b} \\
 & \underline{x} \geq \underline{0} \\
 & \alpha \geq 0
 \end{aligned}$$

em que:

$z_k^*$  é a componente k do vector  $\underline{z}^*$  que representa a solução ideal,

$\underline{x}$  é o vector das variáveis de decisão,

$\underline{c}_k$  é o gradiente da função objectivo k,

A é a matriz dos coeficientes técnicos,

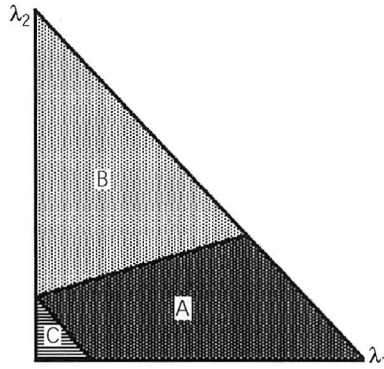
$\underline{b}$  é o vector dos termos independentes das restrições, e

p representa o número de funções objectivo.

- (a) Reformule o problema anterior, por forma a obter um problema de programação linear paramétrica que permita calcular a trajectória das soluções eficientes, quando o ponto de referência se desloca, a partir da solução ideal, numa direcção  $\underline{d}$ .
- (b) Por questões de simplicidade, partiu-se do princípio que, a resolução dos problemas formulados anteriormente, conduziria sempre a soluções eficientes. Será isso verdade?

7. Considere um problema de programação linear com três funções objectivo, quatro variáveis de decisão e duas restrições do tipo ' $\leq$ ', a que corresponde a seguinte decomposição total do espaço dos pesos:





	$z_1$	$z_2$	$z_3$	variáveis básicas
A	60	36	72	$x_3=12; x_2=12$
B	45	63	66	$x_4=18; x_2=6$
C	45	22.5	75	$x_5=45; x_2=15$

- (a) Identifique as arestas e faces não dominadas do problema.  
 (b) Suponha que é aplicado o método Zionts-Wallenius na resolução deste problema multiobjectivo, e que a primeira solução obtida é C, cujo quadro simplex é:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_5$	1.25	0	3.75	2.5	1	-0.25	45
$x_2$	0.75	1	0.25	0.5	0	0.25	15
$z_1-c_1$	0.75	0	-1.25	0	0	0.75	
$z_2-c_2$	1.125	0	-1.125	-2.25	0	0.375	
$z_3-c_3$	4.75	0	0.25	0.5	0	1.25	

em que  $x_5$  e  $x_6$  são as variáveis *slack* das restrições.

Relativamente à 1ª iteração do método, indique:

- (1) os pares de soluções apresentados ao agente de decisão, para avaliação, e as restrições que resultam das respostas dadas.
- (2) Os possíveis vectores de compromisso entre os objectivos (*trade-offs*) apresentados ao agente de decisão, e as restrições que resultam das respostas dadas.

8. Considere o seguinte problema de programação linear multiobjectivo:

$$\begin{aligned} \max \quad z_1 &= x_1 \\ \max \quad z_2 &= x_2 \\ \max \quad z_3 &= x_3 \\ \text{s.a:} \quad &x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ &x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\ &3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ &x_1 + 2x_3 \leq 10 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Trata-se de um problema com soluções degeneradas. Quantas bases correspondem ao vértice que otimiza  $z_3$ ? Calcule-as.
- Determine as regiões de indiferença no espaço dos pesos, correspondentes a cada uma dessas bases.
- Quais as consequências da situação atrás descrita, se pretendermos utilizar o TRIMAP na análise do problema?

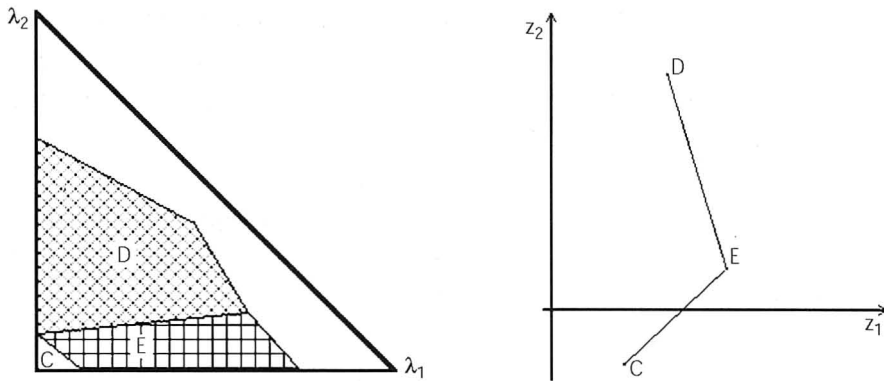
9. Considere o seguinte problema de programação linear multiobjectivo:

$$\max \quad \underline{z} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{s. a: } A \underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\text{em que } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \underline{b} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Suponha que numa dada fase de pesquisa, utilizando o TRIMAP, se obtém:



- Quais as arestas eficientes conhecidas nesta altura da pesquisa?
- Conhece-se inteiramente alguma face admissível? Será eficiente?
- Admita que numa dada fase da análise utilizando o TRIMAP, é possível dizer que o agente de decisão só está interessado em continuar a pesquisa de soluções eficientes em que  $z_2(\underline{x}) \geq 28$ . Determine a sub-região do espaço dos pesos que vale a pena continuar a pesquisar, considerando a restrição agora introduzida.

10. Considere o seguinte problema de programação linear multiobjectivo:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z_1 = x_1 \\
 \max \quad & z_2 = x_2 \\
 \max \quad & z_3 = x_3 \\
 \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\
 & 0.4x_1 + 0.2x_2 + x_3 \leq 4.7 \\
 & x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 \leq 4.5 \\
 & 0.15x_1 + x_2 + 0.15x_3 \leq 2.8 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Utilizando a *package* TRIMAP:

- Calcule as soluções eficientes que correspondem aos óptimos das três funções objectivo, e a respectiva decomposição do espaço dos pesos.
- Calcule uma nova solução eficiente, otimizando a função soma pesada das funções objectivo, para a qual, o plano que passa pelos três vértices calculados em (a), é um plano de nível.

- (c) Continue a calcular vértices eficientes otimizando somas pesadas das funções objectivo (seleccionando os pesos directamente, movendo o cursor sobre o triângulo do espaço dos pesos), até ter calculado todos os vértices duma face eficiente.

Como identifica essa face no espaço dos pesos?

- (d) Suponha que num dado momento do estudo, o agente de decisão só pretende calcular novos vértices eficientes que satisfaçam as seguintes restrições:

$$z_2(\underline{x}) \geq 1.5 ,$$

$$\frac{1}{3} z_1(\underline{x}) + \frac{1}{3} z_2(\underline{x}) + \frac{1}{3} z_3(\underline{x}) \geq 1.6$$

Identifique a região do espaço dos pesos que satisfaz estas restrições, e calcule os vértices eficientes que lhe correspondem.

- (e) Usando a opção de *pesquisa de faces* ("surface scanning"), viaje entre dois vértices da face calculada na alínea (c).

## CAPÍTULO IV

### **TOMMIX: UMA BASE DE MÉTODOS INTERACTIVOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIOBJECTIVO**

#### **1. INTRODUÇÃO**

Perante um modelo multicritério surge, inevitavelmente, a questão: que método usar para o analisar? Esta selecção, que constitui ela própria um problema multicritério, dada a diversidade das alternativas e as vantagens e desvantagens de cada método proposto na literatura científica, deve ser feita pelo analista e/ou pelo agente de decisão, após uma análise das características do problema e dos diversos métodos disponíveis. No entanto, esta fase prévia de avaliação dos métodos e a sua compatibilização com as características do problema em estudo e do agente de decisão, raramente aparecem referidas na literatura. Os autores usam normalmente os métodos por si próprios desenvolvidos; privilegiam-se aqueles de que existem implementações computacionais disponíveis, ou os de mais fácil implementação (nomeadamente recorrendo a *packages* disponíveis, comerciais ou de distribuição livre), ou ainda os de maior simplicidade, quer nos requisitos computacionais, quer nos mecanismos de interacção.

Nestas circunstâncias, surge a necessidade de realizar previamente um trabalho, não só de natureza conceptual, mas também de implementação computacional, no sentido da integração de diferentes métodos, envolvendo técnicas algorítmicas distintas para calcular soluções eficientes, estratégias de redução do âmbito da pesquisa, e meios de comunicação com o agente de decisão. De acordo com esta perspectiva, o objectivo é desenvolver uma

ferramenta computacional flexível de apoio à decisão, com a qual, por meio de experimentação, possam ser encontradas afinidades entre os métodos, o tipo de problemas, as diferentes fases do processo de decisão, e as formas de informação requeridas pelo (e apresentadas ao) agente de decisão.

A definição de afinidades entre os métodos e o tipo de problemas envolve, por exemplo, tomar consciência de questões do tipo: métodos que se baseiem em escolhas dicotômicas, e irreversíveis, entre pares de alternativas, para reduzir o âmbito da pesquisa, são pouco adequados em problemas cuja região não dominada apresente variações bruscas. Mas, este tipo de questões coloca-se também numa perspectiva dinâmica, isto é, a maior ou menor adequação de um método é dependente da fase do processo de decisão em que é usado. Por exemplo, o agente de decisão pode não estar disposto a comparar pares de soluções, ou a escolher uma solução de uma amostra, antes de reunir algum conhecimento sobre o problema, fazendo previamente uma pesquisa estratégica que lhe permita ter uma visão mais global sobre as características da região não dominada. As formas de informação requeridas desempenham também um papel fundamental: por exemplo, o agente de decisão pode sentir-se mais confortável a responder a questões baseadas nos valores das funções objectivo do que a indicar taxas marginais de substituição, ou outro tipo menos directo de informação sobre as suas preferências.

Por razões que têm, sobretudo, a ver com a sua coerência interna, ou com a *fidelidade* a uma dada escola de pensamento (por exemplo, ao assumir a convergência para o óptimo de uma função utilidade implícita do agente de decisão), um método particular não permite ao agente de decisão esta diversidade de opções em técnicas de cálculo, estratégias de pesquisa e informação sobre as preferências no estudo de um problema. Não sendo possível concluir da superioridade de um método sobre os outros, em todas as circunstâncias, torna-se então indispensável usá-los de forma integrada e flexível, permitindo tirar partido da sua combinação, e da eventual transferência de informação recolhida em cada um deles para os que venham a ser utilizados posteriormente (Clímaco e Antunes, 1991).

A base de métodos TOMMIX (Antunes *et al.*, 1989b, 1992) constitui um dos primeiros trabalhos nesta área, ao implementar um conjunto de métodos interactivos representativos de diferentes técnicas para pesquisar soluções não dominadas, de estratégias distintas para reduzir o âmbito da pesquisa, e de

diversas formas de informação sobre as preferências do agente de decisão, assim como conceber mecanismos de integração entre eles, permitindo grande flexibilidade de utilização, nomeadamente no que se refere às formas de comunicação entre métodos e com o agente de decisão. A via da integração é sugerida por alguns autores, em estudos comparativos entre métodos, ao confrontarem-se com problemas resultantes da menor adequação da informação de preferências requerida, perante o conhecimento reunido numa dada fase do processo de decisão (Reeves e Gonzalez, 1989). Tem por objectivo, apenas, poder comutar de método quando o agente de decisão dá indicações que levam a concluir que se sente mais *confortável* com um tipo diferente de informação de preferências. A integração de métodos no TOMMIX é qualitativamente diferente desta, visto que possibilita a transferência de informação entre métodos que, assim, pode ser utilizada nas fases subsequentes do processo de decisão.

## **2. TOMMIX – UMA BASE DE MÉTODOS INTERACTIVOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIOBJECTIVO**

A experiência adquirida com o desenvolvimento das implementações computacionais e com as aplicações de métodos interactivos de programação linear multiobjectivo, bem como a análise comparativa das suas características conceptuais, fizeram surgir a necessidade de dispor de uma ferramenta mais flexível, capaz de constituir uma base de experimentação, quer da adequação dos métodos a tipos de problemas e a fases do processo interactivo de decisão, quer das possibilidades de comutação entre métodos, assegurando a máxima transferência de informação.

A partir da avaliação das características conceptuais de cada método, e das suas implementações isoladas, foi desenvolvida a base integrada de métodos TOMMIX, que permite tirar partido da combinação de diferentes tipos de métodos interactivos de programação linear multiobjectivo, tornando possível a transferência de informação entre eles (utilizável nas fases subsequentes do processo de decisão), e usando meios de interacção com o utilizador e formas de apresentação de resultados comuns. Esta base integrada de métodos inclui os métodos STEM, Zionts-Wallenius, Interval

Criterion Weights, Pareto Race e TRIMAP, representativos de diferentes estratégias de redução do âmbito da pesquisa, técnicas de cálculo de soluções não dominadas e formas de obter informação sobre as preferências do agente de decisão. A base de métodos está especialmente adaptada a problemas de programação linear com três objectivos, o que permite o uso de meios gráficos particularmente úteis no diálogo com o agente de decisão. Por esta razão, foi-lhe dado o nome de **TOMMIX** ("three-objective methods mixed").

Do ponto de vista conceptual, TOMMIX pode ser encarado como um sistema interactivo de apoio à decisão, incluindo a base de métodos (associada a um conjunto de procedimentos auxiliares), uma base de diálogo e um módulo de gestão de dados (figura IV.1). O princípio subjacente à utilização de TOMMIX é apoiar interactivamente o agente de decisão a diminuir progressivamente o âmbito da pesquisa, fornecendo-lhe os meios para tirar partido de cada método, ou de sequências de métodos, em situações em que tal se revele mais adequado, perante as características do próprio agente de decisão, o tipo de problema e o conhecimento entretanto reunido sobre este.

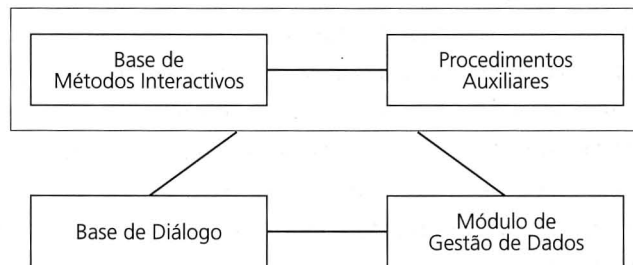


Figura IV.1 – Diagrama de blocos de TOMMIX.

A base de métodos oferece ao agente de decisão a possibilidade de adquirir conhecimento por diversas vias (usando diferentes tipos de informação de preferências e técnicas de cálculo de soluções não dominadas, destinadas a captar atitudes distintas do agente de decisão) e reunir esse conhecimento, sempre que possível, num meio coerente de partilha de informação. Pretende-se, desta forma, à medida que vai aumentando o



conhecimento sobre o problema em cada interacção, pôr à disposição do agente de decisão os meios e a informação que lhe permitam reflectir sobre as opções manifestadas anteriormente, propiciando-lhe uma atitude crítica em relação às preferências por ele definidas (que assumem, assim, um carácter evolutivo), nomeadamente possibilitando voltar atrás, se detectar incoerências entre as preferências manifestadas em diferentes interacções, ou, simplesmente, se mudar de ideias, ou se pretender explorar diferentes cenários. O agente de decisão é, assim, considerado uma componente central e activa do sistema de apoio à decisão, estando envolvido num processo com realimentação continuada. A condição de paragem do processo interactivo é, essencialmente, a satisfação do agente de decisão com o conhecimento adquirido sobre o problema, ao considerá-lo suficiente para basear uma decisão (ou a revisão do modelo), e não o teste de convergência de alguma função utilidade implícita (suposta pré-existente ao processo de decisão, e que vai sendo revelada no decurso deste).

A base integrada de métodos não tem a intenção de substituir o agente de decisão, mas a de o apoiar no estudo do problema, e na construção do seu sistema de preferências, fornecendo-lhe argumentos no sentido de reforçar, ou de enfraquecer as suas convicções, que evoluem ao longo do processo interactivo (privilegiando o *apoio à decisão* em vez da *produção de decisões*). Tal como é chamado a atenção em French (1984), "um bom apoio à decisão deve ajudar o agente de decisão a explorar não apenas o problema, mas também a si próprio, chamando-lhe a atenção para possíveis conflitos e incoerências nas suas preferências, de modo a que ele possa reflectir sobre a sua resolução".

## 2.1. TOMMIX VS. OUTRAS APROXIMAÇÕES DE INTEGRAÇÃO DE MÉTODOS

Embora muitas das análises e estudos comparativos de métodos interactivos multiobjectivo concluam, invariavelmente, com as vantagens e as desvantagens das diferentes aproximações, sugerindo a respectiva integração, no quadro de sistemas interactivos de apoio à decisão, como uma via prometedora (Brockoff (1985), Buchanan e Daellenbach (1987), Reeves e Gonzalez (1989)), apenas conhecemos (na literatura científica) duas tentativas de evolução neste sentido.

Ignizio (1985) desenvolveu um procedimento não interactivo, chamado MULTIPLEX, para problemas de programação linear multiobjectivo, que consiste num programa de minimização lexicográfica que pode ser configurado para diferentes tipos de problemas de *programação por metas* (*goal programming*), bem como para algoritmos geradores de todas as soluções básicas não dominadas.

Outra abordagem, mais recente, de integração de diferentes métodos interactivos de programação linear multiobjectivo é a *consolidação*<sup>1</sup> proposta por Steuer e Whisman (1986) e conceptualizada por Gardiner (1989) e Gardiner e Steuer (1994), sob a designação de *procedimento unificado de programação multiobjectivo*. Esta abordagem pretende criar um método interactivo global de programação linear multiobjectivo que englobe a maioria dos métodos mais conhecidos. Na base desta abordagem está o chamado *meta-programa* que inclui os diferentes tipos de métodos interactivos, que passam a ser casos particulares do *algoritmo consolidado*, através da concretização de parâmetros e da consideração, ou não, de conjuntos de restrições. Em cada transição de método, e em qualquer interacção com o agente de decisão, a preocupação fundamental é preservar os níveis de convergência já atingidos. O procedimento unificado de programação multiobjectivo definido por Gardiner consiste num algoritmo com 10 passos que pode ser configurado para qualquer dos 12 métodos interactivos escolhidos.

O procedimento unificado de programação multiobjectivo inclui os seguintes métodos: método das restrições, STEM, Geoffrion-Dyer-Feinberg (GDF), modificação de Winkels-Meika a GDF, versão interactiva de *Surrogate Worth Tradeoff*, versão interactiva de *goal programming*, versão de método de ponto de referência (a partir das concepções gerais propostas por Wierzbicki), *Interactive Weighted-sums/Filtering Approach*, *Interactive Weighted Tchebycheff* (duas versões), *Satisficing Tradeoff*, *Visual Interactive Approach* e *Pareto Race* (ver referências em Gardiner (1989)). Note-se que, devido à dificuldade de o incorporar num esquema conceptual muito rígido, limitativo das possibilidades de transferir informação útil entre métodos, não é incluído o método de Zionts-Wallenius, que é, sem dúvida, o mais conhecido dos que se baseiam na redução do espaço dos pesos.

---

<sup>1</sup> Steuer e Gardiner (1990, pp. 432) definem *consolidação* como a combinação de diferentes procedimentos interactivos num programa computacional comum.

A abordagem de integração de diferentes métodos interactivos de programação linear multiobjectivo subjacente ao TOMMIX tem uma filosofia diferente da perspectiva de *consolidação*. A base de métodos TOMMIX tem por objectivo a criação de uma ferramenta flexível, respeitando as características conceptuais dos métodos, onde a preocupação principal é a possibilidade de combinar os métodos, garantindo a transferência de informação útil, que possa ser usada nas fases seguintes do processo de decisão. Sublinhe-se que não se trata da comutação entre métodos, tendo em vista a convergência para o óptimo de uma função utilidade implícita do agente de decisão. Mesmo para os métodos em que originalmente é essa a ideia (isto é, métodos desenvolvidos partindo desse pressuposto), na base de métodos vão ser utilizados apenas para ajudar o agente de decisão a obter o conhecimento suficiente sobre o problema, clarificando a sua estrutura de preferências e, portanto, apoiando a tomada de decisão.

### 3. PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DO TOMMIX

O sistema de apoio à decisão é constituído por uma base de métodos interactivos de programação linear multiobjectivo (associada a uma *caixa de ferramentas* que inclui um conjunto de procedimentos auxiliares, que podem ser usados em qualquer fase do processo de decisão), uma base de diálogo e um módulo de gestão de dados (figura IV.1).

A base de métodos inclui os cinco métodos interactivos de programação linear multiobjectivo estudados no capítulo III, isto é: o STEM, o Zions-Wallenius (ZW), o Interval Criterion Weights (ICW), o Pareto Race (PR) e o TRIMAP.

Começemos por caracterizá-los.

- Estes métodos são representativos de diferentes estratégias para reduzir o âmbito da pesquisa:
  - redução da região admissível (STEM, TRIMAP),
  - redução do espaço dos pesos (ZW, TRIMAP),
  - contracção do cone dos critérios (ICW),
  - pesquisa direccionada<sup>2</sup> (PR).

---

<sup>2</sup> Embora a pesquisa direccionada não possa ser, propriamente, considerada uma estratégia de redução do âmbito da pesquisa, é conveniente, por razões de simplicidade, integrá-la nesta categoria.

- Apenas alguns destes métodos são estruturados, no que se refere à intervenção do utilizador para solicitar a realização de uma dada tarefa, durante o processo interactivo:
  - estruturados (STEM, ZW, ICW),
  - não estruturados (PR, TRIMAP).
- Estes métodos usam diferentes técnicas de cálculo de soluções não dominadas:
  - soma ponderada das funções objectivo (ZW, ICW, TRIMAP),
  - minimização de uma distância a um ponto de referência (STEM, PR, TRIMAP),
  - programação paramétrica em relação aos termos independentes de metas flexíveis (PR).
- Estes métodos requerem (directa ou indirectamente) informação distinta sobre as preferências do agente de decisão:
  - níveis de aspiração para as funções objectivo (PR, TRIMAP),
  - limitações inferiores para as funções objectivo (STEM, PR, TRIMAP),
  - limitações nos pesos (TRIMAP),
  - comparações par a par entre soluções (ZW),
  - escolha de uma solução, pertencente a uma amostra de soluções não dominadas (ICW),
  - avaliação de tendências de variação unitária ao longo de arestas não dominadas (ZW).
- Estes métodos apresentam diferentes formas de comunicação de informação com o utilizador.

A base de métodos TOMMIX, para além de permitir o uso isolado de cada método, oferece também a possibilidade de trocar de método, em qualquer fase da interacção com o agente de decisão. É, assim, possível tirar partido das potencialidades de cada método, em diferentes alturas do processo de decisão, identificar atitudes distintas do agente de decisão, bem como avaliar a qualidade da aplicação de cada um dos métodos em problemas de decisão particulares. A base de métodos de programação linear multiobjectivo permite total flexibilidade nas transições entre métodos, dado que as limitações adicionais (que reduzem o âmbito da pesquisa), introduzidas

usando um dado método, não interferem com as características fundamentais dos outros. Na figura IV.2 são apresentadas as transições entre métodos consideradas mais plausíveis.

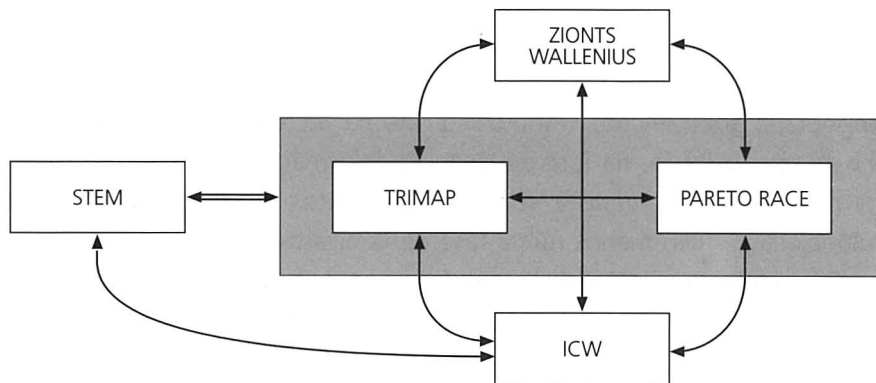


Figura IV.2 – Algumas transições admissíveis na base de métodos TOMMIX.

À base de métodos está associada uma *caixa de ferramentas*, constituída por um conjunto adicional de procedimentos que permitem:

- calcular todas as soluções básicas não dominadas (o que pode ser interessante após uma redução suficiente da região com interesse para o agente de decisão, delimitada durante o processo interactivo);
- calcular todas as soluções básicas não dominadas adjacentes a uma dada solução básica (para obter um melhor conhecimento local da região não dominada);
- construir uma amostra de um conjunto de soluções (obtida por filtragem) a apresentar ao agente de decisão (para obter um conjunto de soluções representativas, em princípio bem dispersas na região não dominada).

O sucesso e a aceitação deste tipo de sistemas de apoio à decisão dependem fortemente do tipo de interacção com o utilizador. Pretende-se oferecer ao agente de decisão uma comunicação fácil e flexível, por forma a melhorar a captação de preferências, e tirar o melhor partido das suas capacidades de processamento de informação. A base de diálogo controla todos os aspectos de interacção Ser Humano-computador, destinando-se a oferecer ao agente de decisão uma ferramenta de utilização fácil e intuitiva.

O espaço dos pesos tem um papel chave no *interface* gráfico oferecido pelo TOMMIX. É um instrumento valioso para guardar a informação obtida, sob várias formas, e durante a execução de diferentes métodos. Por exemplo, as limitações adicionais introduzidas nos valores das funções objectivo, ou as contracções do cone dos critérios são traduzidas para o espaço dos pesos, permitindo assim que a informação transferida entre métodos seja apresentada graficamente. Dado o seu carácter técnico, o agente de decisão terá de ser auxiliado, na interpretação da informação guardada no espaço dos pesos, por um analista com conhecimentos de programação linear multiobjectivo, pelo menos numa fase de familiarização com o programa.

O módulo de gestão de dados é responsável pela entrada de dados, edição de problemas e saída de resultados (para impressora ou disco).

#### **4. INTERACÇÃO SER HUMANO-COMPUTADOR**

O desenvolvimento de um ambiente de interacção Ser Humano-computador amigável, fácil de utilizar e intuitivo é de uma importância fundamental nos sistemas interactivos de apoio à decisão, tendo em vista ampliar as capacidades de processamento de informação do agente de decisão. No desenvolvimento de sistemas de apoio à decisão, deve ser dada especial atenção ao equilíbrio entre as potencialidades do que é oferecido ao utilizador, e a facilidade de aprendizagem e uso, tendo em atenção os principais limites das capacidades humanas (sobretudo a memória, a paciência e a exactidão de cálculo), dando relevo às suas características mais fortes (nomeadamente a inspecção visual e a capacidade de apreender material integrado e complexo (Olson, 1987)). No entanto, apesar da facilidade de aprendizagem de utilização ser um aspecto fundamental para a aceitação e sucesso de utensílios computacionais de apoio à decisão, há que tentar evitar a tendência para o desenvolvimento de aplicações computacionais de aprendizagem muito simples, mas que não são suficientemente poderosas para desempenhar as tarefas para que foram projectadas (Kammersgaard, 1988).

Podem distinguir-se dois estilos fundamentais de interacção Ser Humano-computador:

- o baseado num tipo de diálogo sequencial (cujos passos são, portanto, previsíveis), em que o utilizador descreve o que pretende, em geral usando uma linguagem de comando;
- o baseado num tipo de diálogo assíncrono, em que o utilizador mostra o que pretende manipulando directamente objectos no computador (por exemplo, por meio de um rato), e em que as suas acções, que iniciam sequências de diálogo, são vistas pelo sistema como acontecimentos (*input events*) a que este dá resposta.

No desenvolvimento do TOMMIX foi privilegiado um estilo de interacção baseado num tipo de diálogo assíncrono, directo e acessível, colocando sempre o utilizador como parte central do sistema, em sintonia com uma concepção do processo interactivo de apoio à decisão, em que o agente de decisão tem um papel activo de controlo do processo, tendo em vista uma melhor compreensão do problema e do seu próprio sistema de preferências.

#### 4.1. FORMAS DE APRESENTAÇÃO DE INFORMAÇÃO

Em cada fase de diálogo, para apresentar ao agente de decisão a informação resultante da(s) fase(s) de cálculo precedente(s), existem basicamente dois mecanismos: gráficos e tabelas. De acordo com experiências de psicologia cognitiva em processos de decisão, a apresentação de informação sob a forma de tabelas parece ser mais vantajosa (em termos da compreensão, por parte do agente de decisão), quando a sua estrutura de preferências está bem consolidada. Sendo mais fáceis de ler e fornecendo valores exactos, as tabelas são mais adequadas para fases finais do processo de decisão. As formas gráficas, dando uma visão global dos valores numéricos, parecem ser preferidas a grandes quantidades de resultados (geralmente nas fases iniciais do processo de decisão). Os gráficos melhoram a compreensão do problema, e contribuem para aumentar a rapidez na expressão de informação sobre preferências, nomeadamente por serem visualmente apelativos e adaptados (quando devidamente concebidos) à capacidade humana de reconhecimento de padrões (Remus, 1984).

A apresentação de resultados sob a forma gráfica, em ferramentas computacionais de apoio multiobjectivo à decisão, é considerada de

importância fundamental (Korhonen, 1987; Lewandowski e Granat, 1991), com vista a melhorar a compreensão do problema e das relações entre as suas componentes, contribuindo para a criação da estrutura de preferências do agente de decisão.

A utilização de gráficos em problemas multiobjectivo confronta-se com as dificuldades inerentes à representação gráfica de pontos em espaços multidimensionais. Uma das vias potencialmente mais interessantes, para obter representações deste tipo, baseia-se exactamente na capacidade humana de reconhecimento de padrões, através da utilização de objectos comuns estilizados (geralmente designados por ícones, como, por exemplo, faces humanas ou casas), aos quais é associado sem grande esforço um índice global de maior ou menor agradabilidade (harmonia), resultante da disposição das suas componentes (por exemplo, nariz e sobrancelhas, ou telhado e portas), que é controlada pelos valores alcançados em cada dimensão. Dois exemplos, desta via de apresentação multidimensional, são as faces de Chernoff (1973) e as casas harmoniosas (Korhonen, 1991). Note-se que o reconhecimento de padrões e a discriminação entre faces humanas, ou casas, são automáticos, dado que qualquer pessoa os faz intuitivamente. No entanto, apesar de possibilitar uma discriminação de alto nível (ao permitir dar conta de variações qualitativas em múltiplos parâmetros), estas formas de apresentação, ao serem avaliadas por inspecção visual, necessariamente subjectiva (nomeadamente no que se refere às faces humanas), podem suscitar estados emocionais que distorçam a avaliação dos dados que pretendem representar. Como a atribuição de parâmetros às características depende do autor e do utilizador, podem obter-se resultados diferentes para a análise dos mesmos dados. Sendo assim, o uso destas formas de apresentação de resultados recomenda-se, apenas, para analistas com bastante experiência, e, mesmo assim, com as devidas cautelas (Tufte, 1987).

Gráficos de outro tipo, para representar informação multidimensional, são baseados em projecções. Estes gráficos projectam num plano a informação multidimensional associada a cada ponto, de modo a preservar o mais possível as propriedades (distâncias, etc.) do espaço original, usando técnicas como, por exemplo, a análise de componentes principais.

Para além destes, há ainda os gráficos em que se individualiza a representação de cada solução como, por exemplo, os gráficos de barras, os sectores circulares e a teia de aranha.



A existência de conflito entre o desejo de obter mais informação e a incapacidade de a processar vem referida em alguns estudos experimentais (Buchanan e Daellenbach, 1987). Portanto, a investigação sobre formas estruturadas de apresentar informação multidimensional ao agente de decisão continua a ser uma área de investigação de grande importância para o desenvolvimento de ferramentas de apoio multiobjectivo à decisão. Há necessidade de avanços fundamentados, quer na perspectiva matemática, quer do ponto de vista da psicologia cognitiva.

A base de diálogo do TOMMIX permite ao utilizador escolher, sempre que possível, as formas gráficas de apresentação de informação com que, em cada momento, se sente mais à vontade e das quais pode tirar melhor partido. Estão disponíveis gráficos de barras, teias de aranha e projecções bidimensionais do espaço dos objectivos e do espaço dos pesos. Os gráficos em teia de aranha (*spider web*), também designados por mapas de radar (*radar charts*), ou estruturas em estrela (*star structures*), são uma forma particularmente útil de condensar as várias dimensões de avaliação num único gráfico. Por exemplo, a versão da teia de aranha considerando o ponto ideal (ou outro ponto de referência) no centro do gráfico, dá uma ideia visual da variação necessária em cada dimensão para atingir esse ponto (Kasanen *et al.*, 1991).

## **5. A COMPONENTE METODOLÓGICA NO TOMMIX**

### 5.1. CATEGORIZAÇÃO DOS MÉTODOS INCLUÍDOS NO TOMMIX

A categorização dos métodos interactivos de programação linear multiobjectivo adoptada baseia-se em:

- (a) estratégia de redução do âmbito da pesquisa;
- (b) técnica de escalarização para cálculo de soluções eficientes (função escalarizante);
- (c) informação de preferências requerida ao agente de decisão;
- (d) informação gráfica apresentada ao agente de decisão, após uma etapa de cálculo.

### 5.1.1 MÉTODO STEM (BENAYOUN *ET AL.*, 1971)

- (a) redução estruturada da região admissível;
- (b) minimização de uma distância ponderada de Tchebycheff à solução ideal;
- (c) quantidades relaxadas, para os valores das funções objectivo que o agente de decisão considera satisfatórios;
- (d) gráfico de barras, mostrando o valor de cada função objectivo (para um número pré-fixado das últimas iterações realizadas).

Em cada iteração, o problema a otimizar reflecte as escolhas do agente de decisão feitas em iterações precedentes, através da redução da região admissível. É apresentada ao agente de decisão a solução de compromisso calculada em cada iteração, minimizando uma distância ponderada de Tchebycheff à solução ideal. Se os valores das funções objectivo são considerados satisfatórios, o processo termina; caso contrário, o agente de decisão deve especificar quais pretende relaxar, por forma a melhorar outros objectivos. A região admissível é então reduzida, através de limitações nos valores das funções objectivo (calculadas com base nas quantidades de relaxação introduzidas pelo agente de decisão).

Na implementação do método STEM, na base de métodos TOMMIX, foram acrescentadas algumas potencialidades, em relação à versão original, destinadas a tornar o método mais flexível, nomeadamente:

- (1) é permitido ao agente de decisão relaxar até  $(p-1)$  funções objectivo em cada interacção, o que atenua as dificuldades associadas à escolha de um único objectivo a relaxar;
- (2) cada função objectivo pode ser relaxada em diferentes interacções, se o agente de decisão o entender, o que facilita o estabelecimento das quantidades de relaxação, visto que permite a revisão dos valores relaxados em interacções sucessivas;
- (3) o agente de decisão pode alterar as quantidades de relaxação impostas pelo método, introduzindo valores mais ou menos restritivos em relação aos que resultam da última fase de cálculo;
- (4) o agente de decisão pode regressar à solução inicial, sempre que o pretenda, o que lhe possibilita seguir novas vias de pesquisa;
- (5) se as restrições impostas pelo agente de decisão conduzirem a um problema sem região admissível, é dada a possibilidade de voltar à

fase de diálogo anterior, não considerando as relaxações anteriormente impostas. Note-se que este caso não ocorre no funcionamento *standard* do método, só podendo acontecer quando o agente de decisão usa as facilidades adicionais mencionadas em (3).

#### 5.1.2. MÉTODO DE ZIONTS-WALLENIUS (ZIONTS E WALLENIUS, 1976, 1983)

- (a) redução estruturada do espaço dos pesos;
- (b) optimização de uma soma ponderada das funções objectivo;
- (c) comparação entre pares de soluções básicas não dominadas, e avaliação de tendências de variação unitária ao longo de arestas que têm origem na solução actual e que conduzem a soluções básicas não dominadas adjacentes;
- (d) apresentação do espaço dos pesos, para problemas com duas ou três funções objectivo, mostrando as regiões de indiferença para todas as soluções básicas não dominadas já calculadas, e gráficos de barras mostrando o valor de cada função objectivo (das últimas iterações). Podem também ser visualizadas (ou omitidas, para aumentar a clareza do gráfico) as restrições que vão sendo introduzidas no espaço dos pesos.

Inicialmente é escolhido um vector de pesos e optimiza-se a respectiva função escalar soma ponderada das funções objectivo, obtendo-se uma solução básica não dominada. A partir das respostas dadas pelo agente de decisão, relativas a comparações entre pares de soluções básicas não dominadas, e de avaliações de tendências de variação unitária ao longo de arestas que conduzem a soluções básicas não dominadas adjacentes, o método introduz restrições no espaço dos pesos, reduzindo progressivamente o domínio admissível, para a selecção de um novo vector de pesos. O processo termina quando o espaço dos pesos for reduzido a uma região suficientemente pequena de forma a que seja identificada uma solução final, ou quando a informação de preferências expressa pelo agente de decisão leve a considerar a solução actual como a mais interessante. Parte-se do princípio de que as respostas do agente de decisão nas fases de diálogo são coerentes com uma função utilidade implícita, embora, no caso de serem detectadas

incoerências, haja a possibilidade de eliminar as restrições mais antigas no espaço dos pesos.

Note-se que na implementação do TOMMIX, as comparações par a par entre soluções, e os julgamentos sobre tendências de variação unitária prosseguem, apenas, até ser obtida a primeira resposta positiva.

### 5.1.3. MÉTODO INTERVAL CRITERION WEIGHTS (STEUER, 1977, 1986)

- (a) redução estruturada do cone dos critérios (cone convexo gerado pelos gradientes das funções objectivo);
- (b) otimização de várias somas ponderadas das funções objectivo;
- (c) escolha da solução preferida de uma amostra de soluções não dominadas;
- (d) espaço dos pesos correspondente ao cone de critérios contraído, para problemas com duas ou três funções objectivo, e projecção bidimensional do espaço dos objectivos, mostrando as soluções básicas e arestas não dominadas já calculadas.

Partindo de um conjunto pré-definido de combinações convexas dos gradientes das funções objectivo, calcula-se uma série de soluções, da qual é apresentada uma amostra ao agente de decisão. A solução escolhida pelo agente de decisão indica a combinação convexa de gradientes das funções objectivo que corresponde mais de perto às suas preferências. O cone dos critérios é contraído em torno desse gradiente, resultando o cone de critérios reduzido da iteração seguinte. O cone dos critérios é, assim, gradualmente contraído e deslocado, até se focar numa pequena parte da região admissível, contendo a solução básica não dominada que virá a ser preferida pelo agente de decisão.

---

274

No sentido de tornar o método mais flexível, a implementação do ICW na base de métodos TOMMIX não impõe a necessidade de escolha *a priori* do número de iterações, determinando o agente de decisão o instante em que acha conveniente terminar o processo de pesquisa. No âmbito da base de métodos TOMMIX, o agente de decisão é chamado a especificar inicialmente o tamanho da amostra, o tipo de filtragem e os parâmetros associados.

#### 5.1.4. MÉTODO PARETO RACE (KORHONEN E WALLENIUS, 1988)

- (a) pesquisa direccional (não estruturada);
- (b) minimização de uma distância ponderada de Tchebycheff a um ponto de referência, e programação paramétrica em relação aos termos independentes;
- (c) definição do ponto de referência e especificação das funções objectivo a melhorar, alterando a direcção do movimento;
- (d) apresentação de gráficos de barras representando os valores das funções objectivo, que variam dinamicamente à medida que a pesquisa da região não dominada vai decorrendo, e gráficos mostrando as trajectórias sobre a superfície não dominada, para cada função objectivo, considerando a direcção e o ponto de referência actuais. A velocidade e a direcção do movimento são controladas através de um painel de controlo. A implementação computacional original é o programa VIG - Visual Interactive Goal Programming (Korhonen, 1987).

A partir de níveis de aspiração para os valores das funções objectivo, especificados inicialmente pelo agente de decisão, constrói-se uma direcção de referência. Esta direcção de referência é projectada sobre o conjunto das soluções eficientes, gerando uma trajectória (sub-conjunto das soluções eficientes) que é apresentada ao agente de decisão. Esta técnica permite ao agente de decisão percorrer a fronteira eficiente, controlando a direcção do movimento (privilegiando a função objectivo que se pretenda, em cada momento) e a velocidade (obtendo soluções mais ou menos próximas umas das outras, conforme a velocidade escolhida).

#### 5.1.5. MÉTODO TRIMAP (CLÍMACO E ANTUNES, 1987, 1989)

- (a) combina a redução da região admissível com a redução do espaço dos pesos, de forma não estruturada;
- (b) optimização de uma soma ponderada das funções objectivo e minimização de uma distância ponderada de Tchebycheff a um ponto de referência;

- (c) especificação de níveis mínimos para os valores das funções objectivo, imposição de limitações no espaço dos pesos e definição do ponto de referência;
- (d) espaço dos pesos mostrando as regiões de indiferença correspondentes a todas as soluções básicas não dominadas já conhecidas, incluindo as restrições à variação dos pesos resultantes de limitações adicionais impostas nos valores das funções objectivo, ou directamente introduzidas no espaço dos pesos.

Inicialmente são calculadas as soluções eficientes que optimizam cada uma das funções objectivo, fornecendo ao agente de decisão uma primeira informação sobre a gama de variação dos valores de cada função objectivo, e a solução eficiente que minimiza uma distância ponderada de Tchebycheff à solução ideal. Através da análise comparativa do espaço dos pesos e do espaço dos objectivos, o agente de decisão pode fazer uma cobertura progressiva e selectiva do espaço dos pesos, decidindo, em cada interacção, o interesse de pesquisar soluções em áreas do triângulo ainda não exploradas. A redução do âmbito da pesquisa é feita, principalmente, impondo limitações nos valores das funções objectivo, que são traduzidas automaticamente para o espaço dos pesos. A introdução destas limitações adicionais pode ainda ser usada para obter soluções não dominadas que não sejam soluções básicas da região admissível.

## 5.2. TRANSIÇÕES ENTRE MÉTODOS

Nesta secção são explicitadas as transições entre métodos, colocando em relevo a transferência de informação que pode ser utilizada em fases subsequentes do processo de decisão interactivo.

A consideração de limitações nos valores das funções objectivo é sempre possível nas transições entre quaisquer métodos, quer aproveitando as impostas pelo método de partida (sempre que neste método seja possível impô-las directa ou indirectamente), quer pela vontade do agente de decisão, reflectindo a sua aprendizagem sobre o problema e a consolidação da sua estrutura de preferências. Estas limitações nos valores das funções objectivo

podem ter um carácter definitivo (correspondendo a uma reformulação do problema e, portanto, conduzindo a reiniciar o processo para este novo problema) ou temporário (permitindo a visualização das limitações nos meios de comunicação de informação gráfica, nomeadamente no espaço dos pesos).

A informação de preferências do agente de decisão transmitida entre métodos pode ser modificada pelo utilizador (o agente de decisão e/ou o analista). Por exemplo, ao passar do STEM para o PR é assumida a última solução calculada no STEM como ponto de referência, para entrar no PR exactamente por essa solução; no entanto, esta informação pode desde logo ser alterada pelo utilizador. Na passagem do STEM e do PR para os métodos que calculam soluções básicas (ZW, ICW e TRIMAP) é dada a opção de determinar, ou não, todas as soluções básicas da face onde se localiza a última solução do STEM ou do PR, tendo em conta o interesse dessa informação para o prosseguimento da pesquisa e o esforço computacional que pode estar envolvido.

#### STEM ⇔

Em qualquer transição podem ser aproveitadas (ou alteradas) as restrições nos valores das funções objectivo, resultantes das relaxações especificadas durante a utilização do STEM.

- ⇔ PR: entra pela última solução calculada, adoptando-a como ponto de referência, e especifica a direcção do movimento de acordo com as funções objectivo que melhoraram os seus valores na última iteração do STEM.
- ⇔ ZW: calcula todas as soluções básicas da face onde se localiza a última solução do STEM, e o agente de decisão escolhe uma delas para prosseguir com o ZW.
- ⇔ ICW: calcula todas as soluções básicas da face onde se localiza a última solução do STEM. A contracção é feita em torno do vector de pesos, pré-definido pelo ICW, mais próximo (em termos de distância euclideana) do centro de gravidade da região de indiferença no espaço dos pesos correspondente à solução básica escolhida pelo agente de decisão (de entre as calculadas anteriormente).
- ⇔ TRIMAP: calcula todas as soluções básicas da face onde se localiza a última solução do STEM, e apresenta-as graficamente.

PR ⇔

Em qualquer transição, podem ser aproveitadas (ou alteradas) as restrições nos valores das funções objectivo impostas durante a utilização do PR.

- ⇔ STEM: entra pela última solução calculada no PR; ou reinicia o processo, considerando, ou não, as restrições impostas no PR para o cálculo da solução inicial do STEM, tomando-as como restrições opcionais, no caso de serem mais limitativas do que as relaxações das funções objectivo (em cada iteração).
- ⇔ ZW: calcula todas as soluções básicas da face onde se localiza a última solução do PR, e o agente de decisão escolhe uma delas para prosseguir com o ZW.
- ⇔ ICW: calcula todas as soluções básicas da face onde se localiza a última solução do PR. A contracção é feita em torno do vector de pesos, pré-definido pelo ICW, mais próximo (em termos de distância euclideana) do centro de gravidade da região de indiferença no espaço dos pesos correspondente à solução básica escolhida pelo agente de decisão (de entre as calculadas anteriormente).
- ⇔ TRIMAP: calcula todas as soluções básicas da face onde se localiza a última solução do PR, e apresenta-as graficamente.

ICW ⇔

Pode considerar (i) ou não considerar (ii) a contracção do cone dos critérios.

- ⇔ STEM: no caso (ii), escolhe a solução preferida da amostra gerada na última iteração do ICW e entra por ela no STEM, ou reinicia o processo com o cone original. No caso (i), reinicia o processo com o cone contraído.
- ⇔ PR: no caso (ii), escolhe a solução preferida da amostra gerada na última iteração do ICW e entra por ela no PR, adoptando-a como ponto de referência. Solicita ao agente de decisão informação sobre qual a função objectivo a melhorar. No caso (i), reinicia o processo com o cone contraído.
- ⇔ ZW: no caso (ii), escolhe a solução preferida da amostra gerada na última iteração do ICW e entra por ela no ZW, mantendo a



- informação no espaço dos pesos sobre a região correspondente ao cone contraído. No caso (i), reinicia o processo com o cone contraído.
- ⇨ TRIMAP: no caso (ii), apresenta as soluções da amostra gerada na última iteração do ICW, e mantém informação no espaço dos pesos sobre a região correspondente ao cone contraído. No caso (i), reinicia o processo com o cone contraído.

#### TRIMAP ⇨

Em qualquer transição podem ser aproveitadas (e alteradas) as restrições nos valores das funções objectivo impostas durante a utilização do TRIMAP.

- ⇨ STEM: escolhe uma solução (eventualmente não básica) calculada no TRIMAP e entra por ela no STEM; ou reinicia o processo considerando, ou não, as restrições impostas no TRIMAP para o cálculo da solução inicial do STEM, tomando-as como restrições opcionais, no caso de serem mais limitativas do que as relaxações das funções objectivo (em cada iteração).
- ⇨ PR: escolhe uma solução (eventualmente não básica) calculada no TRIMAP e entra por ela no PR, adoptando-a como ponto de referência, e solicita ao agente de decisão informação sobre qual a função objectivo a melhorar.
- ⇨ ZW: escolhe uma solução (básica) calculada no TRIMAP e entra por ela no ZW.
- ⇨ ICW: escolhe uma solução (básica) calculada no TRIMAP e entra por ela no ICW, fazendo a contracção do cone dos critérios em torno do vector de pesos pré-definido mais próximo (no sentido acima referido) do centro de gravidade da região de indiferença correspondente à solução básica seleccionada.

#### ZW ⇨

- ⇨ STEM: entra pela última solução calculada no ZW ou reinicia o processo.
- ⇨ PR: entra pela última solução calculada no ZW, adoptando-a como ponto de referência, e solicita ao agente de decisão informação sobre qual a função objectivo a melhorar.

- ⇒ ICW: faz a contracção do cone dos critérios em torno do vector de pesos pré-definido mais próximo (no sentido acima referido) do centro de gravidade da região de indiferença correspondente à última solução calculada no ZW, e mostra as restrições que reduzem o espaço dos pesos.
- ⇒ TRIMAP: apresenta todas as soluções calculadas durante a utilização do ZW, e mostra as restrições que reduzem o espaço dos pesos.

A tabela seguinte apresenta um sumário das restrições adicionais impostas para limitar o âmbito da pesquisa, e o respectivo tratamento nas transições entre métodos.

Restrições adicionais	Definitivas ( <i>Hard</i> )	Temporárias ( <i>Soft</i> )
Valores mínimos para as funções objectivo	Reformula o problema inicial, incluindo estas restrições adicionais, e reinicia o processo.	– Traduz para o espaço dos pesos no TRIMAP, ICW e ZW; – considera limitações flexíveis no PR; – limites para as relaxações no STEM.
Contracção do cone das funções objectivo	Reformula o problema inicial, alterando as funções objectivo, e reinicia o processo.	Representa a região correspondente ao cone contraído, no espaço dos pesos do cone original (no TRIMAP, ICW e ZW).
Limitações nos pesos	—	Representa no espaço dos pesos (no TRIMAP, ICW e ZW).

## 6. UMA VISÃO GERAL DO FUNCIONAMENTO DO TOMMIX

A base de métodos TOMMIX permite total flexibilidade nas transições entre métodos (embora algumas das transições possam não ser as mais adequadas, tendo em vista o aumento do conhecimento do agente de decisão sobre o problema, todas são permitidas).

Numa fase inicial do processo de pesquisa, revela-se geralmente mais adequado o uso de métodos que permitem a limitação da pesquisa futura a uma zona mais restrita da região admissível (STEM, ICW, TRIMAP), enquanto numa fase final se privilegiam geralmente os métodos que permitem uma

pesquisa de carácter local (ZW, PR, TRIMAP). Apesar da dificuldade em realizar estudos experimentais nesta área, esta forma de proceder está de acordo com os resultados de experiências divulgados na literatura científica. Por exemplo, Buchanan e Daellenbach (1987) concluíram que os participantes em experiências de laboratório faziam inicialmente uma apreciação global a partir de uma visão geral, prosseguindo depois para uma pesquisa local numa vizinhança próxima da solução preferida. De facto, as preferências do agente de decisão são geralmente pouco precisas. Torna-se, assim, necessário levar a cabo uma fase inicial de exploração, em que o agente de decisão possa conhecer melhor o problema, e rever as suas preferências *a priori* (geralmente relativas a problemas semelhantes com que se deparou anteriormente). Apenas quando o agente de decisão estiver suficientemente seguro, isto é, apto para explicitar a sua estrutura de preferências, sentindo-se à vontade para responder às questões que lhe são formuladas durante a execução dos métodos, será útil prosseguir uma fase de pesquisa, em que ele tenta encontrar uma solução de compromisso final ou um conjunto de alternativas para posterior análise. Este modo de funcionamento contempla uma aprendizagem por *tentativa e erro*, inerente a qualquer processo humano de decisão, por forma a proporcionar ao agente de decisão o aumento do seu conhecimento sobre o problema, especialmente útil para utilização futura, em fases posteriores do processo. Isto é, este conhecimento propicia novos ensaios para expressar preferências, e, portanto, novas direcções de pesquisa.

O princípio subjacente à utilização do TOMMIX consiste em ajudar o agente de decisão a, progressiva e interactivamente, diminuir o âmbito da pesquisa, graças à aprendizagem sobre o problema em estudo. O agente de decisão é, assim, considerado como uma componente activa do sistema de apoio à decisão, sendo a sua estrutura de preferências construída progressivamente durante a execução do processo interactivo.

As acções do agente de decisão são sempre revogáveis, permitindo-lhe fazer tentativas sem consequências posteriores, se a respectiva direcção de pesquisa for considerada sem interesse. Conseguem-se, assim, ter em conta julgamentos subjectivos do agente de decisão, que poderão, ou não, ser confirmados em experiências posteriores. Estas possibilidades reforçam a importância do agente de decisão, no sentido em que lhe permitem reconhecer a decisão final como sua, sem sentir que houve transferência das suas competências para o computador.

Na transição entre dois métodos, podem, ou não, ser consideradas as modificações previamente introduzidas (por exemplo, redução da região admissível ou contracção do cone dos critérios) de acordo com a vontade do agente de decisão. As modificações serão, em princípio, confirmadas sempre que o agente de decisão considere que as decisões tomadas anteriormente o conduziram a uma região de pesquisa concordante com as suas preferências, tendo, por isso, interesse em prosseguir o estudo neste universo mais reduzido. Por outro lado, as modificações podem ser ignoradas quando o agente de decisão considerar que não prosseguiu na *direcção correcta*. No entanto, este pode ser um passo importante para a sua aprendizagem, quer sobre o problema, quer sobre a sua estrutura de preferências (embora neste caso, as informações de preferências expressas não sejam explicitamente incorporadas no prosseguimento da pesquisa).

De acordo com o tipo de situação, podem distinguir-se diferentes *graus de aprendizagem*:

- a mudança de um método para outro, num dado momento do processo interactivo, significa, do ponto de vista do novo método (e devido à sua estrutura interna), reiniciar o processo (por exemplo, transição do ZW para o STEM);
- imposição de restrições na região de pesquisa, nomeadamente como resultado do estabelecimento de limitações inferiores nos valores das funções objectivo (introduzidas explicitamente no PR, ou no TRIMAP, e implicitamente no STEM), ou contracção do cone dos gradientes das funções objectivo (ICW);
- na transição de um método para outro, iniciar o novo método partindo da solução obtida na última interacção, ou a partir de outra seleccionada pelo agente de decisão, existindo ou não redução da região de pesquisa (por exemplo, transições STEM-PR, TRIMAP-ZW).

Em certos casos, um método pode ser usado como um procedimento com objectivos um pouco diferentes dos propostos na sua versão original. Alguns exemplos são:

- executar uma (ou várias) iterações usando o método STEM, pretendendo estabelecer limitações adicionais para os valores das funções objectivo.

- Usar o método ZW localmente. Isto é, a partir de uma solução básica não dominada, compará-la com soluções básicas não dominadas adjacentes e/ou fazer julgamentos sobre as tendências de variação unitária dos valores das funções objectivo relativas a deslocamentos sobre arestas não dominadas. Dá-se, assim, a possibilidade de introduzir restrições no espaço dos pesos, o que significa, implicitamente, o estabelecimento de limitações na região admissível.
- Efectuar uma ou várias contracções do cone dos gradientes das funções objectivo, usando o método ICW, para obter a representação do cone contraído no espaço dos pesos do cone original, podendo depois proceder-se a uma pesquisa livre nessa região.

#### 6.1. UTILIZAÇÃO DOS MÉTODOS NO QUADRO OPERACIONAL DA BASE DE MÉTODOS TOMMIX

Neste parágrafo, faz-se uma breve referência à utilização mais comum (mas não única) de cada método, tendo em atenção, quer as respectivas características fundamentais, quer as experiências realizadas em problemas de planeamento energético (Clímaco e Antunes, 1990; Antunes *et al.*, 1989a) e de planeamento da modernização de redes de telecomunicações (Antunes *et al.*, 1993).

O STEM é útil para a obtenção de soluções não dominadas, que não são, em geral, soluções básicas, dando a possibilidade de uma redução substancial da região admissível nas primeiras interacções com o agente de decisão. O STEM é tipicamente um bom método para uma pesquisa inicial, pelo que é habitual reiniciar o processo quando se comuta para este método. As limitações nos valores das funções objectivo, resultantes das quantidades de relaxação permitidas pelo agente de decisão, podem ser consideradas nas transições para os métodos PR, ZW e TRIMAP. Na transição para o ZW e TRIMAP, essas limitações são traduzidas no espaço dos pesos.

O método de Zionts-Wallenius é essencialmente adequado para proceder a uma pesquisa mais localizada, numa região anteriormente delimitada pelo agente de decisão no decorrer do processo interactivo. Durante a utilização do método, são apresentadas graficamente as restrições que vão sendo introduzidas no espaço dos pesos. É, assim, visualizada a região deste espaço onde a pesquisa deve prosseguir, para ser coerente com respostas dadas previamente, relativas à comparação de soluções básicas não dominadas e/

ou avaliação de julgamentos de tendências de variação unitária das funções objectivo. Quando ocorre uma transição para os métodos TRIMAP ou ICW, é apresentada graficamente a região reduzida do espaço dos pesos.

O método ICW é adequado para obter uma visão global do conjunto das soluções não dominadas (devido à dispersão dos vectores pesos), bem como para a redução da região admissível nas primeiras interacções. Isto deve-se ao facto de o cone dos critérios se ir deslocando e contraindo, *focando-se* numa parte da região admissível. Quando é feita uma transição para os métodos ZW ou para o TRIMAP, é visualizado graficamente o espaço dos pesos, correspondente ao cone dos critérios contraído, ou ao original (conforme o agente de decisão pretenda, ou não, considerar o cone dos critérios contraído para o prosseguimento da sua pesquisa). Em caso negativo, o espaço dos pesos correspondente ao cone dos critérios contraído é representado dentro do espaço dos pesos do problema original (como um meio de informação adicional).

O método Pareto Race tem especial interesse na exploração local de faces não dominadas (geralmente numa fase final do processo de pesquisa), sendo também útil para o estabelecimento de limitações nos valores das funções objectivo. Quando há transição do PR para os outros métodos, são calculadas todas as soluções básicas que definem a face onde a pesquisa direccionada foi interrompida. No caso de transição para o TRIMAP, todas essas soluções são adicionadas ao conjunto de soluções já calculadas em interacções anteriores deste método. Para entrar nos métodos ZW ou ICW, é pedido ao agente de decisão para escolher um desses pontos. Pode transitar-se para o método PR partindo do STEM, ZW, ICW ou TRIMAP, através de qualquer solução não dominada calculada nesses métodos que, nos casos do STEM ou do TRIMAP, pode ser uma solução não básica.

O TRIMAP é um método especialmente adequado para uma pesquisa livre, permitindo obter, progressiva e selectivamente, numa primeira fase, um conhecimento global sobre o problema. O agente de decisão pode adoptar dois tipos de estratégias:

- proceder a uma pesquisa destinada a obter informação global sobre o problema e impor limitações adicionais nas funções objectivo, uma vez identificados os valores mínimos que está disposto a aceitar, de acordo com as suas preferências;
- realizar uma pesquisa local, explorando determinadas zonas específicas.

Devido à sua flexibilidade na pesquisa de soluções, e à reunião da informação num meio que permite uma visão global, o método TRIMAP está vocacionado para funcionar como método *pivot* no quadro operacional do TOMMIX. Isto significa que há uma passagem intermédia pelo TRIMAP em muitas das transições entre métodos, quer para proceder a uma pesquisa adicional para obter informação útil, antes de nova transição, quer para avaliar globalmente a informação entretanto recolhida.

## 7. EXEMPLO ILUSTRATIVO DO USO DO TOMMIX

Para ilustrar a aplicação da base de métodos TOMMIX a problemas lineares multiobjectivo, considere-se o seguinte problema, com quatro variáveis de decisão, três funções objectivo a maximizar e três restrições:

$$\max \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{s. a: } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \underline{0}$$

Sejam  $x_5, x_6, x_7$  as variáveis folga (*slacks*) correspondentes às restrições 1, 2 e 3, respectivamente.

Suponha-se que o agente de decisão começa por usar o método ICW para obter uma amostra de soluções eficientes (por exemplo, para uma amostra de tamanho 4, i.e. em cada interacção são apresentadas quatro soluções ao agente de decisão). O agente de decisão selecciona a sua preferida. Em cada iteração são resolvidos  $2p+1$  problemas lineares ( $p$  é o número de funções objectivo). Os pontos do espaço dos pesos (figura IV.3)<sup>3</sup> representam os vectores de pesos gerados automaticamente pelo método.

<sup>3</sup> As figuras IV.3 a IV.10 são obtidas por cópia dos ecrãs apresentados ao utilizador, eventualmente com um pequeno tratamento gráfico posterior, para paginação ou para melhorar a legibilidade.

Seja a solução 4, da figura IV.3, a solução preferida pelo agente de decisão, seleccionada para contrair o cone dos critérios, reduzindo o âmbito da pesquisa na sua vizinhança. Note-se que a solução 4 é obtida, quer a partir do vector de pesos (1/3,1/3,1/3), quer do vector (1/9,4/9,4/9), pré-definidos no ICW. A contracção é efectuada em torno do vector de pesos *mais central* (em relação ao espaço dos pesos).

A análise do espaço dos pesos revela o seguinte: existe pelo menos outra solução, alternativa à solução 2, que também otimiza  $f_2$ ; a aresta não dominada que liga as soluções básicas 2 e 4 é também já conhecida; as soluções básicas não dominadas já conhecidas são:

Solução	$f_1$	$f_2$	$f_3$	Área (%)	$\underline{x}_B$	$L_\infty$
1	66.0	30.0	-12.0	13.43	$x_1=18.0; x_3=6.0; x_7=14.0$	87.0
2	12.5	50.0	25.0	7.87	$x_4=12.5; x_5=22.5; x_6=35.0$	53.5
3	15.0	-15.0	75.0	1.25	$x_2=15.0; x_5=45.0; x_7=20.0$	65.0
4	18.3	15.0	71.7	17.0	$x_2=11.7; x_4=6.7; x_5=28.3$	47.7

Para cada solução básica não dominada, a coluna da tabela designada por *Área* apresenta a percentagem da área do espaço dos pesos ocupada pela região de indiferença correspondente, e a coluna  $\underline{x}_B$  dá os valores das variáveis básicas. A coluna  $L_\infty$  dá a distância de cada solução no espaço das funções objectivo à solução ideal, de acordo com a métrica de Tchebycheff.

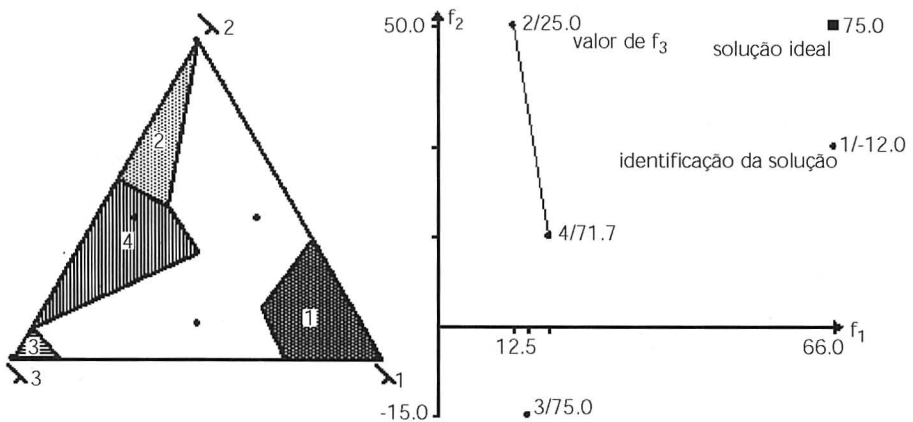


Figura IV.3 – Visualização do espaço dos pesos e do plano  $f_1f_2$  do espaço das funções objectivo para o método Interval Criterion Weights.



O método TRIMAP é adequado nesta fase do processo interactivo de apoio à decisão, visto que permite explorar regiões ainda não cobertas no espaço dos pesos. Nomeadamente, permite analisar detalhadamente regiões identificadas como interessantes pelo agente de decisão. A passagem do método ICW para o TRIMAP pode efectuar-se de duas formas:

- considerando o cone contraído, o que corresponde a centrar a pesquisa numa vizinhança, mais ou menos alargada, da solução 4; então, após a contracção do cone dos gradientes das funções objectivo em torno da solução 4, a amostra (de 4 soluções) apresentada ao utilizador é constituída pelas soluções 1, 4, 5 e 6 (a figura IV.4a mostra as regiões de indiferença no espaço dos pesos do problema, considerando o cone contraído);
- considerando o cone original, e visualizando o espaço dos pesos correspondente ao cone contraído, sobreposto no espaço dos pesos do problema original (figura IV.4b).

Suponha-se que a transição para o método TRIMAP é feita de acordo com esta última opção.

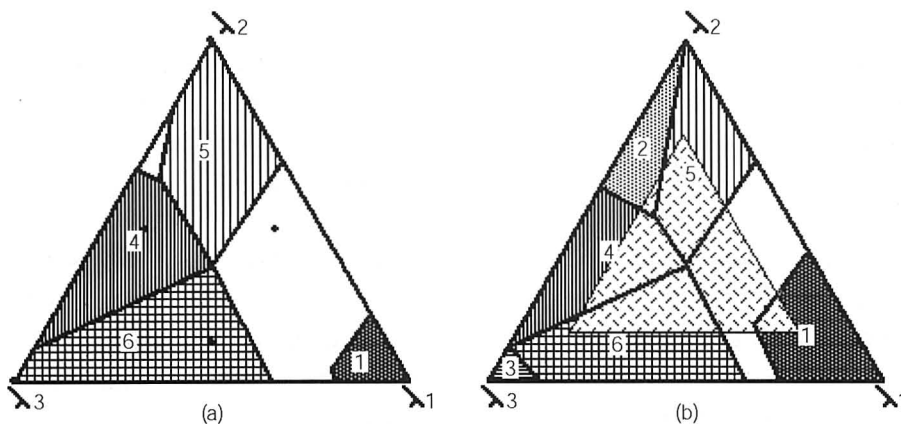


Figura IV.4 – Visualização do espaço dos pesos na transição do ICW para o TRIMAP: (a) considerando o cone contraído; (b) com informação sobre o cone contraído sobreposta no espaço dos pesos original.

As soluções 5 e 6 (figura IV.4b) foram obtidas seleccionando com o *rato* um conjunto de pesos numa zona não coberta do triângulo. A solução 5 é

óptima alternativa da solução 2, em relação a  $f_2$ . A análise do espaço dos pesos, na figura IV.4b, revela que já é conhecida uma face não dominada, definida pelas soluções básicas 2, 4 e 5, e que existe uma outra face definida pelas soluções básicas 3, 4 e 6, que é dominada pelos pontos situados sobre as arestas 3-6 e 6-4 (comparar com a projecção do espaço dos objectivos na figura IV.5). Note-se que a figura IV.5(b) permite concluir que as soluções 1, 2, 4, 5 e 6 também são soluções não dominadas para o problema com o cone das funções objectivo contraído.

As soluções 5 e 6 têm as seguintes características:

Solução	$f_1$	$f_2$	$f_3$	Área (%)	$\underline{x}_B$	$L_\infty$
5	51.0	50.0	4.0	17.0	$x_1=14.0; x_4=9.0; x_5=5.0$	71.0
6	29.0	3.0	73.0	23.7	$x_2=13.0; x_3=8.0; x_5=15.0$	47.0

Para além de possibilitar uma pesquisa livre, o TRIMAP é especialmente útil para o estabelecimento de limitações nos valores das funções objectivo. Esta informação é traduzida para o espaço dos pesos, sendo apresentadas as regiões correspondentes às soluções não dominadas que satisfazem as restrições impostas pelo agente de decisão. Suponha-se que, em relação a  $f_1$ , o agente de decisão não está interessado em soluções que distem da solução ideal mais do que 40. Esta informação de preferências corresponde a introduzir a restrição adicional  $f_1(\underline{x}) \geq 26$ , que é satisfeita na região do espaço dos pesos, assinalada na figura IV.5. As soluções básicas 1, 5 e 6, já conhecidas, satisfazem esta restrição adicional imposta pelo agente de decisão.

Para calcular soluções não básicas com características interessantes para o agente de decisão, e para, eventualmente, reduzir mais o âmbito da pesquisa a partir de informação de preferências sobre os valores das funções objectivo, é feita uma transição para o método STEM, considerando a restrição  $f_1(\underline{x}) \geq 26$  imposta durante a utilização do TRIMAP.

O resultado da primeira iteração do método STEM (considerando a restrição adicional) é apresentado na figura IV.6 (barras com padrão cinzento escuro). A solução obtida é  $x_1=5.73$ ,  $x_2=7.16$ ,  $x_3=1.63$ ,  $x_4=6.26$ .

Supondo que o agente de decisão decide relaxar  $f_3(\underline{x})$  de 15, faz-se mais uma iteração do método STEM (barras com padrão cinzento claro na figura IV.6). A solução é  $x_1=8.87$ ,  $x_2=4.72$ ,  $x_3=2.68$ ,  $x_4=5.91$ .

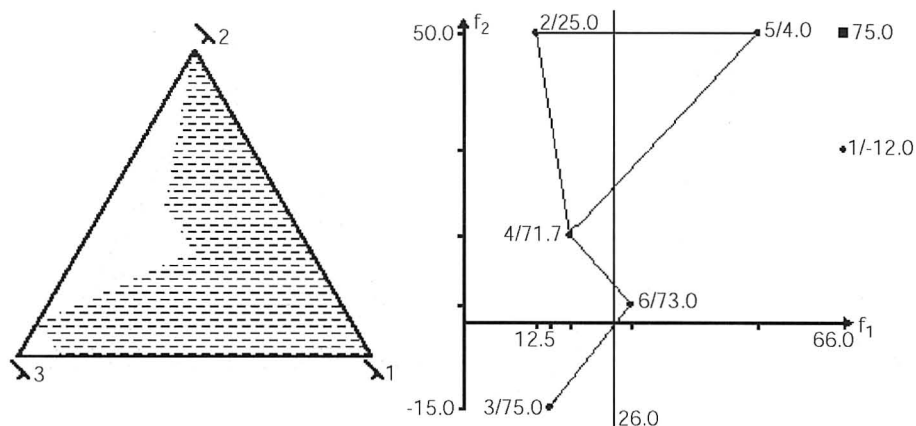


Figura IV.5 – Uso do TRIMAP para impor restrições adicionais nos valores das funções objectivo.

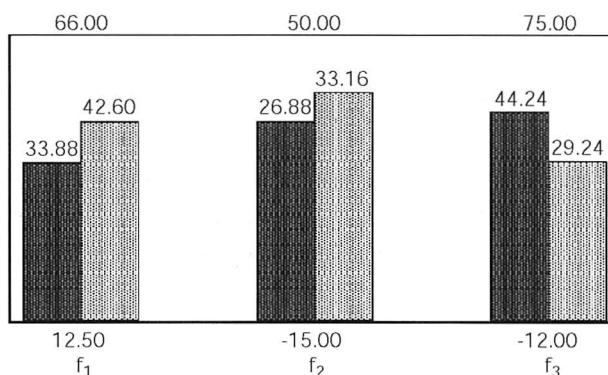


Figura IV.6 – Uso do STEM.

Ao abandonar o método STEM, é dada ao agente de decisão a possibilidade de considerar, ou não, as restrições introduzidas, ou mesmo modificá-las. Suponha-se que, para continuar a pesquisa numa região mais reduzida, usando o método TRIMAP, o agente de decisão decide considerar as restrições  $f_1 \geq 33.88$ ,  $f_2 \geq 26.88$ ,  $f_3 \geq 29.24$ , introduzidas durante a execução do método STEM. Na figura IV.7a, as sub-regiões do espaço dos pesos correspondentes a cada uma destas limitações adicionais são preenchidas com diferentes padrões, que se sobrepõem, permitindo assim visualizar claramente as zonas de intersecção.

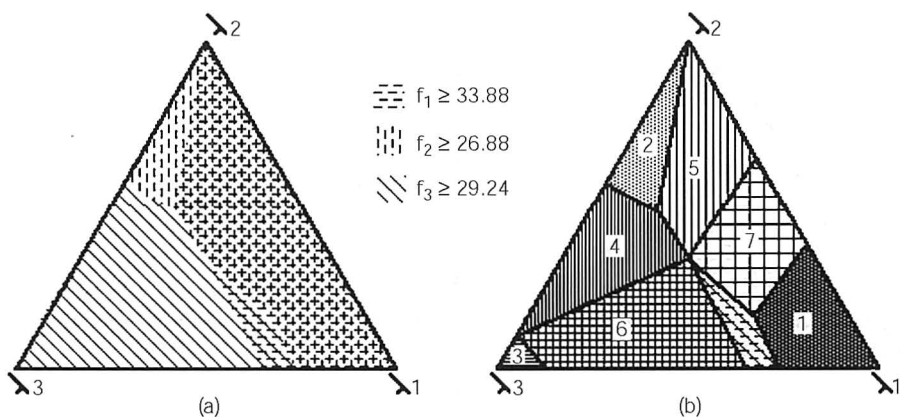


Figura IV.7 – (a) Regiões no espaço dos pesos que satisfazem as limitações *importadas* do método STEM. (b) Soluções básicas já conhecidas, representadas sobre as regiões assinaladas em (a).

Analisando o espaço dos pesos (figura IV.7), conclui-se que não há soluções básicas que satisfaçam simultaneamente todas as restrições adicionais nos valores das funções objectivo *importadas* do método STEM. Podem distinguir-se zonas onde apenas  $f_2$  e  $f_3$  são individualmente satisfeitas, e zonas onde são verificadas em conjunto as limitações em  $f_1$ - $f_2$ , e em  $f_1$ - $f_3$ . A solução 7 foi calculada após indicação, com o *rato*, da zona no espaço dos pesos ainda não preenchida, onde as limitações em  $f_1$  e  $f_2$  são satisfeitas.

Solução	$f_1$	$f_2$	$f_3$	Área (%)	$\underline{x}_B$	$L_\infty$
7	55.5	47.5	2.0	15.1	$x_1=14.5; x_3=2.5; x_4=7.0$	73.0

De modo a obter um conhecimento local sobre as soluções básicas não dominadas próximas da solução 7, é feita uma transição para o método Zions-Wallenius, partindo desta solução.

Suponha-se que o agente de decisão prefere sempre a solução 7, quando é chamado pelo método Zions-Wallenius a comparar esta solução com as soluções básicas adjacentes. Se o agente de decisão também não aceitar qualquer das tendências de variação unitária correspondentes a deslocamentos sobre as arestas não dominadas que ligam esta solução às soluções adjacentes, estaria então encontrada a solução final (figura IV.8).

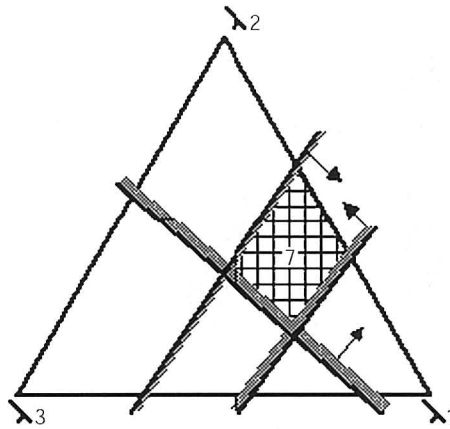


Figura IV.8 – O espaço dos pesos, com a representação das restrições resultantes das respostas a comparações da solução 7 com as soluções básicas adjacentes, assim como as que dizem respeito às respostas correspondentes à avaliação de tendências de variação unitária (neste caso, as restrições são iguais, duas a duas).

Nesta fase do processo de decisão, o método Pareto Race pode ser particularmente interessante para efectuar uma exploração local de faces não dominadas. Partindo da solução 7, e seleccionando uma direcção de modo a melhorar a função objectivo 3, usando os controlos disponíveis (figura IV.9), o agente de decisão é conduzido para a face não dominada que contém as soluções básicas 1 e 7, já conhecidas.

Se o agente de decisão pretender determinar todas as soluções básicas que definem a face onde se localiza uma solução calculada no Pareto Race, basta fazer nova transição para o TRIMAP (figura IV.10). Note-se que, na figura IV.10, são conhecidas todas as soluções básicas não dominadas (visto que o espaço dos pesos está totalmente preenchido), embora não seja este, em geral, o objectivo da base de métodos TOMMIX. O problema tem 8 soluções básicas não dominadas e existem 3 faces não dominadas.

A solução 8 tem as seguintes características:

291

Solução	$f_1$	$f_2$	$f_3$	Área (%)	$\bar{x}_B$	$L_\infty$
8	48.5	19.5	37.0	4.62	$x_1=7.5; x_2=7.0; x_3=9.5$	38.0

Note-se que as duas soluções calculadas pelo método STEM se localizam na face definida pelos vértices (4, 6, 8, 7, 5).

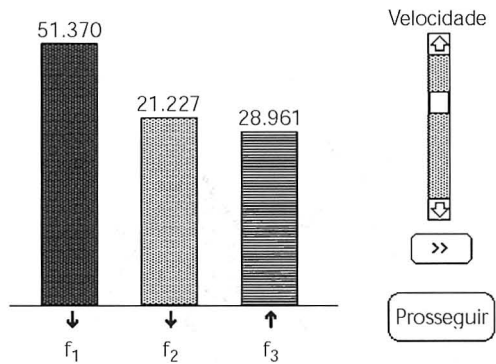


Figura IV.9 – Utilização do método Pareto Race.

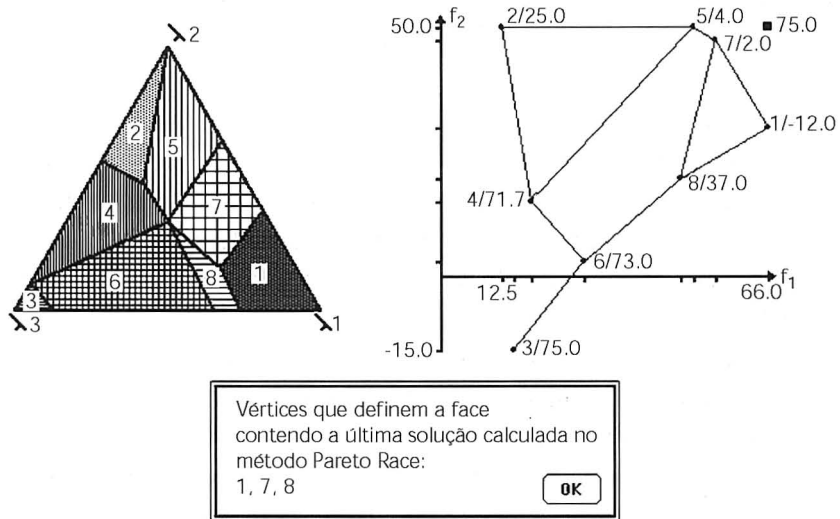


Figura IV.10 – Determinação da face onde se localiza a última solução calculada no Pareto Race.

## 8. CONCLUSÕES

Tendo por base as características conceptuais e da implementação computacional de alguns dos métodos interactivos mais representativos de programação linear multiobjectivo, foi desenvolvida uma base integrada e

flexível de métodos, que constitui a componente fundamental de um sistema interactivo de apoio à decisão. Este sistema inclui também um conjunto de procedimentos auxiliares, uma base de diálogo que controla todos os aspectos de interacção Ser Humano-computador, e um módulo de gestão de dados.

A base de métodos TOMMIX integra os métodos interactivos STEM, Zionts-Wallenius, Interval Criterion Weights, Pareto Race e TRIMAP, que são representativos de diferentes estratégias de redução do âmbito da pesquisa, técnicas de cálculo de soluções não dominadas e de informação de preferências requerida do agente de decisão. A base de métodos TOMMIX permite tirar partido da combinação dos métodos e da transferência de informação recolhida em cada um deles, por forma a que possa ser usada nas fases seguintes do processo de decisão.

A base integrada de métodos não pretende *produzir decisões*, mas sim constituir um meio eficaz de *apoio à decisão*, ajudando o agente de decisão na aprendizagem do problema, proporcionando-lhe um processo construtivo e criativo da sua estrutura de preferências. Como vimos atrás, esta abordagem distancia-se das que reduzem o processo de decisão interactivo à convergência para o óptimo de uma função utilidade implícita do agente de decisão, que se supõe pré-existente, e que é revelada ao longo do processo.

Neste contexto, é de fundamental importância a criação de um ambiente de interacção Ser Humano-computador (nomeadamente no que se refere à utilização de gráficos) amigável, fácil de aprender e de utilização intuitiva.

As características fundamentais do processo de decisão interactivo subjacente à utilização da base de métodos TOMMIX são:

- (a) a aprendizagem (no sentido de uma mais profunda compreensão) do problema;
- (b) o processo construtivo e criativo da definição da estrutura de preferências do agente de decisão;
- (c) o carácter não estruturado do processo de pesquisa.

Estes três aspectos da base de métodos interactivos estão estreitamente ligados entre si, quer do ponto de vista conceptual, quer do ponto de vista operacional.

(Página deixada propositadamente em branco)



## CAPÍTULO V

### **SOMMIX: UMA BASE DE PROCEDIMENTOS BASEADA NUM PAINEL DE CONTROLO**

#### **1. INTRODUÇÃO<sup>1</sup>**

A experiência adquirida com a base de métodos TOMMIX permitiu compreender a importância de determinadas características deste sistema, assim como as suas limitações. Referimo-nos, em especial, à necessidade de estender o ambiente interactivo disponibilizado pelo TOMMIX para o caso geral, isto é: para problemas com um número qualquer de funções objectivo. Neste contexto, foi desenvolvido um outro sistema de apoio à decisão (designado por SOMMIX), cujo módulo principal consiste num conjunto de procedimentos elementares obtidos pela desagregação dos cinco métodos interactivos incluídos no TOMMIX. Pretende-se conjugar as principais características inerentes a cada um dos métodos de uma forma não estruturada, usufruindo de um meio único de interacção com o agente de decisão. O agente de decisão controla todo o processo de pesquisa e a apresentação da informação através de um sistema de comandos que, pela sua disposição, acessibilidade e facilidade de utilização se assemelha a um *Painel de Controlo*.

Sendo assim, a base de procedimentos **SOMMIX** (“**S**everal **O**bjective **M**ethod **M**ixed”) baseia-se nos seguintes pressupostos:

- desagregação dos métodos em operações elementares, possibilitando diferentes combinações de procedimentos de cálculo de soluções, e várias opções para a expressão de preferências (pelo agente de decisão);

---

<sup>1</sup> O SOMMIX é aqui apresentado genericamente. Para um estudo mais detalhado, ver Alves (1993) e Clímaco *et al.* (1997).

- construção de um ambiente interactivo com características de um painel de controlo, que possibilita diferentes representações da informação, utilizando diversos meios gráficos com o objectivo de tornar o ambiente mais flexível e adequado a problemas com mais do que três funções objectivo.

Uma das preocupações principais no desenvolvimento deste sistema, foi o ambiente de interacção Ser Humano-computador. Prosseguiram-se dois objectivos principais:

- utilização fácil e clara do sistema, procurando-se que os comandos sejam disponibilizados de uma forma bem organizada e que o acesso seja rápido;
- representação adequada da informação, por forma a permitir uma construção progressiva do sistema de preferências do agente de decisão, assim como potencializar as suas capacidades de processamento de informação e de decisão.

O sistema desenvolvido é totalmente flexível, permitindo ao agente de decisão escolher qualquer operação disponível, sem que lhe seja imposta nenhuma sequência pré-definida de acções. Para além disso, optou-se por não dissociar este sistema do anterior e, por isso, se o agente de decisão assim o desejar, pode transitar para a base de métodos TOMMIX, escolhendo um dos métodos STEM, ZW, TRIMAP (neste método, apenas quando o problema tem três funções objectivo), PR ou ICW. O agente de decisão pode regressar ao Painel de Controlo, em qualquer momento, sendo transferida para aí toda a informação obtida anteriormente. Isto é, as novas soluções eficientes calculadas e a informação relativa a preferências expressas durante a utilização dos métodos (não possuindo carácter definitivo) estão acessíveis a partir do Painel de Controlo.

## **2. IDENTIFICAÇÃO DOS PROCESSOS BÁSICOS INCLUÍDOS NO SOMMIX**

A base de procedimentos SOMMIX inclui um conjunto de processos básicos, a maior parte dos quais identificada a partir dos métodos incluídos no TOMMIX, e que podem ser incluídos nas seguintes categorias:

- (i) de partida – usados no estabelecimento de parâmetros iniciais;
- (ii) de cálculo de soluções eficientes – usados na formulação e optimização de uma função escalarizante;
- (iii) de cálculo auxiliar – usados para efectuar cálculos requeridos no processo interactivo, mas não directamente ligados à optimização de uma função;
- (iv) de especificação de parâmetros – usados para requerer do agente de decisão informação sobre parâmetros a utilizar em processos de cálculo (ii e iii), de carácter eminentemente técnico, embora possam configurar, até certo ponto, uma expressão das preferências do agente de decisão;
- (v) de informação de preferências – usados na obtenção de informação sobre as preferências do agente de decisão;
- (vi) de apresentação de informação – usados para apresentar ao agente de decisão a informação resultante de fases de cálculo.

Esta decomposição resulta, por um lado, da identificação de componentes funcionais em cada método (que constituem módulos do programa) e, por outro lado, do interesse em usar determinadas características dos métodos de forma não estruturada, em vez da sequência de passos originalmente definida no quadro operacional dos próprios métodos.

A decomposição dos métodos em processos básicos é também uma condição essencial para o desenvolvimento de mecanismos capazes de guiar o agente de decisão (AD). A informação de preferências do AD é usada de modo a auxiliá-lo na utilização do conhecimento adquirido ao longo do processo interactivo, para seleccionar sequências de processos (eventualmente não equivalentes a um método, como proposto na sua forma original) a serem aplicados a um dado problema, numa determinada situação de decisão.

Para além dos processos básicos associados aos métodos, podem ainda distinguir-se processos de gestão de dados ligados ao armazenamento e recuperação de dados e resultados.

#### (I) PROCESSOS DE PARTIDA

- Normalização das funções objectivo (podendo ser usados diferentes tipos de normalização).

- Organização da tabela de óptimos individuais (tabela de *pay-off*).
- Definição da solução ideal (a partir da diagonal principal da tabela de óptimos individuais).

## (II) PROCESSOS DE CÁLCULO DE SOLUÇÕES EFICIENTES

- Optimização de uma soma ponderada das funções objectivo (ZW, ICW, TRIMAP).
- Minimização de uma distância ponderada de Tchebycheff a um ponto de referência, eventualmente a solução ideal (STEM, PR, TRIMAP).
- Pesquisa direccionada, usando programação paramétrica em relação aos termos independentes das restrições (PR).
- Cálculo de todos os vértices (soluções básicas) eficientes da face onde uma dada solução se localiza.
- Cálculo de todas as soluções básicas eficientes adjacentes a uma dada solução básica eficiente já conhecida.
- Cálculo de todas as soluções básicas eficientes pertencentes a uma sub-região admissível (previamente delimitada).
- Cortes na região admissível (TRIMAP).

## (III) PROCESSOS DE CÁLCULO AUXILIAR

- Teste de eficiência das variáveis não básicas (ZW, quando se pretende calcular todas as soluções básicas eficientes adjacentes a uma dada solução básica eficiente).
- Cálculo de um vector de pesos *central* no espaço dos pesos reduzido (ZW).
- Contração do cone dos critérios, por pré-multiplicação de C (em que C pode corresponder à matriz dos coeficientes das funções objectivo após uma ou mais contrações) por uma matriz T (ICW).
- Filtragem de soluções para constituir uma amostra das *mais distintas* (ICW).

Estão disponíveis os tipos de filtragem (para detalhes ver Steuer, 1986, cap. 11):

- primeiro ponto fora da vizinhança;
- ponto mais próximo fora da vizinhança;
- ponto mais distante fora da vizinhança.

- Cálculo de todos os óptimos alternativos de um programa linear (TRIMAP, quando se impõem limitações nas funções objectivo).
- Cálculo de um vector de pesos através da determinação do gradiente de uma função objectivo ponderada normal ao plano que passa por  $p$  vértices não dominados (TRIMAP).
- Cálculo de um vector de pesos através da determinação do gradiente (normalizado) de uma função objectivo ponderada normal à face onde se localiza uma dada solução não básica eficiente.
- Determinação da região de indiferença no espaço dos pesos correspondente a uma solução básica eficiente, a partir do respectivo quadro simplex multiobjectivo.

#### (IV) PROCESSOS DE ESPECIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

- Especificar se se pretende normalizar as funções objectivo e, em caso positivo, qual o tipo de normalização a usar.
- Indicação de  $p$  soluções básicas eficientes, para calcular um vector de pesos através da determinação do gradiente (normalizado) de uma função objectivo ponderada, normal ao plano que passa por essas soluções (TRIMAP).
- Indicação de uma solução básica eficiente, para conhecer todas as soluções básicas eficientes que lhe são adjacentes.
- Indicação de um vector de pesos, por colocação do ponteiro do *rato* sobre o espaço dos pesos, ou por indicação de valores (TRIMAP, ou ZW, apenas para a escolha inicial de pesos).
- Selecção da técnica de filtragem, ponto *semente* e métrica a utilizar numa filtragem de soluções (ICW).
- Especificação do tamanho de uma amostra a apresentar ao agente de decisão (ICW).
- Velocidade do movimento sobre a superfície não dominada (PR).
- Gama de variação para cada função objectivo, especificando os respectivos limites mínimo e máximo (PR).

#### (V) PROCESSOS DE INFORMAÇÃO DE PREFERÊNCIAS

- Especificação de valores de relaxação para funções objectivo cujos valores são considerados satisfatórios, o que implica o estabelecimento de níveis mínimos (STEM).

- Imposição/remoção directa de níveis mínimos para os valores das funções objectivo (TRIMAP, PR).
- Imposição/remoção directa de limitações nos pesos (TRIMAP).
- Comparações par a par entre soluções básicas não dominadas, o que implica a introdução de restrições no espaço dos pesos (ZW).
- Avaliação de tendências de variação unitária ao longo de arestas não dominadas, o que implica a introdução de restrições no espaço dos pesos (ZW).
- Escolha de uma solução de entre uma amostra, para contracção do cone dos critérios em torno dessa solução (ICW).
- Especificação de níveis de aspiração para os valores das funções objectivo, constituindo um ponto de referência (PR, TRIMAP).
- Indicação da função objectivo a melhorar, alterando a direcção do movimento sobre a região não dominada (PR).

#### (VI) PROCESSOS DE APRESENTAÇÃO DE INFORMAÇÃO

A apresentação da informação ao agente de decisão pode ser feita através de diferentes meios de representação: numérica, gráfica ou representação em forma de ícone.

Na representação em forma de ícone, a cada ponto, de um espaço de dimensão  $k$ , corresponde um ícone, para o qual os valores das coordenadas desse ponto funcionam como parâmetros. Como já vimos atrás, podem citar-se como exemplos destas técnicas, as *caras* de Chernoff (1973) ou as *casas harmoniosas* de Korhonen (1991). Estas abordagens constituem uma forma de ultrapassar a maior dificuldade existente na visualização de informação multidimensional. A ideia subjacente às *casas harmoniosas* baseia-se no uso de dois conceitos: harmonia e simetria. A casa correspondente à solução ideal apresenta uma forma harmoniosa e simétrica. A avaliação de outras soluções pode ser feita julgando o aspecto visual das respectivas casas, já que apresentam desvios relativamente à ideal, conferindo-lhes um aspecto mais ou menos deformado<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> No entanto, neste tipo de gráficos é necessária uma cuidadosa afectação dos valores aos pontos-chave das figuras, de modo a evitar conflitos entre as relações intrínsecas das figuras e as relações entre os valores a visualizar por meio delas.

Na base de procedimentos SOMMIX foram incluídas diferentes formas de apresentação da informação relativa a soluções eficientes calculadas, ou a preferências manifestadas pelo agente de decisão:

- Informação numérica associada às soluções conhecidas.
- Apresentação das regiões de indiferença no espaço dos pesos correspondentes a soluções básicas eficientes já conhecidas.
- Apresentação das regiões no espaço dos pesos, onde são satisfeitas limitações inferiores nos valores das funções objectivo.
- Projectção bidimensional do espaço dos objectivos.
- Representação da região correspondente ao cone contraído no espaço dos pesos original.
- Apresentação das trajectórias sobre a superfície não dominada para cada função objectivo.
- Gráfico em teia de aranha para os valores das funções objectivo.
- Gráfico de barras para os valores das funções objectivo.
- *Casas harmoniosas* para a comparação entre duas soluções.

Processos de gestão de dados

- Abrir ficheiro de dados.
- Guardar/ler tabela de óptimos individuais em ficheiro.
- Editar ficheiro de dados.
- Guardar/imprimir informação sobre as soluções calculadas.
- Guardar/imprimir informação gráfica no écran.

### **3. UMA VISITA GUIADA À IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO SOMMIX**

A materialização computacional da base de procedimentos SOMMIX constitui um sistema de apoio à decisão. O utilizador dispõe, em cada instante, de um conjunto de acções disponíveis, agrupadas de acordo com o tipo de função e localizadas em zonas específicas do écran. O utilizador controla o comportamento do programa através de operações simples, como premir o *rato* em determinadas zonas do écran ou premir uma tecla. A interacção com o utilizador é feita essencialmente através de janelas

múltiplas, de uma barra de menus e de caixas de diálogo. Pode escolher-se uma determinada acção de uma das seguintes formas:

- escolha de um item de um menu;
- manipulação de controlos internos a cada uma das janelas, que representam acções especificamente relacionadas com a informação apresentada nessa janela. Isto é: botões, elevadores, ícones e menus *pop-up*.

As janelas de diálogo são usadas para a obtenção de certos parâmetros, ou para aviso das possíveis consequências de determinadas acções.

Na barra de menus existem quatro menus, que permitem ao agente de decisão:

- abrir um **Ficheiro** que contém os dados relativos a um problema, editar novos problemas, guardar resultados em disco e abandonar o programa;
- escolher um procedimento para **Cálculo** de uma ou mais soluções eficientes;
- expressar, de diferentes formas, as suas **Preferências**;
- seleccionar diferentes formas de apresentação da **Informação**.

Quando é iniciado o estudo de um novo problema, o programa calcula automaticamente as soluções eficientes que optimizam separadamente cada uma das funções objectivo, apresentando o painel da figura V.1. Os coeficientes das funções objectivo podem ser previamente normalizados. Esta opção é aconselhável quando os coeficientes e a gama de variação dos valores das funções objectivo possuem ordens de grandeza muito diferentes.

A figura V.1 mostra a barra de menus e um conjunto de janelas que são apresentadas ao utilizador.

Toda a informação associada às soluções eficientes calculadas, a partir de diferentes processos de cálculo, é armazenada numa estrutura de dados única intitulada *Cabaz de soluções*. As soluções básicas eficientes (vértices) são automaticamente guardadas, enquanto que as soluções não básicas requerem uma indicação explícita por parte do agente de decisão. A janela *Cabaz de soluções* (actualizada após cada fase de cálculo) apresenta, sob a forma de gráficos de barras, os valores das funções objectivo das soluções



já conhecidas. A cada solução é atribuído um padrão diferente, que é preservado noutras representações da mesma solução (gráfico em *teia-de-aranha* e regiões de indiferença no espaço dos pesos).

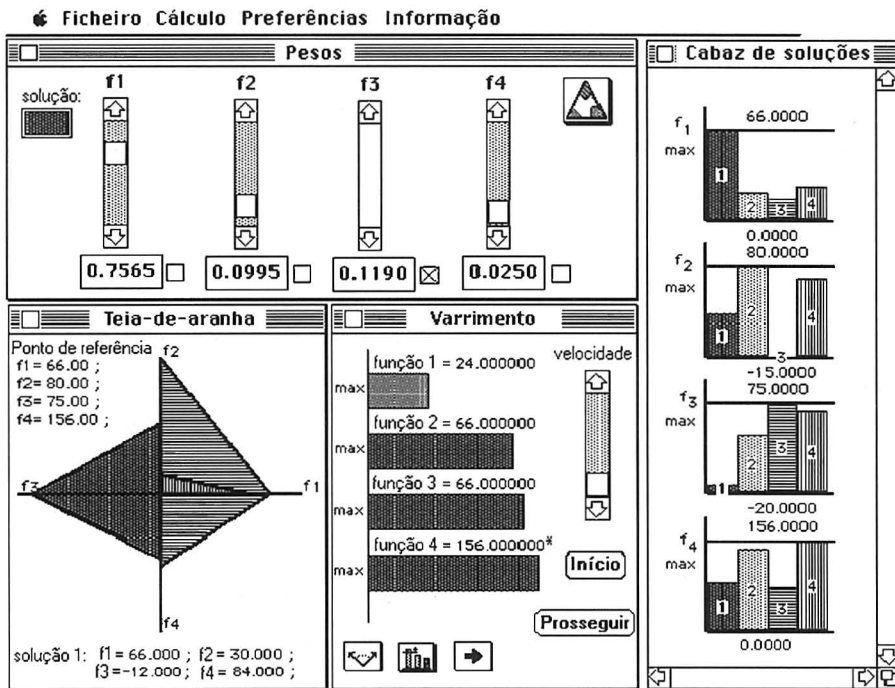


Figura V.1 – Apresentação comum do painel de controlo (problema com quatro funções objectivo).

Cada solução calculada é também representada no gráfico *teia-de-aranha*, que oferece uma indicação visual da maior ou menor proximidade, em cada dimensão, da solução em relação a um ponto de referência. Este ponto de referência é iniciado com as componentes da solução ideal, podendo posteriormente ser alterado pelo utilizador. No gráfico *teia-de-aranha* da figura V.1, a solução 1 encontra-se em primeiro plano (podendo-se passar outras soluções para esta situação).

A janela *Pesos* destina-se à selecção de vectores de pesos para posterior cálculo de soluções eficientes, a partir da optimização de somas ponderadas das funções objectivo. A selecção é feita a partir de um conjunto de controlos tipo *elevador*, ou introduzindo valores directamente em caixas de edição.

Trata-se de uma selecção dinâmica, já que, quando é modificado o valor de um peso, os outros são automaticamente actualizados, por forma a garantir que a soma de todos os pesos seja um. Simultaneamente com a manipulação dos elevadores relativos a cada peso, é possível verificar-se visualmente, de uma forma dinâmica, se os vectores de pesos obtidos pertencem ou não a alguma região de indiferença de uma solução básica já calculada. Para tal, é utilizado um pequeno rectângulo, no canto superior esquerdo desta janela, que mostra a cor/padrão da solução cuja região de indiferença contém o vector de pesos actual, ou fica vazio (caso este não pertença a qualquer região de indiferença já determinada). Se estiver preenchido, facilmente se identifica a solução a que se refere, dado que há correspondência entre os padrões utilizados na representação da mesma solução, em gráficos diferentes. A acessibilidade deste tipo de informação, simultaneamente com a selecção de pesos, tem especial interesse na medida em que permite, por um lado, escolher um vector de pesos que garanta a obtenção de uma nova solução (evitando recalculas as já conhecidas) e, por outro lado, identificar os contornos gerais das regiões de indiferença correspondentes às soluções já calculadas.

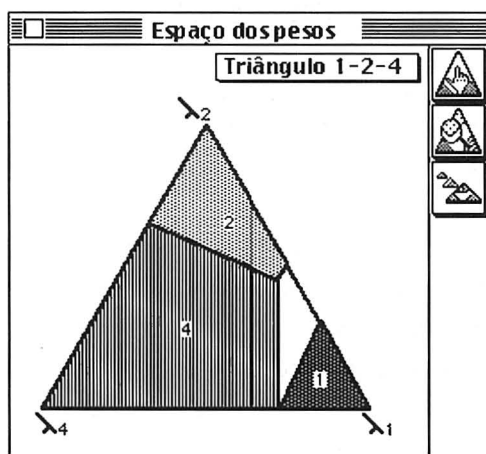


Figura V.2 – Corte do espaço dos pesos com  $\lambda_3=0.119$ , para um problema com 4 funções objectivo.

Existe ainda uma outra possibilidade de explorar graficamente o espaço dos pesos. Para problemas com 2 ou 3 funções objectivo, é possível visualizar-se num só gráfico (unidimensional ou bidimensional) todo o espaço dos

pesos; nos problemas com 4 ou mais funções objectivo apenas se pode visualizar, em cada instante, um corte desse espaço, considerando fixos um ou mais pesos. Para tal, existe na janela *Pesos* um outro botão de controlo, sob a forma de ícone, visível quando as circunstâncias permitem essa representação gráfica (por exemplo, quando um dos pesos está fixo num problema com 4 objectivos) e que, quando accionado, chama uma outra janela onde é apresentado o espaço dos pesos (*Espaço dos pesos*, figura V.2).

Na janela *Espaço dos pesos* é apresentada a decomposição do espaço dos pesos (ou de um corte deste), podendo ser visualizadas diferentes projecções. A escolha é feita através de um menu *pop-up*. As opções, estritamente relacionadas com a informação desta janela, estão dispostas num quadro de ícones (funcionando como botões), que é estendido quando é acrescentada informação relativa a preferências manifestadas pelo agente de decisão (limitações nos valores das funções objectivo, restrições nos pesos ou contracções no cone dos critérios). As opções mais comuns são as seguintes:



– para selecção de pesos através do posicionamento do ponteiro do *rato* no triângulo (a janela *Pesos* é actualizada dinamicamente);



– permite ampliar o gráfico;



– permite visualizar dinamicamente a evolução do triângulo, para cortes sucessivos segundo uma mesma direcção; quando este botão é premido, é apresentado um controlo adicional para selecção do passo a considerar entre os cortes, controlo do tipo *elevador* (esta opção apenas é válida para problemas com mais do que três funções objectivo).

A escolha de diferentes processos para o cálculo de soluções eficientes, e a expressão de preferências para orientação da pesquisa subsequente, são feitas essencialmente através da selecção de itens de menus. No entanto, o agente de decisão tem também ao seu dispor uma outra ferramenta, a partir da qual pode percorrer a fronteira eficiente da região admissível, especificando diferentes direcções e velocidades de movimento. A janela

*Varrimento* (figura V.1), para além da apresentação de gráficos de barras que representam os valores das funções objectivo a variar dinamicamente à medida que a pesquisa de soluções vai decorrendo, possui ainda um conjunto de botões para controlar a pesquisa. Neste gráfico, as cores (ou padrões) das barras variam de acordo com a proximidade (em termos percentuais) dos valores das funções objectivo, em relação aos respectivos óptimos. Assim, para além da variação dinâmica do comprimento da barras, é acrescentado o efeito visual do escurecimento da cor das barras que dizem respeito às funções objectivo que estão a ser melhoradas.

Para iniciar uma pesquisa direccional, o agente de decisão deve escolher o botão *Início*, em que lhe é pedido um ponto de referência e, em seguida, uma direcção inicial (indicando a função objectivo que pretende melhorar relativamente à primeira solução encontrada). O programa sugere, como ponto de partida, a última solução eficiente calculada antes de iniciada a pesquisa direccional. Esta sugestão baseia-se no pressuposto de que o agente de decisão pretende proceder a uma pesquisa local, numa região próxima daquela onde se localizam as últimas soluções calculadas. O *Varrimento* é uma ferramenta disponível em qualquer momento do processo de pesquisa, tendo como base o funcionamento do método Pareto Race. Na sua forma mais simples, esta janela possui os seguintes controlos:

- indicador de velocidade, que permite alterar a velocidade do movimento de forma a obter soluções eficientes mais ou menos próximas umas das outras;
- botão *Prosseguir* que, enquanto premido, mantém activa a pesquisa direccional ;
- botão *Início*, que inicia o processo de pesquisa com base num ponto de referência;
- botões sob a forma de ícone:

306




- para alteração da direcção do movimento;



- permite fixar o valor actual de uma ou mais funções objectivo, como limite inferior para esse(s) objectivo(s);



- indica o sentido do movimento, permitindo a sua inversão; caso seja escolhido o sentido inverso, este ícone é substituído por .

Se existirem restrições no âmbito da pesquisa, é aumentado o leque de opções oferecidas ao agente de decisão dentro do *Varrimento*, que consistem na consideração, ou não, dessas restrições. Para isso, são acrescentados novos botões de controlo na respectiva janela. O funcionamento destes botões será abordado mais à frente.

A barra de menus, situada na parte superior do écran, agrupa todas as outras acções que são permitidas ao utilizador.

O menu **Ficheiro** engloba opções gerais relativas ao módulo de edição de novos problemas de programação linear multiobjectivo, os menus **Cálculo** (figura V.3), **Preferências** (figura V.4) e **Informação** (figura V.8) relacionam-se directamente com a resolução dos problemas.

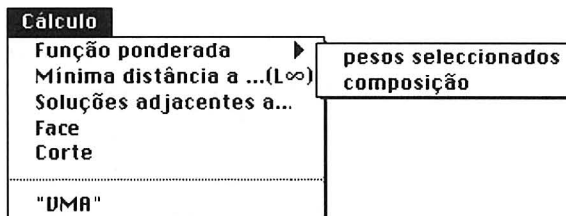


Figura V.3 – Menu para cálculo de soluções eficientes.

### MENU **CÁLCULO** (FIGURA V.3)

#### *Função ponderada*

*pesos seleccionados*: Calcula a solução eficiente correspondente ao vector de pesos previamente seleccionado pelo agente de decisão.

*composição*: O agente de decisão selecciona  $p$  (número de funções objectivo) soluções já conhecidas. É definida e optimizada uma função escalar, cujo gradiente é normal ao hiperplano que passa por esses pontos não dominados.

*Mínima distância a... (L $\infty$ )*: Calcula a solução eficiente que minimiza a distância ao ponto de referência actual, segundo uma métrica ponderada de Tchebycheff. O ponto de referência é, *por omissão*, a solução ideal.

- Soluções adjacentes a...*: Calcula todas as soluções básicas eficientes que são adjacentes em relação a uma solução básica eficiente previamente calculada, e escolhida pelo agente de decisão.
- Face*: Calcula todas as soluções básicas eficientes que definem a face que contém uma dada solução não básica eficiente escolhida pelo agente de decisão.
- Corte*: Executa um corte no poliedro admissível, com o objectivo de calcular as soluções eficientes do poliedro original que são vértices dum poliedro auxiliar, obtido pela consideração temporária de uma restrição  $f_i(x) = u$  (com  $i$  e  $u$  especificados pelo agente de decisão).
- VMA*: VMA designa *vector maximum algorithm*, e significa calcular todas as soluções básicas eficientes, de todo ou de parte do poliedro admissível. Para restringir a área de pesquisa, é dada a possibilidade da introdução de limitações adicionais nos valores das funções objectivo, quando é escolhido este item.

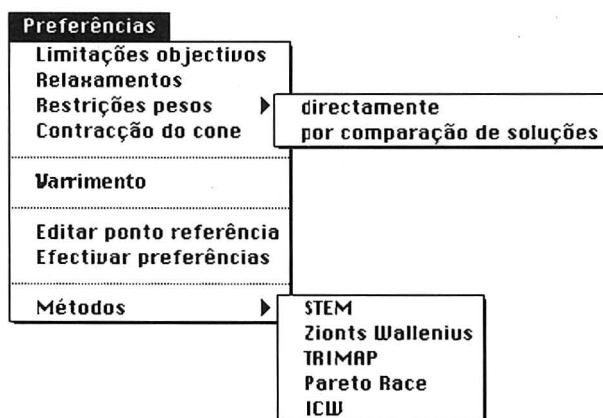


Figura V.4 – Menu para obtenção de preferências do agente de decisão.

**MENU PREFERÊNCIAS (FIGURA V.4)**

- Limitações nos objectivos:* Introdução directa de limitações inferiores para os valores das funções objectivo.
- Relaxamentos:* Introdução indirecta de limitações nos valores das funções objectivo, a partir da especificação de quantidades de relaxação para o valor de um ou mais objectivos, relativamente a uma dada solução já conhecida.
- Restrições nos pesos:* Introdução de restrições no espaço dos pesos, que pode ser feita de duas formas distintas: (a) especificação explícita dessa restrições (item *directamente*); (b) implicitamente, a partir da comparação de pares de soluções (item *por comparação de soluções*).
- Contração do cone:* O cone dos critérios é contraído, *focando-se* numa parte da região admissível que contém uma solução básica eficiente escolhida pelo agente de decisão.
- Varrimento:* Activa a janela *Varrimento*, que permite ao agente de decisão efectuar pesquisas direccionais (como no método Pareto Race).
- Editar ponto referência:* Permite ao agente de decisão alterar o ponto de referência do espaço dos objectivos.
- Efectivar preferências:* Permite ao agente de decisão tornar permanentes restrições previamente impostas no espaço dos objectivos e/ou contrações efectuadas no cone dos critérios. Nesse caso, o processo de pesquisa é reiniciado, mantendo-se acessível toda a informação relativa às soluções calculadas anteriormente. O espaço dos pesos apresentado refere-se, agora, ao novo problema obtido.
- Métodos:* Transição para a base de métodos TOMMIX através de um dos métodos STEM, Zions-Wallenius, TRIMAP (se o problema tiver três funções objectivo), Pareto Race ou ICW. Relativamente à versão do TOMMIX apresentada

no capítulo IV, fizeram-se apenas aperfeiçoamentos de origem gráfica, para uma melhor adequação a problemas com mais do que três funções objectivo, nomeadamente na representação do espaço dos pesos. Ao regressar ao Painel de Controlo, é para aí transferida toda a informação obtida dentro da base de métodos (soluções eficientes calculadas e informação sobre as preferências do agente de decisão).

Todas a preferências manifestadas pelo agente de decisão que reduzem o âmbito da pesquisa têm carácter provisório, excepto se o agente de decisão pretender torná-las permanentes (menu *Preferências*, item *efectivar preferências*). Enquanto provisórias, podem ser consideradas, ou não, em qualquer fase do processo de pesquisa, como, por exemplo, na selecção de pesos ou no cálculo de novas soluções. Para isso, são utilizados comutadores *on/off*, acessíveis em determinadas janelas do painel, que podem ser ligados ou desligados. Adicionalmente, é acumulada informação visual no espaço dos pesos, que apresenta as regiões onde são satisfeitas limitações no espaço dos objectivos, restrições nos pesos e contracções no cone dos critérios. As figs. V.5, V.6 e V.7 mostram as janelas do painel que são alteradas pela adição de nova informação. Estas figuras foram obtidas após a introdução de uma restrição nos pesos, de uma limitação no espaço dos objectivos e depois de ter sido efectuada uma contracção do cone dos critérios, no problema em causa.

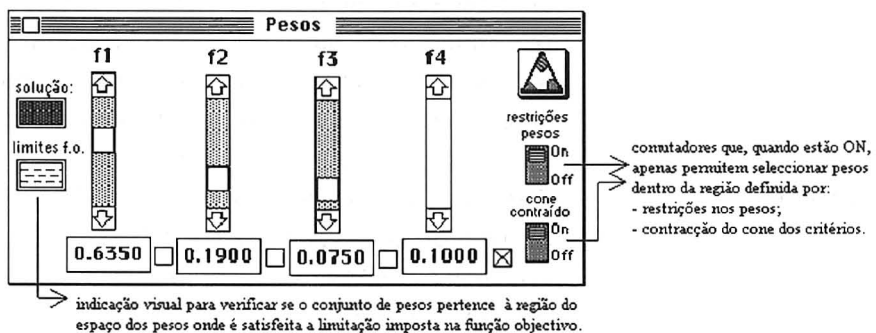


Figura V.5 – Janela *Pesos* após introdução de restrições no âmbito da pesquisa



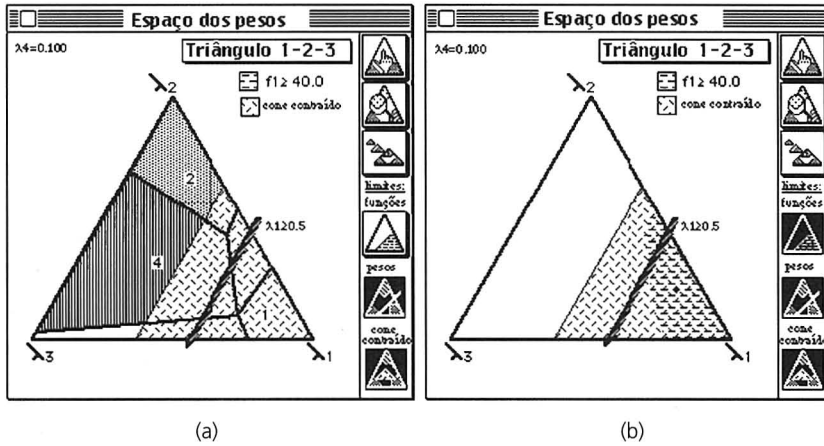


Figura V.6 – Visualização do espaço dos pesos após introdução de restrições. (a) Estão activas as opções de visualização de restrições nos pesos e cone contraído. (b) Está activa a opção de visualização da região correspondente à limitação na função objectivo, para além das indicadas em (a).

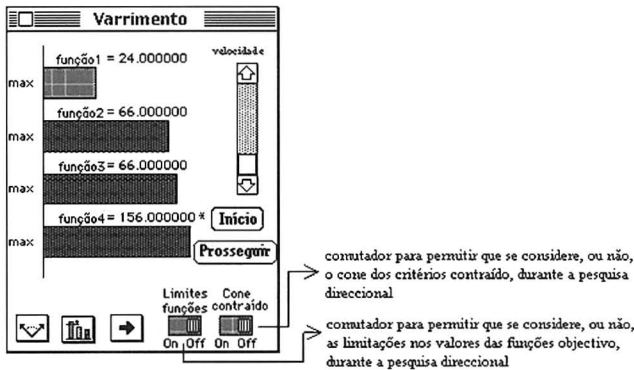


Figura V.7 – Janela Varrimento após introdução de restrições no âmbito da pesquisa.

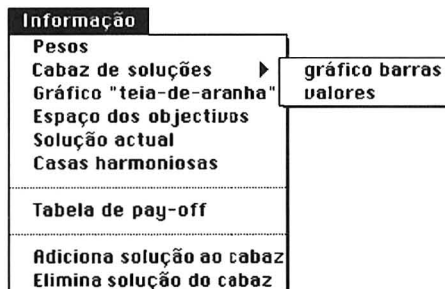


Figura V.8 – Menu para visualização da informação existente.

## MENU **INFORMAÇÃO** (FIGURA V.8)

- Pesos:* Activa a janela *Pesos* (figs. V.1 e V.5)
- Cabaz de soluções*
- gráfico barras:* Apresenta gráficos de barras com os valores das funções objectivo de todas as soluções calculadas e guardadas (*Cabaz de soluções* na figura V.1).
- valores:* Apresenta a informação numérica relativa a todas as soluções calculadas e guardadas (valores das funções objectivo e das variáveis).
- Gráfico “teia-de-aranha”:* Mostra os valores das funções objectivo num gráfico em *teia-de-aranha* (figura V.1).
- Espaço dos objectivos:* Mostra uma projecção do espaço dos objectivos (figura V.9). O utilizador pode alterar o plano de projecção, existindo para tal menus internos do tipo *pop-up*.
- Solução actual:* Apresenta a informação numérica relativa à última (ou últimas) solução(ões) calculada(s).
- Casas harmoniosas:* Permite a comparação dos valores das funções objectivo de duas soluções, apresentadas sob a forma de ícone. A figura V.10 mostra a casa *ideal*, onde estão assinalados os vértices que podem sofrer desvios relativamente às posições em que se encontram. A figura V.11 mostra duas casas, correspondentes a duas soluções eficientes, com desvios verticais e horizontais relativamente à solução ideal.
- Tabela de pay-off:* Apresenta, sob a forma tabular, os valores de todas as funções objectivo nas soluções que optimizam individualmente cada função objectivo.
- Adiciona solução ao cabaz:* Guarda no *cabaz de soluções* a última solução eficiente calculada. Este comando está disponível apenas para soluções não básicas, dado que as básicas são automaticamente guardadas.
- Elimina solução do cabaz:* Permite ao utilizador eliminar soluções previamente guardadas no *cabaz de soluções*.

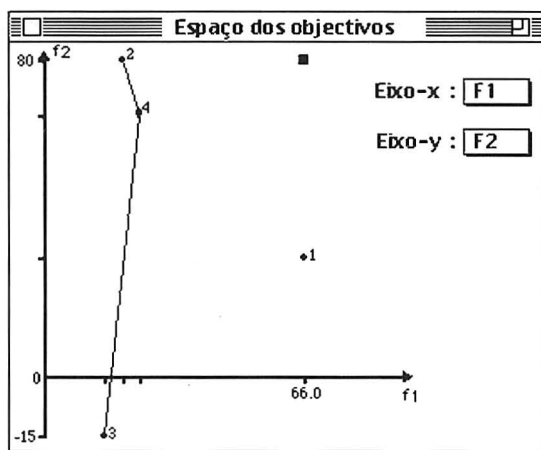


Figura V.9 – Projecção no plano  $f_1$ - $f_2$  do espaço dos objectivos.

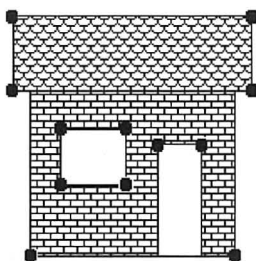


Figura V.10 – Casa ideal, com indicação dos pontos móveis.

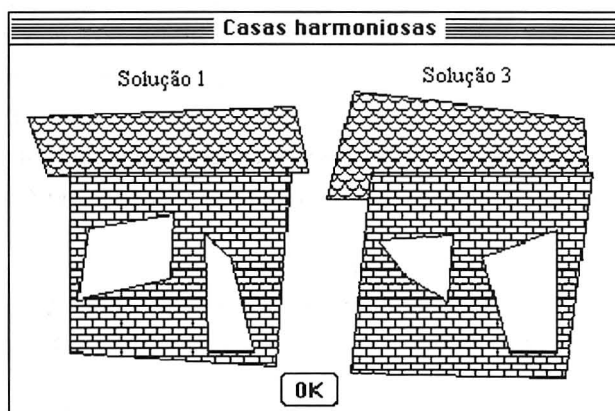


Figura V.11 – As casas correspondentes a duas soluções, para uma dada distribuição de valores.

#### 4. UTILIZAÇÃO MAIS FREQUENTE DE ALGUNS PROCEDIMENTOS ELEMENTARES

Os procedimentos usados para o cálculo de novas soluções, ou captação das preferências do agente de decisão, podem revelar-se mais adequados em determinadas fases do processo de decisão do que em outras. Assim, numa fase inicial do processo de decisão, é geralmente realizada uma pesquisa de carácter mais global, que se vai progressivamente tornando mais localizada na zona de maior interesse para o agente de decisão.

Apenas com carácter de sugestão, propomos aqui algumas linhas de conduta na utilização de procedimentos incluídos no SOMMIX, que se justificam para ajudar os que se iniciam na experimentação com o sistema.

- Numa fase inicial do processo de decisão, deve ser desenvolvida uma estratégia que permita ao agente de decisão obter um conhecimento global do problema.
- A optimização de somas ponderadas das funções objectivo, considerando vectores de pesos dispersos, ou a minimização de distâncias a pontos de referência, poderão constituir procedimentos adequados à obtenção de um primeiro conjunto de soluções eficientes.
- A especificação de limitações inferiores para os valores das funções objectivo (directamente, ou através de relaxações de valores de funções objectivo de uma solução), constitui o tipo de questão que o agente de decisão, geralmente, se sente mais habilitado a responder, principalmente numa fase inicial da pesquisa. O agente de decisão identifica níveis mínimos para os objectivos, abaixo dos quais não está disposto a aceitar soluções. Para além das limitações no espaço dos objectivos, a restrição do âmbito da pesquisa poderá também ser conseguida através de contracções do cone dos critérios.
- A ferramenta *Varrimento* pode ser útil para o agente de decisão efectuar uma pesquisa livre da fronteira eficiente. Com esse objectivo, indica diferentes direcções de pesquisa e diversos pontos de referência.
- Numa fase final do processo de decisão, após identificada uma área de maior interesse para o agente de decisão, a pesquisa poderá tornar-se

mais localizada, até que seja encontrada uma solução de compromisso satisfatória, ou um conjunto de soluções para posterior análise. Como processos adequados à obtenção de novas soluções (obrigatoriamente pertencentes a uma determinada região), podem citar-se os seguintes:

1. cálculo de todas as soluções básicas eficientes adjacentes a uma dada solução básica eficiente;
2. cálculo de todas as soluções básicas eficientes que definem a face que contém uma dada solução eficiente;
3. cálculo de todas as soluções básicas eficientes pertencentes à região admissível, particularmente após esta ter sido suficientemente reduzida (VMA);
4. pesquisa direccional localizada, utilizando a ferramenta *Varrimento*.

Nesta altura, o agente de decisão poderá exprimir as suas preferências de uma forma mais específica, como, por exemplo, comparando pares de soluções, o que se traduz numa maior redução da região de pesquisa, através de restrições no espaço dos pesos correspondentes a essa informação de preferências.

## 5. CONCLUSÕES

Neste capítulo, foi apresentado um sistema computacional de apoio à decisão para problemas de programação linear multiobjectivo. Este sistema, designado por SOMMIX, integra um módulo principal de procedimentos elementares de cálculo, opções de expressão de preferências do agente de decisão e apresentação da informação.

Um dos aspectos principais que prosseguimos diz respeito à qualidade da interacção Ser Humano-computador, factor muito importante na aceitação e na capacidade de se tirar partido deste tipo de sistemas de apoio à decisão. Neste sentido, foram desenvolvidos meios gráficos e processos de controlo do sistema que, pela sua distribuição espacial, e pela acessibilidade e facilidade de utilização, lhe conferem o aspecto visual de um painel de controlo.

A representação gráfica do espaço dos pesos tem um papel chave no *interface* oferecido pelo SOMMIX, constituindo um meio gráfico coerente, que acumula a informação obtida de diferentes formas, ao longo do processo. A utilização do espaço dos pesos, como meio de recolha e visualização da informação, permite ainda ao agente de decisão identificar as regiões onde se poderá desenvolver a pesquisa futura, se pretender ser coerente com preferências manifestadas anteriormente. A decomposição do espaço dos pesos mostra também como os vértices eficientes do poliedro admissível estão ligados (identificação de arestas e de faces não dominadas), fornecendo uma ideia geral da geometria da região não dominada. No entanto, quando o problema tem mais do que três funções objectivo, a visualização deste espaço é feita essencialmente com base em cortes bidimensionais, o que dificulta a sua interpretação.

## CAPÍTULO VI

### APLICAÇÕES

Os métodos de apoio à decisão dedicados a problemas com objectivos múltiplos, nomeadamente os métodos interactivos, têm sido usados para o estudo de numerosos problemas do mundo real nas mais diversas áreas. Na impossibilidade de fazer aqui uma referência a todas as áreas de aplicação de modelos e métodos multiobjectivo, limitar-nos-emos a referir algumas das mais importantes, a que os autores deste trabalho têm dedicado alguma atenção. Uma das compilações mais completas, embora não muito recente, contém cerca de 500 referências e foi realizada por White (1990).

Entre as áreas de aplicação mais significativas podem salientar-se:

- o planeamento, gestão e afectação de recursos a departamentos académicos;
- o planeamento energético;
- o planeamento da produção e a logística;
- o planeamento ambiental e de controlo da poluição;
- o planeamento de recursos hídricos;
- o planeamento florestal.

No entanto, para além de aplicações de apoio à decisão em actividades de planeamento e gestão, podem também ser encontradas na literatura científica muitas referências relativas a aplicações a tarefas de projecto em diversas áreas da engenharia.

Na parte A deste capítulo é apresentado um modelo de planeamento da expansão de um sistema electroprodutor, considerando três funções objectivo que quantificam o custo total dos planos de expansão (a minimizar), a fiabilidade do sistema produtor (a maximizar) e o impacte ambiental (a minimizar). As variáveis de decisão referem-se ao tipo de tecnologias de geração (fuel, nuclear e carvão) consideradas para a expansão do sistema produtor. As restrições dizem respeito à carga, a questões operacionais das unidades geradoras e a questões orçamentais. Este modelo foi estudado usando o método TRIMAP.

Na parte B é apresentado um modelo dedicado a um problema de planeamento estratégico da modernização de redes de telecomunicações, tendo em conta a introdução de novas tecnologias de suporte e de novos serviços. O modelo é analisado utilizando a base de métodos TOMMIX. Consideram-se três funções objectivo, que quantificam o valor associado à evolução das linhas de assinante (a maximizar), o grau de modernização associado à oferta de novos serviços (a maximizar), e o custo da dependência externa associada às estratégias de evolução (a minimizar). As restrições expressam limitações inferiores para a satisfação da procura estimada, e para a penetração das tecnologias de suporte, assim como limitações técnicas associadas à instalação de linhas, e limitações de carácter orçamental.

## **PARTE A. APOIO MULTICRITÉRIO À DECISÃO NUM PROBLEMA DE PLANEAMENTO ENERGÉTICO**

### **A1. INTRODUÇÃO**

O planeamento de novas unidades para a produção de energia eléctrica constitui um problema que envolve a avaliação de aspectos de natureza muito diversa, geralmente conflituosos e incomensuráveis, alguns dos quais não quantificáveis directamente por um indicador económico. Os modelos que procuram expressar em unidades monetárias os aspectos mais significativos (qualitativamente muito diversos) que caracterizam estes problemas, englobando-os numa única função objectivo de natureza económica, não permitem representar explicitamente os diferentes objectivos que devem estar



presentes na avaliação de políticas de expansão de sistemas produtores de energia eléctrica. De facto, o problema deve ser analisado a partir de um modelo matemático multiobjectivo, visto que factores económicos, tecnológicos, ambientais, de fiabilidade, entre outros, devem ser tidos em conta explicitamente.

Embora tradicionalmente os problemas de expansão de sistemas produtores de energia eléctrica tenham sido modelados como problemas de programação matemática com uma única função objectivo (Caramanis *et al.*, 1982)<sup>1</sup>, considerando apenas a minimização do custo total, recentemente tem sido dada alguma atenção ao desenvolvimento de modelos multiobjectivo (Clímaco e Almeida, 1981; Clímaco *et al.*, 1995; Quaddus e Goh, 1985<sup>2</sup>; Zions e Deshpande, 1981<sup>3</sup>, Mirasgedis e Diakoulaki, 1997<sup>4</sup>, Martins *et al.*, 1996). Alguns destes autores realizaram previamente (Clímaco e Almeida, 1981) um estudo de planeamento dum sistema electroprodutor usando um modelo de PLMO, no qual foi usado um método para caracterizar toda a região não dominada através do cálculo de todos os vértices não dominados. Contudo, novas experiências com formulações matemáticas mais realistas, aumentando a dimensão do modelo de PLMO, mostraram as dificuldades e desvantagens do uso de métodos geradores do conjunto das soluções não dominadas.

O esforço computacional torna-se demasiado grande quando o número de vértices não dominados cresce além de certos limites. E, mesmo quando é possível calculá-los todos, tal é, na maioria dos casos, um esforço não recompensado, visto que o agente de decisão não está em condições de tomar uma decisão bem fundamentada, quando confrontado com um grande número de soluções, a maioria das quais apresentando pequenas diferenças nos valores das funções objectivo. As experiências realizadas com modelos de planeamento energético, bem como a avaliação conceptual de diferentes abordagens em problemas multiobjectivo, levaram ao desenvolvimento do método interactivo TRIMAP, estudado no capítulo III.

<sup>1</sup> Caramanis, M., Schweppe, F., Tabors, R. (1982). Electrical Generation Expansion Analysis System, EPRI Report EL-2561, vol. 1.

<sup>2</sup> Quaddus, M., Goh, T. (1985). Electric power generation expansion planning with multiple objectives, Applied Energy, 19, 301-319.

<sup>3</sup> Zions, S., Deshpande, D. (1981). Energy planning using a multiple criteria decision method. In: Multiple Criteria Analysis: Operational Methods, P. Nijkamp e J. Spronk (Eds.), Gower Press, 153-162.

<sup>4</sup> Mirasgedis, S., Diakoulaki, D. (1997). Multicriteria analysis vs. externalities assessment for the comparative evaluation of electricity generation systems. European Journal of Operational Research, vol. 102, nº 2, 364-379.

Neste capítulo, descreve-se sumariamente um modelo de PLMO dedicado a um problema de planeamento da expansão de capacidade de produção de energia eléctrica, tendo por objectivo mostrar a adequação do método TRIMAP para apoio à decisão neste tipo de problemas. Note-se que o modelo é apresentado esquematicamente. Para mais detalhes ver Clímaco *et al.* (1995) e Martins *et al.* (1996). Em seguida são realizadas algumas experiências usando os métodos STEM e o de Zions-Wallenius, sendo possível retirar conclusões interessantes com base na análise comparativa do funcionamento dos três métodos.

Como já se disse, este modelo de planeamento energético inclui três funções objectivo que quantificam o custo total dos planos de expansão (a minimizar), a fiabilidade do sistema produtor (a maximizar) e o impacto ambiental (a minimizar). As variáveis de decisão referem-se ao tipo de tecnologias de geração (fuel, nuclear e carvão) consideradas para a expansão do sistema produtor. As restrições podem ser classificadas em três categorias: de carga, de operação das unidades geradoras, e orçamentais. O período de planeamento foi discretizado em sub-períodos, e cada um deles foi, por sua vez, dividido em intervalos. Detalhes sobre o estudo deste problema usando o método TRIMAP podem ser consultados em Clímaco *et al.* (1995).

Embora o aspecto que se segue não seja descrito neste capítulo, este modelo foi mais tarde melhorado, prestando-se particular atenção à gestão do lado da procura e aos impactos ambientais. Neste caso, foram também consideradas três funções objectivo a minimizar: custo total da expansão do sistema electroprodutor, impacto ambiental associado à capacidade instalada, e impacto ambiental associado à produção de energia. A gestão do lado da procura (*demand-side management*, DSM) é modelada como um novo grupo gerador, competindo com os grupos geradores do lado da oferta. O modelo considera cinco categorias de restrições relacionadas com a fiabilidade do sistema produtor, a disponibilidade das unidades geradoras, a capacidade do grupo gerador equivalente DSM, a capacidade total a instalar ao longo do período de planeamento e as emissões de poluentes. As tecnologias consideradas para expansão do sistema produtor são, para além do grupo equivalente DSM, fuel, carvão, nuclear e gás natural. O estudo foi realizado usando o método TRIMAP e os detalhes da modelação, bem como alguns resultados ilustrativos, podem ser vistos em Martins *et al.* (1996).

## A2. MODELAÇÃO DO PLANEAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS GERADORES DE ENERGIA ELÉCTRICA

Neste estudo, baseado em Clímaco *et al.* (1995), a evolução da carga é o factor determinante do planeamento de novas unidades para a geração de energia eléctrica. Não se consideram os problemas de localização das novas unidades, nem os respectivos efeitos no planeamento da expansão da rede de transmissão.

### A2.1 MODELAÇÃO DO SISTEMA GERADOR

Nas secções A2.3 e A2.4, onde são apresentadas as funções objectivo e as restrições do problema, são usados diversos parâmetros para caracterizar os tipos de unidades considerados na expansão. Contudo, do ponto de vista da fiabilidade, é necessário descrever previamente o enquadramento geral.

É usado um modelo simples, de dois estados, para o ciclo de operação de um componente reparável (Billinton, 1982)<sup>5</sup>. Este modelo estabelece que uma unidade de geração se encontra no estado de operação normal ou em avaria (ou falha) (figura VI.1).  $\bar{m}$  designa o tempo médio até à avaria, e  $\bar{r}$  o tempo médio de reparação. O conceito de taxa de avaria forçada (*forced outage rate*, FOR) é usado como um parâmetro de longo prazo para caracterizar a indisponibilidade de uma unidade, que é dada por  $\bar{r}/(\bar{r} + \bar{m})$ . Se os valores médios forem tomados num grande período de tempo, a definição da FOR é equivalente ao seguinte valor numérico:

$$\text{FOR} = \frac{\text{tempo em avaria forçada por um longo período (h)}}{\text{duração total do período (h)}}$$

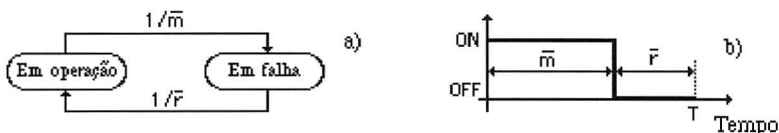


Figura VI.1 – a) Modelo de dois estados de uma unidade geradora; b) Ciclo médio.

<sup>5</sup> Billinton, R. (1982). Power System Reliability Evaluation, New York, Gordon and Breach.

A FOR de uma unidade geradora pode ser considerada como a probabilidade de, a longo prazo, esse grupo se encontrar numa situação de avaria. O sistema gerador existente, num dado instante no tempo, pode ser modelado através de tabelas de probabilidade de falha de capacidade (*capacity outage probability tables*, COPT). Nestas tabelas, cada linha representa um estado do sistema. Estes podem ser organizados, de uma forma simplificada, com três valores em cada linha: a primeira coluna contém os valores de capacidade possíveis em avaria; a segunda, as probabilidades individuais de cada estado; a terceira coluna é um conjunto de valores acumulados, cada um representando a probabilidade de estar indisponível uma quantidade de potência igual ou maior do que o valor correspondente na primeira coluna.

## A2.2 MODELO DE CARGA

O modelo de carga é baseado numa curva de pico de duração de carga (*peak load duration curve*, LDC). A LDC é adequada quer para uso em modelos de programação linear, quer para a avaliação da fiabilidade através do índice de probabilidade de perda de carga (*loss-of-load-probability*, LOLP). A LDC é aproximada por um histograma. Do ponto de vista de avaliação da fiabilidade, o histograma é organizado em fatias verticais de potência constante. Contudo, dado que o *método dos z melhorado* (Beglari e Laughton, 1974)<sup>6</sup> é usado no processo de optimização, a LDC é vista aqui noutra perspectiva. Este método permite uma considerável redução no número de restrições que geralmente são necessárias no planeamento de geração usando programação linear.

No *método dos z melhorado*, o período de planeamento é dividido em vários sub-períodos, cada um correspondendo a uma LDC, por sua vez divididos num certo número de intervalos. É assumido que cada grupo nunca funcionará no intervalo  $s+1$  a um nível de potência superior ao do intervalo  $s$ . Assim, a descrição da LDC pode ser obtida através das diferenças de altura entre fatias contíguas, em vez da altura absoluta de cada fatia. Para  $S$  intervalos, isto reduz o número de restrições de um factor  $1/S$  do número total necessário, em relação à aproximação clássica.

<sup>6</sup> Beglari, F., Laughton, M. (1974). Model Building with Particular Reference to Power System Planning: the Improved z-substitutes Method, Energy Modelling, 57-69, IPC Business Press.

Após o cálculo de cada solução não dominada, um dos resultados (valor das variáveis de decisão) consiste na contribuição de cada tipo de unidade geradora para a carga em cada sub-período. A soma de todas estas contribuições deve ser igual à LDC do sub-período correspondente. Na figura VI.2 está representada a forma geral de uma destas contribuições. Cada  $z_{is}^r$  ( $s=1, \dots, 6$ ) é a redução no nível de potência resultante dos grupos de tipo  $i$ , do intervalo  $s-1$  para o intervalo  $s$ , no sub-período  $r$ . Grupos do mesmo tipo são os que têm os mesmos valores dos parâmetros que os caracterizam, usando o mesmo combustível. A área sob cada LDC é calculada através de (ver figura VI.2):

$$\sum_{s=1}^6 z_s^r \sum_{k=1}^s T_k$$

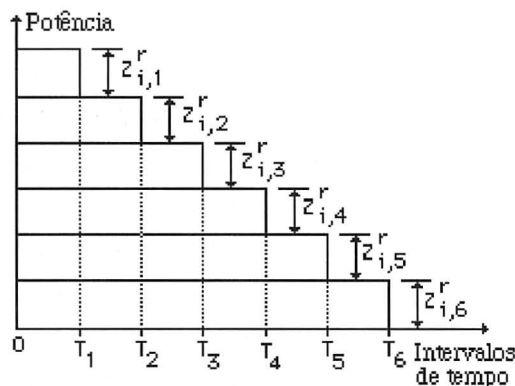


Figura VI.2 – Contribuição de grupos do tipo  $i$  no sub-período  $r$  para a LDC global do mesmo período.

A LDC em cada sub-período é calculada de acordo com dados da carga de referência e de taxas de crescimento, estabelecidas por um procedimento de previsão (fora do âmbito deste estudo).

### A2.3 FUNÇÕES OBJECTIVO

Neste modelo, para o planeamento da expansão de um sistema produtor de energia eléctrica, são consideradas três funções objectivo quantificando o custo total actualizado (a minimizar), a fiabilidade do sistema (a maximizar) e uma medida do impacte ambiental (a minimizar).

### 2.3.1 CUSTO TOTAL DO PLANO DE EXPANSÃO

Esta função objectivo tem a forma:

$$\min f_1 = \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{r=1}^j \left( \frac{g_{j-(r-1)}}{100} \sum_{i=1}^I c_i x_i^r \right) + N \left( \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^I b_i z_{is}^j + \sum_{s=1}^S \sum_{a=1}^A b_a z_{as}^j \right) \right] \quad (1)$$

Nesta expressão, a primeira parcela dentro do parêntesis exterior representa os custos de investimento. O termo dentro do parêntesis afectado pela constante N representa os encargos operacionais das novas unidades, e das já em serviço no início do período de planeamento (PLPER). Os vários símbolos têm o seguinte significado:

- j índice do sub-período dentro do PLPER (j=1,...,J)
- s índice do intervalo dentro do sub-período (s=1,...,S)
- i índice do tipo de unidade considerada para adições (i=1,...,I)
- a índice do tipo de unidade existente no início do PLPER (a=1,...,A)
- $x_i^r$  variável de decisão representando a potência total (MW) das unidades de tipo i, a serem instaladas no sub-período r
- $z_{is}^j$  variável no *método dos z melhorado* (MW) relativa ao grupo do tipo i, no intervalo s, do sub-período j (ver 2.2 e figura VI.2)
- $z_{as}^j$  igual à variável anterior, mas relativo a unidades do tipo a, existentes no início do PLPER
- $c_i$  custos de investimento (\$/MW) associados a um grupo do tipo i
- $b_i$  encargos operacionais (\$/MWh) de um grupo do tipo i
- $b_a$  encargos operacionais (\$/MWh) de um grupo do tipo a
- N constante representando o número de horas dentro de um intervalo
- $g_r$  factor representando os custos de investimento do sub-período r, como uma percentagem do investimento inicial

Não são considerados os custos fixos para as unidades já em serviço no início do PLPER, visto que são constantes para todos os planos de expansão

Para mais detalhes sobre a modelação matemática ver Clímaco *et al.* (1995).

### 2.3.2 FIABILIDADE

Os cálculos relativos à determinação da fiabilidade são intrinsecamente de natureza não linear. Rutz *et al.* (1983)<sup>7</sup> propôs uma aproximação, em que a fiabilidade é modelada como uma restrição de um modelo de planeamento de geração de energia, no âmbito de um programa linear com uma única função objectivo (custo). No nosso estudo é usada uma aproximação semelhante para formular a função objectivo fiabilidade. O parâmetro fundamental usado para modelar a fiabilidade das unidades geradoras é a capacidade de *arrasto de carga* (*load-carrying-capability*, LCC) das novas unidades. A LCC representa a quantidade de potência de que a carga do sistema pode aumentar com a adição de uma nova unidade geradora, de modo a manter o índice de fiabilidade no valor anterior à adição (Garver, 1967)<sup>8</sup>. Se a LCC de uma unidade do tipo  $i$  no sub-período  $j$  do período de planeamento for representada por  $h_i^j$ , a respectiva função objectivo a maximizar é:

$$\max f_2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^i h_i^j \frac{x_i^r}{G_i}, \quad (2)$$

em que  $G_i$  é a potência nominal de uma unidade do tipo  $i$ .

Detalhes sobre o cálculo de valores de LCC usados em (2) podem ser encontrados em Clímaco *et al.* (1995).

### 2.3.3 IMPACTE AMBIENTAL

As diversas tecnologias de geração são muito difíceis de comparar numa perspectiva de quantificação dos impactos ambientais, não existindo consenso sobre esta matéria. Em House *et al.* (1981)<sup>9</sup> são referidas várias categorias de deficiências encontradas nos estudos de impacte ambiental de diferentes

<sup>7</sup> Rutz, W., Mirchandani, P., Wicks, F., Becker, M. (1983). A Reliability Treatment Applied to an Analysis of Optimal Generation Plant Size, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-102 (8).

<sup>8</sup> Garver, L. (1967). Effective Load Carrying Capability of Generating Units, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-85.

<sup>9</sup> House, P., Coleman, J., Schull, R., Matheny, R., Hock, J. (1981). Comparing Energy Technology Alternatives from an Environmental Perspective, DOE Publication EV-0109.

tecnologias de geração de energia. Entre elas podem apontar-se a incerteza, a ignorância, a subjectividade e a incomensurabilidade, que devem ser consideradas como características dos dados geralmente disponíveis.

Neste estudo, foi utilizada uma tabela proposta por Holdren (1977), referida em House *et al.* (1981), estabelecendo uma ordenação das diversas tecnologias de geração de acordo com diferentes critérios de avaliação dos impactes. Deste modo, foram considerados quatro índices: uso do terreno, grande acidente/sabotagem, emissões/saúde pública e efeito nos ecossistemas. O primeiro índice está sobretudo relacionado com a potência instalada. O segundo tem a ver quer com a produção de energia, quer com a existência das unidades de produção. Os outros índices podem ser relacionados apenas com a produção de energia.

Neste contexto, foram obtidos dois parâmetros que caracterizam cada alternativa de geração: um penalizando a capacidade instalada, e o outro penalizando a produção de energia. Foi, então, utilizada uma soma ponderada dos índices apresentados em House *et al.* (1981) para calcular cada parâmetro. Em ambos os casos, o peso atribuído ao índice *grande acidente/sabotagem* foi intencionalmente colocado muito mais alto do que os outros, para entrar em linha de conta com as preocupações actualmente existentes sobre a tecnologia nuclear, dado que a opção nuclear tem o pior coeficiente na ordenação.

Os dois factores para as tecnologias de geração são  $e_i$  (penalizando a produção de energia dos grupos do tipo  $i$ ), e  $v_i$  (penalizando a capacidade instalada de grupos do tipo  $i$ ). Como o impacte devido à capacidade instalada no início do período de planeamento é constante, não foi incluído na formulação da função objectivo. A função objectivo é então expressa por:

$$\min f_3 = \sum_{i=1}^I v_i \sum_{j=1}^J x_i^j + N \sum_{i=1}^I e_i \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S sz_{is}^j + N \sum_{a=1}^A e_a \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S sz_{as}^j \quad (3)$$

As restrições podem ser classificadas em três categorias. A primeira impõe que a potência instalada em cada intervalo  $s$  de cada sub-período  $j$  do período de planeamento deve ser pelo menos igual à carga nesse intervalo. Devem ser consideradas, quer as unidades novas, quer as já existentes no início do período de planeamento.



$$\sum_{i=1}^I \sum_{s=k}^S z_{is}^j + \sum_{a=1}^A \sum_{s=k}^S z_{as}^j \geq P_k \quad (j=1, \dots, J), \quad (k=1, \dots, S) \quad (4)$$

O significado de  $P_k$  é esclarecido na figura VI.3.

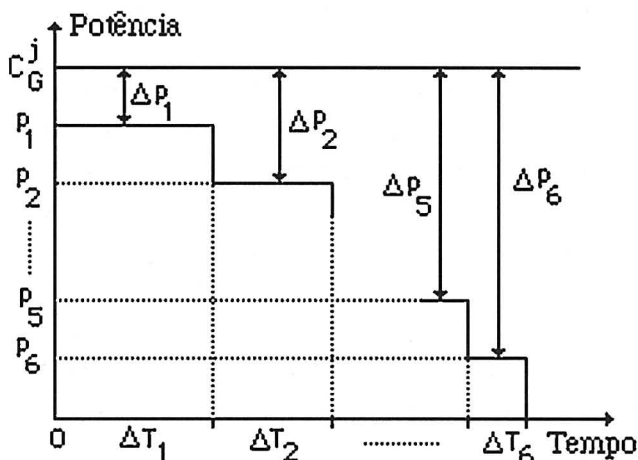


Figura VI.3 – Amostra da LDC para o cálculo da LOLP.

A segunda categoria representa as restrições de operação das unidades geradoras, impondo que a potência de uma unidade não pode exceder a respectiva potência nominal, previamente afectada por um factor de disponibilidade. O termo independente das restrições relativas às unidades existentes no início do período de planeamento é constante.

$$\sum_{s=1}^S z_{is}^j \leq m_i \sum_{r=1}^j x_i^r \quad (j=1, \dots, J), \quad (i=1, \dots, I) \quad (5)$$

$$\sum_{s=1}^S z_{as}^j \leq m_a G_a \quad (j=1, \dots, J), \quad (a=1, \dots, A) \quad (6)$$

Em (5) e (6)  $m_i$  ( $m_a$ ) representa o factor de disponibilidade de uma unidade do tipo  $i$  ( $a$ ).

Foi também imposta uma limitação orçamental, relativa ao maior valor admissível para a função objectivo custo:  $f_1 \leq 8 \times 10^7$ .

### A3. EXEMPLO ILUSTRATIVO

Nesta secção descreve-se a aplicação do TRIMAP a um problema ilustrativo do planeamento da expansão de um sistema electroprodutor, baseada no modelo de PLMO descrito nas secções anteriores. Embora não se trate de um estudo de caso real, os vários tipos de parâmetros foram quantificados tendo por base uma aproximação razoável de valores reais (tabelas I a IV).

Como não é possível, no início do estudo, ter informação sobre as LCCs, visto que o respectivo cálculo pressupõe a existência de resultados de um plano de expansão previamente estabelecido (ver 2.3.2), é, então, estimado manualmente um plano de expansão, sem outras preocupações que não seja usar apenas unidades dos tipos disponíveis para as adições, e respeitar as restrições impostas por (4). As LCCs assim obtidas são usadas para definir  $f_2$  e aplicar o método TRIMAP pela primeira vez. O procedimento natural é, então, avaliar a fiabilidade de cada um dos planos aceitáveis pelo agente de decisão e aplicar novamente o TRIMAP, com os novos parâmetros de fiabilidade.

**Tabela I – Sistema gerador existente no início do período de planeamento.**

Tipo	N.º	Potência nominal (MW)	Encargos operacionais (\$/KWh)	FOR	Parâmetros de impacte ambiental $e_i$ $v_i$		Factor de disponibilidade
Carvão	3	3	6.59	0.10	2.60	1.43	0.75
Carvão	4	4	6.59	0.06	2.60	1.43	0.75
Fuel	3	3	13.30	0.04	2.07	1.29	0.80

**Tabela II – Unidades geradoras consideradas para as adições.**

Tipo	Potência nominal (MW)	Custos de investimento (\$/KW)	Encargos operacionais (\$/KWh)	FOR	Parâmetros de impacte ambiental $e_i$ $v_i$		Factor de disponibilidade
Fuel	75	702	12.6	0.02	2.07	1.29	0.9
Nuclear	600	1675	5.0	0.09	3.80	4.57	0.6
Carvão	350	1229	6.5	0.07	2.60	1.43	0.8

**Tabela III – Curvas de duração de carga (MW).**

Sub-período	1	2	3	4	5	6
0 (ref.)	2110	2019	1932	1849	1769	1693
1	2748	2629	2516	2408	2304	2205
2	3528	3375	3230	3091	2958	2831
3	4400	4209	4028	3855	3689	3531

**Tabela IV - Dados relativos à fiabilidade, usados na 1ª aplicação de TRIMAP ( $h_i^j$  em MW).**

	Sub-período 1			Sub-período 2			Sub-período 3		
	F	N	C	F	N	C	F	N	C
$k_i^j$	1	0	0	0	1	1	0	0	2
$h_i^j$	72.7	0	0	0	257.88	243.01	0	0	230.1

**Tabela V – Dados relativos à fiabilidade, usados na 2ª aplicação de TRIMAP ( $h_i^j$  em MW).**

	Sub-período 1			Sub-período 2			Sub-período 3		
	F	N	C	F	N	C	F	N	C
$k_i^j$	1	3	0	0	0	3	0	0	3
$h_i^j$	73.2	408.44	0	0	0	294.05	0	0	293.84

Os valores estimados de  $k_i^j$ , apresentados na Tabela IV, foram obtidos por um programa auxiliar, que gerou também os valores  $h_i^j$  da mesma tabela. Algumas soluções (planos de expansão) foram seleccionados para avaliação da fiabilidade. O plano de expansão apresentado na Tabela V foi, então, adoptado para construir a função objectivo fiabilidade, como nova entrada do TRIMAP.

### A3.1. PESQUISA COM O TRIMAP

O primeiro passo do TRIMAP consiste na determinação das três soluções não dominadas, correspondentes aos óptimos de cada função objectivo (soluções 1, 2 e 3, respectivamente). Suponha-se que o agente de decisão resolveu, então, pesquisar novas soluções, através da selecção directa de

vectores de pesos, correspondentes a zonas ainda não cobertas do triângulo (espaço dos pesos). O agente de decisão pode assim compreender melhor, de uma forma progressiva e interactiva, a *geometria* da região não dominada, e começar a focar a sua atenção nas zonas onde se localizam as soluções que melhor correspondem às suas preferências.

Esta fase da pesquisa, de carácter predominantemente estratégico, destinada a adquirir um conhecimento global do problema, conduziu ao cálculo das soluções básicas (vértices) não dominadas(os) cujas regiões de indiferença estão representadas na figura VI.4a. No gráfico que mostra uma projecção do espaço das funções objectivo (figura VI.4b), apenas estão representadas as soluções correspondentes aos óptimos de cada função objectivo (para não complicar o gráfico com pontos muito próximos).

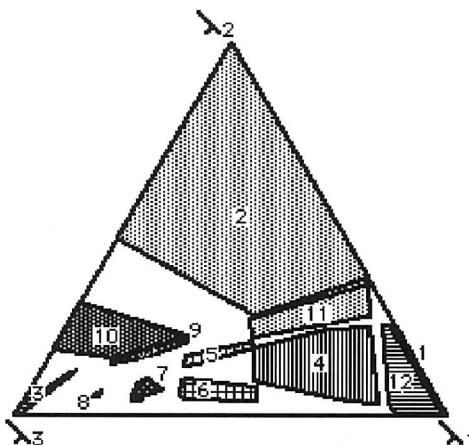


Figura VI.4a – O espaço dos pesos após uma pesquisa destinada a adquirir um conhecimento global do problema.

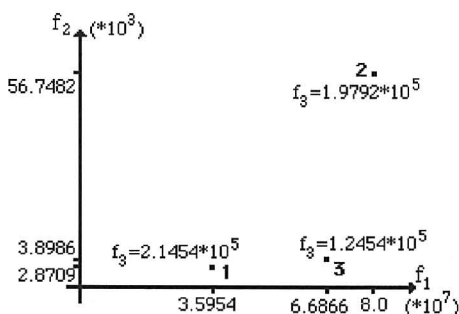


Figura VI.4b – Projecção do espaço das funções objectivo em  $f_1 f_2$  (mostrando apenas as soluções que optimizam cada função individualmente).

As principais conclusões obtidas, após esta fase de pesquisa, são as seguintes:

- o custo mínimo é obtido com uma mistura de unidades nuclear e carvão, enquanto o mínimo impacte ambiental corresponde, apenas, a adicionar unidades fuel.
- O máximo de  $f_2$  é uma solução pouco realista, onde o custo é completamente sacrificado à fiabilidade.
- No espaço dos pesos da figura VI.4a podem distinguir-se três zonas principais: uma zona superior, onde um compromisso entre  $f_2$  e  $f_3$  mantém  $f_1$  no valor máximo permitido pela restrição orçamental (como nas soluções 2 e 10), e duas zonas na parte inferior. Na primeira destas zonas, à direita, as unidades nucleares aparecem apenas em poucas soluções perto do óptimo de  $f_1$ , e verifica-se uma transição suave do custo entre soluções com e sem tecnologia nuclear (por exemplo, entre as soluções 12 e 4). A maior parte desta zona inferior do triângulo é preenchida por regiões de indiferença correspondentes a planos de expansão com adições de apenas unidades a carvão (da solução 4 até às soluções 8 e 9). Entre estas soluções e as localizadas noutra zona, à esquerda, junto ao óptimo da função impacte ambiental, verifica-se uma variação brusca de planos de expansão só com unidades a carvão para planos de expansão só com unidades a fuel (por exemplo, da solução 8 para a solução 3).

Na fronteira, entre estas três zonas principais, verifica-se uma variação brusca do custo.

A figura VI.5 ilustra a utilidade da opção oferecida pelo TRIMAP que permite introduzir limitações adicionais nos valores das funções objectivo, de modo a reduzir o âmbito da pesquisa, como resultado do conhecimento sobre o problema, entretanto adquirido durante o processo interactivo de pesquisa. Suponha-se que o agente de decisão resolveu introduzir uma limitação superior para  $f_1$  (neste caso  $f_1 \leq 4 \times 10^7$ ). O TRIMAP faz a tradução desta restrição adicional para o espaço dos pesos, o que possibilita identificar uma área mais restrita do triângulo com interesse para o agente de decisão, onde a pesquisa de soluções deve prosseguir (figura VI.6).

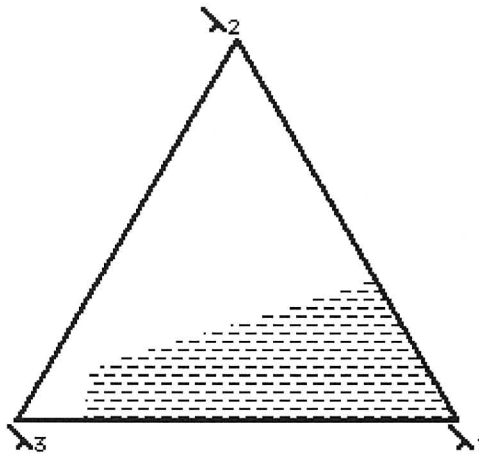


Figura VI.5 – Região do espaço dos pesos onde  $f_1 \leq 4 \times 10^7$  é satisfeita.

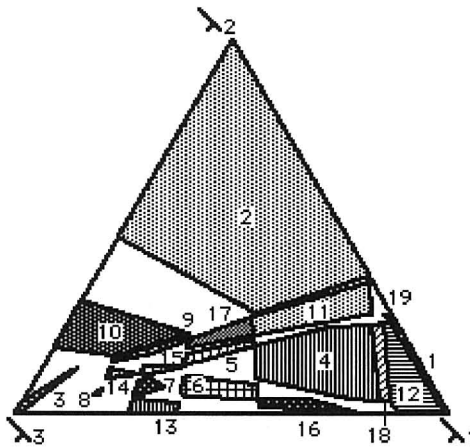


Figura VI.6 – Realização de uma pesquisa mais exaustiva na região do espaço dos pesos onde a limitação adicional, da figura anterior, é satisfeita.

A tabela VI reúne parte da informação obtida sobre 19 soluções não dominadas, que constituem uma amostra significativa do conjunto de soluções não dominadas do problema em estudo. Na tabela VII são apresentadas, para algumas soluções, as adições de geração de potência, por sub-período. Devido a limitações de espaço, não são apresentados os valores das variáveis de decisão  $z$ , relativas à produção de energia.

**Tabela VI – Valores das funções objectivo das soluções na figura VI.6.**

Solução	$f_1$ (10 <sup>7</sup> )	$f_2$ (10 <sup>3</sup> )	$f_3$ (10 <sup>5</sup> )
1	3.5954	2.8709	2.1454
2	8.0000	56.7482	1.9792
3	6.6866	3.8986	1.2454
4	3.7308	4.6535	1.5408
5	3.7702	5.3687	1.5406
6	3.7330	4.4636	1.5355
7	3.7373	4.4006	1.5334
8	3.7375	4.4006	1.5333
9	3.7906	5.7719	1.5450
10	8.0000	56.7451	1.9790
11	3.7902	5.7698	1.5452
12	3.5968	2.8429	2.0554
13	3.7374	4.2399	1.5326
14	3.7627	4.8627	1.5334
15	3.7619	4.9908	1.5355
16	3.7328	4.4625	1.5357
17	3.7904	5.7698	1.5451
18	3.6452	3.5957	1.8414
19	3.6045	3.0702	2.1498

**Tabela VII – Adições, em MW, para algumas soluções (o índice refere-se ao sub-período).**

Solução	Fuel 1	Nuclear 1	Carvão 1	Carvão 2	Carvão 3
1		3673.3			441.3
3	3994.4				
4			1370.0	975.0	851.3
5			1370.0	1826.3	
6			1370.0	975.0	625.0
7			1371.3	975.0	547.5
8			1370.0	976.3	547.5
9			1371.3	2065.0	
11			1370.0	2065.0	
12		3126.7			851.3
13			1371.3	783.3	738.3
14			1371.3	1523.4	
15			1371.3	1600.0	
16			1370.0	973.8	626.3
17			1370.0	2065.0	
18		1826.7		975.0	851.3
19		3673.3			678.3

Notas:

- A decomposição do triângulo é feita após a normalização prévia das funções objectivo. Nas figura VI.4b e na Tabela VI são apresentados os valores reais das funções objectivo.
- As figuras VI.4 a VI.6 são cópias dos écrans apresentados pelo TRIMAP, com um pequeno tratamento gráfico para permitir uma identificação mais clara das soluções.

- As adições de capacidade (MW) são expressas em números reais, ou seja, podem variar de uma maneira contínua, não tendo em conta a natureza discreta das adições de capacidade reais. Esta característica requer algum pós-processamento dos resultados, de modo a obter boas correspondências discretas, para as soluções de compromisso escolhidas pelo agente de decisão.

### A3.2. PESQUISA COM O STEM

A solução inicial obtida com o método STEM tem os seguintes valores das funções objectivo:

$$f_1 = 78170369.1$$

$$f_2 = 54536.7$$

$$f_3 = 196042.0$$

Comparando estes valores com os obtidos usando o TRIMAP, verifica-se que esta solução se localiza numa face não dominada próxima do óptimo da função objectivo  $f_2$ . A partir da informação sobre as principais características da região não dominada obtida com o TRIMAP, é possível concluir que será necessário relaxar  $f_2$  de um valor enorme, dado que o respectivo valor nesta solução é próximo do óptimo de  $f_2$ . Note-se que, privilegiando a função objectivo fiabilidade, a capacidade a instalar é muito superior à necessária para satisfazer a procura, e consequentemente o custo atingirá o valor máximo permitido.

Nestas circunstâncias, é difícil, para o agente de decisão, estabelecer os valores a relaxar, a partir de uma simples comparação entre os valores das funções objectivo da solução inicial, calculada pelo STEM, e os valores óptimos de cada função objectivo.

334

Suponha-se que na primeira interacção o agente de decisão decide relaxar  $f_2$  de  $51 \times 10^3$ . A solução seguinte, obtida utilizando o STEM, tem os seguintes valores para as funções objectivo:

$$f_1 = 41491034.1$$

$$f_2 = 3536.7$$

$$f_3 = 148160.6$$



A relaxação permitida para  $f_2$  foi *aproveitada* na totalidade, de modo a obter uma melhoria significativa na função custo e, também, embora menos acentuada, na função impacte ambiental. No entanto, o custo tem ainda um valor superior ao de muitas soluções, cujas regiões de indiferença se localizam na zona inferior do espaço dos pesos. Suponha-se, então, que, na segunda interacção, o agente de decisão resolve relaxar  $f_3$  de  $20 \times 10^3$ , para tentar melhorar um pouco mais a função objectivo custo. A solução calculada pelo STEM é:

$$f_1 = 36906874.6$$

$$f_2 = 3993.5$$

$$f_3 = 168160.6$$

O plano de expansão correspondente à última solução calculada é (onde, por exemplo, Nuclear 1 designa a expansão do sistema electroprodutor no sub-período 1):

Nuclear 1	Carvão 1	Carvão 2	Carvão 3
860.6	724.6	783.8	1041.3

Note-se que, comparando com os resultados obtidos com o TRIMAP, é possível perceber para que zona da região não dominada está a ser conduzida a pesquisa efectuada com o STEM (e quais as características essenciais das soluções aí localizadas). Partindo de uma solução próxima do óptimo da fiabilidade, na primeira iteração melhora-se, quer o custo, quer o impacte ambiental, à custa de uma redução drástica da fiabilidade, e, na segunda iteração, a solução proposta aproxima-se do óptimo do custo, piorando moderadamente o impacte ambiental.

Nesta secção, é apresentado um exemplo ilustrativo da aplicação do método de Zionts-Wallenius a este modelo de planeamento energético.

A solução inicial, usando os pesos  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$ , conduz à solução óptima de  $f_2$  (solução A na figura VI.7).

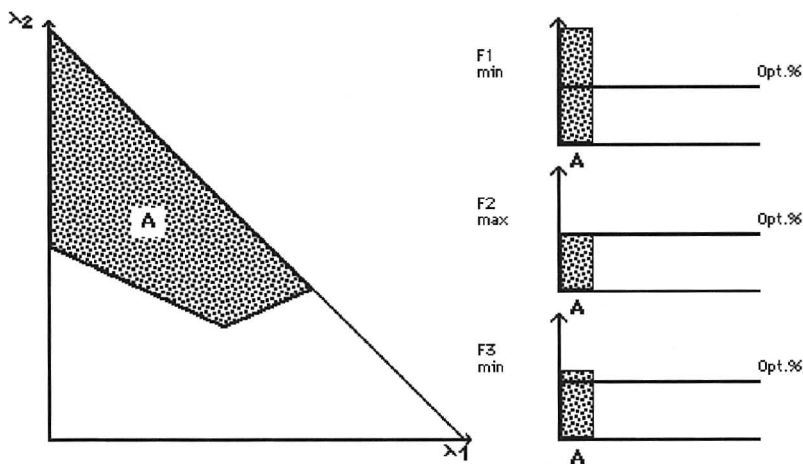


Figura VI.7 – Solução inicial obtida com o método de Zionts-Wallenius (com  $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3= 1/3$ ).

Esta solução tem duas soluções (vértices) adjacentes, mas apenas uma delas é distinta da solução actual (no sentido indicado na descrição do método de Zionts-Wallenius, capítulo III; isto é, dois vértices adjacentes são distintos, significando que são suficientemente diferentes para efectuar uma comparação par a par, se pelo menos numa das funções objectivo os valores correspondentes diferirem mais do que 10%). Graças à pesquisa realizada com o TRIMAP sabe-se que a solução distinta está localizada na parte inferior direita do espaço dos pesos.

Este vértice adjacente não dominado tem os seguintes valores para as funções objectivo:

$$f_1 = 40691197.5$$

$$f_2 = 9234.1$$

$$f_3 = 157474.0$$

Comparando estes valores com os correspondentes ao óptimo de  $f_2$  (tabela VI), pode concluir-se que preferindo a solução proposta em relação à inicial é como dar um enorme *salto no escuro*, devido à falta de informação (no contexto do método de Zionts-Wallenius) sobre as características das soluções que é possível encontrar, quando o agente de decisão é obrigado a responder de forma dicotómica à questão que lhe é colocada.

Vamos então admitir duas hipóteses de pesquisa:

(a) O agente de decisão não prefere esta solução em relação à solução A (óptimo de  $f_2$ ).

Como resultado desta resposta, é introduzida a restrição 1 (figura VI.8) no espaço dos pesos. Seguidamente, o agente de decisão é confrontado com as tendências de variação unitária (*trade-offs*), correspondentes a movimentos sobre as arestas não dominadas, que têm origem no vértice que otimiza  $f_2$ .

As componentes dos vectores de tendências de variação unitária representam as variações dos valores das funções objectivo por unidade da correspondente variável não básica eficiente que se torna básica. Note-se que, o valor ser positivo indica uma diminuição do valor da função objectivo. No caso de o valor ser nulo não há variação da função objectivo.

Na figura VI.8 é mostrada a restrição correspondente, assinalada com 2, supondo que o *trade-off* é aceite. Os valores do vector de tendência de variação unitária são:

$f_1$  : 0.0000 (a minimizar)

$f_2$  : 0.9530 (a maximizar)

$f_3$  : 8.0113 (a minimizar)

Supondo que o que o *trade-off* não é aceite, então a restrição 2 é introduzida no sentido contrário (figura VI.9).

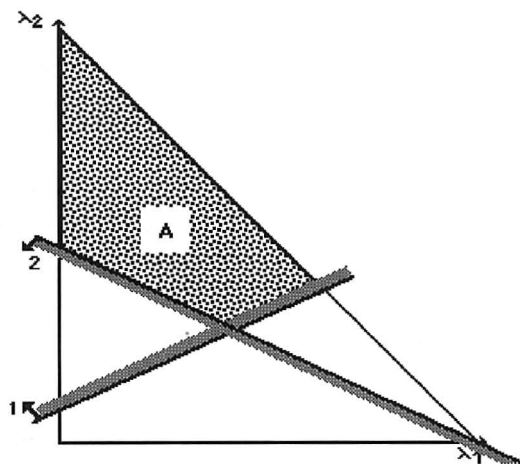


Figura VI.8 – Restrições no espaço dos pesos resultantes das respostas do agente de decisão (comparação entre soluções e avaliação de *trade-off*).

O agente de decisão é, então, questionado sobre a aceitação do *trade-off* correspondente à restrição 3 (figura VI.9), cujos valores são:

$$f_1 : 1.0000$$

$$f_2 : 0.0012$$

$$f_3 : 0.0010$$

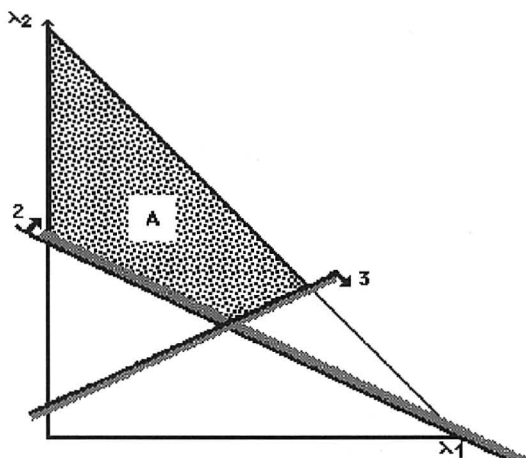


Figura VI.9 – Restrições no espaço dos pesos resultantes das respostas do agente de decisão (avaliação de *trade-offs*).

Note-se que o agente de decisão pode, ou não, aceitar esta tendência de variação unitária, que conduz à eliminação da restrição de sentido oposto previamente introduzida (devida à resposta a comparações entre pares de soluções), e a respectiva substituição pela nova restrição. Suponha-se que a resposta do agente de decisão é positiva (ou seja, aceita o *trade-off*). Então, o método selecciona um novo vector de pesos, que satisfaz as restrições da figura VI.9, e calcula o correspondente vértice não dominado (figura VI.10).

O vértice B (que, por coincidência, é a solução que otimiza  $f_1$ ) é o novo candidato a solução actual, apresentando os valores das funções objectivo:

338

$$f_1 = 35953830.8$$

$$f_2 = 2870.9$$

$$f_3 = 214535.9$$

Suponha-se que o agente de decisão prefere esta solução em relação à solução A (que era ainda a solução actual). Esta resposta conduz à introdução da restrição 4 no espaço dos pesos, reduzindo mais o âmbito da pesquisa (figura VI.10).

A solução B não possui vértices eficientes adjacentes suficientemente distintos. Nestas circunstâncias, a continuação do processo seria sobretudo baseada em respostas a possíveis *trade-offs*. Contudo, estas questões, ao envolverem apenas tendências de variação unitária sobre arestas, quando estes valores são muito baixos (como acontece no exemplo que estamos a tratar), não são fáceis para os agentes de decisão, o que dificulta bastante o processo de decisão a partir deste ponto.

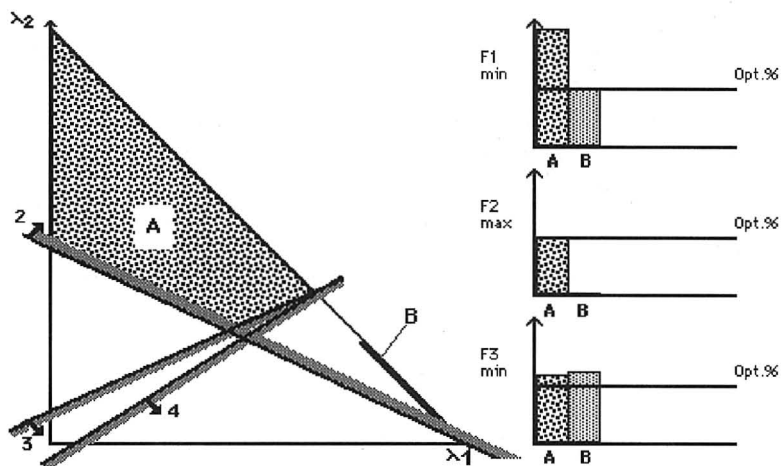


Figura VI.10 – Restrições no espaço dos pesos, resultantes das respostas do agente de decisão (comparação entre soluções).

(b) Considere-se agora a segunda hipótese, ou seja, o agente de decisão prefere a solução adjacente a A em relação à solução A.

Esta resposta conduz à introdução da restrição 1 (figura VI.11) no espaço dos pesos. É calculado um novo vector de pesos na região reduzida do espaço dos pesos, que conduz à solução C, cujos valores das funções objectivo são:

$$\begin{aligned} f_1 &= 37308455.3 \\ f_2 &= 4653.5 \\ f_3 &= 154082.0 \end{aligned}$$

Suponha-se que o agente de decisão prefere a solução C (solução 4 na tabela VI) à solução adjacente a A. A solução C torna-se a nova solução actual e é introduzida a restrição 2 no espaço dos pesos (figura VI.11). Existe apenas um vértice adjacente a C, distinto deste, com os seguintes valores das funções objectivo:

$$f_1 = 37702264.5$$

$$f_2 = 5368.7$$

$$f_3 = 154082.0$$

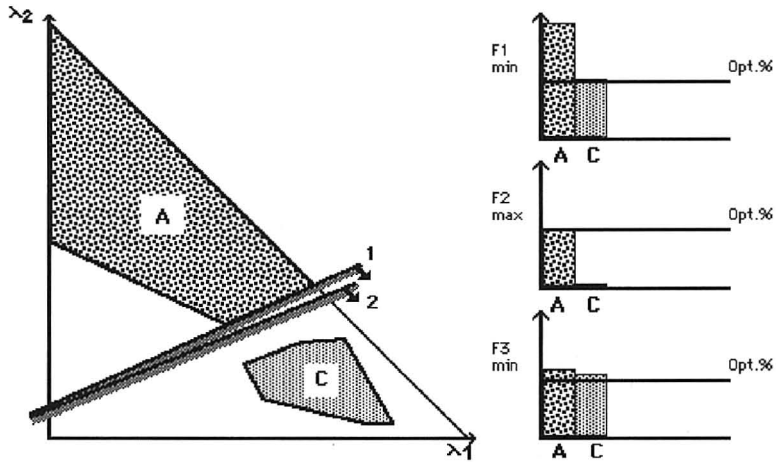


Figura VI.11 – Restrições no espaço dos pesos resultantes das respostas do agente de decisão (comparação entre soluções).

Note-se que, embora estes dois vértices (C e o que lhe é adjacente) sejam distintos, os respectivos valores das funções objectivo não são muito diferentes. Suponha-se que o agente de decisão prefere o novo vértice (designado por D – solução 5 na tabela VI) em relação a C. É, então, introduzida a restrição 3 no espaço dos pesos (figura VI.12), e é calculado um novo vector de pesos que satisfaz as restrições 1, 2 e 3, conduzindo a um novo vértice candidato com os seguintes valores das funções objectivo:

$$f_1 = 37045318.1$$

$$f_2 = 4712.0$$

$$f_3 = 184587.0$$

Se o agente de decisão prefere o vértice D em relação a este último, então D torna-se a nova solução actual, e é introduzida a restrição 4 no espaço dos pesos (figura VI.12). Como não há novas soluções adjacentes a D, distintas em relação a esta (no sentido referido atrás), a pesquisa continuaria baseada em respostas a tendências de variação unitária, correspondentes a movimentos sobre arestas não dominadas com origem no

vértice D. Nestas circunstâncias, ser-se-ia de novo confrontado com variações muito suaves das funções objectivo e, portanto, com decisões difíceis.

O plano de expansão correspondente à solução D é (onde o índice se refere ao sub-período):

Carvão 1	Carvão 2
1370.0	1826.3

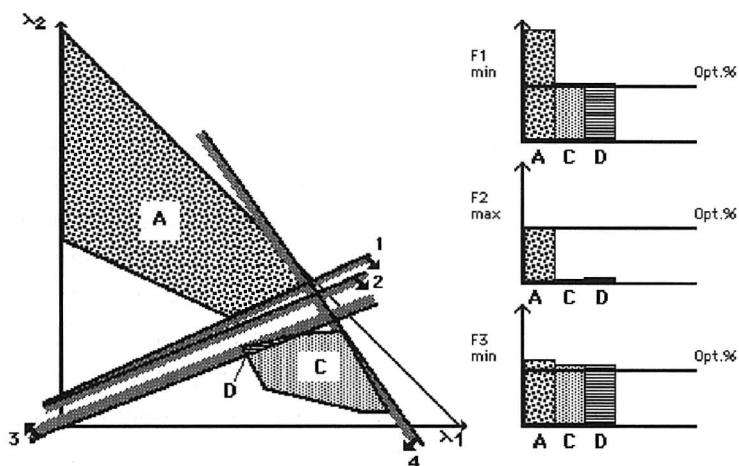


Figura VI.12 – Restrições no espaço dos pesos resultantes das respostas do agente de decisão (comparação entre soluções).

#### A4. ALGUMAS CONCLUSÕES

As experiências realizadas com os métodos TRIMAP, STEM e Zionts-Wallenius, para o modelo de planeamento energético, confirmam, no essencial, as características apontadas no cap. III, onde os métodos foram descritos e exemplificados.

As experiências realizadas com o método STEM confirmam as suas principais vantagens, nomeadamente a simplicidade quer dos requisitos computacionais, quer na perspectiva da facilidade de compreensão por parte do agente de decisão. Contudo, nem sempre se torna fácil para o agente

de decisão especificar que funções objectivo relaxar e, em especial, qual a respectiva quantidade máxima. O STEM torna-se demasiado rígido, na sua versão *standard*, isto é, se não for permitido ao agente de decisão rever decisões anteriores, relacionadas com algumas relaxações previamente efectuadas. No estudo apresentado neste capítulo é clara a dificuldade, para o agente de decisão, em especificar as quantidades de relaxação, devido às bruscas variações dos valores das funções objectivo, que ocorrem em determinadas zonas não dominadas da região admissível.

Nas experiências realizadas com o método de Zionts-Wallenius, o agente de decisão é confrontado, logo desde o início, com decisões muito difíceis, isto é, deve decidir sobre a passagem do óptimo de  $f_2$  para soluções cuja região de indiferença se localiza na parte inferior direita do espaço dos pesos, sendo muito elevadas as correspondentes variações dos valores das funções objectivo, nomeadamente no que se refere à função custo. Verificou-se, em diversas experiências, que o agente de decisão acabava sempre por ter de tomar opções dentro da região reduzida do espaço dos pesos da figura VI.5. No entanto, dentro desta região, as variações das funções objectivo são relativamente suaves, razão pela qual a informação local usada pelo método de Zionts-Wallenius pode tornar difícil a actuação do agente de decisão, no quadro do método. Então, o agente de decisão pode muitas vezes sentir-se muito desconfortável ao ter que responder a questões baseadas em tendências de variação unitária ou em comparação de pares de soluções. As experiências realizadas confirmaram também a rápida redução do espaço dos pesos onde terá lugar a pesquisa em iterações subsequentes. A análise deste problema com os métodos STEM e Zionts-Wallenius revela as dificuldades da pesquisa local, especialmente numa fase inicial, isto é, quando ainda não se conhece quase nada sobre a forma do poliedro admissível na região eficiente. Nesta fase de pesquisa, procedimentos do tipo do TRIMAP revelam-se de grande utilidade.



## **PARTE B. APOIO MULTICRITÉRIO À DECISÃO EM PLANEAMENTO ESTRATÉGICO DA MODERNIZAÇÃO DE REDES DE TELECOMUNICAÇÕES**

### **B1. INTRODUÇÃO**

Nos últimos anos, as redes de telecomunicações têm estado sujeitas a inovações constantes nos domínios da tecnologia dos equipamentos, arquitecturas da rede, serviços, ambiente empresarial e necessidades dos clientes, que deram origem ao aparecimento e evolução de modos de comunicação multifacetados. Torna-se cada vez mais atractivo para as companhias operadoras, ou para as administrações de telecomunicações nacionais, oferecer uma gama variada de novos serviços aos seus clientes. Uma tarefa fundamental no planeamento de redes de telecomunicações é avaliar a capacidade da rede para responder à procura, tendo em conta as características e os requisitos de desempenho previstos para uma grande variedade de clientes e de serviços, assim como a oportunidade de gerar novas fontes de receita.

O desenvolvimento da indústria de telecomunicações tem sido caracterizado pela evolução de um serviço vocal analógico, em larga escala, para uma capacidade tecnológica cada vez mais complexa, capaz de suportar a transmissão de voz, dados e imagem. Os equilíbrios gerados ao longo do tempo, entre as capacidades nacionais de investigação, de desenvolvimento e de produção de equipamentos e de serviços para os utentes (no quadro de uma política executada pelas administrações de telecomunicações), é agora afectado por vários fenómenos interligados: rapidez das diversificações tecnológicas, multiplicação de novas formas de acesso às fontes de informação, aumento explosivo das necessidades de comunicação, e questões relacionadas com efeitos de escala. O monopólio das telecomunicações esteve, no passado, ligado aos conceitos de política nacional e de serviço público, caracterizando-se por uma estrutura fragmentada por país, adaptada à tecnologia nacional e a um mercado fechado, com oferta de um número muito limitado de serviços tradicionais. A tendência, no mundo actual, vai no sentido de abrir o sector à concorrência, de modo a favorecer o desenvolvimento de novos serviços, a preços cada vez menores, colocando-os num meio mais concorrencial, cabendo às entidades reguladoras a supervisão do sector.

As redes tradicionais de telecomunicações eram, geralmente, o suporte de um só serviço (por exemplo, as redes públicas comutadas telefónica e de telex). Contudo, o estado actual de desenvolvimento das tecnologias da informação e das telecomunicações possibilita a concepção de um novo tipo de rede, designada por rede digital com integração de serviços (RDIS) (*integrated service digital network* (ISDN)), caracterizada pela representação digital de todos os sinais transmitidos e processados (quer se trate de voz, texto, dados ou imagens), e pela integração de serviços e sistemas, possível devido ao uso de tecnologia digital (Bocker, 1987)<sup>10</sup>. A introdução da RDIS oferece a possibilidade de uma rede independente dos serviços, isto é, capaz de servir de suporte a uma vasta gama de serviços, definidos nas funções do terminal e, portanto, independentes da rede (*única e neutra*) que lhes serve de suporte.

A RDIS é baseada na digitalização da rede telefónica (ou seja, num modo de transmissão síncrono, com comutação por circuitos, através de um canal telefónico digital a 64 Kbit/s), sendo a ligação entre qualquer par de assinantes completamente digital. A RDIS pode ser implementada usando os pares de fios de cobre que constituem as actuais linhas de assinante, pondo à sua disposição taxas de acesso básica (2 canais básicos de 64 Kbit/s e um canal de sinalização de 16 Kbit/s) e primária (até 30 canais básicos de 64 Kbit/s e um canal de sinalização de 64 Kbit/s). É geralmente designada por RDIS de banda estreita, e consiste em serviços como voz, texto, dados ou imagem fixa. Os serviços que incluem comunicação de imagens em movimento, e a cores, só serão possíveis quando os assinantes estiverem ligados por meio de tecnologias de comunicação de alta velocidade, como as fibras ópticas, falando-se então de RDIS de banda larga.

O surgimento de novos serviços baseados em tecnologias de acesso de banda larga é essencial para a geração de receitas adicionais que suportem um crescimento de longo prazo e a saúde financeira dos operadores, tendo em conta o decréscimo progressivo do crescimento médio do serviço telefónico nos países desenvolvidos.

O sector empresarial desempenhará um papel crucial na transição para a banda larga (o que implica instalar fibras ópticas para a ligação final ao assinante) num futuro próximo. No entanto, o factor crítico, a longo prazo, será o facto de as habitações privadas serem incluídas na conversão geral da actual rede de cobre, através da instalação de fibra óptica, ou da *extensão*

---

<sup>10</sup> Bocker, P. (1987). ISDN, The Integrated Services Digital Network. Springer-Verlag.

da vida dos pares de cobre, através de tecnologias como o ADSL (*asymmetric digital subscriber line*).

Neste contexto, cabe aos agentes de decisão e aos engenheiros de planeamento de redes de telecomunicações analisar as soluções alternativas para determinar uma *melhor* estratégia de modernização da rede, tendo em atenção a disponibilidade de novas tecnologias de suporte, a possibilidade de oferecer novos serviços, as oportunidades de novas fontes de receita, as restrições técnicas, legais e de mercado, etc. Os problemas de planeamento estratégico de redes de telecomunicações envolvem aspectos conflituosos qualitativamente diversos, alguns dos quais não directamente quantificáveis por um indicador económico. A utilização de modelos e métodos de apoio multicritério à decisão, permitindo ter em conta explicitamente diferentes aspectos de natureza tecnológica, económica, e social, possibilita um planeamento mais adaptado à realidade, particularmente no que se refere aos compromissos a fazer entre objectivos conflituosos.

Neste capítulo, é proposto um modelo de programação linear multiobjectivo para planeamento estratégico da evolução de redes de telecomunicações, baseado num diagrama de transição de estados, cujos nodos caracterizam uma linha de assinante em termos das tecnologias de suporte e ofertas de serviços (Antunes *et al.*, 1993). O modelo considera três funções objectivo que quantificam o valor da evolução das linhas de assinante (a maximizar), o grau de modernização associado aos novos serviços (a maximizar), e o custo da dependência externa associada às estratégias de evolução (a minimizar). As restrições expressam limitações inferiores para a satisfação da procura estimada e para a penetração das tecnologias de suporte, limitações técnicas e limitações de carácter orçamental. As variáveis de decisão referem-se ao número de linhas que sofrem uma transição de estado num dado ano do período de planeamento.

## B2. OUTRAS ABORDAGENS PARA O PROBLEMA DE PLANEAMENTO DA MODERNIZAÇÃO DE REDES DE TELECOMUNICAÇÕES

Apesar da sua importância, apenas muito recentemente foi prestada alguma atenção, na literatura científica, a este tipo de problemas de planeamento estratégico de redes de telecomunicações.

Mason (1984)<sup>11</sup> desenvolveu um modelo de programação linear para problemas de modernização com restrições orçamentais, e ainda incluindo restrições de conservação de linhas e de grau de modernização, no qual a função objectivo corresponde à maximização do valor actual líquido (*net present value*, NPV) associado a uma política agregada de evolução. O autor propõe a utilização de uma heurística, com vista a resolver problemas de grandes dimensões, reduzindo o esforço computacional. Em contrapartida, garante apenas a obtenção de aproximações das soluções óptimas. O modelo proposto por Mason não considera a possibilidade de instalar novas linhas, ou seja o crescimento no número total de linhas ao longo do período de planeamento é nulo. O principal objectivo do trabalho é a comparação de tempos de CPU, e de resultados, chamando a atenção para a qualidade da heurística proposta. É omissa quanto à análise das estratégias de evolução.

Cruz *et al.* (1989)<sup>12</sup> apresentaram um modelo matemático, designado por *General Replacement Decision Model*, para calcular a sequência óptima dos instantes de substituição de determinados equipamentos de redes de telecomunicações. Este modelo representa o impacto económico das novas tecnologias, arquitecturas e serviços, considerando diversos *cash-flows*, que permitem obter os instantes óptimos de substituição dos equipamentos. Um algoritmo de programação matemática é usado para calcular os instantes de substituição que minimizam o valor actual líquido das despesas (*net present worth of expenditures*, NPWE), associado ao equipamento instalado e à respectiva substituição. Este modelo avalia os impactos da obsolescência tecnológica (em termos dos custos crescentes de investimento, e dos encargos de operação e de manutenção da tecnologia instalada, em comparação com novas tecnologias), e da obsolescência de mercado (em termos das potencialidades crescentes da geração de receitas das novas tecnologias). O modelo expressa todos os *cash-flows* em função dos instantes de substituição (que constituem as variáveis de decisão), combinando-os depois através de uma taxa de desconto, para obter o NPWE no ano inicial do período de planeamento.

---

<sup>11</sup> Mason, L. G. (1984). An aggregate model for network modernization with constraints. *IEEE Transactions on Communications*, vol. 32, nº 10, 1073-1079.

<sup>12</sup> Cruz, G., Hisiger, R., Wolff, R. (1989). Strategic telecommunications network planning in the context of emerging technologies, architectures, and services. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol 7, nº 8, 1198-1206.

### B3. UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIOBJECTIVO PARA O PLANEAMENTO ESTRATÉGICO DE REDES DE TELECOMUNICAÇÕES

Os estudos referidos na secção anterior usam um indicador económico (função objectivo), que combina diferentes *cash-flows* (como o NPV ou o NPWE). Contudo, o planeamento estratégico de redes de telecomunicações é um problema que envolve diversos aspectos, alguns dos quais não são directamente quantificáveis por um indicador económico.

O modelo proposto neste capítulo, baseado em Antunes *et al.* (1993), constitui uma primeira tentativa de encarar e modelar o problema de planeamento estratégico da modernização de redes de telecomunicações como um problema multicritério. O modelo de programação linear multiobjectivo pretende ter em conta, de forma explícita, os diferentes aspectos conflituosos (económicos, tecnológicos, de mercado, e sociais) envolvidos no planeamento estratégico da evolução de redes de telecomunicações. Presta-se especial atenção à introdução de novas tecnologias de suporte e à oferta de novos serviços.

O modelo considera três funções objectivo que quantificam o valor associado à evolução das linhas de assinante (a maximizar), o grau de modernização associado à oferta de novos serviços (a maximizar), e o custo da dependência externa associada às estratégias de evolução (a minimizar). As restrições expressam limitações inferiores para a satisfação da procura estimada e para a penetração das tecnologias de suporte, limitações de ordem técnica e limitações de carácter orçamental. As variáveis de decisão referem-se ao número de linhas que sofrem uma transição de estado, num dado ano do período de planeamento. Este é discretizado em anos  $j=0,1,\dots,J$ , sendo  $J$  o horizonte do período de planeamento. A instalação de novas linhas, ou o melhoramento de linhas existentes, pode ter lugar para  $j \geq 1$ .

O modelo baseia-se num diagrama de transição de estados, cujos nodos caracterizam uma linha de assinante em termos das tecnologias de suporte e das ofertas de serviços (Mason, 1974), considerando a transição de linhas para um estado mais avançado, bem como a instalação directa de novas linhas em qualquer estado. O diagrama de transição de estados, representado na figura VI.13, mostra as transições permitidas entre os estados, em anos consecutivos do período de planeamento. As transições que não são permitidas expressam a irreversibilidade do melhoramento dos serviços (isto

é, uma vez instalado um serviço, não é possível voltar a um serviço menos avançado) e do grau de digitalização da rede (isto é, uma vez que um equipamento é digitalizado, não virá a ser substituído por equipamento analógico).

As ofertas de serviço são  $s \in S = \{P,E,R\}$ :

P = serviço telefónico tradicional;

E = serviço melhorado, incluindo um canal de dados em banda estreita além da voz;

R = serviço digital integrado de banda larga, adequado para comunicações de voz, dados e vídeo.

As tecnologias de suporte consideradas são  $t \in T = \{A,D\}$ :

A = tecnologia analógica;

D = tecnologia digital.

Os serviços P e E podem ser suportados por tecnologia analógica ou digital, enquanto o serviço R implica a existência de tecnologia digital instalada.

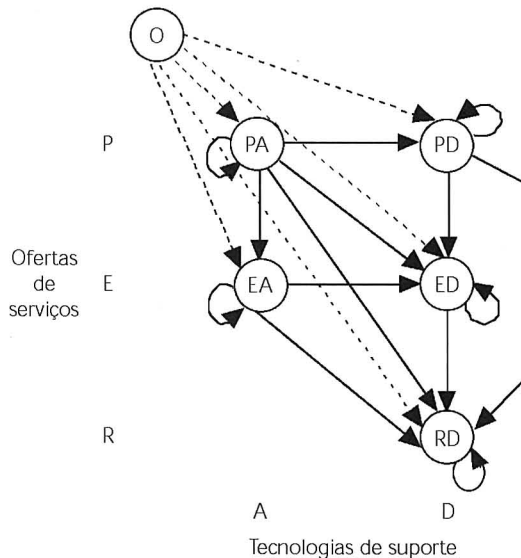


Figura VI.13 – Diagrama de transição de estados.

Num dado instante do período de planeamento, uma linha de assinante pode encontrar-se num dos seguintes estados  $n \in N = \{PA, PD, EA, ED, RD\}$ :

PA = serviço telefónico tradicional / tecnologia analógica;

PD = serviço telefónico tradicional / tecnologia digital;

EA = serviço melhorado / tecnologia analógica;

ED = serviço melhorado / tecnologia digital;

RD = serviço de banda larga / tecnologia digital.

Define-se ainda o conjunto  $N_0 = N \cup \{O\}$ , onde

O = linha não instalada.

Definem-se os seguintes conjuntos auxiliares:

$N_{(s)}$  = conjunto de todos os estados que incluem o serviço  $s \in S = \{P, E, R\}$   
(e outros serviços mais avançados, sendo P menos avançado do que E, e E menos avançado do que R):

$N_{(P)} = \{PA, PD, EA, ED, RD\} = N$ ;

$N_{(E)} = \{EA, ED, RD\}$ ;

$N_{(R)} = \{RD\}$ .

$N_{(t)}$  = conjunto de todos os estados que usam a tecnologia de suporte  $t \in T$ :

$N_{(A)} = \{PA, EA\}$ ;

$N_{(D)} = \{PD, ED, RD\}$ .

$M_{(s)}$  = conjunto de todos os estados que incluem apenas o serviço  $s \in S$ :

$M_{(P)} = \{PA, PD\}$ ;

$M_{(E)} = \{EA, ED\}$ ;

$M_{(R)} = \{RD\}$ .

Seja  $A = [a_{mn}]$  uma matriz de transição booleana, em que:

$a_{mn} = 1$  , se o estado  $n$  pode ser alcançado a partir do estado  $m$   
( $m \rightarrow n$  é uma transição válida),

$a_{mn} = 0$  , caso contrário.

Seja  $A_n = \{i \in N_0 : a_{in} = 1\}$ , o conjunto de todos os estados a partir dos quais é possível alcançar o estado  $n$ :

$A_{PA} = \{O, PA\}$ ;  $A_{PD} = \{O, PA, PD\}$ ;  $A_{EA} = \{O, PA, EA\}$ ;

$A_{ED} = \{O, PA, EA, PD, ED\}$ ;  $A_{RD} = \{O, PA, EA, PD, ED, RD\}$ .

Por exemplo,  $A_{ED} = \{O, PA, EA, PD, ED\}$  significa que podem ser obtidas linhas no estado ED, quer instalando novas linhas directamente no estado ED, quer melhorando linhas nos estados PA, EA e PD, ou ainda mantendo linhas no estado ED (figura VI.13).

Define-se ainda  $B_m = \{i \in N : a_{mi} = 1\}$ , isto é, o conjunto de todos os estados que podem ser alcançados a partir do estado m. Ou seja:

$$B_O = \{PA, EA, PD, ED, RD\}; B_{PA} = \{PA, EA, PD, ED, RD\}; B_{PD} = \{PD, ED, RD\}; \\ B_{EA} = \{EA, ED, RD\}; B_{ED} = \{ED, RD\}; B_{RD} = \{RD\}.$$

Por exemplo,  $B_O = \{PA, EA, PD, ED, RD\}$  significa que podem ser instaladas novas linhas (não evoluindo de uma transição a partir de outro estado) directamente em qualquer estado (figura VI.13).

As variáveis de decisão são:

$$x_{mn}^j = \text{número de linhas que sofrem uma transição do estado m para o estado n, no ano j;} \\ y_m^j = \text{número de linhas que se encontram no estado m, no fim do ano j.}$$

Estes dois tipos de variáveis de decisão estão relacionados por:

$$y_m^j = \sum_{i \in A_n} x_{in}^j = \sum_{m \in B_n} x_{nm}^{j+1}$$

Embora as variáveis de decisão, assim definidas, sejam números inteiros, num modelo de programação linear são relaxadas para valores reais. Note-se que, num estudo de carácter estratégico, como o aqui apresentado, esta questão não assume especial relevância.

Os diversos parâmetros de custo, nas funções objectivo e nas restrições, são definidos em relação a *cash-flows* individuais associados com a evolução de uma dada linha de assinante. Os *cash-flows* considerados neste modelo são:

CI (m,n) = custo de investimento associado à transição de uma linha do estado m para o estado n (CI (m,n)=0, se m = n). Representa os custos de aquisição das tecnologias, de instalação, de treino do pessoal, etc.

SV (m,n) = valor residual após desmantelar uma linha, associado à transição do estado m para o estado n (SV (m,n)=0, se m = n). Representa o valor recebido pelo equipamento, por meio de venda para reutilização ou troca por outro bem ou serviço.



- CM (m) = encargos operacionais e de manutenção anuais associados a uma linha no estado m. Este custo é determinado por factores como os custos de mão de obra, custos de energia, se se trata de serviço residencial ou empresarial, etc.; ou seja, depende fundamentalmente da tecnologia de suporte.
- R (m) = receita anual associada a uma linha no estado m. Representa as receitas obtidas por uma linha num dado estado e depende fundamentalmente do serviço oferecido.
- FV (m) = valor final, no fim do período de planeamento, de uma linha no estado m. Representa o valor económico no fim do período de estudo. Trata-se de um parâmetro importante, nem sempre considerado neste tipo de modelos, nomeadamente quando se assiste à abertura dos serviços de telecomunicações à iniciativa privada. Depende quer da tecnologia de suporte, quer do serviço oferecido.

Estes diversos tipos de *cash-flows* podem ser atribuídos a dois grupos (um relacionado com as linhas que sofrem uma transição entre dois estados m e n, e outro relacionado com as linhas que se encontram no estado m):

$$c_{mn}^j = (1 + r)^{-j} [SV(m,n) - CI(m,n)]$$

$$c_m^j = (1 + r)^{-j} [R(m) - CM(m) + \chi(j) FV(m)]$$

onde a função característica  $\chi(j)$  é dada por  $\chi(j) = \begin{cases} 1 & j=J \\ 0 & j \neq J \end{cases}$

O factor  $(1 + r)^{-j}$  traduz cada *cash-flow* no ano j para o seu valor actual no ano 0 do período de planeamento, sendo r a taxa de desconto.

Nas secções seguintes descrevem-se as formulações matemáticas das funções objectivo e das restrições consideradas no modelo de programação linear multiobjectivo. As funções objectivo quantificam:

- o valor actual líquido (NPV) associado à evolução das linhas de assinante (a ser maximizado),
- o custo actual líquido da dependência externa associada às estratégias de evolução (a ser minimizado), e
- o grau de modernização associado à oferta de novos serviços, encarado como uma medida da qualidade de serviço (a ser maximizado).

As restrições expressam:

- limitações de carácter orçamental,
- limitações inferiores para a satisfação da procura estimada,
- limitações inferiores para a penetração das tecnologias de suporte,
- limitações de carácter técnico relativas ao número máximo de linhas novas a instalar, e
- restrições que dizem respeito à coerência interna do modelo.

Este modelo procura incluir, para além dos aspectos tradicionais, algumas questões relacionadas com os desafios e as oportunidades geradas pela modernização de redes de telecomunicações. Contudo, e em abono da verdade, a inexistência de outras referências na literatura científica sobre a modelação multicritério deste tipo de problemas, e a falta de disponibilidade de dados reais, não permitiu ir mais longe na adequação do modelo à realidade. No entanto, este modelo é suficientemente flexível para poder ser facilmente modificado, de modo a integrar novas questões, que devam ser consideradas pelos agentes de planeamento na avaliação de estratégias de modernização de redes de telecomunicações, tendo em vista a introdução de novas tecnologias e serviços.

Numa segunda fase, estendeu-se este trabalho ao estudo dos cenários de evolução de redes de acesso de banda larga, num contexto residencial e de pequenas e médias empresas (Antunes et al., 1998). O novo modelo é baseado numa tabela de transições de estado que expressa as combinações admissíveis de categorias de serviço (serviço telefónico tradicional, serviço melhorado tipo acesso básico em banda estreita ISDN, serviço comutado de banda larga assimétrico, serviço comutado de banda larga simétrico, serviço distributivo de banda larga tipo CATV tipicamente não comutado e serviço comutado de banda larga avançado) e de arquitecturas tecnológicas para a rede de acesso (par de cobre, par de cobre melhorado tipo ADSL, híbrido fibra-coaxial HFC, FTTC).

### B3.1. FUNÇÕES OBJECTIVO

A partir dos *cash-flows* acima definidos pode construir-se uma função objectivo (a ser maximizada), quantificando o NPV da modernização da rede:

$$f_1 = \sum_{j=1}^J \sum_{n \in N} \sum_{m \in A_n} c_{mn}^j x_{mn}^j + \sum_{j=1}^J \sum_{m \in N} c_m^j y_m^j$$

O primeiro termo está associado às transições entre dois estados (incluindo, portanto, os custos de investimento e o valor de *salvamento*, após desmantelar uma linha, devidos a uma transição de estado). O segundo termo está associado às linhas que se encontram num dado estado no fim de cada ano do período de planeamento (incluindo, portanto, os encargos operacionais e de manutenção, as receitas geradas, e o valor final, no fim do período de planeamento).

A função objectivo *dependência externa* quantifica a componente importada associada aos custos de investimento, assim como os encargos operacionais e de manutenção.

Os coeficientes de custo, que expressam a dependência externa, são definidos por:

$$d_{mn}^j = (1 + r)^{-j} \gamma(m, n) CI(m, n)$$

$$d_m^j = (1 + r)^{-j} \gamma_M(m) CM(m)$$

em que:

$\gamma(m, n)$  é a fracção do custo de investimento  $CI(m, n)$ , associada à componente importada relativa à transição ente os estados  $m$  e  $n$ ;  $\gamma_M(m)$  é a fracção dos encargos operacionais e de manutenção  $CM(m)$ , associados à componente importada relativa a uma linha no estado  $m$ .

A partir dos *cash-flows*, representando os custos e os encargos, pode construir-se uma função objectivo, a ser minimizada, quantificando a dependência externa da modernização da rede:

$$f_2 = \sum_{j=1}^J \sum_{n \in N} \sum_{m \in A_n} d_{mn}^j x_{mn}^j + \sum_{j=1}^J \sum_{m \in N} d_m^j y_m^j$$

A qualidade de serviço é entendida, no contexto deste modelo, como o *grau de modernização* associado à oferta de novos serviços (E e R). A qualidade de serviço quantifica o número de linhas que suportam novos serviços (ponderado por um factor de "desejabilidade").

Definem-se, então:

$w_E^j$  = peso (medida da importância) da existência de uma linha, oferecendo o serviço E no ano j;

$w_R^j$  = peso (medida da importância) da existência de uma linha, oferecendo o serviço R no ano j.

Obtém-se então a função objectivo a ser maximizada:

$$f_3 = \sum_{j=1}^J \sum_{m \in M(E)} w_E^j y_m^j + \sum_{j=1}^J \sum_{m \in M(R)} w_R^j y_m^j$$

### B3.2. RESTRIÇÕES

Neste modelo consideram-se as seguintes categorias de restrições: limitação superior nos custos e encargos, limitação inferior no grau de satisfação da procura estimada, limitação inferior no grau de penetração das tecnologias de suporte, limitações de carácter técnico, relativas ao número máximo de linhas novas a instalar, e restrições relacionadas com a coerência interna do modelo.

As restrições orçamentais impõem limitações superiores nos custos de investimento, de encargos operacionais, e de manutenção, em cada ano do período de planeamento.

Sejam:

$$g_{mn}^j = CI(m, n)$$

$$g_m^j = CM(m)$$

354

As restrições orçamentais serão da forma:

$$\sum_{n \in N} \sum_{m \in A_n} g_{mn}^j x_{mn}^j + \sum_{m \in N} g_m^j y_m^j \leq D^j \quad j=1, \dots, J$$

em que  $D^j$  é a limitação orçamental, no ano j do período de planeamento.

Alternativamente, as restrições orçamentais poder-se-iam considerar de uma forma agregada, especificando uma limitação orçamental global D,

destinada a completar a política de modernização da operadora de telecomunicações para o período de planeamento. Neste caso, definem-se:

$$g_{mn}^j = (1 + r)^{-j} CI(m, n)$$

$$g_m^j = (1 + r)^{-j} CM(m)$$

A limitação orçamental global é então:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{n \in N} \sum_{m \in A_n} g_{mn}^j x_{mn}^j + \sum_{j=1}^J \sum_{m \in N} g_m^j y_m^j \leq D$$

Outra categoria de restrições impõe uma limitação inferior no grau de satisfação da procura estimada, para cada tipo de serviço, em cada ano do período de planeamento. Isto é:

$$\sum_{m \in N(s)} y_m^j \geq \alpha_{(s)}^j p_{(s)}^j \quad j=1, \dots, J ; s \in S$$

em que:

$\alpha_{(s)}^j$  é o grau mínimo de satisfação do serviço  $s \in S$  no ano  $j$ , de acordo com o definido pela política da operadora de telecomunicações;

$p_{(s)}^j$  é a procura estimada para o serviço  $s \in S$  no ano  $j$ .

No estudo de caso apresentado seguidamente assume-se que, para o serviço  $P$ ,  $\alpha_{(P)}^j = 1$ , qualquer que seja  $j$ , isto é, a procura do serviço telefónico tradicional deve ser sempre satisfeita na totalidade.

Esta categoria dá origem a  $J \times |S|$  restrições.

Tendo em conta as orientações estratégicas do plano de transmissão da operadora de telecomunicações, outra categoria de restrições impõe que seja satisfeito um grau mínimo de penetração das várias tecnologias de suporte, em cada ano do período de planeamento. Isto é:

$$\sum_{m \in N(t)} y_m^j \geq \beta_{(t)}^j \sum_{m \in N} y_m^j \quad j=1, \dots, J ; t \in T$$

em que:

$\beta_{(t)}^j$  é o grau de penetração relativo da tecnologia de suporte  $t \in T$  no ano  $j$ .

Esta categoria dá origem a  $J \times |I|$  restrições.

A política da operadora de telecomunicações pode também justificar a introdução no modelo de um conjunto de restrições da carácter técnico, impondo um limite superior no número de linhas novas, de cada tecnologia, a instalar em cada ano do período de planeamento. Isto é:

$$\begin{aligned} x_{0n}^j &\leq L_A^j & n \in \{ PA, EA \}, j=1, \dots, J \\ x_{0m}^j &\leq L_D^j & m \in \{ PD, ED, RD \}, j=1, \dots, J \end{aligned}$$

Esta categoria dá origem a  $J \times |I|$  restrições.

Por outro lado, esta categoria de restrições pode ainda incluir limitações técnicas relativas ao número de linhas a instalar, não apenas relativas a linhas novas, mas também a transições de estado, nomeadamente no que se refere à evolução para o serviço de banda larga.

É ainda necessário considerar restrições de “conservação de linhas” (trata-se de restrições de coerência do modelo, isto é, de restrições de continuidade) impondo que o número de linhas que sofrem uma transição do estado  $n$  para qualquer outro estado que possa ser alcançado a partir de  $n$ , deve ser igual ao número de linhas existentes no estado  $n$  no ano precedente. No início do período de planeamento (ano 0) existem  $y_n^0$  linhas já instaladas, que são tidas em conta pelas restrições de continuidade para  $j=1$  e  $n \in \{\text{estados para os quais existem linhas instaladas no ano 0}\}$ .

Esta categoria dá origem a  $J \times |N|$  restrições. A saber:

$$y_n^{j-1} = \sum_{m \in B_n} x_{nm}^j \quad n \in N ; j=1, \dots, J$$

Nesta secção, estuda-se um problema de planeamento estratégico da modernização de redes de telecomunicações (tendo em conta a introdução de novas tecnologias de suporte e de novas ofertas de serviços), utilizando o modelo descrito anteriormente. Simultaneamente, pretende mostrar-se que a base de métodos interactivos de programação linear multiobjectivo TOMMIX

constitui um utensílio adequado para o apoio à análise e avaliação das políticas alternativas de evolução da rede.

Deve referir-se que não se trata do estudo de um caso real, embora os vários tipos de parâmetros tenham sido quantificados por forma a representarem de forma plausível situações reais usando a pouca informação disponível na literatura. Note-se que, a constante evolução da rede, ao nível tecnológico e no que se refere à oferta de novos serviços, não facilita a obtenção de dados fiáveis junto das administrações, ou de outras operadoras de telecomunicações, quer devido à sua confidencialidade, quer, simplesmente, porque não existem.

#### B4.1. ANÁLISE E JUSTIFICAÇÃO DOS DADOS INICIAIS

Os dados pretendem corresponder a uma cidade de tamanho médio (30000 linhas de assinante, no ano inicial do período de planeamento), num país em vias de desenvolvimento, onde existe uma tecnologia analógica nacional bem estabelecida, e em que os equipamentos de tecnologia digital são, na sua maior parte, importados. Considera-se que todas as linhas existentes, no início do estudo, são de tecnologia analógica, oferecendo apenas o serviço telefónico tradicional (ou seja,  $y_{PA}^0 = 30000$ ).

Os valores dos diversos *cash-flows* considerados no modelo, dos quais dependem os coeficientes das variáveis de decisão nas funções objectivo e nas restrições, são apresentados nas tabelas VIII e IX. Os valores de *salvamento* após desmantelar uma linha (resultante de uma transição de estado) são considerados nulos, pois assume-se que os custos de desmantelar a linha são iguais ao respectivo valor residual.

O período de planeamento é discretizado em 8 anos ( $J=8$ ). Embora a procura para os novos serviços seja em muitos casos imprevisível (dada a inexistência de qualquer experiência prévia), optou-se por construir um cenário baseado na taxa de crescimento do serviço telefónico tradicional ( $q=5\%$ ). A partir deste valor fez-se, então, uma estimativa para as taxas de crescimento do serviço melhorado e do serviço de banda larga em relação a  $q$  (designam-se essas taxas por  $f_{(E)}$  e  $f_{(R)}$ , respectivamente).

A tecnologia necessária para suportar o serviço digital de banda larga (que implica a instalação de fibra óptica) supõe-se que estará disponível

apenas depois do ano 6 do período de planeamento ( $j_R=6$ ). A estimativa deste valor está, genericamente, de acordo com as datas avançadas na literatura da especialidade (Cruz *et al.*, 1988).

**Tabela VIII – Dados relativos aos custos de investimento  
(CI expresso em unidades monetárias;  $\gamma$  em percentagem)**

CI / $\gamma_I$	PA	PD	EA	ED	RD
O	120/0.1	300/0.7	195/0.25	400/0.7	450/0.8
PA	—	250/0.7	75/0.1	350/0.7	450/0.8
PD	—	—	—	75/0.6	450/0.8
EA	—	—	—	350/0.7	450/0.8
ED	—	—	—	—	450/0.8

As transições entre estados usando a mesma tecnologia (PA-EA e PD-ED) implicam menores custos de investimento, enquanto transições da tecnologia analógica para digital são mais onerosas. A instalação de novas linhas de tecnologia digital tem custos ligeiramente maiores do que a evolução para esta tecnologia de linhas analógicas, que já suportavam o mesmo serviço. O serviço de banda larga R, implicando a instalação de fibra óptica, obriga a que seja instalado novo equipamento, tendo-se considerado os mesmos custos de investimento para linhas novas e para linhas a modernizar (qualquer que fosse o seu estado anterior). A percentagem dos custos de investimento, que diz respeito à componente importada, depende fundamentalmente da tecnologia, considerando-se que a tecnologia analógica existe no país, e que a digital é na sua maior parte importada.

**Tabela IX – Dados dos *cash-flows* associados a uma linha em cada estado  
(R, FV e CM expressos em unidades monetárias;  $\gamma_M$  em percentagem)**

	PA	PD	EA	ED	RD
R	100	100	120	120	170
FV	200	250	300	350	450
CM	15	5	15	5	5
$\gamma_M$	0	0.2	0.1	0.2	0.4



As receitas têm apenas a ver com o serviço oferecido (aumentando com o respectivo grau de sofisticação), enquanto os encargos operacionais e de manutenção dependem apenas da tecnologia de suporte (sendo menores para as linhas digitais do que para as analógicas). O valor no fim do período de planeamento depende quer da tecnologia, quer do serviço oferecido. A percentagem dos encargos operacionais e de manutenção que se refere à componente importada depende sobretudo da tecnologia, sendo maior para a digital, nomeadamente no caso da instalação de equipamento capaz de suportar o serviço de banda larga. Considera-se, no entanto, que existe capacidade nacional para dar conta da maioria dos aspectos que este *cash-flow* pretende traduzir, mesmo que a correspondente componente importada, relativa aos custos de investimento, seja elevada.

**Tabela X – Número máximo de linhas que é tecnicamente possível instalar**

Anos	A	D
1 + 2 + 3	6300	1810
4 + 5 + 6	13800	10250
7 + 8	17100	15100

O número máximo de linhas novas de cada tecnologia que é tecnicamente possível instalar (agrupados por anos do período de planeamento) é apresentado na tabela X. Considera-se que estes valores são definidos pela política da operadora de telecomunicações.

O número de linhas existentes no início do período de planeamento é expresso por:

$$P_{(P)}^0 = 30000$$

$$P_{(E)}^0 = 0$$

O serviço de banda larga só está acessível a partir do fim do ano 6 do período de planeamento:

$$j_R = 6$$

Assume-se que a procura para os diferentes serviços varia linearmente no tempo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 P_{(P)}^j &= P_{(P)}^0 (1+q)^j & j=1, \dots, J \\
 P_{(E)}^j &= P_{(E)}^0 + P_{(P)}^0 q^j f_{(E)} & j=1, \dots, J \\
 P_{(R)}^j &= P_{(P)}^0 q^j (j - j_R) f_{(R)} & j=j_R+1, \dots, J
 \end{aligned}$$

A taxa de crescimento do serviço telefónico tradicional é  $q=5\%$ .

As taxas de crescimento dos serviços melhorado (E) e de banda larga R, em relação à taxa de crescimento do serviço telefónico tradicional, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 f_{(E)} &= 0.8 \\
 f_{(R)} &= 0.5
 \end{aligned}$$

O grau de satisfação da procura, imposto para os vários serviços, considera-se:

- 100% para o serviço telefónico tradicional (ou seja, este serviço deve ser sempre integralmente satisfeito), isto é:

$$\alpha_{(P)}^j = 1 \quad j=1, \dots, J$$

- variar linearmente no tempo para os serviços E e R, de acordo com

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(E)}^j &= \frac{0.8}{J} j & j = 1, \dots, J \\
 \alpha_{(R)}^j &= \frac{1.6}{J} j - 1 & j = j_R + 1, \dots, J
 \end{aligned}$$

Os coeficientes de ponderação da importância associada dos novos serviços são dados por:

$$\begin{aligned}
 w_{(E)}^j &= \frac{0.8}{J} j + 0.1 & j = 1, \dots, J \\
 w_{(R)}^j &= 0.8 w_{(E)}^j & j = j_R + 1, \dots, J
 \end{aligned}$$

O factor de penetração da tecnologia digital é dado por:

$$\beta_{(D)}^j = \frac{0.8}{J} j \quad j=1, \dots, J$$

O NPV do valor máximo do orçamento global, destinado a completar a política de modernização da operadora de telecomunicações para o período de planeamento, é  $D=3 \times 10^7$  unidades monetárias.

O problema de programação linear multiobjectivo resultante tem 3 objectivos, 116 variáveis de decisão e 67 restrições.

## B4.2. UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Nesta secção, é apresentado um estudo, deste problema de planeamento da modernização de redes de telecomunicações, destinado a ilustrar a utilização da base de métodos interactivos TOMMIX no apoio aos agentes de decisão, no processo de construção e avaliação das políticas alternativas de modernização da rede, face à introdução de novas tecnologias e serviços.

Considera-se um agente de decisão hipotético que participa no processo de decisão, por exemplo, pertencente ao departamento de planeamento de redes de uma operadora de telecomunicações, embora a decisão final possa ser tomada (ou ratificada) por outra pessoa, a um nível superior na hierarquia da empresa. Como, em princípio, o agente de decisão envolvido no processo é alguém não familiarizado com modelos e métodos matemáticos, pode revelar-se útil a ajuda de um analista, cuja tarefa consiste em auxiliar o agente de decisão na comunicação com o computador, na interpretação dos resultados e no esclarecimento sobre o significado da informação de preferências. Para além disso, é de grande importância a existência de uma *fase prévia* ao processo de apoio à decisão, na qual seja explicado, ao agente de decisão, o funcionamento genérico da base de métodos e o tipo de intervenção a que vai ser chamado.

Suponha-se que o agente de decisão pretende começar por adquirir um conhecimento de carácter genérico sobre o universo das soluções eficientes, que lhe permita compreender os conflitos entre os objectivos, antes de reduzir o âmbito da pesquisa a zonas restritas da região admissível. O método TRIMAP é adequado para fazer esta pesquisa estratégica global. Suponha-se que o agente de decisão efectuou uma cobertura progressiva e selectiva do espaço dos pesos, por selecção directa dos pesos no triângulo, analisando a disposição das regiões de indiferença e os correspondentes valores das funções objectivo.

O espaço dos pesos, preenchido com as regiões de indiferença (correspondentes a 25 vértices eficientes, que o agente de decisão considerou suficientemente representativos do universo das diferentes estratégias de evolução admissíveis não dominadas) é representado na figura VI.14. Note-se que, ao dispor da informação numérica sobre as soluções e da representação gráfica do espaço dos pesos, o agente de decisão pode efectuar uma pesquisa selectiva, dado que conhecendo os valores das funções

objectivo, por exemplo, das soluções 14 e 19, o cálculo de novas soluções entre estas é dispensável para a caracterização das soluções localizadas nessa zona do espaço dos pesos.

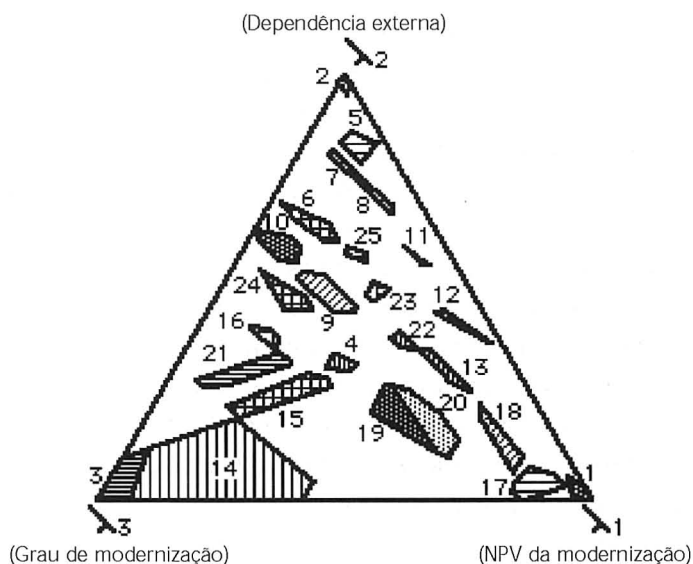


Figura VI.14 – O espaço dos pesos, após efectuar uma pesquisa estratégica global usando o método TRIMAP.

O cálculo exaustivo das soluções básicas/vértices eficientes conduziria a um número muito mais elevado de soluções, aumentando grandemente o esforço computacional (note-se o *retalhado* das regiões de indiferença, no espaço dos pesos). A aproximação interactiva, subjacente ao método TRIMAP, permite assim uma aprendizagem progressiva e selectiva do conjunto das soluções eficientes, evitando a sua pesquisa exaustiva.

Os valores das funções objectivo, e da área das regiões de indiferença, de uma amostra das soluções eficientes, resultantes dessa pesquisa estratégica global, são apresentados na tabela XI. A tabela de óptimos individuais (constituída pelos valores das funções objectivo para as soluções 1, 2 e 3) é assinalada e os componentes da solução ideal são salientados (num tipo mais carregado).

**Tabela XI – Valores das funções objectivo e área da região de indiferença para algumas soluções eficientes pesquisadas com o TRIMAP**

Solução	max $f_1$ ( $10^7$ ) NPV da modernização	min $f_2$ ( $10^6$ ) Dependência externa	max $f_3$ ( $10^5$ ) Grau de modernização	Área da região de indiferença (%)
1	<b>4.1440</b>	17.9921	2.4842	0.288
2	2.1762	<b>5.2951</b>	0.1964	0.112
3	3.8637	17.4019	<b>2.9407</b>	1.210
4	3.7797	14.3314	2.7014	0.319
5	2.4020	5.4327	0.4088	0.631
6	2.7353	7.2149	1.6917	0.713
7	2.5254	5.8969	0.8572	0.177
8	2.5836	5.9686	0.8755	0.286
9	3.5003	10.9592	2.3476	1.047
10	2.7533	7.4214	1.7462	0.768
11	2.7177	6.7811	1.4600	0.074
12	3.5951	10.98701	2.25711	0.314
13	3.9691	14.3480	2.4438	0.413
14	3.8684	17.3988	2.9405	9.607
15	3.9046	16.9910	2.9160	1.552
16	3.6877	14.2689	2.7296	0.253
17	4.12983	17.48414	2.7036	0.966
18	4.12982	17.48413	2.7036	0.894
19	4.10304	17.68865	2.79753	1.299
20	4.10305	17.68865	2.79752	1.666
21	3.7766	16.0931	2.8860	1.151
22	3.5951	10.98702	2.25712	0.240
23	3.5357	10.7133	2.2557	0.211
24	3.4878	11.2184	2.4057	0.714
25	2.7893	7.3406	1.7042	0.178

Uma primeira análise do espaço dos pesos (figura VI.14) e dos valores das funções objectivo (tabela XI) permite concluir que a região não dominada do poliedro admissível não apresenta grandes desníveis. Note-se que a razão entre os melhores e os piores valores de cada função objectivo, na tabela de óptimos individuais, é de 1.9, 3.4 e 15.0, para  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ , respectivamente. Isto significa que a transição entre diferentes soluções no espaço dos pesos é, em termos dos valores das funções objectivo, feita de um modo relativamente suave.

Na zona inferior do triângulo da figura VI.14 (abaixo das soluções 21, 15, 19, 20, 18) as soluções têm características muito semelhantes: a restrição orçamental é activa (isto é, todo o orçamento disponível é esgotado); as restrições limitando o número de novas linhas a instalar são activas (excepto a relativa ao número máximo de linhas analógicas, nos anos 7 e 8), o que significa que são instaladas todas as linhas possíveis; os valores de  $f_1$  e  $f_3$  estão muito próximos dos respectivos óptimos (soluções 1 e 3, respectivamente); os valores de  $f_2$  são próximos do seu pior valor (da tabela de óptimos individuais). As políticas de modernização correspondentes a soluções nesta zona são caracterizadas pela instalação de mais linhas do que as estritamente necessárias para satisfazer a procura, privilegiando os serviços E e R. As estratégias de evolução consistem na instalação de novas linhas nos estados PA, PD e EA, sendo as dos estados PA e PD posteriormente melhoradas para oferecerem o serviço E. As linhas digitais para o serviço R são instaladas logo que o equipamento se torna disponível. As figuras VI.17, VI.18 e VI.19, em apêndice, ilustram estas características para as políticas de modernização correspondentes às soluções 1, 3 e 19, respectivamente.

Na zona delimitada inferiormente pelas soluções 16, 4 e 13, e superiormente pelas soluções 24, 9, 23 e 12, existe uma transição suave no que se refere aos valores das funções objectivo. Nesta zona a variável folga, correspondente à limitação orçamental, varia entre  $4.23 \times 10^6$  para a solução 4 e  $8.05 \times 10^6$  para a solução 9. A instalação de linhas é, ainda, um pouco superior à procura estimada, sendo activas as restrições de limitação do número máximo de linhas novas a instalar, excepto para os anos 7 e 8. Para a solução 4, numa primeira fase são instaladas novas linhas nos estados PA e PD que são depois modernizadas para os estados EA e ED. Posteriormente, são instaladas novas linhas nos estados EA e ED e, quando disponíveis, novas linhas oferecendo o serviço de banda larga R (figura VI.20 do apêndice). Para soluções na vizinhança da solução 9 (figura VI.21 do apêndice), onde aumenta a importância dada à função dependência externa, a evolução inicial é semelhante à da solução 4, mas os estados com tecnologia digital, e oferecendo serviços mais avançados, são alcançados através da modernização de linhas.

Na zona do espaço dos pesos acima das soluções 10, 25, e 11, as políticas de evolução são caracterizadas por uma modernização progressiva das linhas que são instaladas de novo, sempre no estado PA e depois

melhoradas para estados mais avançados. Por exemplo, na solução 6 (figura VI.22 do apêndice) a variável folga correspondente à limitação orçamental é  $1.49 \times 10^7$  e para a solução 7 (figura VI.23 do apêndice) é  $1.73 \times 10^7$ , valor já muito próximo do obtido para a solução 2 (que otimiza a dependência externa), em que é  $1.88 \times 10^7$ . Na solução 2 (figura VI.24 do apêndice) as restrições de procura são activas (isto é, as linhas instaladas satisfazem estritamente a procura), enquanto nas outras soluções, localizadas nesta zona, existem variáveis folga correspondentes a estas restrições que são não nulas, embora com valores pequenos. A solução 2 distingue-se das outras soluções nesta zona, por as linhas que oferecem o serviço digital de banda larga serem instaladas de novo, e não a partir da modernização de linhas no estado EA.

De modo a reduzir o âmbito da pesquisa à zona que se considerou mais interessante, de acordo com as preferências expressas, suponha-se que o agente de decisão resolve fazer uma contracção do cone dos critérios em torno da solução que minimiza a dependência externa (solução 2), usando o método ICW. Em seguida, considera-se que se optou por fazer uma nova transição para o TRIMAP, de modo a efectuar uma pesquisa livre, permitindo ao agente de decisão obter mais informação sobre as soluções não dominadas, que podem ser obtidas considerando o cone dos critérios contraído em torno daquela solução. O espaço dos pesos correspondente ao cone dos critérios contraído, após uma pesquisa usando o método TRIMAP, é apresentado na figura VI.15.

Depois da contracção do cone dos critérios, em torno da solução que minimiza a função objectivo dependência externa, as soluções eficientes que podem ser obtidas estão situadas acima das soluções 24, 9, 22 e 12 (incluindo estas) na figura VI.14. A deslocação e contracção do cone dos critérios permite ter um conhecimento mais profundo das soluções nesta região. Na figura VI.15 apenas foram mantidas (para aumentar a clareza do gráfico) as soluções 5, 6 e 24 da figura VI.14 (para além, claro, da solução 2).

A análise efectuada com o TRIMAP, após a contracção do cone dos critérios, confirma as conclusões anteriores, no que diz respeito à suavidade da variação dos valores das funções objectivo, e à caracterização das estratégias de modernização. Por exemplo, a face não dominada à qual pertencem as soluções 6, 28, 29 e 30 (figura VI.15) é uma face em que ocorrem pequenas variações dos valores das funções objectivo (tabela XII).

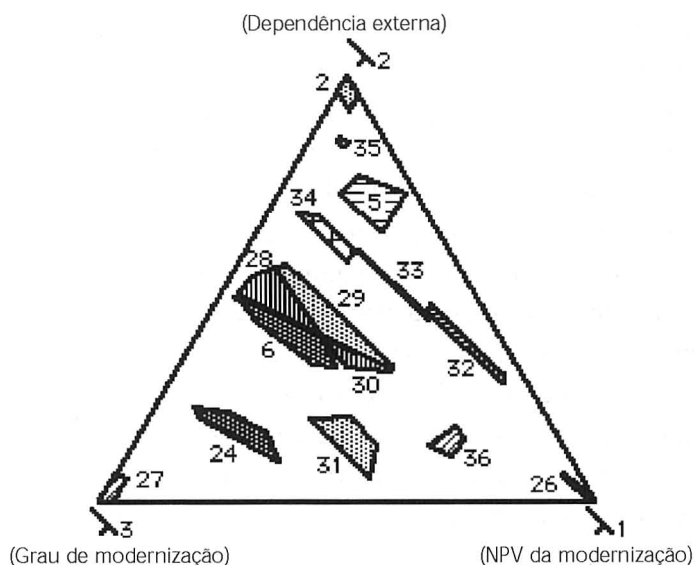


Figura VI.15 – O espaço dos pesos depois de efectuar uma pesquisa livre com o método TRIMAP (com o cone dos critérios contraído em torno da solução 2, da figura VI.14).

**Tabela XII – Soluções (vértices) situadas sobre a mesma face não dominada**

Solução	max $f_1$ ( $10^7$ ) NPV da modernização	min $f_2$ ( $10^6$ ) Dependência externa	max $f_3$ ( $10^5$ ) Grau de modernização
6	2.7353	7.2149	1.6917
28	2.7340	7.1516	1.6708
29	2.7301	7.0704	1.6330
30	2.7437	7.1396	1.6558

Se o agente de decisão pretender pesquisar soluções sobre esta face eficiente, não se limitando a vértices, o método Pareto Race é o mais adequado (figura VI.16). Suponhamos que a pesquisa é realizada a partir da solução 29. A solução apresentada na figura VI.16 corresponde a uma estratégia de modernização semelhante à solução 6 (figura VI.22 do apêndice).



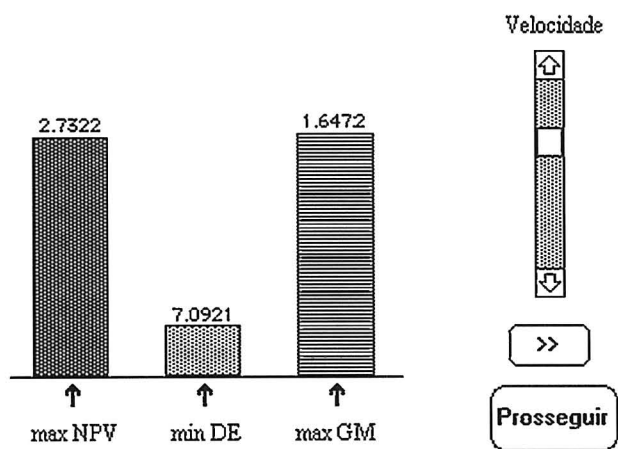


Figura VI.16 – Solução calculada usando o método Pareto Race.

(Página deixada propositadamente em branco)

## APÊNDICE

### **ESTRUTURA DE ALGUMAS SOLUÇÕES DO MODELO DEDICADO AO PLANEAMENTO DA EVOLUÇÃO DE REDES DE TELECOMUNICAÇÕES**

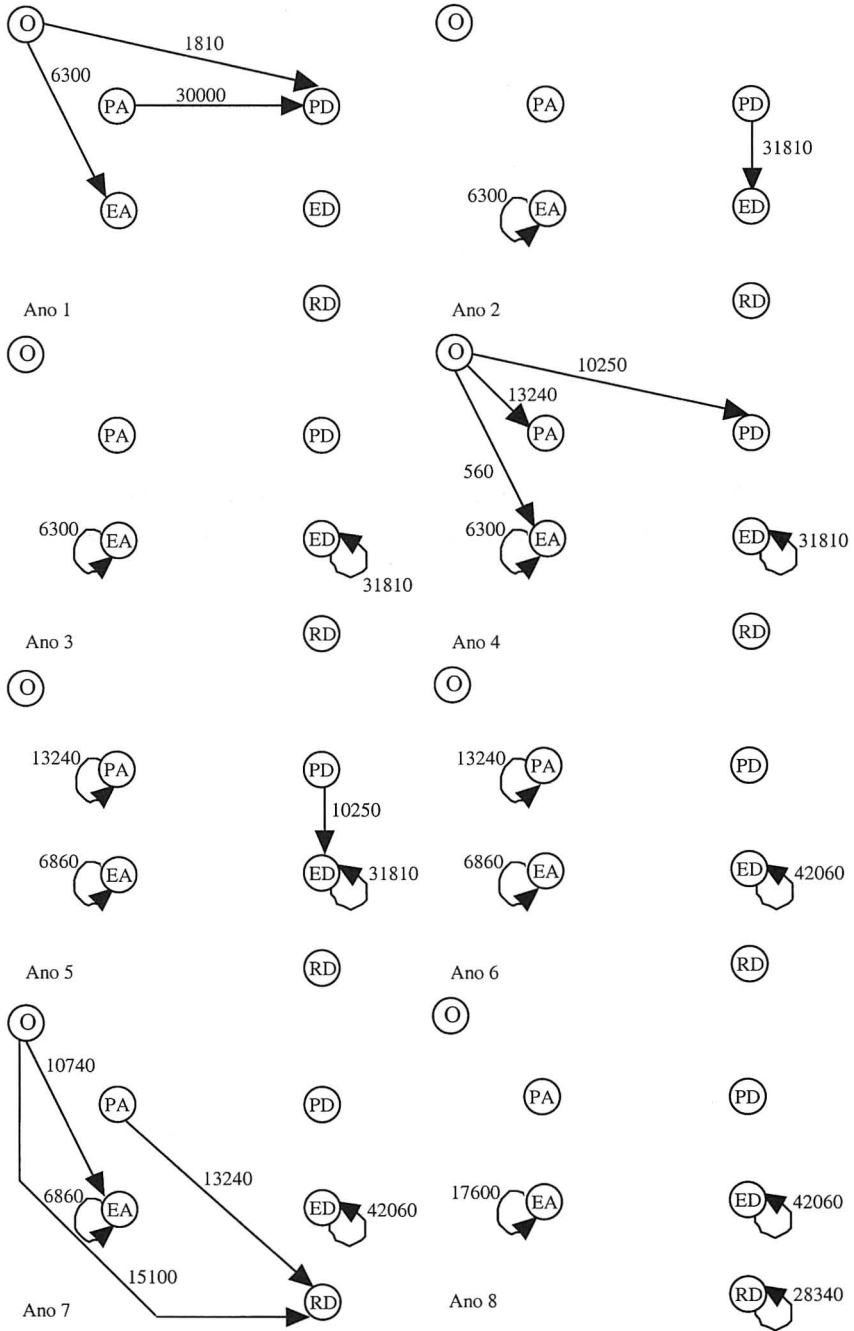


Figura VI.17 – Estratégia de modernização da solução 1 (ótimo de  $f_1$ ).

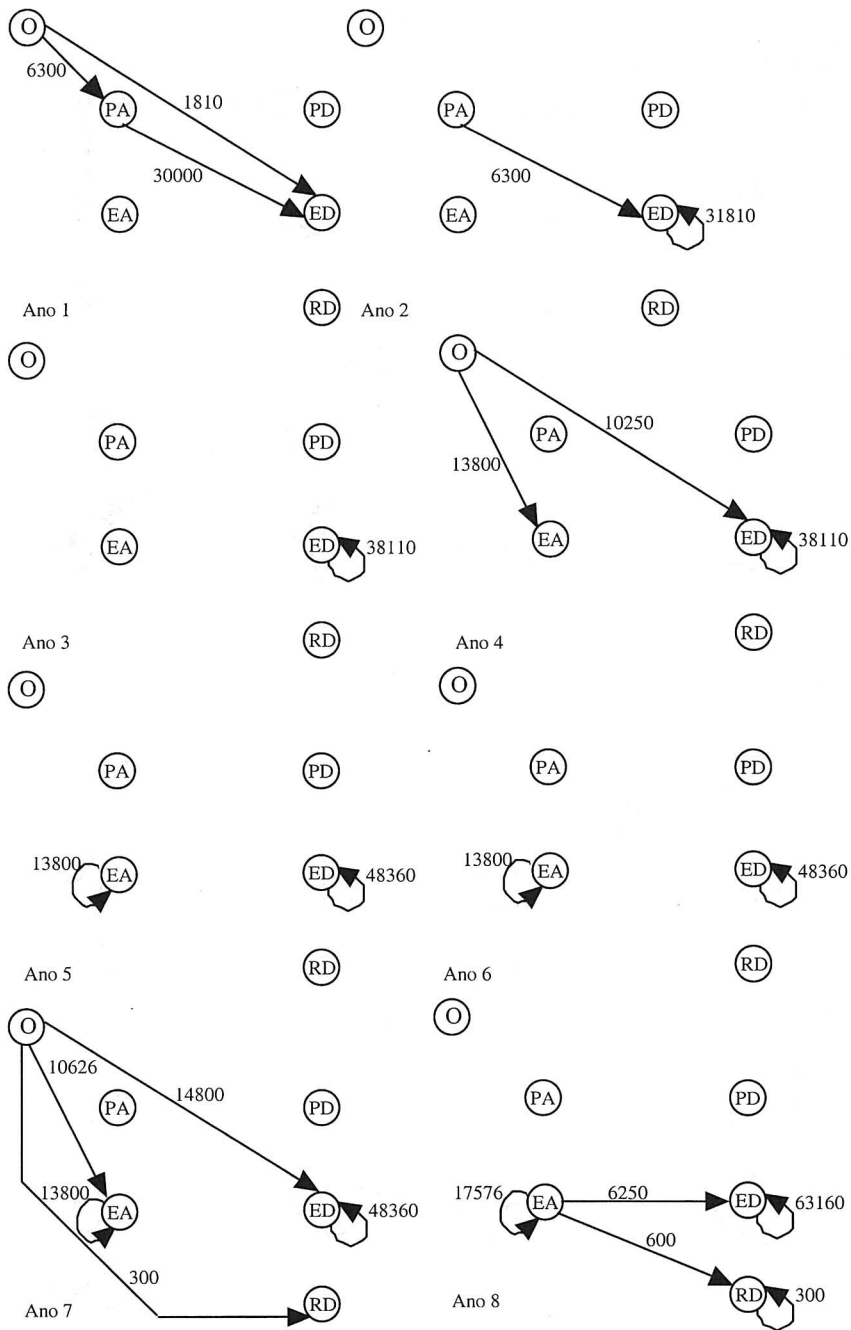


Figura VI.18 – Estratégia de modernização da solução 3 (ótimo de  $f_3$ ).

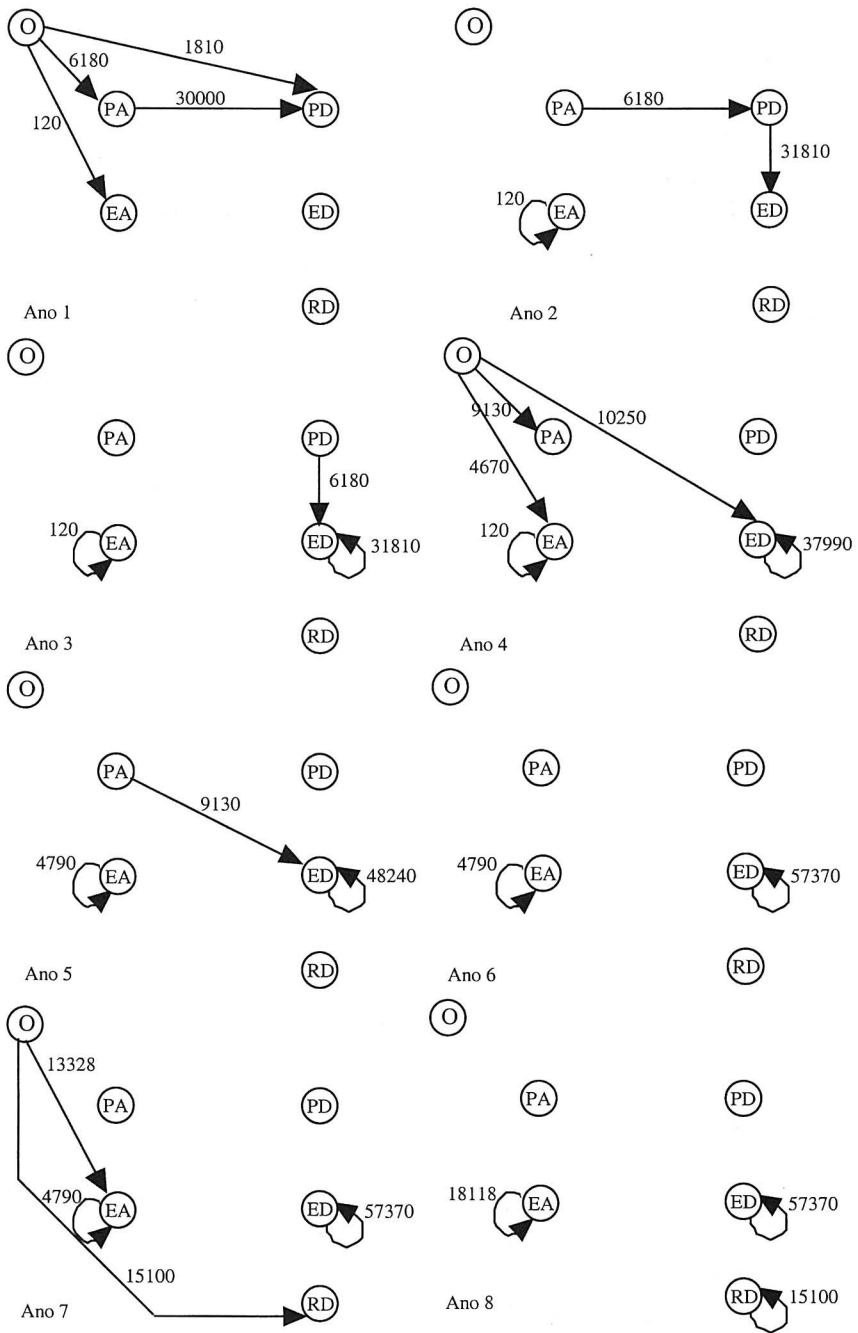


Figura VI.19 – Estratégia de modernização da solução 19.

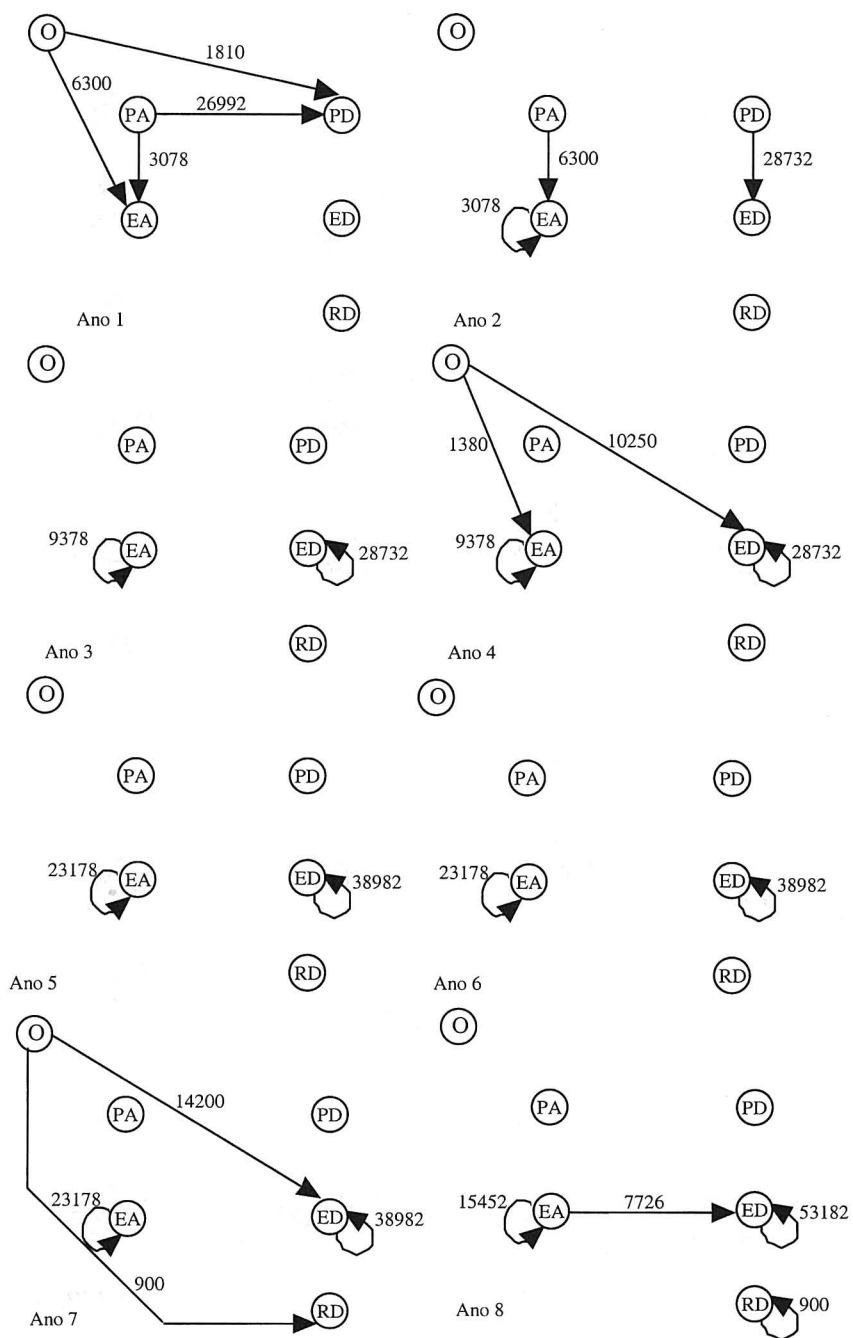


Figura VI.20 – Estratégia de modernização da solução 4.

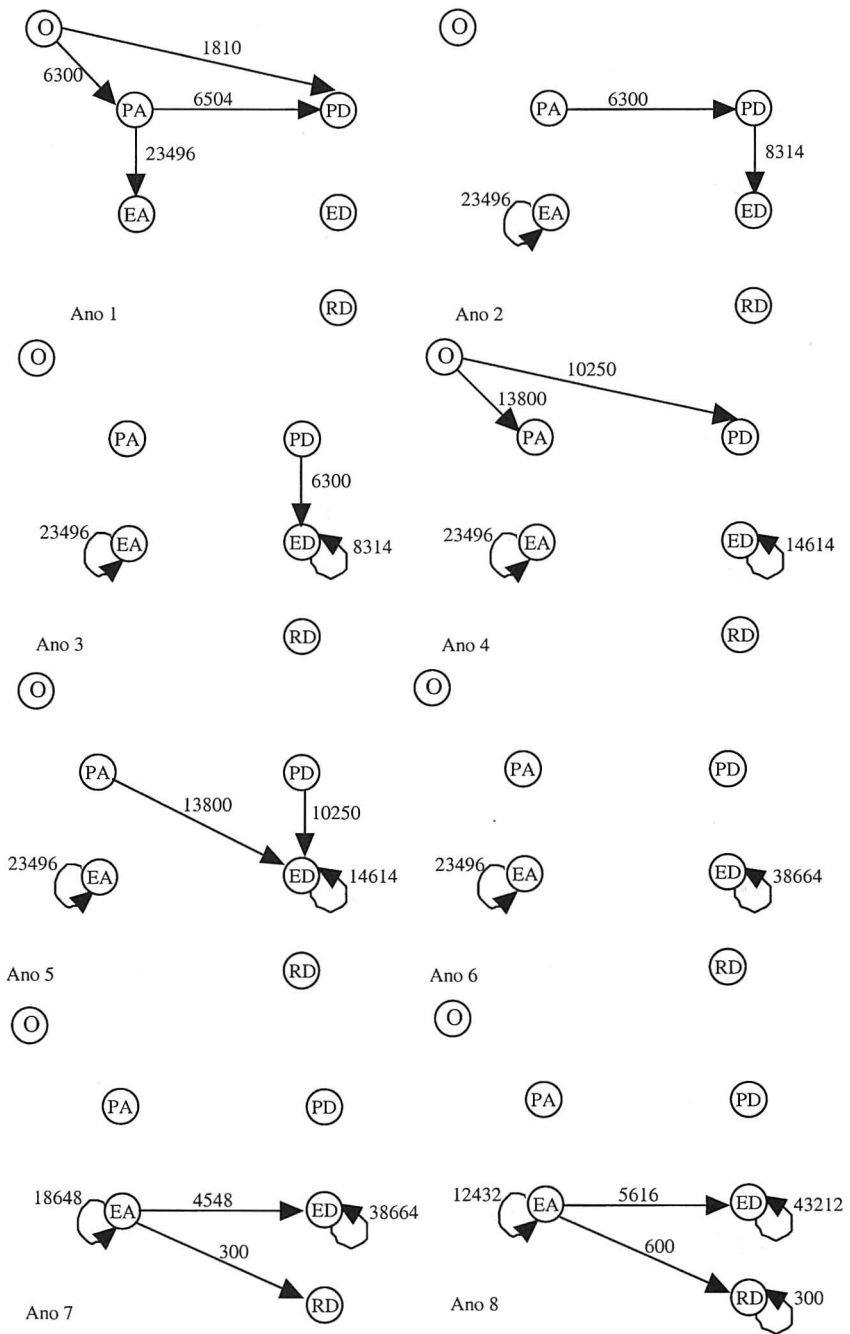


Figura VI.21 – Estratégia de modernização da solução 9.



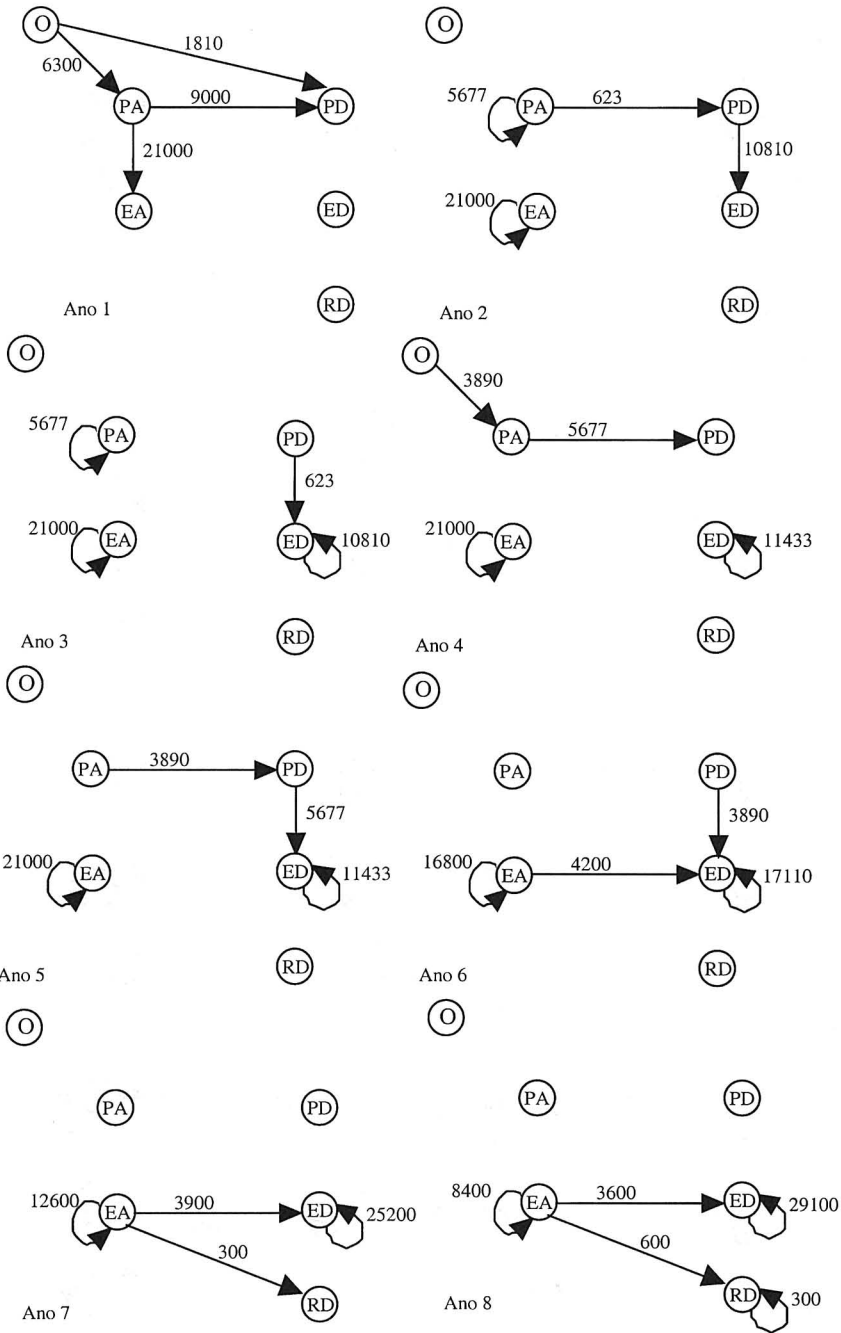


Figura VI.22 – Estratégia de modernização da solução 6.

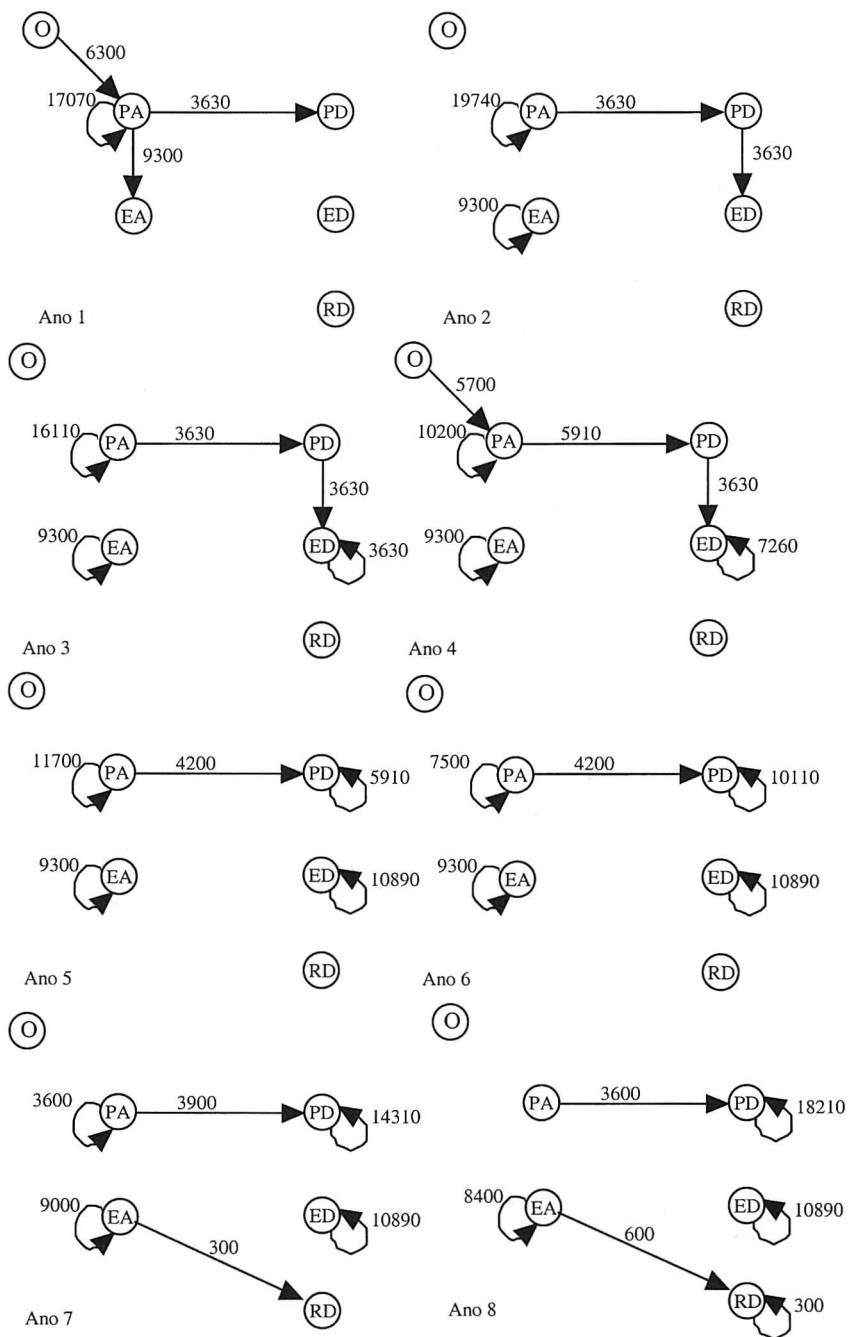


Figura VI.23 – Estratégia de modernização da solução 7.

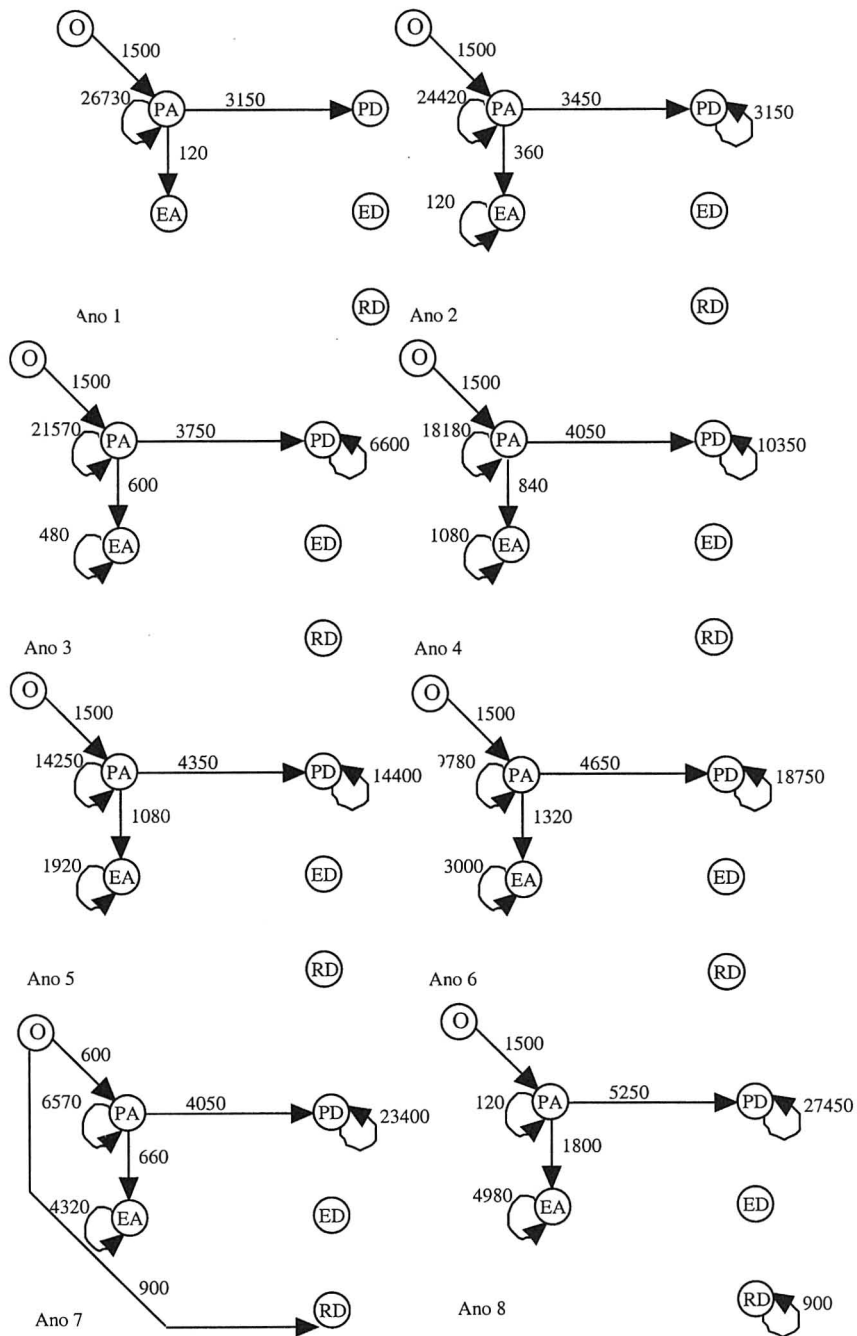


Figura VI.24 – Estratégia de modernização da solução 2 (ótimo de  $f_2$ ).

(Página deixada propositadamente em branco)

## REFERÊNCIAS

- Alves, M. J. (1993). Programação Linear Multiobjectivo – Desenvolvimento de um sistema interactivo de apoio à decisão e estudo de um exemplo ilustrativo. Trabalho de síntese das provas de aptidão pedagógica e capacidade científica. Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra.
- Antunes, C. H., J. Clímaco (1992). Sensitivity Analysis in MCDM Using the Weight Space. *Operations Research Letters*, vol. 12, nº 3, 187-196.
- Antunes, C. H., J. Clímaco, J. Craveirinha (1993). A multiple criteria model for new telecommunication service planning. *European Journal of Operational Research*, vol. 71, nº 3, 341-352.
- Antunes, C. H., J. Craveirinha, J. Clímaco (1998). Planning the evolution to broadband access networks - a multicriteria approach. *European Journal of Operational Research*, vol. 109, nº 2, 530-540.
- Antunes, C. H., M. J. Alves, A. L. Silva, J. Clímaco (1989a). A computer implementation of an interactive MOLP model base with applications to energy and telecommunications planning. *Proceedings of the International Conference on Multiple Criteria Decision Making, Bangkok*, M. Tabucanon e V. Chankong (Eds.), 401-420.
- Antunes, C. H., M. J. Alves, A. L. Silva, J. Clímaco (1989b). Algumas reflexões sobre uma base de métodos de programação linear multicritério. *Investigação Operacional*, vol. 9, nº 2, 19-35.
- Antunes, C. H., M. J. Alves, A. L. Silva, J. N. Clímaco (1992). An integrated MOLP method base package - a guided tour of TOMMIX. *Computers and Operations Research*, vol. 19, nº 7, 609-625.
- Benayoun, R., J. de Montgolfier, J. Tergny, O. Larichev (1971). Linear programming with multiple objective functions: step method (STEM). *Mathematical Programming*, vol. 1, 366-375.

- Bouyssou, D. (1993). *Décision multicritère ou aide multicritère?* Newsletter of the EURO Working Group "Multicriteria Decision Aiding", no. 2 (<http://www.inescc.pt/~ewgmcda/Bouyssou.html>).
- Brockoff, K. (1985). Experimental tests of MCDM algorithms in a modular approach. *European Journal of Operational Research*, vol. 22, 159-166.
- Buchanan, J., H. Daellenbach (1987). A comparative evaluation of interactive solution methods for multiple objective decision models. *European Journal of Operational Research*, vol. 29, 353-359.
- Chankong, V., Y. Haimes (1983). *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. North-Holland, New York.
- Charnes, A., W. Cooper (1977). Goal programming and multiple objective optimization – part I. *European Journal of Operational Research*, vol. 1, n° 1.
- Chernoff, H. (1973). Using faces to represent points in k-dimensional space graphically. *Journal of the America Statistics Association*, vol. 68, 361-368.
- Clímaco, J., A. T. Almeida (1981). Multiobjective power systems generation planning. *Proc. of the 3rd International Conference Energy Use Management*, Pergamom Press, Oxford.
- Clímaco, J., C. H. Antunes (1987). TRIMAP - an interactive tricriteria linear programming package. *Foundations of Control Engineering*, vol. 12, 101-119.
- Clímaco, J., C. H. Antunes (1989). Implementation of an user friendly software package - a guided tour of TRIMAP. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 12, 1299-1309.
- Clímaco, J., C. H. Antunes (1990). A comparison of microcomputer implemented interactive MOLP methods based on a case study. In "Readings in Multiple Criteria Decision Aid", C. Bana e Costa (eds.), Springer-Verlag, 445-470.
- Clímaco, J., C. H. Antunes (1991). Flexible method bases and man-machine interfaces as key features in interactive MOLP approaches. In "Multiple Criteria Decision Support", P. Korhonen, A. Lewandowski, J. Wallenius (eds.), LNEMS 356, Springer-Verlag, 207-216.
- Clímaco, J., C. H. Antunes, A. Martins, A. Almeida (1995). A Multiple Objective Linear Programming Model for Power Generation Expansion Planning. *Energy Research*, vol. 19, 419-432.
- Clímaco, J., C. H. Antunes, M. J. Alves (1997). From TRIMAP to SOMMIX – Building Effective Interactive MOLP Computational Tools. In "Multiple Criteria Decision", G. Fandel e T. Gal (eds.), LNEMS, 448, Springer-Verlag, 285-296.

- Cohon, J. (1978). *Multiobjective Programming and Planning*. Academic Press.
- Deshpande, D., S. Zionts (1980). Sensitivity analysis in multiple objective linear programming: changes in the objective function matrix. In "Multiple Criteria Decision Making - Theory and Applications", G. Fandel e T. Gal (Eds.), LNEMS 177, Springer-Verlag, 26-39.
- Evans, J., R. Steuer (1973). A revised simplex method for multiple objective programs. *Mathematical Programming*, vol. 5, n° 1, 54-72.
- Feyerabend, P. (1975). *Against Method*. New Left Books, London.
- French, S. (1984). Interactive multi-objective programming: its aims, applications and demands. *Journal of the Operational Research Society*, vol. 35, 827-834.
- Gal, T., H. Leberling (1981). Relaxation analysis in linear vector-valued maximization. *European Journal of Operational Research*, vol. 8, 274-282.
- Gardiner, L. (1989). *Unified Interactive Multiple Objective Programming*. Dissertação de "Doctor of Philosophy". University of Georgia, Athens, Georgia, USA.
- Gardiner, L. R., R. E. Steuer (1994). Unified interactive multiple objective programming. *European Journal of Operational Research*, vol. 74, n° 3, 391-406.
- Gass, S. (1985). *Decision Making, Models and Algorithms*, Wiley.
- Geoffrion, A. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 22, 618-630.
- Geoffrion, A. (1971). Duality in nonlinear programming: a simplified applications-oriented development. *SIAM Review*, vol. 13, n° 1.
- Geoffrion, A. (1983). Can Management Science/Operations Research evolve fast enough? *Interfaces*, vol. 13, n° 1.
- Goicoechea, A., D. R. Hansen, L. Duckstein (1982). *Multiobjective decision analysis with engineering and business applications*. John Wiley and Sons, Chichester.
- Hitch, C. (1953). Suboptimization in Operations Problems. *Operations Research*, vol. 1, p.89.
- House, P., Coleman, J., Schull, R., Matheny, R., Hock, J. (1981). *Comparing Energy Technology Alternatives from an Environmental Perspective*, DOE Publication EV-0109.
- Hwang, C., A. Masud (1979). *Multiple Objective Decision Making - Methods and Applications*. LNEMS 164, Springer-Verlag.

- Ignizio, J. (1985). Multiobjective mathematical programming via MULTIPLEX model and algorithm. *European Journal of Operational Research*, vol 22, 338-346.
- Isermann, H. (1974). Proper efficiency and the linear vector maximum problem. *Operations Research*, vol. 22, 189-191.
- Isermann, H., R. Steuer (1988). Computational experience concerning payoff tables and minimum criterion values over the efficient set. *European Journal of Operational Research*, vol. 33, n° 1, 91-97.
- Jelassi, M. T., V. M. Ozernoy (1989). A framework for building an expert system for MCDM models selection. In "Improving Decision Making in Organisations", A. G. Lockett and G. Islei (Eds.), LNEMS 335, Springer-Verlag.
- Kammersgaard, J. (1988). Four different perspectives on human-computer interaction. *International Journal Man-Machine Studies*, vol. 28, 343-362.
- Kasanen, E., R. Ostermark, M. Zeleny (1991). Gestalt system of holistic graphics: new management support view of MCDM. *Computers and Operations Research*, vol. 18, 233-239.
- Keen, P. (1977). The evolving concept of optimality. *TIMS Studies in Management Science*. Starr, M. e Zeleny, M. (eds), vol. 6.
- Koopmans, T. (1951). Analysis of production as an efficient combination of activities. In "Activity Analysis of Production and Allocation", Cowles Commission Monograph n° 13, T. Koopmans (Ed.), Wiley, New York, 33-97.
- Korhonen, P. (1987). VIG - a visual interactive support system for multiple criteria decision making. *JORBEL*, vol. 27, n° 1, 3-15.
- Korhonen, P. (1991). Using harmonious houses for visual pairwise comparison of multiple criteria alternatives. *Decision Support Systems*, vol. 7, 47-54.
- Korhonen, P., J. Laakso (1986a). A visual interactive method for solving the multiple criteria problem. *European Journal of Operational Research*, vol. 24, n° 2, 277-287.
- Korhonen, P., J. Laakso (1986b). Solving generalized goal programming problems using a visual interactive approach. *European Journal of Operational Research*, vol. 26, n° 3, 355-363.
- Korhonen, P., J. Wallenius (1988). A Pareto race. *Naval Research Logistics*, vol. 35, 615-623.
- Kornbluth, J. (1974). Duality, indifference and sensitivity analysis in multiple objective linear programming. *Operational Research Quarterly*, vol. 25, 599-614.



- Kuhn, H., A. Tucker (1951). Nonlinear programming. Proceedings of the Second Berkley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability, J. Neyman (ed.), University of California Press, 481-492.
- Lewandowski, A., A. Wierzbicki (1988). Aspiration based decision analysis and support. Part I: Theoretical and methodological backgrounds. Working paper WP-88-03, IIASA, Laxenburg, Austria.
- Lewandowski, A., J. Granat (1991). Dynamic BIPLLOT as the interaction interface for aspiration based decision support systems. In "Multiple Criteria Decision Support", P. Korhonen, A. Lewandowski, J. Wallenius (Eds.), LNEMS 356, Springer-Verlag, 229-241.
- Lin, J. G. (1976). Maximal vectors and multi-objective optimization. *Journal of Optimization Theory and its Applications*, vol. 18, 41-64.
- Martins, A. G., D. Coelho, C. H. Antunes, J. Clímaco (1996). A multiple objective linear programming approach to power generation planning with demand-side management (DSM). *International Transactions in Operational Research*, vol. 3, nº 3-4, 305-317.
- Murty, K. G. (1983). *Linear Programming*. John Wiley & Sons, New York.
- Olson, J. R. (1987). Cognitive analysis of people's use of software. In "Interfacing Thought", J. Carrol (Ed.), MIT Press, 260-293.
- Pareto, V. (1906). *Manuale di economia politica*. Societa Editrice Libreria, Milano. Versão em inglês: *Manual of political economy*. The MacMillan Company, New York, 1971.
- Payne, H., E. Polak, D. Collins, W. Meisel (1975). An algorithm for bicriterion optimization based on the sensitivity function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-20, 546-548.
- Ramesh, R., M. Karwan, S. Zionts (1989). Interactive multicriteria linear programming: an extension of the method of Zionts and Wallenius. *Naval Research Logistics*, vol. 36, nº 3, 321-335.
- Reeves, G., J. Gonzalez (1989). A comparison of two interactive MCDM procedures. *European Journal of Operational Research*, vol. 41, 203-209.
- Reeves, G., L. Franz (1985). A simplified interactive multiple objective linear programming procedure. *Computers and Operations Research*, vol. 12, nº 6, 589-601.
- Reeves, G., R. Reid (1988). Minimum values over the efficient set in multiple objective decision making. *European Journal of Operational Research*, vol. 36, nº 3, 334-338.

- Remus, W. (1984). An empirical investigation on the impact of graphical and tabular data presentations on decision making. *Management Science*, vol. 30, 533-542.
- Roy, B. (1985). *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*. Economica, Paris.
- Roy, B. (1987). Meaning and validity of interactive procedures as tools for decision making. *European Journal of Operational Research*, vol. 31, 297-303.
- Roy, B. (1992). Science de la décision ou science de l'aide à la décision?. *Revue Internationale de Systémique*, vol. 6, 497-529.
- Roy, B., D. Bouyssou (1993). *Aide multicritère à la décision: méthodes et cas*. Economica, Collection Gestion, Paris.
- Salukvadze, M. (1979). *Vector-Value Optimization Problems in Control Theory*. Academic Press.
- de Samblanckx, S., P. Depraetere, H. Muller (1982). Critical considerations concerning the multicriteria analysis by the method of Zionts and Wallenius. *European Journal of Operational Research*, vol. 10, 70-76.
- Simon, H. (1981). *The Sciences of the Artificial*. MIT Press, 1981.
- Steuer, R. (1977). An Interactive Multiple Objective Linear Programming Procedure. *TIMS Studies in the Management Sciences*, vol. 6, 225-239.
- Steuer, R. (1986). *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. Wiley.
- Steuer, R. E., L. Gardiner (1990). Interactive multiple objective programming: concepts, current status, and future directions. *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, C. Bana e Costa (ed.), 413-444, Springer-Verlag.
- Steuer, R. E., A. Whisman (1986). Toward the consolidation of interactive multiple objective programming procedures. In "Large-Scale Modelling and Interactive Decision Analysis", G. Fandel, M. Grauer, A. Kurzhanski e A. P. Wierzbicki (Eds.), LNEMS 273, Springer-Verlag, 232-241.
- Szidarovsky, F., M. E. Gershon, L. Duckstein (1986). *Techniques for multiobjective decision-making in systems management*, Elsevier Science, New York.
- Tufte, E. (1987). *Visual Display of Quantitative Information*. Graphics Press.
- Vanderpooten, D. (1989). The interactive approach in MCDA: a technical framework and some basic conceptions. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 12, 1213-1220.
- Vanderpooten, D., Ph. Vincke (1989). Description and analysis of some representative interactive multicriteria procedures. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 12, 1221-1238.

- Vincke, Ph. (1992). *Multicriteria Decision Aid*. Wiley and Sons, New York.
- Von Neumann, J., O. Morgenstern (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.
- White, D. J. (1990). A bibliography on the applications of mathematical programming multiple-objective methods. *Journal of the Operational Research Society*, vol. 41, n° 8, 669-691.
- Wierzbicki, A. P. (1983). A mathematical basis for satisficing decision making. *Mathematical Modelling*, vol. 3, 391-405.
- Yu, P.-L. (1974). Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Application*, vol. 14, n° 3, 319-376.
- Yu, P.-L., M. Zeleny (1975). The set of all nondominated solutions in linear cases and a multicriteria simplex method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 49, n° 2, 430-468.
- Zeleny, M. (1974). *Linear Multiobjective Programming*. Springer-Verlag, New York.
- Zeleny, M. (1982). *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw-Hill, New York.
- Zionts, S., J. Wallenius (1976). An interactive programming method for solving the multiple criteria problem. *Management Science*, vol. 22, 652-663.
- Zionts, S., J. Wallenius (1980). Identifying efficient vectors: some theory and computational results. *Operations Research*, vol. 28, 785-793.
- Zionts, S., J. Wallenius (1983). An interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear utility functions. *Management Science*, vol. 29, 519-529.

Série

Ensino

•

Coimbra  
Imprensa da Universidade

2003