A' UNIVERSIDADE DE MADRID

O.

A DE COIMBRA.

CALCULO

DAS

EPHEMERIDES ASTRONOMICAS

DE COIMBRA,

DE

R. R. DE SOUSA PINTO,

Lente Cathedratico da Faculdade de Mathematica, e Segundo Astronomo do Observatorio da Universidade de Coimbra.

COIMBRA:
Na Imprensa da Universidade.
1849

Para a Universidade de Madrid
Offerece o Auctor.

PREFAÇÃO.

No Calculo das Ephemerides astronomicas de Coimbra tem servido formulas, algumas das quaes fôram passando successivamente d'uns calculadores para outros sem demonstração; outras carecem do exame necessario para se apreciar a confiança com que devem empregar-se; e outras em fim tem uma forma differente daquellas que obtive pelo estudo a que me obrigou a minha posição.

Em taes circumstancias, parecendo-me util aos Astronomos e Calculadores um livro que, pela investigação, demonstração, e discussão, dos methodos proprios para obter os resultados que nas Ephemerides se annunciam, suprisse aquella falta, e concorresse para o aperfeiçoamento dos mesmos resultados; emprehendi o presente trabalho; ajuntando-lhe depois algumas taboas e notas, que recebi dos Sñrs. Thomaz d'Aquino de Carvalho, Jacome Sarmento de Vasconcellos, e Florencio Mago Barreto-Feyo, e que inseri nos logares respectivos com os nomes dos seus auctores.

A estes agradeço o interesse que assim mostraram no bom resultado da minha empresa: e duplicadamente ao Sr. Barreto-Feyo, a quem devo, além daquelle valioso serviço, o de verificar, com muito zêlo e muita intelligencia, a exactidão da maior parte dos calculos, que não pude repetir, nem se prestavam a outra prova; e de rever uma das provas typographicas de muitas das folhas.

Pelas citações, que fiz nos logares respectivos, podem consultar-se os auctores a que nelles recorri, ou os que, apezar de tratarem por outro modo as mesmas materias, se lerão com proveito. Mas devo mencionar aqui, por mais familiares ao meu estudo, as memorias do Sr. Monteiro da Rocha, que são um monumento glorioso para o seu auctor e para a Universidade; a 2.ª edição da *Astronomie Phisique de J. B. Biot*, adoptada como Compendio nas lições d'Astronomia Pratica; e a *Astronomie Pratique de L. B. Francoeur*, manual do astronononomo pratico, que junto ao presente opusculo me parece conter o que é essencial para os calculos astronomicos.

Na ordem dos artigos segui as *paginas* da Ephemeride; e nas citações da *Explicação* referi-me á Ephemeride para 1848, excepto quando declarei o contrario. No entretanto as mesmas citações são quasi sempre applicaveis á Epheme ride de 1849, e mesmo a todas as outras, alterando parte da numeração.

Na parte do *Supplemento* relativa ás Taboas do Sol apontei alguns pequenos erros que me pareceo achar nas Taboas de Delambre; mas tendo apenas estudado aquellas Taboas em relação ao fim que me propuz, nem quiz faltar ao dever de advertil-os, nem dar por certa a sua existencia.

TABOA

DAS MATERIAS.

PAGINA I.

PAGINA II.

PAGINA III.

PAGINAS IV E V.

PAGINAS VI E VII.

Pag.

PAGINAS VIII E IX.

PAGINA X.

ECLIPSFS.

CALENDARIO.

INTERPOLAÇÃO.

NOTA.

SUPPLEMENTO.

ERRATAS E ADDIÇÕES.

Pag.	*Linhas.*	*Erros.*	*Emendas.*
2	25	as perturbações	ás perturbações
3	17	longitude media	longitude l
9	11	59,13882	59,138833
13	19	na taboa	pela taboa
15	10 e 11	$T'_1 =$ e $T'_2 =$	$T'_1 - B\theta^2 =$ e $T'_2 - B\theta^2 =$
23	ult.	$1^h.21^d.42',8$	$1^d.21^h.42',8$
36	28	$Cl.$ (☉ — P)	$Cl.$ sen (☉ — P)
39	4	no n.º 8.	no n.º 9
42	2	encruzadas	encruzadas e as 2.as
«	21	« membro da formula (4) » *accrescente-se* « resolvida em ordem a cos d ».	
43	20	erro a	erro de a
44	21	mostram-se	mostram se
48	col 7	28	18
61	19	cot P′	— cot P′
62	8	apenas de 0′,01	inferior a 0′,003
65	25	0′,1415	0′,1445
68	ult.	*accrescente-se* « no caso de ser $\theta < 1$, ou para $\theta = \frac{1}{2} i$ no caso de se substituir $i > \theta$ em logar de 1, isto é, de corresponder a $t + \frac{1}{2} i$ a velocidade constante. »	
71	2	temos	temos (*)
72	13	ao gráo d'approximação	ao fim
77	26	«Para que as distancias» *accrescente-se* « sejam uteis, não devem variar lentamente; e para que ».	
86	10	« attendendo á differença d'épocha e de meridianos » *é melhor lêr* « subtrahindo das epochas das conjuncções medias a differença d'origem e de meridianos. »	
87	ult.	*accrescente-se* « Quando M sahe dos limites assim assignados, não póde haver eclipse: mas nem por isso o haverá sempre que M estiver dentro dos mesmos limites; porque os valores de M entre 0,48 e 0,49742, e entre 2,48258 e 2,50, podem combinar-se com taes valores de Z que seja Q+Z negativo. É o que resulta da interpolação da taboa XXIX, ou de tomar o maximum de Z negativo nas duas desigualdades para determinar os limites dentro dos quaes é sempre real a funcção $\sqrt{Q+Z}$.	
96	18	construcção	construcção (*)
98	14	e seguintes *leia-se* « A condição necessaria para que o satellite	

não se esconda detraz do planeta é $(L+\lambda)^2 + (D-\delta)^2 > 1$, que dá $D - \delta > \sqrt{1-(L+\lambda)^2}$, ou $D - \delta > \Delta$ segundo a formula (6').

101	20	escrevendo $\frac{\pi}{\cos d}$	escrevendo $\frac{\pi}{\cos d'}$
107	2	$\frac{m}{n}$	$\frac{n}{m}$
108	14	longitude	latitude
110	13	columna	columna, e da immediata,
113	ult.	*accrescente-se* « Para attender á inclinação α da orbita relativa deve dividir-se o segundo limite pelo minimo valor de cos α; e por isso é melhor mudal-o em 1.°35.' »	
116	17	CK'I	CK'E
117	12	começa e acaba	começa primeiro e acaba ultimo
120	5	de P	de p
»	19	.... (15)	.... (14)
«	25	o logar	o primeiro logar
124	ult.	*accrescente-se* « Quando $\Sigma = 0$, as formnlas (15) e (16) reproduzem a solução do problema III; como deve ser. »	
125	25	« o n.° 131 cuja doutrina tem logar, etc.» *leia-se* «o n.° 131.»	
127	5	h	$m - m'$
»	penult.	$< 63'$	$> 63'$
133	20	> 24	> 25
134	12	Ct^2	Ct^3
»	22	172	171
136	Taboa	$180 - \delta$	$180 + \delta$
143	34	« XV — 2.ª parte » *accrescente-se* « para a longitude ».	
144	17	+ B sen k	+ B cos k
149	2	185	183
152	7	n.° 41	n.° 42
154	11	$i'.\frac{p-\pi}{i'}$	$i''.\frac{p-\pi}{i'}$
158	6 e 7	$A^{(0)}, A^{(1)}, .. A^{(n)}$	$A, A_1, ... A_n$
162	ult.	$\Delta^{6}_{-\frac{3}{2}-1}$	$\Delta^{4}_{-\frac{3}{2}-1}$
168	col. 4.ª	340°	320°
174	20	formula (2)	formula (1)

A Numeração dos nn. 15 e 16 está trocada; e a dos nn. 129, 145, 152, está repetida.

DO CALCULO

DAS

EPHEMERIDES ASTRONOMICAS

DE COIMBRA.

PAGINA I.

ARTIGO I.

Longitude do Sol, distancia, parallaxe, e semidiametro.

1. A Longitude do Sol, distancia á terra, parallaxe, e semidiametro, calcúlam-se pelas Taboas do Sr. Monteiro impressas em Coimbra no anno de 1813.

A taboa I contém as épochas, isto é, a longitude media do Sol, a sua anomalia media A, e os argumentos B, C, D, E, F, G, H, I, K, para o primeiro dia de Janeiro de cada anno do seculo XIX, ao meio dia medio no meridiano do Observatorio da Universidade de Coimbra.

A taboa III mostra o que se tem de ajuntar áquellas quantidades, relativas ao primeiro de Janeiro, para ter as relativas ao primeiro d'outro qualquer mez. Todos os numeros desta taboa teem 2° de menos do que devem ter; mas adiante se compensa essa falta, como logo diremos.

As taboas IV, V, VI, e VII, mostram o que se deve ajuntar aos numeros achados nas duas precedentes para ter aquelles que correspondem a um dado dia, hora, minuto, e segundo.

Por meio de todas estas taboas acha-se a longitude media do Sol, para um dado instante, diminuida de 2°.

2. A outra parte da expressão elliptica da longitude, ou a equação do centro, acha-se na taboa IX; mas com o augmento de 1°.59', que torna sempre positivos os numeros desta taboa.

A distancia do Sol á terra, dada pela sua expressão elliptica, acha-se na taboa X; mas com a diminuição de uma unidade na quarta casa decimal.

3. A taboa XI dá as perturbações da longitude e distancia, devidas ás acções da Lua, Venus, Marte, e Jupiter.

Estas perturbações são da fórma $\Sigma_1^i\, b_i$ sen im para a longitude, e $a' + \Sigma_1^i\, b'_i$ cos im para as distancias; sendo m algum dos argumentos B, C, D, E, F, G, H, I, K.

Para as tornar positivas o Sr. Monteiro ajunta ás das longitudes, $\Sigma_1^i\, b_i$ sen im, e á parte periodica das das distancias, $\Sigma_1^i\, b'_i$ cos im, as constantes seguintes:

Perturbações	Constantes juntas a $\Sigma_1^i\, b_i$ sen im	Constantes juntas a $\Sigma_1^i\, b'_i$ cos im
B	0′,170	0,0000365
C	180	244
D	060	40
E	050	36
F	220	233
G	080	61
H	090	25
I	090	»
K	060	»
sommas	1,000	0,0001004

Estas constantes acham-se facilmente pelo exame das respectivas taboas, attendendo a que,

para $m = 0$, é $\Sigma_1^i\, b_i$ sen $im = 0$, $\Sigma_1^i\, b'_i$ cos $im = \Sigma_1^i\, b'_i$.

4 A somma 1′ das constantes juntas as perturbações das longitudes, com 1°.59′ juntos á equação do centro, dá os 2° que se haviam tirado das longitudes medias na taboa III.

A somma 0,0001004 das constantes juntas á parte periodica das perturbações das distancias envolve a somma 0,0000004 das constantes a', que entram nas expressões das mesmas perturbações, e que são

para Venus	para Marte	para Jupiter	para Saturno
+0,0000016.7	—0,0000000.3	—0,0000011.6	—0,0000000.6.

O resto 0,0001000 é pois o que se ajuntou de mais ás perturbações; e por isso se tirou este mesmo numero na taboa X.

5. A taboa XII dá a parallaxe e o semidiametro do Sol, entrando nella com o argumento A.

6. O exemplo, que vem a paginas 90 das Taboas, mostra bem o

que se deve fazer para usar dellas. E só accrescentaremos que: tendo todas as funcções, de que se usa neste calculo, excepto a equação lunar B, um andamento regular, mesmo para muito dias; basta por isso calcular tudo o mais de seis em seis dias, ou ainda com maior intervallo, interpolar para todos os dias, e no fim ajuntar a equação B calculada de dia em dia (*). O que facilita muito o calculo dos logares do Sol, quando se querem seguidamente, como acontece na Ephemeride.

7. As formulas, que serviram para a formação destas taboas, fôram tiradas do tomo 3.° da *Mechanica Celeste*, ou da introducção das Taboas Solares de Delambre; com mudanças de fórma e desprezos, de que trataremos quando expozermos as correcções, de que actualmente carecem algumas das mesmas taboas.

ARTIGO II.

Ascensão recta, e declinação do Sol.

8. A Taboa VIII dá a obliquidade media ω da ecliptica; com a qual, e com a longitude media do Sol, que se acha como fica dito, se calcúla a ascensão recta a, e a declinação d, pelas formulas.

$$\text{tang}\, a = \cos\omega\ \text{tang}\, l,\ \text{sen}\, d = \text{sen}\,\omega\ \text{sen}\, l \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

que resolvem o triangulo rectangulo formado pelos lados a, d, l.

9. Tambem se póde usar para este fim das taboas que se acham nas do Sr. Monteiro a paginas 52 e seguintes, e a paginas 64 e seguintes. Mas como estas taboas fôram calculadas com a obliquidade 23°28′, é necessario applicar aos numeros, que nellas se acham, as correcções dependentes da mudança d'obliquidade.

Para isso, differenciando as equações (1) em ordem a ω, com l constante; e dividindo cada derivada pela sua primitiva; teremos

$$\delta a = -\tfrac{1}{2}\,\delta\omega.\ \text{sen}\, 2a\ \text{tang}\,\omega,\ \delta d = \delta\omega.\ \text{tang}\, d\ \cot\omega \ldots\ldots\ldots (2).$$

Estas equações (2) dão as correcções que se devem applicar á ascen-

(*) O intervallo de 6 dias é commodo; por que a interpolação necessaria para ter as funcções correspondentes a todos os dias é primeiro para $\frac{1}{2}$, e depois para $\frac{1}{3}$, e $\frac{2}{3}$, dos respectivos intervallos.

são recta e declinação achadas nas taboas, em virtude da mudança $\delta\omega$ da obliquidade da ecliptica: e como a e d são dadas, para cada longitude l, ou pelas taboas, ou pelas equações (1); vê-se que as correcções δa e δd dependem da longitude. Os seus valores acham-se reduzidos a taboa na pagina 76 e seguintes das Taboas do Sr. Monteiro; o que dispensa de os calcular.

Exemplo. No 1.° de Janeiro de 1848 ao meio dia medio temos, segundo a Ephemeride, e pela taboa VIII,

$$\text{long.}\ \odot = 280°.\,17',56 \qquad , \ \omega = 23.°27',533.$$

Se calcularmos a ascensão recta e declinação pelas formulas (1), acharemos:

log. cos ω	9.9625332	log. sen ω	9.5999823
log. tang l	0,7408876 —	log. sen l	9.9929544 —
log. tang a	0,7034208 —	log. sen d	9.5929367 —
a	281.°11',853	d	—23.°3',562.

Se calcularmos pelas taboas, segundo o que temos dito neste n.°, acharemos:

Pag. 62, para	280,°0	0.°52',86
parte da diff. proporc. a	0,2927....	1,469
	reducção....	0. 54,329
		280. 17,56
	asc. recta...	281. 11,889
pag. 78, corr. da red. para —0,467 ...		—0,039
	asc. rect. corr., a....	281. 11,850
Pag. 74, decl.		— 23. 4,008
pag. 78, corr. da decl.		+ 0,458
	decl. corr., d ..	— 23. 3,550 (*)

(*) Usando na pag. 74 das differenças segundas, teremos

diff. 1.as	diff. 2.as
+2,31	+0,11;
2,42	

e applicando as formulas (1) do n.° 12, será

$$i = 5,\ t = 2,927,\ A = +0,451,\ B = +0,0022,$$

o que dá a declinação — 23.° 4', 022, e a correcta $d = -23.° 3',564$.

Em tudo isto é necessario attender com cuidado ás advertencias que vem no fundo das respectivas paginas daquellas taboas.

ARTIGO III.

Equação do tempo.

10. O Que na Ephemeride se chama *Equação do tempo*, ou tempo verdadeiro menos tempo medio, é a expressão

long. méd. do ☉ — asc. rect. do ☉ verdadeiro

convertida em tempo na rasão de 15° por hora.

11. A equação do tempo que vem na Ephemeride, sendo para o meio dia medio, é exactamente o tempo verdadeiro no instante desse meio dia; mas no instante do meio dia verdadeiro é o tempo medio tomado com sinal contrario, proximamente. E dizemos proximamente, por que, em rigor, se deveria attender á variação da equação do tempo durante o intervallo dos dous meios dias, isto é, durante a mesma equação (*).

Em quanto aos usos desta equação podem consultar-se os nn. 12 e 21 da *Explicação das Ephemerides* (**).

(*) Da parte da differença diurna da equação do tempo, que compete á mesma equação, acha-se no *Conaissance des Temps* uma taboa, que serve para reduzir a sua equação do tempo, correspondente ao meio dia verdadeiro, á correspondente ao meio dia medio.

Facilmente se formaria uma taboa semelhante, que servisse para reduzir a equação do tempo da nossa Ephemeride, correspondente ao meio dia medio, á correspondente ao meio dia verdadeiro. Mas pode ainda servir para isso a do *Conaissance des Temps*.

(**) A equação do tempo serve para regular as pendulas de tempo medio; no que desprezaremos as variações dos dias solares consecutivos.

Sejam $$T, T', T'', \ldots T^{(n)}, t^{(n)}$$

os tempos que marca o relogio nos instantes das passagens do Sol pelo meridiano em dias consecutivos, e um tempo $t^{(n)}$ no dia (n);

e $$e, e', e'', \ldots e^{(n)}, e_t^{(n)}$$

ARTIGO IV.

Movimentos horarios do Sol.

12. SEja F a longitude, ascensão recta, ou declinação, do Sol, para um meio dia medio; F' a funcção analoga para um tempo t contado desse meio dia; Δ e Δ' as differenças 1.as entre F e duas funcções consecutivas; i o intervallo constante, que separa os instantes a que correspondem estas funcções; e Δ^2 a differença 2a.

Fazendo

$$\delta = \frac{\Delta}{i}, \delta' = \frac{\Delta'}{i}, \delta^2 = \frac{\delta' - \delta}{2i} = \frac{\Delta^2}{2i^2},$$

---

as equacões do tempo correspondentes.

Os estados absolutos do relogio, isto é, às quantidades de que elle está adiantado a respeito do tempo medio, serão respectivamente

$$T + e - 24^h, T' + e' - 24^h, T'' + e'' - 24^h, \ldots T^{(n)} + e^{(n)} - 24^h;$$

e as accelerações diurnas sobre o tempo medio serão

$$T' - T + e' - e, T'' - T' + e'' - e', \ldots T^{(n)} - T^{(n-1)} + e^{(n)} - e^{(n-1)};$$

quantidades que devem ser iguaes, no caso de ser bom o andamento do relogio.

Posto isto, seja $t^{(n)}$ o tempo medio d'um phenomeno no dia (n); e r a acceleração diurna do relogio, supposto regular, ou

$$r = T' - T + e' - e = T'' - T' + e'' - e' \ldots = T^{(n)} - T^{(n-1)} + e^{(n)} - e^{(n-1)}.$$

Naquelle instante o relogio marcará o tempo

$$t'^{(n)} = t^{(n)} + T^{(n)} + e^{(n)} - 24^h + \frac{r.\ (t^{(n)} + e_t^{(n)})}{24}.$$

Deste modo, se $t^{(n)}$ fôr o tempo medio d'um phenomeno annunciado na Ephemeride, acharemos o tempo $t'^{(n)}$ do relogio, em que o devemos esperar; e inversamente.

Se o meio dia se tomar (n) dias antes do phenomeno, e não no dia delle, deveremos substituir, na expressão precedente, $T + e + nr$ em logar de $T^{(n)} + e^{(n)}$; sendo T o tempo do relogio no instante do meio dia observado, e e a equação do tempo correspondente.

a formula d'interpolação dá, até differenças 2.as,

$$F' = F + t\delta + t(t-i)\delta^2,$$

ou

$$F' = F + At + Bt^2,$$

sendo

$$A = \frac{\Delta}{i} - \frac{\Delta^2}{2i},\ B = \frac{\Delta^2}{2i^2} \Bigg\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Adiante mostraremos que a interpolação é ordinariamente mais exacta quando se toma, em logar de Δ^2, a semisomma $\frac{1}{2}\Sigma$ das differenças 2.as correspondentes ás tres funcções, e á que precede F: mas esta attenção não é aqui necessaria, para a approximação de que se usa na Ephemeride.

13. A equação (1) dá o movimento correspondente á unidade de t,

$$\frac{dF'}{dt} = A + 2Bt \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Assim, se contarmos t em horas, e quizermos o movimento horario correspondente ao meio dia medio, faremos na equação precedente

$$i = 24^h,\ e\ t = 0;$$

o que dará

mov. hor. ao meio dia med. $= \frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{24}$.

Donde resulta a regra seguinte para achar o movimento horario em longitude, ascensão recta, ou declinação, correspondente a um dado meio dia medio:

Tomem-se as differenças 1.as, e a differença 2.a, das tres funcções correspondentes a esse meio dia e aos dous seguintes; tire-se da primeira das duas differenças 1.as ametade da differença 2.a; e divida-se o resto por 24.

Exemplo. No primeiro de Janeiro de 1848 ao meio dia medio temos:

Dias	Asc. recta.	Diff. 1.as	Diff. 2.as
1	281 . 11,85	+ 1 . 6,27	− 0,10 ;
2	282 . 18,12	1 . 6,17	
3	283 . 24,29		

logo $\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 = 66',32$, e $\frac{66',32}{24} = 2',763$.

14. Na taboa XXXIII de Delambre acham-se já calculados os movi-

mentos horarios do Sol em longitude, ascensão recta, e declinação; mas o calculo, feito do modo exposto, é tão simples, que pouco avulta a vantagem daquella taboa sobre elle; e até nos parece mais seguro o uso do mesmo calculo, em relação aos logares da nossa Ephemeride.

ARTIGO V.

Duração da passagem do semidiametro do Sol pelo meridiano. (*)

16. Chamando D o semidiametro apparente do Sol, e d a sua declinação, é $\frac{D}{\cos d}$ este semidiametro reduzido ao equador; e por conseguinte

$$\text{durac. da passagem} = \frac{D}{15 \cos d}.$$

Esta duração é expressa em tempo solar. Se a quizermos em tempo syderal, como se acha nas Ephemerides d'alguns annos, bastará accrescentar $0'',2$. Assim é:

$$\text{durac. da pass. em tempo syd.} = \frac{D}{15 \cos d} + 0'',2.$$

Exemplo. No primeiro de Janeiro de 1848 ao meio dia medio é

$$d = -23.^\circ 3',56, \quad D = 16',296.$$

log. D	1,2120810	dur., tempo medio,	$1',1807 = 1'.10'',8$
Cl. cos d	0,0361651	dur., tempo syd., ...	1 . 11,0
Cl. 15	8.8239087		
	0,0721548		

15. A taboa XXX de Delambre dá estas durações das passagens do semidiametro do Sol já calculadas em ambas as especies de tempo; o que é d'alguma vantagem.

(*) É o que vem em quasi todas as Ephemerides de Coimbra com o titulo de: *tempo da passagem delle pelo meridiano.*

PAGINA II.

ARTIGO I.

Ascensão recta do meridiano em arco e em tempo.

17. Estas ascensões rectas são, para cada meio dia medio, a longitude media do Sol, e a mesma longitude convertida em tempo na rasão de 15° por hora (*).

Assim as taboas I e III dão a ascensão recta do meridiano para o primeiro dia de cada mez, ajuntando 2.' aos numeros da III. Para os dias seguintes usa-se da taboa IV: mas quando se calcúla para muitos dias consecutivos é mais commodo ajuntar de dia em dia o movimento medio diurno 59',13882 em arco, ou 3'.56'',55533 em tempo; tendo no entretanto, para verificação, o cuidado de calcular de mez em mez directamente pela taboa IV.

18. Para ter a ascensão recta do meridiano n'um instante differente do meio dia medio; ou inversamente, o instante em que tem logar uma ascensão recta dada: seja M a ascensão recta em tempo, que corresponde a t^h depois desse meio dia; e m o movimento horario do Sol medio, tambem em tempo. Teremos

$$M' = M + t + mt,$$

e

$$t = \frac{M' - M}{1 + m},$$

ou

$$t = (M' - M)(1 - m + m^2 \ldots).$$

Quando se despreza $(M' - M) m^2$, basta pois tirar de $M' - M$ a parte proporcional $(M' - M)\, m$, que compete ao tempo $M' - M$. (**).

(*) A' ascensão recta do meridiano em tempo dá-se na Ephemeride, desde 1848, o titulo de: *tempo syderal ao meio dia medio.*

(**) Como a diminuição dos minutos, proveniente da subtracção da parte proporcional ás horas, é $< 3'.56'',6$; o erro desta primeira approximação é $< (0'',65 = 0^h,0002)$, por ser $0'',65$ a parte proporcional a $3'.56'',6$.

~~Para attender porém a m^2, podemos tirar de M' — M o producto~~ (M' — M) m. $(1 - m)$; ou usar da formula

$$t = M' - M - mt\ ,$$

calculando-a por approximações successivas do modo seguinte :

De M' — M tire-se a parte proporcional ás suas horas ; do resto tire-se a parte proporcional aos minutos delle ; e finalmente do resto tire-se a parte proporcional aos segundos deste.

Estas tres correcções successivas dão maior approximação do que dariam duas, em ambas as quaes se tirasse a parte proporcional ás horas, minutos, e segundos, de cada um dos dous valores consecutivos ; e tomam-se mais facilmente (*).

Tal é a regra dada na explicação das Ephemerides n.° 16.

(*) Sejam h, m, s, as horas, minutos, e segundos, de M' — M.

Por duas approximações successivas, nas quaes se attendesse a todas as partes, a equação

$$t = M' - M - mt,$$

usando do indice δ para designar partes proporcionaes, daria :

1.ª approximação . . . $h + m + s - \delta h - \delta m - \delta s$

2.ª approximação . . . $h + m + s - \delta h - \delta m - \delta s + \delta^2 h + \delta^2 m + \delta^2 s$.

Por tres approximações do modo indicado no texto teremos

1.ª approximação . . . $\left\{\begin{matrix} h + m + s \\ -\delta h \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} h + m \quad + s \\ -(\delta h)' - (\delta h)'' \end{matrix}\right\}$;

sendo $(\delta h)'$ e $(\delta h)''$ os minutos e segundos de δh,

ou $$\delta h = (\delta h)' + (\delta h)'' :$$

depois

2.ª approximação . . . $\left\{\begin{matrix} h + m \quad + s \\ -(\delta h)' - (\delta h)'' \\ \left\{\begin{matrix} -\delta m \\ +\delta(\delta h)' \end{matrix}\right. \end{matrix}\right\}$:

19. *Passagem das estrellas pelo meridiano.* Para ter a passagem das estrellas pelo meridiano, que adiante nos será necessaria, é claro que podemos servir-nos destas regras, tomando por M' a ascensão recta da estrella.

Tambem podemos calcular esta passagem, ou antes verifical-a, do modo seguinte:

Seja P o tempo da passagem do centro da Lua pelo meridiano, dado na ultima columna da pagina VI; A e B os numeros dados nas duas ultimas columnas da pagina VII, tudo reduzido a horas; e t o numero d'horas medias que o Sol gastaria em descrever o angulo horario $15t$

---

e finalmente

3.ª approximação ....
$$\left\{\begin{array}{l} h+m \quad +s \\ -(\delta h)'-(\delta h)'' \\ \qquad -\delta m \\ \qquad +\delta(\delta h)' \\ \qquad \left\{\begin{array}{l} -\delta s \\ +\delta(\delta h)'' \\ +\delta^2 m \\ -\delta^2(\delta h)' \end{array}\right. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} h+m \quad +s \\ \quad -\delta h \quad -\delta m \\ \qquad\quad +\delta^2 h \\ \qquad\quad -\delta s \\ \qquad\quad +\delta^2 m \\ \qquad\quad -\delta^3 h \\ \qquad\quad +\delta^2(\delta h)'' \end{array}\right\}.$$

Assim o primeiro processo daria

$$M'-M-\delta(M'-M)+\delta^2(M'-M);$$

e o segundo dá

$$M'-M-\delta(M'-M)+\delta^2(M'-M)-\delta^3 h-\delta^2 s+\delta^2(\delta h)''.$$

Comparando estes resultados com o que dariam tres approximações pelo primeiro processo,

$$M'-M-\delta(M'-M)+\delta^2(M'-M)-\delta^3 h-\delta^3 m-\delta^3 s,$$

vê-se que, até $\delta^3 h$, é

$$\text{erro do primeiro} \ldots \delta^3 h=\delta^2.\delta h,$$
$$\text{erro do segundo} \ldots \delta^2[(\delta h)''-s.]$$

Logo o limite superior do primeiro destes erros é maior do que o limite superior do segundo, por ser o limite $3'.56'',6$ de δh maior do que o limite $1'$ de $(\delta h)''-s$.

E com effeito,

por ser	$\delta h<3'.56'',6$	, e $(\delta h)''-s<1'$,
é	$\delta^3 h<0'',0018$	, e $\delta^2[(\delta h'')-s]<0'',0005.$

da Lua, correspondente ao instante T da sua conjuncção com a estrella. Teremos:

$$P + t + At + Bt^2 = T,$$

e por conseguinte

$$t = \frac{T - P}{1 + A + Bt} = \frac{T - P}{1 + A'}.$$

A estrella descreve o angulo horario $15t$ no tempo

$$t' = (1 - m)\,t = (1 - 0^h{,}002738)\,t.$$

Posto isto, temos

$$\text{passagem da} * = T - t' = T - \frac{1 - m}{1 + A'}\,.\,(T - P);$$

que se reduz a

$$\text{passagem da} * = P + [A'(1 - A') + m].\,(T - P),$$

quando se despreza o cubo de A' e o producto mA';

e $$\text{passagem da} * = P + A'(T - P),$$

quando se despreza o quadrado de A' e m.

A primeira expressão calcúla-se com facilidade escrevendo em minutos A', e $m = 0',1643$; procurando na taboa dos factores o factor correspondente a $30' + \frac{1}{2}A'$; multiplicando este factor por $T - P$, e o producto por $30' - \frac{1}{2}m = 29{,}9179$; e subtrahindo o resultado de T.

ARTIGO II.

Nascimentos e occasos.

20. A Hora da passagem da Lua por um meridiano situado a $+t^h$ ao occidente, ou $-t^h$ ao oriente, do meridiano do Observatorio de Coimbra, é

$$P \pm t \pm At + Bt^2;$$

tendo P, A, B, a significação, que lhes attribuimos no n.º precedente;

e sendo $\pm$ 15 t o angulo horario occidental, ou oriental, feito pelo meridiano daquelle logar com o do Observatorio de Coimbra. Mas procurar a hora do nascimento ou occaso da Lua equivale a procurar a hora da sua passagem por um meridiano, cuja longitude, oriental ou occidental, seja igual ao angulo semidiurno, oriental ou occidental, da Lua. Vê-se pois que a expressão precedente deve servir para achar aquelle tempo.

Posto isto, seja θ o arco semidiurno em tempo correspondente á declinação que a Lua tem no tempo P da sua passagem meridiana, o qual se póde achar por meio da taboa das differenças ascensionaes. Serão $\mp \theta$ as longitudes approximadas, orientaes ou occidentaes, do meridiano do nascimento ou occaso; e $P \mp \theta \mp A\theta + B\theta^2$ serão proximamente os tempos do nascimento e do occaso.

Tomemos para primeira approximação,

$$\text{nasc. approx.} = P - (\theta + A\theta) = P - t = T_1;$$
$$\text{occ. approx.} = P + (\theta + A\theta) = P + t = T_2.$$

Calculando as declinações da Lua, correspondentes aos tempos T_1 e T_2, acham-se depois na taboa das differenças ascensionaes os arcos semidiurnos $-\theta_1$ e $+\theta_2$ do nascimento e occaso; e com estes arcos calculam-se os tempos correctos

$$\left.\begin{aligned} T'_1 &= \text{nasc. corr.} = P - [\theta_1 + \theta_1 (A - B\theta_1)] \\ T_2' &= \text{occ. corr.} = P + [\theta_2 + \theta_2 (A + B\theta_2)] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1).$$

21. A differença ascensional é $\frac{p}{15} - 6^h$; sendo $\frac{p}{15}$ o angulo horario correspondente em tempo.

Seja h a altura do polo sobre o horisonte, e d a declinação do astro. Suppondo $ZS = 90^\circ$, o triangulo espherico PZS (fig. 1) entre o pólo, zenith, e astro, dá

$$\cos p = -\text{tang } h \text{ tang } d.$$

Assim as formulas, que dão a differença ascensional, são

$$\cos p = -\text{tang } h \text{ tang } d, \quad \text{diff. asc.} = \frac{p}{15} - 6^h \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Por onde se vê que a differença ascensional é positiva ou negativa (e conseguintemente additiva a 6^h, ou subtractiva de 6^h, para dar o angulo horario), conforme está o astro ao norte, ou ao sul, do Equador.

A taboa destas differenças, correspondentes aos argumentos h e d, é a VII da Ephemeride de 1805.

O Sr. F. M. Barreto Feyo interpolou, e deu a seguinte disposição á taboa especial para a latitude de Coimbra, calculada pelo Sr. J. S. de Vasconcellos, de que tem usado os calculadores:

TABOA
DAS DIFFERENÇAS ASCENSIONAES.

ARGUMENTO:

Declinação do astro.

Arg.	0′		10′		20′		30′		40′		50′		60′
	Diff. asc.	diff.	Diff. asc.	diff.	Diff. asc.	dift	Diff. asc.	diff.	Diff. asc.	diff.	Diff. asc.	diff.	Diff. asc.
0°	0ʰ 0′,00	56	0ʰ 0′,56	56	0ʰ 1′,12	57	0ʰ 1′,69	56	0ʰ 2′,25	56	0ʰ 2′,81	57	0ʰ 3′,38
1	3 ,38	56	3 ,94	56	4 ,50	57	5 ,07	56	5 ,63	56	6 ,19	57	6 ,76
2	6 ,76	56	7 ,32	56	7 ,88	57	8 ,45	56	9 ,01	57	9 ,58	57	10 ,15
3	10 ,15	56	10 ,71	57	11 ,28	57	11 ,85	56	12 ,41	57	12 ,98	57	13 ,55
4	13 ,55	57	14 ,12	57	14 ,69	57	15 ,26	57	15 ,83	57	16 ,40	57	16 ,97
5	16 ,97	57	17 ,54	57	18 ,11	57	18 ,68	57	19 ,25	57	19 ,82	57	20 ,39
6	20 ,39	57	20 ,96	57	21 ,53	58	22 ,11	57	22 ,68	57	23 ,25	58	23 ,83
7	23 ,83	57	24 ,40	58	24 ,98	58	25 ,56	57	26 ,13	58	26 ,71	58	27 ,29
8	27 ,29	58	27 ,87	58	28 ,45	58	29 ,03	58	29 ,61	58	30 ,19	59	30 ,78
9	30 ,78	58	31 ,36	58	31 ,94	59	32 ,53	58	33 ,11	59	33 ,70	59	34 ,29
10	34 ,29	59	34 ,88	59	35 ,47	59	36 ,06	59	36 ,65	59	37 ,24	59	37 ,83
11	37 ,83	59	38 ,42	60	39 ,02	60	39 ,62	59	40 ,21	60	40 ,81	60	41 ,41
12	41 ,41	60	42 ,01	60	42 ,61	60	43 ,21	60	43 ,81	60	44 ,41	61	45 ,02
13	45 ,02	60	45 ,62	61	46 ,23	61	46 ,84	61	47 ,45	61	48 ,06	61	48 ,67
14	48 ,67	61	49 ,28	61	49 ,89	62	50 ,51	61	51 ,12	61	51 ,74	62	52 ,36
15	52 ,36	62	52 ,98	62	53 ,60	63	54 ,23	62	54 ,85	63	55 ,48	63	56 ,11
16	56 ,11	63	0 56 ,74	63	0 57 ,37	63	0 58 ,00	63	0 58 ,63	64	0 59 ,27	64	0 59 ,91
17	0 59 ,91	64	1 0 ,55	64	1 1 ,19	64	1 1 ,83	64	1 2 ,47	65	1 3 ,12	65	1 3 ,77
18	1 3 ,77	65	4 ,42	65	5 ,07	65	5 ,72	65	6 ,37	66	7 ,03	66	7 ,69
19	7 ,69	66	8 ,35	66	9 ,01	66	9 ,67	66	10 ,33	67	11 ,00	67	11 ,67
20	11 ,67	67	12 ,34	67	13 ,01	68	13 ,69	68	14 ,37	68	15 ,05	68	15 ,73
21	15 ,73	68	16 ,41	69	17 ,10	69	17 ,79	69	18 ,48	70	19 ,18	70	19 ,88
22	19 ,88	70	20 ,58	70	21 ,28	70	21 ,98	71	22 ,69	71	23 ,40	71	24 ,11
23	24 ,11	71	24 ,82	72	25 ,54	72	26 ,26	72	26 ,98	73	27 ,71	73	28 ,44
24	28 ,44	73	29 ,17	73	29 ,90	74	30 ,64	74	31 ,38	74	32 ,12	74	32 ,86
25	32 ,86	75	33 ,61	75	34 ,36	75	35 ,11	76	35 ,87	76	36 ,63	76	37 ,39
26	37 ,39	77	38 ,16	77	38 ,93	77	39 ,70	78	40 ,48	78	41 ,26	79	42 ,05
27	42 ,05	79	42 ,84	79	43 ,63	79	44 ,42	80	45 ,22	81	46 ,03	81	46 ,84
28	46 ,84	81	47 ,65	81	48 ,46	82	49 ,28	83	50 ,11	83	50 ,94	83	51 ,77
29	51 ,77	84	52 ,61	84	53 ,45	84	54 ,29	85	55 ,14	85	55 ,99	86	56 ,85

22. A declinação d correspondente ao tempo P torna-se, para $P - t$ e $P + t$, em $d - At + Bt^2$ e $d + At + Bt^2$, sendo A e B relativos á declinação.

Desprezando a influencia de Bt^2 na differença ascensional, e chamando k a variação desta differença procedente do termo At, é

$$\theta_1 = \theta - k, \ \theta_2 = \theta + k;$$

o que substituido nas expressões de T'_1 e T'_2 do n.° 20, e desprezando Bk^2, dá

$$T'_1 = T_1 + k + Ak - 2B\theta k,$$
$$T'_2 = T_2 + k + Ak + 2B\theta k,$$

e por conseguinte

$$T'_1 - T_1 = T'_2 - T_2 - 4B\theta k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Assim, por ser ordinariamente $4B\theta k$ uma pequena quantidade, vê-se que, achada uma das correcções $T'_1 - T_1$, ou $T'_2 - T_2$, é essa quasi sempre a que basta applicar a ambos os tempos approximados T_1 e T_2, para ter os correctos T'_1 e T'_2, quando se quer tão sómente approximação até minutos. E quando se quizer maior escrupulo, póde accrescentar-se $4B\theta k$ á correcção do nascimento para ter a do occaso, ou tirar $4B\theta k$ da do occaso para ter a do nascimento.

23. Como para calcular a declinação d correspondente a P se parte da correspondente ao meio dia, ou meia noite, mais proximo: convem calcular pela formula (1) aquelle dos numeros, T'_1 ou T'_2, que differe menos de 12^h do meio dia ou meia noite; e depois applicar a T_2 ou T_1 a correcção achada, ou essa correcção $\pm 4B\theta k$, para ter o outro T'_2 ou T'_1. Por isso tem o nosso typo a ultima columna N ou O, isto é, nascimento ou occaso: como se verá no exemplo, que ajuntaremos no fim deste livro para tornar mais claro o que fica exposto.

Para a approximação, que se requer na Ephemeride, basta d'ordinario calcular directamente de dous em dous dias; e interpolar depois para $\frac{1}{2}$, aproveitando as semisommas das differenças 2.as

24. Para ter, com a mesma approximação, o nascimento e occaso do Sol e dos planetas, basta calcular os tempos $P - \theta$ e $P + \theta$: sendo P e θ a respeito destes astros o mesmo que são no n.° 20 a respeito da Lua.

Para o Sol é $\quad P = 0^h -$ *eq. do tempo* (n.° 11).

Para os planetas P é dado na pagina respectiva.

25. Até aqui não attendémos aos effeitos da parallaxe e da refracção; e por isso é necessario applicar uma correcção aos resultados precedentes (*).

Chamando z a distancia zenithal ZS (fig. 1), e conservando as outras denominações do n.° 21, o triangulo ZPS dá

$$\cos z = \cos p \cos h \cos d + \operatorname{sen} h \operatorname{sen} d.$$

Se o nascimento verdadeiro é em S, e o apparente em s, sendo S's o effeito da *refracção — parallaxe*, o triangulo variado ZPS' dá

$$\cos (z + \delta z) = \cos (p + \delta p) \cos h \cos d + \operatorname{sen} h \operatorname{sen} d:$$

logo $$\cos z - \cos (z + \delta z) = \cos h \cos d \,[\cos p - \cos (p + \delta p)],$$

que, por ser $z = 90°$, se reduz a

$$\cos p - \cos (p + \delta p) = \frac{\operatorname{sen} \delta z}{\cos h \cos d} = n \operatorname{sen} p \ldots\ldots\ldots (4).$$

Da equação (4) póde tirar-se δp em serie ordenada relativamente ás potencias do factor n do segundo membro [addit. ás not. do Calc. diff. e int. de Francoeur, pag. 8, form. (13)]. E tambem se póde calcular por approximações successivas; substituindo para isso

$$2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \delta p \operatorname{sen} (p + \tfrac{1}{2} \delta p)$$

em logar do primeiro membro, o que dá

$$2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \delta p = \frac{\operatorname{sen} \delta z}{\cos h \cos d \operatorname{sen} (p + \frac{1}{2} \delta p)}.$$

No caso de se desprezarem os quadrados de δp, esta equação reduz-se a

$$\frac{\delta p}{15} = \frac{\delta z}{15 \cos h \cos d \operatorname{sen} p};$$

(*) Nas Ephemerides para 1848 e 1849 calculou-se o nascimento e o occaso sem attender á refracção e parallaxe (vej. o n.° 48 da *Explicação*), mas na de 1850 attende-se a ellas.

ou, em virtude da primeira das equações (2),

$$\frac{\delta p}{15} = \frac{\delta z}{15\sqrt{\cos^2 d - \operatorname{sen}^2 h}}\ (*).$$

E no caso de se desprezarem os cubos de δp, teremos

$$\frac{\delta p}{15} = \frac{n}{15 \operatorname{sen} 1'} - \tfrac{1}{2}\frac{n^2 \cot p}{15 \operatorname{sen} 1'},$$

ou

$$\frac{\delta p}{15} = \frac{\delta z}{15 \cos h \cos d \operatorname{sen}(p + \frac{1}{2}\delta p)},$$

que se calculará por duas approximações successivas.

26. Para cada valor de d a taboa das differenças ascensionaes dá p; e depois uma das formulas do n.º precedente dá $\frac{\delta p}{15}$. Deste modo se póde formar uma taboa de $\frac{\delta p}{15}$, que servirá para a correcção do nascimento e occaso, tomando por δz a *refr. horis* — *parall. horis.* do astro.

Os sinaes de δz, relativamente ao Sol e á Lua, mostram que, para o Sol, a correcção é subtractiva do tempo calculado do nascimento, e additiva ao do occaso; e que para a Lua é o inverso (**).

Quando se aproveitam os quadrados, as formulas do n.º precedente mostram que o sinal da differença ascensional influe no valor de δp, por entrar nellas $\cot p$ ou $\operatorname{sen}(p + \frac{1}{2}\delta p)$; e por isso as correcções não são rigorosamente iguaes para as declinações boreaes e para as correspondentes austráes. Mas como na latitude de Coimbra, e até $d = 30°$ e $\delta z = 33'$,

---

(*) O Sr. Barreto Feyo lembrou a transformação

de $\cos^2 d - \operatorname{sen}^2 h$ em $\cos(d+h)\cos(d-h)$,

que tambem é commoda.

(**) Pondo

$$\delta z = \text{semid. ☉}, \text{ ou } \delta z = \text{semid. horis. ☾},$$

as formulas do n.º 25 dão a duração da immersão no horisonte de ametade do Sol ou da Lua.

Tirando pois, ou ajuntando, esta duração ao tempo do nascimento, teremos o instante em que o astro começa a apparecer, ou aquelle em que apparece todo. E tirando, ou ajuntando, a mesma duração ao tempo do occaso, teremos o instante em que o astro começa a mergulhar-se no horisonte, ou aquelle em que se mergulha todo.

a maxima differença destas correcções é inferior á o',04; prescindimos della no calculo da taboa seguinte de $\frac{\delta p}{15}$, que damos em centesimas de minuto, a pezar de bastarem as decimas para o nosso fim; e ajuntamos uma tabella do que se deveria accrescentar ou tirar, quando se quizesse attender ás mesmas differenças. (Vej. a Trigon. de Cagnoli nu. 1467 até 1473; e a taboa junta ao *Connaissance des Temps* para 1782, pag. 285 e seguintes).

TABOA de $\frac{\delta p}{15}$ NA LATITUDE DE COIMBRA. Argumentos: $\pm\ \delta z$ e d								CORRECÇÃO de $\frac{\delta p}{15}$ Argumentos: δz e $\pm\ d$		
	Argum. δz							Arg. δz		
	18'	21'	24'	27'	30'	33'		21'	27'	33'
Arg. d	$\frac{\delta p}{15}$ $\pm$	$\frac{\delta p}{15}$ $\pm$	$\frac{\delta p}{15}$ $\pm$	$\frac{\delta p}{15}$ $\pm$	$\frac{\delta p}{15}$ $\pm$	$\frac{\delta p}{15}$ $\pm$	differ. por 1'	corr. $\pm$	corr. $\pm$	corr. $\pm$
0°	1',57	1',83	2',09	2',35	2',62	2',88	0',08.7	0',00	0',00	0',01
3	1 ,57	1 ,84	2 ,10	2 ,36	2 ,63	2 ,89	08.8	"	"	"
6	1 ,58	1 ,85	2 ,11	2 ,38	2 ,65	2 ,91	08.8	"	"	"
9	1 ,60	1 ,87	2 ,14	2 ,41	2 ,6[illegible]	2 ,94	08.9	"	"	"
12	1 ,63	1 ,90	2 ,18	2 ,45	2 ,72	2 ,99	09.1	"	"	"
15	1 ,67	1 ,95	2 ,23	2 ,51	2 ,78	3 ,05	09.3	"	"	"
18	1 ,72	2 ,00	2 ,29	2 ,58	2 ,86	3 ,15	09.5	"	"	0 ,01
19	1 ,74	2 ,02	2 ,31	2 ,61	2 ,89	3 ,18	09.6	"	"	0 ,01
20	1 ,76	2 ,04	2 ,34	2 ,64	2 ,93	3 ,22	09.7	"	"	0 ,01
21	1 ,78	2 ,07	2 ,37	2 ,67	2 ,96	3 ,26	09.9	"	"	0 ,01
22	1 ,80	2 ,10	2 ,40	2 ,70	3 ,00	3 ,30	10.0	"	"	0 ,01
23	1 ,[illegible]3	2 ,13	2 ,44	2 ,74	3 ,04	3 ,35	10.1	"	0 ,01	0 ,01
24	1 ,86	2 ,17	2 ,48	2 ,78	3 ,09	3 ,40	10.3	"	0 ,01	0 ,01
25	1 ,89	2 ,20	2 ,52	2 ,83	3 ,14	3 ,45	10.5	"	0 ,01	0 ,01
26	1 ,92	2 ,24	3 ,56	2 ,88	3 ,19	3 ,51	10.7	"	0 ,01	0 ,01
27	1 ,95	2 ,28	2 ,61	2 ,93	3 ,25	3 ,58	10.9	"	0 ,01	0 ,01
28	1 ,99	2 ,33	2 ,66	2 ,99	3 ,32	3 ,65	11.1	0 ,01	0 ,01	0 ,01
29	2 ,03	2 ,38	2 ,71	3 ,05	3 ,39	3 ,73	11.3	0 ,01	0 ,01	0 ,02
30	2 ,[illegible]	2 ,43	2 ,77	3 ,12	3 ,46	3 ,81	11.5	0 ,01	0 ,01	0 ,02

Em rigor a reducção de δp a tempo deve fazer-se na razão $\frac{360^\circ - k}{24}$ por hora; sendo k o movimento diurno do astro em ascensão recta relativamente ao Sol medio. Assim:

$$\delta p \text{ em tempo} = \delta p \cdot \frac{24}{360 - k} = \frac{\delta p}{15}\left(1 + \frac{k}{360} \ldots\right);$$

e por isso seria necessario multiplicar os numeros desta taboa pelo factor $1 + \frac{r}{24}$, sendo r o retardamento diurno $\frac{24k}{360}$.

Para a Lua é $\frac{\delta p}{15}$ a correcção de θ_1 e θ_2 (n.º 20): e por isso a correcção dos tempos do nascimento e occaso é respectivamente $\mp \frac{\delta p}{15}(1 + A)$; sendo um dos numeros, $\frac{\delta p}{15}$ ou A, reduzido a horas.

ARTIGO III.

Phenomenos.

27. Este titulo comprehende as conjuncções verdadeiras em ascensão recta da Lua, planetas, e estrellas; as entradas do Sol nos signos do Zodiaco; etc.: mas não aquelles, que se lançam em outras paginas, e dos quaes trataremos nos logares respectivos.

Sejam a e b para as ascensões rectas d'um astro o mesmo que são para as da Lua os A e B da pagina VI; e AR☾, AR$*$, as ascensões rectas da Lua e do astro, correspondentes ao meio dia ou meia noite mais proximo da conjuncção e separado desta pelo intervallo t^h.

Teremos:

$$AR☾ + At + Bt^2 = AR* + at + bt^2,$$

e por conseguinte

$$t = \frac{AR* - AR☾}{A - a + (B - b)t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

28. Para calcular a formula (1) escreve-se o numerador em gráos; entra-se com $A - a$ na taboa dos factores; e multiplica-se o factor $\frac{60}{A - a}$, achado nella, por aquelle numerador: o que dá o primeiro valor approximado t_1 de t. Entra-se depois na taboa dos factores com $A - a + Bt_1$; e procedendo como na primeira approximação, acha-se o segundo valor mais exacto de t (*).

Não querendo usar da taboa dos factores, praticam-se directamente as divisões que ella converte em multiplicações.

29. Nas conjuncções da Lua com estrellas, suppoem-se $a=0$, $b=0$. Rigorosamente a e b são relativos aos movimentos proprios das estrellas; mas estes movimentos, por muito pequenos ou por incertos, não se consideram.

Nas conjuncções das estrellas com planetas, A e B podem referir-se aos movimentos diurnos dos planetas; e t vem então expresso em dias. Mas se o movimento é retrogrado, convém mais referir a e b áquelles movimentos diurnos (**).

Nas conjuncções dos planetas uns com os outros, podem tomar-se A e B relativamente ao movimento diurno do planeta que caminha mais rapidamente no sentido directo, e a e b relativamente ao movimento diurno do outro.

Seja i o intervallo constante que separa os tempos correspondentes ás ascensões rectas consecutivas d'um planeta; Δ_1, Δ, Δ', Δ'', as differenças 1.as correspondentes á ascensão recta que precede aquella depois da

---

(*) Quando $A-a$ não é muito inferior a $30'$, o factor $\frac{60}{A-a}$ excede pouco 2; e por isso do erro $0'',0001$ do numerador apenas póde resultar um $<(0^h,0003=0',018)$ para t. Assim, para annunciar decimas de minuto de tempo basta escrever o numerador até a 4.a casa decimal.

(**) N'algumas Ephemerides de Coimbra dão-se as conjuncções de planetas com estrellas; n'outras omittem-se.

A observação das differenças entre as coordenadas do planeta e da estrella, perto da conjuncção e quando as declinações differem pouco, póde ser propria para o aperfeiçoamento das suas taboas: mas não diremos outro tanto do uso do tempo da conjuncção para determinar as longitudes; por ser o movimento do planeta menos rapido do que o da Lua, e por isso mais incerta a observação do instante do phenomeno.

qual tem logar a conjuncção, a essa, e ás duas seguintes. Teremos:

$$a = \frac{\Delta}{i} - \frac{\Delta^2}{2i} + \frac{\Sigma^{(3)}}{6i}, \qquad b = \frac{\Delta^2 - \frac{1}{2}\Sigma^{(3)}}{2i^2},$$

sendo

$$\Sigma^{(3)} = \Delta_1^3 + \Delta^3:$$

mas as mais das vezes póde desprezar-se $\Sigma^{(3)}$, substituindo $\frac{1}{2}\Sigma^{(2)}$ em logar de Δ^2.

Como os movimentos dos planetas sahem algumas vezes fóra dos limites da taboa dos factores; é mais commodo, e até mais exacto quando aquelles movimentos são muito pequenos, usar da formula (1) praticando a divisão (*).

(*) Nas conjuncções da Lua com planetas é necessario calcular por interpolação as ascensões rectas destes de 12^h em 12^h. Convém por isso ao calculador ter presente uma tabella d'interpolação para differentes intervallos: e como, dados os logares dos planetas com os intervallos 3^d, 6^d, ou 12^d, de que se usa na Ephemeride de Coimbra, é facil achar os intermedios de 12^h em 12^h, interpolando successivamente para $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ do intervallo; damos aqui os coefficientes de Δ, Δ^2, $\Sigma^{(3)}$, na formula d'interpolação

$$F' = F + p\Delta + q\Delta^2 + r\,\Sigma^{(3)}$$

para aquelles tres casos:

TABOA

Dos coefficientes de Δ, Δ^2, $\Sigma^{(3)}$.

Para	coeff. de Δ	coeff. de Δ^2	coeff. de $\Sigma^{(3)}$
$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{32}$
$\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{5}{162}$
$\frac{2}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{4}{162}$

} meio $+\frac{1}{36}$.

30. Achado o tempo t da conjuncção, teremos nelle

$$\mathrm{DC}☾ - \mathrm{DC}* = \mathrm{D} + (\mathrm{A} - a)\,t + (\mathrm{B} - b)\,t^2;$$

Por ser

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{5}{162} + \frac{4}{162}\right) = \frac{1}{36};$$

póde, com erro apenas de $\mp \frac{\Sigma^{(3)}}{324}$, substituir-se $\frac{1}{36}$ em logar dos coefficientes de $\Sigma^{(3)}$ nas interpolações para $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. E por isso, feita assim a interpolação para $\frac{1}{3}$, basta accrescentar $\frac{1}{3}\,\Delta$ ao resultado della para ter o relativo a $\frac{2}{3}$.

A interpolação até differenças 2.as, ou algumas vezes até 3.as, é sufficiente para os intervallos da Ephemeride: menos em quanto a Mercurio, que muitas vezes se não póde interpolar ainda com differenças superiores.

Calculada a conjuncção da Lua com o planeta, póde facilmente verificar-se do modo seguinte:

Seja $I^{d} + t^{h}$ o tempo achado da conjuncção, contado do logar mais proximo della que dá a Ephemeride. Será $\dfrac{I + \frac{t}{24}}{i} = \theta$ o tempo da conjuncção reduzido ao intervallo i como unidade. E fazendo

$$a = \Delta - \tfrac{1}{2}\,\Delta^2 + \tfrac{1}{6}\,\Sigma^{(3)}, \qquad b = \tfrac{1}{2}\,\Delta^2 - \tfrac{1}{4}\,\Sigma^{(3)},$$

teremos, tanto a respeito da ascensão recta como da declinação,

$$\mathrm{AR}* \text{ ou } \mathrm{DC}* + (a + b\theta)\,\theta$$

para ascensão recta ou declinação do planeta no instante da conjuncção calculado; sendo AR* ou DC* a ascensão recta ou declinação mais proxima, que dá a Ephemeride.

Comparando pois esta ascensão recta ou declinação com a da Lua

$$\mathrm{AR}☾ \text{ ou } \mathrm{DC}☾ + (\mathrm{A} + \mathrm{B}t)\,t,$$

que corresponde ao mesmo instante, verificar-se-ha o calculo desse instante, e o da differença de declinações.

Esta verificação é principalmente util para evitar o engano de copiar, no calculo da conjuncção, em logar da ascensão recta do planeta, correspondente ao meio dia ou meia noite mais proxima do phenomeno, outra visinha; equivoco este que facilmente acontece.

Uma verificação semelhante se applica ás conjuncções dos planetas uns com os outros, e com as estrellas.

sendo D a differença de declinações da Lua e do astro correspondente a $t = 0$, A e B relativos á declinação da Lua, e a e b relativos á declinação do astro.

31. Para que as conjuncções da Lua com estrellas possam ser ecliplicas em algum ponto da terra, é necessaria uma condição, que adiante faremos conhecer; mas serve ordinariamente a seguinte:

$$DC☾ - DC* < \text{semid.}\,☾ + \text{parall.}\,☾.$$

São estas as que se costumam annunciar na Ephemeride. Mas nas dos planetas com estrellas, quando se annunciam, aproveitam-se differenças de declinação muito maiores.

32. As columnas das passagens meridianas, que fazem parte das paginas III e VI, pódem servir de auxilio para mais facilmente procurar os dias em que tem logar as conjuncções da Lua com planetas, e destes uns com os outros.

Exemplos. 1.º No 1.º de Janeiro de 1848 ás 12^h temos para γ de Libra, usando do catalogo junto á Ephemeride de 1810:

AR	A	B	factor	fact. corr.
* 231°.45′,17	30,516	+ 25,5	1,95	1,9504
☾ 226.46,36	+ 248	× 9,711	× 4,9802	× 4,9802
4.58,81	30,764	248	9,711	9,7134
4,9802				

DC	A	B	A corr.
* − 14.16,68	− 6,408	+ 31,2	− 6,105
☾ − 13.56,78	+ 303	× 9,713	× 9,713
− 59,30		303	− 59,30
− 14.56,08			
+ 14.16,68			
− 39,40			

Assim:

Tempo	Phenomeno	Diff. de DC.
$1.^h\ 21.^d\ 42',8$	☌ ☾ γ de Libra	− 39′,4

2.º No mesmo dia, achados os A e B relativos ao movimento diurno de ♀

$$A=\frac{\Delta}{3}-\frac{\Delta^2}{6}+\frac{\Delta^3}{9},\qquad B=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\Delta^2-\Delta^3}{6},$$

temos para a ☌ de ♀ com η de Libra :

	AR	A	B
*	233.52,76	67,161	+196,1
♀	232.46,70	+ 192	× 0,981
	66,06	67,353	192

66060 | 67357 → $0^d,981$ 66060 | 67353 → $0^d,9808 = 23^h.32',4$

	DC	A	B	A corr.
*	—15.10,97	—16,721	+117,2	—16,606
♀	—16. 1,71	+ 115	× 0,981	× 0,981
	— 16,29	—16,606	115	—16,29
	—16.18,00			
	+15.10,97			
	— 67,03			

Assim :

Tempo	Phenomeno	Diff. de DC.
$1^d.23^h.32',4$	☌ ♀ η de Libra	— 67',0

3.º No dia 2 do mesmo mez a interpolação dá

Dias	AR ♀	DC ♀
1	232.46,70	—16. 1,71
2	233.54,06	16.18,31
3	235. 1,80	16.34,66
4	236. 9,93	16.50,75

Donde se tiram os *a* e *b* respectivos

$$a=\frac{\Delta}{24}-\frac{\frac{1}{2}\Sigma^{(2)}}{48},\qquad b=\frac{1}{24}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Sigma^{(2)}}{48}.$$

E para a ☌ de ☾ com ♀ , temos , a 0^h:

AR	A—*a*	B—*b*	fact.	fact. corr.
♀ 233.54,06	*a* 2,814	*b* + 0,3	2,11	2,1146
☾ 232.56,23	A 31,135	B +26,4	× 0,9638	× 0,9638
57,83	28,321	+26,1	2, 034	2,0381
0,9638	+53	× 2,034		
	28,374	53		

DC	A—*a*	B—*a*	A—*a* corr.
♀—16.18,31	*a*—0,687	*b* + 0,2	—4,902
☾—15. 9,18	A—5,660	B+35,1	× 2,038
— 9,99	—4,973	+34,9	—9, 99
—15.19,17	+71	×2,038	
+16.18,31	—4,902	71	
+ 59,14			

Assim:

Tempo	Phenomeno	Diff. de DC
$2^d. 2^h. 2',3$	☌ ☾ ♀	+59',1

33. Tambem se annunciam entradas do Sol nos Signos do Zodiaco; e, em algumas Ephemerides, a sua entrada em nodos de planetas.

Em qualquer destas especies basta dividir a differença entre a longitude do signo, ou do nodo, e a do Sol mais proxima, pelo movimento horario deste em longitude: o quociente será, em horas, o tempo em que tem logar aquella longitude. Mas o calculo é tão simples, que nem damos exemplo delle.

ARTIGO V.

Occultações de planetas e estrellas pela Lua.

34. NÃo trataremos agora desta parte, por julgarmos mais conveniente ajuntal-a aos Eclipses do Sol.

PAGINA III.

ARTIGO I.

Longitudes, latitudes, parallaxes e semidiametros horisontaes, dos planetas.

35. Os logares heliocentricos dos planetas calcúlam-se pelas taboas respectivas para o meio dia medio do meridiano do Observatorio de Coimbra.

Para os de Mercurio, Venus, e Marte, servem actualmente as Taboas de Lindenau, cuja disposição e uso vem claramente explicados nas respectivas introducções (*).

As épochas dellas correspondem ao meio dia medio do 1.º de Janeiro, para os annos bissextos; e ao meio dia medio de 31 de Dezembro do anno precedente, para os annos communs. Os calculos devem fazer-se accrescentando ás épochas o que pertence á differença de meridianos, que para Coimbra é $1^h.16'.33''$ (**).

Para os de Jupiter, Saturno, e Urano, servem as taboas de Bouvard, cuja disposição e uso tambem estão claramente explicados na sua

(*) As taboas de Marte *de Monteiro* citadas com louvor na introducção das de Lindenau são as do nosso insigne astronomo o Sr. J. Monteiro da Rocha; sem embargo da naturalidade hespanhola, que ali inexactamente se suppõe ao seu auctor.

(**) Nas taboas de Mercurio os argumentos II, III, ... são expressos no seu medio movimento diurno como unidade. Assim, se para a époclia n'um anno o argumento em gráos é M°, e $m°$ o seu medio movimento diurno; toma-se o argumento

$$\text{argum.} = \frac{M}{m} = A;$$

e na épocha do anno seguinte será

$$\text{argum.} = A + 365 - k \cdot \frac{360}{m} = A',$$

designando k um inteiro tal que torne $A' < \frac{360}{m}$.

introducção. Os calculos devem fazer-se acerescentando ás epochas o que pertence ás differenças d'origem e de meridiano, que para Coimbra são $5^h.29'.86''$ decimaes.

36. Calculados os logares heliocentricos, é necessario passar para as longitudes e latitudes geocentricas, e para a parallaxe: do que vamos tratar.

1.° *Methodo.* Seja (fig. 2) P o centro do planeta; P_1 a sua projecção na ecliptica; P_1D uma perpendicular a $\odot$♁. E façamos:

long. hel. da ♁, contada d'occ. a or.	$\text{♈}\odot\text{♁} = \text{♁}$
long. hel. do planeta, no mesmo sentido,	$\text{♈}\odot P_1 = P$
latit. hel. do planeta	$P\odot P_1 = \lambda$.
raio vector do planeta	$P\odot = r$
distancia do Sol á Terra	$\odot\text{♁} = s$
longit. geoc. do planeta	$\text{♈}\text{♁}P_1 = L$
latit. geoc. do planeta	$P\text{♁}P_1 = l$
elongação	$\odot\text{♁}P_1 = E$
e	$\text{♁}D = R.$

A figura dá

$$R = s - r\cos\lambda\,.\cos(P - \text{♁}),\ \text{tang}\,E = \frac{r\cos\lambda\,.\,\text{sen}\,(P-\text{♁})}{s - r\cos\lambda\,.\cos(P-\text{♁})},$$

$$\text{ou}\ R = s + r\cos\lambda\,.\cos(\odot - P),\ \text{tang}\,E = \frac{r\cos\lambda\,.\,\text{sen}\,(\odot-P)}{s + r\cos\lambda\,.\cos(\odot-P)},$$

por ser $\text{♁} = 180 + \odot$:

e depois $L = \odot - E.$

Estas equações dão a longitude geocentrica, quando se conhecem $P, \lambda, r, \odot, s$. E dellas se vê que o valor absoluto de E deverá tirar-se de $\odot$ ou ajuntar-se a $\odot$, conforme fôr $\odot - P < 180°$ ou $\odot - P > 180°$.

Se R fôr negativo, como acontece em $P_{,,}$, deverá tomar-se por E o supplemento $\odot\text{♁}P_{,,}$ de $D_{,}\text{♁}P_{,,}$: o que tambem mostra a figura, por ser então nella $L = \text{♈}\text{♁}\odot - \odot\text{♁}P_{,,}$ (*).

(*) Quando n'uma expressão da fórma

$$\text{tang}\,F = \frac{N}{D}$$

N muda de sinal, tambem deve mudar o sinal de F; porque tang F passa por o.

E quando D muda de sinal, deve tomar-se o supplemento de F; porque tang F passa por ∞.

Assim E será positivo ou negativo, conforme fôr $\pm$ o sinal do numerador de tang E; e será agudo ou obtuso, conforme fôr $\pm$ o sinal do denominador de tang E.

Em quanto á latitude, é

$$\text{tang}\, l = \frac{r \,\text{sen}\, \lambda}{P_1 ♂} = \frac{r \,\text{sen}\, \lambda \,\text{sen}\, E}{r \cos \lambda \,.\, \text{sen}\, (☉ - P)}, \text{ ou tang}\, l = \frac{r \,\text{sen}\, \lambda \cos E}{R}.$$

Finalmente a parallaxe horisontal é

$$\pi = \text{parall. } ☉ \times \frac{s}{P♂} = \text{parall. } ☉ \times \frac{s \cos l \cos E}{R},$$

ou $$\pi = \text{parall. } ☉ \times \frac{s \cos l \,\text{sen}\, E}{r \cos \lambda \,.\, \text{sen}\, (☉ - P)}.$$

Assim as equações

$$\left.\begin{array}{l} R = s + r \cos\lambda \,.\, \cos (☉ - P),\ \text{tang} E = \dfrac{r \cos \lambda \,.\, \text{sen}(☉ - P)}{R},\ L = ☉ - E \,..\, (1) \\ \text{tang}\, l = \dfrac{r \,\text{sen}\, \lambda \cos E}{R},\qquad \text{ou tang}\, l = \dfrac{\text{tang}\, \lambda \,\text{sen}\, E}{\text{sen}\, (☉ - P)} \,..\, (2) \\ \pi = \text{parall. } ☉ \times \dfrac{s \cos l \cos E}{R},\ \text{ou } \pi = \text{parall. } ☉ \times \dfrac{s \cos l \,\text{sen}\, E}{r \cos \lambda . \text{sen}\, (☉ - P)} \,..\, (3) \end{array}\right\} (a)$$

dão a longitude e latitude geocentricas e a parallaxe horisontal, quando são conhecidas as coordenadas do Sol e as heliocentricas do planeta.

Nos planetas superiores póde ser $R = o$; e então é necessario usar para l e π das segundas das formulas (2) e (3).

37. 2.° *Methodo*. Abaixe-se de ♂ (fig. 3) a perpendicular ♂F so-

bre $\odot P_1$: e, além das denominações do n.º precedente, seja

$$\text{parall. annua} \quad \odot P_1 ♂ = p \quad ;$$
$$\text{e} \qquad P_1 F = \rho.$$

A figura dá

$$\rho = r\cos\lambda + s\cos(\odot - P)\,,\ \operatorname{tang} p = \frac{s\ \operatorname{sen}(\odot - P)}{\rho}\,,\ L = P + p.$$

por ser $\quad 360^\circ = ♈ ♂ P_1 + ♈ ♂ I + I ♂ P_1 = 360^\circ - L + P + p.$

O valor absoluto de p deverá ajuntar-se a P, ou tirar-se de P, conforme fôr $\odot - P < 180^\circ$, ou $\odot - P > 180^\circ$.

É tambem

$$\operatorname{tang} l = \frac{r\ \operatorname{sen}\lambda}{P_1 ♂} = \frac{r\ \operatorname{sen}\lambda\cos p}{\rho}\,,\ \text{ou}\ \operatorname{tang} l = \frac{r\ \operatorname{sen}\lambda\ \operatorname{sen} p}{F ♂} = \frac{r\ \operatorname{sen}\lambda\ \operatorname{sen} p}{s\ \operatorname{sen}(\odot - P)}\,,$$

$$\pi = \text{parall.}\ \odot \times \frac{s}{♂ P} = \text{parall.}\ \odot \times \frac{s\cos l\cos p}{\rho} = \text{parall.}\ \odot \times \frac{s\cos l\ \operatorname{sen} p}{s\ \operatorname{sen}(\odot - P)}.$$

Assim as equações

$$\left.\begin{array}{l}
\rho = r\cos\lambda + s\cos(\odot - P),\ \operatorname{tang} p = \dfrac{s\ \operatorname{sen}(\odot - P)}{\rho},\ L = P + p \ \ldots\ldots (1') \\[2ex]
\operatorname{tang} l = \dfrac{r\ \operatorname{sen}\lambda\cos p}{\rho}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} l = \dfrac{r\ \operatorname{sen}\lambda\ \operatorname{sen} p}{s\ \operatorname{sen}(\odot - P)} \ \ldots (2') \\[2ex]
\pi = \text{parall}\ \odot \times \dfrac{s\cos l\cos p}{\rho},\ \text{ou}\ \pi = \text{parall.}\ \odot \times \dfrac{\cos l\ \operatorname{sen} p}{\operatorname{sen}(\odot - P)} \ \ldots (3')
\end{array}\right\} (a')$$

dão as longitudes e latitudes geocentricas e a parallaxe horisontal, como davam as formulas (a) (*).

(*) O calculo das expressões (3') e (3) póde tornar-se um pouco mais facil pondo $\frac{const.}{s}$ em logar de parall. $\odot$; onde *const.* é a parallaxe do $\odot$ correspondente á distancia 1.

As expressões (3') acham-se com esta forma na advertencia que precede as Taboas de Marte juntas á Ephemeride de 1804.

Nos planetas inferiores póde ser $\rho = 0$; e então é necessario usar para l e π das segundas das formulas (2′) e (3′).

38. 3.° *Methodo*. O triangulo ☉P₁ ♁ dá

$$\frac{s + r\cos\lambda}{s - r\cos\lambda} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(p + E)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(p - E)} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(☉ - P)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(p - E)}.$$

Assim as formulas

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang}\,\frac{1}{2}(p - E) = \text{tang}\,\frac{1}{2}(☉ - P)\,.\,\dfrac{s - r\cos\lambda}{s + r\cos\lambda},\ \frac{1}{2}(p + E) = \frac{1}{2}(☉ - P), \\ \text{dão} \qquad p = \frac{1}{2}(p + E) + \frac{1}{2}(p - E),\ E = \frac{1}{2}(p + E) - \frac{1}{2}(p - E). \end{array}\right\}(a'')$$

Depois teremos L pela terceira formula de (1) ou de (1′); e l e π pelas formulas (2) e (3) de (a), ou (2′) e (3′) de (a').

Para facilitar o calculo da primeira das formulas (a'') podemos introduzir um angulo auxiliar, e substituir em logar della as duas:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{r\cos\lambda}{s},\ \text{tang}\,\frac{1}{2}(p - E) = \text{tang}\,\frac{1}{2}(☉ - P)\ \text{tang}\,(45° - \varphi).$$

Se tomarmos ☉—P positivo ou negativo, de modo que seja sempre $< 180°$; tomaremos $\frac{1}{2}(p - E)$ agudo e com o sinal da sua tangente, quando procurarmos E para os planetas inferiores e p para os superiores. E porque este sinal é o mesmo que o de $\frac{1}{2}(☉ - P)$ para os planetas inferiores, e contrario ao de $\frac{1}{2}(☉ - P)$ para os superiores; como mostra o sinal $\pm$ de $s - r\cos\lambda$, ou o valor de $\varphi <$ ou $> 45°$: vê-se que para ter E nos inferiores, e p nos superiores, deveremos tirar sempre o valor absoluto de $\frac{1}{2}(p - E)$ do absoluto de $\frac{1}{2}(☉ - P)$, e dar a E, ou a p, o sinal de ☉—P.

Mas se tomarmos ☉—P seguidamente desde 0° até 360°; tomaremos sempre $\frac{1}{2}(p - E)$ da especie de $\frac{1}{2}(☉ - P)$, e dar-lhe-hemos o sinal + nos planetas inferiores, e — nos superiores. Por onde se vê que deveremos sempre subtrahir o valor absoluto de $\frac{1}{2}(p - E)$ do valor de $\frac{1}{2}(☉ - P)$, para ter E nos planetas inferiores e p nos superiores.

39. Comparemos entre si estes tres methodos.

O angulo E passa por todos os valores nos planetas superiores;

como é visivel, e como resulta da expressão de tang E na qual póde ser R=o: mas nos planetas inferiores não excede certos limites menores do que 90°, que são, em gráos, 50° para Venus, e 30° para Mercurio.

Pelo contrario o angulo p passa por todos os valores nos planetas inferiores, por isso que nelles póde ser $\rho = 0$: mas nos planetas superiores não excede certos limites menores do que 90°, que são, em gráos, 48° para Marte, 12° para Jupiter, 7° para Saturno, e 4° para Urano (*).

Donde resulta que, usando para os planetas superiores das formulas (a') e para os inferiores das formulas (a), se não tem de attender, no calculo de p ou E, aos angulos obtusos; e que ha além disso a vantagem de ser pequena a amplitude do arco correspondente a tang p ou tang E, que se procura nas taboas, ou ao menos de se usar quasi sempre das entradas superiores das mesmas taboas; vantagem que não é para desattender, quando se calcúlam muitos logares.

As formulas (a''), sem terem o inconveniente de ser necessario considerar angulos agudos e obtusos, tanto para os planetas superiores como para os inferiores, tambem não tem a vantagem da pequenez d'amplitude do angulo $\frac{1}{2}(p-E)$, dado pela sua tangente.

(*) Fazendo

$$\frac{r\cos\lambda}{s} = A\text{, ou } \operatorname{tang} E = \frac{A \operatorname{sen}(☉-P)}{1 + A\cos(☉-P)},$$

acha-se, pela condição do maximum em ordem a ☉—P,

$$\cos(☉-P) = -A\text{, } \operatorname{tang} E = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}};$$

e por conseguinte
$$A = \operatorname{sen} E = \frac{r\cos\lambda}{s},$$

que só dá sen E < 1, ou E real, nos planetas inferiores.

Do mesmo modo pela condição do maximum de p acha-se

$$\operatorname{sen} p = \frac{s}{r\cos\lambda},$$

que só dá sen $p < 1$, ou p real, nos planetas superiores.

Destas equações resultam para os planetas inferiores os limites de E, e para os superiores os limites de p.

No entretanto a preferencia de um dos systemas (a), (a'), (a''), depende principalmente do habito do calculador (*).

40. Cumpre advertir que, sendo $20''$, pertencentes á aberração

---

(*) Differenciando as expressões $\log \operatorname{tang} x$, $\log \operatorname{sen} x$, $\log \cos x$, acha-se em minutos

$$\left.\begin{array}{r} \delta x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2 \operatorname{sen} 1'} \cdot k\delta \log \operatorname{tang} x,\ \delta x = \dfrac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{sen} 1'} \cdot k\delta \log \operatorname{sen} x, \\ \delta x = -\dfrac{\cot x}{\operatorname{sen} 1'} \cdot k\delta \log \cos x \end{array}\right\} \ldots (\alpha),$$

sendo os logarithmos tabulares, e k o módulo 2,30 etc.

Designemos por δ_1 a parte de δ proveniente dos desprezos das taboas dos logarithmos no calculo da segunda das formulas (1) de (a), e por δ' a parte proveniente do erro de R, devido aos desprezos das mesmas taboas no calculo da primeira daquellas formulas. Será

$$\delta \log \operatorname{tang} E = \delta_1 \log \operatorname{tang} E + \delta' \log \operatorname{tang} E,$$

ou

$$\delta \log \operatorname{tang} E = \delta_1 \log \operatorname{tang} E - \frac{\delta R}{kR};$$

o que dá, em virtude da primeira equação (α),

$$\delta E = \frac{\operatorname{sen} 2E}{2 \operatorname{sen} 1'}\left(k\delta_1 \log \operatorname{tang} E - \frac{\delta R}{R}\right),$$

ou

$$\delta E = \frac{k \operatorname{sen} 2E}{2 \operatorname{sen} 1'} \cdot \delta_1 \log \operatorname{tang} E - \frac{\operatorname{sen}^2 E}{r \cos \lambda \operatorname{sen} (☉ - P) \operatorname{sen} 1'} \cdot \delta R.$$

Do mesmo modo, attendendo aos erros tabulares de l e de R, e ao erro de E, a primeira e segunda das formulas (2) dão, em virtude das ultimas equações (α),

$$\delta \log \operatorname{tang} l = \delta_1 \log \operatorname{tang} l - \frac{\delta R}{kR} - \frac{\operatorname{tang} E \operatorname{sen} 1'}{k} \cdot \delta E,$$

e

$$\delta \log \operatorname{tang} l = \delta_1 \log \operatorname{tang} l + \frac{\cot E \operatorname{sen} 1'}{k} \cdot \delta E;$$

do Sol, já subtrahidos das épochas, como se póde vêr nas taboas solares de Delambre; devem accrescentar-se $20''$ ás longitudes do Sol, quando se quer passar dos logares heliocentricos dos planetas para os geocentricos.

Depois é necessario applicar a aberração, dada pelas taboas dos planetas, ás longitudes geocentricas calculadas por qualquer dos methodos precedentes (*).

---

e substituindo estas expressões na primeira das equações (α), resulta

$$\delta l = \frac{k \operatorname{sen} 2l}{2 \operatorname{sen} 1'} \cdot \delta_1 \log \operatorname{tang} l - \frac{\operatorname{sen} 2l}{2R \operatorname{sen} 1'} \cdot \delta R - \frac{\operatorname{sen} 2l \operatorname{tang} E}{2} \cdot \delta E,$$

$$\delta l = \frac{k \operatorname{sen} 2\, l}{2 \operatorname{sen} 1'} \cdot \delta_1 \log \operatorname{tang} l + \frac{\operatorname{sen} 2l \cot E}{2} \cdot \delta E.$$

Semelhantemente as formulas (3) dão

$$\delta\pi = k\pi\delta_1 \log \pi - \pi \operatorname{sen} 1' \left(\operatorname{tang} l\, \delta l + \operatorname{tang} E\, \delta E + \frac{\delta R}{R \operatorname{sen} 1'}\right),$$

$$\delta\pi = k\pi\delta_1 \log \pi - \pi \operatorname{sen} 1' (\operatorname{tang} l\, \delta l - \cot E\, \delta E).$$

Por onde se vê que, no caso de ser R muito pequeno ou E muito grande, é mais exacto usar das segundas das formulas (2) e (3); e que o contrario tem logar no caso de ser E muito pequeno.

O mesmo processo applicado ás formulas (a') dá resultados analogos, nos quaes se podem applicar a ρ e p as reflexões que acabamos de fazer a respeito de R e E.

Em fim as formulas (a'') dão

$$\delta[\tfrac{1}{2}(p-E)] = \frac{k \operatorname{sen}(p-E)}{2 \operatorname{sen} 1'} \cdot \delta_1 \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-E).$$

A comparação de todos estes resultados mostra que, em quanto á exactidão, não é grande a differença entre os systemas (a), (a'), (a''); mas que esta mesma differença concorda com as vantagens, que elles offerecem em quanto á commodidade.

(*) Em logares seguidos é muito commodo exprimir a aberração em funcção da parallaxe π, e do movimento diurno geocentrico m; como fez o Sr. Monteiro nas suas taboas dos planetas.

Exemplos. No 1.º de Janeiro de 1848 ao meio dia medio temos

Seja T^h o anno sydéral $365^d,256384$ reduzido a horas; θ^s o numero de segundos de tempo que a luz gasta em percorrer a media distancia do Sol á terra; e a'' a constante da aberração, em segundos.

Temos

$$\frac{T^h}{\theta^s} = \frac{360^\circ}{a''},$$

que dá
$$a'' = \frac{360.\theta}{T}, \ \theta^s = \frac{T.a}{360}.$$

E a aberração do planeta é

$$-\frac{Rm\theta}{86400} = - \mathit{const.} \times \frac{\theta}{86400} \times \frac{m}{\pi};$$

sendo m o seu movimento diurno geocentrico, π a sua parallaxe horisontal, R a sua distancia á terra, e *const.* a parallaxe do Sol correspondente á media distancia.

Se fizermos $a'' = 20''$, e *const.* $= 8'',6$, será

$$\text{aberr.} = -0'',0056366 7\,R\,m = -0',0008079 . \frac{m}{\pi}.$$

Suppondo porém a constante da aberração $20'',253$, a formula é

$$\text{aberr.} = -0',0008181 . \frac{m}{\pi}.$$

Para Urano póde fazer-se por esta formula uma taboa semelhante, com as entradas π desde $0',006$ até $0',009$, e m desde $0'$ até $4'$.

Mas quando para Mercurio se calcúlam os logares de seis em seis dias, não se póde ter o movimento diurno com sufficiente approximação. E então é melhor usar, para a aberração em longitude, da taboa de Lindenau (Taboas de Mercurio, taboa XXIV), que contém as tres partes: uma dependente da elongação, outra da parallaxe annua, e outra da longitude geocentrica.

para Mercurio, tirando das Taboas de Lindenau o seu logar heliocentrico, e usando do logar do Sol dado na Ephemeride:

☉..	$280°.17',89$	λ—	$0°,12',203$
P..	$228 . 9 ,77$	r..	$0 ,4539718$
☉ — P..	$52 . 8 ,12$	s..	$0 ,9832403$
$\frac{1}{2}$(☉—P)..	$26 . 4 ,06$		

Com estes dados acha-se por cada um dos tres methodos o seguinte:

Longitudes 1.° *Methodo.*

log r	9.6570290	log r cos λ	9.6570263
log cos λ	9.9999973	log sen (☉—P)	9.8973316
log r cos λ	9.6570263	Cl. R	9.8989799
log cos (☉—P)	9.7880260	log tang E	9.4533378
log n	9.4450523	— E	—15.51,31
n+	0,2786457	☉	280.17,89
s	0,9832403	L	264.26,58
λ	1,2618860	aberr.	—0,65
		Long. geoc.	264.25,93

2.° *Methodo.*

log s	9.9926596	log s	9.9926596
log cos (☉—P)	9.7880260	log sen (☉—P)	9.8973316
	9.7806856	Cl. ρ	9.9757275
	+0,6035116	log tang p	9.8657187
r cos λ	0,4539692	p	36.16,81
ρ	1,0574808	P	228. 9,77
		L	264.26,58

3.° *Methodo.*

log r cos λ	9.6570263	log tang $\frac{1}{2}$(☉—P)	9.6894823
Cl. s	0,0073404	log tang (45°— φ)	9.5661582
	9,6643667	log tang $\frac{1}{2}$ (p—E)	9.2556405
— φ	—24°.46'.59'',2	$\frac{1}{2}$ (p—E)	10.12,75
+	+45	$\frac{1}{2}$ (p+E)	26. 4,06
45° — φ	+20 .13. 0 ,8		

Donde resultam os mesmos valores de E e p. E por qualquer dos dous primeiros methodos se póde continuar o calculo da longitude, formando ☉—E, ou P+p, e subtrahindo a aberração.

Latitudes 1.º *Methodo.*

	1.º		2.º
log r	9.6570290	log tang λ	7.5502064—
log sen λ	7.5502037—	log sen E	9.4364926
log cos E	9.9831548	Cl. sen (☉—P)	0,1026684
Cl. R	9.8989799	log tang l	7.0893674—
log tang l	7.0893674—	l	—0°.4',22
l	—0°.4',22	aberr	+0 ,05
		lat. geoc	— 0.°4',17

2.º *Methodo.*

	1.º		2.º
log r	9.6570290	....	9.6570290
log sen λ	7.5502037—	....	7.5502037—
Cl. ρ	9.9757275	Cl s	0,0073404
log cos p	9.9064072	Cl l sen (☉—P)	0,1026684
log tang l	7.0893674—	log sen p	9.7721258
		log tang l	7.0893673—

Parallaxes 1.º *Methodo.*

	1.º		2.º
log parall. ☉	9.17319	....	9.17319
log s	9.99266	....	9.99266
log cos l	0,00000	log sen E	9.43649
log cos E	9.98315	Cl. r cos λ	0,34297
Cl. R.	9.89898	Cl. (☉—P)	0,10267
log π	9.04798	log π	9.04798
	0',112		

2.º *Methodo.*

	1.º		2.º
log parall. ☉	9.17319	....	9.17319
log s	9.99266	log cos l	0,00000
log cos l	0,00000	log sen p	9.77213
log cos p	9.90641	Cl. sen (☉—P)	0,10267
Cl ρ	9.97573	log π	9.04799
log π	9.04799		

41. Em quanto aos semidiametros dos planetas, deduzem-se da sua relação constante com as parallaxes,

$$\text{semid.} = \text{parall.} \times \frac{\text{raio do planeta}}{\text{raio da terra}}.$$

(Vej. a *Explicação das Ephemerides* n.° 34)

ARTIGO II.

Ascensões rectas e declinações.

42. SEja (fig. 4) ♈E a Ecliptica, ♈Q o Equador, S o astro; e façamos

$$S♈E = \varphi,\ \text{obliq. } E♈Q = \omega.$$

Os triangulos rectangulos ♈SL, ♈SA, dão

$$\text{sen}\, l = \cot\varphi \,\text{tang}\,\lambda,\ \cot ♈S = \frac{\cos\varphi}{\text{tang}\, l} = \frac{\cos(\varphi+\omega)}{\text{tang}\, a},\ \text{sen}\, a = \cot(\varphi+\omega)\,\text{tang}\, d:$$

d'onde resultam as formulas

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,\lambda}{\text{sen}\, l},\ \text{tang}\, a = \frac{\text{tang}\, l \cos(\varphi+\omega)}{\cos\varphi},\ \text{tang}\, d = \text{tang}(\varphi+\omega)\,\text{sen}\, a \,..\, (1),$$

que fazem conhecer a ascensão recta e declinação, quando são dadas a longitude e latitude. E inversamente, quando se conhece a ascensão recta e declinação, fazendo $\varphi+\omega=\psi$, as mesmas formulas dão

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\text{tang}\, d}{\text{sen}\, a},\ \text{tang}\, l = \frac{\text{tang}\, a \cos(\psi-\omega)}{\cos\psi},\ \text{tang}\,\lambda = \text{tang}(\psi-\omega)\,\text{sen}\, l \,..\, (2).$$

Exemplo. No 1.° de Janeiro de 1848 a Ephemeride dá, para Mercurio:

$$l = 263{,}25{,}77 \quad \lambda = -0^{\circ}.4',09 \quad \omega = 23.^{\circ}.27',533$$

e com estes dados achamos

l. tang λ	7.0754497—	l. tang l	1.0108571	l. sen a	9.9975567—
Cl. sen l	0.0020558—	l. cos $(\varphi+\omega)$	9.9623076	l. tang $(\varphi+\omega)$	9.6388693
l. tang φ	7.0775055	Cl. cos φ	0,0000003	l. tang d	9.6364260—
φ	4',109	l. tang a	0,9731650	d	—23.24,58
ω	23.27,533	a	180+83.55,68		
$\varphi+\omega$	23.31,642				

Assim é $a = 263°.55',68$ $d = -23.°24',58.$

43. Para formar uma taboa, que facilite o calculo das ascensões rectas e declinações, poderiamos servir-nos da equação

$$\text{sen}\, d = \text{sen}\, \omega \cos\lambda\, \text{sen}\, l + \cos\omega\, \text{sen}\, \lambda\,,$$

que dá o triangulo CPS, no qual é

$$CP = \omega\,,\ CS = 90° - \lambda\,,\ PS = 90° - d\,,\ C = 90° - l\,,\ P = 90° \pm a\,;$$

porque desta equação, fazendo

$$d = 90° - d',\ l = 90° - l',\ \omega = 90° - \omega',\ \delta = \omega' - \lambda\,,\ \Sigma = \omega' + \lambda\,,$$

tira-se

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} d' = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\delta + \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} l' - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} l' (\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\delta + \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\Sigma) \ldots\ldots (3):$$

o que adiante se verá em outro logar, onde diremos o modo como se poderia usar da taboa formada para esta equação.

Depois a equação

$$\cos a = \frac{\cos l \cos\lambda}{\cos d} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

daria a por meio das taboas da logarithmos (*).

(*) O Sr. Monteiro na Ephemeride de 1805 deu a taboa auxiliar II para o calculo da declinação, analoga a I, e da qual por isso mostraremos a formação no artigo relativo ás paginas VIII e IX da Ephemeride.

E na *Explicação* da mesma Ephemeride deu dous methodos para o calculo da ascensão recta, fundados nas formulas seguintes:

O triangulo CPS (fig. 4) dá

$$60\, \text{sen}\, a = \frac{60 \cos\omega\, \text{sen}\, d - 60\, \text{sen}\, \lambda}{\text{sen}\, \omega \cos d}\,;$$

41. Mas pódem formar-se taboas de duas entradas, nas quaes entrando com l e λ se ache immediatamente a ou d: o que fez o Sr. Monteiro nas taboas, de que já fallámos no n.° 8. E póde augmentar-se o intervallo destas taboas, e tornal-as menos volumosas e mais exactas, attendendo ás differenças 2.as; como vamos vêr.

Seja $$N = f(l, \lambda)$$

uma ascensão recta, ou uma declinação, correspondente á longitude l e á latitude λ.

Se a longitude se tornar em $l + h$, tornar-se-ha N em

$$f(l+h, \lambda) = f(l, \lambda) + Ah + Bh^2.$$

E se depois λ se tornar em $\lambda + k$, tornar-se-ha

$$f(l + h, \lambda) \quad \text{em} \quad N' = f(l + h, \lambda + k),$$

ou

$$N' = N + \alpha k + \beta k^2 + \begin{pmatrix} A + \varphi \cdot k \\ + r \cdot k^2 \end{pmatrix} h + (B + sk)\, h^2;$$

---

e $$60 \cos a = \frac{60 \cos l \cos \lambda}{\cos d} = 60 \cos l\, (1 + \sec d - 1 - 2 \sec d \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\lambda),$$

ou $$60 \cos a = 60 \cos l\, [1 + \operatorname{tang} d \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} d - 2\, (1 + \operatorname{tang} d \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} d) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\lambda]$$

Da expressão de 60 sen a resulta o primeiro dos dous methodos expostos no n.° 85 da *Explicação da Ephemeride* de 1805; e da expressão de 60 cos a resulta o segundo methodo exposto no n.° 87 da mesma *Explicação*.

As taboas auxiliares necessarias para o calculo de a por estas expressões dão o seguinte:

IV	da Ephem. de 1804	dá	$60 \operatorname{sen} \lambda$, $60 \operatorname{sen} a$, $60 \operatorname{sen} (90 - l)$, $60 \operatorname{sen} (90 - a)$
III	da Ephem. de 1805		$60 \cos \omega \operatorname{sen} d$
IV	»		$\dfrac{1}{\operatorname{sen} \omega \cos d}$
V	»		$\sec d - 1$
VI	»		$2 \sec d \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\lambda$.

No primeiro methodo poderia prescindir-se da taboa III, e tornar o calculo mais facil, dando á equação respectiva a forma seguinte:

$$60 \operatorname{sen} a = 60 - \frac{60 \operatorname{sen} (\omega - d) + 60 \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \omega \cos d},$$

que se calcularia pelas taboas IV da Ephemeride de 1804 e IV da Ephem. de 1805; e que facilmente se exprimiria em $\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a'$, $\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \lambda'$, $\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \Sigma$, $\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \delta$, pondo

$$a = 90^\circ - a',\ d = 90^\circ - d',\ \lambda = 90^\circ - \lambda',\ \omega + d' = \Sigma,\ \omega - d' = \delta:$$

sendo α e β para N, em relação a λ, o mesmo que são A e B, em relação a l; e sendo φ e r para A, e s para B, o mesmo que são α e β para N, e α para N.

Esta formula escreve-se mais commodamente assim:

$$N' = N + (A + Bh)\,h + (\alpha + \beta k + \varphi h + rhk + sh^2)\,k \;\ldots\ldots\; (5).$$

Se tivessemos começado por desenvolver em ordem a k, e depois em ordem a l, achariamos

$$N' = N + (\alpha + \beta k)\,k \;\; + (A + Bh + \psi k + r'k^2 + s'hk)\,h,$$

onde deveria ser

$$\varphi = \psi,\; r = r',\; s = s'.$$

45. Desprezando as variações das differenças segundas, fica

$$N' = N + (\alpha + \beta k)\,k \;\; + (A + Bh + \psi k)\,k \;\ldots\ldots\ldots\; (6);$$

e então ψ é dado pelas differenças encruzadas.

Com effeito o termo de α, no qual entram as differenças 1.as, é $\frac{\Delta}{n} = \frac{a' - a}{n}$; e o do α seguinte é $\frac{\Delta'}{n} = \frac{b' - b}{n}$; logo

$$\psi = \frac{\frac{\Delta'}{n} - \frac{\Delta}{n}}{m} = \frac{a + b' - (a' + b)}{mn};$$

sendo n o intervallo das funcções no sentido das latitudes, e m o intervallo das funcções no sentido das longitudes; o que depende das differenças encruzadas, como se vê noquadro seguinte:

	n		
	a	a'	a''
m	b	b'	b''
	c	c'	c''

Sendo pois a, a', a'', tres funcções correspondentes á longitude l, e ás latitudes consecutivas λ, λ', λ''; e a, b, c, tres funcções correspondentes á latitude λ, e ás tres longitudes consecutivas l, l', l''; teremos:

$$\alpha = \frac{a'-a}{n} - \frac{(a''-a')-(a'-a)}{2n}, \quad \beta = \frac{(a''-a')-(a'-a)}{2n^2},$$

$$A = \frac{b-a}{m} - \frac{(c-b)-(b-a)}{2m}, \quad B = \frac{(c-b)-(b-a)}{2m^2},$$

$$\psi = \frac{b'-b-(a'-a)}{mn}, \quad \text{ou } \psi = \frac{(a+b')-(a'+b)}{mn}.$$

Supponhamos que as differenças procedem de gráo em gráo, tanto para as longitudes, como para as latitudes; e que se toma $10'$ por unidade. Neste caso é $m = n = 6$; e para usar da taboa assim formada devemos tomar por h e k a decima parte das differenças entre l e a longitude proposta, e entre λ e a latitude proposta, expressas em minutos.

Por exemplo, se a ascensão recta ou declinação procurada corresponde á longitude $l + 12'$, e á latitude $\lambda + 11',6$; é $h = 1,2$, e $k = 1,16$.

46. A taboa das ascensões rectas de nosso sabio mestre o Sr. A. H. de Caria e Moura, que vimos desacompanhada das formulas por que fôra construida, parece ser formada pela formula (6), segundo a doutrina do n.° precedente. E como em cada linha d'uma mesma pagina della se fizeram entrar as ascensões rectas, e os numeros auxiliares, correspondentes a duas latitudes; tomou-se por ψ commum a ambas a semisomma dos dous valores de ψ que respectivamente lhes correspondem, por differirem pouco um do outro (*).

Vê-se pois que esta taboa se formaria calculando as funcções com intervallos superiores aos do Sr. Monteiro, tomando as differenças encruza-

---

(*) Esta taboa foi calculada com a obliquidade da ecliptica $23°.27'.50''$; para as latitudes comprehendidas entre $-6°$ e $+6°$. Mas, se a obliquidade é $23°.27'.50''-\delta\omega$, as formulas (1), differenciadas em ordem a ω, dão

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{sen} l}, \quad \delta a = \frac{\operatorname{tang} l \operatorname{sen}(\varphi+\omega)\cos^2 a}{\cos\varphi}\,.\,\delta\omega = C\delta\omega,$$

ou

$$\delta a = \operatorname{tang} d \cos a \,.\, \delta\omega.$$

O coefficiente C acha-se na ultima columna da taboa com o titulo *correcção*.

das, e escrevendo, em logar das differenças 1.as, estas differenças menos ametade das 2.as (*).

47. Nas taboas de duas entradas do Sr. Monteiro attende-se ás differenças encruzadas; e desprezam-se as differenças 2.as tomadas no mesmo sentido que as 1.as, isto é, no sentido das longitudes, ou no das latitudes.

Sejam a, a', b, b', as quatro funcções. Desprezando as differenças 2.as temos

$$\alpha = \frac{a'-a}{n}, \quad A = \frac{b-a}{m}, \quad \psi = \frac{(b'+a)-(a'+b)}{mn};$$

e a formula (6) reduz-se a

$$N' = N + \frac{h}{m}(b-a) + \frac{k}{n}.\left[a'-a+\frac{h}{m}\left\{(a+b')-(a'+b)\right\}\right],$$

que é a dada na introducção das Taboas Astronomicas do Sr. Monteiro (pag. VII).

48. Uma das taboas, a das ascensões rectas ou a das declinações, é a mais interessante para achar uma destas coordenadas.

Em quanto á outra coordenada, póde o seu calculo fazer-se depois muito facilmente por meio da formula (4), que dá d quando se tem calculado a, ou inversamente.

Mas como um pequeno erro $\delta \cos d$, commettido no calculo do segundo membro da formula (4), influe muito no de d, quando d é muito pequeno, por ser

$$\delta d = -\frac{\delta \cos d}{\operatorname{sen} d};$$

e o erro de a influe muito em $\delta \cos d$, quando a differe pouco de 90° ou de 270°, por ser

$$\frac{\delta \cos d}{\delta a} = \cos d \operatorname{tang} a:$$

pódemos usar de qualquer das seguintes

$$\cot \tfrac{1}{2}(d+\lambda) = -\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega \frac{\cos \frac{1}{2}(a+l)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-l)}, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(d-\lambda) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+l)}{\cos \frac{1}{2}(a-l)} \ldots (7),$$

(*) O Sr. T. d'Aquino de Carvalho, actualmente encarregado da direcção do Observatorio, fez uma taboa semelhante para as declinações.

que são a terceira e quarta analogia de Neper, e das quaes a segunda é ordinariamente preferivel (*).

(*) Attendendo aos erros tabulares de φ e a; e applicando o processo do n.° [39 (*)], a differenciação das duas primeiras formulas (1) dá

$$\delta a = \frac{\text{sen}\, 2a}{2}\left[\frac{k}{\text{sen}\, 1'}\,\delta_1 \log\text{tang}\, a - \frac{\text{sen}\,\omega}{\cos(\varphi+\omega)\cos\varphi}\,\delta\varphi\right];$$

ou
$$\delta a = \frac{k\,\text{sen}\, 2a}{2\,\text{sen}\, 1'}\,\delta_1 \log\text{tang}\, a - \frac{k\cos a\,\text{sen}\,\lambda\,\text{sen}\,\omega}{\cos d\,\text{sen}\, 1'}\,\delta \log\text{tang}\,\varphi,$$

que resulta da precedente substituindo successivamente por $\cos(\varphi+\omega)$, $\text{tang}\,\varphi$, $\cos l\cos\lambda$, as suas expressões, tiradas da segunda e primeira das equações (1) e da equação (4).

Semelhantemente, attendendo aos erros tabulares de φ e d, e ao erro de a, a differenciação da primeira e terceira das formulas (1) dá

$$\delta d = \frac{\text{sen}\, 2d}{2}\left[\frac{k}{\text{sen}\, 1'}\,\delta_1 \log\text{tang}\, d + \frac{k\,\text{sen}\, 2\varphi}{\text{sen}\, 2(\varphi+\omega)\,\text{sen}\, 1'}\,\delta \log\text{tang}\,\varphi + \cot a\,\delta a\right].$$

As formulas, que acabamos de achar, mostram que o erro de a não póde avultar muito; mas que não acontecerá o mesmo ao de d, quando a fôr muito proximo de 0° ou de 180°, sem que d seja muito pequeno.

Neste ultimo caso é melhor usar da formula (4), que attendendo aos erros tabulares e ao erro de a, dá, em virtude da terçeira equação (α) do n.° [39 (*)],

$$\delta d = -\cot d\left[\frac{k}{\text{sen}\, 1'}\,\delta_1 \log\cos d + \text{tang}\, a\,\delta a\right].$$

Em fim, attendendo aos erros tabulares e ao erro a, a differenciação das formulas (7) dá, em virtude das equações (α) do n.° [39 (*)],

$$\delta\left(\frac{d+\lambda}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,(d+\lambda)\left\{\frac{k}{\text{sen}\, 1'}\,\delta_1 \log\cot\left(\frac{d+\lambda}{2}\right) + \frac{\cos l}{2\cos\left(\frac{a+l}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{a-l}{2}\right)}\,\delta a\right\},$$

$$\delta\left(\frac{d-\lambda}{2}\right) = +\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,(d-\lambda)\left\{\frac{k}{\text{sen}\, 1'}\,\delta_1 \log\text{tang}\left(\frac{d-\lambda}{2}\right) + \frac{\cos l}{2\,\text{sen}\left(\frac{a+l}{2}\right)\cos\left(\frac{a-l}{2}\right)}\,\delta a\right\}.$$

A comparação destes resultados mostra que a primeira das formulas (7) póde ser mais vantajosa do que a formula (4), cujo uso é perigoso, quando d é muito pequeno, ou a muito proximo de 90° ou de 270°; e que a segunda das mesmas (7) é em geral a mais vantajosa de todas, por ser sempre pequena a reducção $a-l$.

Exemplo. No 1.° de Janeiro de 1848 temos, para Mercurio:

long. $= 264°.25',77$ lat $= — 0°.4',09$ $\omega = 23°.27',533$.

Assim $h = 2,577$ $k = 0,409$ $\delta\omega = 0',3$.

E com estes dados acha-se pela taboa do Sr. A. Honorato o seguinte (*):

N	A	B	α	β	ψ	corr.
	+		—			+
263.27,82	10,880	+0,5	0,495	+0,6	—13,6	48
+28,027	+13	× 2,577	+2	×0,409	× 0,409	×0,3
— 0,202	—56	+1,3	—0,4952	+0,2	— 5,6	+14
+ 14	10,8757		× 0,409			
263.55,66	×2,577		—0,202			
	28,027					

Depois teremos, usando das formulas (4) e (7):

log cos l	8.9870871	a	263.55,66
log cos λ	9.9999997	l	264.25,77
Cl. cos a	0,9755804	$\frac{a+l}{2}$	264.10,715
log cos d	9.9626672		
d	—23.25,09	$\frac{a-l}{2}$	—0.15,055

(*) Nesta taboa $\pm$ postos antes de B e ψ, e de β, indicam só a identidade ou diversidade dos seus sinaes com os respectivos de A, e de α; isto é, mostram-se os seus valores absolutos se devem ajuntar ou tirar aos absolutos de A, e de α.

k é positivo ou negativo, conforme augmenta ou diminue as latitudes, quer austraes, quer boreaes. E por isso, quando a latitude é boreal e $< 1°$; entra-se na columna $+ 1°$, e toma-se $k = -\frac{60'-\lambda}{10}$: ou entra-se na columna $-0°$, e toma-se $k = -\frac{\lambda}{10}$.

log tang $\frac{1}{2}\omega$	9.3172817		9.3172817
log cos $\frac{a+l}{2}$	9.0061586—	log sen $\frac{a+l}{2}$	9.9977545—
Cl. sen $\frac{a-l}{2}$	2,3585946—	Cl. cos $\frac{a-l}{2}$	0,0000041
log cot $\frac{d+\lambda}{2}$—	0,6820349—	log tang $\frac{d-\lambda}{2}$	9.3150403—
$\frac{d+\lambda}{2}$	—11.44,844	$\frac{d-\lambda}{2}$	—11.40,243
$d+\lambda$	—23.29,69	$d-\lambda$	—23.20,49
$-\lambda$	+ 0. 4,09	λ	— 4,09
	d—23.25,60	d	—23.24,58

Os dous primeiros resultados não merecem confiança; por ser a muito proximo de 270°, e $a-l$ muito pequeno: mas por estas mesmas rasões o terceiro é muito exacto. Os seus erros, comparados com as formulas do n.° (48*), concordam em accusar um erro de — 0',0233 na ascensão recta.

ARTIGO III.

Passagens dos planetas pelo meridiano.

49. SEja M a ascensão recta do meridiano ao meio dia medio; m a sua variação n'uma unidade de tempo; P a ascensão recta do planeta; e a e b relativos á ascensão recta: sendo todas estas quantidades reduzidas a tempo.

Na passagem do planeta pelo meridiano a sua ascensão recta é igual á do meridiano,

$$\mathrm{M}+t+mt=\mathrm{P}+at+bt^2=\mathrm{P}+kt;$$

logo $$t=\frac{\mathrm{P}-\mathrm{M}}{1-(k-m)}=(\mathrm{P}-\mathrm{M})[1+k-m+(k-m)^2]\ldots(1);$$

desprezando os termos seguintes, por só querermos approximação até decimas de minuto.

Seja i o intervallo, em dias, que separa as épochas dos logares do planeta dados na Ephemeride. Se quizermos t em horas, será $24i$ este intervallo em horas; e limitando-nos ás differenças 2.as, teremos:

$$a = \frac{1}{15} \cdot \frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{24i} \quad , b = \frac{1}{15} \cdot \frac{\frac{\frac{1}{2}\Delta^2}{24i}}{24i},$$

$$k - m = \frac{\frac{\Delta_{,} - \frac{1}{2}\Delta^2}{i} + \frac{1}{2}\Delta^2 \cdot \frac{P - M}{24i^2}}{6 \cdot 60} - 0^h{,}00274.$$

D'onde resulta a regra seguinte para ter a correcção, que se deve ajuntar a P — M:

Tome-se $\frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{i}$ *em grãos; divida-se por* 6 *e por* 60*; tire-se* $0^h{,}00274$ *do quociente; accrescente-se o quadrado do resto, quando fôr sensivel; e multiplique-se a somma por* $(P - M)^h$.

Se fôr necessario attender a b, accrescente-se $\frac{1}{2}\Delta^2 \cdot \frac{(P-M)^h}{24i}$ a $\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2$, antes de começar o resto das operações indicadas. (Vej. os nn. 18 e 19 da *Explicação das Ephemerides*).

Exemplo. No 1.º de Janeiro de 1848 temos, para Venus:

P	15h.31'. 6'',8	$\frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{i}$	1°.7',173	+0,00311	corr. +0,46
M	18.41.10,8			—0,00274	20.49,93
P—M	20.49.56,0	$(P-M)^h$	$20^h{,}83$	—0,00037	$20^h.50'{,}4$

50. Façamos $(P-M)^h = H$, e

$$p = H.(k + k^2 - 2km), \quad q = H.(m - m^2), \quad r = Hk^2.$$

No caso de k positivo, é passag. $= H + p - q = H + c$.

E no caso de k negativo, é passag. $= H - (p - q) - 2(q - r) = H - c - c'$; tomando sempre k como positivo.

Formando taboas de c e c', póde facilitar-se o calculo da passagem. E formando uma taboa da reducção de horas a partes do dia, póde applicar-se facilmente a $\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2$ a correcção $\frac{1}{2}\Delta^2 \cdot \frac{(P-M)^h}{24i}$, dando-lhe a forma $\frac{\frac{1}{2}\Delta^2}{i} \cdot \left(\frac{P-M}{24}\right)$, e procurando naquella taboa o numero correspondente a $(P-M)^h$, para ter logo o factor $\frac{P-M}{24}$; isto quando aquella correcção influir na passagem; o que poucas vezes acontecerá, não levando a approximação além de decimas de minuto.

TABOA

de c

Argumentos : $\dfrac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{i}$, e H.

Argum. $\dfrac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{i}$

	0°.0'	10'	20'	30'	40'	50'		1°. 0'	. 10'	. 20'	. 30'	. 40'	. 50'	
Arg. H	c −	c −	c −	c −	c −	c −	diff. hor.	c +	c +	c +	c +	c +	c +	diff. hor.
1h	0',16	0',14	0',11	0',08	0',05	0',03	02.8	0',00	0',03	0',06	0',09	0',11	0',14	02.8
2	0 ,33	0 ,27	0 ,22	0 ,16	0 ,11	0 ,05	05.6	0 ,00	0 ,06	0 ,12	0 ,17	0 ,23	0 ,28	05.6
3	0 ,49	0 ,41	0 ,33	0 ,24	0 ,16	0 ,08	08.3	0 ,01	0 ,09	0 ,17	0 ,26	0 ,34	0 ,42	08.3
4	0 ,65	0 ,54	0 ,43	0 ,32	0 ,21	0 ,10	11.1	0 ,01	0 ,12	0 ,23	0 ,34	0 ,45	0 ,57	11.1
5	0 ,82	0 ,68	0 ,54	0 ,40	0 ,27	0 ,13	13.8	0 ,01	0 ,15	0 ,29	0 ,43	0 ,57	0 ,71	13.9
6	0 ,98	0 ,82	0 ,65	0 ,49	0 ,32	0 ,15	16.6	0 ,01	0 ,18	0 ,35	0 ,52	0 ,68	0 ,85	16.7
7	1 ,15	0 ,95	0 ,76	0 ,57	0 ,37	0 ,18	19.4	0 ,02	0 ,21	0 ,41	0 ,60	0 ,80	0 ,99	19.5
8	1 ,31	1 ,09	0 ,87	0 ,65	0 ,43	0 ,20	22.2	0 ,02	0 ,24	0 ,46	0 ,69	0 ,91	1 ,13	22.3
9	1 ,47	1 ,23	0 ,98	0 ,73	0 ,48	0 ,23	24.9	0 ,02	0 ,27	0 ,52	0 ,77	1 ,02	1 ,27	25.0
10	1 ,64	1 ,36	1 ,09	0 ,81	0 ,53	0 ,25	27.7	0 ,02	0 ,30	0 ,58	0 ,86	1 ,14	1 ,42	27.8
11	1 ,80	1 ,50	1 ,19	0 ,89	0 ,58	0 ,28	30.4	0 ,03	0 ,33	0 ,64	0 ,94	1 ,25	1 ,56	30.6
12	1 ,97	1 ,63	1 ,30	0 ,97	0 ,64	0 ,31	33.2	0 ,03	0 ,36	0 ,70	1 ,03	1 ,36	1 ,70	33.4
13	2 ,13	1 ,77	1 ,41	1 ,05	0 ,69	0 ,33	36.0	0 ,03	0 ,39	0 ,75	1 ,12	1 ,48	1 ,84	36.2
14	2 ,29	1 ,91	1 ,52	1 ,13	0 ,74	0 ,36	38.8	0 ,03	0 ,42	0 ,81	1 ,20	1 ,59	1 ,98	39.0
15	2 ,46	2 ,04	1 ,63	1 ,21	0 ,80	0 ,38	41.5	0 ,04	0 ,45	0 ,87	1 ,29	1 ,71	2 ,12	41.7
16	2 ,62	2 ,18	1 ,74	1 ,29	0 ,85	0 ,41	44.3	0 ,04	0 ,48	0 ,93	1 ,37	1 ,82	2 ,26	44.5
17	2 ,79	2 ,32	1 ,85	1 ,37	0 ,90	0 ,43	47.1	0 ,04	0 ,51	0 ,99	1 ,46	1 ,93	2 ,41	47.3
18	2 ,95	2 ,45	1 ,95	1 ,46	0 ,96	0 ,46	49.8	0 ,04	0 ,54	1 ,04	1 ,55	2 ,05	2 ,55	50.0
19	3 ,11	2 ,59	2 ,06	1 ,54	1 ,01	0 ,48	52.6	0 ,04	0 ,57	1 ,10	1 ,63	2 ,16	2 ,69	52.9
20	3 ,28	2 ,72	2 ,17	1 ,62	1 ,06	0 ,51	55.4	0 ,05	0 ,60	1 ,16	1 ,72	2 ,27	2 ,83	55.7
21	3 ,44	2 ,86	3 ,28	1 ,70	1 ,12	0 ,53	58.1	0 ,05	0 ,63	1 ,22	1 ,80	2 ,39	2 ,97	58.4
22	3 ,60	3 ,00	2 ,39	1 ,78	1 ,17	0 ,56	60.9	0 ,05	0 ,66	1 ,28	1 ,89	2 ,50	3 ,11	61.2
23	3 ,77	3 ,13	2 ,50	1 ,86	1 ,22	0 ,59	63.7	0 ,05	0 ,69	1 ,33	1 ,97	2 ,62	3 ,26	64.0
24	3 ,93	3 ,27	2 ,60	1 ,94	1 ,28	0 ,61	66.4	0 ,06	0 ,72	1 ,39	2 ,06	2 ,73	3 ,40	66.7
diff. vert.	16.4	13.6	10.9	08.1	05.3	02.5		00.2	03.0	05.8	08.6	11.4	14.2	

TABOA

de c

(continuação)

Argum. $\frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{i}$

	2°.0′	10′	20′	30′	
Arg. H	c +	c +	c +	c +	diff. hor.
1ʰ	0′,17	0′,20	0′,23	0′,25	02.8
2	0 ,34	0 ,39	0 ,45	0 ,51	05.6
3	0 ,51	0 ,59	0 ,68	0 ,76	08.4
4	0 ,68	0 ,79	0 ,90	1 ,01	11.2
5	0 ,85	0 ,99	1 ,13	1 ,27	14.0
6	1 ,02	1 ,18	1 ,35	1 ,52	16.8
7	1 ,19	1 ,38	1 ,58	1 ,77	19.6
8	1 ,36	1 ,58	1 ,80	2 ,03	22.4
9	1 ,52	1 ,78	2 ,03	2 ,28	25.2
10	1 ,69	1 ,97	2 ,25	2 ,53	28.0
11	1 ,86	2 ,17	2 ,48	2 ,79	30.8
12	2 ,03	2 ,37	2 ,71	3 ,04	33.6
13	2 ,20	2 ,57	2 ,93	3 ,29	36.4
14	2 ,37	2 ,76	3 ,16	3 ,55	39.2
15	2 ,54	2 ,96	3 ,38	3 ,80	42.0
16	2 ,71	3 ,16	3 ,61	4 ,05	44.8
17	2 ,88	3 ,36	3 ,83	4 ,31	47.6
18	3 ,05	3 ,55	4 ,04	4 ,56	50.4
19	3 ,22	3 ,75	4 ,28	4 ,81	53.2
20	3 ,39	3 ,95	4 ,51	5 ,07	56.0
21	3 ,56	4 ,15	4 ,73	5 ,32	58.8
22	3 ,73	4 ,34	4 ,96	5 ,57	61.5
23	3 ,90	4 ,54	5 ,18	5 ,83	64.3
24	4 ,07	4 ,74	5 ,41	6 ,03	67.1
diff. vert.	16.9	19.7	22.5	25.3	

TABOA

de c'

Argumentos : $\frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{i}$, e H

Argum. $\frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{i}$

		0°.0′	0°.30′	1°.0′	1°.30′	2°.0′	2°.30′
Arg. H	D	c' +	c' +	c' +	c' +	c' +	c' +
1ʰ	0ᵈ,042	0′,33	0′,33	0′,33	0′,33	0′,32	0′,32
2	0 ,083	0 ,66	0 ,66	0 ,65	0 ,65	0 ,65	0 ,64
3	0 ,125	0 ,98	0 ,98	0 ,98	0 ,98	0 ,97	0 ,97
4	0 ,167	1 ,31	1 ,31	1 ,31	1 ,31	1 ,30	1 ,29
5	0 ,208	1 ,64	1 ,64	1 ,63	1 ,63	1 ,62	1 ,61
6	0 ,250	1 ,97	1 ,97	1 ,96	1 ,95	1 ,94	1 ,93
7	0 ,292	2 ,29	2 ,29	2 ,29	2 ,28	2 ,27	2 ,25
8	0 ,333	2 ,62	2 ,62	2 ,61	2 ,60	2 ,59	2 ,58
9	0 ,375	2 ,95	2 ,95	2 ,94	2 ,93	2 ,92	2 ,90
10	0 ,417	3 ,28	3 ,28	3 ,27	3 ,26	3 ,24	3 ,22
11	0 ,458	3 ,60	3 ,60	3 ,59	3 ,58	3 ,56	3 ,54
12	0 ,500	3 ,93	3 ,93	3 ,92	3 ,91	3 ,89	3 ,86
13	0 ,542	4 ,26	4 ,26	4 ,25	4 ,23	4 ,21	4 ,19
14	0 ,583	4 ,59	4 ,58	4 ,57	4 ,56	4 ,54	4 ,51
15	0 ,625	4 ,92	4 ,91	4 ,90	4 ,88	4 ,86	4 ,83
16	0 ,667	5 ,24	5 ,24	5 ,23	5 ,21	5 ,18	5 ,15
17	0 ,708	5 ,57	5 ,56	5 ,55	5 ,53	5 ,51	5 ,47
23	0 ,750	5 ,90	5 ,89	5 ,88	5 ,86	5 ,83	5 ,80
19	0 ,792	6 ,23	6 ,22	6 ,21	6 ,19	6 ,16	6 ,12
20	0 ,833	6 ,55	6 ,55	6 ,54	6 ,51	6 ,48	6 ,44
21	0 ,875	6 ,88	6 ,87	6 ,86	6 ,83	6 ,80	6 ,76
22	0 ,917	7 ,21	7 ,20	7 ,19	7 ,16	7 ,13	7 ,08
23	0 ,958	7 ,54	7 ,53	7 ,52	7 ,49	7 ,45	7 ,41
24	1 ,000	7 ,87	7 ,86	7 ,84	7 ,81	7 ,78	7 ,73
diff. vert.		32.8	32.8	32.7	32.6	32.4	32.2

Exemplos. No 1.º de Janeiro de 1848 a Ephemeride dá, para Mercurio:

$$\frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{i} = 1^\circ.36',4\,, \qquad P - M = 22^h.54',53$$

Com estes dados, acha-se pela taboa $c = +\,2',\ 36$, e por conseguinte a passagem ás $22^h.56',9$.

No mesmo dia para Jupiter, com os argumentos

$$\frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{i} = 8',71\,, \qquad P - M = 12^h.29',27$$

acha-se $c = -\,1',75$ $\qquad c' = +\,4',09$,

e por conseguinte a passagem ás $12^h.26',9$.

51. Tambem se póde usar da taboa seguinte, construida pelo Sr. J. S. de Vasconcellos, com o argumento = movimento em asc. rect. de tres em tres dias; taboa, que é muito commoda, e dá sufficientemente approximado, em decimas millesimas, o factor, pelo qual se deve multiplicar $(P—M)^h$ para ter a correcção.

Neste calculo convém advertir que os minutos de gráo se reduzem a horas, dividindo-os por $15 \times 60 = 900$.

Assim no 1.º exemplo, por ser o argumento $\dfrac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{2} = +\,4^\circ.49',2$, temos $22^h,909 \times 0,0017 = +\,2',34$, e passagem ás $22^h.56',9$.

TABOA de $k—m$.

Arg.	—5°	—4°	—3°	—2°	—1°	—0°	+ 0°	+ 1°	+ 2°	+ 3°	+ 4°	+ 5°	+ 6°	+ 7°
0′	—74	—64	—55	—46	—37	—27	—27	—18	— 9	+ 0	+ 10	+ 19	+ 28	+ 37
5	74	65	56	47	37	28	27	17	8	1	10	20	29	38
10	75	66	57	47	38	29	26	17	7	2	11	20	30	39
15	76	67	57	48	39	30	25	16	7	3	12	21	30	40
20	77	67	58	49	40	30	24	15	6	3	13	22	31	41
25	78	68	59	50	40	31	24	14	5	4	14	23	32	41
30	78	69	60	51	41	32	23	14	4	5	14	24	33	42
35	79	70	61	51	42	33	22	13	4	6	15	24	34	43
40	80	71	61	52	43	34	21	12	3	7	16	25	34	44
45	81	71	62	53	44	34	20	11	2	7	17	26	35	44
50	82	72	63	54	44	35	20	10	1	8	17	27	36	45
55	82	73	64	54	45	36	19	10	0	9	18	27	37	46

ARTIGO V.

Aspectos dos planetas, estações, e maximas elongações.

52. ASpectos. Este titulo comprehende as conjuncções, opposições, e quadraturas.

Seja P a longitude do planeta, e S a do Sol, na épocha proxima do instante em que a differença das suas longitudes deve ter um dado valor k; e i^d o intervallo, em dias, que separa as épochas correspondentes ás longitudes consecutivas do planeta.

Fazendo

$$s = S' - S,\; s' = S'' - S',\; s_2 = \frac{s' - s}{2},$$

$$p = \frac{P' - P}{i},\; p' = \frac{P'' - P'}{i},\; p_2 = \frac{p' - p}{2i},$$

$$a' = s - s_2,\; b' = s_2,$$

$$a = p - ip_2,\; b = p_2,$$

temos, no instante pedido,

ou $$P + at + bt^2 = S + a't + b't^2 + k,$$

ou $$P + at + bt^2 + k = S + a't + b't^2;$$

e por conseguinte

ou $$t = \frac{P - S - k}{a' - a + (b' - b)\,t},$$

ou $$t = \frac{S - P - k}{a - a' + (b - b')\,t}.$$

Quando o movimento do Sol é mais rapido do que o do planeta, ou quando o deste é retrogrado, é mais commodo usar da primeira formula, tomando $P - S > k$. Quando o movimento directo do planeta é mais rapido do que o do Sol, é mais commodo usar da segunda formula, tomando $S - P > k$.

Praticando assim, será sempre t positivo.

Nas diversas phases k tem os valores seguintes:

$\overset{☌}{k} = 0$ $\qquad$ $\overset{□}{k} = 90°$, ou $k = 270°$ $\qquad$ $\overset{☍}{k} = 180°$.

Exemplo. No 1.° de Janeiro de 1848 temos, para Jupiter:

P	106.13,05	a — 8,12	35549	6930
☉	280.17,56	a' + 61,18		☍ 5^d,130 = 5^d.3^h,1.
	185.55,49	69,30		

53. Nas conjuncções inferiores, de Mercurio e Venus, a longitude geocentrica do planeta decresce; e nas superiores cresce. Nas superiores são iguaes entre si as longitudes heliocentrica e geocentrica; e nas inferiores tem 180° de differença: o que dá outro modo de achar o instante da conjuncção destes planetas.

E semelhantemente nos planetas superiores são iguaes entre si as longitudes geocentrica e heliocentrica, tanto na conjuncção como na opposição.

54. Como, nas phases em ascensão recta, as passagens do planeta pelo meridiano são proximamente,

nos dias da ☌ ás 0^h — eq. tempo,
da □ { ás 6^h — eq tempo, ou ás 18^h — eq. tempo,
da ☍ ás 12^h — eq. tempo;

vê-se que a columna das passagens meridianas seria vantajosa para conhecer mais rapidamente os dias em que tem logar aquellas phases. E por essa razão ainda póde ser util a mesma columna, quando se trata das phases em longitude que se annunciam na Ephemeride.

55. *Estações.* Nas estações a variação da longitude geocentrica é nulla; e por isso nellas a equação $P' = P + at + bt^2$

dá
$$a + 2bt = 0;$$

d'onde se tira
$$t = -\frac{a}{2b},$$

que, parando nas differenças 2.as, se reduz a

$$t = \tfrac{1}{2}i - \frac{p}{2p_2} = \tfrac{1}{2}i - \frac{i\Delta}{\Delta^2}.$$

E como nas estações as differenças 1.as mudam de sinal, vê-se que tem logar a regra seguinte para achar o tempo dellas:

Multiplique-se a primeira differença 1.ª pelo intervallo; reparta-se o producto pela somma das duas differenças 1.as; e ajunte-se o quociente á *epocha, mais ametade do intervallo.* A somma é o tempo decorrido desde a epocha correspondente á primeira das tres funcções cujas differenças tem sinaes contrarios, até o instante da estação; sendo este tempo expresso em dias.

Exemplo. Em Março de 1848 temos, para Jupiter:

Dias	longitudes	differenças	
1	100.32,61	—2,18	1308 |709
7	100.30,43	+4,91	$1^d.845 = 1^d.\ 20^h,3.$
13	100.35,34		

Assim Est. $5^d.20^h,3$

56. *Maximas elongações.* Applicando a condição do maximum á elongação

$$E = P + at + bt^2 - S - a't - b't^2,$$

resulta

$$a + 2bt - a' - 2b't = 0,$$

que dá

$$t = -\frac{a - a'}{2(b - b')}.$$

Mas é melhor usar da formula

$$t = \tfrac{1}{2}i - \frac{i\delta}{\delta^2},$$

sendo δ e δ^2 a respeito das tres elongações, cujas differenças 1.as tem sinaes contrarios, o que no numero precedente são Δ e Δ^2 a respeito das tres longitudes cujas differenças 1.as tem sinaes contrarios. O que dá para as maximas elongações a mesma regra que tem logar para as estações, applicando aqui ás elongações o mesmo que ali se disse a respeito das longitudes.

Exemplo. Em Fevereiro de 1848 temos para Mercurio:

Dias	elongações	differenças	
21	17. 3,03	+ 55,58	16674 |5919
24	17.58,61	— 3,61	$2^d,817 = 2^d.19^h,6$
27	17.55,00		

Assim max. elong. $25^d.7^h,6$ (*).

(*) As paginas dos planetas para 1848 davam os logares de Mercurio de 3 em 3 dias. Usando delles de 6 em 6 dias, como os dá a Ephemeride, achar-se-ha $24^d.22^h,3$; resultado muito pouco exacto, mas sufficiente para o uso que tem estes annuncios.

PAGINAS IV E V.

ARTIGO I.

Longitudes, latitudes, parallaxes, e semidiametros da Lua.

57. As Longitudes, latitudes, parallaxes horisontaes equatorias, e semidiametros horisontáes da Lua, correspondentes ao meio dia medio de cada dia, calcúlam-se pelas taboas da Lua de Burckhardt, ajuntando ás epochas dellas o que corresponde ás differenças d'origem e de meridiano, que para Coimbra são $12^h.43'$.

Na introducção destas taboas acham-se quasi todas as formulas que serviram para a sua formação; mas para melhor intelligencia dellas julgamos util accrescentar os seguintes resultados da analyse que fizemos das mesmas taboas.

58. *Longitudes.* Além das denominações da introducção, sejam

$\Sigma =$ somma das 32 equações, dadas nas taboas VIII — XVI,
$E =$ evecção,
$Q =$ equação do centro,
$V =$ variação,
$R =$ reducção á ecliptica;

e de mais

$$B' = 2D - A + \Sigma,\ A' = A + \Sigma + E,\ D' = D + \Sigma + E + Q,\ \delta' = \delta + \Sigma',$$

sendo
$$\Sigma' = \Sigma + E + Q + V.$$

Nas quatro ultimas equações da longitude deverão substituir-se B', A', D', δ', em logar de $2D - A$, A, D, δ. E assim B' será o argumento da taboa XVII; depois A' o da taboa XVIII; depois D' o da taboa XIX; e em fim δ' o da taboa XX.

Então a longitude será

$$☾' = ☾ + \Sigma + E + Q + V + R = ☾ + \Sigma' + R:$$

não esquecendo ajuntar, com os respectivos sinaes, a $2D - A$, A, D, ☾, os numeros achados por meio das columnas immediatas intituladas *seculares*; o que tambem se deve dizer a respeito do supplemento do nodo ascendente.

59. Procurando na taboa de cada uma das equações o valor correspondente ao argumento *o*, achámos as seguintes constantes, que se ajuntaram ás mesmas equações para as tornar additivas:

Equações	Constantes
Argum. (1)	12'.40",0
(2)	2.30,0
(3)	1.0,0
(4)	3.20,0
(5)	1.50,0
(6)	1.30,0
(7)	1.0,0
(8)	1.20,0
(9)	1.20,0
(10)	0.10,0
(11)	0.10,0
(12)	0.20,0
(13)	0.20,0
(14)	0.20,0
(15)	0.10,0
(16)	0.20,0
(17)	0.10,0
	28.30,0

Equações	Constantes
(18)	0'.10",0
(19)	0.5,0
(20)	0.10,0
(21)	0.5,0
(22)	0.5,0
(23)	0.5,0
(24)	0.5,0
(25)	0.5,0
(26)	0.5,0
(27)	0.5,0
(28)	0.5,0
(29)	0.5,0
(30)	0.5,0
(31)	0.5,0
(32)	0.10,0
	1.30,0
	28.30,0
Σ	30.0,0
Evecç.	1°.30.0,0
Equaç. do cent.	7.0.0,0
Variação	0.38.0,0
Σ'	9.38.0,0
Reducç.	7.0,0
	9.45.0,0

Para compensar esta addição tirou-se das longitudes medias da Lua a mesma somma 9°.45'.

Pela mesma razão se tirou de 2D — A a constante 30' junta a Σ; de A a somma 2° das constantes juntas a $\Sigma + E$; e de D a somma 9° das constantes juntas á $\Sigma + E + Q$. E porque da longitude media da Lua se tirou, como já dissemos, a somma 9°.38' das constantes juntas a Σ', e mais a constante 7' junta á reducção R; foi necessario accrescentar 7' ao supplemento do nodo, para que de δ se viesse a tirar sómente a somma 9°.38′ das constantes juntas a Σ'.

Para exprimir os argumentos dividio-se a circumferencia em certo numero de partes, cada uma das quaes se tomou por unidade. Assim:

Argumentos	Numero de partes
1	100000
2 até 9	10000
10 até (20=δ—A)	1000
21 até 31	100

Os outros argumentos conservaram-se em signos, gráos, minutos, e segundos.

60. A analyse da taboa XLIX, que dá a equação que o auctor chama de longo periodo, mostra que esta taboa foi construida pela formula

$$-12'',5\cos(2\Omega+\text{perig})=-12'',5\cos(2\text{ suppl. }\Omega+A-☾).$$

Mas no seculo XIX não se deve applicar esta correcção, por estar envolvida nos numeros da columna intitulada *secular*, immediata á de ☾, os quaes são a somma da equação de longo periodo com a variação secular das longitudes, que é

$$10'',181621268\,i^2+0'',0185384408\,i^3,$$

designando i o numero de seculos contado de 1700.

E semelhantemente está envolvida a mesma equação nas columnas intituladas *seculares* dos argumentos B, A, D, nos quaes entra ☾.

As variações seculares destes argumentos, e de δ, dependem da da longitude, por entrar nelles a longitude, o perigeo, e o nodo, cujas variações seculares dependem umas das outras, sendo a sua relação a dos numeros $1, -3{,}00052, +0{,}735452$ (Astr. de Biot livr. 3.° n.° 41).

Assim as variações seculares de	☾	B	A	D	δ
são proporcionaes aos numeros	1	−2,00052	+4,00052	1	+0,264548

61. *Latitudes.* Nos argumentos da latitude devem empregar-se $D+\Sigma'$, $A+\Sigma'$, $\delta+\Sigma'$, em logar de D, A, δ. Donde resulta, á vista dos argumentos, que não se deve ajuntar Σ' aos IV (20 da longitude) e XII; e que se deve ajuntar $2\Sigma'$ ao XI, e Σ' a todos os outros.

As partes, em que se dividio a circumferencia para formar os argumentos, fôram

Argumentos	Partes
V até X, e XII	1000
XI	500,

e os outros em signos, gráos, minutos, e segundos.

As constantes juntas são:

As constantes juntas são as seguintes :

equações	constantes	equações	constantes
argum. II	$9'.0'',0$	VII	$0.25'',0$
III	$8\ ,0$	VIII	$15\ ,0$
20 da long.	$15\ ,0$	IX	$30\ ,0$
V	$30\ ,0$	X	$6\ ,0$
VI	$30\ ,0$	XI	$4\ ,0$
	$10.23\ ,0$	XII	$17\ ,0$
	$1.37\ ,0$		$1.37\ ,0$
S	$12.\ 0\ ,0$		

sendo S a somma das equações II até XII.

Assim

$$\text{dist. da ☾ ao pólo da eclipt.} = 90^\circ - \text{eq. I} + S\,;$$

tendo-se tirado de 90° — eq I, dada na taboa XXI, a somma $12'$ das constantes juntas a S.

62. *Parallaxe equatoria.* Analysando as taboas pelo methodo dos coefficientes indeterminados, achámos que fôram construidas pelas formulas seguintes :

equações	constantes juntas
$-\ 0'',4 \cos (1)$	$0'',4$
$+\ 0\ ,8 \cos (2)$	$0\ ,8$
$+\ 0\ ,3 \cos (4)$	$0\ ,3$
$+\ 0\ ,8 \cos (5)$	$0\ ,8$
$+\ 0\ ,8 \cos (6)$	$1\ ,1$
$-\ 0\ ,6 \cos (8)$	$0\ ,6$
$+\ 1\ ,8 \cos 2\,(9)$	$1\ ,8$
$+\ 0\ ,7 \cos (12)$	$0\ ,7$
$+\ 1\ ,0 \cos (13)$	$1\ ,0$
$+37'',4 \cos (B') + 0'',4 \cos (2B')$	$43\ ,0$
$-\ 1'',0 \cos (D') + 26'',3 \cos (2D') + 0'',3 \cos (3D')$	$30\ ,0$
	$1.'20'',5$

$$\pi + 187'',0 \cos (A') + 10'',2 \cos (2A') + 0'',5 \cos (3A'),$$

sendo

$$\pi = 57'.0'',5.$$

Os numeros da taboa XXXI, que dá a ultima equação, tem de menos a constante 1'.20'',5 para compensar a sua addição á somma das equações precedentes.

63. Calculados os logares para o meio dia por meio das taboas, costumam achar-se os correspondentes á meia noite interpolando para o meio do intervallo.

A formula da interpolação para $\frac{1}{2}$ dá, até as differenças 5.^{as} que ordinariamente bastam,

$$L' = L + \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^2 + \tfrac{1}{16}\Delta^3 - \tfrac{5}{128}\Delta^4 + \tfrac{7}{256}\Delta^5 \ldots\ldots\ldots (1);$$

ou
$$L' = L + \frac{\Delta}{2} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\Delta^2}{2} + \tfrac{1}{8}\cdot\frac{\Delta^3}{2} - \tfrac{8}{100}\cdot\frac{\Delta^4}{2} + \tfrac{1}{20}\cdot\frac{\Delta^5}{2}, \ldots\ldots (1')$$

com erro apenas de $-\dfrac{\Delta^4}{1067} - \dfrac{\Delta^5}{427}$ (*).

Tendo os logares seguidos de 12^h em 12^h, as fórmulas

$$A = \frac{\Delta}{12} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Delta^2}{12} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\Delta^3}{12},\quad B = \tfrac{1}{24}\cdot\left(\frac{\Delta^2}{12} - \frac{\Delta^3}{12}\right)\ldots\ldots (2),$$

dão os A e B; sendo nellas as differenças Δ, Δ^2, Δ^3, relativas aos logares de 12^h em 12^h.

Adiante veremos que se póde aproveitar uma parte das differenças 6as em (1), e das 4.^{as} em (2); pondo $\frac{1}{2}\Sigma^{(5)} = \dfrac{\Delta_1^5 + \Delta^5}{2}$, em logar de Δ^5, nas primeiras; e $\frac{1}{2}\Sigma^{(3)} = \dfrac{\Delta_1^3 + \Delta^3}{2}$, em logar de Δ^3, nas segundas: isto, quando as differenças 6.^{as} no primeiro caso, e 4.^{as} no segundo, não mudam de sinal.

64. Alguns calculadores param em (1) nas differenças 3.^{as}, pondo $\frac{1}{2}\Sigma^{(3)}$ em logar de Δ^3; interpolando para traz e para diante; e toman-

(*) Tinhamos usado do termo $-\dfrac{\Delta^4}{24}$, cujo erro $-\dfrac{\Delta^4}{384}$ admittia uma correção facil no caso de se querer maior exactidão, por ser

$$L' = L + \tfrac{1}{2}\Delta - \frac{\Delta^2}{8} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Delta^3}{8} - \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{20}\right)\cdot\frac{\Delta^4}{8} + \tfrac{2}{10}\left(1 + \tfrac{1}{10}\right)\cdot\frac{\Delta^5}{8},$$

com erro apenas de $+\dfrac{\Delta^4}{1920} + \dfrac{\Delta^5}{6400}$;

mas o Sr. Vasconcellos lembrou o termo $-\dfrac{\Delta^4}{25} = -\dfrac{4\Delta^4}{100}$, que na verdade é muito commodo e sufficientemente exacto.

do o meio dos dous resultados : por acharem este meio mais exacto , e por servir um dos resultados de verificação ao outro.

Na interpolação para diante parte-se da funcção , que precede a procurada , para as seguintes ; e na interpolação para traz parte-se da funcção , que segue a procurada , para as precedentes. E assim

$$\left.\begin{array}{ll}\text{para diante} & L' = L + \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^2 + \tfrac{1}{32}\cdot(\Delta_1^3 + \Delta^3) \\ \text{para traz} & L' = L + \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta_1^2 - \tfrac{1}{32}(\Delta_2^3 + \Delta_1^3)\end{array}\right\}\ldots\ (3),$$

$$\text{meio}\qquad L' = L + \tfrac{1}{2}\Delta - \frac{\Delta^2 + \Delta_1^2}{16} + \frac{\Delta^3 - \Delta_2^3}{64}\ \Big\}\ldots\ (4).$$

Como Δ_1^3 desapparece , vê-se que, interpolando nos dous sentidos , basta usar de Δ^3 e $\Delta_2^{(3)}$, em logar de Σ^3 e $\Sigma_1^{(3)}$, com tanto que se tome por fim a semisomma dos dous resultados.

$$\text{Depois}\qquad A = \frac{\Delta - \frac{1}{4}\Sigma^{(2)}}{12},\ B = \frac{1}{12}\cdot\frac{\frac{1}{4}\Sigma^{(2)}}{12}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)\ (^*).$$

(*) No *Connaissance des Temps* ha uma taboa , que serve para facilitar o calculo da interpolação feito com differenças 2.as , suppondo a formula ordenada relativamente ás differenças ,

$$L_t = L + t\cdot\frac{\Delta}{12} + t(t - 12)\cdot\frac{\Sigma^{(2)}}{24\cdot 24}.$$

A taboa dá o 3.° termo , entrando nella com os argumentos t e $\frac{1}{2}\Sigma^{(2)}$.

Nas Taboas dos planetas de Bouvard ha outras semelhantes. Em geral , para qualquer dado intervallo i , póde assim formar-se a taboa do 3.° termo da formula correspondente

$$L_t = L + t\cdot\frac{\Delta}{i} + t\,(t - i)\cdot\frac{\Sigma^{(2)}}{4i^2}.$$

Quando A e B se referem a intervallos de 12^h , deve A calcular-se com duas casas decimaes , e B com tres , de mais do que L ; ou pelo menos A com uma , e B com duas , de mais do que L :. porque neste ultimo caso o maximo erro 0,5 na ultima casa de B , ou de A , dá respectivamente $0{,}005 \times (12)^2 = 0{,}7$ ou $0{,}05 \times 12 = 0{,}6$, na ultima de L.

Se os intervallos são de 24^h, deve fazer-se o calculo com duas casas de mais de A e tres de B ; o que dá 0,3 e 0,1 para erros da ultima casa de L provenientes dos maximos erros de B e A.

Póde facilitar-se o uso da semisomma das equações (3), formando a columna da somma das differenças 2.as, e mais duas columnas das differenças 1.as e 2.as destas sommas ou dos seus oitavos. A formula (4) dá então

$$L' = L + \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Sigma^{(2)}}{8} + \tfrac{1}{8}\cdot\frac{\delta^2\Sigma_1^{(2)}}{8} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4').$$

No entretanto o uso da formula (1′) parece-nos mais facil e exacto.

65. Quando não ha, ou não se considera, senão uma funcção posterior á procurada, podemos interpolar para traz a formula (1′) que dá

$$L' = L + \frac{\Delta}{2} - \tfrac{1}{4}\frac{\overset{2}{\Delta}_1}{2} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{\overset{3}{\Delta}_2}{2} - \tfrac{8}{100}\cdot\frac{\overset{4}{\Delta}_3}{2} - \tfrac{1}{20}\cdot\frac{\overset{5}{\Delta}_4}{2};$$

e, calculadas as funcções de 12^h em 12^h, tomar

$$A = \frac{\Delta}{12} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\overset{2}{\Delta}_1}{12} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\overset{3}{\Delta}_2}{12},\ B = \tfrac{1}{24}\cdot\left(\frac{\overset{2}{\Delta}_1}{12} + \frac{\overset{3}{\Delta}_2}{12}\right):$$

sendo Δ na primeira destas equações a differença das funcções correspondentes aos dous ultimos meios dias, que se consideram; e nas outras duas a differença das funcções correspondentes ao ultimo meio dia, e á ultima meia noite, que se consideram (*).

Ordinariamente provam-se os A e B d'uma funcção calculando por meio delles a seguinte. Mas se no calculo se tem tomado $\Sigma^{(2)}$ com sinal trocado, ou errado em grandeza, esta prova não accusa esse erro; porque, para $t = 12$, a expressão $(A + Bt)t$ reduz-se a Δ, qualquer que seja $\Sigma^{(2)}$. Não acontecerá porém o mesmo, calculando uma funcção por meio dos A e B da seguinte; porque a expressão $(A - Bt)t$ torna-se, para $t = 12$, em $\Delta - \tfrac{1}{2}\Sigma^{(2)}$.

(*) Para o mesmo fim costumam andar nas mãos dos calculadores as seguintes formulas

$$1.^{\circ}\ A = \frac{\Delta}{6} - A',\quad 1.^{\circ}\ B = \frac{A' - A}{24};$$

$$\text{ultimo } A = A_1 + 24B_1,\quad \text{ultimo } B = \frac{\frac{\Delta}{12} - A}{12}.$$

Exemplo. Com as longitudes dos sete primeiros dias de Janeiro a 0^h, tiradas da Ephemeride de 1848, a formula (1′) daria

Long. ☾				
1^d	222°.12′,89	L		222°.12′,89
2	234 .20 ,13	$+\frac{\Delta}{2}$	+	6 . 3 ,62
3	246 .42 ,55	$-\frac{\Delta^2}{8}$	−	1 ,897
4	259 .22 ,54	$+\frac{\Delta^3}{16}$	+	0 ,149
5	272 .20 ,98	$-\frac{4\Delta^4}{100}$	+	0 ,060
6	285 .37 ,14	$+\frac{\Delta^5}{40}$	−	0 ,002
		L′		228 .14 ,82

A formula (4′) dá

Dez. 1847	30^d	198.28,20	L		222°.12′,89
	31	210.17,13	$\frac{\Delta}{2}$	+	6 . 3 ,62
Janeir. 1848	1	222.12,89			
	2	234.20,13	$-\frac{\Sigma^{(2)}}{8}$	−	1 ,666
	3	246.42,55	$+\frac{\delta^2\Sigma_1^{(2)}}{8}$	−	0 ,035
	4	259.22,54	L′		228 .14 ,81

As duas primeiras tiram-se das equações

$$L_{(t)} = L + At + Bt^2, \quad \frac{dL_{(t)}}{dt} = A + 2Bt,$$

que applicadas a $t = 12^h$, dão

$$\Delta = 12\,A + (12)^2 . B, \quad A' = A + 24B.$$

A terceira tira-se de $\qquad \frac{dLt}{dt} = A_1 + 2B_1 t,$

applicada a $t = 12^h$.

A quarta tira-se de $\qquad L' - L = \Delta = 12A + (12)^2 . B.$

Calculadas assim as longitudes de 12^h em 12^h, se quizessemos, por exemplo, os A e B correspondentes á meia noite do dia 1.° de Janeiro; teriamos pelas formulas (2), usando das longitudes dadas na Ephemeride:

$1^d.\ 0^h$	$222°.12',89$	$\frac{\Delta}{12}$	$30,4433$	Δ^2	$+3',81$
$1\ .12$	$228\ .14,81$				
$2\ .\ 0$	$234\ .20,13$				
$2\ .12$	$240\ .29,26$	$-\frac{\Delta^2}{24}$	$-0,1588$	$-\frac{1}{2}\Sigma^{(3)}$	$-0,38$
$3\ .\ 0$	$246\ .42,55$	$+\frac{\frac{1}{2}\Sigma^{(3)}}{36}$	$+0,0105$	12.24 B	$3',43$
		A	$30,295$	B	$+11,9$

As formulas (5) dão $A = 30,293$ $B = +12,5$.

66. A parallaxe dada pelas taboas é a horisontal equatoria. Para ter a correspondente a um parallello, cuja latitude é P', serve a formula

$$\text{parall. lat. } P' = \text{parall. equat.} \times (1 - \alpha' \operatorname{sen}^2 P'),$$

sendo α' o achatamento $\frac{a-b}{b}$ (*).

Esta formula vem reduzida a taboa no fim da Ephemeride de 1807,

---

(*) Combinando a equação da ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$

com
$$\frac{dy}{dx} = \cot P' = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

acha-se
$$x = \frac{a^2 \cos P'}{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 P' + a^2 \cos^2 P'}}, \quad y = \frac{b^2 \operatorname{sen} P'}{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 P' + a^2 \cos^2 P'}},$$

ou
$$x = \frac{a \cos P'}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 P'}} \qquad y = \frac{a \operatorname{sen} P' (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 P'}},$$

por ser
$$a^2 - b^2 = a^2e^2.$$

Donde resulta o raio

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a \sqrt{2 - e^2 - \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 P'}}.$$

Fazendo $\frac{r}{a} = u$, $e^2 \operatorname{sen}^2 P' = t$; e applicando a formula de Maclaurin

$$u = \mathrm{u} + t\mathrm{u}' + \tfrac{1}{2} t^2 \mathrm{u}'' + \frac{1}{2\,.\,3} t^3 \mathrm{u}''' + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

na qual se dá a reducção, —parall. equat. $\times$ α' sen^2 P'. O valor medio desta reducção é — 0',08 na latitude de Coimbra.

67. O semidiametro dado pelas taboas é o horisontal. A formula para os outros é

$$D' = D\,(1 + \text{sen}\ \pi \cos z) = D\,(1 + nD \cos z):$$

sendo D o semidiametro visto do centro da terra, que se póde tomar por horisontal com erro apenas de 0',01; D' o semidiametro correspondente á distancia zenithal z; π a parallaxe horisontal; e n a rasão constante desta parallaxe com o semidiametro horisontal (vej. astr. de Biot liv. 3.° tom. 2.° pag. 367).

A taboa auxiliar XI da Ephemeride de 1804 serve para reduzir o semidiametro horisontal ao correspondente á altura 90° — z.

---

em que u, u', u'', ... são os valores de u, e suas derivadas, correspondentes a $t = 0$, acha-se

$$u = 1\,,\ u' = -\frac{1-e^2}{2}\,,\ u'' = -\frac{1-e^2}{2}\cdot\left(2 + \frac{1-e^2}{2}\right), \ldots\ldots\,;$$

e $$r = a\left[1 - \frac{1-e^2}{2}\cdot e^2\,\text{sen}^2 P' - \frac{1-e^2}{4}\cdot\left(2 + \frac{1-e^2}{2}\right)\cdot e^4\,\text{sen}^4 P' \ldots\right],$$

cujos coefficientes se podem transformar em funcções do achatamento, por ser

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2}, \quad \text{ou } e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Quando se chama achatamento a expressão $\alpha' = \dfrac{a-b}{b}$,

é $$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} - 1\,, \quad \text{ou } e^2 = \frac{2\alpha' + \alpha'^2}{1 + 2\alpha' + \alpha'^2}.$$

Achado $\dfrac{r}{a}$, temos

$$\text{parall. na lat. } P' = \text{parall. equat.} \times \frac{r}{a}.$$

NOTAS.

O Sr. F. M. Barreto Feyo communicou-nos as duas seguintes notas. A primeira completa a analyse, que fizemos das taboas de Burckhardt, com a da taboa XLVIII, de que revela alguns erros; e por isso a ajuntamos, apezar de não termos tratado especialmente daquella taboa, por não o julgarmos necessario para o nosso fim. A segunda, muito util no calculo da interpolação, contém o que é necessario para fazer este calculo com facilidade e exactidão, e com conhecimento dos desprezos que nelle se commettem.

Nota sobre a taboa XLVIII da Burckhardt

O effeito da variação secular sobre o argumento da evecção, em 10 seculos, não deve ser $-49'.58''$, como se lê na taboa, mas sim $-33'.18''$.

O engano provém evidentemente de se ter tomado na taboa

$$-49'.58'' = \text{var. sec. da long.} - \text{var. sec. da anomalia}$$

em logar de

$$-33'.18'' = 2\,\text{var. sec. da long.} - \text{var. sec. da anomalia},$$

como dá a forma do argumento da evecção.

A respeito das variações seculares dos outros argumentos convem notar que nos argumentos 6, 7, 15, 17, 20, Burckhardt parece ter-se enganado tambem no modo porque fez entrar nelles a var. sec. do suppl. do ☊. Evidentemente provém a differença, que encontramos, de se ter tomado na forma do argumento simplesmente var. sec. do suppl. do ☊ em logar de var. sec. da long + var. sec. do suppl. do ☊.

Sejão l, m, n as variações seculares da longitude, anomalia, e supplemento do ☊. Suppondo a circumferencia dividida em 10000 partes, será $l = 7{,}7$; $m = 30{,}8$; $n = -5{,}7$; e teremos:

arg.	forma supposta	resultado	Burckhardt	forma verdadeira	resultado
(6)	$2n - m$	$-42{,}2$	-42	$2(l+n) - m$	$-26{,}8$
(7)	$2n - 2l$	$-26{,}8$	-27	$2(l+n) - 2l$	$-11{,}3$
(15)	$\frac{2l - 2n + m}{10}$	$+5{,}8$	$+6$	$\frac{2l - 2(l+n) + m}{10}$	$+4{,}2$
(17)	$\frac{2n - 2l + m}{10}$	$+0{,}4$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{2(l+n) - 2l + m}{10}$	$+1{,}95$
(20)	$\frac{n - m}{10}$	$-3{,}7$	-4	$\frac{(l+n-m)}{10}$	$-2{,}9$

Nota sobre a interpolação com especial referencia a logares de Lua.

Calculadas directamente para todos os dias ao meio dio medio as longitudes e latitudes da Lua, teremos as correspondentes á meia noite pela formula

$$F' = F + \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^2 + \tfrac{1}{16}\Delta^3 - \tfrac{5}{128}\Delta^4 + \tfrac{7}{256}\Delta^5 - \tfrac{21}{1024}\Delta^6 + \tfrac{33}{2048}\Delta^7 - \tfrac{429}{32768}\Delta^8 \ldots (1)$$

parando nas differenças oitavas por ser o mais que póde desejar-se em semelhante materia. Porém como nas funcções propostas o limite superior de suas differenças successivas, tomadas ao modo ordinario, é $4'$ nas differenças quartas, $2'$ nas quintas, $1'$ nas sextas, e menor do que $1'$ nas setimas e oitavas, a formula (1) póde com sufficiente approximação escrever-se

$$F' = F + \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^2 + \tfrac{1}{16}\Delta^3 - \tfrac{39}{1000}\Delta^4 + \tfrac{11}{400}\Delta^5 - 2 \cdot \frac{\Delta^6}{100} + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\Delta^7}{10} - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{\Delta^8}{10} \quad (2)$$

por isso que, no caso mais desfavoravel, apenas $0',001$ será o erro proveniente dos desprezos feitos nos coefficientes de seus termos.

A respeito da facilidade que offerece o calculo da formula (2), advertiremos que $\tfrac{39}{1000} \cdot \Delta^4 = 4 \cdot \frac{\Delta^4}{100} - \tfrac{1}{10} \cdot \frac{\Delta^4}{100}$; e que quando Δ^4 for menor que $0',5$, como acontecerá muitas vezes, póde desprezar-se ainda $\tfrac{1}{10} \cdot \frac{\Delta^4}{100}$, a que sempre custará pouco attender quando for necessario. Semelhantemente $\tfrac{11}{400} \cdot \Delta^5 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^5}{10} + \tfrac{1}{10}\left(\tfrac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^5}{10}\right) = 3\,\frac{\Delta^5}{100} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^5}{100}$; e quando Δ^5 fôr menor do que $0',2$ póde desprezar-se ainda $\frac{\Delta^5}{400}$, a que em qualquer caso tambem será facil attender.

Podiamos em logar de $\tfrac{11}{400} \cdot \Delta^5$ escrever $\tfrac{39}{1000} \cdot \tfrac{7}{10} \cdot \Delta^5$, que tendo divisor commum com $\tfrac{39}{1000} \cdot \Delta^4$ offerece commodidade; porém querendo aproveitar esta circumstancia, em logar da formula (2) empregaremos com igual approximação a seguinte

$$F' = F + \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta^2}{4.2} + \frac{\Delta^3}{2.4.2.} - \tfrac{6}{10}\left[\frac{\Delta^4}{16} - \tfrac{7}{10}\left(\frac{\Delta^5}{16} - \tfrac{8}{10}\,\frac{\Delta^6}{16}\right)\right] - \tfrac{4}{100}(\delta^4 - \delta^5) + \delta^7 - \delta^8. \quad (3)$$

sendo

$$\delta^4 = \tfrac{6}{10} \cdot \frac{\Delta^4}{16},\ \delta^5 = \tfrac{6}{10} \cdot \tfrac{7}{10} \cdot \frac{\Delta^5}{16},\ \delta^7 = \tfrac{6}{10} \cdot \tfrac{7}{10} \cdot \left(\tfrac{8}{10}\right)^2 \frac{\Delta^7}{16},\ \text{e}\ \delta^8 = \tfrac{6}{10} \cdot \tfrac{7}{10} \cdot \left(\tfrac{8}{10}\right)^3 \frac{\Delta^8}{16}.$$

Considerando finalmente que nos usos da Ephemeride se attende ás millesimas de minuto em ordem a ter mais seguras no resultado as centesimas, poderemos o mais das vezes parar nas differenças sextas, e desprezar tambem $\frac{\Delta^4}{1000} + \frac{\Delta^5}{400}$, na formula (2), e $-\tfrac{4}{100}(\delta^4 - \delta^5)$ (sempre $< 0',01$) na formula (3).

Quando porém o calculador preferir o uso de taboas ás operações que exigem as formulas (2) e (3); ou quando para algum fim quizer maior approximação, póde servir-se das taboas seguintes, nas quaes entrando em cada uma dellas com as differenças respectivas como argumento achará calculados os termos da formula (1) desde as differenças terceiras inclusive em diante.

TABOAS.

Com Δ^3 por argumento acha-se $\frac{1}{16} \cdot \Delta^3$.

Arg.	0.	0',100	0',200	0',300	0',400	0',500	0',600	0',700	0',800	0',900	1',000
0.'	0',0000	0',0063	0,0125	0',0188	0',0250	0',0313	0',0375	0',0438	0',0500	0',0563	0',0625
1.	0,0625	0,0688	0,0750	0,0813	0,0875	0,0938	0,1000	0,1063	0,1125	0,1188	0,1250
2.	0,1250	0,1313	0,1375	0,1438	0,1500	0,1563	0,1625	0,1688	0,1750	0,1813	0,1875
3.	0,1875	0,1938	0,2000	0,2063	0,2125	0,2188	0,2250	0,2313	0,2375	0,2438	0,2500
4.	0,2500	0,2563	0,2625	0,2688	0,2750	0,2813	0,2875	0,2938	0,3000	0,3063	0,3125
5.	0,3125	0,3188	0,3250	0,3313	0,3375	0,3438	0,3500	0,3563	0,3625	0,3688	0,3750
6.	0,3750	0,3813	0,3875	0,3938	0,4000	0,4063	0,4125	0,4188	0,4250	0,4313	0,4375
7.	0,4375	0,4438	0,4500	0,4563	0,4625	0,4688	0,4750	0,4813	0,4875	0,4938	0,5000
8.	0,5000	0,5063	0,5125	0,5188	0,5250	0,5313	0,5375	0,5438	0,5500	0,5563	0,5625
9.	0,5625	0,5688	0,5750	0,5813	0,5875	0,5938	0,6000	0,6063	0,6125	0,6188	0,6250
10.	0,6250	0,6313	0,6375	0,6438	0,6500	0,6563	0,6625	0,6688	0,6750	0,6813	0,6875
11.	0,6875	0,6938	0,7000	0,7063	0,7125	0,7188	0,7250	0,7313	0,7375	0,7438	0,7500
12.	0,7500	0,7563	0,7625	0,7688	0,7750	0,7813	0,7875	0,7938	0,8000	0,8063	0,8125
13.	0,8125	0,8188	0,8250	0,8313	0,8375	0,8438	0,8500	0,8563	0,8625	0,8688	0,8750
14.	0,8750	0,8813	0,8875	0,8938	0,9000	0,9063	0,9125	0,9188	0,9250	0,9313	0,9375
15.	0,9375	0,9438	0,9500	0,9563	0,9625	0,9688	0,9750	0,9813	0,9875	0,9938	1,0000

Com Δ^4 por argumento acha-se $\frac{5}{128} \cdot \Delta^4$.

0.'	0',0000	0',0039	0',0078	0',0117	0',0156	0',0195	0',0234	0',0273	0',0313	0',0352	0',0391
1.	0,0391	0,0430	0,0469	0,0508	0,0547	0,0586	0,0625	0,0664	0,0703	0,0742	0,0781
2.	0,0781	0,0820	0,0859	0,0898	0,0938	0,0977	0,1016	0,1055	0,1094	0,1133	0,1172
3.	0,1172	0,1211	0,1250	0,1289	0,1328	0,1367	0,1406	0,1415	0,1484	0,1523	0,1563
4.	0,1563	0,1602	0,1641	0,1680	0,1719	0,1758	0,1797	0,1836	0,1875	0,1914	0,1953
5.	0,1953	0,1992	0,2031	0,2070	0,2109	0,2148	0,2188	0,2227	0,2266	0,2305	0,2344
6.	0,2344	0,2383	0,2422	0,2461	0,2500	0,2539	0,2578	0,2617	0,2656	0,2695	0,2734

Com Δ^5 por argumento acha-se $\frac{7}{256} \cdot \Delta^5$.

0.'	0',0000	0',0027	0',0055	0',0082	0',0109	0',0137	0',0164	0',0191	0',0219	0',0246	0',0273
1.	0,0273	0,0301	0,0328	0,0355	0,0383	0,0410	0,0437	0,0465	0,0492	0,0520	0,0547
2.	0,0547	0,0574	0,0602	0,0629	0,0656	0,0684	0,0711	0,0738	0,0766	0,0793	0,0820
3.	0,0820	0,0848	0,0875	0,0902	0,0930	0,0957	0,0984	0,1012	0,1039	0,1066	0,1094
4.	0,1094	0,1121	0,1148	0,1176	0,1203	0,1230	0,1258	0,1285	0,1312	0,1340	0,1367

Com Δ^6 por argumento acha-se $\frac{21}{1024} \cdot \Delta^6$.

0.'	0',0000	0',0021	0',0041	0',0062	0',0082	0',0103	0',0123	0',0144	0',0164	0',0185	0',0205
1.	0,0205	0,0226	0,0246	0,0267	0,0287	0,0308	0,0328	0,0349	0,0369	0,0390	0,0410
2.	0,0410	0,0431	0,0451	0,0472	0,0492	0,0513	0,0533	0,0554	0,0574	0,0595	0,0615
3.	0,0615	0,0636	0,0656	0,0677	0,0697	0,0718	0,0738	0,0759	0,0779	0,0800	0,0820

Com Δ^7 por argumento acha-se $\frac{33}{2048} \cdot \Delta^7$.

0.'	0',0000	0',0016	0',0032	0',0048	0',0064	0',0081	0',0097	0',0113	0',0129	0',0145	0',0161
1.	0,0161	0,0177	0,0193	0,0209	0,0226	0,0242	0,0258	0,0274	0,0290	0,0306	0,0322
2.	0,0322	0,0338	0,0354	0,0371	0,0387	0,0403	0,0419	0,0435	0,0451	0,0467	0,0483

Com Δ^8 por argumento acha-se $\frac{429}{32768} \cdot \Delta^8$.

0.'	0',0000	0',0013	0',0026	0',0039	0',0052	0',0065	0',0079	0',0092	0',0105	0',0118	0',0131
1.	0,0131	0,0144	0,0157	0,0170	0,0183	0,0196	0,0209	0,0223	0,0236	0,0249	0,0262
2.	0,0262	0,0275	0,0288	0,0301	0,0314	0,0327	0,0340	0,0353	0,0367	0,0380	0,0393

ARTIGO II.

Phases da Lua.

68. No fundo da pagina IV da Ephemeride acham-se as phases da Lua, que se calcúlam pela formula

$$t = \frac{\odot - \text{☾} - k}{A - a + Bt}:$$

sendo ☉ e ☾ as longitudes, ou ascensões rectas, do Sol e da Lua no meio dia, ou meia noite, que precede as phases em longitude, ou em ascensão recta; a o movimento horario do Sol, em longitude ou ascensão recta, dado no fundo da pagina I; A e B dados na pagina IV, ou na VI; e k a differença de longitudes ou ascensões rectas, correspondente á phase de que se trata. E é

na ☌	na □	na ☍
$k = 0$	$k = 90°$ ou $= 270°$	$k = 180°$.

O calculo da formula póde fazer-se do modo indicado no n.° 28.

Para achar com facilidade os dias proximos aos das phases serve a ultima columna da pagina VI, semelhantemente ao que se disse no n.° 54.

Exemplos. A pagina VI mostra que perto do dia 5 de Janeiro de 1848 tem logar a conjuncção. Comparando as longitudes nas visinhanças deste dia, vê-se que a ☌ em longitude acontece nelle depois da meia noite, e a ☌ em ascensão recta no dia 6 depois do meio dia.

Assim no dia 5 ás 12^h, temos em longitude:

	longitudes					
☉	284.52,91	A	33,179	B +14,1	1,95	1,9484
☾	278,56,97	a	2,548	×11,568	×5,9323	×5,9323
	5.55,94	A − a	30,631	163	11,568	11,5585
	5,9323		+163			
			30,794	☌ em long. $5^d.23^h.33',5$.		

E no dia 6 a 0^h, em ascensão recta:

☉	286.42,25	A	34,900	B+2,3	1,86	1,8656
☾	286.21,07	a	2,740	×0,657	×0,353	×0,353
	0.21,18	A—a	32,160	2	0,657	0,6586
	0,353		32,162	☌ em asc. rec. $6^d.0^h.39',5$		

ARTIGO III.

Entradas da Lua nos Signos do Zodiaco.

69. Estes phenomenos, que se annunciam no fundo da pagina V da Ephemeride, calcúlam-se pela formula

$$\text{Entrada no signo } (n) = \frac{(n-1)\,.\,30^\circ - \text{C}}{\text{A} + \text{B}t};$$

na qual C, A, B, são relativos ás longitudes, e cujo calculo é semelhante ao do n.º precedente.

Para	$n = 1$,	2,	3	12,
Entra a ☾ nos signos	I	II	III	XII.

Exemplo. No dia 2 de Janeiro de 1848 a 0^h temos:

IX	240°				5,664	5,664
☾	234.20,13	A	30,593	B+13,8	×1,95	× 1,9515
	5.39,87		+ 152		11,04480	11,0532960
	5,664		30,745			

Assim entrada no signo IX ás $11^h.\ 3'$.

Sobre os nn. 37 *e* 38 *da Explicação das Ephemerides.*

70. Chamemos *movimento horario* correspondente ao tempo t, o movimento que teria logar, se a Lua se movesse com a velocidade, que tem nesse instante, durante a hora seguinte; e *movimento effectivo n'uma hora* o espaço que ella descreve no mesmo intervallo com a sua velocidade variada. Será

movimento horario	$= A + 2Bt$
movimento effectivo na hora seguinte	$\begin{cases} = A(t+1) + B(t+1)^2 - At - Bt^2 \\ = A + B(2t+1). \end{cases}$
e na hora precedente	$= A + B(2t-1).$

Se a Lua se movesse uniformemente durante uma hora com a velocidade correspondente ao meio della, o seu movimento nesse intervallo seria

para a hora seguinte	$= A + 2B(t+\frac{1}{2}) = A + B(2t+1)$
para a hora precedente	$= A + 2B(t-\frac{1}{2}) = A + B(2t-1)$,

igual, em ambas as horas, ao effectivo. O que devia acontecer, por se considerar o movimento da Lua como uniformemente variado.

O espaço corrido pela Lua em θ^h, que seguem o tempo t, é

$$A(t+\theta) + B(t+\theta)^2 - At - Bt^2 = A\theta + B\theta(2t+\theta);$$

o percorrido uniformemente com a velocidade, que corresponde ao meio da hora que segue t, ou a $t+\frac{1}{2}$, seria

$$A\theta + B\theta(2t+1);$$

e a differença destes espaços é

$$B\theta(\theta-1).$$

Tal é o erro que se commette, quando se toma um destes espaços pelo outro; erro nullo para $\theta = 1$, como já tinhamos visto, e maximo para $\theta = \frac{1}{2}$.

PAGINAS VI E VII.

ARTIGO I.

Ascensões rectas e declinações da Lua.

71. PAra determinar estas coordenadas por meio das longitudes e latitudes deve fazer-se o'que se disse no n.° 42 e seguintes: e para calcular os seus A e B deve usar-se das formulas (2) ou (5) dos nn. 63 e 64; sendo Δ e Δ^2 relativos á especie de coordenadas de que se trata.

ARTIGO II.

Passagens da Lua pelo meridiano.

72. SEjam ☾ e M as ascensões rectas da Lua e do meridiano, correspondentes ao meio dia que precede a passagem da Lua pelo meridiano, desde a conjuncção até a opposição; ou á meia noite que precede aquella passagem, desde a opposição até a conjuncção.

Chamando m a variação horaria $0^h,002738$ da ascensão recta do meridiano em tempo; e supondo ☾ — M, A, B, reduzidos a horas, temos, na passagem meridiana,

$$☾ + At + Bt^2 = M + t + mt,$$

que dão

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{☾ - M}{1 - (A - m) - Bt_1}, \\ \text{ou} \quad t &= (☾ - M)\left[1 + A - m + Bt_1 + (A - m + Bt_1)^2 \ldots\right] \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

Mas querendo conservar A e B em arco, como estão na pagina VI, e usar da taboa dos factores, daremos a esta formula a forma seguinte

$$t = \frac{(C - M)^h.60'}{60' + 0',1643 - \frac{A + Bt_1}{15}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

73. Seja A_1 o valor medio de A, que é proximamente 30' de arco, ou $0^h,033$ de tempo. Será

$$\frac{(C-M)^h}{1 + m - A_1} = (C-M)(1 + 0^h,03)$$

um valor de t mais approximado do que $C - M$.

Assim é melhor tomar $(C-M)^h$ por tempo da passagem approximado, accrescentando-lhe $0^h,03$ por cada uma das suas horas; depois substituir este valor por t_1 no segundo membro de (1), ou de (2); e finalmente calcular ~~a formula (1), fazendo as operações nella indicadas~~; ou a formula (2), entrando com o denominador na taboa dos factores, e multiplicando por $(C-M)^h$ o factor nella achado (vej. a *Explicação das Ephemerides* n.° 49).

74. Em quanto aos A e B da passagem meridiana, dados nas ultimas columnas da pagina VII da Ephemeride, temos

$$A = \frac{\Delta - \frac{1}{4}\Sigma^2}{24}, \quad B = \frac{1}{24} \cdot \frac{\frac{1}{4}\Sigma^2}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ou mais exactamente

$$A = \frac{\Delta}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2}{24} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\Sigma^{(3)}}{24}; \quad B = \frac{1}{48} \cdot \left(\frac{\Delta^2}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Sigma^{(3)}}{24}\right) \ldots (4)\,(*)$$

(*) Para os primeiros e ultimos A e B, servem as formulas do n.° (65) e [65 (*)], mudando o intervallo 12^h em 24^h.

Em geral para qualquer intervallo i as formulas do n.° 65 são

$$A = \frac{\Delta}{i} + \frac{\Delta_1^2}{24} + \frac{\frac{1}{2}\Sigma_2^3}{34}, \quad B = \frac{\Delta_1^2 + \frac{1}{2}\Sigma_2^3}{2i^2};$$

Exemplo. No 1.° de Janeiro de 1848 temos

		A	B	factor
☾	$14^h.42'.54'',60$	A 29,941	+ 23,7	2,0641
M	18 .41 .10 ,81	+4885	× 20,629	× 20,0288
	20 . 1 .43 ,79	30,4295	4885	41,3414
	20 ,0288	$\frac{1}{15}$ 2,0286		$\frac{1}{2}$ 20,6707
	6	60,1643	Pass.	$20^h.40',2$
	20 ,629	58,1357		
		$\frac{1}{2}$ 29,0678		

Depois as formulas (4) dariam A = 1,960 B = + 2,0
As formulas (3) dão A = 1,9625 B = + 1,9

---

e as de [65 (*)] são

primeiro A e primeiro B $A = \frac{2\Delta}{i} - A', \ B = \frac{A' - A}{2i^2}$

ultimo A e ultimo B $A = A_1 + 2iB_1, \ B = \frac{\frac{\Delta}{i} - A}{i}$.

(*) Alguns calculadores preferem o uso da formula (1). O Sr. T. d'A. de Carvalho usa della do seguinte modo, servindo-se para maior facilidade de uma taboa auxiliar dos quadrados de N.

« Seja AR☾ — AR merid. em tempo, e reduzido á unidade d'hora, = α. Fazendo

$$\frac{1}{9}\left(\frac{A + \alpha B - 2',464}{100}\right) = N,$$

« será o tempo da passagem

$$t = \frac{\alpha}{1 - N} = \alpha + \alpha\,(N + N^2)$$

« proximamente. »

AR☾ — AR merid., reduzidos os graos a minutos, e tomando depois $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$, fica reduzido a tempo, e á unidade d'hora.

« Se a passagem fôr depois da meia noite, será $\alpha > 12$; e então tiram-se-lhe « 12^h para calcular t, que se lhe tornam a ajuntar depois de calculado.

ARTIGO III.

Pontos lunares.

Com este titulo annunciam-se no fundo da pagina VI os seguintes phenomenos.

75. *Apsides.* Estes pontos podem achar-se procurando o tempo correspondente ao maximo e minimo semidiametro da Lua; ou á sua maxima e minima parallaxe; ou ao maximo e minimo movimento horario em longitude, isto é, ao maximo e minimo A da pagina IV.

O ultimo processo é preferivel, por ser mais rapida a variação de A: e ainda que por elle se venha a achar a maxima e minima velocidade na ecliptica, e não na orbita, com tudo a pequena differença, que dahi resulta, é insensivel, relativamente ao grão d'aproximação que se tem em vista.

A questão reduzida a estes termos é semelhante á do n.° 55, e resolve-se pela mesma formula

$$t = \tfrac{1}{2} i - \frac{i\Delta}{\Delta^2},$$

quando se attende só ás differenças 2.as; sendo Δ e Δ^2 relativos aos tres A consecutivos, cujas differenças tem sinaes contrarios. Donde resulta a regra seguinte:

Procurem-se na pagina IV os tres A consecutivos, cujas differenças tem sinaes contrarios; divida-se a primeira differença 1.a, depois de multiplicada por 12, pela somma das duas differenças 1.as; e ajunte-se o quociente á epocha, a que corresponde o primeiro A, e mais 6.h

A somma será o tempo da passagem pelo perigeo, ou pelo apogeo, conforme fôr positiva ou negativa a primeira differença 1.a

Exemplo. Em Janeiro de 1848 a pagina IV da Ephemeride dá

Dias	A	Δ	12Δ	Δ^2
$12^d.12^h$	35,206	+5	60	7
13 . 0	35,211	−2	8,6	
13 . 12	35,209			

Perigeo $12^d 18^h + 9^h = 13^d 3.^h$

76. *Nodos.* Nestes pontos é nulla a latitude: logo

$$☾ + At + Bt^2 = 0\,, \quad t = -\frac{☾}{A + Bt_1}\,;$$

ou só $t = -\frac{☾}{A}$, por ser nelles muito pequena a correcção $+\frac{☾}{A} \cdot \frac{Bt_1}{A}$.

Assim :

Divida-se a latitude anterior pelo A correspondente ; e ajunte-se este numero de horas á epocha a que corresponde a mesma latitude.

Se a latitude mais pequena fôr a posterior, será melhor usar della, subtrahindo então o quociente do tempo que lhe corresponde.

Exemplo. No dia 11 de Janeiro de 1848 ás 12^h a pagina V da Ephemeride dá

$$\begin{array}{ll} \text{lat } ☾ & \text{A} \\ 8{,}22 & \underline{|3{,}120} \\ & \;\;2{,}6 \end{array} \qquad ☋\ 11^d.15^h.$$

77. *Limites.* Na proximidade das maximas e minimas latitudes póde applicar-se ás latitudes a regra que se applicou aos A da longitude no n.° 75 ; mas é mais simples a seguinte :

Na maxima e minima latitude é nullo o movimento horario em latitude ; e por isso

$$A + 2Bt = 0\,, \quad t = -\frac{A}{2B}.$$

Logo :

Quando A mudar de sinal na pagina V, ajunte-se ao meio dia, ou á meia noite, em que isso acontecer, o numero de horas $-\frac{A}{2B}$.

Exemplo. No dia 5 de Janeiro de 1848 ao meio dia teremos

$$\begin{array}{ll} \text{A} & 2\text{B} \\ 93{,}0 & \underline{|27{,}8} \\ & \;\;3{,}3 \end{array} \qquad \text{Limite N } 5^d.3^h.$$

78. *Equador e tropicos.* Applicando ás declinações na pagina VII a regra que se deu no n.° 76 para a entrada nos nodos, acha-se a entrada no equador. E applicando ás declinações na mesma pagina VII a regra que se deu no n.° 77 para a entrada nos limites, acha-se a entrada nos tropicos.

ARTIGO IV.

Longitude media do nodo ascendente da Lua, e equação dos pontos equinocciaes.

79. Com N, dado nas taboas II, III, IV, V, de Burckhardt debaixo do titulo *supplemento do Nodo* e sua variação secular, acha-se na taboa VII a nutação lunar em longitude, que se costuma dar no fundo da pagina VII com o nome de *equação dos pontos equinocciaes em longitude.* A formula, que dá esta taboa, é

$$\text{Nut. lun.} = + 18'' \text{ sen N.}$$

Querendo a nutação solar, acha-se tambem junto á mesma taboa, com os dias do anno por argumento. A equação, que a dá, é

$$\text{Nut. sol.} = - 1'' \text{ sen } 2 ☉.$$

Multiplicando por cos ω a nutação em longitude, acha-se a nutação em ascensão recta.

80. Vimos no n.° 59 que é

$$\text{N} = \text{suppl. } ☊ + 7' = 360°.7' - ☊:$$

logo

$$☊ = 360°.7' - \text{N}.$$

É o que se dá com o titulo de *longitude media do ☊ da Lua.*

Exemplo. No 1.° de Janeiro de 1848 temos pelas taboas de Burckhardt

	Suppl. ☊	Nut. lunar	☊
1848	5ˢ.25°.12'.57",6	em long. + 1",5	175°.14',6
12ʰ	1 .35 ,3	× cos ω 0 ,917	360 . 7
43'	5 ,7	em AR + 1 ,38	184 .52 ,4
N	5 .25 .14.38 ,6		

Assim

Long. med. ☊	Nutação lunar	
184°.52'	em long. + 0',025	em AR + 0',023.

PAGINAS VIII E IX.

ARTIGO I.

Distancias da Lua ás estrellas e planetas.

81. SEjam (fig. 5) *, C, C, o astro, a Lua, e o pólo da ecliptica. Chamando L o angulo C, que é a differença $l - l'$ entre as longitudes da Lua e do astro; λ, λ', as latitudes da Lua e do astro; e Δ a sua distancia; teremos

$$\cos\Delta = \cos L \cos\lambda \cos\lambda' + \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\lambda' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Nas distancias das estrellas orientaes é $l' - l < 180°$, e nas das estrellas occidentaes é $l - l' < 180°$.

82. Para calcular a formula (1) por logarithmos costuma transformar-se nas seguintes

$$\left.\begin{aligned} \cot\varphi &= \cot\lambda \cos L \\ \cos\Delta &= \frac{\operatorname{sen}\lambda \cos(\lambda' - \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)\ (*).$$

Os A e B calcúlam-se pelas formulas dos nn. (63), (64), e (65 *), sendo Δ e Δ^2 relativas ás distancias.

83. Para reduzir a formula (1) a taboa, convém transformar

(*) Como os erros de φ, e do 2.º membro da expressão de cos Δ, provenientes dos desprezos das taboas de logarithmos, dão

$$\delta\Delta = -\frac{k \cot\Delta}{\operatorname{sen} 1'}\left[\delta_1 \log\cos\Delta + \frac{\cos\lambda \cos\lambda' \cos L}{\cos\Delta} \cdot \delta \log\cot\varphi\right],$$

podemos usar com segurança das formulas (2); por que, para $\Delta = 18°$, é $\delta\Delta < 0',007$.

cos λ cos λ' e sen λ seu λ' em cosenos de sommas e differenças ; o que dá

$$\cos\Delta = \frac{\cos(\lambda-\lambda')}{2} - \frac{\cos(\lambda+\lambda')}{2} + \cos L\left(\frac{\cos(\lambda-\lambda')}{2} + \frac{\cos(\lambda+\lambda')}{2}\right),$$

ou $$\cos\Delta = \cos(\lambda-\lambda') - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} L\,[\cos(\lambda-\lambda') + \cos(\lambda+\lambda')]\ (*),$$

da qual se deduzem as duas

$$\cos\Delta = \cos(\lambda-\lambda')\cos^2\tfrac{1}{2}L - \cos(\lambda+\lambda')\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}L \ldots\ldots\ldots\ (3),$$

$$\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\Delta = \text{sen}^2\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda') + \text{sen}^2\tfrac{1}{2}L - \text{sen}^2\tfrac{1}{2}L\,[\text{sen}^2\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda') + \text{sen}^2\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')] \ldots (4).$$

O segundo membro de (3) póde calcular-se por uma taboa de duas entradas, que dê $\cos a \cos^2 \frac{1}{2} b$, entrando horisontalmente com $\lambda - \lambda'$ e $\lambda + \lambda'$, e verticalmente com L. E deve haver columnas d'entradas verticaes supplementares, a fim de que uma sirva para a entrada L do 1.° termo, e outra para a entrada L do 2.° termo. Depois entrando com este segundo membro n'uma taboa de cosenos naturaes, achar-se-ha Δ.

(*) Pondo nestas formulas $\text{sen}^2\frac{1}{2}L = \dfrac{1}{1+\dfrac{60}{N}}$,

resultam as seguintes

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}L = \sqrt{\frac{60}{N}};$$

$$60\cos\Delta = 60\cos(\lambda-\lambda') - \frac{60}{60+N}[60\cos(\lambda-\lambda') + 60\cos(\lambda+\lambda')],$$

que dão o processo exposto no n.° 108 da *Explicação* da Ephemeride de 1804.

Transformando cos (λ — λ') e cos (λ + λ') em senos quadrados das ametades, resulta

$$60\cos\Delta = \begin{cases} 60\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda') - 60\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda') \\ +\,60\cos L\,[1 - \text{sen}^2\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda') - \text{sen}^2\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')], \end{cases}$$

que dá o processo exposto no n.° 79 da *Explicação* da Eph. de 1805.

As multiplicações por 60 servem só para aproveitar a taboa auxiliar IV da Ephemeride de 1804.

Se a taboa se calcular até a 7.ª casa decimal, o erro

$$\delta A = -\frac{\delta m}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} 1'},$$

será $< 0',002$, para $A = 18°$.

84. Mas como a taboa de duas entradas hade ser muito volumosa; ou hade ser de uso menos facil, se para evitar este inconveniente se formar pelo methodo exposto nos nn. 44 e 45; julgamos por isso mais commodo o calculo da formula (4) por meio de uma taboa de $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$. A multiplicação necessaria para formar o 3.º termo é muito facil, por causa da pequenez do segundo factor delle.

Se esta taboa se calcular com sete casas decimaes, o erro de $\frac{1}{2} A$ será tambem $< 0',002$, para $A = 18°$. (*)

A taboa não precisa de ter entradas superiores a 123° para o calculo das distancias; mas serve tambem para aquellas entradas, e em geral para quaesquer superiores a 90°, entrando nella com $180° - a$, o que dá $1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$, e inversamente (**). E por isso convém que tenha duas columnas d'entradas supplementares.

85. Se em logar do pólo C da Ecliptica usarmos do P do equador, as formulas precedentes servirão ainda, mudando as latitudes λ e λ' nas declinações d e d', e a differença $L = l - l'$ das longitudes na differença $A = a - a'$ das ascensões rectas.

Mas como são quasi constantes as latitudes das estrellas, que entram nas distancias, e menores do que as suas declinações; é em geral mais commodo usar das coordenadas referidas á ecliptica do que das referidas ao equador.

86. Para que as distancias se possam bem observar, não devem ser tão pequenas que um dos astros se confunda nos raios do outro; nem devem os astros estar em tal posição, relativamente ao Sol, que algum delles não se possa vêr. E por outra parte não devem as distancias ser tão grandes que não se possam observar no mar com o sextante, ou que um dos astros fique sempre muito proximo do horisonte. D'onde resultam as seguintes regras geraes, que o calculador deve ter em vista:

1.º Não se calcúlam distancias inferiores a 20°, nem superiores a 120°.

(*) O Sr. J. S. de Vasconcellos, lembrando-se tambem da transformação (4), formou esta taboa; no que fez um serviço importante a bem dos calculadores das distancias.

(**) Esta observação póde ser util no calculo das declinações feito pela formula (3) do n.º 43.

2.° Não se calcúlam distancias da Lua a estrellas ou planetas que distam menos de 20° do Sol.

3.° Não se calcúlam distancias dia e meio antes, e dia e meio depois, da conjuncção da Lua com o Sol.

4.° Não se calcúlam distancias da Lua a um astro, quando o Sol está entre ella e esse astro.

Deve porém entender-se que a necessidade de encher as paginas, e a attenção do calculador ás circumstancias que dependem da posição e brilho dos astros, podem alterar um pouco estas regras. Por exemplo algumas vezes calcúlam-se distancias até o limite inferior 17° ou 16°, e até o superior 123°.

87. Para que as observações das distancias sejam bem feitas, e para que os erros dellas tenham a menor influencia no tempo que pelo seu calculo se pertende determinar, devem os astros satisfazer, quanto fôr possivel, ás condições seguintes:

1.° De serem brilhantes; e, quanto fôr possivel, susceptiveis de se observarem de dia; por ser necessario nas viagens tomar as alturas sobre o horisonte, que não se vê bem de noite.

Por estas razões se prefere o Sol; depois os planetas mais brilhantes; e depois as estrellas de 1.ª, 2.ª, e 3.ª, grandeza, que pela sua successão no ceo não deixam entre si grandes intervallos em longitude, a fim de encher convenientemente as paginas com distancias para todos os dias.

2.° De ser rapido o movimento relativo dos astros, para que o erro da distancia inflúa o menos possivel na determinação do tempo.

Por esta razão um dos astros é sempre a Lua, e convém muito que o outro seja um planeta na occasião em que o seu movimento é retrogrado.

3.° De serem pequenas as latitudes das estrellas, para que a variação de L, e por conseguinte do tempo, inflúa mais em Δ; como se vê na equação (1) (*).

(*) A equação (1) dá

$$\delta\Delta = \cos\lambda\cos\lambda' \,.\, \frac{\text{sen}\,L}{\text{sen}\,\Delta} \,.\, \delta L = A\cos\lambda'\,\text{sen}\,*\,\delta t\,;$$

sendo $*$ o angulo $☾*☾$, e $\delta L = A\delta t$.

Suppondo a Lua na ecliptica, da qual pouco se affasta, o factor $\cos\lambda'\,\text{sen}\,*$ é tanto maior, quanto menor é λ'; e igual a 1, no caso de ser λ' nulla: por conseguinte o mesmo tem logar a respeito de $\frac{\delta\Delta}{\delta t}$; isto é, o erro $\delta\Delta$ da distancia inflúe tanto menos no tempo t, quanto menor é a latitude da estrella.

Os astros, que na Ephemeride de Coimbra se fazem entrar nas distancias á Lua, são os seguintes:

Sol; Venus, Marte, Jupiter, Saturno; α d'Aries, Aldebaran, Regulo, Espiga, Antares, e α d'Aquario.

88. As longitudes e latitudes, de que se tem usado para as estrellas, são as que constam da tabella, que ajuntamos.

As latitudes suppoem-se constantes; e ás longitudes, que damos para o 1.° de Janeiro de 1848, é necessario fazer para outra epocha a correcção da precessão, accrescentando-lhes 0',8375 por cada anno posterior, ou tirando-lhes 0',8375 por cada anno anterior, segundo a taboa XX da Ephemeride de 1804.

TABOA

DAS

LONGITUDES E LATITUDES

no 1.° de Janeiro de 1848

Estrellas	Longitudes	Latitudes
α d'Aries	35°.32',185	+ 9°.57',70
Aldebaran	67 .39 ,815	— 5 .28 ,80
Regulo	147 .43 ,045	+ 0 .27 ,60
Espiga	201 .43 ,145	— 2 . 2 ,28
Antares	247 .38 ,345	— 4 .32 ,48
α d'Aquario	331 .13 ,985	+ 10 .40 ,50

89. As posições das estrellas devem ser as apparentes, para o que é necessario ajuntar ás suas longitudes a aberração em longitude achada na taboa respectiva, que tambem ajuntamos, com o argumento: *longitude do Sol.*

A aberração em latitude suppoem-se insensivel, por serem pequenas as latitudes das estrellas de que se usa.

Em quanto ao Sol e planetas, a Ephemeride dá os seus logares apparentes.

TABOA

DA

ABERRAÇÃO EM LONGITUDE

argumento: longitude do Sol.

☉	α d'Aries	Aldebaran	Regulo	Espiga	Antares	α d'Aquario	☉
0°	∓0',277	∓0',130	±0,280	±0,312	±0,130	∓0',295	180°
10	0,307	0,182	0,246	0,327	0,182	0,263	190
20	0,327	0,228	0,202	0,333	0,228	0,222	200
30	0,337	0,267	0,152	0,329	0,267	0,174	210
40	0,337	0,298	0,098	0,315	0,298	0,120	220
50	0,327	0,320	±0,041	0,292	0,320	0,063	230
60	0,307	0,332	∓0',017	0,260	0,332	∓0,005	240
70	0,278	0,334	0,074	0,220	0,334	±0,054	250
80	0,240	0,326	0,130	0,173	0,326	0,112	260
90	0,194	0,308	0,182	0,121	0,308	0,167	270
100	0,143	0,281	0,228	0,065	0,281	0,216	280
110	0,088	0,245	0,267	±0,007	0,245	0,258	290
120	∓0,030	0,202	0,297	∓0',051	0,202	0,292	300
130	±0,029	0,153	0,318	0,108	0,153	0,317	310
140	0,087	0,099	0,330	0,162	0,098	0,333	320
150	0,143	∓0,042	0,333	0,210	±0,040	0,340	330
160	0,195	±0,017	0,325	0,251	∓0,018	0,336	340
170	0,240	0,075	0,307	0,285	0,075	0,321	350
180	±0,277	±0,130	∓0,280	∓0,312	∓0,130	±0,295	360

Exemplo. **No 1.º de Janeiro de 1848 temos a 0ʰ, para Regulo;**

$$\begin{matrix} \lambda \\ e\ \lambda' \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} +\ 0^{\circ}.27',60 \\ +\ 3\ .\ \ 3\ ,66 \end{matrix} \right.$$

Regulo	$147^{\circ}.43',045$	sen λ'	8.7275341
aberr.	$+\ 0\ ,227$	Cl sen φ	0,7074367
	$147\ .43\ ,27$	cos $(\varphi-\lambda)$	9.9921642
C	$222\ .12\ ,89$	cos Δ	9.4271350
L	$74\ .29\ ,62$	Δ	74.29.28,9
cot λ'	1.2718458	Dist. occ.	$74^{\circ}.29',48$
cos L	9.4270718		
cot φ	0,6989176		
φ	$+11^{\circ}.18'.40'',5$		
$-\lambda$	$-\ 0\ .27\ .36\ ,0$		
$\varphi-\lambda$	$+10\ .51\ .\ 4\ ,5$		

Para os A e B no dia 1.º ás 12ʰ a Ephemeride dá

		Distancias
1.ᵈ	0ʰ	74.29,47
1.	12	80.30,91
2.	0	86.35,47
2.	12	92.43,53
3.	0	98.55,46

$$\frac{\Delta}{12}\quad 30',380 \qquad \frac{\Sigma^2}{12.48}\ +0',0115$$

$$-\frac{\Sigma^2}{48}\ -\quad 0,1379$$

$$30,242$$

Assim $A = 30',242$ $B = +\ 11,5.$

As formulas (2) do n.º 63 dariam

$$A = 30',245 \qquad B = +\ 10,9.$$

Para o 1.º de Janeiro a 0ʰ as formulas do n.º (65 *) dão

$$A = 60,240-30,242=29',998\ , \qquad B = \frac{30,242-29,998}{24} = +\ 10,2.$$

90. Mas querendo usar do novo catalogo da *British Associatión*, que já serve para os phenomenos de 1850, é necessario converter em longitudes e latitudes as ascensões rectas e declinações das seis estrellas, que entram nas distancias, tiradas daquelle catalogo; e de mais entendemos que se deve empregar a aberração calculada pelas formulas de que se usou na construcção delle.

Por isso calculámos as longitudes e latitudes das seis estrellas para o 1.° de Janeiro de 1850 pelas formulas (2) do n.° 42, servindo-nos das ascensões rectas e declinações do referido catalogo, e da obliquidade de 23°.27',31",95, segundo Bessel. Esta obliquidade é a que se adopta no *Nautical Almanac*, e na introducção do catalogo: e ainda que nos parece que naquella introducção se tomaram 31" em logar de 32", isso não influe nos valores da aberração e nutação, que deviam servir para a reducção das posições apparentes das estrellas ás medias do catalogo.

Em quanto ás variações annuas das longitudes e latitudes, seja (fig 6) ♈EL a ecliptica verdadeira em $1750+t$, ♈'E'L' a ecliptica verdadeira em $1750+t+dt$, e ♈$_1$ E'EK a ecliptica fixa. E supponhamos, segundo as notações de Bessel (Tabulae Regiomontanae pag. V.),

Π = long. do nodo E, contada na ecliptica do equinoccio de 1750;

π = LEK, inclinação da ecliptica verdadeira sobre a fixa;

ψ_1 = precessão geral.

As eclipticas verdadeiras em $1750+t$ e $1750+t+dt$ cortam-se no ponto I; e podemos considerar o triangulo AIL' como o estado consecutivo de AIL.

Posto isto, o triangulo rectangulo AIL dá

$$\operatorname{sen}\lambda=\operatorname{sen}a\operatorname{sen}\mathrm{I},\quad \operatorname{tg}(l-\mathrm{M})=\operatorname{tg}a\cos\mathrm{I},\quad \operatorname{tg}\lambda=\operatorname{tg}\mathrm{I}\operatorname{sen}(l-\mathrm{M});$$

chamando a a distancia AI do astro a I, M a longitude ♈I do ponto I, e por conseguinte $l-\mathrm{M}=\mathrm{IL}$.

Differenciando as duas primeiras equações, e eliminando a e I por meio dellas e da terceira, resulta

$$\frac{d\lambda}{dt}=\operatorname{sen}(l-\mathrm{M}).\frac{d\mathrm{I}}{dt},\quad \frac{d(\mathrm{IL})}{dt}=-\cos(l-\mathrm{M})\operatorname{tg}\lambda.\frac{d\mathrm{I}}{dt}.$$

Em fim, por ser π pequeno, o triangulo EE'I dá

$$\mathrm{IE}=\frac{\mathrm{EE'}.\pi}{d\pi}=-\frac{d\Pi}{dt}.\frac{\pi}{\frac{d\pi}{dt}}.$$

Logo
$$\mathrm{M}=\Pi+\frac{d\Pi}{dt}.\frac{\pi}{\frac{d\pi}{dt}}+\psi_1.$$

Mas segundo Bessel (Tabul. Regiom. pag. V) é

$$\Pi = 171^\circ.36'.10'' - t\,.\,5'',21$$
$$\pi = t\,.\;\;0'',48892 - t^2.\,0'',0000030719$$
$$\psi_1 = t\,.\,50'',21129 + t^2.\,0'',0001221483\;:$$

será pois $$M = 171^\circ.36'.10'' - 2t.5'',21 + t.50'',21$$

$$= 171^\circ.36'.10'' + t.39'',79\;;$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -[0'',48892 - t\,.\,0'',0000061438]\,.\,\mathrm{sen}\,(l - M)\;;$$

e $$\frac{dl}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt} + [0'',48892 - t\,.\,0'',0000061438]\,.\,\cos\,(l - M)\,\mathrm{tg}\,\lambda\;;$$

porque a longitude varia em virtude da variação de IL e da precessão annua.

91. Em quanto á aberração, devemos usar da constante 20'',42, que se adoptou naquelle catalogo, e por conseguinte das formulas:

$$\text{aberr. em long.} = -20'',42\,\frac{\cos\,(\odot - l)}{\cos\lambda}\,,$$

$$\text{aberr. em lat.} = -20'',42\,.\,\mathrm{sen}\,(\odot - l)\,\mathrm{sen}\,\lambda.$$

92. Com as formulas dos dous nn. precedentes, e com as (2) do n.° 42, construimos as taboas seguintes. A primeira póde servir para muitos annos, accrescentando 0',0000041 em cada anno á variação annua das longitudes; porque a differença entre os valores de $\frac{dl}{dt}$ e $\frac{d\lambda}{dt}$ correspondentes a 1850 e 1950 mostra que é 0',00041 a mudança secular daquella variação, e que não passa de 0',00005 a da variação annua das latitudes.

TABOA

DAS

LONGITUDES E LATITUDES

no 1.º de Janeiro de 1850

Estrellas	Longitudes	var. ann.	Latitudes	var. ann.
α d'Aries	35°.33',904	+ 0',83621	+ 9°.57',646	+ 0',00554
Aldebaran	67 .41 ,578	0 ,83746	— 5 .28 ,651	+ 0 ,00786
Regulo	147 .44 ,718	0 ,83732	+ 0 .27 ,609	+ 0 ,00343
Espiga	201 .44 ,931	0 ,83701	— 2 . 2 ,594	— 0 ,00395
Antares	247 .40 ,117	0 ,83709	— 4 .32 ,996	— 0 ,00786
α d'Aquario	331 .15 ,636	0 ,83583	+10 .40 ,162	— 0 ,00298

TABOA

DA

ABERRAÇÃO EM LATITUDE.

Argumento: longitude do Sol.

☉	α d'Aries	Aldebaran	Regulo	Espiga	Antares	α d'Aquario	☉
0°	± 0',034	∓ 0',030	± 0',001	± 0',004	± 0',025	∓ 0',030	180°
10	025	027	002	002	023	039	190
20	016	024	002	± 000	020	047	200
30	± 006	020	002	∓ 002	016	054	210
40	∓ 005	015	003	004	012	059	220
50	015	010	003	006	008	062	230
60	024	∓ 005	003	008	± 004	063	240
70	033	± 001	003	009	∓ 001	062	250
80	041	007	003	010	006	059	260
90	048	012	002	011	010	055	270
100	053	017	002	012	014	049	280
110	057	022	002	012	018	042	290
120	059	026	001	012	021	033	300
130	059	029	001	012	024	023	310
140	057	031	± 000	011	026	012	320
150	054	032	∓ 000	010	027	∓ 001	330
160	049	032	001	008	027	± 010	340
170	042	031	001	006	026	020	350
180	∓ 0',034	± 0',030	∓ 0',001	∓ 0',004	∓ 0',025	± 0',030	360

TABOA

DA

ABERRAÇÃO EM LONGITUDE

Argumento : longitude do Sol.

☉	α d'Aries	Aldebaran	Regulo	Espiga	Antares	α d'Aquario	☉
0°	∓ 0',281	∓ 0',130	± 0',288	± 0',316	± 0',129	± 0',304	180°
5	293	157	271	326	156	288	185
10	312	183	252	333	181	270	190
15	324	207	231	338	205	250	195
20	333	230	208	340	228	228	200
25	340	251	184	340	249	205	205
30	344	270	158	337	269	180	210
35	346	288	131	331	286	154	215
40	345	303	104	323	300	126	220
45	341	316	075	313	312	097	225
50	335	326	046	300	323	068	230
55	326	334	± 017	285	331	038	235
60	315	339	∓ 013	267	336	± 008	240
65	301	342	043	247	339	∓ 022	245
70	285	342	072	226	339	052	250
75	267	339	101	203	336	082	255
80	247	334	129	179	331	111	260
85	225	326	156	153	324	139	265
90	201	316	182	126	314	166	270
95	176	304	206	098	302	192	275
100	149	289	229	069	287	216	280
105	121	272	250	040	270	239	285
110	093	253	269	± 010	251	260	290
115	064	232	286	∓ 0',020	230	279	295
120	034	209	301	049	207	296	300
125	± 004	185	314	078	183	311	305
130	∓ 027	159	324	107	158	323	310
135	057	132	332	135	131	333	315
140	086	104	337	161	103	340	320
145	115	075	340	187	074	344	325
150	143	046	340	211	045	346	330
155	170	± 016	338	233	± 016	345	335
160	195	∓ 014	333	253	∓ 014	342	340
165	219	044	325	272	044	336	345
170	242	073	315	289	073	328	350
175	263	102	303	304	101	317	355
180	± 0',281	± 0',130	∓ 0',288	∓ 0',316	∓ 0',129	± 0',304	360

PAGINA X.

ARTIGO I.

Tempos dos Eclipses dos Satellites de Jupiter.

93. O Calculo dos tempos dos eclipses dos satellites de Jupiter faz-se pelas Taboas de Damoiseau publicadas em 1836; nas quaes se dão as explicações necessarias para o seu uso, e para o conhecimento das formulas em que se fundam. Por isso limitar-nos-hemos a algumas advertencias que podem ser uteis na pratica.

94. *Primeiro satellite.* O calculo dos eclipses do 1.º satellite póde fazer-se directamente de quatro em quatro, attendendo á differença d'epochas e de meridianos, que para Coimbra é $12^h.43'$; depois interpolar com differenças 2.^{as} para $\frac{1}{2}$, a fim de os ter de dous em dous; e finalmente tomar nestes a parte proporcional a $\frac{1}{2}$, para os ter seguidos.

Mas os eclipses achados por esta parte proporcional podem ter um erro, cujo limite $5''$ é o maximum da differença que produz na equação XIII o salto de 180° que dá o argumento (4) na passagem d'um eclipse para o consecutivo: e por isso, quando se quizer maior exactidão do que esse limite, póde fazer-se a interpolação sem attender á equação XIII, e applicar no fim esta equação a cada eclipse.

O argumento (5) tambem dá um salto, do qual pódem resultar erros de $1''$ nas duas interpolações.

95. No fim das taboas acha-se uma advertencia sobre os casos em que se calcúla a immersão ou a emersão. Se a não houvesse, o calculo das posições do satellite serviria para o mesmo fim, como serve nos outros satellites.

Acha-se outra advertencia relativa aos casos em que não se calcúlam os eclipses, fundada no argumento (3) que depende da distancia angular de Jupiter ao Sol; advertencia que equivale, com pouca differença, á regra, que se adopta, de não calcular os eclipses um mez antes, e um mez depois, da conjuncção. A advertencia e a regra applicam-se tambem aos outros satellites.

96. *Segundo satellite.* Podemos semelhantemente interpolar os eclipses do 2.º satellite; advertindo que do salto de 180°, que dá o argumento (4) na passagem de um eclipse para o consecutivo, póde resultar um erro, cujo limite 34″ é o maximum da differença produzida por aquelle salto na equação XII: e por isso, quando fôr necessaria maior approximação do que este limite, dever-se-ha interpolar sem a equação XII, e applical-a no fim em cada eclipse.

97. *Terceiro satellite.* No 3.º satellite podem calcular-se os eclipses de dous em dous, pondo de parte a equação XIV do argumento (5), que é muito irregular; depois interpolar para $\frac{1}{2}$; e no fim accrescentar aquella equação em cada eclipse.

A irregularidade da equação XIV provém não só do salto de 180° do argumento (5), que produz nella uma differença cujo limite é 18″; mas tambem dos 26° restantes, que dão áquelle argumento a variação rapida de 52° de dous em dous eclipses.

E mesmo a interpolação feita sem a equação XIV não satisfaz, quando se quer grande exactidão, por variarem rapidamente os argumentos (3) e (4), cujas equações X e XIII dependem de coefficientes consideraveis.

98. *Quarto satellite.* No quarto satellite conhece-se a impossibilidade do eclipse, quando o numero M, com o qual se procura o argumento Q, se não acha na taboa. Ora a duração do eclipse depende de

$$\sqrt{Q+Z}=\sqrt{1-(M-a)^2+Z},$$

sendo $a=1,49000$;

logo o eclipse será possivel sómente quando esta expressão fôr real, o que suppõe

$$Z+1-(M-a)^2>0,$$

isto é, $M<a+\sqrt{1+Z}$ e $M>a-\sqrt{1+Z}$.

Tomando pois o maximum da funcção periodica Z, determinam-se os limites, fóra dos quaes é imaginaria a funcção $\sqrt{Q+Z}$, não se encontrando por isso $M<0,48$ e $M>2,50$ na taboa XXIX.

ARTIGO II.

Visibilidade dos eclipses.

99. NÃo se julgam visiveis os eclipses quando Jupiter está menos de 8° acima, ou o Sol menos de 8° abaixo, do horisonte.

A formula, que dá o angulo horario correspondente a 8° acima do horisonte, é

$$\cos H = \frac{\text{sen } 8° - \text{sen } P \text{ sen } D}{\cos P \cos D},$$

ou $$\text{sen } \tfrac{1}{2} H = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{D-P}{2} + 49°\right) \cos\left(\frac{D-P}{2} - 49°\right)}{\cos P \cos D}}.$$

A taboa VIII da Ephemeride de 1805 dá este angulo.

A formula, que dá o angulo horario correspondente a 8° abaixo do horisonte, é

$$\cos H = \frac{-\text{sen } 8° - \text{sen } P \text{ sen } D}{\cos P \cos D};$$

que se torna na precedente pondo nella —D em logar de D, e 180° — H em logar de H. Pelo que serve a mesma taboa, entrando nella com a declinação tomada com sinal contrario, e contando os angulos horarios desde o meridiano inferior.

D'onde resultam as regras dadas no n.° 91 da Explicação da Ephemeride de 1805.

O Sr. Barreto Feyo deo a seguinte forma á taboa especial calculada para a latitude de Coimbra pelo Sr. Vasconcellos.

TABOA

DOS

ANGULOS HORARIOS EM 8° D'ALTURA

PARA A

LATITUDE DE COIMBRA.

Argumento ; a Declinação do astro.

Para uma Declinação austral.

Arg.	0'. ang. hor.	10'. ang. hor.	20'. ang. hor.	30' ang. hor.	40'. ang. hor.	50'. ang. hor.	60'. ang. hor.
0.°	5^h.18',0	5^h.17',5	5^h.16',9	5^h.16',3	5^h.15',7	5 .15',1	5^h.14',5
1.	5 .14,5	5 .14,0	5 .13,4	5 .12,8	5 .12,2	5 .11,6	5 .11,0
2.	5 .11,0	5 .10,5	5 . 9,9	5 . 9,3	5 . 8,7	5 . 8,1	5 . 7,5
3.	5 . 7,5	5 . 7,0	5 . 6,4	5 . 5,8	5 . 5,2	5 . 4,6	5 . 4,0
4.	5 . 4,0	5 . 3,4	5 . 2,8	5 . 2,2	5 . 1,6	5 . 1,0	5 . 0,4
5.	5 . 0,4	4 .59,8	4 .59,2	4 .58,6	4 .58,0	4 .57,4	4 .56,8
6.	4 .56,8	4 .56,2	4 55,6	4 .55,0	4 .54,4	4 .53,8	4 .53,1
7.	4 .53,1	4 .52,5	4 .51,9	4 .51,3	4 .50,7	4 .50,1	4 .49,4
8.	4 .49,4	4 .48,8	4 .48,2	4 .47,6	4 .47,0	4 .46,4	4 .45,7
9.	4 .45,7	4 .45,1	4 .44,5	4 .43,8	4 .43,2	4 .42,6	4 41,9
10.	4 .41,9	4 .41,3	4 .40,7	4 .40,0	4 .39,4	4 .38,7	4 .38,1
11.	4 .38,1	4 .37,4	4 .36,8	4 .36,1	4 .35,4	4 .34,8	4 .34,1
12	4 .34,1	4 .33,5	4 .32,8	4 .32,1	4 .31,5	4 .30,8	4 .30,1
13.	4 .30,1	4 .29,5	4 .28,8	4 .28,1	4 .27,4	4 .26,7	4 .26,0
14.	4 .26,0	4 .25,3	4 .24,6	4 .23,9	4 .23,2	4 .22,5	4 .21,8
15.	4 .21.8	4 .21,1	4 .20,4	4 .19,7	4 .19,0	4 .18,3	4 .17,6
16.	4 .17.6	4 .16,9	4 .16,2	4 .15,5	4 .14,8	4 .14,1	4 .13,3
17.	4 .13.3	4 .12,6	4 .11,8	4 .11,1	4 .10,3	4 . 9,6	4 . 8,8
18.	4 . 8.8	4 . 8,1	4 . 7,3	4 . 6,6	4 . 5,8	4 . 5,1	4 . 4,3
19.	4 . 4.3	4 . 3,5	4 . 2,7	4 . 1,9	4 . 1,1	4 . 0,3	3 .59,5
20.	3 .59.5	3 .58,8	3 .58,0	3 .57,2	3 .56,4	3 .55,6	3 .54,8
21.	3 .54.8	3 .54,0	3 .53,2	3 .52,4	3 .51,5	3 .50,7	3 .49,8
22.	3 .49.8	3 .49,0	3 .48,1	3 .47,3	3 .46,4	3 .45,6	3 .44,7
23.	3 .44.7	3 .43,9	3 .43,0	3 .42,1	3 .41,2	3 .40,3	3 .39,4
24.	3 .39.4	3 .38,5	3 .37,5	3 .36,5	3 .35,5	3 .34,5	3 .33,6
25.	3 .33.6	3 .32,6	3 .31,7	3 .30,8	3 .29,9	3 .29,0	3 .28,1

TABOA

DOS

ANGULOS HORARIOS EM 8° D'ALTURA

PARA A

LATITUDE DE COIMBRA.

Argumento: a Declinação do astro.

Para uma Declinação boreal.

Arg.	0′. ang. hor.	10′. ang. hor.	20′. ang. hor.	30′. ang. hor.	40′. ang. hor.	50′. ang. hor.	60′. ang. hor.
0.°	$5^{h}.18',0$	$5^{h}.18',6$	$5^{h}.19',1$	$5^{h}.19',7$	$5^{h}.20',2$	$5\ .20',8$	$5^{h}.21',4$
1.	5 .21,4	5 .21,9	5 .22,5	5 .23,1	5 .23,6	5 .24,2	5 .24,8
2.	5 .24,8	5 .25,3	5 .25,9	5 .26,5	5 .27,0	5 .27,6	5 .28,2
3.	5 .28,2	5 .28,7	5 .29,3	5 .29,9	5 .30,4	5 .31,0	5 .31,6
4.	5 .31,6	5 .32,1	5 .32,7	5 .33,3	5 .33,8	5 .34,4	5 .35,0
5.	5 .35,0	5 .35,5	5 .36,1	5 .36,6	5 .37,2	5 .37,7	5 .38,3
6.	5 .38,3	5 .38,8	5 .39,4	5 .40,0	5 .40,5	5 .41,1	5 .41,7
7.	5 .41,7	5 .42,3	5 .42,8	5 .43,4	5 .44,0	5 .44,5	5 .45,1
8.	5 .45,1	5 .45,6	5 .46,2	5 .46,7	5 .47,3	5 .47,8	5 .48,4
9.	5 .48,4	5 .48,9	5 .49,5	5 .50,0	5 .50,6	5 .51,1	5 51,7
10.	5 .51,7	5 .52,2	5 .52,8	5 .53,4	5 .53,9	5 .54,5	5 .55,1
11.	5 .55,1	5 .55,6	5 .56,2	5 .56,8	5 .57,3	5 .57,9	5 .58,5
12	5 .58,5	5 .59,0	5 .59,6	6 . 0,2	6 . 0,7	6 . 1,3	6 . 1,9
13.	6 . 1,9	6 . 2,4	6 . 3,0	6 . 3,5	6 . 4,1	6 . 4,6	6 . 5,2
14.	6 . 5,2	6 . 5,8	6 . 6,3	6 . 6,9	6 . 7,5	6 . 8,0	6 . 8,6
15.	6 . 8,6	6 . 9,2	6 9,7	6 .10,3	6 .10,9	6 .11,5	6 .12,1
16.	6 .12,1	6 .12,6	6 .13,2	6 .13,8	6 .14,4	6 .15,0	6 .15,6
17.	6 .15,6	6 .16,1	6 .16,7	6 .17,3	6 .17,9	6 .18,5	6 .19,1
18.	6 .19,1	6 .19,6	6 .20,2	6 .20,8	6 .21,4	6 .22,0	6 .22,6
19.	6 .22,6	6 .23,1	6 .23,7	6 .24,3	6 .24,9	6 .25,5	6 .26,1
20.	6 .26,1	6 .26,7	6 .27,3	6 .27,9	6 .28,5	6 .29,1	6 .29,7
21.	6 .29,7	6 .30,3	6 .30,9	6 .31,5	6 .32,1	6 .32,7	6 .33,3
22.	6 .33,3	6 .33,9	6 .34,5	6 .35,1	6 .35,7	6 .36,3	6 .37,0
23.	6 .37,0	6 .37,6	6 .38,2	6 .38,8	6 .39,4	6 .40,0	6 .40,7
24.	6 .40,7	6 .41,3	6 .41,9	6 .42,6	6 .43,2	6 .43,8	6 .44,5
25.	6 .44,5	6 .45,1	6 .45,8	6 .46,4	6 .47,1	6 .47,7	6 .48,4

100. Sabe-se proximamente o tempo do nascimento e occaso de Jupiter, tirando e ajuntando seis horas ao tempo da sua passagem pelo meridiano, ou, mais exactamente, tirando e ajuntando o arco semidiurno (n.° 21); e semelhantemente o nascimento e occaso do Sol, que desde 1848 se dá na Ephemeride. Donde resultam dous limites que, apezar de serem menos estreitos do que os precedentes, dados pela taboa dos angulos horarios em 8° de altura, com tudo servem para julgar immediatamente da visibilidade ou invisibilidade da maior parte dos eclipses (*).

Por exemplo, se o planeta passar pelo meridiano ás 12ʰ, serão visiveis na maior parte da noite os eclipses que então acontecerem; e o intervallo em que haverá esta visibilidade será tanto maior, quanto maior fôr o *dia* do planeta e a noite solar, isto é, quanto maior fôr a declinação boreal do planeta, e a austral do Sol.

ARTIGO III.

Posições dos satellites no tempo dos eclipses.

101. PAra determinar estas posições servem as taboas auxiliares IX, X, XI, XII, da Ephemeride de 1805, cujo uso está sufficientemente explicado no n.° 93 da *Explicação* da mesma Ephemeride. Mas para intelligencia dos resultados, que daquellas taboas se deduzem, accrescentamos o seguinte.

(*) O Sr. Barreto Feyo lembra que, sendo $42'$ a minima differença entre o angulo horario do Sol correspondente a 8° abaixo do horisonte e o correspondente ao nascimento ou occaso, se podem tomar $N-42'$ e $O+42'$ por limites relativos ao Sol mais approximados do que N e O; sendo N e O os tempos do seu nascimento e do seu occaso.

Concordando com a utilidade desta observação, accrescentaremos que, por ser $8^\circ = 20 \times 24'$, se poderia prescindir da taboa dos angulos horarios em 8° d'altura, e tomar por limites $N \mp 20k$ e $O \pm 20k$: sendo N e O os tempos do nascimento e occaso do Sol, ou do planeta; k o numero positivo achado na quarta columna da taboa da pagina 18, com a respectiva declinação por argumento; e tendo logar os sinaes superiores para o Sol, e os inferiores para o planeta.

102. 1.° Sejam (fig. 7) S, T, I, os centros do Sol, da Terra, e de Jupiter, desde a opposição até á conjuncção, isto é, em quanto o Sol está ao occidente do planeta. E seja ab a orbita do satellite, que se move no sentido ab d'occidente para oriente.

As distancias do centro de Jupiter aos pontos d'entrada e salida do satellite na sombra, são

$$\mathrm{IT}a=\mathrm{IT}c-a\mathrm{T}c=\mathrm{D}-\delta,$$

$$\mathrm{IT}b=\mathrm{IT}c+b\mathrm{T}c=\mathrm{D}+\delta;$$

suppondo a e b projectados no plano I$\mathrm{T}c$, que differe pouco do da orbita de Jupiter, em virtude da pequena inclinação desta orbita a respeito da ecliptica.

Se a terra está n'uma posição T', visto da qual o planeta fica muito proximo da opposição, póde o raio T'IM' passar á direita de Ta, ficando entre T'a e T'c; e neste caso é

$$\mathrm{IT}'a=c\mathrm{T}'a-c\mathrm{T}'\mathrm{I}=\delta'-\mathrm{D}'.$$

Quando pois a terra está em T, longe da opposição, as phases tem ambas logar ao oriente do planeta, e é

$$\text{absc. da entrada } a, \text{ ou imm. or.} = \mathrm{D}-\delta,$$

$$\text{absc. da salida } b, \text{ ou em. or.} = \mathrm{D}+\delta:$$

mas quando a terra está muito proxima da opposição, póde o raio IT' passar á direita de T'a, tendo a entrada logar ao occidente do planeta; e então é

$$\text{absc. da entrada, ou imm. occ.} = \delta'-\mathrm{D}'.$$

103. 2.° Desde a conjuncção até a opposição (fig. 8), isto é, quando o Sol está ao oriente do planeta, a discussão da figura, semelhante á da antecedente, dá

$$\text{absc. da entrada, ou imm. occ.} = \mathrm{D}+\delta,$$

$$\text{absc. da salida, ou em. occ.} = \mathrm{D}-\delta:$$

mas quando a terra se approxima muito de IS, o que succede junto da opposição, póde T'I ficar entre T'c e T'b, cahindo a emersão ao oriente do planeta; e então será

abse. da sahida, ou em. $= \delta' + D'$.

104. Logo mostraremos (n.° 112) que a phase D — δ só é visivel quando $D - \delta > \Delta$, para que o satellite não se esconda de traz do planeta; sendo Δ achado como se diz no citado n.° 93 da *Explicação* da Ephemeride de 1805. Vejamos pois em que casos se verifica esta condição.

Usando dos maximos valores de L e λ, para ter os minimos de δ e Δ, acharemos nas taboas, de que fallámos, relativamente ao 1.° satellite o seguinte:

maximo D	1,246	minimo Δ	0,928
minimo δ	0,939		
maximo D—δ	0,307		$D - \delta < \Delta$.

Para D = 0, e λ do mesmo sinal que L, é $\delta - D > \Delta$; e o maximo valor de $\delta - D - \Delta$ é $0,939 - 0,928 = 0,017$ (*).

Por onde se vê que para o 1.° satellite não é visivel a phase correspondente a D—δ positivo, podendo-o sómente ser a correspondente a D + δ: e que póde ser visivel a correspondente a D—δ negativo, a qual tem, como dissemos, a mesma denominação, imm. ou em., que teria se D — δ fosse positivo, mas em sentido opposto, isto é, oriental ou occidental quando fosse occidental ou oriental para D—δ positivo.

Uma analyse semelhante mostra que nos outros satellites podem ser visiveis as phases correspondentes a D—δ positivo ou a D—δ negativo; e tantas mais vezes quanto mais longe de Jupiter o satellite atravessa a sombra.

(*) Com effeito de $\delta = \sqrt{1 - L^2}$ tira-se $d\delta = -\frac{L dL}{\sqrt{1 - L^2}}$; e por conseguinte a maxima differença $\delta - \Delta$, proveniente do augmento λ, corresponde aos maximos L e λ; o que a taboa XII confirma.

Investigação das taboas auxiliares.

Não se achando estas taboas acompanhadas das formulas pelas quaes foram construidas, diremos o modo como nos parece que o poderiam ser, conforme a analyse que dellas fizemos.

105. *Taboa* IX. No triangulo ITc (fig. 7) chamemos R e r as distancias IT e Ic de Jupiter á Terra e ao centro da sombra, tomando por unidade, ou modulo, o raio de Jupiter.

Teremos $$\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{T} = r\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{T}+\mathrm{I});$$

e o arco D = R . T, tirado por I, que subtende a distancia angular de Jupiter ao centro da sombra vista da Terra, será

$$\mathrm{D} = r\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{T}+\mathrm{I}), \quad \text{ou } \mathrm{D} = r\,\mathrm{sen}\,(\pi-\mathrm{T}) \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

chamando π a parallaxe annua SIT (*).

O arco tirado por c, que subtende a mesma distancia, é $r\,\mathrm{sen}\,\pi$.

106. Se para usar da formula (1) tomarmos por r os numeros que Delambre dá no quadro da pagina 481 do tomo 3.° da Astronomia, acharemos que, d'entre elles, os que dão valores mais proximos dos da taboa IX são os de Newton; a não se tomarem os de Pound reduzidos ao modulo com um semidiametro de Jupiter inferior a 18'',625.

107. *Taboa* X. Se a latitude do satellite fôr da forma

$$(\mathrm{L}) = m\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{M}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

rectificando m, e multiplicando pelo raio do circulo, a que ella pertence, teremos o arco de latitude

$$\mathrm{L} = \frac{c}{180} \, . \, mr\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{M}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

sendo c a razão do diametro para a circumferencia.

(*) No 2.° membro de (1) basta fazer (T) = 18'',6 r sen π; sendo 18'',6 o semidiametro de Jupiter.

108. Vejamos como a (L) se póde dar a forma (2).

No tomo 3.° pag. 506 da Astronomia de Delambre acham-se expressões da forma

$$H = \mathcal{Z}'' + H', \quad I = \mathcal{Z}'' + I', \quad K = \mathcal{Z}'' + K', \quad N = \mathcal{Z}'' + N';$$

e, para qualquer dos satellites,

$$(L) = h \text{ sen } H + i \text{ sen } I + k \text{ sen } K + n \text{ sen } N;$$

como na *Mechanica Celeste* tom. 4.° (pag. 147, 156, 163, 168), attendendo a ser a longitude de Jupiter igual á do satellite na conjuncção.

Para dar pois á expressão de (L) a forma (2), temos

$$\left.\begin{array}{l}(h\cos H' + i\cos I' + k\cos K' + n\cos N')\text{sen}\mathcal{Z}'' \\ +(h\text{sen}H' + i\text{sen}I' + k\text{sen}K' + n\text{sen}N')\cos\mathcal{Z}''\end{array}\right\} = m\cos M'\text{sen}\mathcal{Z}'' + m\text{sen}M'\cos\mathcal{Z}'',$$

suppondo $M = \mathcal{Z}'' + M'$.

E satisfaremos a esta condição, pondo

$$h \cos H' + i \cos I' + k \cos K' + n \cos N' = m \cos M',$$

$$h \text{ sen } H' + i \text{ sen } I' + k \text{ sen } K' + n \text{ sen } N' = m \text{ sen } M',$$

e por conseguinte

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang } M' = \dfrac{h \text{ sen } H' + i \text{ sen } I' + k \text{ sen } K' + n \text{ sen } N'}{h \cos H' + i \cos I' + k \cos K' + n \cos N'} = \dfrac{p}{q}, \\ m = \dfrac{p}{\text{sen } M'} = \dfrac{q}{\cos M'}\end{array}\right\} \ldots\ldots (4).$$

109. Como H', I', K', N', dependem de t, é necessario calcular M' e m para cada anno, ou para intervallos taes que nelles se torne sensivel a variação destas incognitas. E se os valores se reproduzirem perio-

dicamente, bastará calculal-os para os intervallos comprehendidos n'um dos periodos.

Por exemplo, applicando as equações (4) ao 2.° satellite para $t=43$, ou para o anno 1793, acharemos M′ pouco differente de 45°. Demais no intervallo de 30 annos o termo dependente de t em N′ é $12°,03\times30=360°$ proximamente; o que mostra que de 30 em 30 annos se reproduzirá N′, e por conseguinte M′, para este satellite, suppondo H′ constante.

Quando pois acharmos $M'=45°+g°$, para um dos tres ultimos satellites, entraremos na sua taboa com ♃ $\pm g°$; o que tornará a columna dos argumentos a mesma que para o 1.° satellite, a respeito do qual é proximamente $M'=H'=45°$.

Por este theor se explica o methodo que se deverá seguir para formar uma taboa semelhante á taboa X do Sr. Monteiro, cujos numeros differem com tudo sensivelmente dos que dá a applicação das formulas (4) e (3) aos elementos adoptados na memoria de Laplace (Mem. da Ac. das Sc. de Paris 1789, pag. 261, 272, 281, 288), mas não tanto que a differença seja muito prejudicial ao fim da sua construcção.

(*) Formado o triangulo espherico rectangulo entre o nodo da orbita do satellite sobre a de Jupiter, o satellite, e a sua projecção na orbita de Jupiter; teriamos

$$\text{tang } L = \text{tang } i \text{ sen } (♃ - n),$$

sendo i a inclinação da orbita, ♃ o logar de Jupiter, e n o do nodo.

Como a orbita do satellite retrograda sobre um plano, do qual se conhece a inclinação sobre a orbita de Jupiter, e a sua mutua intersecção, commum com a do equador; o triangulo espherico formado entre esta intersecção A, e as B e C da orbita do satellite com o mesmo plano e com a orbita de Jupiter, daria o effeito daquella retrogradação AB sobre AC e C, isto é, daria n e i, sendo conhecidas A, AB, B, e o logar de A (vej. Bailly, theoria dos satellites de Jupit., pag. 116, 124, 137, 143, e *Mec. Cel.* tom. 4.° pag. X, XII, XIII, XIV.

Parece-nos pois que assim se poderia resolver o mesmo problema; e é natural que deste modo procedesse o Sr. Monteiro.

Taboa XI. 110. Seja θ a latitude heliocentrica da terra relativamente ao plano (O) da orbita de Jupiter; θ' e θ'' as latitudes geocentrica e joviecentrica do Sol relativamente a um plano (P), tirado por TI (fig. 7) parallelamente ás bandas; ☊ a longitude do nodo ascendente de (O); I a inclinação de (O) sobre a ecliptica; e finalmente S e R as distancias medias da terra e de Jupiter ao Sol.

Abaixando do Sol uma perpendicular sobre (P), teremos

$$S \operatorname{sen} \theta' = R \operatorname{sen} \theta'', \operatorname{sen} \theta'' = \frac{S}{R} \operatorname{sen} \theta';$$

ou

$$\operatorname{sen} \theta'' = \frac{S}{R} \operatorname{sen} \theta,$$

quando se despreza a differença $\theta' - \theta$ proveniente da inclinação de (O) sobre (P).

O triangulo espherico formado pela latitude θ; pela distancia $☊ - ♉ = ☊ - ☉ - 180°$ da terra ao nodo de (O), e pela projecção desta distancia sobre (O), dá

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} (☉ - ☊) \operatorname{sen} I;$$

e substituindo na expressão precedente, resulta

$$\operatorname{sen} \theta'' = \frac{S}{R} \operatorname{sen} (☉ - ☊) \operatorname{sen} I.$$

Mas o arco de latitude do centro da sombra, abaixado sobre (P), é $\lambda = r\theta''$;

logo $$\lambda = r \frac{S}{R} \operatorname{sen} (☉ - ☊) \operatorname{sen} I \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

que, por ser $\frac{R}{S} = 5{,}203$, sen I $= 0{,}023$, ☊ $= 99°$, dá

$$\lambda = 0{,}00442\, r \operatorname{sen} (☉ - 99°) \ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

Dando a r nesta equação os valores de Newton das distancias dos satellites a Jupiter, resulta com muito pouca differença a taboa XI do Sr. Monteiro.

Taboa XII. 111. Seja δ_1 o semidiametro apparente da sombra, quando o satellite não tem latitude ao eclipsar-se; e ρ o raio da sombra, supposta circular.

Quando o satellite tiver latitude, a projecção do raio será a abscissa $\sqrt{\rho^2 - L^2}$ correspondente á ordenada L; e a do semidiametro apparente será

$$\delta = \delta_1 \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 - L^2}}{\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

que se reduz a

$$\delta = \sqrt{1 - L^2} = \cos \text{arc} (\text{sen} = L) \ldots\ldots\ldots\ldots (6'),$$

quando se suppõe $\rho = 1$ e $\delta_1 = 1$, isto é, quando se despreza a differença dos raios das secções do cone de sombra nas regiões de Jupiter e do satellite, e a influencia da parallaxe annua na grandeza de δ_1.

112. Quando o satellite estiver quasi a occultar-se de traz do disco de Jupiter; se com $L + \lambda$ procurarmos na taboa XII a funcção Δ correspondente, será Δ a projecção do semidiametro do planeta; porque suppomos iguaes os semidiametros da sombra e de Jupiter na formula (6'). Donde resulta que não póde haver eclipse senão quando fôr $D - \delta > \Delta$.

DOS ECLIPSES.

DEbaixo deste titulo comprehendemos:

1.° os eclipses do Sol, e as occultações dos planetas e estrellas pela Lua;

2.° os eclipses da Lua;

3.° as passagens de Venus e Mercurio pelo disco do Sol.

ARTIGO I.

Eclipses do Sol, e occultações dos planetas e estrellas pela Lua.

113. TRataremos juntamente destas tres especies de eclipses, por serem communs a todas a maior parte das cousas que temos que dizer; mas indicaremos o que é particular a cada uma dellas, usando então do nome, que lhe fôr relativo, *Sol*, *planeta*, *ou estrella*, em logar do geral *astro*.

Calculo dos eclipses em logares determinados.

No que vamos dizer consideraremos, em geral, um logar qualquer; deverá porém entender-se que nos referimos especialmente á latitude de Coimbra, quando os resultados, a que chegarmos, dependerem dos valores numericos de expressões em que entre a latitude do logar.

114. I. *Dos tempos dos eclipses.* Sejam d_1 e d'_1 as declinações apparentes do astro occultado $*$, e da Lua ☾, n'um instante proximo do da conjuncção apparente em ascensão recta; a_1 e a'_1 as suas ascensões rectas apparentes no mesmo instante; e c a distancia apparente dos centros.

O triangulo ALP (fig. 9) entre as posições apparentes do astro, Lua, e pólo do equador, dá

$$\text{sen}\,A\,\text{sen}\,c = \cos d'_1\,\text{sen}\,(a'_1 - a_1),\ \cos A\,\text{sen}\,c = \frac{\text{sen}\,d'_1 - \text{sen}\,d_1\cos c}{\cos d_1},$$

$$\cos c = \cos(a'_1 - a_1)\cos d'_1\cos d_1 + \text{sen}\,d'_1\,\text{sen}\,d_1;$$

das quaes se tira

$$\text{sen}^2 c = \cos^2 d'_1\,\text{sen}^2(a'_1 - a_1) + [\text{sen}\,d'_1\cos d_1 - \cos d'_1\,\text{sen}\,d_1\cos(a_1' - a_1)]^2;$$

e por conseguinte

$$c^2 = (a'_1 - a_1)^2\cos^2 d'_1 + (d'_1 - d_1)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

desprezando os quadrados de c, $d'_1 - d_1$, e $a'_1 - a_1$.

115. Desprezando os quadrados e productos das parallaxes, a parallaxe da Lua em angulo horario (Astr. de Biot liv. 1.º pag. 256) no instante da conjuncção apparente é

$$a' = \frac{\pi' \cos P\,\text{sen}\,H'}{\cos d'},$$

e semelhantemente a do astro é

$$a = \frac{\pi\cos P\,\text{sen}\,H''}{\cos d};$$

onde P designa o angulo feito pelo raio do equador com o do logar, ou a latitude geocentrica; H' e H'' os angulos horarios verdadeiros da Lua e do astro no instante da conjuncção apparente; d' e d as suas declinações verdadeiras no mesmo instante; π' e π as suas parallaxes horisontaes.

Como os angulos horarios H' e H'' estão ligados entre si pela relação

$$H' + \alpha' = H'' + \alpha,$$

póde escrever-se um delles pelo outro nas equações precedentes, nas quaes se desprezam os productos das parallaxes.

Assim

$$\alpha' - \alpha = \cos P \operatorname{sen} H'' \left(\frac{\pi'}{\cos d'} - \frac{\pi}{\cos d}\right);$$

ou $$\alpha' - \alpha = \frac{(\pi' - \pi) \cos P \operatorname{sen} H''}{\cos d'} = \frac{p \cos P \operatorname{sen} H''}{\cos d'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

desprezando os quadrados e productos de $d' - d$ e das parallaxes (*).

116. No instante da conjuncção apparente a differença dos angulos horarios verdadeiros é igual á das parallaxes d'angulo horario; e é tambem igual á differença dos movimentos em ascensão recta da Lua e do astro durante o intervallo τ decorrido entre as conjuncções verdadeira e apparente. Chamando pois A' e B' o movimento horario da Lua em ascensão recta no instante da conjuncção verdadeira, e o B correspondem-

---

(*) Desprezando o quadrado de $d' - d$, é

$$\frac{\pi}{\cos d} = \frac{\pi}{\cos d'} [1 - (d' - d) \operatorname{tg} d'], \quad \frac{\pi'}{\cos d'} = \frac{\pi'}{\cos d} [1 + (d' - d) \operatorname{tg} d].$$

Assim póde usar-se em (2) de d em logar de d', isto é, escrever $\frac{\pi'}{\cos d}$ em logar de $\frac{\pi'}{\cos d'}$ na expressão de $\alpha' - \alpha$: no entretanto o erro será então ordinariamente um pouco maior do que escrevendo $\frac{\pi}{\cos d}$ em logar de $\frac{\pi}{\cos d}$, por ser $\pi' > \pi$, e porisso as mais das vezes para os planetas, e sempre para as estrellas

$$\pi' \frac{\operatorname{tg} d}{\cos d} > \pi \frac{\operatorname{tg} d'}{\cos d'}.$$

te a esse instante ; e a' e b' as quantidades analogas relativamente ao astro ; temos;

$$\alpha' - \alpha = (A' - a')\tau + (B' - b')\tau^2 ;$$

ou
$$\frac{p \cos P \operatorname{sen} H''}{\cos d'} = (A' - a')\tau ,$$

desprezando o termo $(B' - b')\tau^2$.

Logo
$$\tau = \frac{g}{h} \operatorname{sen}(H + \gamma\tau) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

chamando H o angulo horario verdadeiro do astro no instante da conjuncção verdadeira, γ o factor que serve para reduzir o tempo τ a arco, e pondo

$$p \cos P = g ,\ (A' - a') \cos d' = h.$$

γ póde tomar-se por 15 nos eclipses do Sol; é 15,041067 nas occultações das estrellas, ou $\log\gamma = 1,1772786$; e em geral é $\frac{360}{R^h}$ para qualquer astro, sendo R^h o tempo da sua revolução diurna em horas (*).

117. A parallaxe de distancia polar no instante da conjuncção apparente, desprezando os quadrados e productos das parallaxes (Biot liv. 1.° pag. 259), é

para a Lua $\qquad \varpi' = \pi'(\cos d' \operatorname{sen} P - \operatorname{sen} d' \cos P \cos H')$,

e para o astro $\qquad \varpi = \pi(\cos d \operatorname{sen} P - \operatorname{sen} d \cos P \cos H'')$.

(*) Se se tomasse H como angulo horario da Lua; equivaleria isso a substituir H' em logar de $H' + \alpha'$: o que produziria um erro ordinariamente maior do que produz a substituição de H'' em logar de $H'' + \alpha$, por ser as mais das vezes $\alpha' > \alpha$. Neste caso deveria em rigor substituir-se $15\left(1 - \frac{A}{60}\right)$ por γ ; sendo $\frac{A}{60}$ o A relativo ás passagens da Lua pelo meridiano, reduzido a horas.

No entretanto a substituição de H' e 15 em logar de H'' e γ seria sufficiente para os annuncios.

Continuando a desprezar os quadrados e productos das parallaxes e de $d'-d$, e pondo

$$p \text{ sen P } \cos d' = \beta \text{ , } p \cos \text{P sen } d' = g \text{ sen } d' = q \text{ ,}$$

as equações precedentes dão

$$\varpi' - \varpi = \beta - q \cos \text{H}'' \text{ .... (4) (*).}$$

$\varpi'-\varpi$ e $\alpha'-\alpha$ são as differenças das parallaxes de distancia polar e d'angulo horario; e por isso é necessario mudar-lhes os sinaes para ter as differenças das parallaxes $\varpi-\varpi'$ e $\alpha-\alpha'$ de declinação e d'ascensão recta.

118. Seja Δ a differença de declinações verdadeiras da Lua e do astro no instante da conjuncção verdadeira; Δ' a differenca de declinações apparentes no instante da conjuncção apparente; e δ a differença dos movimentos horarios em declinação no instante da conjuncção verdadeira. Δ' e $\Delta + \delta\tau$ serão as differenças de declinações apparentes e verdadeiras no instante da conjuncção apparente; e por conseguinte

$$\Delta' - (\Delta + \delta\tau) = \varpi - \varpi' \text{ , ou } \Delta' = \Delta + \delta\tau - \beta + q \cos \text{H}'' \text{ ...... (5).}$$

119. No fim do tempo t contado desde a conjuncção apparente, é

$$\cos d'_1 \, (a'_1 - a_1) = t \, (h + \text{var. hor. } h) \text{ ,}$$

$$d'_1 - d_1 = \Delta' + t \, (\delta + \text{var. hor. } \delta) \text{ ;}$$

sendo as variações horarias de h e δ provenientes das variações horarias das parallaxes em ascensão recta e declinação.

Para achar estas variações differenciaremos as formulas (2) e (4), e desprezando os termos provenientes das differenciações de p e d', teremos

$$\left.\begin{array}{l} \text{var hor. } h = \dfrac{\mathrm{d}\,(\alpha - \alpha')}{\mathrm{d}\tau} \cos d' = -\gamma' g \cos \text{H}'' \\[2ex] \text{var. hor. } \delta = \dfrac{\mathrm{d}\,(\varpi - \varpi')}{\mathrm{d}\tau} \qquad = -\gamma' q \text{ sen H}'' \end{array}\right\} \text{.............. (6);}$$

(*) O uso de d', ou d, em β e q suppõe respectivamente os desprezos

$$\pi\,(d'-d) \,[\text{sen } d' \text{ sen P} + \cos d' \cos \text{P} \cos \text{H}''] \text{ ;}$$

$$\pi'\,(d'-d) \,[\text{sen } d \text{ sen P} + \cos d \cos \text{P} \cos \text{H}''] \text{.}$$

sendo γ' o arco γ rectificado, ou $\gamma \cdot \frac{3,1415927}{180}$.

Logo, fazendo $h - \gamma' g \cos H'' = h'$, $\delta - \gamma' q \operatorname{sen} H'' = \delta'$;

teremos $\cos d'_1 (a'_1 - a_1) = th'$, $d'_1 - d_1 = \Delta' + t\delta'$;

e a equação (1) será $c^2 = h'^2 t^2 + (\Delta' + \delta' t)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$.

120. Resolvendo a equação (7) em ordem a t, e fazendo

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{\delta'}{h'}, \quad \frac{\Delta' \cos \alpha'}{c} = \cos \varphi',$$

será em fim $t = \frac{c \operatorname{sen} (-\alpha' \pm \varphi')}{h'}$.

Assim o systema de formulas

$$\left.\begin{array}{l} g = p \cos P,\ h = (A' - a') \cos d',\ \beta = p \operatorname{sen} P \cos d',\ q = g \operatorname{sen} d', \\ \tau = \frac{g}{h} \operatorname{sen} (H + \gamma\tau),\ h' = h - \gamma' g \cos H'',\ \delta' = \delta - \gamma' q \operatorname{sen} H'', \\ \frac{\delta'}{h'} = \operatorname{tang} \alpha',\ \frac{\Delta' \cos \alpha'}{c} = \cos \varphi',\ t = \frac{c \operatorname{sen} (-\alpha' \pm \varphi')}{h'}, \end{array}\right\} \ldots\ldots (A)$$

dá o tempo $T + \tau + t$ correspondente a cada phase c; e inversamente a equação (7) dá a phase c correspondente a cada tempo $T + \tau + t$ (*).

121. A phase c será impossivel, quando fôr $\cos \varphi' > 1$.

O intervallo das duas phases é

$$\frac{c}{h'} [\operatorname{sen} (-\alpha' + \varphi') - \operatorname{sen} (-\alpha' - \varphi')] = \frac{2c \cos \alpha' \operatorname{sen} \varphi'}{h'}.$$

(*) Estas formulas, que deu pela primeira vez o Sr. Monteiro nas addições á Ephemeride de 1804, e demonstrou depois na sua excellente memoria junta á Ephemeride de 1807, são aquellas de que se usa no calculo dos eclipses, e que nos parecem as mais commodas e elegantes de quantas conhecemos.

122. Na minima distancia a equação (7) e a sua derivada dão

$$t = -\frac{\Delta'\delta'}{h'^2+\delta'^2} = -\frac{\Delta'\,\mathrm{sen}^2\alpha'}{\delta'} = -\frac{\Delta'\,\mathrm{sen}\,\alpha'\cos\alpha'}{h'},\quad c = \Delta'\cos\alpha'.$$

Em fim a grandeza do eclipse é Σ — *min. dist.* ;

$$\text{ou, em digitos, } \frac{6(\Sigma - min.\,dist)}{semid.\,astro};$$

sendo Σ a somma dos semidiametros do astro e da Lua ; e os digitos boreaes ou austraes, conforme fôr Δ' positivo ou negativo.

123. No calculo precedente empregámos as differenciações para achar os valores de $h't$ e $\delta't$, isto é, não aproveitámos senão o primeiro termo das variações das parallaxes na sua desenvolução em series ordenadas relativamente ás potencias ascendentes de t. Mas se aproveitarmos o segundo termo, como póde ser necessario nos eclipses do Sol cuja duração passar de hora e meia, as expressões do movimento apparente no parallelo, e do movimento apparente em declinação, tomam a forma $At + Bt^2$, sendo A o que até aqui chamámos h' ou δ' (*).

(*) Para o instante da conjuncção apparente é

$$(a'_1 - a_1)\cos d'_1 = (\mathrm{A}' - a')\,\tau\cos d' + (\alpha - \alpha')\cos d'$$

$$= h\tau - g\,\mathrm{sen}\,\mathrm{H}'' = 0,$$

$$d'_1 - d_1 = \Delta + \delta\tau + \varpi - \varpi'$$

$$= \Delta + \delta\tau - \beta + q\cos\mathrm{H}'' = \Delta'';$$

desprezando os quadrados e productos

de $\quad \mathrm{A}' - a',\ d'_1 - d',\ \alpha' - \alpha,\ \varpi' - \varpi.$

Ora fazendo $\quad h\tau - g\,\mathrm{sen}\,\mathrm{H}'' = f(\tau),\ \Delta + \delta\tau - \beta + q\cos\mathrm{H}'' = \mathrm{F}(\tau),$

vem $\quad f'(\tau) = h - \gamma' g\cos\mathrm{H}'',\ f''(\tau) = +\gamma'^2 g\,\mathrm{sen}\,\mathrm{H}'', \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\quad \mathrm{F}'(\tau) = \delta - \gamma' q\,\mathrm{sen}\,\mathrm{H}'',\ \mathrm{F}''(\tau) = -\gamma'^2 q\cos\mathrm{H}'', \ldots\ldots\ldots\ldots$

substituindo pois na serie de Taylor, teremos

$$f(\tau + t) = t\,(h - \gamma' g\cos\mathrm{H}'') + \tfrac{1}{2}t^2\gamma'^2 g\,\mathrm{sen}\,\mathrm{H}'' + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{F}(\tau + t) = \Delta' + t\,(\delta - \gamma' q\,\mathrm{sen}\,\mathrm{H}'') - \tfrac{1}{2}t^2\gamma'^2 q\cos\mathrm{H}'' + \ldots\ldots\ldots$$

124. Podemos attender ao termo Bt^2 sem alterar a forma das expressões pelas quaes calculámos h' e δ', supponde que a variação horaria é a correspondente ao meio do tempo t; porque então a mudança de h e δ no fim do tempo t, com o movimento uniforme e igual áquella variação, é ainda $At + Bt^2$.

Com effeito é $$A_1 t = At + Bt^2,$$

quando de $Ax + Bx^2$ se tira $A_1 = A + 2Bx$, e se suppõe $x = \frac{1}{2} t$ (n.º 70).

Assim podemos ainda calcular h' e δ' pelas formulas (6), com tanto que nellas usemos do angulo horario $H'' + \frac{1}{2}\gamma t$ em logar de H''; e por isso, achado o valor de t com h' e δ' calculados por aquellas formulas, corrigiremos h' e δ' calculando-os de novo pelas seguintes

$$\left.\begin{array}{ll} h' = h - \gamma' g \cos(H'' + \frac{1}{2}\gamma t) & \delta' = \delta - \gamma' q \operatorname{sen}(H'' + \frac{1}{2}\gamma t) \\ \quad = h - \gamma' g \cos H'' + \frac{1}{2}\gamma'^2 g t \operatorname{sen} H'', & \quad = \delta - \gamma' q \operatorname{sen} H'' - \frac{1}{2}\gamma'^2 q t \cos H'' \end{array}\right\} \ldots (6');$$

e com h' e δ' assim correctos acharemos outro valor de t, que terá a approximação sufficiente.

125. No principio e fim dos eclipses c é a somma dos semidiametros apparentes da Lua e do astro; e nos contactos internos é a differença dos mesmos semidiametros. Na primeira approximação, que as mais das vezes basta, tomam-se os semidiametros correspondentes ao instante da conjuncção apparente, ou mesmo os correspondentes ao instante da conjuncção verdadeira; mas quando se applica a correcção indicada no numero precedente, devem tomar-se os semidiametros correspondentes aos tempos $T + \tau + t$.

126. Para ter o semidiametro apparente da Lua, é necessario (n.º 67) fazer ao seu semidiametro horisontal a correcção

$$\text{corr. do semid.} = \text{semid. hor. sen } \pi \cos z.$$

Sejam (fig. 10) ☾ e ☾' as posições verdadeira e apparente da Lua. Abaixando de ☾ a perpendicular ☾Q sobre ☾'P, e chamando μ o angulo Z☾'P, temos

$$☾Q = \alpha' \cos d' = \pi' \cos P \operatorname{sen}(H' + \alpha')$$

$$☾'Q = \omega' = \pi' [\operatorname{sen} P \cos d' - \cos P \operatorname{sen} d' \cos(H' + \alpha')],$$

e $$\operatorname{tang}\mu = \frac{\cos P \operatorname{sen}(H' + \alpha')}{\operatorname{sen} P \cos d' - \cos P \operatorname{sen} d' \cos(H' + \alpha')} = \frac{m}{n},$$

pondo $$g \operatorname{sen}(H' + \alpha') = n, \ \beta - q \cos(H' + \alpha') = m.$$

Depois o triangulo ZC'P dá

$$\operatorname{sen} z = \frac{\cos P \operatorname{sen}(H' + \alpha')}{\operatorname{sen}\mu} = \frac{n}{p \operatorname{sen}\mu} = \frac{m}{p \cos\mu}.$$

Nestas equações póde substituir-se H'' em logar de H' + α', na conjuncção apparente, desprezando a pequena parallaxe α do Sol ou do planeta.

Assim o systema d'equações

$$\left.\begin{array}{l} n = g \operatorname{sen} H'',\ m = \beta - q \cos H'',\ tg\mu = \dfrac{n}{m},\ \operatorname{sen} z = \dfrac{n}{p \operatorname{sen}\mu} = \dfrac{m}{p \cos\mu} \\ \text{e} \qquad \text{corr.} = \text{semid. hor.} \operatorname{sen}\pi \cos z \end{array}\right\} \ldots (8)$$

dá a correcção do semidiametro devida á elevação da Lua sobre o horisonte: devendo substituir-se nellas $H'' + \gamma t$ em logar de H'' para um tempo t contado desde a conjuncção apparente.

Para o astro teremos resultados semelhantes; mas esta correcção só é attendivel para a Lua, quando se fazem os calculos com a approximação que temos supposto.

127. Nos valores de g, h, β, q, as quantidades d e d' são relativas ao instante da conjuncção apparente; e por isso, se designarmos pelas mesmas letras entre parenthesis as relativas ao instante da conjuncção verdadeira, e por (δ') e (δ) os movimentos horarios em declinação da Lua e do astro, cuja differenca é $(\delta') - (\delta) = \delta$, teremos

$$d = (d) + (\delta)\tau,\ d' = (d') + (\delta')\tau.$$

No entretanto para os annuncios d'eclipses costumam tomar-se (d) e (d') em logar de d e d', o que só dá erros da ordem dos que desprezamos.

128. As formulas da parallaxe, de que nos servimos, suppõe que P é a latitude *verdadeira* ou geocentrica do logar do observador. É ne-

cessario pois reduzir a esta latitude a *apparente* ou astronomica, isto é, o angulo feito pela vertical do logar com o equador.

Seja (fig. 11) $ZGE = P$ a latitude geocentrica, e $Z'NE = P'$ a astronomica. Chamando a e b os semieixos da ellipse, e attendendo ao valor da subnormal $NQ = \frac{b^2 x'}{a^2}$,

temos $$\text{tang } P = \frac{y'}{x'},\ \text{tang } P' = y' \cdot \frac{a^2}{b^2 x'},$$

que dão $$\text{tang } P = \frac{b^2}{a^2}\,\text{tang } P',\ \text{tang}(P - P') = -\frac{(a^2 - b^2)\,\text{tang } P'}{a^2 + b^2\,\text{tang}^2 P'},$$

ou $$\text{tang}(P - P') = -\frac{(2\alpha - \alpha^2)\,\text{tang } P'}{1 + (1-\alpha)^2\,\text{tang}^2 P'},$$

fazendo o achatamento $\frac{a-b}{a} = \alpha$.

Donde se tira, desprezando α^2 ou α'^2 (n.º 66),

$$P - P' = -\alpha\,\text{sen}\,2P',\quad P - P' = -\alpha'\,\text{sen}\,2P' \ldots\ldots\ (9).$$

No fim da Ephemeride de 1807 acha-se reduzida a taboa a expressão (9) da reducção $P - P'$ que se deve applicar á longitude astronomica para ter a geocentrica (*).

(*) A relação entre P e P' é da forma $\text{tang}\,y = m\,\text{tang}\,x \ldots\ldots (a)$.

Esta equação dá a seguinte

$$\frac{\text{tang}\,y - \text{tang}\,x}{\text{tang}\,y + \text{tang}\,x} = \frac{m-1}{m+1} = \frac{\text{sen}(y-x)}{\text{sen}(y+x)}, \ldots\ldots (b),$$

da qual, transformando os senos em exponenciaes, dividindo ambos os termos do segundo membro por $e^{-(y-x)\sqrt{-1}}$, tirando o valor de $e^{2(y-x)\sqrt{-1}}$, e passando aos logarithmos, se deduz

$$(y-x)'' = \frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{\text{sen}\,2y}{\text{sen}\,1''} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2\cdot\frac{\text{sen}\,4y}{\text{sen}\,1''} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3\cdot\frac{\text{sen}\,6y}{\text{sen}\,1''}\ldots\ldots$$

129. De tudo o que fica dito resulta :

Mas dando á equação (b) umas das formas

$$\operatorname{sen}(y-x)=\left(-\frac{m-1}{m+1}\right)\operatorname{sen}(y-x-2y),$$

$$\operatorname{sen}(y-x)=\left(\frac{m-1}{m+1}\right)\operatorname{sen}(y-x+2x),$$

e fazendo na formula (16) pag. 10 do additamento ás notas de Francoeur

$$u=y-x,\quad A=-\frac{m-1}{m+1},\quad P=-2y,$$

ou $$u=y-x,\quad A=\frac{m-1}{m+1},\quad P=2x,$$

resulta immediatamente

$$(y-x)''=\Sigma_1^\infty\left\{-\left(-\frac{m-1}{m+1}\right)^i\frac{\operatorname{sen}2iy}{i\operatorname{sen}1''}\right\},\ \text{ou}\ (y-x)''=\Sigma_1^\infty\left\{+\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^i\frac{\operatorname{sen}2ix}{i\operatorname{sen}1''}\right\}\ldots(c).$$

A primeira destas expressões é a reducção que se deve tirar de y para ter x; a segunda é a reducção que se deve ajuntar á x para ter y.

No nosso caso é

$$y=P',\ x=P,\ m=\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{1-e^2},\ \frac{m-1}{m+1}=\frac{e^2}{2-e^2}=\frac{2\alpha-\alpha^2}{2-2\alpha+\alpha^2};$$

Se produzissemos a ordenada QO até encontrar em O' o circulo descripto sobre EE' como diametro, o angulo O'CE seria a latitude *reduzida* P''; e a figura daria evidentemente

$$\operatorname{tang}P=\frac{b}{a}\operatorname{tang}P'',$$

á qual seriam tambem applicaveis as formulas (c), pondo $m=\frac{b}{a}$.

Em geral, eliminando convenientemente entre as equações

$$\operatorname{tang}P'=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}P,\quad \operatorname{tang}P=\frac{b}{a}\operatorname{tang}P'',$$

e comparando o resultado com a equação (a), póde achar-se a reducção de qualquer das latitudes P, P', P'', a uma das outras, por meio das formulas (c).

1.° Que as formulas (A) do n.° 120 dão os tempos correspondentes ás phases da occultação de qualquer astro pela Lua.

Para usar destas formulas é necessario calcular o tempo T da conjuncção verdadeira, e a differença Δ das declinações verdadeiras nesse tempo (nn. 27 até 30); depois a passagem Θ do astro pelo meridiano (nn. 19 e 24); o que dá o angulo horario

$$H = \chi(T - \Theta).$$

Os movimentos horarios da Lua em ascensão recta e declinação são

$$A' = A + 2B\theta, \quad (\delta') = A + 2B\theta:$$

sendo os A e B da expressão de A' tirados da pagina VI da Ephemeride para o meio dia, ou meia noite, mais proximo da conjuncção; e os A e B da expressão de (δ') tirados da 3.ª ou 6.ª columna da pagina VII para os mesmos tempos; e sendo θ a parte de T contada do meio dia ou da meia noite, isto é, $\theta = T$ ou $\theta = T - 12^h$.

As parallaxes e semidiametros da Lua correspondentes ao tempo T deduzem-se por interpolação das paginas IV e V.

Em quanto ao Sol e planetas, usa-se semelhantemente dos seus a e b para formar a' e (δ); e das respectivas paginas para ter as suas parallaxes e semidiametros.

2.° Que relativamente ao valor de c é necessario recorrer á doutrina do n.° 126, renovando o calculo com a correcção que a este valor resulta da formula (8) do mesmo n.°

3.° Que no caso de ser consideravel a duração do eclipse, é necessario attender á doutrina do n.° 124, renovando o calculo com os valores de h' e δ' correctos pelas formulas (6') do mesmo n.°

129. A maior difficuldade que se encontra no uso das formulas (A) é a do calculo de τ pela equação transcendente (3); e por isso bom serviço fez aos calculadores o auctor da taboa dos valores de τ que se imprimio no volume da Ephemeride para 1844. Os argumentos desta taboa são o angulo H em gráos e $\frac{g}{h}$ (*).

(*) Esta interessante taboa, calculada pelo Sr. R. Guerra Osorio, evita o trabalho de resolver a equação (3) pelas series, ou por substituições successivas.

Em quanto ao Sol; como o valor de γ differe daquelle com que foi calculada a taboa, é mais exacto achar τ por meio della, e com este primeiro valor de τ calcular a formula (3), que dará outro sufficientemente approximado.

O mesmo diremos relativamente aos planetas, tornando-se esta correcção tanto mais necessaria quanto menor é H (*).

(*) Para achar este valor mais exactamente, sem resolver a equação (3) por muitas substituições successivas, póde servir o processo demonstrado no n.° 33 da já citada memoria junta á Ephemeride de 1807; ou qualquer das seguintes formulas, que vem sem demonstração n'uma bella memoria inedita sobre o calculo dos eclipses do nosso sabio mestre o Sr. A. J. Pinto d'Almeida:

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\tau_1\gamma'\cot H'},\quad \tau = \tau_1 + \frac{\tau_1\cos^2\varphi\log\left(\dfrac{\text{sen } H'}{h\tau_1}\right)}{M\cos 2\varphi} \ldots\ldots\ldots (d);$$

$$\tau = \frac{\operatorname{tang} H' - \gamma'\tau_1}{\frac{h}{g}\sec H' - \gamma'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e);$$

sendo τ_1 um valor approximado de τ, M o modulo, e $H' = H + \gamma\tau_1$.

Para demonstrar estas formulas, façamos $\tau = \tau_1 + x$ na proposta (3); e desenvolvamos o segundo membro, desprezando o quadrado de x. Teremos o seguinte:

1.° $$\tau_1 + x = \frac{g}{h}(\text{sen } H' + \gamma' x\cos H'),$$

$$x = \frac{\frac{g}{h}\text{sen } H' - \tau_1}{1 - \frac{g}{h}\gamma'\cos H'} = \frac{\operatorname{tang} H' - \frac{h}{g}\tau_1 \sec H'}{\frac{h}{g}\sec H' - \gamma'},$$

e por conseguinte $$\tau = \tau_1 + x = (e).$$

2.° Por ser $\dfrac{g\,\text{sen } H'}{h\tau_1} - 1$ da ordem de x, é

130. II. *Da possibilidade dos eclipses.* Para annunciar os eclipses escolhem-se, d'entre as conjuncções que se tem calculado, aquellas que pódem dar logar a estes phenomenos; mas, como seria muito longo tentar para todas os calculos que temos exposto, julgamos uteis as seguintes advertencias.

Como se conhece, péla conjuncção calculada e péla passagem meridiana da Lua, um valor approximado $T - \odot$ de H, julga-se pouco mais ou menos da grandeza de $\delta\tau$; e como β não differe muito de 35, sabe-se approximadamente o valor de $\Delta + \delta\tau - \beta$. Demais pelos valores de d e $H + 15\tau$ ajuiza-se, com algum habito, da influencia de $q \cos(H + \gamma\tau)$. Forma-se assim um juizo approximado de $\Delta' = \Delta + \delta\tau - \beta + q\cos(H + \gamma\tau)$; e como para haver eclipse é necessario que seja $\Delta' \cos\alpha < \Sigma$, vê-se deste modo a maior parte das vezes, por ser α pequeno, se é ou não possivel aquelle phenomeno.

Em quanto não se está muito habituado a esta especie de estimativa, póde fazer-se mais rapidamente o calculo approximado até chegar

---

$$\log\left(\frac{g}{h\tau_1}\operatorname{sen} H'\right) = \log\left[1 + \left(\frac{g}{h\tau_1}\operatorname{sen} H' - 1\right)\right],$$

$$= \frac{\frac{g}{h\tau_1}\operatorname{sen} H' - 1}{M},$$

continuando a desprezar x^2.

Pondo no denominador da expressão de x, em virtude daquelle desprezo,

$$\frac{g}{h}\gamma' \cos H' = \tau_1\gamma' \cot H' = \operatorname{tang}^2\varphi,$$

temos
$$1 - \frac{g}{h}\gamma' \cos H' = 2 - \sec^2\varphi = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

E em fim, substituindo estes valores na mesma expressão de x, resulta

$$\tau = \tau_1 + x = (d),$$

a cos φ, usando da taboa auxiliar III da Ephemeride de 1804 para achar os valores de h, β, g, q.

Mas além da exclusão de muitas estrellas, que se faz pelas considerações precedentes, deve prescindir-se immediatamente das seguintes:

1.º daquellas, cujas differenças de declinação forem negativas e não muito pequenas;

2.º daquellas para as quaes as phases teriam logar estando o Sol sobre o horisonte, ou a Lua debaixo do horisonte.

A existencia desta condição reconhece-se pelos nascimentos e occasos do Sol e da Lua, comparados com o valor approximado de $T+\tau+t$. τ raras vezes chega a hora e meia; e t raras vezes excede meia hora a ponto de se avisinhar de uma hora.

131. Nos eclipses de Sol é muito facil reconhecer a sua possibilidade ou impossibilidade, comparando a latitude da Lua junto da conjuncção com o semidiametro do cone luminoso, na região onde ella o atravessa. Sommando o semidiametro da Lua com o daquelle cone, que é igual (fig. 12) ao do Sol, mais a parallaxe lunar, menos a parallaxe solar,

$$L'TS = STD + TL'A - ADT;$$

deverá a somma ser maior do que a latitude da Lua, para que possa haver eclipse. Donde resulta que, se a latitude fôr maior do que o *maximum* desta somma, não poderá haver eclipse; se fôr menor do que o *minimum*, haverá nessariamente eclipse; e se estiver comprehendida entre estes dous limites, será necessario fazer o calculo para conhecer a existencia ou a impossibilidade do eclipse.

Ora, combinando os maximos valores da parallaxe lunar, e dos semidiametros do Sol e da Lua, com o minimo da parallaxe solar; e os minimos valores das primeiras com o maximo desta; acham-se os limites $1^\circ.34',3$ e $1^\circ.24'$ da distancia angular do centro da Lua ao do cone luminoso. Logo teremos:

eclipse do Sol	latitude lunar na ☌
certo	$< 1^\circ.24'$
duvidoso	$> 1^\circ.24'$ e $< 1^\circ.34',3$
impossivel	$> 1^\circ.34',3$.

(Astron. de Francoeur n.º 194, pag. 282).

132. III. *Posições no tempo dos eclipses.* Sejam (fig. 13) FBIAE o disco lunar; PCN o circulo de declinação; ZCB o vertical; EI a corda apparente descripta por uma estrella que se occulta; I e E os pontos d'immersão e emersão; CQ a minima distancia apparente, perpendicular a EI; IK e EK' os parallelos apparentes da estrella na immersão e emersão.

Na conjuncção apparente está a estrella em O; OI é descripta antes da conjuncção, durante o tempo $-t$; OE é descripta depois da conjuncção, durante o tempo $+t'$; e $CO = \Delta'$ é a differença das declinações apparentes no tempo da conjuncção apparente.

Fazendo $CFE = OCQ = \alpha'$, $QCI = \varphi'$, a figura dá

$$CQ = \Delta' \cos \alpha', \cos \varphi' = \frac{\Delta' \cos \alpha'}{CI} = \frac{\Delta' \cos \alpha'}{\Sigma};$$

chamando Σ o semidiametro apparente da Lua, que é o valor da distancia c na immersão e na emersão.

Depois $IK = \Sigma \operatorname{sen} (\varphi' + \alpha')$, $EK' = \Sigma \operatorname{sen} (\varphi' - \alpha')$;

e como IK e EK' são os movimentos no sentido dos parallelos durante os tempos $-t$ e $+t'$, resulta

$$-h't = \Sigma \operatorname{sen} (\varphi' + \alpha'), \quad +h't' = \Sigma \operatorname{sen} (\varphi' - \alpha'),$$

ou $$t = \frac{\Sigma \operatorname{sen} (-\varphi' - \alpha')}{h'} \qquad t' = \frac{\Sigma \operatorname{sen} (\varphi' - \alpha')}{h'}.$$

Assim α' e φ' são os angulos que no n.° 120 se designaram pelas mesmas letras.

133. A mesma figura dá

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Na imm.} & DC* - DC☾ = -CK = -\Sigma \cos (-\varphi' - \alpha'), \\ \text{e na em.} & DC* - DC☾ = -CK' = -\Sigma \cos (\varphi' - \alpha') \end{array}\right\} \ldots (10).$$

Se o ponto F passar para a esquerda, α' mudará de sinal; e se as expressões de t ou t' mudarem de sinal, corresponderá sempre á immersão a que der o tempo da primeira phase, isto é, a que der o menor dos tempos $T + \tau + t$, $T + \tau + t'$.

134. Seja C' o logar verdadeiro do centro da Lua, isto é, CC'=parallaxe d'altura. Fazendo ZCP $=\mu$, teremos

$$\text{tang}\,\mu = \frac{\text{C'M}}{\text{CM}} = \frac{\text{parall. d'AR} \times \cos d'}{\text{parall. de DC}}.$$

Assim, usando da notação do n.° 126,

e fazendo $\gamma' g \cos \text{H}'' = n'$, $\gamma' q \,\text{sen}\, \text{H}'' = m'$,

teremos

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang}\,\mu = \dfrac{n + n't}{m + m't},\ \text{tang}\,\mu' = \dfrac{n + n't'}{m + m't'}, \\ \text{BCI} = \mu + \varphi' + \alpha' = \mu - (-\varphi' - \alpha') \\ \text{BCE} = \varphi' - \alpha' - \mu' = -[\mu' - (\varphi' - \alpha')] \end{array}\right\} \ldots. (11).$$

Se o numerador de tang μ, é negativo, $\text{H}'' + \gamma t$ é oriental; CB cahe á direita de CN; e μ é negativo. Se o denominador de tang μ é negativo, o ponto M fica para baixo de C. E o mesmo a respeito de μ'.

Assim tomaremos μ positivo ou negativo, conforme o fôr o numerador de tang μ; e tomaremos μ agudo ou obtuso, conforme fôr positivo ou negativo o denominador de tang μ (vej. n.° 36*).

135. As formulas (10) e (11) dão as posições da estrella na immersão e na emersão. As (10) mostram a differença de declinação entre os centros da Lua e da estrella. As (11) dão as distancias dos pontos d'immersão e emersão ao ponto mais baixo B do disco lunar, cujos supplementos são as distancias ao ponto mais alto A (*).

A distancia BCI será oriental ou occidental, conforme fôr positiva ou negativa; e a distancia BCE será occidental ou oriental, conforme fôr positiva ou negativa. Assim as distancias BCI e —BCE serão orientaes ou occidentaes, conforme forem positivas ou negativas.

(*) Tambem se póde dar a seguinte forma ás equações (10) e (11):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Na imm.} & \text{DC}* - \text{DC}☾ = -(\Delta' + \delta' t) = -\text{M} \\ \text{na em.} & \text{DC}* - \text{DC}☾ = -(\Delta' + \delta' t') = -\text{M}' \end{array}\right\} \ldots\ldots (10')$$

136. As mesmas formulas servem para determinar as posições dos pontos de contacto no principio e fim dos eclipses do Sol, sendo então Σ a somma dos semidiametros. É necessario porém a este respeito advertir o seguinte.

Se quizermos marcar sobre o disco do Sol os pontos de contacto delle com a Lua, servem ainda aquellas formulas, com tanto que nas expressões de m e m' se use da declinação do Sol d e não da da Lua d'; o que não é indifferente, por desapparecer dos dous termos de tang μ o seu factor commum π.

De mais a figura (14) dá

na imm. $ISB = ISN' - \mu$, na em. $ESB = ESN' + \mu'$;

e $$\cos ISN' = \frac{-M}{\Sigma},\ \cos ESN' = \frac{-M'}{\Sigma},$$

ou $$ISN' = 180° - \psi,\ ESN' = 180° - \psi'.$$

Assim $$180° - ISB = AI = \mu + \psi,$$

$$180° - ESB = AE = -(\mu' - \psi').$$

Pondo $NCI = \psi$, $NCE = \psi'$, os triangulos CKI e CK'I

dão $$\cos\psi = \frac{M}{\Sigma},\ \cos\psi' = \frac{M'}{\Sigma};$$

e finalmente $$\left.\begin{array}{l} BCI = \mu + \psi,\ BCE = -(\mu' - \psi') \\ \text{com} \quad \tang \mu = \dfrac{g \text{ sen } (H'' + \gamma t)}{\beta - q \cos (H'' + \gamma t)} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

As duas expressões de BCI e — BCE podem escrever-se debaixo da forma $\mu - \psi$; tomando ψ negativo ou positivo, conforme fôr a phase respectiva antes ou depois da conjuncção apparente.

Se M fôr negativo, o ponto I passará para cima de B, e ψ será obtuso.

Comparando estes resultados com as formulas (11') da nota do n.° 135, vê-se que aquellas formulas dão logo as distancias dos pontos de contacto ao ponto mais alto A do disco solar; e que estas distancias serão occidentaes ou orientaes, conforme forem $\mu + \psi$, ou $\mu' - \psi'$ positivas ou negativas: o que é a regra inversa da que tinha logar na dita nota.

Circumstancias dos eclipses do Sol em diversos logares da terra.

Além das phases dos eclipses de Sol, que são visiveis n'uma dada posição do observador, costumam annunciar-se algumas circumstancias que tem logar em diversos pontos da terra. Resolveremos a este respeito os seguintes problemas, que são necessarios para aquelles annuncios.

137. I. *Achar os logares da terra, onde começa e acaba o eclipse no horisonte ao nascer e pôr do Sol.* No principio e fim do eclipse o disco terrestre é tangente á penumbra lunar no logar do observador: por conseguinte o Sol está no horisonte; e o logar do observador, e os centros do Sol e da Lua, estão no plano dos tres centros (Astr. de Biot. liv. 3.° pag. 481).

No triangulo rectilineo TSm (fig. 15), formado pelos centros T e S da Terra e do Sol, e pelo observador m, o angulo TmS é $90° -$ semid. ☉, por ser mS' tangente ao Sol e á terra e conseguintemente perpendicular a Tm; e o angulo TSm é sensivelmente a parallaxe horisontal π do Sol:

logo $$STm = 90° + \text{semid.}\odot - \pi.$$

138. Seja pois (fig. 16) SLT o plano dos tres centros; M o observador m, que está no mesmo plano, projectado em M na direcção Tm; e $Epp'p''$ o equador.

Fazendo $$SEp = E\,,\ SE = a,$$

os tres triangulos SEp, LEp', MEp'', dão

$$\text{sen}\, d = \text{sen}\, a\ \text{sen}\, E\,,\ \text{sen}\, d' = \text{sen}\,(d + \Delta + \delta t) = \text{sen}\,(a + \Sigma')\ \text{sen}\, E,$$

$$\text{sen}\, P = \text{sen}\,(90° + \text{sem.}\odot - \pi + a)\,\text{sen}\, E\,;$$

onde t se conta do instante da conjuncção verdadeira, e Σ' é a distancia dos centros vista do centro da terra.

Eliminando sen E entre a primeira destas equações e cada uma das outras duas; depois eliminando cot a entre as resultantes; e desprezando os quadrados e productos de $\Delta + \delta t$, Σ', e semid. ☉ — π; resulta

$$\text{sen P} = \frac{\Delta + \delta t}{\Sigma'} \cos d \dots\dots\dots\dots (e).$$

Eliminando $\Delta + \delta t$ entre esta equação e a fundamental

$$\Sigma'^2 = h^2 t^2 + (\Delta + \delta t)^2 \dots\dots\dots\dots (f),$$

resulta
$$t^2 = \frac{\Sigma'^2\left(1 - \frac{\text{sen}^2 \text{P}}{\cos^2 d}\right)}{h^2} \dots\dots\dots\dots (g).$$

Em fim, eliminando d pela condição de estar o Sol no horisonte

$$\cos \text{H} = -\text{tang}\, d \,\text{tang P},$$

resulta
$$t^2 = \frac{\Sigma'^2 \cos^2 \text{P sen}^2 \text{H}}{h^2}.$$

139. Pondo $\text{tang}\,\alpha = \frac{\delta}{h}$, $\frac{\Delta \cos \alpha}{\Sigma'} = \text{sen}\,\lambda$, tira-se de (f)

$$\delta t = -\Delta\, \text{sen}^2 \alpha \pm \Sigma' \,\text{sen}\, \alpha \cos \lambda.$$

Logo $\quad \Delta + \delta t = \Delta \cos^2 \alpha \pm \Sigma' \,\text{sen}\, \alpha \cos \lambda = \Sigma' \,\text{sen}\, (\lambda \pm \alpha)$,

que substituido na expressão (e) dá $\quad \text{sen P} = \cos d \,\text{sen}\, (\lambda \pm \alpha)$.

140. Teremos pois as formulas

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\delta}{h}, \text{sen}\,\lambda = \frac{\Delta \cos \alpha}{\Sigma'} \dots\dots\dots\dots (12),$$

$$\text{sen P} = \text{sen}\,(\lambda \pm \alpha) \cos d,\ \cos \text{H} = -\text{tang}\, d \,\text{tang P},\ t = \frac{\Sigma' \cos \text{P sen H}}{h} \dots (13).$$

O sinal $-$, que precede α, pertence ao menor valor de t, ou ao primeiro contacto; e o sinal $+$ pertence ao maior valor de t, ou ao segundo contacto; no caso de se tomar λ agudo: e inversamente, no caso de se tomar λ obtuso. O que immediatamente mostra a segunda parte do valor de t,

$$\pm \frac{\Sigma' \operatorname{sen} \alpha \cos \lambda}{\delta}, \text{ ou } \pm \frac{\Sigma' \cos \alpha \cos \lambda}{h},$$

de cujos sinaes provém respectivamente os que affectam α em (13).

141. A primeira das equações (13) dá os parallelos onde tem logar o primeiro e ultimo contacto.

A segunda exprime a condição de estar o Sol no horisonte, e dá o tempo medio de cada um dos contactos

$$T = \frac{H}{15} - \text{eq. tempo},$$

devendo H tomar-se negativo para o nascimento e positivo para o occaso.

A terceira dá o intervallo de tempo que separa a conjuncção verdadeira de cada um dos contactos; e conseguinte o tempo da conjuncção verdadeira

$$\theta = T - t,$$

o qual comparado com o θ' da mesma conjuncção n'outro logar, por exemplo em Coimbra (n.° 68), dá a differença de longitudes $\theta' - \theta$, isto é, dá a longitude de cada um dos logares, para os quaes é θ o tempo da conjuncção verdadeira, relativamente ao meridiano daquelle para o qual é θ' o tempo da mesma conjuncção; sendo esta longitude contada no sentido d'oriente para occidente.

A duração do eclipse é a differença dos dous valores de t.

142. Como é vertical o plano de contacto, que passa pelos centros da Terra, Sol, e Lua, e pelo observador; vê-se que, na occasião dos contactos, o Sol e a Lua estão no mesmo vertical. E dahi vem que a dis-

tancia dos centros, que para o observador deve ser a somma Σ dos semidiametros apparentes no principio e fim do eclipse, para o centro da terra é $\Sigma + \pi' - \pi = \Sigma + p = \Sigma'$ (*).

O valor de P deve ser o correspondente a 45°: e quando se quizer maior exactidão, póde renovar-se o calculo usando dos valores de p correspondentes aos P já achados na primeira approximação (vej. nn. 87, 88, da memoria junta á Ephem. de 1807). Para achar os logares, de que se trata, tambem se póde usar das formulas referidas á ecliptica (Astr. de Biot. liv. 3.º pag. 481 e seguintes).

143. II. *Achar o logar onde o eclipse é central no instante da passagem do Sol pelo meridiano.*

No instante da passagem do Sol pelo meridiano tem logar juntamente as conjuncções verdadeira e apparente, e o tempo da phase; e a differença das declinações verdadeiras é a das parallaxes em declinação. Assim

é $$t = 0,\ \Delta' = 0,\ H = 0,\ \text{ou}\ H = 180°,\ \Delta = m = p\ \text{sen}\,(P \mp d).$$

E a hora da conjuncção é 0^h — eq. t. ou 12^h — eq. t.

Teremos pois

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta}{p} = \text{sen}\,\varphi,\ P = \varphi \pm d, \\ \text{tempo da} ☌,\ T = 0^h - \text{eq. t},\ \text{ou} = 12^h - \text{eq. t.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (15).$$

Quando $H = 0$ der $P = \varphi + d > 90°$, a parte do meridiano tomada como superior será inferior, e inversamente. Então devemos fazer $H = 180°$; e por conseguinte usar do sinal inferior da expressão de P, e do segundo valor de T (mem. cit. nn. 104 e 105).

(*) Se se procurasse o logar que vê o principio do eclipse no horisonte occidental, e o ultimo que vê o fim no horisonte oriental, é claro que se deveria fazer $\Sigma' = \Sigma - p$.

144. III. *Achar os logares que tem o eclipse central no horisonte; e a duração delle.*

Para este problema serve a solução do problema I, fazendo $\Sigma = 0$.

Assim poremos p em logar de Σ' nas formulas do n.° 140, e applicaremos o mais que se disse naquelle n.°, e seguintes, relativamente ao problema I (mem. cit. n.° 107).

145. IV. *Achar os limites dos parallelos, entre os quaes é possivel vêr-se o eclipse no horisonte.*

Seja P a latitude d'um parallelo, onde se vê o eclipse no horisonte ao nascer e pôr do Sol.

A condição $\cos H = -\operatorname{tang} P \operatorname{tang} d$

de estar o Sol no horisonte dá os tempos do nascimento e occaso.

No principio ou fim do eclipse, contado da conjuncção verdadeira, a differença apparente das declinações é

$$\Delta + \delta t - (\beta - q \cos H) = \Delta + \delta t - m;$$

a differença apparente das ascensões rectas é $(A' - a')\,t - \dfrac{g \operatorname{sen} H}{\cos d}$,

e por conseguinte $ht - g \operatorname{sen} H = ht - n$

a mesma differença referida á região do astro; e finalmente a distancia apparente dos centros é Σ.

Assim, pela equação fundamental, temos

$$\Sigma^2 = (ht - n)^2 + (\Delta - m + \delta t)^2.$$

Resolvendo esta equação em ordem a t; pondo

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\delta}{h},\ \cos \psi = \frac{(\Delta - m)\cos \alpha + n \operatorname{sen} \alpha}{\Sigma};$$

e substituindo a expressão de $\Delta - m$ tirada desta segunda hypothese; resulta em fim $t = \dfrac{n + \Sigma \operatorname{sen}(\mp \psi - \alpha)}{h}$.

O sinal — de ψ pertence á primeira phase do eclipse, e o sinal + á segunda.

Como H é negativo no horisonte oriental, e positivo no horisonte occidental, o mesmo tem logar a respeito de n.

Quando o parallelo é austral, P muda de sinal, assim como cos H e m.

145. Assim as equações

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang}\alpha = \dfrac{\delta}{h},\ \cos\psi = \dfrac{(\Delta - m)\cos\alpha + n\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\Sigma}, \\ \cos H = -\operatorname{tang} P \operatorname{tang} d,\ t = \dfrac{n + \Sigma\,\mathrm{sen}\,(\mp\psi - \alpha)}{h}, \\ \text{conj. verd.};\quad T = \dfrac{H}{15} - \text{eq. tempo}, \end{array}\right\} \ldots\ldots (15)$$

servem para resolver o problema seguinte:

Achar os logares de um parallelo dado nos quaes se vê o principio e fim do eclipse no horisonte (mem. cit. n.° 90).

A cada valor de P correspondem quatro de t, sendo dous no horisonte oriental e dous no occidental; e dando a P differentes valores, acham-se os diversos pontos da curva de contacto (*).

(*) O problema I póde tambem resolver-se como este, imprimindo-lhe a condição de ser t um maximum ou um minimum.

Para tornar este calculo mais facil, façamos $\dfrac{\mathrm{sen}\,P}{\cos d} = \mathrm{sen}\,x$ nas expressões m e n, que, attendendo a $\cos H = -\operatorname{tang} d \operatorname{tang} P$, são

$$m = p\,\mathrm{sen}\,P \cos d - p \cos P\,\mathrm{sen}\,d \cos H = \frac{p\,\mathrm{sen}\,P}{\cos d},$$

$$n = p \cos P\,\mathrm{sen}\,H \qquad = \mp p\sqrt{1 - \frac{\mathrm{sen}^2 P}{\cos^2 d}},$$

pertencendo o sinal — ao oriente, e + ao occidente. Teremos

$$m = p\,\mathrm{sen}\,x,\ n = \mp p \cos x,\ \frac{dx}{dP} = \frac{\cos P}{\cos d \cos x}.$$

146. A solução do problema IV fica assim dependente de achar os parallelos onde são reaes as expressões (15); condição que dá o limite

$$\frac{(\Delta - m)\cos\alpha + n \operatorname{sen}\alpha}{\Sigma} = \pm 1,$$

Differenciando em ordem a P a equação fundamental (n.° 145), que se transforma em

$$\Sigma^2 = (ht \pm p\cos x)^2 + (\Delta - p\operatorname{sen} x + \delta t)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (h);$$

e imprimindo a condição do maximum ou minimum, $\frac{dt}{dP} = 0$; vem

$$0 = \mp (ht \pm p\cos x)\operatorname{tang} x - (\Delta - p\operatorname{sen} x + \delta t) \;.\;.\;.\;.\;.\; (i),$$

que combinada com (h) dá

$$\Sigma^2\cos^2 x = (ht \pm p\cos x)^2, \qquad \mp \Sigma\cos x = ht \pm p\cos x : \;.\;.\;.\;.\;.\; (l).$$

Nesta equação os sinaes, superior e inferior, do primeiro membro devem combinar-se respectivamente com o superior e inferior do segundo membro, isto é, devem corresponder respectivamente ao nascimento e occaso; para que um valor de t seja maximo e outro minimo.

Em fim, tirando de (l) o valor de t; substituindo-o em (i); e pondo $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\delta}{h}$; vem $0 = \Sigma\operatorname{sen} x - [\Delta - p\operatorname{sen} x \mp (\Sigma + p)\cos x \operatorname{tang}\alpha]$,

da qual se tira

$$\operatorname{sen}(x \pm \alpha) = \frac{\Delta\cos\alpha}{\Sigma + p} = \operatorname{sen}\lambda, \; x = \lambda \mp \alpha.$$

Estas equações juntas a

$$\cos H = -\operatorname{tang} P \operatorname{tang} d, \; t = \mp \frac{(\Sigma + p)\cos x}{h} = \frac{\Sigma' \cos P \operatorname{sen} H}{h}$$

são as formulas do n.° 140.

Para que o principio e fim do eclipse correspondessem respectivamente ao occaso e nascimento, combinariamos do modo contrario os sinaes dos dous membros da equação (l); o que daria as mesmas formulas, com a mudança tão sómente de $p + \Sigma$ em $p - \Sigma$.

e que, depois de substituir por m e n as suas expressões, e de eliminár H por meio das equações

$$\cos H = -\operatorname{tang} P \operatorname{tang} d, \; \operatorname{sen} H = \mp \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 P \operatorname{tang}^2 d},$$

se transforma em

$$\frac{\operatorname{sen} P}{\cos d} \cos \alpha \pm \operatorname{sen} \alpha \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 P}{\cos^2 d}} = \frac{\Delta \cos \alpha \mp \Sigma}{p}.$$

O sinal superior, que precede o radical, provém do superior de sen H, e por isso deve pertencer ao nascimento, e o inferior ao occaso.

Finalmente, pondo $\frac{\operatorname{sen} P}{\cos d} = \operatorname{sen} x, \quad x \pm \alpha = \omega,$

o limite corresponde á equação $\operatorname{sen} \omega = \frac{\Delta \cos \alpha \mp \Sigma}{p}.$

147. Assim, para determinar os limites dos parallelos, dentro dos quaes tem logar o eclipse no horisonte, servem as equações seguintes:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\delta}{h}, \; \operatorname{sen} \omega = \frac{\Delta \cos \alpha \mp \Sigma}{p}, \; \operatorname{sen} P = \cos d \operatorname{sen} (\omega \mp \alpha) \ldots\ldots, \quad (16).$$

Como aó menor dos dous valores de ω corresponde o menor de P, o sinal superior de Σ pertence ao parallelo mais austral, e o inferior ao parallelo mais boreal. Em quanto porém aos sinaes de α, pertence o superior ao horisonte oriental, e o inferior ao occidental, como já dissemos.

Quando o valor de ω, correspondente a um dos sinaes de Σ, fôr imaginario, cahirá o eclipse fóra da terra para a parte austral ou boreal, conforme corresponder esse imaginario ao sinal superior de Σ ou ao inferior (*) (mem. cit. n.° 95).

(*) As equações (16) acham-se tambem igualando a zero o radical da expressão de t (n.° 145),

o que dá $\frac{\Sigma^2}{\cos^2 \alpha} = (\Delta - m + n \operatorname{tang} \alpha)^2, \; \pm \frac{\Sigma}{\cos \alpha} = \Delta - \frac{p \operatorname{sen}(x \pm \alpha)}{\cos \alpha},$

$$\operatorname{sen} (x \pm \alpha) = \frac{\Delta \cos \alpha \mp \Sigma}{p} = \operatorname{sen} \omega, \; x = \omega \mp \alpha.$$

Assim:

para resolver os problemas	I	II	III	IV
temos as formulas	(12), (13)	(14)	(12), 13), $\Sigma = 0$	(16)

O P, que entra nestas formulas, é a latitude geocentrica dos logares procurados; mas desta latitude deve passar-se no fim para a astronomica, tirando-lhe a correcção $P - P'$ (n.° 128) dada na tabea final da Ephemeride de 1807.

148. Da segunda das equações (12) resulta que:

1.° se fôr a minima distancia $\Delta \cos \alpha > \Sigma + p$, não poderá haver eclipse em parte alguma da terra;

2.° se fôr $\Delta \cos \alpha = \Sigma + p$, o eclipse poderá observar-se de um só ponto da terra;

3.° se fôr $\Delta \cos \alpha < \Sigma + p$, o eclipse poderá observar-se de muitos pontos (*).

Da segunda das equações (16) resulta que, se fôr $\Delta \cos \alpha + \Sigma < p$, todo o eclipse cahirá dentro da terra.

Em fim das equações relativas ao problema III, resulta que, se fôr a minima distancia $\Delta \cos \alpha = p$, cahirá o eclipse central em um só ponto; e se fôr $\Delta \cos \alpha < p$, cahirá em muitos pontos.

Devemos repetir que neste numero attendemos só ao valor absoluto de $\Delta \cos \alpha$, considerando-o como positivo.

Estes resultados mostram a possibilidade ou impossibilidade dos eclipses, e as circumstancias geraes, que lhes são relativas. Veja-se tambem o n.° 131, cuja doutrina tem logar para todos os pontos da terra.

Assim os limites, de que se trata, separam os valores reaes de t das equações (15) do n.° 145, dos imaginarios; e as raizes correspondentes reduzem-se a uma só para cada um dos horisontes, oriental e occidental, isto é, fazem coincidir os pontos da curva correspondentes a cada par de raizes.

(*) Por onde se vê que, no caso de ser Δ pouco differente de $\Sigma + p$, se deve substituir esta condição em logar da menos exacta dada no n.° 31 para a escolha das estrellas cujas conjuncções com a Lua se annunciam.

ARTIGO III.

Passagens de Venus e Mercurio pelo disco do Sol.

152. I. T*Empos das phases.* As formulas dos nn. 120, 121, 122 servem para calcular as phases destas passagens, a duração, e a minima distancia; mudando as quantidades relativas á Lua nas relativas a Mercurio ou Venus.

Nesta mudança achar-se-ha sempre h negativo, por terem logar as passagens nas conjuncções inferiores, nas quaes o movimento geocentrico é retrogrado.

No principio e fim é $c =$ som. dos sem. do plan. e do Sol

Nos contactos internos é $c =$ diff. dos sem. do plan. e do Sol.

153. No calculo de τ convém seguir o methodo indicado no n.° 129: ou, como faz o Sr. Monteiro, resolver a equação (3) do n.° 116, desprezando o quadrado de $\gamma\tau$, por ser τ muito pequeno; o que dá

$$\tau = \frac{\frac{g}{h}\,\text{sen H}}{1 - \frac{g}{h}\gamma'\cos\text{ H}}.$$

Este valor substituido nas formulas dos nn. 120, 121, desprezando os quadrados e productos de $\gamma\tau$ e das parallaxes, dá as formulas do n.° 152 da memoria do Sr. Monteiro.

154. Pondo $p = 0$, e por isso $g = 0$, $q = 0$,

nas formulas dos nn. 120, 121, 122, resultão as que são relativas ao centro da terra.

Desenvolvendo sen $(-\alpha \pm \varphi)$ em senos e cosenos de α e φ, póde dar-se a estas formulas a forma que tem no n.° 147 da mesma memoria.

155. II. *Pontos d'entrada e sahida.* Para determinar os pontos d'entrada, e sahida, do planeta no disco do Sol, servem as formulas do n.° 136, mudando tambem as quantidades relativas á Lua nas relativas a Mercurio ou Venus.

E no caso de se quererem as posições vistas do centro da terra, é necessario suppor $p = o$ depois de ter desembaraçado os dous termos de tang μ do factor commum p.

Mas como o movimento é retrogrado, applica-se respectivamente ao principio e fim da passagem o que naquelle n.° se disse relativamente ao fim e principio do eclipse; isto é, toma-se ψ positivo ou negativo, conforme é anterior ou posterior á conjuncção a posição que se considera.

156. Não se costuma calcular senão o ponto da entrada; porque depois della o observador acompanha o curso do planeta sobre o disco do Sol até á sahida. E por isso é ψ positivo.

Circumstancias da passagem em diversos logares da terra.

157. O problema de achar o primeiro e ultimo contacto no horisonte é o mesmo que o dos nn. 137 e (145 *); mas como o movimento geocentrico de Mercurio ou de Venus é retrogrado no tempo da passagem, a somma $p + \Sigma$ corresponde ao principio no horisonte occidental, e ao fim no horisonte oriental; e inversamente, a differença $p - \Sigma$ corresponde ao principio no horisonte oriental e ao fim no horisonte occidental: o que tambem se vê na nota do n.° 145, por causa da mudança de sinal de h.

Assim as regras pelas quaes se resolvem aquelles problemas (nn. 140, 141, e 145 *) são applicaveis ao actual, mudando o nascimento em occaso e inversamente; com as seguintes modificações.

Por ser h negativo, devem os sinaes $\mp$ que precedem α (n.° 140) pertencer respectivamente ao primeiro e ultimo contacto, para $\Sigma + p$; e inversamente para $\Sigma - p$, por ser $p - \Sigma$ negativo; no caso de se tomar λ obtuso: e o contrario no caso de se tomar λ agudo.

A regra contraria tem logar no caso de se tomar α obtuso.

158. Assim, tomando α e λ obtusos, os sinaes $\mp$, que precedem α, pertencem respectivamente, o primeiro ao nascer e o segundo ao pôr do Sol, em ambos os problemas seguintes:

Achar o logar que vê primeiro a entrada do planeta ao pôr do Sol; e o que vê ultimo a sahida ao nascer do Sol:

e, inversamente, o que vê primeiro a entrada ao nascer do Sol; e o que vê ultimo a sahida ao pôr do Sol.

Tudo isto se vê bem pela discussão da segunda parte do valor de t,

$$\mp \frac{\Sigma' \cos \alpha \cos \lambda}{h}.$$

159. Taes são os problemas, cuja solução é necessaria para os annuncios que se costumam fazer na Ephemeride. Omittimos porém outros, que aqui não pertencem, tanto relativos ás passagens de Venus e Mercurio pelo disco do Sol, como aos de mais eclipses; apezar da importancia que alguns tem nas applicações da Astronomia.

ARTIGO IV.

Influencia da aberração no calculo dos eclipses.

160. A Direcção apparente, pela qual o observador recebe os raios luminosos, é alterada pela combinação das velocidades da luz com as do objecto illuminado e do observador: mas essa alteração não influe no calculo do tempo dos eclipses; porque a existencia ou não existencia delles sómente é relativa á presença ou não presença dos raios luminosos no olho observador, qualquer que seja a direcção pela qual a este pareceria recebel-os. Mas o tempo gasto pelos raios luminosos em percorrer as posições, de que dependem os eclipses, influe por outra consideração no seu calculo; como vamos vêr.

Seja θ o tempo que a luz gasta para chegar do astro occultado ao observador; θ' o que gasta para chegar do corpo opaco, que produz a occultação, ao observador; e T o tempo d'uma phase do eclipse. Os raios luminosos, cuja intercepção dá logar a esta phase, partiram do astro no instante $T - \theta$; e passaram pelo corpo opaco no instante $T - \theta'$; conseguintemente as posições do astro e do corpo opaco devem referir-se a estes instantes.

161. Sejam pois μ e μ' os movimentos geocentricos do astro e do corpo opaco n'um segundo de tempo; r e r' as suas distancias ao obser-

vador. Aos seus logares geocentricos, relativos ao tempo T, devem fazer-se respectivamente as correcções

$$-\mu\theta = -\mu r\Theta, \quad -\mu'\theta' = -\mu' r'\Theta;$$

sendo Θ o numero de segundos que a luz gasta em percorrer a media distancia do Sol á terra, que tomamos por unidade de r e r'.

1.° Nas occultações das estrellas pela Lua é $\mu = 0$: conseguintemente deve tomar-se a posição da estrella dada no catalogo; e a da Lua dada pelas taboas lunares, por estar envolvida nas epochas dellas a correcção, $-\mu' r'\Theta$, que é igual á aberração.

2.° Nos eclipses de Sol, e nas occultações dos planetas pela Lua, deve applicar-se ao logar do astro occultado a correcção $-\mu r\Theta$, que é a sua aberração; isto é, devem tomar-se os logares affectos da aberração, como são dados na Ephemeride.

3.° O mesmo diremos a respeito dos planetas e do Sol nas passagens de Venus e Mercurio pelo disco delle.

4.° Em fim, em quanto aos eclipses da Lua, sejam θ e θ' os tempos que a luz gasta em percorrer as distancias do Sol e da Lua á terra, e por conseguinte $\theta + \theta'$ o tempo que emprega em chegar do Sol á secção da sombra terrestre, no logar onde a Lua a atravessa; e r e r' as distancias do Sol e da Lua á terra. Os logares do Sol e da Lua devem corresponder aos tempos $T - (\theta + 2\theta')$ e $T - \theta'$; e por conseguinte devem applicar-se aos correspondentes a T as correcções $-\mu r\Theta - 2\mu r'\Theta$ e $-\mu r'\Theta$; isto é, deve tomar-se o Sol affecto da aberração $-2\mu r'\Theta$, e a Lua affecta da aberração. Mas como a quantidade $-2\mu r'\Theta$ apenas é $0'',1$, podemos desprezal-a, e tomar ainda nestes eclipses os logares do Sol e Lua taes quaes os dá a Ephemeride.

DO CALENDARIO.

162. *Computo ecclesiastico.* Seja M o anno proposto, m as suas duas ultimas letras á direita, e s as da parte secular; e designemos por $\left[\frac{p}{q}\right]$ o resto da divisão de um numero p por outro q. Temos:

$$\text{Cyclo solar} = \left[\frac{M+9}{28}\right],\ \text{Indicção} = \left[\frac{M+3}{15}\right],$$

$$\text{Aureo numero}\ N = \left[\frac{M+1}{19}\right],\ \text{Epacta}\ E = \left[\frac{11(N-1)}{30}\right] + 8 + \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{3}s - s,$$

até o anno 4199, e com $\frac{1}{3}\left(s - \frac{s-17}{25}\right)$ em logar de $\frac{1}{3}s$ para os annos posteriores. Em $\frac{1}{4}s$ e $\frac{1}{3}s$ desprezam-se as fracções; e tira-se ou ajunta-se 30 a E, sendo necessario, para a tornar positiva e *não*>30.

$$\text{Inicial de Março},\ I = \left[\frac{m + \frac{1}{4}m + 5s + \frac{1}{4}s + 3}{7}\right],$$

$$\text{Letra dominical},\ L = 4 - I \ \text{ou} = 11 - I,$$

mas em Janeiro e Fevereiro do bissexto toma-se $5 - I$ ou $12 - I$.

163. A correspondencia dos numeros dados pelas expressões de I e L com os dias da semana e letras dominicaes é a seguinte:

Numeros	1	2	3	4	5	6	7 ou o
Dias, I	seg.	terç.	quart.	quint.	sext.	sabb.	Dom.
Letras, L	A	B	C	D	E	F	G

164. Assim no seculo XIX, ou para $s = 18$, é

$$N = \left[\frac{m-4}{19}\right];\ E = \left[\frac{11(N-1)}{30}\right],\ I = \left[\frac{m + \frac{1}{4}m - 1}{7}\right].$$

165. *Temporas.* As quatro temporas são a quarta feira, sexta, e sabbado, immediatas á Cinza, ao Pentecostes, e aos dia 14 de Setembro e 13 de de Dezembro.

166. *Festas moveis.* Estas festas dependem da *Paschoa*, isto é, *do Domingo immediato á primeira Lua cheia posterior a 20 de Março*: entendendo aqui por Lua cheia a que suppõe o calendario ecclesiastico, dada pela *epacta*. Para calcular a Paschoa temos:

167. 1.° *Methodo.* Calcule-se a epacta E; e depois:

$$\text{para}\begin{cases} E<24 \\ E=24 \\ E=25\,,\ N>11 \\ E=25\,,\ N \text{ não}>11 \\ E>25 \end{cases} \quad \begin{matrix}\text{a Paschoa será o}\\ \text{Domingo im-}\\ \text{mediato a}\end{matrix} \begin{cases} D=44-E \text{ de Março} \\ \quad 42-E \quad \text{Abril} \\ \quad 42-E \quad \text{A.} \\ \quad 43-E \quad \text{A.} \\ \quad 43-E \quad \text{A.} \end{cases}$$

Qundo fôr D>31 de Março, a Paschoa será o Domingo immediato a D—31 de Abril (Franc. Astr. n.° 334 e seguintes).

2.° *Methodo, de Gauss.* Seja

$$\left[\frac{M}{19}\right]=a,\ \left[\frac{M}{4}\right]=b,\ \left[\frac{M}{7}\right]=c,\ \left[\frac{19a+A}{30}\right]=d,\ \left[\frac{2b+4c+6d+B}{7}\right]=e;$$

sendo A e B dados pela tabella seguinte:

	A	B		A	B
1582 até 1699	22	3	seculo 22	24	6
seculo 18	23	3	seculo 23	25	0
seculo 19	23	4	seculo 24	26	1
seculo 20	24	5	seculo 25	25	1
seculo 21	24	5			

A Paschoa será $P=22+d+e$ de Março, ou P—31 de Abril. Mas se o calculo der P—31>24, será a Paschoa o dia P — 38 d'Abril. (Delambr. Astr. tom. 3.° pag. 712).

Exemplo. No anno de 1848 temos:

1.° *Methodo.* $N=\left[\frac{48-4}{19}\right]=6$, $E=\left[\frac{55}{30}\right]=25$, $D=43-25=18$ d'Abril, que por ser uma terça feira dá a Paschoa a 23 d'Abril.

2.° *Methodo.* $a=5$, $b=c=0$, $d=28$, $e=4$, $P=54$ de Março=23 d'Abril.

DA INTERPOLAÇÃO.

168. Seja uma serie de funcções e de raizes

Raizes .... , i_n , i_{n-1} , ... i_1, i, i' , ... $i^{(n-1)}$, $i^{(n)}$, ...

Funcções .... , β_n, β_{n-1} , ... β_1, β , β', ... $\beta^{(n-1)}$, $\beta^{(n)}$, ...

Fazendo , para qualquer indice m desde 1 até o infinito ,

$$\frac{\delta^{m-1}\beta_{n-1} - \delta^{m-1}\beta_n}{i_{n-m} - i_n} = \delta^m \beta_n\,,\quad \frac{\delta^{m-1}\beta^{(n+1)} - \delta^{m-1}\beta^{(n)}}{i^{(n+m)} - i^{(n)}} = \delta^m \beta^{(n)} \quad ..(1),$$

a equação

$$\beta^{(t)} = \beta + (t-i)\,\delta\beta + (t-i)(t-i')\,\delta^2\beta + (t-i)(t-i')(t-i'')\,\delta^3\beta \,.. \quad (2)$$

satisfará a todas as funcções dadas, substituindo nella por t as raizes correspondentes.

169. Ordenando a equação (2) relativamente ás potencias ascendentes de t , teremos $\beta^{(t)} = \beta_o + At + Bt^2 + Ct^2$ .... (3) ;

sendo

$$\beta_o = \beta - i\delta\beta + ii'\delta^2\beta - ii'i''\delta^3\beta \,..............$$

$$A = \delta\beta - (i+i')\,\delta^2\beta + (ii' + ii'' + i'i'')\,\delta^3\beta \,....$$

$$B = \delta^2\beta - (i + i' + i'')\,\delta^3\beta \,..................$$

$$C = \delta^3\beta \,..................................$$

....

170. Se tomarmos por epocha a raiz correspondente a β , será $\beta = \beta_o$ e $i = 0$; e se os intervallos $i' - i$, $i'' - i'$ .... forem iguaes, será $\delta^m\beta = \dfrac{\Delta^m}{2\,.\,3\,..\,m\,(i'-i)^m}$; chamando Δ^m a differença da ordem m correspondente á funcção β. E teremos

$$A = \frac{\Delta}{i'} - \frac{\Delta^2}{2i'} + \frac{\Delta^3}{3i'}\,..\,,\; B = \frac{\Delta^2}{2i'^2} - \frac{\Delta^3}{2i'^2}\,..\,,\; C = \frac{\Delta^3}{6i'^3}\,....$$

171. Se em vez de levar a approximação até uma differença da ordem $m+1$, pararmos na ordem m, e substituirmos $\dfrac{\Delta^m + \Delta_1^m}{2} = \frac{1}{2}\Sigma^{(m)}$ em logar de Δ^m; os dous ultimos termos de A, que seriam $\pm\dfrac{1}{i'}\left(\dfrac{\Delta^m}{m} - \dfrac{\Delta^{m+1}}{m+1}\right)$,

ficam substituidos por $\pm\dfrac{1}{i'}\left(\dfrac{\Delta^m + \Delta_1^m}{2m}\right) = \pm\dfrac{1}{i'}\left(\dfrac{\Delta^m}{m} - \dfrac{\Delta_1^{m+1}}{2m}\right)$.

Assim a parte, que se substitue em logar do ultimo termo, é $\frac{\Delta_1^{m+1}}{2mi'}$.

172. Se as differenças da ordem $m+1$ se tomarem como constantes, a parte do ultimo termo desprezada por aquella substituição será

$$\frac{1}{i'}\left(\frac{\Delta^{m+1}}{m+1}-\frac{\Delta^{m+1}}{2m}\right)=\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{\Delta^{m+1}}{(m+1)i'};$$

e a parte aproveitada será $\frac{m+1}{2m}\cdot\frac{\Delta^{m+1}}{(m+1)i'}$. Assim temos:

$$\text{para } m=\begin{cases}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{cases}$$
$$\frac{m+1}{2m}=\begin{cases}1 & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} & \frac{3}{5}.\end{cases}$$

173. Se, no caso de não serem constantes, as differenças Δ^{m+1} e Δ_1^{m+1} da ordem $m+1$ tiverem sinaes contrarios, o termo substituido $\mp\frac{\Delta_1^{m+1}}{2mi'}$ tornar-se-ha em um novo desprezo; mas não resultará disso grande erro, por serem então Δ^{m+1} e Δ_1^{m+1} mais pequenas (n.° 63).

174. *No maximum* a equação (3) dá

$$o=A+2Bt+3Ct^2\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

da qual tirando o valor de t e substituindo em (3), resulta o valor da funcção maxima. Assim:

1.° se pararmos nas differenças 2.^{as} será

$$t=-\frac{A}{2B}=\frac{i'}{2}-\frac{i'\Delta}{\Delta^2},\qquad \text{max.}=\beta-\frac{A^2}{4B}.$$

2.° Se levarmos a approximação até as differenças 3.^{as}, será

$$t=-\frac{A}{2B+3Ct}=\frac{i'}{2}-\frac{i'\left(\Delta-\frac{1}{6}\Delta^3+\frac{1}{4}\frac{t}{i'}\Delta^3\right)}{\Delta^2-\Delta^3+\frac{1}{2}\frac{t}{i'}\Delta^3}.$$

(Vej. nn. 55, 56, 75).

NOTA.

SOBRE O N.° 75.

Querendo os apsides com maior aproximação, devem os A reduzir-se á orbita, antes de applicar a regra deste n.°

Seja I a inclinação da orbita, R a reducção, e $L - \Omega = \delta$ o argumento della. O triangulo formado pelo nodo, Lua, e projecção desta na ecliptica, dá

$$\text{tang}\,\delta = \cos I\ \text{tang}\,(\delta + R)\text{, e por conseguinte (n.° 128 *)}$$

$$\text{☾} = L + \frac{\text{tang}^2 \frac{1}{2} I}{\text{sen}\,1'}\ \text{sen}\,2\,\delta = L + 6',870\ \text{sen}\,2\delta,$$

desprezando os termos seguintes.

Seja $\qquad L = L_1 + At + Bt^2, \qquad \Omega = \Omega_1 - nt.$

Para $t = 0$ é

$$\frac{d\text{☾}}{dt} = \frac{dL}{dt} + 2\,(A + n)\,6',870\ \text{sen}\,1'\cos 2\delta$$

$$= A + 2\,(A + n)\,6',870\ \text{sen}\,1'\cos 2\delta.$$

No caso de $A + n = 30'$, o segundo termo, que é a correcção procurada de A, reduz-se a $c = +0',1199\ \cos 2\delta$.

E quando $A + n$ differir de $30'$, a correcção será $c\left(1 + \frac{A + n - 30'}{30}\right)$.

TABOA

DE c

Argum.: δ ou $180° - \delta$

δ	δ	c	diff.	δ	δ	δ	δ	c	diff.	δ	δ
0°	180°	+0',120—	1	90°	90°	24°	156°	+0,080—	10	66°	114°
3	177	0,119	2	87	93	27	153	0,070	10	63	117
6	174	0,117	3	84	96	30	150	0,060	11	60	120
9	171	0,114	4	81	99	33	147	0,049	12	57	123
12	168	0,110	6	78	102	36	144	0,037	12	54	126
15	165	0,104	7	75	105	39	141	0,025	12	51	129
18	162	0,097	8	72	108	42	138	0,013	13	48	132
21°	159°	+0,089—	9	69°	111°	45°	135°	+0,000—		45°	135°

FIM.

SUPPLEMENTO

AO

CALCULO

DAS

EPHEMERIDES ASTRONOMICAS

DE COIMBRA.

TABOAS DO SOL.

As longitudes e distancias destas taboas carecem de correcções, umas provenientes das mudanças feitas por Bessel nos elementos ellipticos, e outras provenientes das massas adoptadas pelo mesmo Astronomo (*Conn. des Temps* para 1831). Trataremos pois das correcções ellipticas, e das correcções das perturbações.

Correcções ellipticas.

175 Seja $m = nt + \varepsilon$ a longitude media do sol; P a do perigeo; e a excentricidade; z a anomalia media; v a verdadeira; δn, $\delta\varepsilon$, δP, δe, as correcções do movimento medio, epocha, perigeo, e excentricidade; E a equação do centro; e r a distancia.

Para uma epocha separada de 1800 pelo numero t de annos, é, segundo Bessel,

$$P = 279.^{\circ}30'.8'',39 + t.\,61'',5171 + t.^2\,0'',0002037965,$$
$$e = 0,0167922585 - t.\,0,0000004359,$$
$$\delta n = 0,\ \delta\varepsilon = 2'',65 + t.\,0'',144477,$$
$$\delta e = -\,0,0000024625 - t.\,0,00000001786,$$
$$\delta P = 64'',99 - t.\,0'',41015,$$

e por conseguinte:

$$\delta m = \delta\varepsilon,\ \delta z = \delta\varepsilon - \delta P = -\,62'',34 + t.\,0'',554627.$$

D'onde resultam os seguintes valores dos elementos de Delambre em 1850 e 1900, e das suas correcções:

	1850	1900
$e =$	0,0167738190	0,0167529170
$\delta e =$	$-$ 0,0000033555	$-$ 0,0000042485
$\delta z =$	$-$ 34'',60865	$-$ 6'',8773
$\delta\varepsilon =$	+ 9'',87385	+ 17'',0977
$P =$	280.°20'.40'',27	281.°12'.18'',16

176 Até os termos de 2.ª ordem relativamente a e temos (Mec. cel. liv. 2.° pag. 181)

$$E \text{ sen } 1'' = (v - z) \text{ sen } 1'' = 2e \text{ sen } z + \frac{5}{4} e^2 \text{ sen } 2z,$$

$$\odot = nt + \varepsilon + E,$$

$$r = 1 + \tfrac{1}{2} e^2 - e \cos z - \tfrac{1}{2} e^2 \cos 2z;$$

e por conseguinte

$$\delta\odot = \delta\varepsilon + (2e \cos z + \tfrac{5}{2} e^2 \cos 2z)\,\delta z + (2 \text{ sen } z + \tfrac{5}{2} e \text{ sen } 2z)\frac{\delta e}{\text{sen } 1''} \ldots \quad (1)$$

$$\delta r = (e \text{ sen } 1'' \text{ sen } z + e^2 \text{ sen } 1'' \text{ sen } 2z)\,\delta z + (e - \cos z - e \cos 2z)\,\delta e \ldots . (2).$$

Calculando os coefficientes de (1) e (2) com os valores precedentes dos elementos e das suas correcções em 1850 e 1900, teremos as expressões das correcções da longitude e distancia naquellas duas epochas; e depois dividindo por 50 as differenças entre os coefficientes relativos a 1850 e a 1900, teremos as variações annuas dos mesmos coefficientes entre 1850 e 1900. Assim para 1850 + T, sendo T expresso em annos, e tomando por unidade a septima casa decimal nos coefficientes de δr, teremos

$$\delta\odot = \left\{ \begin{array}{l} 9'',874 - 1'',161 \cos z - 1'',384 \operatorname{sen} z \\ \quad - 0'',024 \cos 2z - 0'',029 \operatorname{sen} 2z \\ + \left[\begin{array}{l} 0'',14448 + 0'',01861 \cos z - 0'',00737 \operatorname{sen} z \\ \quad + 0'',00039 \cos 2z - 0'',00015 \operatorname{sen} 2z \end{array} \right] . T \end{array} \right\}$$

$$\delta r = \left\{ \begin{array}{l} -0,56 + 33,555 \cos z - 28,14 \operatorname{sen} z + 0,56 \cos 2z - 0,47 \operatorname{sen} 2z \\ + \left[\begin{array}{l} -0,0030 + 0,1786 \cos z + 0,4512 \operatorname{sen} z \\ \quad + 0,0030 \cos 2z + 0,0076 \operatorname{sen} 2z \end{array} \right] . T \end{array} \right\};$$

expressões por meio das quaes formámos a taboa seguinte.

Nesta Taboa incluimos as correcções relativas ás fracções d'anno, por corresponderem, com pequena differença, os dias delle aos grãos d'anomalia: e por isso devem as variações annuas multiplicar-se tão sómente pelo numero inteiro d'annos decorridos desde 1850 até a data do anno proposto.

Tomamos nella por unidade das correcções das longitudes as millesimas de minuto, e por unidade das correcções das distancias a septima casa decimal.

TABOA

DAS

CORRECÇÕES ELLIPTICAS

Da longitude e distancia do ☉ para 1850.

Arg. A	Correcção da long.	Var. ann.	Correcção da dist.	Var. ann.
0°	+ 144,8	+ 2,725	+ 33,6	0,179
10	141,1	2,697	28,0	257
20	138,0	2,661	21,5	326
30	135,9	2,616	14,3	385
40	134,7	2,565	+ 06,7	432
50	134,4	2,509	— 01,1	464
60	135,1	2,451	08,8	482
70	136,8	2,392	16,2	485
80	139,3	2,334	23,0	472
90	142,5	2,279	29,2	445
100	146,4	2,228	34,4	405
110	150,8	2,183	38,5	353
120	155,6	2,145	41,5	290
130	160,6	2,116	43,2	220
140	165,8	2,095	43,7	143
150	170,8	2,083	43,0	+ 063
160	175,8	2,081	41,0	— 019
170	180,3	2,088	37,8	100
180	184,5	2,104	33,6	179
190	188,1	2,129	28,5	252
200	191,1	2,162	22,5	318
210	193,4	2,202	15,9	375
220	195,0	2,248	08,8	422
230	195,7	2,299	— 01,4	456
240	195,5	2,354	+ 06,0	478
250	194,5	2,411	13,3	485
260	192,6	2,468	20,3	478
270	189,8	2,524	26,7	457
280	186,4	2,577	32,3	422
290	182,3	2,626	36,9	373
300	177,6	2,668	40,5	313
310	172,6	2,703	42,7	242
320	167,3	2,728	43,7	163
330	162,0	2,744	43,2	— 079
340	156,8	2,748	41,3	+ 008
350	151,9	2,742	38,2	095
360	147,5	2,725	33,8	179

177. Se quizessemos transformar as expressões precedentes nas de Bessel, que dão $\delta\odot$ e $\delta \log r$ em long. $\odot = \odot$, tirariamos $\cos z$ e $\cos 2z$, expressos em $\cos v$ e $\cos 2v$, da equação

$$z \,\text{sen}\, 1'' = v \,\text{sen}\, 1'' - 2e \,\text{sen}\, v + \tfrac{3}{4} e^2 \,\text{sen}\, 2v;$$

e substituindo em (1) achariamos

$$\delta\odot = \delta\varepsilon + \left(2e^2 + 2e\cos v + \tfrac{1}{2}e^2 \cos 2v\right)\delta z + \left(\text{sen}\, v + \tfrac{1}{4} e \,\text{sen}\, 2v\right)\frac{2\,\delta e}{\text{sen}\, 1''},$$

ou, por ser $v = \odot - P$, a equação . . . . (3)

$$\delta\odot = \left\{\begin{array}{l} \delta\varepsilon + 2e^2\,\delta z \\ + \left(2e\cos P\,\delta z - \dfrac{2\,\text{sen}\, P\,\delta e}{\text{sen}\, 1''}\right)\cos\odot + \left(2e\,\text{sen}\, P\,\delta z + \dfrac{2\cos P\,\delta e}{\text{sen}\, 1''}\right)\text{sen}\,\odot \\ + \left(\dfrac{e^2\cos 2P\,\delta z}{2} - \dfrac{e\,\text{sen}\, 2P\,\delta e}{2\,\text{sen}\, 1''}\right)\cos 2\odot + \left(\dfrac{e^2\,\text{sen}\, 2P\,\delta z}{2} + \dfrac{e\cos 2P\,\delta e}{2\,\text{sen}\, 1''}\right)\text{sen}\, 2\odot. \end{array}\right.$$

Da expressão de r do n.° precedente tirar-se-hia [Franc. Math. Pur. n. 625 (C)]

$$\log r = \mu\left(\tfrac{1}{2}e^2 - e\cos z - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2z - \tfrac{1}{2}e^2\cos^2 z\right)$$

$$= \mu\left(\tfrac{1}{4}e^2 - e\cos z - \tfrac{3}{4}e^2\cos 2z\right),$$

sendo μ o modulo; e por conseguinte

$$\delta \log r = \mu\left(\tfrac{1}{2}e - \cos z - \tfrac{3}{2}e\cos 2z\right)\delta e + \mu\,\text{sen}\, 1''\left(e\,\text{sen}\, z + \tfrac{3}{2}e^2\,\text{sen}\, 2z\right)\delta z$$

$$= \mu\left(-\tfrac{1}{2}e - \cos v - \tfrac{1}{2}e\cos 2v\right)\delta e + \mu\,\text{sen}\, 1''\left(e\,\text{sen}\, v + \tfrac{1}{2}e^2\,\text{sen}\, 2v\right)\delta z,$$

ou . . . . (4)

$$\delta \lg. r = \mu\left\{\begin{array}{l} -\left(\left(\tfrac{1}{2}e + \cos P\right)\delta e + e\,\text{sen}\, P\,\text{sen}\, 1''\,\delta z\right)\cos\odot - \left(\text{sen}\, P\,\delta e - e\cos P\,\text{sen}\, 1''\,\delta z\right)\text{sen}\,\odot \\ -\left(\dfrac{e\cos 2P\,\delta e}{2} + \dfrac{e^2\,\text{sen}\, 2P\,\text{sen}\, 1''\,\delta z}{2}\right)\cos 2\odot - \left(\dfrac{e\,\text{sen}\, 2P\,\delta e}{2} - \dfrac{e^2\cos 2P\,\text{sen}\, 1''\,\delta z}{2}\right)\text{sen}\, 2\odot. \end{array}\right.$$

Emfim, se quizessemos δr expresso em $\odot$, transformariamos (2) em v, e depois em $\odot - P$, e teriamos

$$\delta r = -\left(\cos P\,\delta e + e\,\text{sen}\, P\,\text{sen}\, 1''\,\delta z\right)\cos\odot - \left(\text{sen}\, P\,\delta e - e\cos P\,\text{sen}\, 1''\,\delta z\right)\text{sen}\,\odot$$

que reduzida a numeros daria

$$\delta r = \begin{cases} -\ 21{,}66 \cos \odot -\ 38{,}06 \text{ sen } \odot \\ +\ (0{,}4888 \cos \odot - 0{,}0939 \text{ sen } \odot).\ T. \end{cases}$$

Perturbações Lunares.

178. As equações da longitude e distancia de Delambre devidas á perturbação lunar, são

$$\text{Pert. long.} = 7'',5 \text{ sen } A',\quad \text{Pert. dist.} = 363{,}61 \cos A',$$

designando A o argumento ☾ verd. — ⊙ verd.

Na taboa XI do Sr. Monteiro suppõe-se B = ☾ med. — ♁ med.; e os coefficientes devem ser alterados proporcionalmente ás variações dos factores respectivos $\frac{\text{dist. lun.}}{\text{dist. sol.}}$, e dist. lun. (Mec. cel. Liv. VI p. 59) (*).

As equações, que dão as perturbações, são pois, segundo Delambre,

$$A' = \begin{cases} A - 2^{\circ}{,}11 \text{ sen } m + 1^{\circ}{,}3415 \text{ sen } (2A - M) \\ \quad + 6^{\circ}{,}3 \text{ sen } M + 0^{\circ}{,}217 \text{ sen } 2M + 0^{\circ}{,}595 \text{ sen } 2A, \end{cases}$$

$$\text{pert. long.} = 7'',5 \cdot \frac{\text{dist. verd. ☾}}{\text{dist. med. ☾}} \cdot \frac{\text{dist. med. } \odot}{\text{dist. verd. } \odot} \cdot \text{sen } A',$$

$$\text{pert. dist.} = 363{,}61 \cdot \frac{\text{dist. verd. ☾}}{\text{dist. med. ☾}} \cos A',$$

onde M e *m* representam as anomalias medias da Lua e do Sol.

E porque é

$$\frac{\text{dist. med. } \odot}{\text{dist. verd. } \odot} = 1 + 0{,}017 \cos m,$$

$$\frac{\text{dist. verd. ☾}}{\text{dist. med. ☾}} = 1 - 0{,}05475 \cos M - 0{,}0109 \cos(2A - M) - 0{,}0076 \cos 2A.;$$

(*) A em Delambre corresponde a B—180° no Sr. Monteiro; pondo de parte a constante que A tem de menos; e *m* em Delambre corresponde a A no Sr. Monteiro.

se exprimirmos tudo em millesimas da circumferencia, teremos em fim as equações .... (5)

$$A' = \begin{cases} A - 5,86 \text{ sen } m + 3,726 \text{ sen } (2A - M) \\ + 17,5 \text{ sen M} + 0,60 \text{ sen } 2M + 1,65 \text{ sen } 2A, \end{cases}$$

$$\text{eq. lun. long.} = 7'', 5 \text{ sen } A'. \begin{Bmatrix} 1 + 0,017 \cos m - 0,05475 \cos M \\ + 0,0109 \cos (2A - M) + 0,0076 \cos 2A \end{Bmatrix}$$

$$= 7'',5 \text{ sen } A'. (1 + \epsilon),$$

$$\text{eq. lun. dist.} = 363,61 \cos A'. \begin{Bmatrix} 1 - 0,05475 \cos M \\ - 0,0109 \cos (2A - M) - 0,0076 \cos 2A \end{Bmatrix}$$

Vej. a Introd. das Taboas Solares de Delambre, fol. *b* pag. 6.ª, fol. *d* pag. 3.ª, e fol. *h* pag. 4.ª.

179. As taboas III, VI, X, de Delambre dão M e A, sendo A já correcto na VI com o termo — 5,86 sen *m*; depois a taboa VII dá o resto da correcção de A dependente dos argumentos A e M; e entrando com A' nas taboas XV — 1.ª parte, e XXIV, acham-se as equações da longitude e distancia já correctas relativamente a A. Finalmente a 2.ª e 3.ª parte da taboa XV dão as correcções $7'',5$ sen A'. ϵ e 363,61 cos A'. ϵ (**).

Mas como a somma das constantes juntas ás tres partes das taboas XV e XXIV é $0',133$ para a longitude, e 410 para a distancia, devem ajuntar-se $0',037$ á equação lunar da longitude, e tirar-se 45 da equação lunar da distancia, para que estas equações venham a ficar com as constantes $0',170$ e 365, que tem na taboa XI do Sr. Monteiro.

Não deve tambem esquecer que para ter os M e A correspondentes a um meio dia de Coimbra, é necessario ajuntar aos correspondentes á meia noite de Paris as partes que pertencem a $12^h43'$.

180. O coefficiente $7'',5$ suppõe a massa lunar $= \frac{1}{68}$; mas suppondo-a $= \frac{1}{85} = \frac{1}{68}\left(1 - \frac{1}{5}\right)$, reduz-se o coefficiente a $6''$.

Para applicar pois esta correcção de Bessel é necessario que, depois de calculada a equação lunar como fica dito, se lhe tire a sua quinta parte.

(**) Parece que, segundo a ultima equação (5), e logar citado da Mec. cel., não deve haver a 2.ª parte da equação lunar da distancia; mas só a 1.ª e 3.ª: e que, por um engano de sinal, estão erradas as primeiras cinco columnas de funcções da taboa XV — 2.ª parte. Assim talvez seja melhor prescindir desta 2.ª parte da taboa XV, tanto para a longitude como para a distancia. No entretanto, de qualquer modo que se calcule, a differença é pequena.

Mas como nessa subtracção vão envolvidas as partes $\frac{0',170}{5}=0',034$, e $\frac{365}{5}=73$, das constantes, é necessario ajuntal-as: o que adiante faremos (n.° 185).

Perturbações Planetarias.

181. As perturbações devidas a um planeta constam (Mec. cel. liv. VI n.° 29) de termos da forma

$$A \text{ sen } (k+a) + B \text{ sen } (k+b), \text{ ou } A \cos (k+a) + B \cos (k+b),$$

que se reunem em um só da forma

$$X \text{ sen } (k+x), \text{ ou } X \cos (k+x),$$

fazendo (n.° 108)

$$\text{tg } x = \frac{A \text{ sen } a + B \text{ sen } b}{A \cos a + B \cos b}, X = \frac{A \text{ sen } a + B \text{ sen } b}{\text{sen } x} = \frac{A \cos a + B \cos b}{\cos x} \ldots (6).$$

Na introducção das Taboas de Delambre (fol. *d* pag. 4.ª e 5.ª) achamse as expressões da forma A_1 sen $(k - \varpi^{(i)})$, ou $A_1 \cos (k - \varpi^{(i)})$, reduzidas a

$$A_1 \cos \varpi^{(i)} \text{ sen } k - A_1 \text{ sen } \varpi^{(i)} \cos k, \text{ ou } A_1 \cos \varpi^{(i)} \cos k + A_1 \text{ sen } \varpi^{(i)} \text{ sen } k;$$

isto é, a

$$A \text{ sen } k + B \text{ sen } k,$$

que se torna

$$\left.\begin{array}{ll} \text{em} & \dfrac{A}{\cos y} \text{ sen } (k+y), \text{ pondo } \dfrac{B}{A} = + \text{tang } y \\[2ex] \text{ou em} & \dfrac{B}{\cos y} \cos (k+y), \text{ pondo } \dfrac{A}{B} = - \text{tang } y \end{array}\right\} \ldots (7).$$

182 Por meio das formulas (7) as expressões das perturbações planetarias que se acham na introducção das taboas de Delambre (fol. *d* pag. 4.ª, 5.ª, 7.ª, 8.ª), e sobre as quaes são construidas as mesmas taboas, transformam-se nas seguintes (*):

(*) Para reduzir com pouca differença as perturbações dependentes de Saturno dadas na Mec. cel. ás da introducção das Taboas de Delambre, deve substituir-se por μ^v a correcção $-\frac{1}{20,4}$ da massa de Saturno (Mec. cel. Tom. 4.° pag. 336).

Perturbações da longitude dependentes de Venus.

5″,6727 sen (♀ − ♁) − 6″,45 sen 2 (♀ − ♁)

− 0″,7971 sen 3 (♀ − ♁) − 0″,2417 sen 4 (♀ − ♁)

− 0″,09779 sen 5 (♀ − ♁) − 0″,04696 sen 6 (♀ − ♁)

− 0″,02362 sen 7 (♀ − ♁) − 0″,01292 sen 8 (♀ − ♁)

+ 2″,7878 sen (2♀ − 3♁ + 87°,002)

+ 1″,9090 sen (3♀ − 4♁ + 78°,855)

+ 0″,1389 sen (2♀ − ♁ + 80°,51)

− 0″,2320 sen (4♀ − 5♁ + 99°,483)

+ 1″,2105 sen (3♀ − 5♁ + 158°,533)

− 0″,1415 sen (2♁ − ♀ + 4°,864).

Perturbações da longitude dependentes de Marte.

− 0″,30972 sen (♁ − ♂) − 2″,5252 sen 2 (♁ − ♂)

+ 0″,1571 sen 3 (♁ − ♂)

+ 0″,03409 sen 4 (♁ − ♂) + 0″,01150 sen 5 (♁ − ♂)

+ 0″,004682 sen 6 (♁ − ♂) + 0″,002119 sen 7 (♁ − ♂)

+ 2″,1251 sen (2♂ − ♁ + 44°,950)

+ 0″,7206 sen (4♂ − 2♁ + 67°,816)

+ 0″,5207 sen (2♁ − 3♂ + 146°,801)

+ 0″,6336 sen (3♁ − 4♂ + 146°,935)

− 0″,1013 sen (4♁ − 5♂ + 146°,97)

+ 0″,2551 sen (5♂ − 3♁ + 68°,422).

Perturbações da longitude dependentes de Jupiter.

$$- 7'',059 \text{ sen } (\text{♁} - \text{♃}) + 2'',674 \text{ sen } 2 (\text{♁} - \text{♃})$$
$$+ 0'',1678 \text{ sen } 3 (\text{♁} - \text{♃}) + 0'',01655 \text{ sen } 4 (\text{♁} - \text{♃})$$
$$+ 2'',549 \text{ sen}(\text{♃} + 175^{\circ},664)$$
$$+ 1'',5943 \text{ sen}(\text{♁} - 2\,\text{♃} + 121^{\circ},838)$$
$$+ 0'',5431 \text{ sen}(2\,\text{♁} - 3\,\text{♃} + 8^{\circ},897)$$
$$+ 0'',1782 \text{ sen}(2\,\text{♁} - \text{♃} + 112^{\circ},204).$$

Perturbações da longitude dependentes de Saturno.

$$- 0'',4199 \text{ sen}(\text{♁} - \text{♄}) + 0'',1061 \text{ sen } 2 (\text{♁} - \text{♄})$$
$$+ 0'',0396 \text{ sen } 3(\text{♁} - \text{♄}) + 0'',3220 \text{ sen } (\text{♄} + 90^{\circ},979)$$
$$+ 0'',1088 \text{ sen}(\text{♁} - 2\,\text{♄} + 103^{\circ},01)$$

Perturbações da distancia dependentes de Venus.

$$- 64,342 \cos (\text{♀} - \text{♁}) + 183,802 \cos 2 (\text{♀} - \text{♁})$$
$$+ 29,026 \cos 3 (\text{♀} - \text{♁}) + 10,0334 \cos 4 (\text{♀} - \text{♁})$$
$$+ 4,381 \cos 5 (\text{♀} - \text{♁}) + 2,153 \cos 6 (\text{♀} - \text{♁})$$
$$+ 1,18 \cos 7 (\text{♀} - \text{♁}) + 0,64 \cos 8 (\text{♀} - \text{♁})$$
$$- 2,304 \cos(2\,\text{♁} - \text{♀} + 113^{\circ},444) - 2,787 \cos(2\,\text{♀} - \text{♁} + 80^{\circ},515)$$
$$- 24,700 \cos(2\,\text{♀} - 3\,\text{♁} + 88^{\circ},647) - 39,405 \cos(3\,\text{♀} - 4\,\text{♁} + 87^{\circ},335)$$
$$+ 3,875 \cos (4\,\text{♀} - 5\,\text{♁} + 86^{\circ},727) + 16,675;$$

Perturbações da distancia dependentes de Marte.

$$+ 3,978 \cos(\text{♁} - \text{♂}) + 58,45 \cos 2(\text{♁} - \text{♂}) - 4,694 \cos 3(\text{♁} - \text{♂})$$
$$- 1,191 \cos 4(\text{♁} - \text{♂}) - 0,435 \cos 5(\text{♁} - \text{♂})$$
$$- 5,415 \cos(2\,\text{♁} - 3\,\text{♂} + 158^{\circ},982)$$
$$- 13,908 \cos(2\,\text{♁} - 4\,\text{♂} + 146^{\circ},910) - 7,105 \cos(3\,\text{♂} - \text{♁} + 73^{\circ},095)$$
$$- 3,045 \cos(4\,\text{♂} - 2\,\text{♁} + 65^{\circ},556) - 0,3466$$

Perturbações da distancia dependentes de Jupiter.

+159,384 cos(♁ − ♃) − 90,986 cos 2(♁ − ♃) − 6,550 cos 3(♁ − ♃)

− 0,704 cos 4(♁ − ♃) + 6,109 cos(♃ + 22°,115)

− 4,768 cos(2♁ − ♃ + 48°,622) − 32,589 cos(♁ − 2♃ + 122°,319)

− 18,093 cos(2♁ − 3♃ + 9°,240) − 11,581.

Perturbações da distancia dependentes de Saturno.

+9,877 cos(♁ − ♄) − 3,6874 cos 2(♁ − ♄) − 0,191 cos 3(♁ − ♄)

− 2,4085 cos(♁ − 2♄ + 103°,177) − 0,554.

Destas equações, ou antes das correspondentes da Mec. cel., parece ter usado o Sr. Monteiro, aproveitando só as principaes (*).

183. Em logar das massas $\frac{1}{356632}$ e $\frac{1}{2546320}$ de Venus e de Marte adoptadas por Delambre (Mec. cel. Liv. VI n.° 44, e introd. das Tab. de Delamb. fol. *a* pag. 4.ª) Bessel adopta as seguintes:

Massa de Venus $\qquad \frac{1}{401847} = \frac{1}{356632} \cdot (1 - \frac{11}{100})$,

Massa de Marte $\qquad \frac{1}{2680337} = \frac{1}{2546320} \cdot (1 - \frac{1}{20})$.

Por conseguinte das equações dependentes de Venus (que no Sr. Monteiro são D, F, H) devem tirar-se os seus productos por $\frac{1}{10} + \frac{1}{100}$, e das equações dependentes de Marte (que no Sr. Monteiro são G, K) devem tirar-se os seus productos por $\frac{1}{20}$.

(*) Ainda que a constante do argumento *D* do Sr. Monteiro differa sensivelmente da que achámos, pouco influe esta differença na equação *D*.

A transformação das expressões correspondentes da Mec. cel., feita pela formula (7), dá com pequena differença a constante do Sr. Monteiro.

184. Mas como nas subtracções, que acabamos de indicar, vão envolvidas as constantes, é necessario, para não as alterar, que, depois de feita aquella correcção ás perturbações planetarias do Sr. Monteiro, se ajunte por fim

$$\left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100}\right)(0',060 + 0',220 + 0',090) + \tfrac{1}{20}(0',080 + 0',060).$$

ou $0',048$ ás longitudes,

e $$\left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100}\right)(40 + 233 + 25 - 16,7) + \tfrac{1}{20}(61 + 0,3);$$

ou 34 ás distancias;

o que faremos no n.º seguinte.

Conclusão.

185. Reunidas as correcções de Bessel expostas nos nn. 176, 180, 183, 184, vê-se que, depois de as applicar ás Taboas do Sr. Monteiro, se devem ajuntar as seguintes constantes

$0',082$ ás longitudes, e 107 ás distancias.

E ficará ainda facil o uso destas Taboas, que são sufficientes para o calculo da Ephemeride.

186. Mas se, para evitar os desprezos que, á vista do exposto nos nn. 178 e 182, parece ter commettido o Sr. Monteiro, fôr necessario usar das Taboas de Delambre: como a comparação das expressões, que dão as perturbações da longitude (fol. *d* pag. 3.ª 4.ª 5.ª) com a 1.ª parte da taboa XV e com as taboas XVI, XVII, XVIII, XIX, mostra que as constantes juntas á longitude são

Argumentos	A	B e C	B e D	B e E	B e F
Constantes	$7'',5$	$16'',6$	$6'',5$	$13'',5$	$0'',8$

é preciso, depois de feitas as correcções expostas nos nn. 176, 180, 185, ajuntar

$$\tfrac{1}{5}.\ 7'',5 + (\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100}).\ 16'',6 + \tfrac{1}{20}.\ 6'',5 = 3'',6$$

ás longitudes.

E semelhantemente, em virtude do que se lê na fol. *d* pag. 8.ª da introducção das Taboas de Delambre, seria necessario ajuntar

$$\tfrac{1}{5}.\ 379,6 + (\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100}).\ 183,325 + \tfrac{1}{20}.\ 145,347 = 103,35$$

ás distancias (*)

NOTA.

Nas addições ao *Connaissance des Temps* para 1836 dá-se conta d'uma perturbação descoberta por Airy e verificada por Pontécoulant, cujo periodo é de 240 annos.

Chamando $n't + \varepsilon'$ e $n''t + \varepsilon''$ as longitudes medias de Venus e da Terra, a expressão desta perturbação é (Theor. anal. du Syst. du Monde)

$$2'',049154 \text{ sen } (8n't + 8\varepsilon' - 13n''t - 13\varepsilon'' + 41^\circ.14'.13''),$$

que, usando da notação das Taboas do Sr. Monteiro, bastaria escrever assim

$$2'',049 \text{ sen } (7\text{H} - 2\text{D} - 38^\circ,76).$$

Esta equação applicada aos logares calculados pelas Taboas de Delambre, desde 1816 até 1826, dá resultados de cuja comparação, feita por

(*) Ainda que a analyse das Taboas de Delambre nos pareceo dar constantes differentes das apontadas naquelle logar da introducção, com tudo a alteração, que dessa differença proviria para a correcção de que aqui tratamos, não chegaria a uma unidade de sexta casa decimal.

Airy, com as observações de Pond relativas ao mesmo intervallo se deduziria a correcção da longitude media daquellas Taboas

$$2'',81 + t \, . \, 0'',048,$$

sendo t o numero d'annos contado desde 1800.

Mas como o uso da nova equação alteraria as correcções de Bessel, que se tem conservado no *Connaissance des Temps*, não devemos incluil-a no calculo dos logares do Sol; e menos ainda faltando os meios de conhecer o que a este respeito se tiver escripto.

Ascensão recta do Meridiano.

187. Segundo o que vimos no n.° 175 deve accrescentar-se a esta ascensão recta

em arco $\qquad 9'',87385 + t \, . \, 0'',144477$

ou em tempo $\qquad 0'',65826 + t \, . \, 0'',0096318,$

sendo t o numero d'annos contado desde 1850.

188. A ascensão recta do meridiano de Coimbra ao meio dia medio é, segundo Bessel,

$$280.^\circ 34' . 55'',65 + t \, . \, 27'',605844 + t^2 . \, 0'',0001221805$$

$$- f . 14' . 47'',083 + g \, . \, 59' . 8'',3302;$$

sendo t a data do anno contada desde 1800; f no seculo XIX o numero d'annos decorridos desde o ultimo bissexto; g o numero de dias decorrido desde o principio do anno. O coefficiente de f é o movimento medio do Sol em 6^h; e o coefficiente de g é o movimento medio diurno.

CATALOGOS D'ESTRELLAS.

189. Nestes Catalogos costumam achar-se as ascensões rectas e declinações das estrellas, correctas da aberração e nutação, para uma dada epocha: e por isso, quando se querem transportar aquellas coordenadas a outra epocha, é necessario applicar-lhes a precessão; alem dos movimentos proprios, se os ha.

Designando por ψ e ψ_1 as precessões luni-solar e geral, sobre a ecliptica fixa de 1750 e sobre a movel, por ω e ω_1 as inclinações do equador sobre as mesmas eclipticas, por α o movimento em ascensão recta da intersecção da ecliptica movel com o equador; tomando por origem do tempo o principio do anno de 1750; e adoptando os dados numericos de Bessel (Tab. Regiom. pag. V); temos:

$$\psi = t.\ 50'',37572 - t^2.\ 0'',0001217945$$

$$\psi_1 = t.\ 50'',21129 + t^2.\ 0'',0001221483$$

$$\omega = 23^\circ.28'.18'',0 + t^2.\ 0'',00000984233$$

$$\omega_1 = 23^\circ.28'.18'',0 - t.\ 0'',48368 - t^2.\ 0'',00000272295$$

$$\alpha = \frac{\psi - \psi_1}{\cos\omega} = \frac{t.\ 0'',16443 - t^2.\ 0,0002439428}{\cos\omega},$$

ou, pondo por ω o seu valor $23^\circ.28'.18''$ em 1750,

$$\alpha = t.\ 0'',17926 - t^2.\ 0'',0002659482.$$

190. Sejam agora $a^{(t)}$ e $d^{(t)}$ a ascensão recta e declinação d'uma estrella no tempo $1750 + t$, e procuremos as suas coordenadas $a^{(t')}$ e $d^{(t')}$ em $1750 + t'$.

Chamando $\alpha^{(t)}$ e $\omega^{(t)}$ os valores de α e ω em $1750+t$, calcularemos a longitude e latitude em $1750+t$, referidas á ecliptica fixa, pelas formulas (2) do n.° 42 e com os dados $a'^{(t)} = a^{(t)} + \alpha^{(t)}$, $d^{(t)}$, $\omega^{(t)}$. Depois, usando de notações semelhantes para $1750+t'$, calcularemos a ascensão recta em $1750+t'$, referida á intersecção do equador com a ecliptica fixa, e a declinação, pelas formulas (1) do n.° 41 e com os dados $l'^{(t')} = l^{(t)} + \psi^{(t')} - \psi^{(t)}$, $\lambda'^{(t)}$, $\omega^{(t')}$. E finalmente tiraremos $\alpha^{(t')}$ da ascensão recta para a referir ao equinoccio de $1750+t'$.

E se quizermos a longitude e latitude referidas á ecliptica movel de $1750+t'$, podemos calcula-las pelas formulas (2) do n.° 42 com os dados $a^{(t')} = a'^{(t')} - \alpha^{(t')}$, $d^{(t')}$, $\omega_1^{(t')}$.

Todas estas operações estão representadas no quadro seguinte

Epochas	AR e long.	DC e lat.	Obliq.	Elementos e formulas
$1750+t$	$a^{(t)}$	$d^{(t)}$		
»	$a'^{(t)}=a^{(t)}+\alpha^{(t)}$	$d^{(t)}$	$\omega^{(t)}$	dados
»	$l^{(t)}$	$\lambda'^{(t)}$		(2) do n.° 42
$1750+t'$	$l'^{(t')}=l'^{(t)}+\psi^{(t')}-\psi^{(t)}$	$\lambda'^{(t)}$	$\omega^{(t')}$	dados
»	$a'^{(t')}$	$d^{(t')}$		(1) do n.° 42
»	$a^{(t')}=a'^{(t')}-\alpha^{(t')}$	$d^{(t')}$	$\omega_1^{(t')}$	dados
»	$l^{(t')}$	$\lambda^{(t')}$		(2) do n.° 42

191. Se, figurando as ascensões rectas e declinações desenvolvidas em series ordenadas relativamente ás potencias do tempo, se poderem suppôr nullos os termos inferiores aos da segunda potencia; serão constantes as differenças segundas, e as variações annúas estarão em progressão arithmetica. É o que acontece, ainda para grandes intervallos de tempo, quando as estrellas não são visinhas dos pólos.

Seja então i o intervallo que separa duas epochas; C e C' as ascensões rectas, ou declinações, que nellas tem uma estrella; π e p as precessões annuas correspondentes em ascensão recta, ou em declinação. Pelo que acabamos de dizer, a somma das i precessões annuas, das quaes π e p são as extremas, é

$$i.\frac{\pi+p}{2};$$

e conseguintemente temos

$$C' = C + i.\frac{\pi+p}{2} = C + i\,\pi + i.\frac{p-\pi}{2}.$$

Para usar desta formula quando se quizerem transportar as coordenadas da estrella d'uma epocha $1750+t$ a outra $1750+t'$, bastará calcular a precessão annua π correspondente a C, e depois a precessão annua p correspondente a $C+(t'-t).\,\pi$, pelas formulas de Bessel (Tab. Regiom. pag. X) (*):

$$\text{precess. em AR} = m + n \text{ sen } a \text{ tang } d,$$

$$\text{precess. em DC} = n \cos a;$$

sendo

$$m = 46'',02824 + t.\,0'',0003086450,$$

$$n = 20'',06442 - t.\,0'',0000970204.$$

Finalmente, quando, durante o intervallo $t'-t$ do transporte, as variações da precessão annua não forem sensiveis, teremos simplesmente

$$C' = C + i\,\pi.$$

(*) Nos catalogos, que dão as precessões annuas e as suas variações seculares, é escusado este calculo. Porque, chamando π e s a precessão annua e a sua variação secular, é

$$p - \pi = \frac{si}{100}$$

e a formula torna-se em

$$C' = C + i\left(\pi + \frac{si}{200}\right)$$

a que tambem se ajuntará o movimento proprio $i\mu$.

Catalogo de Baily.

192. Sejam agora

E	E'	E''
i'	i''	
C	C'	X
π	p	$\pi + i''.\dfrac{p-\pi}{i'}$

as epochas E, E', E''; as funcções correspondentes C, C', X; os intervallos i', i'', que separam E de E' e E''; e as variações annuas π, p, correspondentes a E, E'. Segundo o que fica dito no n.º precedente a variação annua correspondente a E'' será $\pi + i''.\dfrac{p-\pi}{i'}$.

Ajuntando a C a somma das i' precessões desde π até p, para ter C'; e ajuntando a C' a somma das $i''-i'$ precessões desde p até $\pi + i''.\dfrac{p-\pi}{i'}$, para ter X; resultam

$$C + i'.\frac{p+\pi}{2} = C',\ C' + (i''-i').\frac{p+\pi+i''.\dfrac{p-\pi}{i'}}{2} = X;$$

e eliminando $p+\pi$ entre estas, vem

$$C' + \frac{i''-i'}{i'}.(C'-C) + \frac{i''(i''-i')}{2i'}.(p-\pi) = X \ldots\ldots (1).$$

Se em logar das precessões π e p, correspondentes ás epochas E e E', se derem outras π_1 e p_1, correspondentes ás epochas E_1 e E_2 separadas de E pelos intervallos i_1 e i_2; bastará advertir que a razão da progressão tanto se póde exprimir por $\dfrac{p-\pi}{i'}$ como por $\dfrac{p_1-\pi_1}{i_2-i_1}$, para transformar

(1) em

$$C' + \frac{i'' - i'}{i'}(C' - C) + \frac{i''.(i'' - i')}{2(i_2 - i_1)}(p_1 - \pi_1) = X \ldots\ldots \quad (2).$$

193. Applicando as equações (1) e (2) para reduzir a 1850 as posições medias das estrellas tiradas dos catalogos de Lacaille de 1750, Bradley de 1755, Piazzi de 1800, Brisbane de 1825, e Taylor de 1835, as quaes designaremos respectivamente pelas letras L, B, P, B', T; teremos os seguintes resultados:

1.º Para $E = E_1 = 1755$, $E_2 = 1800$, $E' = 1835$, $E'' = 1850$,

é $i_1 = 0$, $i_2 = 45$, $i' = 80$, $i'' = 95$;

e pondo $C = B$, $C' = T$, a formula (2) dá

$$X = T + (T - B).\tfrac{3}{16} + (p_1 - \pi_1).\tfrac{95}{6}.$$

2.º Para $E = 1750$, $E' = 1825$, $E'' = 1850$,

é $i' = 75$, $i'' = 100$;

e pondo $C = L$, $C' = B'$, a formula (1) dá

$$X = B' + (B' - L).\tfrac{1}{3} + (p - \pi).\tfrac{50}{3}.$$

3.º Para $E = E_1 = 1750$, $E_2 = 1840$, $E' = 1835$, $E'' = 1850$,

é $i_1 = 0$, $i_2 = 90$, $i' = 85$, $i'' = 100$;

e pondo $C = L$, $C' = T$, a formula (2) dá

$$X = T + (T - L).\tfrac{3}{17} + (p - \pi).\tfrac{50}{6}.$$

4.º Emfim para $E = E_1 = 1800$, $E_2 = 1840$, $E' = 1835$, $E'' = 1850$,

é $i_1 = 0$, $i_2 = 40$, $i' = 35$, $i'' = 50$;

e pondo $C = P$, $C' = T$, a formula (2) dá

$$X = T + (T - P).\tfrac{3}{7} + (p - \pi).\tfrac{75}{8}.$$

As formulas dos casos 3.º e 4.º suppõe reduzidas a 1835 as posições das estrellas tiradas dos catalogos de Taylor de 1831, 1832, 1835, 1836, 1840; e a 1840 as precessões dos mesmos catalogos relativas a 1831, 1832, 1840, 1840, 1845 (Cat. da Brits Assoc.).

INTERPOLAÇÃO.

194. Seja uma serie de $n+1$ raizes e de funcções correspondentes:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Raizes } t & i,\ i',\ i'', & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i^{(n)} \\ \text{Funcções } y & 6,\ 6',\ 6'', & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6^{(n)} \end{array}\right\} \ldots (1).$$

Para interpolar entre estas funcções procura-se uma expressão $y=f(t)$, compativel com a natureza da questão a que pertencerem as mesmas funcções, e tal que haja nellas $n+1$ parametros indeterminados; e determinam-se estes parametros pelas condições

$$6=f(i),\ 6'=f(i'),\ 6''=f(i''),\ \ldots\ldots\ 6^{(n)}=f(i^{(n)}).$$

Nas questões astronomicas póde ordinariamente fazer-se a interpolação pela formula

$$y=A+A_1\,t+A_2\,t^2+\ldots\ldots+A_n\,t^n\ \ldots\ldots\ (2),$$

a qual satisfará á natureza da questão, se as funcções relativas a raizes equidifferentes forem taes que as suas differenças da ordem $n+1$ sejam nullas, ou ao menos tão pequenas que se possam desprezar.

195. A equação (2) dá para cada uma das hypotheses (1) as $n+1$ equações de condição

$$\left.\begin{array}{l} 6\ \ =A+A_1\,i\ +A_2\,i^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_n\,i^n \\ 6'\ =A+A_1\,i'\ +A_2\,i'^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_n\,i'^n \\ 6''=A+A_1\,i''+A_2\,i''^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_n\,i''^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6^{(n)}=A+A_1\,i^{(n)}+A_2\,{i^{(n)}}^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_n\,{i^{(n)}}^n \end{array}\right\} \ldots (a)$$

cujas differenças successivas são

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta \;\; = A_1(i' - i) + \dots\dots\dots\dots + A_n(i'^n - i^n) \\
\Delta' \; = A_1(i'' - i') + \dots\dots\dots\dots + A_n(i''^n - i'^n) \\
\Delta'' = A_1(i''' - i'') + \dots\dots\dots\dots + A_n(i'''^n - i''^n) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Delta^{(n-1)} = A_1(i^{(n)} - i^{(n-1)}) + \dots\dots\dots\dots + A_n(i^{(n)^n} - i^{(n-1)^n})
\end{array}\right\} \dots (a')$$

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta^2 \;\; = A_1(i'' - 2i' + i) + \dots\dots + A_n(i''^n - 2i'^n + i^n) \\
\Delta'^2 = A_1(i''' - 2i'' + i') + \dots\dots + A_n(i'''^n - 2i''^n + i'^n) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Delta^{(n-2)^2} = A_1(i^{(n)} - 2i^{(n-1)} + i^{(n-2)}) + \dots + A_n(i^{(n)^n} - 2i^{(n-1)^n} + i^{(n-2)^n})
\end{array}\right\} \dots (a'')$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(*)\ \Delta^n = \left\{\begin{array}{l}
A_1\left(i^{(n)} - ni^{(n-1)} + n \cdot \frac{n-1}{2} i^{(n-2)} \dots \pm i\right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ A_n\left(i^{(n)} - ni^{(n-1)} + n \cdot \frac{n-1}{2} i^{(n-2)^n} \dots \pm i^n\right)
\end{array}\right\} (a^{(n)})$$

(*) Fazendo variar *m* desde 1 até *n*, e *h* desde *o* até *n—m*, as equações (a), (a'), ... $a^{(n)}$, podem comprehender-se na expressão

$$\Delta^{(h)^m} = \Sigma_1^n A_k \left(i^{(h)^k} - 1\right)^m,$$

sendo o sommatorio Σ relativo a k: comtanto que na desenvolução de $(i^{(h)^k} - 1)^m$ em serie se mudem os expoentes m, $m-1$, ... em indices que se ajuntarão ao indice h; e se mude por conseguinte o ultimo termo 1 em $i^{(h)^k}$.

196. Como os systemas (a), (a'), (a''), ... $(a^{(n)})$, formam ao todo o numero de equações

$$(n+1)+n+(n-1)+(n-2)\ldots\ldots+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

podem escolher-se $n+1$ dellas, ou das suas combinações, que envolvam condições distinctas, para determinar as $n+1$ quantidades $A^{(o)}$, $A^{(1)}$, ... $A^{(n)}$.

E dahi resultarão tantos methodos d'interpolação differentes, quantos forem os differentes systemas de $n+1$ equações distinctas, de que se usar (**).

197. *Methodo de Newton.* Se quizermos usar da primeira de cada uma das equações (a), (a'), (a''), ... $(a^{(n)})$, teremos o methodo exposto no n.º 168 e seguintes.

Então, se pela formula (3) do n.º 169, applicada ás hypotheses do n.º 170, interpolarmos para o meio dos intervallos iguaes, e quizermos depois os A e B correspondentes a todas as funcções; poderemos tomar immediatamente por os A pertencentes ás funcções primitivas os coefficientes de t, e por os A pertencentes ás funcções interpoladas as expressões

$$A'=A+2Bt+3Ct^2+4Dt^3+5Et^4+6Ft^5\ldots, \text{ sendo } t=\tfrac{1}{2}i'.$$

Para a Lua basta ordinariamente interpolar com differenças 5.^{as}, e conseguintemente parar, em A', no termo $5Et^4$; algumas vezes usar das 6.^{as}; e muito raras das 7.^{as} e 8.^{as}

Depois, achados assim os A para todas as funcções, primitivas e

(**) A passagem de um destes methodos para outro poderia fazer-se exprimindo umas nas outras as funcções, differenças de diverso indice, e differenças de diversa ordem. Para o que podem servir as duas equações fundamentaes

$$y^{(n)}=(1+\Delta y^{(o)})^n,\quad \Delta^n y^{(o)}=(y-1)^n,$$

e suas differenças successivas: entendendo-se que na desenvolução destas potencias se deve mudar $(\Delta y^{(o)})^k$ em $\Delta^k y^{(o)}$, y^k em $y^{(k)}$, e o termo 1 em $y^{(o)}$ (Franc. Math. pur. n.º 946).

interpoladas, teremos, para duas funcções consecutivas,

$$L' = L + At + Bt^2, \quad \text{e} \quad \frac{dL'}{dt} = A + 2Bt = A',$$

que para $t = i$ dá
$$B = \frac{A' - A}{2i},$$

sendo o intervallo i ametade do i' antecedente.

198. Mas é mais expedito interpolar primeiro para os meios dos intervallos, e depois deduzir os A e B das differenças da serie de todas as funcções, primitivas e interpoladas, como se disse no n.° 63. Porque, interpoladas assim as longitudes e latitudes da Lua para as meias noites, basta ordinariamente aproveitar para os A e B as differenças 3.as, o que dá

$$A = \frac{\Delta}{i} - \frac{\Delta^2}{2i} + \frac{\frac{1}{2}\Sigma^3}{3i}, \; B = \frac{\Delta^2 - \frac{1}{2}\Sigma^3}{2i^2}, \; C = \frac{\frac{1}{2}\Sigma^3}{6i^3},$$

sendo $i = 12$.

199. Na Ephemeride não se dão os C; mas para o uso do t positivo póde attenuar-se esta falta; porque, fazendo $t = \frac{1}{2} i \pm k$ em

$$Bt^2 + Ct^3 = t^2\left(\frac{\Delta^2}{2i^2} - \frac{\frac{1}{2}\Sigma^3}{2i^2}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{t}{i}\right)\right),$$

e desprezando k que é $< \frac{1}{2} i$, fica

$$Bt^2 + Ct^3 = t^2 . \frac{\Delta^2 - \frac{1}{2}\Sigma^3\left(1 - \frac{1}{6}\right)}{2i^2}.$$

Assim, para t positivo, podemos usar com menos incerteza da formula

$$L' = L + At + Bt^2,$$

sendo

$$A = \frac{\Delta}{i} - \frac{\Delta^2}{2i} + \frac{\frac{1}{2}\Sigma^3}{3i}, \; B = \frac{\Delta^2 - \frac{1}{2}\Sigma^3\left(1 - \frac{1}{6}\right)}{2i^2}.$$

200. *Methodo de Lagrange.* Se quizermos usar das equações (a), satisfaremos a ellas pela formula de Lagrange:

$$y = \Sigma_0^n \beta^{(m)} \frac{(t-\beta)(t-\beta')\ldots(t-\beta^{(m-1)})(t-\beta^{(m+1)})\ldots(t-\beta^{(n)})}{(\beta^{(m)}-\beta)(\beta^{(m)}-\beta')..(\beta^{(m)}-\beta^{(m-1)})(\beta^{(m)}-\beta^{(m+1)})\ldots(\beta^{(m)}-\beta^{(n)})} \ldots (3),$$

sendo Σ relativo a m (Franc. Math. pur. n.° 466 e Calc. de Lacroix n.° 877).

201. *Methodo de Stirling.* Escrevamos uma serie de funcções e de differenças de modo que cada differença corresponda ao intervallo das duas quantidades de que resulta; como se segue:

$$\begin{array}{ccccccc}
\beta_{-3} \\
& \Delta_{-3} \\
\beta_{-2} & & \Delta^2_{-3} \\
& \Delta_{-2} & & \Delta^3_{-3} \\
\beta_{-1} & & \Delta^2_{-2} & & \Delta^4_{-3} \\
& \Delta_{-1} & & \Delta^3_{-2} & & \Delta^5_{-3} \\
\beta & & \Delta^2_{-1} & & \Delta^4_{-2} & & \Delta^6_{-3} \\
& \Delta & & \Delta^3_{-1} & & \Delta^5_{-2} \\
\beta_{1} & & \Delta^2 & & \Delta^4_{-1} \\
& \Delta_{1} & & \Delta^3 \\
\beta_{2} & & \Delta^2_{1} \\
& \Delta_{2} \\
\beta_{3}
\end{array}$$

Se o numero das funcções fôr impar, as differenças impares Δ^{2m+1}_{-m-1} e Δ^{2m+1}_{-m} serão adjacentes aos intervallos fronteiros á funcção media β; e as differenças pares Δ^{2m+2}_{-m-1} serão fronteiras á mesma funcção media. Se o numero das funcções fôr par, as differenças impares Δ^{2m+1}_{-m} serão fronteiras ao intervallo das funcções medias β e β_1; e as differenças pares Δ^{2m+2}_{-m} e Δ^{2m+2}_{-m-1} serão fronteiras ás mesmas funcções medias.

Neste sentido diremos que uma differença é adjacente, ou corresponde, a um intervallo, ou a uma funcção.

Distinguiremos agora os dous casos de ser impar, e de ser par, o numero das funcções dadas.

1.° Caso. *Numero impar de funcções.*
Epocha: a da funcção media.

202. Sejam as $n+1$ funcções, e as raizes equidifferentes:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Raizes } t & -n,\ -n+1,\ \ldots\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots\ n-1,\ n \\ \text{Funcções } y & \epsilon_{-n},\ \epsilon_{-n+1},\ \ldots\ \epsilon_{-1},\ \epsilon_0,\ \epsilon_1,\ \ldots\ \epsilon_{n-1},\ \epsilon_n\end{array}\right\}\ \ldots (4).$$

Se quizermos usar da semisomma das differenças impares adjacentes á media

$$\frac{\Delta_0+\Delta_{-1}}{2},\ \frac{\Delta^3_{-1}+\Delta^3_{-2}}{2},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \frac{\Delta^{2m+1}_{-m}\ \Delta^{2m+1}_{-m-1}}{2}=\varsigma^{(2m+1)},$$

e das differenças pares correspondentes á media

$$\Delta^2_{-1},\ \Delta^4_{-2},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \Delta^{2m+2}_{-m-1}=\delta^{(2m+2)},$$

satisfará ás funcções propostas a formula

$$y=\epsilon+\Sigma_0^{n-1}\frac{t\,(t^2-1)\ \ldots\ (t^2-m^2)}{1.\quad 2\ldots\ 2m+1}\left(\varsigma^{(2m+1)}+\frac{t\,\delta^{(2m+2)}}{2m+2}\right)\ \ldots\ldots\ (5).$$

Por exemplo, se tomarmos sete funcções, e fizermos epocha na quarta, a formula (5) dará

$$y=\epsilon+t\left(\varsigma^{(1)}+\frac{t\delta^2}{2}\right)+\frac{t\,(t^2-1)}{2\,.\,3}\left(\varsigma^{(3)}+\frac{t\delta^{(4)}}{4}\right)$$
$$+\frac{t\,(t^2-1)\,(t^2-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\left(\varsigma^{(5)}+\frac{t\delta^{(6)}}{6}\right);$$

ou $$y=\epsilon+At+Bt^2+Ct^3+Dt^4+Et^5+Ft^6,$$

sendo $A=\varsigma^{(1)}-\dfrac{\varsigma^{(3)}}{2\,.\,3}+\dfrac{\varsigma^{(5)}}{2.3.5},\ B=\dfrac{\delta^{(2)}}{2}-\dfrac{\delta^{(4)}}{2.3.4}+\dfrac{\delta^{(6)}}{2.3.5.6},$

$$C = \frac{\varsigma^{(3)}}{2\,.3} - \frac{\varsigma^{(5)}}{2.3.4},\ D = \frac{\delta^{(4)}}{2.3.4} - \frac{\delta^{(6)}}{2.3.4.6},\ E = \frac{\varsigma^{(5)}}{2.3.4.5},\ F = \frac{\delta^{(6)}}{2.3.4.5.6}.$$

E teremos assim, para o meio de cada um dos intervallos entre as funcções consecutivas antecedentes e consequentes á funcção media ϵ, o seguinte:

Raizes t	Funcções y
$\pm\frac{1}{2}$	$\epsilon + \frac{1}{8}\left(\delta^{(2)} - \frac{\delta^{(4)}}{4.4} + \frac{\delta^{(6)}}{4.4.8}\right) \pm \frac{1}{2}\left(\varsigma^{(1)} - \frac{\varsigma^{(3)}}{8} + \frac{3\,\varsigma^{(5)}}{4.4.8}\right)$
$\pm\frac{3}{2}$	$\epsilon + \frac{9}{8}\left(\delta^{(2)} + \frac{5\delta^{(4)}}{3.4.4} - \frac{7\delta^{(6)}}{3.3.4.4.8}\right) \pm \frac{3}{2}\left(\varsigma^{(1)} + \frac{5\varsigma^{(3)}}{3.8} - \frac{7\varsigma^{(5)}}{3.4.4.8}\right)$
$\pm\frac{5}{2}$	$\epsilon + \frac{25}{8}\left(\delta^{(2)} + \frac{7\delta^{(4)}}{4\,.\,4} + \frac{3.7\delta^{(6)}}{4.4.5.8}\right) \pm \frac{5}{2}\left(\varsigma^{(1)} + \frac{7\,\varsigma^{(3)}}{2.4} + \frac{7.9\,\varsigma^{(5)}}{4.4.5.8}\right).$

Para calcular os A e B relativos ás funcções primitivas e ás interpoladas, applicaremos o que a este respeito fica dito nos nn. 197 e 198. (Veja-se o Calc. de Lacroix n.° 879; e o additamento á Ephemeride de 1809).

2.° CASO. *Numero par de funcções.*
Epocha: O meio das funcções medias.

203. Sejam as $2n$ funcções e raizes equidifferentes

Raizes t	$-n+\frac{1}{2}, -n+1+\frac{1}{2}\ ..,-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}\ ....\ n-1-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}$
Funcções y	$\epsilon_{-n+\frac{1}{2}},\ \epsilon_{-n+1+\frac{1}{2}}\ ....,\ \epsilon_{-\frac{1}{2}},\ \epsilon_{\frac{1}{2}}\ ....\ \epsilon_{n-1-\frac{1}{2}},\ \epsilon_{n-\frac{1}{2}}.$

Se quizermos usar das differenças impares correspondentes á epocha

$$\Delta_{-\frac{1}{2}},\ \Delta^3_{-\frac{1}{2}-1},\ \Delta^5_{-\frac{1}{2}-2},\ ....\ \Delta^{(2m+1)}_{-\frac{1}{2}-m} = \delta^{(2m+1)},$$

e da semisomma das differenças pares adjacentes á epocha

$$\frac{\Delta^2_{-\frac{1}{2}} + \Delta^2_{-\frac{3}{2}}}{2},\ \frac{\Delta^4_{-\frac{1}{2}-1} + \Delta^6_{-\frac{3}{2}-1}}{2};\ .....\ \frac{\Delta^{(2m+2)}_{-m-\frac{1}{2}} + \Delta^{(2m+2)}_{-m-\frac{3}{2}}}{2} = \varsigma^{(2m+2)},$$

fazendo $M = \frac{\epsilon_{-\frac{1}{2}} + \epsilon_{\frac{1}{2}}}{2}$, satisfará ás funcções propostas a formula

$$y = M + t\,\delta^{(1)} + \Sigma_0^{m-2} \frac{(t^2 - \frac{1}{4}).\left(t^2 - (\frac{2m+1}{2})^2\right)}{2 \, . \, \ldots \, 2m+2} \cdot \left(\varsigma^{(2m+2)} + \frac{t \, . \, \delta^{(2m+3)}}{2m+3}\right) \ldots (6).$$

(Vej. o Calc. de Lacroix n.° 880).

Por exemplo, se tomarmos seis funcções, e fizermos epocha no meio entre a terceira e quarta, a formula (6) dará

$$y = M + t\,\delta^{(1)} + \frac{(t^2 - \frac{1}{4})}{2}\left(\varsigma^{(2)} + \frac{t\delta^{(3)}}{3}\right) + \frac{(t^2 - \frac{1}{4})(t^2 - \frac{9}{4})}{2\,.\,3\,.\,4}\left(\varsigma^{(4)} + \frac{t\delta^{(5)}}{5}\right),$$

ou $$y = (y) + At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + Et^5,$$

sendo $$(y) = M - \frac{\varsigma^{(2)}}{8} + \frac{3\varsigma^{(4)}}{4.4.8}, \; A = \delta^{(1)} - \frac{\delta^{(3)}}{3\,.\,8} + \frac{3\delta^{(5)}}{4.4.5.8},$$

$$B = \frac{\varsigma^{(2)}}{2} - \frac{5\varsigma^{(4)}}{3.4.4}, \; C = \frac{\delta^{(3)}}{2.3} - \frac{\delta^{(5)}}{3.4.4}, \; D = \frac{\varsigma^{(4)}}{2.3.4}, \; E = \frac{\delta^{(5)}}{2.3.4.5}.$$

E fazendo $\frac{\varsigma^{(2)}}{8} = a$, $\frac{\delta^{(3)}}{8} = b$; $\frac{\varsigma^{(4)}}{8.16} = a'$, $\frac{\delta^{(5)}}{8.16} = b'$,

teremos assim para a epocha, e para os meios dos intervallos antecedentes e consequentes entre as funcções, o seguinte:

Raizes t	Funcções y
0	$M - a + 3a'$
± 1	$M + 3a - 5a' \pm (\delta^{(1)} + b - b')$
± 2	$M + 3.5\,a + 5.7\,a' \pm 2\,(\delta^{(1)} + 5b + 7b')$

Sejam por exemplo as seis longitudes da Lua correspondentes aos seis primeiros meios dias de Janeiro de 1848, e as suas differenças:

1.ᵈ	222.°12',89	12.° 7',24	+15',18	+2',39	−1',51	−0',10
2	234 20 ,13	12. 22 ,42	17 ,57	+0 ,88	1 ,61	
3	246 42 ,55	12. 39 ,99	18 ,45	−0 ,73		
4	259 22 ,54	12. 58 ,44	17 ,72			
5	272 20 ,98	13. 16 ,16				
6	285 37 ,14					

Teremos

$$\delta_{(1)} = 12.°39',99;\ a = 2',25125;\ b = 0',11;\ a' = -0',01219;\ b' = -0',00078;$$

e interpolando por meio das formulas precedentes, resultarão para os meios dias e meias noites as longitudes e differenças:

1.ᵈ 0ʰ	222.°12',89	6.° 1',93	+3',38	+0',44	−0',10	
» 12	228. 14 ,82	6. 5 ,31	3 ,82	0 ,34	0 ,08	
2 0	234. 20 ,13	6. 9 ,13	4 ,16	0 ,26	0 ,11	
» 12	240. 29 ,26	6. 13 ,29	4 ,42	0 ,15	0 ,08	
3 0	246. 42 ,55	6. 17 ,71	4 ,57	+0 ,07	0 ,11	
» 12	253. 0 ,26	6. 22 ,28	4 ,64	−0 ,04	0 ,10	
4 0	259. 22 ,54	6. 26 ,92	4 ,60	0 ,14	0 ,12	
» 12	265. 49 ,46	6. 31 ,52	4 ,46	0 ,26		
5 0	272. 20 ,98	6. 35 ,98	4 ,20			
» 12	278. 56 ,96	6. 40 ,18				
6 0	285. 37 ,14					

204. As formulas (5) e (6) dão os processos d'interpolação devidos a Stirling, de que usava Bessel, e o primeiro dos quaes vem exposto e demonstrado na excellente memoria do Sr. Monteiro sobre a interpolação junta á Ephemeride para 1809.

Estas formulas tem a vantagem de ser commum a cada par de funcções equidistantes da épocha a parte dependente das differenças pares, e de differir tãosomente no sinal a parte dependente das differenças impares; de sorte que por ellas se podem interpolar de cada vez duas funcções.

A formula (6) é principalmente commoda e exacta para achar de cada vez a funcção correspondente a $t = o$, ainda que se pare nas differenças 4.ᵃˢ; porque o termo $-\frac{5\varsigma^{(6)}}{4.4.8.8}$ dependente das differenças 6.ᵃˢ seria $< 0',045$ para $\varsigma^{(6)} = 3'$.

EQUAÇÃO DO TEMPO.

205. Os Astronomos costumam chamar tempo medio o angulo horario do Sol medio formado no polo medio; tempo verdadeiro o angulo horario do Sol verdadeiro formado no pólo apparente; e equação do tempo a differença dos mesmos angulos horarios: sendo todos estes angulos expressos em tempo.

Seja a a longitude media do Sol, referida ao equador medio, e contada do equinoccio medio; M a ascensão recta do meridiano contada do mesmo modo; e A' a ascensão recta do Sol verdadeiro, contada do equinoccio apparente sobre o equador apparente. Chamando ψ a nutação em longitude, e ω a obliquidade apparente, será $M + \psi \cos \omega$ a ascensão recta do meridiano contada do equinoccio apparente sobre o equador apparente.

Posto isto, chamando T o tempo medio, e T' o verdadeiro, teremos

$$T = \frac{M - a}{15}, \qquad T' = \frac{M + \psi \cos \omega - A'}{15},$$

$$\text{equação do tempo}, \; T' - T = \frac{a + \psi \cos \omega - A'}{15} \; \ldots \; (1)$$

(Vej. Astron. de Biot. Liv. 3.°, nn. 94 e 126).

Seja ☉ a longitude verdadeira do Sol contada do equinoccio apparente, isto é,

$$☉ = a + \text{eq. centro} + \text{perturb.} + \psi;$$

teremos $\cos \omega = \cot ☉ \tan A'$,

e por conseguinte $\tan(☉ - A') = \dfrac{m \operatorname{sen} 2☉}{1 + m \cos 2☉} \; . . \; (2),$

fazendo $m = \dfrac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} = \tan^2 \tfrac{1}{2} \omega.$

Pondo $☉ - A' = f(m)$; tirando da equação (2) as expressões de $f'(m)$, $f''(m)$, ...; fazendo $m = 0$; e substituindo na fórmula de Maclaurin, acha-se

$$(☉ - A') \text{ sen } 1'' = m \text{ sen } 2☉ - \tfrac{1}{2} m^2 \text{ sen} 4☉ + \ldots\ldots ;$$

o que dá á equação (1) a forma

$$T' - T = -\frac{\text{eq. cent.} + \text{pert.} - \dfrac{m \text{ sen} 2☉}{\text{sen } 1''} + \dfrac{m^2 \text{sen} 4☉}{\text{sen } 2''} + 2\psi \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\omega}{15} \ldots (3).$$

Esta expressão póde reduzir-se a taboa exprimindo a equação do centro e ☉ em funcção da longitude media do Sol pelas formulas conhecidas (Vej. Astr. de Delambre tom. 2.º Cap. 23 n.º 9, taboas III e IV no fim do n.º 32 do mesmo Cap.; Tab. Sol. VIII e IX).

206. Se a Ephemeride dá A', usa-se logo da formula (1).

A nossa Ephemeride dá a ascensão recta verdadeira referida ao equinoccio medio, e contada sobre o equador medio; e chamando A esta ascensão recta, o que nella se toma por equação do tempo é

$$T_1 - T = \frac{a - A}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Tal é a idêa que se deve fazer desta parte da Ephemeride: mas se quizermos reduzir a formula (4) a (1), procederemos do modo seguinte.

207. Os triangulos esphericos formados, um pelo Sol verdadeiro, pela sua projecção no equador medio, e pelo equinoccio medio; outro pelo Sol verdadeiro, pela sua projecção no equador apparente, e pelo equinoccio apparente; dão

$$\cos(\omega - \delta\omega) \text{ tang } (☉ - \psi) = \text{tang } A,$$

$$\cos \omega \text{ tang } ☉ = \text{tang } A'.$$

Desprezando os quadrados de $\delta\omega$, ψ, $A' - A$, a differença destas equações dá

$$\frac{\psi \cos \omega}{\cos^2 \odot} - \text{sen}\, \omega \,\text{tang}\, \odot .\, \delta\omega = \text{tang}\, A' - \text{tang}\, A\,,$$

ou

$$\frac{\psi \cos \omega}{\cos^2 \odot} - \text{sen}\, \omega \,\text{tang}\, \odot .\, \delta\omega = \frac{A' - A}{\cos^2 A}\,;$$

como tambem resultaria immediatamente de differenciação: e por conseguinte

$$\frac{A' - A - \psi \cos \omega}{\cos^2 A} = \psi \cos \omega \,\text{tang}^2\, \omega \;\; \text{tang}^2 A - \text{tang}\, \omega \,\text{tang}\, A\, \delta\omega.$$

Portanto é

$$T' - T = T_1 - T + \frac{\frac{1}{2}\,\text{tang}\, \omega \,\text{sen}\, 2\,A .\, \delta\omega - \psi \,\text{sen}\, \omega \,\text{tang}\, \omega \,\text{sen}^2 A}{15} \;..(5).$$

Como as partes principaes de ψ e $\delta\omega$ dependem do nodo da Lua, póde facilmente reduzir-se a taboas de duas entradas, A e ☊, esta pequena correcção de $T_1 - T$.

Assim formámos as duas tabellas seguintes; na primeira das quaes se entra com A e ☊, e na segunda com 2 A e ☊.

Os sinaes, que nellas estão á esquerda das funcções, referem-se ás entradas superiores; e os que estão á direita das funcções referem-se ás entradas inferiores.

A parte da correcção dada pela primeira tabella toma-se com o sinal que nella tem. A parte dada pela segunda tabella toma-se com o sinal que nella tem, ou com o contrario; conforme se entra com o argumento 2 A nas columnas da esquerda, ou nas da direita. Depois ajunta-se a $T_1 - T$ a somma algebrica c das duas partes; e resulta $T' - T$.

Os numeros destas tabellas multiplicados por 15 tambem servem, com a equação luni-solar dos pontos equinocciaes em ascensão recta, para converter A em A', por ser

$$A' = A + \psi \cos \omega - 15c.$$

PRIMEIRA PARTE.

Arg : ☊

Arg. A		20° 160	40° 140	60° 120	80° 100	90° 90	Arg. A	
10°	170°	+ 0″,01 —	+ 0″,00 —	+ 0″,01 —	+ 0″,01 —	+ 0″,01 —	190°	350°
20	160	0 ,01	0 ,01	0 ,02	0 ,02	0 ,02	200	340
30	150	0 ,02	0 ,03	0 ,04	0 ,05	0 ,05	210	330
40	140	0 ,03	0 ,05	0 ,07	0 ,08	0 ,08	220	320
50	130	0 ,04	0 ,08	0 ,10	0 ,12	0 ,12	230	310
60	120	0 ,05	0 ,10	0 ,13	0 ,15	0 ,15	240	300
70	110	0 ,06	0 ,11	0 ,15	0 ,17	0 ,18	250	290
80	100	0 ,07	0 ,12	0 ,16	0 ,19	0 ,19	260	280
90	90	+ 0 ,07 —	+ 0 ,13 —	+ 0 ,17 —	+ 0 ,20 —	+ 0 ,20 —	270	270
		200 340	220 320	240 300	260 280	270 270		

SEGUNDA PARTE

Arg : ☊

Arg. 2A		280° 80	300° 60	340° 40	340° 20	360° 0	Arg. 2A	
10°	170°	+ 0″,00 —	+ 0″,01 —	+ 0″,02 —	+ 0″,02 —	+ 0″,02 —	190°	350°
20	160	0 ,01	0 ,02	0 ,03	0 ,04	0 ,04	200	340
30	150	0 ,01	0 ,03	0 ,05	0 ,06	0 ,06	210	330
40	140	0 ,01	0 ,04	0 ,06	0 ,08	0 ,08	220	320
50	130	0 ,02	0 ,05	0 ,08	0 ,09	0 ,10	230	310
60	120	0 ,02	0 ,06	0 ,09	0 ,10	0 ,11	240	300
70	110	0 ,02	0 ,06	0 ,09	0 ,11	0 ,12	250	290
80	100	0 ,02	0 ,07	0 ,10	0 ,12	0 ,13	260	280
90	90	+ 0 ,02 —	+ 0 ,07 —	+ 0 ,10 —	+ 0 ,12 —	+ 0 ,13 —	270	270
		100 260	120 240	140 220	160 200	180 180		

Por ser 15 proximamente o meio termo entre as razões dos coefficientes de sen ☊ e cos ☊ com os de sen 2☉ e cos 2☉, nas expressões de ψ e $\delta\omega$; podem servir as mesmas tabellas para attender á nutação solar, entrando nellas com 2☉ em logar de ☊, e dividindo por 15 os numeros que se acharem.

DETERMINAÇÃO

DAS LONGITUDES TERRESTRES

Pelas culminações lunares.

PAra aproveitar as simplificações que resultam da disposição da Ephemeride de Coimbra, resolvemos aqui este problema, sobre o qual se póde tambem consultar a *Astronom. de Francoeur*, nn. 184 até 192.

208 I. Seja (T) o tempo medio, em horas, da passagem da Lua pelo meridiano do Observatorio de Coimbra, dado na ultima columna da pag. VI da Ephemeride; l a longitude d'um logar contada do mesmo meridiano no sentido d'oriente para occidente; A e B os numeros relativos ás ascensões rectas, dados com estas denominações na pag. VI; $A_{(1)}$ e $B_{(1)}$ os relativos ás declinações, dados na pag. VII; e $A_{(2)}$ e $B_{(2)}$ os relativos ás passagens meridianas, dados nas ultimas columnas da mesma pag. VII.

Para o logar, cuja longitude é l, o tempo da passagem do centro da Lua pelo meridiano desse logar; em tempo medio do mesmo meridiano e em tempo medio de Coimbra, é

$$T = (T) + A_{(2)}\, l + B_{(2)}\, l^2, \quad T_c = (T) + l + A_{(2)}\, l + B_{(2)}\, l^2 \ldots\ldots (1);$$

$$\text{logo} \qquad l = \frac{T - (T)}{A_{(2)} + B_{(2)}\, l}, \quad l = \frac{T_c - (T)}{1 + A_{(2)} + B_{(2)}\, l} \ldots\ldots (2).$$

Quando fôr conhecida a longitude l do logar, as equações (1) darão a hora da passagem da Lua pelo meridiano delle, contada em tempo medio desse meridiano ou em tempo medio de Coimbra. E quando fôr conhecida pela observação a hora T desta passagem, a primeira equação (2) dará a longitude l.

209. Não querendo usar dos $A_{(2)}$ e $B_{(2)}$ da passagem meridiana, procederemos do modo seguinte.

Como na passagem por cada meridiano a ascensão recta da Lua é igual á desse meridiano, temos, nas passagens pelos meridianos de Coimbra e do logar,

$$C + A\,(T) + B\,(T)^2 = 15\,M,$$

$$C + A\,T_c + B\,T_c^2 = 15\left(M + T_c - (T) + m\,(T_c - (T)) - l\right);$$

e subtrahindo uma da outra, resulta

$$A'\,(\varphi + l) + B\,(\varphi + l)^2 = 15\left(\varphi + m\,(\varphi + l)\right),$$

sendo $\quad A + 2B\,(T) = A',\ T - (T) = T_c - (T) - l = \varphi:$

logo $\quad l = \dfrac{15\,\varphi}{A' - 15\,m + B\,(\varphi + l)} - \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$

$$\varphi = \frac{(A' - 15m + B\,(\varphi + l))\,(\varphi + l)}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Quando fôr conhecida a longitude l do logar, a equação (4) dará φ, e por conseguinte a hora $\varphi + (T)$ da passagem pelo meridiano delle: e quando esta hora fôr conhecida pela observação, a formula (3) dará a longitude (*).

(*) Referindo os movimentos ao tempo syderal, não existirá o termo $m\,(\varphi + l)$; e em logar de A′ e B deverão substituir-se $\dfrac{A'}{1+m}$ e $\dfrac{B}{(1+m)^2}$.

Assim, contando em tempo syderal, teremos

$$\left(A' + \frac{B}{1+m}(\varphi + l)\right)(\varphi + l) = 15\,\varphi\,(1+m);$$

210. Como a observação dá a passagem de um dos bordos da Lua, é necessario reduzir esta passagem á do centro, por meio da duração da passagem do semidiametro.

Seja $\mathbb{C}$ a ascensão recta da Lua correspondente ao meio dia ou meia noite mais proximo da passagem pelo meridiano do logar; $\mathbb{C}'$ a correspondente ao tempo T_c da passagem do centro; $\mathbb{C}''$ a correspondente ao tempo da passagem do bordo; e θ a duração da passagem do semidiametro. O tempo da passagem do bordo é $T_c + \theta$; tomando θ positiva ou negativamente, conforme se trata do bordo oriental ou do occidental. Finalmente seja ρ o semidiametro em gráos; D a declinação correspondente ao meio dia ou meia noite mais proximo da passagem pelo meridiano do logar; e D' a declinação correspondente á passagem do centro por este meridiano,

isto é,
$$D' = D + A_{(1)}\, T_c + B_{(1)}\, T_c^2.$$

Teremos
$$\mathbb{C}' = \mathbb{C} + AT_c + BT_c^2,$$
$$\mathbb{C}'' = \mathbb{C} + A(T_c + \theta) + B\,(T_c + \theta)^2,$$
$$\mathbb{C}'' - \mathbb{C}' = A\theta + B\theta\,(2T_c + \theta).$$

E como o angulo horario descripto pela Lua no intervallo de tempo θ é igual ao movimento do meridiano nesse intervallo menos o movimento proprio $\mathbb{C}'' - \mathbb{C}'$ da Lua em AR, resulta

$$15\,\theta\,(1 + m) - A\theta - B\theta\,(2T_c + \theta) = \frac{\rho}{\cos D'};$$

e por conseguinte
$$\theta = \frac{\rho}{15 \cos D'\left(1 + m - \dfrac{A + 2\,BT_c + B\,\theta}{15}\right)} \;\ldots\; (5);$$

ou
$$\theta = \frac{\rho}{15 \cos D'\left(1 + m - \dfrac{A''}{15}\right)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(6),$$

---

que dá
$$l = \frac{15\,\varphi\,(1 + m)}{A' + \dfrac{B}{1+m}\,(\varphi + l)} - \varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3'),$$

$$\varphi = \frac{\left(A' + \dfrac{B}{1+m}\,(\varphi + l)\right)(\varphi + l)}{15\,(1+m)} \;\ldots\ldots\; (4').$$

desprezando $B\theta$ no denominador, e pondo A'' em logar de $A + 2\,BT_c$, que é o A correspondente ao tempo T_c (*).

211. Conhecido θ, e designando por Θ ou por Θ_c a passagem do bordo observada, as formulas (2) dão

$$l = \frac{\Theta - \theta - (T)}{A_2 + B_2 l}, \quad l = \frac{\Theta_c - \theta - (T)}{1 + A_2 + B_2 l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Mas como a expressão de θ depende de $T_c = \Theta + l - \theta$, podemos tomar $\frac{\rho}{15 \cos D}$ por valor aproximado de θ, ou mesmo usar daquelle que para igual declinação dá a pag. I relativamente ao Sol; com este valor approximado calcular l pela primeira equação (7); depois com o $T_c = \Theta - \theta + l$ resultante calcular θ mais exactamente pela equação (6), ou mais ainda pela equação (5); e finalmente com este novo valor de θ calcular o mais exacto de l pela primeira equação (7).

212. Querendo usar da equação (3), substituiremos nella $\Theta - \theta - (T)$ em logar de φ. E procederemos para os calculos successivos de θ e l approximados, e depois de θ e l mais exactos, de um modo semelhante ao do n.º precedente: usando primeiro de $\frac{\rho}{15 \cos D}$ por θ, e da equação (3); e depois das equações (6) ou (5), e (3) (**).

213. II. A observação do tempo Θ suppõe o estado absoluto do relogio bem conhecido relativamente ao tempo medio. Mas se a esse respeito

(*) Como em tempo syderal é $\theta_s = (1 + m)\,\theta$,

temos
$$\theta_s = \frac{\rho}{15 \cos D' \left(1 - \frac{A''(1-m)}{15}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

(**) Se quizermos referir os movimentos ao tempo syderal, usaremos das formulas (6') e (3') em logar de (6) e (3).

houver incerteza; ou se a houver a respeito da orientação do instrumento das passagens; evitaremos os erros resultantes observando a differença das passagens d'uma estrella e do bordo da Lua, por se poder considerar esta differença como independente daquelles erros.

Seja t a differença das passagens da estrella e do bordo em tempo medio: teremos, em tempo,

$$\frac{☾'}{15} = AR * + (1 + m)(t - \theta) \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (8);$$

equação na qual se suppõe o bordo da Lua mais oriental do que a estrella, e mais oriental do que o centro; devendo-se porisso no caso contrario mudar respectivamente os sinaes de t ou de θ.

E como é $$☾' = ☾ + AT_c + BT_c^2,$$

resulta $$T_c = \frac{(☾' - ☾)}{A + BT_c} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (9);$$

expressão que substituida na segunda equação (2) dá o valor de l.

Por tanto substituiremos $\frac{\rho}{15(1 + m)\cos D}$ em logar de θ na equação (8), que dará o valor correspondente de $☾'$; e com este valor calcularemos o correspondente de T_c pela formula (9). Depois obteremos pela formula (6) o θ mais exacto; e com elle repetiremos o mesmo processo para ter o T_c correcto. Em fim acharemos l pela segunda formula (2).

214. Não querendo usar de A_2 e B_2, podemos, depois de achar T_c; substituir $T_c - (T)$ em logar de $\varphi + l$ na equação (4), para ter φ; e depois teremos

$$l = T_c - (T) - \varphi \ (*).$$

E tambem se póde usar do seguinte processo. Seja (M) a ascensão recta do meridiano de Coimbra ao meio dia medio: á hora T_c as ascensões

(*) Ou substituir $(1 + m)(T_c - (T))$ em logar de $\varphi + l$ na equação (4'), para ter φ; e depois

$$l = (1 + m)(T_c - (T)) - \varphi.$$

rectas deste meridiano, e do meridiano do logar, serão

$$M' = (M) + (1 + m)\,T_c,\; M' - l = (M) + T + m\,(T + l);$$

logo $\dfrac{C'}{15} = (M) + T + m\,(T+l)$, $T = \dfrac{C'}{15} - (M) - m\,(T + l)$ ..... (10).

Suppondo l conhecido proximamente por um dos nn. (208) ou (209), ou por outro modo, a segunda equação (10) dá o valor de T, d'onde resulta

$$l = T_c - T.$$

215. III. Finalmente, se além da incerteza sobre o estado absoluto do relogio, e sobre a orientação do instrumento das passagens, houver falta de confiança no catalogo do qual se tira AR *; poderão observar-se as differenças das passagens da Lua e da estrella no meridiano do logar, e no de Coimbra ou n'outro cuja longitude l seja conhecida. E será nas passagens da Lua pelos dous meridianos, conhecido e desconhecido,

$$C' = 15\,(AR * + (1+m)(t - \theta)) = C + AT_c + BT_c^2,$$

$$C'' = 15\,(AR * + (1 + m)(t' - \theta')) = C + AT'_c + BT'^2_c,$$

$$(C'' - C') = A\,(T'_c - T_c) + B\,(T'_c - T_c)\,(2\,T_c + T'_c - T_c);$$

que dão $$T'_c - T_c = \frac{15\,(1+m)\,(t' - t - (\theta' - \theta))}{A' + B\,(T'_c - T_c)} \;\ldots\ldots\ldots\; (11),$$

sendo $A' = A + 2BT_c$ o A relativo ao tempo da passagem da Lua pelo meridiano conhecido, e T_c dado pela Ephemeride ou pela segunda formula (2).

Depois applicando a segunda equação (1) a T_c e T'_c, e tomando a differença, resulta

$$l' - l = \frac{T'_c - T_c}{1 + A'_2 + B_2\,(l' - l)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (12),$$

sendo $A'_2 = A_2 + 2B_2 l$ o A_2 relativo ao meridiano conhecido.

E não querendo usar da equação (12) applicaremos as equações (8) e (10) ás duas passagens, e teremos

$$\frac{C'' - C'}{15} = (1+m)(t' - t - (\theta' - \theta)) = (1 + m)(T' - T) + m(l' - l) \text{ (*)};$$

que por ser $$T'_c - T_c = T' - T + l' - l,$$

dá $$T'_c - T_c = \frac{\frac{C'' - C'}{15} + l' - l}{1+m},$$

e por conseguinte $$l' - l = (1+m)(T'_c - T_c - (t' - t) + \theta' - \theta) \;..\; (13).$$

216. Por tanto, supponndo que se observou a passagem d'um mesmo bordo por ambos os meridianos (**), e desprezando $\theta' - \theta$ na equação (11), acharemos $T'_c - T_c$, e por conseguinte T'_c. Depois com T_c e T'_c

---

(*) Esta expressão tambem se acha do modo seguinte.

Sejam H, H', as passagens da estrella pelos meridianos dos dous logares, em tempo medio delles. Será

$$H + t - \theta = T, \quad H' + t' - \theta' = T'.$$

Mas como, chamando $H + x$ a passagem pelo segundo meridiano em tempo medio do primeiro, e sendo $l' - l$ a differença das ascensões rectas dos dous meridianos;

é $$l' - l = x + mx, \quad x = \frac{l' - l}{1+m};$$

esta passagem em tempo medio do segundo meridiano

é $$H' = H + \frac{l' - l}{1+m} - (l' - l) = H - \frac{m}{1+m}(l' - l):$$

logo $$T' - T = H' - H + t' - t - (\theta' - \theta)$$

$$= t' - t - (\theta' - \theta) - \frac{m}{1+m}(l' - l),$$

ou $$T' - T = \frac{\frac{C'' - C'}{15} - m(l' - l)}{1 + m}.$$

(**) Desde a opposição até a conjuncção o bordo illuminado é o oriental; e desde a conjuncção até a opposição o bordo illuminado é o occidental.

calcularemos θ e θ' pela formula (6); e substituindo em (11) acharemos o valor correcto de $T'_c - T_c$. Emfim calcularemos $l' - l$ por uma das formulas (12) ou (13).

Advertencia.

217. Se para ter com maior approximação os resultados precedentes, se interpolar a Lua pela formula

$$F' = F + At + Bt^2 + Ct^3;$$

dever-se-ha escrever A' e $B' + C(\varphi + l)$ em logar de A' e B nas formulas

(3) e (4), e A' e $B' + \frac{C}{1+m}(\varphi + l)$ em logar de A' e B nas formulas (3')

e (4);

sendo $A' = A + 2B(T) + 3C(T)^2$, e $B' = B + 3C(T)$.

Semelhantemente na formula (5) mudar-se-hão $A + 2BT_c = A''$, e e $B\theta$, em

$$A + 2BT_c + 3CT_c^2, \text{ e } (B + 3CT_c + C\theta)\,\theta:$$

e no denominador da formula (11), mudar-se-hão A', e $B\,(T'_c - T_c)$,

em $A + 2BT_c + 3CT_c^2$, e $(B + 3CT_c + C(T'_c - T_c))\,(T'_c - T_c)$.

Finalmente na expressão de D' do n.° (210) e na formula (9) mudar-se-hão respectivamente B_1 e B, em $B_1 + C_1\,T_c$ e $B + CT_c$.

FIM.

NOTAS

Sobre alguns logares do Calculo das Ephemerides astronomicas.

N.° 19

218. NAs quatro ultimas linhas do n.° 19 suppõe-se T — P expresso em horas, e acha-se o resultado em minutos. Mas querendo o resultado expresso em unidades de T — P, quaesquer que ellas sejam, convém usar da seguinte redacção:

« A primeira expressão calcula-se com facilidade, escrevendo A′ em « minutos; procurando na taboa dos factores o factor correspondente a « $30 + \frac{1}{2} A'$; multiplicando este factor por T — P, e o producto por « $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} m = 0{,}498631$; e subtrahindo o resultado de T. »

N.° 48 (*)

219. Cumpre não esquecer que aquillo, que se diz no fim da pagina 43 sobre a pequenez de $a - l$, é relativo aos astros, de que aqui se trata, que são os planetas que entram na Ephemeride; e tambem é applicavel á Lua, e a todos os astros que teem pequena latitude.

Para avaliar, relativamente a cada latitude, o limite da reducção $a - l$, é facil mostrar, pela theoria dos maximos e minimos, que servem as formulas

$$\frac{2 \cos \omega - 1}{2 \operatorname{sen} \omega} \operatorname{tang} \lambda = p, \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \omega} + \operatorname{tang}^2 \lambda = q, \frac{\sqrt{q}}{p} = \operatorname{tang} \psi,$$

$$\operatorname{sen} l = \sqrt{q} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \psi, \operatorname{sen} l = - \sqrt{q} \cdot \cot \tfrac{1}{2} \psi,$$

com as duas primeiras (1) do n.° 42.

N.º 64 (*)

220. Para bem comprehender a prova, de que se trata no fim da nota do n.º 64, convém accrescentar o seguinte:

« E assim, sendo F uma funcção, F_1 a precedente, e $C = F - (A - Bt)t$:

« deve ser
$$F_1 = C - \tfrac{1}{2}\,\Delta_1{}^2.\ »$$

N.º 72

221. Sejam $\mathbb{C}$, A, B, M, relativas ao meio dia; e $\mathbb{C}'$, A', B', M', relativas á meia noite: e seja $t = 12^h + \tau$.

Querendo usar de $\mathbb{C}$, A, B, M, a fórmula (1) dá

$$t = \frac{\mathbb{C} - M + (B' - B)\tau^2}{1 - (A - m) - Bt_1},$$

ou, com approximação sufficiente,

$$t = \frac{\mathbb{C} - M}{1 - (A - m) - Bt_1} + 1{,}04\,(B' - B)\tau^2.$$

Por onde se vê que desde a opposição até a conjuncção se póde ainda usar das ascensões rectas da Lua e do Meridiano ao meio dia, e dos respectivos A e B, applicando a correcção dada pelo ultimo termo. Mas esta correcção, além de ser facil de calcular, póde desprezar-se as mais das vezes: como se fez no exemplo da pagina 71.

222. Mas querendo usar de $\mathbb{C}'$, A', B', M', como se disse no n.º 72,

será
$$\tau = \frac{\mathbb{C}' - M'}{1 - (A' - m) - B'\tau_1},\ t = 12^h + \tau,$$

sendo
$$M' = M + 12^h{,}0329.$$

223. Se usarmos dos A e B, do meio dia ou da meia noite, da Ephemeride em arco, e fizermos

$$\frac{A}{900} = \frac{33' + \varepsilon}{900},\ 1 - \left(\frac{A}{900} - m\right) = \alpha - \frac{\varepsilon}{900},\ \theta = (\mathbb{C} - M)^h;$$

a fórmula (1) dará

$$t = \frac{\theta}{\alpha - \frac{\epsilon + Bt_1}{900}} = \theta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\epsilon}{900\,\alpha^2} + \frac{Bt_1}{900\,\alpha^2} + \frac{\epsilon^2}{900^2\,\alpha^3} \cdots \right).$$

E como, para $\epsilon = 8'$, $\theta = 12^h$, é $\frac{\epsilon^2\theta}{900^2\,\alpha^3} = 0',06$; basta escrever

$$t = \theta + \theta\,[0,0351 + 0,00119\,(A - 33' + 1,04\,B\theta)];$$

podendo, para mais escrúpulo, substituir-se $(A - 33')\left(1 + \frac{A - 33'}{900}\right)$ em logar de $A - 33'$, quando ϵ se approximar de $8'$, e θ de 12^h.

Sobre a interpolação.

224. Para proceder com segurança no calculo dos numeros auxiliares A, B, ..., assignemos os limites dos erros das funcções intermedias calculadas com aquelles numeros.

Até differenças 4.as a fórmula d'interpolação (n.° 170) é

$$\left.\begin{array}{l} F_t = F + At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4\,, \\ \text{com} \quad A = \frac{\Delta}{i} - \frac{\Delta^2}{2i} + \frac{\Delta^3}{3i} - \frac{\Delta^4}{4i}\,,\ B = \frac{\Delta^2}{2i^2} - \frac{\Delta^3}{2i^2} + \frac{11\,\Delta^4}{24i^2}\,, \\ C = \frac{\Delta^3}{6i^3} - \frac{\Delta^4}{4i^3}\,,\ D = \frac{\Delta^4}{24i^4} \end{array}\right\} \cdots\cdots (1).$$

Mas póde ainda attender-se a uma parte destas differenças (n.° 172), usando das fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} F_t = F + At + Bt^2 + Ct^3\,, \\ A = \frac{\Delta}{i} - \frac{\Delta^2}{2i} + \frac{\Sigma^3}{6i}\,,\ B = \frac{\Delta^2}{2i^2} - \frac{\Sigma^3}{4i^2}\,,\ C = \frac{\Sigma^3}{12i^3} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (2).$$

Se fizermos $\frac{t}{i}=\alpha$, o erro da funcção F_t calculada pelas fórmulas (2), relativamente á mesma funcção calculada pelas fórmulas (1), será

$$e=\frac{\Delta^4}{24}(\alpha^4-4\alpha^3+5\alpha^2-2\alpha)-\frac{\Delta_1{}^5}{12}(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha).$$

O maximo valor deste erro, relativamente ao seu primeiro termo, é proximamente $-\frac{\Delta^4}{96}-\frac{\Delta_1{}^5}{34}$.

225. Até differenças 3.as as fórmulas são

$$\left.\begin{array}{l} F_t=F+At+Bt^2+Ct^3, \\ A=\frac{\Delta}{i}-\frac{\Delta^2}{2i}+\frac{\Delta^3}{3i},\ B=\frac{\Delta^2-\Delta^3}{2i^2},\ C=\frac{\Delta^3}{6i^3} \end{array}\right\}\ldots(3).$$

Mas póde ainda attender-se a uma parte destas differenças, usando das fórmulas

$$F_t=F+At+Bt^2,\ A=\frac{\Delta}{i}-\frac{\Sigma^2}{4i},\ B=\frac{\Sigma^2}{4i^2}\ \ldots\ (4).$$

O erro da funcção F_t calculada pelas fórmulas (4), relativamente á mesma funcção calculada pelas fórmulas (3), será

$$e=\frac{\Delta^3}{12}(2\alpha^3-3\alpha^2+\alpha)-\frac{\Delta_1{}^4}{4}(\alpha^2-\alpha).$$

O maximo valor deste erro, relativamente ao seu primeiro termo, é proximamente $\mp\frac{\Delta^3}{125}+\frac{\Delta_1{}^4}{24}$.

226. Esta analyse basta para estimar a confiança, que se deve ter nos resultados obtidos pelas respectivas fórmulas. Por ella se vê, examinando as differenças dos logares da Lua calculados de 12^h em 12^h, que as fórmulas (4), empregadas no calculo da Ephemeride de Coimbra, são d'ordinario sufficientes para estes logares. Mas querendo maior exactidão, póde usar-se das fórmulas (2).

227. Se usassemos dos A e B mais exactos, que entram nas fórmulas (2), sem o concurso de C; o erro seria, relativamente ás mesmas fórmulas, $\frac{\Sigma^3}{12}\alpha^3 = \frac{\Delta^3}{6}\alpha^3 - \frac{\Delta_1{}^4}{12}\alpha^3$, quasi sempre menor que o das fórmulas (4) até $\alpha = \frac{1}{3}$, porém as mais das vezes maior d'ahi por diante. E se modificassemos o B, como se disse no n.° 199, o erro seria

$$\frac{\Sigma^3}{24}(2\alpha^3 - \alpha^2) = \frac{\Delta^3}{12}(2\alpha^3 - \alpha^2) - \frac{\Delta_1{}^4}{24}(2\alpha^3 - \alpha^2),$$

quasi sempre menor que o das fórmulas (4) até $\alpha = \frac{1}{2}$, porém as mais das vezes maior d'ahi por diante.

No entretanto o uso destes A e B mais exactos, mesmo sem o concurso de C, é preferivel ordinariamente quando os formamos na occasião, em que teem de servir; porque então podem formar-se interpolando para diante, ou para traz, segundo deve estar a funcção, de que se trata, mais proxima da precedente, ou da seguinte: como acontece com os *a* e *b* da nota da pagina 22.

Nos outros casos sempre tem a vantagem de se formar facilmente o valor de C, quando é necessario, sem alterar os de A e B: porque, se usarmos dos A e B das fórmulas (2), será

$$C = \frac{\Sigma^3}{12i^3} = \frac{F' - F - (A + Bi)i}{i^3},$$

com

$$F_t = F + At + Bt^2 + Ct^3;$$

e, se usarmos dos B modificados como se disse no n.° 199, será

$$C = \frac{\Sigma^3}{12i^3} = \frac{F' - F - (A + Bi)i}{\frac{1}{2}i^3},$$

com

$$F_t = F + At + (B - \tfrac{1}{2}Ci)t^2 + Ct^3.$$

228. Em quanto ao processo do n.° 197, parece-nos que a parte do erro dependente das differenças 3.as é $\frac{\Delta^3}{12}(2\alpha^3 - 3\alpha^2)$, que tem o mesmo limite que a do processo do n.° 199, mas que é quasi sempre maior que ella.

Correcções.

Pag. 44. No exemplo da pagina 44 tomou-se ψ com sinal trocado. Tomando-o com o sinal $+$, acha-se $a = 263°.55',687$. O que confirma a verdade do que se lê no fim deste n.° 48.

Aproveitamos esta occasião para observar que, por ficarem as mesmas as fórmulas (1) do n.° 42, quando nellas se mudam simultaneamente λ em $-\lambda$, l em $360° - l$, a em $360° - a$, e d em $-d$, bastaria a parte da taboa das ascensões rectas, ou declinações, relativa ás latitudes positivas, ou a relativa ás latitudes negativas: como se vê praticado na pagina 52 e seguintes das taboas astronomicas, de que fallámos no n.° 9.

Assim, no exemplo da pagina 44, querendo usar da taboa construida para as latitudes positivas, teremos

$$l' = 360° - 264°.25',77 = 95°.34',23 \;;\; \lambda' = +\,0°.4',09 :$$

e como, para a longitude 95° e latitude $+1°$, a taboa dá os elementos

AR	A	B	α	ϵ	ψ	corr.
95°.29',38	10,968	$-0,5$	$+0,418$	$+0,5$	$+13,8$	-43;

com elles, e com $h = 3,423$ e $k = -\dfrac{60' - \lambda'}{10} = -5,591$, acharemos $a' = 96°.4',32$, e por conseguinte $a = 360° - a' = 263°.55',68$.

No caso de se extender a taboa ás latitudes positivas e negativas, póde este processo servir de verificação, ou prova.

Pag. 160. Na equação (3) da pagina 160 as letras $\epsilon\epsilon$ da fracção devem ser *ii*.

FIM.

$\Delta \cos \alpha - \Sigma$	51,55 lim. austr.	l 51,55	1,71 0″
$\Delta \cos \alpha + \Sigma$	116,77 lim. bor. imag.	$Cl\,p$	8.22 4
		sen ω	9.93 4

	Or.				
cos d	9.9977363	P	+ 41.22.52		5′.24″
sen $(\omega - \alpha)$	9.8225084	P — P′	11.22	cos	.42
sen P	9,8202447	P′	41°,6 B	sen (ω	. B
				sen P	

O· elementos são os dados no annuncio da Ephemeride.

5 D]

ECLIPSE DO SRA.

Probl.

T	1h.7078	d'	—	p a 45°	60,17
AR	346°.21',36	d	—	Σ	32,61
		Δ		Σ'	92,78

l 33,12	1,5200903	l Δ	1	sen (λ + α)	9.9961801
l cos d'	9.9987322	cos α	9	. . . .	9.9977363
lh	1,5188225	l Δ cos α	1	sen P	9.9939164
l ♈	1,0124154	Cl Σ'	8	Occ. P	+80°.25'.56''
tg α	9.4935929	sen λ	9	P — P'	3.45

α	+17°.18'.25	Nasc.	P' + 47°	. . . . .	9.0101721
λ	+65 . 6.18		long. 78°	tg P	0,7732482
λ — α	+47 .47 .53	Occ.	P' + 80°	cos H	9.7834203
λ + α	+82 .24 .43		long. 24°	Occ. H.	+ 52°.36'.14''

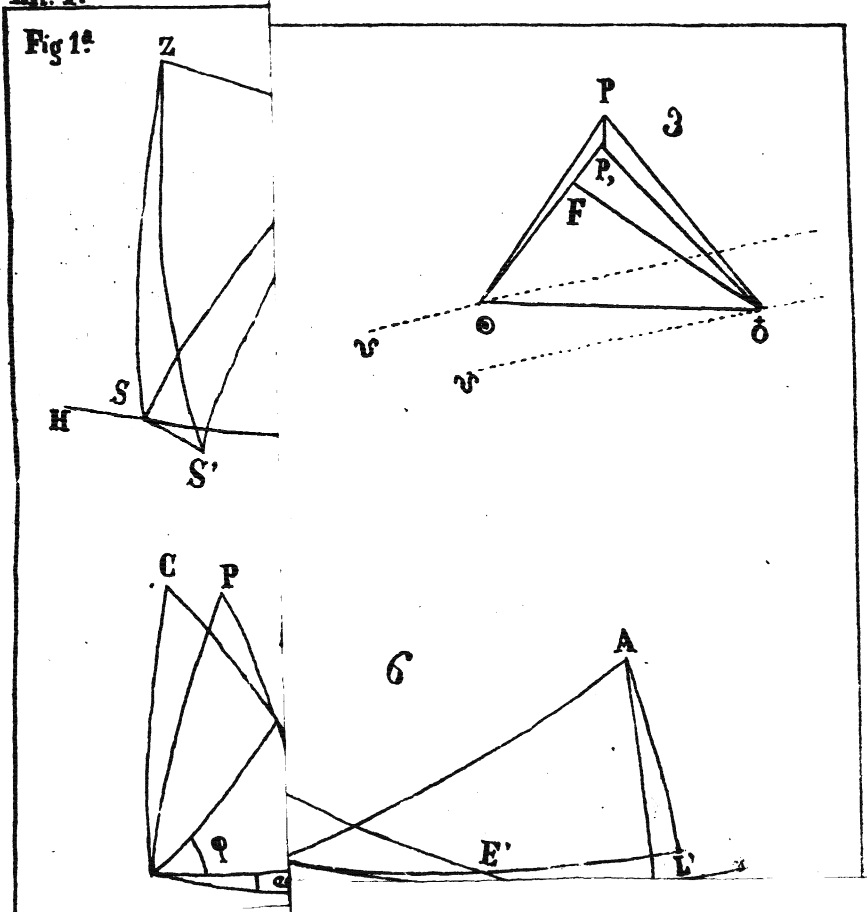
Nasc.		Occ.			
$\frac{H}{15}$ — eq t.	— 5h,3775	$\frac{15}{H}$ — eq. t	+	. . . .	1,9674544
				cos P	9.2206682
t	— 1,8873	t	+	sen H	9.9000697
θ	— 3,4902	θ	+	. . .	8.4811775
θ'	1,7078	θ'			
θ' — θ	+ 5,1986	θ — θ	—	H	9.5693698

Probl. II. [*form.* (14) *pag.* 120] (13), Σ = 0 *pag.* 118]

l Δ	1,9452223		1,9251005
$Cl\,p$	8.2206200		8.2206200
sen φ	0,1658423	φ imag.	0,1457205 λ imag.

Probl.

Est. 1.



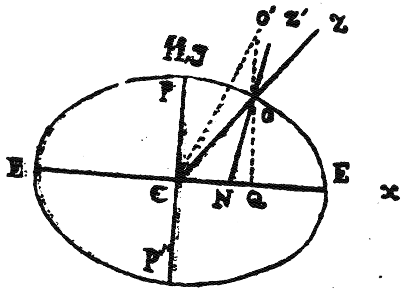
104[illegible].

Pro

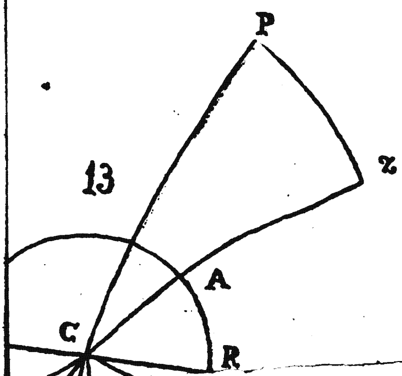
Est. 11

Fig.

12



13



1845.

Pro

ADDITAMENTO

ÁS NOTAS

DO

CALCULO DIFFERENCIAL E INTEGRAL

DE

L. B. Francoeur.

COIMBRA:

NA IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

1845.

ADVERTENCIA

Este opusculo contém as notas pertencentes ao Calculo Integral, que se lithografarão no anno passado para uso da aula respectiva, e que agora retocamos; e mais duas pertencentes ao Calculo Differencial, que se não tinhão publicado. Algumas dellas forão extrahidas de trabalho mais extenso; mas julgamos que as deviamos assim reduzir, por termos sómente em vista preparar os ouvintes dos annos ulteriores com conhecimentos d'analyse que nelles lhes podem aproveitar.

DESENVOLUÇÃO DAS FUNCÇÕES EM SERIE.

(*Franc.* n.° 749).

SEja

$$u = F(x, x_1, x_2 \ldots \ldots x_n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

e

$$x = \varphi(t + \alpha z), \; x_1 = \varphi_1(t_1 + \alpha_1 z_1) \ldots\ldots, x_n = \varphi_n(t_n + \alpha_n z_n) \ldots\ldots (2);$$

onde $z, z_1, \ldots z_n$, são funcções de $x, x_1, \ldots x_n$; e $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n, t, t_1, \ldots t_n$ as variaveis independentes, ou que se considerão como taes no processo que vamos expôr.

Trata-se de desenvolver u em ordem ás potencias e productos de $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$.

A primeira das equações (2) dá

$$\frac{dx}{dt} = \varphi' \cdot \left(1 + \alpha \Sigma_0^n \frac{dz}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dt}\right),$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = \varphi' \cdot \left(z + \alpha \Sigma_0^n \frac{dz}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{d\alpha}\right),$$

das quaes se tira

$$\frac{dx}{d\alpha} - z \frac{dx}{dt} = \alpha \left\{\frac{dx}{dt} \cdot \Sigma_0^n \frac{dz}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{d\alpha} - \frac{dx}{d\alpha} \cdot \Sigma_0^n \frac{dz}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dt}\right\}$$

$$= \alpha \left\{\frac{dx}{dt} \cdot \Sigma_1^n \frac{dz}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{d\alpha} - \frac{dx}{d\alpha} \cdot \Sigma_1^n \frac{dz}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dt}\right\}$$

$$= \alpha \Sigma_1^n \frac{dz}{dx_k} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx_k}{d\alpha} - \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dx_k}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots (3),$$

onde $\Sigma_0^l M_k$ significa $M + M_1 + M_2 \ldots + M_l$.

Se entre as n ultimas equações (2) eliminassemos todas as n variaveis $x_1, x_2, \ldots x_n$, menos uma dellas x_k, ficaria uma equação entre x e x_k, que resolvida em ordem a x_k daria um resultado da fórma

$$x_k = f(x, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n, t_1, t_2 \ldots t_n).$$

Differenciando esta equação em ordem a α, e em ordem a t, e eliminando f' entre as duas derivadas, resulta

$$\frac{dx_k}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dx_k}{dt} \cdot \frac{dx}{d\alpha} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Assim cada um dos termos do segundo membro de (3) se anniquila em virtude de (4), e fica

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= z \, \frac{dx}{dt} \\ \frac{dx_k}{d\alpha_k} &= z_k \, \frac{dx_k}{dt_k} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

e semelhantemente

Teremos tambem, attendendo a (5),

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\alpha} &= \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{d\alpha} + \Sigma_1^n \frac{du}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{d\alpha} \\ &= z \, \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \Sigma_1^n \frac{du}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{d\alpha} \\ &= z \, \frac{du}{dt} - \Sigma_1^n \left\{ z \, \frac{du}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dt} - \frac{du}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{d\alpha} \right\} \\ &= z \, \frac{du}{dt} - \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \Sigma_1^n \left\{ \frac{du}{dx_k} \left(\frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dx_k}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \right\}, \end{aligned}$$

ou, em virtude de (4),

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\alpha} &= z \, \frac{du}{dt} \\ \frac{du}{d\alpha_k} &= z_k \, \frac{du}{dt_k} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

e semelhantemente

Logo

$$\frac{dz_k}{d\alpha_k} = z_k \, \frac{dz_k}{dt_k},$$

que combinada com (6) dá

$$\frac{du}{d\alpha_k} \cdot \frac{dz_k}{dt_k} = \frac{du}{dt_k} \cdot \frac{dz_k}{d\alpha_k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (7).$$

Differenciando (6) em ordem a α_k, resulta

$$\frac{d^2u}{d\alpha_k^{\,2}} = \frac{dz_k}{d\alpha_k} \cdot \frac{du}{dt_k} + z_k \frac{d^2u}{d\alpha_k\, dt_k} = \frac{d\left(z_k \frac{du}{d\alpha_k}\right)}{dt_k},$$

em virtude de (7).

Em geral, se fôr $\quad \dfrac{d^{p-1}u}{d\alpha_k{}^{p-1}} = \dfrac{d^{p-2}\left(z_k{}^{p-1}\frac{du}{dt_k}\right)}{dt_k{}^{p-2}},$

tambem será

$$\frac{d^p u}{d\alpha_k{}^p} = \frac{d^{p+1-2}\left(z_k{}^{p-1}\frac{du}{dt_k}\right)}{d\alpha \,.\, dt_k{}^{p-2}} = \frac{d^{p+1-2}\left(z_k{}^{p-1}\frac{du}{d\alpha_k}\right)}{dt_k \,.\, dt_k{}^{p-2}};$$

porque, fazendo a differenciação, se vê que, em virtude de (7), é

$$\frac{d\left(z_k{}^{p-1}\frac{du}{dt_k}\right)}{d\alpha_k} = \frac{d\left(z_k{}^{p-1}\frac{du}{d\alpha_k}\right)}{dt_k}.$$

A formula $\quad \dfrac{d^p u}{d\alpha_k{}^p} = \dfrac{d^{p-1}\left(z_k{}^{p-1}\frac{du}{d\alpha_k}\right)}{dt_k{}^{p-1}},$

ou $\quad \dfrac{d^p u}{d\alpha_k{}^p} = \dfrac{d^{p-1}\left(z_k{}^{p}\frac{du}{dt_k}\right)}{dt_k{}^{p-1}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (8)$

tem pois logar, qualquer que seja p.

Posto isto, passemos á desenvolução de u.

Considerando u como funcção immediata de α, $\alpha_1 \dots \alpha_n$, e pondo

$$u = \mathrm{u} + \Sigma\, \alpha^p \,.\, \alpha_1^{p_1} \,.\, \alpha_2^{p_2} \dots q_{p,\,p_1,\,p_2 \dots}$$

onde u é aquillo em que se torna u quando α, α_1, $\alpha_2 \dots$ são nullos, e $q_{p,p_1,p_2} \dots$ é o factor de $\alpha^p \,.\, \alpha_1^{p_1} \,.\, \alpha_2^{p_2} \dots$, vê-se, differenciando successivamente p vezes em ordem a α, p_1 vezes em ordem a α_1, ..., e fazendo depois $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$, ..., que é

$$q_{p,p_1,p_2,\ldots} = \frac{d^{p+p_1+p_2+\ldots p_n} u}{1.2\ldots p.d\alpha^p.1.2\ldots p_1 d\alpha_1^{p_1}\ldots 1.2\ldots p_n d\alpha^{p_n}},$$

onde se devem fazer nullos α, α_1, ... depois da differenciação.

$$\text{Assim} \quad u = \text{u} + \Sigma \alpha^p . \alpha_1^{p_1}\ldots \frac{d^{p+p_1\ldots} u}{1.2\ldots p.d\alpha^p.1.2\ldots p_1 d\alpha^{p_1}\ldots} \ldots (9).$$

A formula (8) transforma (9) em outra, na qual se póde fazer $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$, ... antes da differenciação.

Sejão Z, Z_1 ... os valores de z, z_1 .., quando se fazem $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$, ... antes da differenciação. Como, em virtude de (6), a expressão de $Z_k{}^p \frac{du}{dt_k}$ se póde formar, achando o coefficiente $\frac{du}{d\alpha_k}$, mudando nelle z_k em $z_k{}^p$, e fazendo depois α, α_1, ... nullos; temos, seguindo este processo,

$$\frac{d^p u}{d\alpha^p} = \frac{d^{p-1}\left(z^p \frac{du}{dt}\right)}{dt^{p-1}} = u' = \frac{d^{p-1}\left(\frac{du}{d\alpha}\right)}{dt^{p-1}},$$

$$\frac{d^{p+p_1}u}{d\alpha^p.d\alpha_1^{p_1}} = \frac{d^{p_1-1}\left(\frac{du'}{d\alpha_1}\right)}{dt_1^{p_1-1}} = \frac{d^{p+p_1-2}\left(\frac{d^2u}{d\alpha.d\alpha_1}\right)}{dt^{p-1}.\quad dt^{p_1-1}},$$

e assim por diante: d'onde resulta o seguinte modo de escrever a formula (9)

$$u = \text{u} + \Sigma \alpha^p . \alpha_1^{p_1}\ldots \frac{d^{p+p_1\ldots-n}\dfrac{d^n u}{d\alpha.d\alpha_1\ldots d\alpha_n}}{1.2\ldots p dt^{p-1}\ldots 1.2\ldots p_n dt_n{}^{p_n-1}} \ldots (10);$$

com tanto que se lhe dê a interpretação que acabamos de indicar.

Taes são as formulas de Laplace (Mec. Cel. n°. 21), nas quaes se comprehende a de Lagrange

$$u = \text{u} + \Sigma \alpha^p . \frac{d^{p-1}\left(Z^p \frac{du}{dt}\right)}{1.2.3\ldots p dt^{p-1}} \ldots\ldots (11)$$

quando é $u = \text{F}(x)$, e $x = \varphi(t + \alpha z)$.

Fazendo

$z=z_1=\ldots z_n=1,\ \varphi(t+\alpha z)=t+\alpha,\ \varphi_1(t_1+\alpha_1 z_1)=t_1+\alpha_1,\ldots\varphi_n(t_n+\alpha_n z_n)=t_n+\alpha_n,$

e attendendo a (6), a formula (10) reduz-se á de Taylor applicada ao caso de ser u funcção de muitas variaveis. Repondo na formula assim reduzida $\frac{du}{d\alpha_1}$ em logar de $\frac{du}{dt_1}$, em virtude de (6), e fazendo $\alpha=0,\ \alpha_1=0,\ldots$ depois da differenciação, reproduz-se, quando $t=0,\ t_1=0\ldots,$ a formula (9) que é a de Maclaurin applicada ao caso de muitas variaveis. Por onde se vê que estas diversas formulas se deduzem umas das outras.

Passemos a alguns exemplos.

Seja (Astr. de Biot. 2.ª ed. tom. I. pag. 301 e tom. II. p. 31)

$$\text{sen}\,y\ \text{sen}\,u + 2.\cos y\ \text{sen}^2\tfrac{1}{2}u = 2\ \text{sen}\,\Delta\ \text{sen}\,D\ \text{sen}^2\tfrac{1}{2}P',$$

ou

$$\text{sen}\,u = m - \cot y\,(1 - \sqrt{1-\text{sen}^2 u}),$$

sendo

$$m = \frac{2\ \text{sen}\,\Delta\ \text{sen}\,D\ \text{sen}^2\tfrac{1}{2}P'}{\text{sen}\,y}.$$

Pondo

$$u = \text{arc}\,(\text{sen} = x),\ x = t + \alpha\left\{m - \cot y\,(1-\sqrt{1-x^2})\right\},$$

vem,

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ Z = m - \cot y\,(1-\sqrt{1-t^2});$$

e a formula (11) dá

$$u = \Sigma\alpha^p\,.\,\frac{d^{p-1}\left(\frac{[m-\cot y(1-\sqrt{1-t^2})]^p}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{1\,.\,2\ldots p\,.\,dt^{p-1}}\ \ldots\ldots\ldots\ (12);$$

por ser u = 0 : devendo fazer-se $t=0$ e $\alpha=1$ em cada termo assim achado.

Tomando $p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$ para levar a approximação até m^3, acha-se o seguinte

$$\text{Para}\ p=\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\end{cases}\qquad \frac{d^{p-1}\left(Z^p\frac{du}{dt}\right)}{dt^{p-1}} = \begin{cases}m\\o\\m^2(m-3\cot y)\\o\\3\,.\,4\,.\,5\,m^3\cot^2 y,\end{cases}$$

desprezando para $p=5$ os termos em m^4 e m^5: o que substituido em (12) dá

$$u = m - \tfrac{1}{2} m^2 \cot y + \tfrac{1}{6} m^3 (1 + 3 \cot^2 y) \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Para obter com mais facilidade, e ordenados relativamente a m, os termos desta serie, advirtamos que, pondo

$$\sqrt{1-t^2} = a, \quad \text{d'onde } \frac{da}{dt} = -\frac{t}{a},$$

a expressão $Z^p \frac{du}{dt}$ que entra em (12), sendo desenvolvida pela formula do binomio, toma a forma

$$\Sigma \frac{p(p-1)\ldots p-k+1}{1\,.\,2\ldots k} m^{p-k} \cot^k y . \frac{(1-a)^k}{a} \ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Para ter pois um termo em m^{p-k} de (13), é necessario differenciar $p-1$ vezes a expressão $\frac{(1-a)^k}{a}$. Ora, introduzindo cada differenciação de $1-a$ o factor t, e sendo t nullo, é necessario, para que o resultado se não anniquile, que não recaião mais differenciações sobre a que introduzem o factor t, do que sobre t que o fazem desapparecer; por conseguinte deve o numero das differenciações relativas a a ser *não maior* do que $\frac{1}{2}(p-1)$. Por outra parte, como $t=0$ dá $1-a=0$, deve o numero das differenciações relativas a a ser *não menor* do que k; d'onde se conclue que, para haver o termo em m^{p-k}, é necessario que seja $\frac{1}{2}(p-1)$ *não menor* do que k.

Querendo por exemplo achar o termo em m^3, contido nos de (12) correspondentes a $p=5$, temos $\frac{1}{2}(p-1) = 2$, e $k=p-3=2$; o que mostra que naquelles termos de (12) ha o pedido. Para o achar, temos pelas differenciações successivas de $\frac{(1-a)^2}{a}$, o seguinte

$$1.^a \ldots \frac{t}{a^3} - \frac{t}{a}$$

$$2.^a \ldots \frac{1}{a^3} + \frac{3t^2}{a^5} - \frac{1}{a} - \frac{t^2}{a^3}$$

$$3.^a \ldots \frac{3t}{a^5} + \frac{6t}{a^5} - \frac{t}{a^3} - \frac{2t}{a^3}$$

$$4.^a \ldots \frac{9}{a^5} - \frac{3}{a^3} = 6, \text{ quando } t=0;$$

desprezando na 3.ª e 4.ª os termos em t^2, que virião por fim a ter o factor t. O que substituido em (14) dá

$$\frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}\,.\,6\,m^3\cot^2 y = 3.\,4.5 m^3 \cot^2 y;$$

e o termo correspondente de (12)

$$\frac{3.4.5\,m^3\cot^2 y}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = \frac{3m^3\cot^2 y}{6}.$$

Poderiamos ter usado para a equação proposta da fórma

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}u = \frac{\frac{1}{2}m\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}(y+\frac{1}{2}u)},$$

que facilmente se tira da primeira (Biot pag. 300).

Seria então

$$u = 2\operatorname{arc}(\operatorname{sen} = x),\; x = t + m\,.\,\frac{\operatorname{sen}y}{2\operatorname{sen}(y+\operatorname{arc}\operatorname{sen}=x)},$$

$$z = \frac{\operatorname{sen}y}{2\operatorname{sen}(y+\operatorname{arc}[\operatorname{sen}=x])};$$

e por conseguinte

$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}},\; Z = \frac{\operatorname{sen}y}{2\operatorname{sen}[y+\operatorname{arc}(\operatorname{sen}=t)]},$$

$$u = \Sigma m^p\,\frac{d^{p-1}\dfrac{\operatorname{sen}^p y}{2^p\sqrt{1-t^2}\,.\operatorname{sen}^p[y+\operatorname{arc}(\operatorname{sen}=t)]}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p\,.\,dt^{p-1}};$$

semelhantemente ao que faremos no exemplo seguinte.

A serie (13) tambem se acha com facilidade pela formula de Maclaurin, dando á proposta a fórma

$$\cos y - \cos(y+u) = 2\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen}\dot{D}\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}P';$$

ou usando do methodo inverso das series; ou resolvendo-a em ordem a

$tg\frac{1}{2}d$, e substituindo o resultado na serie que dá o arco pela tangente (Puissant. Geod. 3.ª ed. n. 310 e Delambre Astron. tom. 1.º pag. 225).

Para segundo exemplo, seja (Biot tom. 1.º p. 256)

$$\text{sen}\, u = \text{A sen}\,(\text{P}+u).$$

Pondo

$$u=\text{arc}\,(\text{sen}=x),\ x=t+\text{A sen}\,[\text{P}+\text{arc}\,(\text{sen}=x)],\ z=\text{sen}\,[\text{P}+\text{arc}(\text{sen}=x)],$$

vem

$$u=o,\ \frac{du}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ Z=\text{sen}\,[\text{P}+\text{arc}\,(\text{sen}=t)];$$

e a formula (11) dá

$$u=\Sigma \text{A}^p.\frac{d^{p-1}\left(\dfrac{\text{sen}^p\,[\text{P}+\text{arc}\,(\text{sen}=t)]}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{1.2.3...p\,dt^{p-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15):$$

devendo fazer-se $t=o$ em cada um dos termos assim achados.

$$\left.\begin{array}{l} p=1 \\ \\ p=2 \\ \\ p=3 \end{array}\right\}\ \text{dá}\ \left\{\begin{array}{l} Z.\dfrac{du}{dt} = \text{sen P} \\ \\ \dfrac{d\left(Z^2\dfrac{du}{dt}\right)}{dt} = \text{sen 2 P} \\ \\ \dfrac{d^2\left(Z^3\dfrac{du}{dt}\right)}{dt^2} = 2\,(3\,\text{sen P sen}^2\text{P}-\text{sen}^3\text{P}) = 2\,\text{sen}\,3\,\text{P}, \end{array}\right.$$

etc. etc.;

e substituindo em (14), resultado

$$u=\text{A sen P}+\tfrac{1}{2}\,\text{A}^2\text{sen 2 P}+\tfrac{1}{3}\,\text{A}^3\,\text{sen 3 P}+\ldots\ldots\ldots (16).$$

Para que u represente nas series (13) e (16) o numero de segundos do arco, é necessario multiplicar os primeiros membros destas series por sen 1″, ou dividir os segundos membros por sen 1.″

OSCULAÇÕES E CURVATURAS.

Das osculações e curvaturas das linhas (Franc. n.° 798).

Circulo Osculador. Sejão

$$z=f(x),\ y=\psi(x),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

as equações d'uma curva.

O circulo osculador no ponto (x, y, z) póde considerar-se como a intersecção d'uma esfera do mesmo raio com um plano central. Sejão a, b, c as coordenadas do centro, e R o raio da esfera. As equações do circulo seráõ

$$z_{,}-c=A(x_{,}-a)+B(y_{,}-b),\ (x_{,}-a)^2+(y_{,}-b)^2+(z_{,}-c)^2=R^2\ \ldots\ldots\ (2).$$

Substituindo nellas $x+h$, $y+k$, $z+l$, em logar de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, acharemos duas equações da fórma

$$Mh+Nh^2\ldots=0,\ M'h+N'h^2\ldots=0,$$

que dão as quatro

$$\left.\begin{array}{ll} A+B\psi'=f', & B\psi''=f'', \\ x-a+(y-b)\psi'+(z-c)f'=0, & 1+(y-b)\psi''+(z-c)f''+\psi'^2+f'^2=0 \end{array}\right\}\cdot(3)$$

As duas primeiras equações (3), com a primeira de (2), são as do plano osculador; e as duas segundas de (3), com a segunda de (2), são as da esfera osculatriz: d'onde resulta que o circulo osculador é a intersecção do plano osculador com uma esfera osculatriz que tem o centro neste mesmo plano.

Como, em virtude da terceira das equações (3), as coordenadas a, b, c, satisfazem á equação

$$x-x_{,}+(y-y_{,})\psi'+(z-z_{,})f'=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

do plano normal; os centros de todas as esferas osculatrizes da curva no ponto (x, y, z) existem no plano normal que passa por este ponto.

Em fim, como a quarta das equações (3) é derivada da terceira, as coordenadas do centro de qualquer esfera osculatriz em (x, y, z) devem satisfazer á equação do plano normal e á sua derivada: por onde se vê que este centro pertence á intersecção de dous planos normaes consecutivos.

Como as tres equações da esfera osculatriz deixão indeterminada uma das quantidades a, b, c, R; existe uma infinidade de esferas osculatrizes para cada ponto (x, y, z). Mas d'entre ellas ha uma que tem o centro no plano osculador, e que é determinada pelas seis equações (2) e (3) entre a, b, c, R, A, B. O raio desta esfera é o *de curvatura*.

Differenciando as tres equações das esferas osculatrizes em ordem a a, b, c, R, resulta

$$(x_{,}-a)\,da+(y_{,}-b)\,db+(z_{,}-c)\,dc=-\mathrm{R}d\mathrm{R},$$

$$da+\psi' db+f' dc=0,\ \psi'' db+f'' dc=0.$$

Combinando a terceira e segunda destas novas equações com as tres primeiras de (3), acha-se

$$db+\mathrm{B}dc=0\ ,\ da-\psi'\mathrm{B}dc+f'dc=da+\mathrm{A}dc=0\,;$$

e combinando a primeira das mesmas equações com a primeira de (2), vem

$$(x_{,}-a)\,(da+\mathrm{A}dc)+(y_{,}-b)\,(db+\mathrm{B}dc)=-\mathrm{R}d\mathrm{R}=0\,:$$

logo o raio de curvatura é o *minimo* entre os das esferas osculatrizes.

As equações (2) e (3) dão

$$\left.\begin{aligned}
a&=x-\frac{(1+\psi'^2+f'^2)(\psi'\psi''+f'f'')}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-\psi'f'')^2},\\
b&=y+\frac{(1+\psi'^2+f'^2)[\psi''+f'(f'\psi''-f''\psi')]}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-\psi'f'')^2},\\
c&=z+\frac{(1+\psi'^2+f'^2)[f''+\psi'(f'\psi''-\psi'f'')]}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-\psi'f'')^2},\\
\mathrm{R}&=-\frac{(1+\psi'^2+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{[f''^2+\psi''^2+(f''\psi'-\psi'f'')^2]^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}\right\}\quad (5).$$

Generalisando a variavel independente (Franc. nº 729); attendendo a que é

$$\frac{y'}{x'}=\frac{dy}{dx},\ \frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3},\ ds^2=dx^2+dy^2+dz^2;$$

e pondo $X=dyd^2z-dzd^2y$, $Y=dzd^2x-dxd^2z$, $Z=dxd^2y-dyd^2x$;

as equações (5) tomão a fórma

$$\left.\begin{aligned} a&=x+\frac{ds^2(Ydz-Zdy)}{X^2+Y^2+Z^2}, & b&=y+\frac{ds^2(Zdx-Xdz)}{X^2+Y^2+Z^2}, \\ c&=z+\frac{ds^2(Xdy-Ydx)}{X^2+Y^2+Z^2}, & R&=\frac{ds^3}{\left\{X^2+Y^2+Z^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\}\cdot\ (6).$$

Em fim, por ser

$$dsd^2s=dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z,$$

temos $X^2+Y^2+Z^2=ds^2\left[(d^2z)^2+(d^2y)^2+(d^2x)^2-(d^2s)^2\right]$,

$$Y\,dz-Zdy=ds^3\ d\left(\frac{dx}{ds}\right),\ Zdx-Xdz=ds^3d\left(\frac{dy}{ds}\right), Xdy-Ydx=ds^3d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

$$(d^2z)^2+(d^2y)^2+(d^2x)^2-(d^2s)^2=ds^2\left[\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)\right];$$

e as formulas (6) se transformão em

$$\left.\begin{aligned} a&=x+\frac{dsd\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2}, \\ b&=y+\frac{dsd\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2}, \\ c&=z+\frac{dsd\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2}, \\ R&=\frac{ds}{\left\{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\ (7)$$

ou

$$a = x + R^2 \cdot \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\ b = y + R^2 \cdot \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\ c = z + R^2 \cdot \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds},$$

$$R = \frac{ds}{\left\{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Angulo de torsão. Figuremos que em cada ponto d'uma curva de dupla curvatura se construe um elemento, no plano do elemento precedente, com a curvatura assignada pelo angulo de contingencia; e que se faz girar este elemento assim construido em torno do mesmo ponto, até que tome a posição que deve ter segundo a figura da curva, coincidindo com o elemento della. É evidente que o angulo assim descripto, chamado de *torsão*, ou de segunda curvatura, é o que formão entre si dous planos osculadores consecutivos; e bem se vê que este angulo, com o de contingencia, determina a posição de cada elemento, e por conseguinte a figura da curva.

Sejão c, c', c'' os cosenos dos angulos que a perpendicular a um destes planos osculadores faz com os eixos coordenados, e $c+\delta c$, $c'+\delta c'$, $c''+\delta c''$, os daquelles que faz com os mesmos eixos a perpendicular ao plano consecutivo. Designando por θ o angulo formado pelas duas perpendiculares, é

$$2\cos\theta = 2c(c+\delta c) + 2c'(c'+\delta c') + 2c''(c''+\delta c'') = 2 - \delta c^2 - \delta c'^2 - \delta c''^2,$$

por ser

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,\ (c+\delta c)^2 + (c'+\delta c')^2 + (c''+\delta c'')^2 = 1;$$

d'onde

$$2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\theta = \theta = \sqrt{\delta c^2 + \delta c'^2 + \delta c''^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Applicando a transformação (D) (Franc. pag. 729) á equação

$$\psi''.(z_1 - f) = (f'\psi'' - \psi' f'')(x_1 - x) + f''.(y_1 - \psi)$$

do plano osculador, e usando da notação precedente, resulta

$$X(x - x_1) + Y(y - y_1) + Z(z - z_1) = 0;$$

logo as equações da perpendicular ao plano osculador são

$$x_{,} - x = \frac{X}{Z}(z_{,} - z),\ y_{,} - y = \frac{Y}{Z}(z_{,} - z);$$

e os cosenos c, c', c'' relativos a esta linha são (Franc. n.° 673, 1.°)

$$c = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ c' = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ c'' = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

que dão

$$\delta c = -\frac{Y(XdY-YdX)+Z(XdZ-ZdX)}{[X^2+Y^2+Z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

e semelhantemente para c' e c''. O que substituido em (8) dá

$$\theta^2 = \frac{A^2Y^2+B^2Z^2+2ABZY+A^2X^2+C^2Z^2-2ACXZ+C^2Y^2+B^2X^2+2BCXY}{(X^2+Y^2+Z^2)^3},$$

sendo

$$A = XdY - YdX,\ B = XdZ - ZdX,\ C = YdZ - ZdY.$$

Por ser

$$A^2Z^2 = AZ(BY - CX),\ B^2Y^2 = BY(CX + AZ),\ C^2X^2 = CX(BY - AZ),$$

a expressão de θ reduz-se a

$$\theta = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Emfim, como, em virtude das expressões de X, Y, Z, é

$$Ady + Bdz = 0,\ Adx - Cdz = 0,\ Bdx + Cdy = 0,$$

e por conseguinte

$$C = A\frac{dx}{dz},\ B = -A\frac{dy}{dz},$$

θ toma a forma

$$\theta = \frac{Ads}{dz(X^2+Y^2+Z^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

sendo

$$\frac{A}{dz} = dz\,(d^2xd^3y - d^2yd^3x) + dy\,(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dx\,(d^2yd^3z - d^2zd^3y).$$

Tal é a expressão do angulo de *torsão*.

Curvatura das superficies.

Se pelo ponto (x, y, z) d'uma superficie conduzirmos qualquer plano secante, o raio de curvatura da secção indicará nesse ponto a curvatura da superficie no sentido da mesma secção. Este raio é (7)

$$\rho = \frac{ds}{\left\{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Como a tangente á secção é a intersecção do plano tangente com o secante, as suas equações resultão das destes planos

$$z_{,} - z = p\,(x_{,} - x) + q\,(y_{,} - y)\;,\; z_{,} - z = A\,(x_{,} - x) + B\,(y_{,} - y);$$

e são

$$x_{,} - x = \frac{B - q}{Bp - Aq}\,(z_{,} - z)\;,\; y_{,} - y = -\frac{A - p}{Bp - Aq}\,(z_{,} - z);$$

das quaes se tira

$$y_{,} - y = -\frac{A - p}{B - q}\,(x_{,} - x) = m\,(x_{,} - x) = \frac{dy}{dx}\,(x_{,} - x).$$

Os cosenos $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, são pois (*Franc.* n.° 673)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{X'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}},\; \frac{dy}{ds} = \frac{Y'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}},\; \frac{dz}{ds} = \frac{Z'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}},$$

onde

$$X' = B - q\;,\; Y' = -(A - p)\;,\; Z' = Bp - Aq.$$

Differenciando estas expressões dos cosenos, teremos, como acima a respeito de c, c', c'',

$$\left\{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}{X'^2+Y'^2+Z'^2},$$

sendo

$$A'=X'dY'-Y'dX',\ B'=X'dZ'-Z'dX',\ C'=Y'dZ'-Z'dY';$$

o que dá á expressão de ρ a fórma

$$\rho=\frac{ds\,(X'^2+Y'^2+Z'^2)}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Finalmente, por ser, como se póde verificar,

$$A'=X'(dp+mdq),\ B'=BX'(dp+mdq),\ C'=-AX'(dp+mdq),$$

e $$dp=(r+ms)\,dx,\ dq=(s+mt)\,dx,\ \frac{dx}{ds}=\frac{X'}{\sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}};$$

fica $$\rho=\frac{(X'^2+Y'^2+Z'^2)^{\frac{3}{2}}}{X'^2(r+2ms+m^2t)\sqrt{1+A^2+B^2}}\ldots\ldots\ldots(10).$$

Para comparar esta expressão de ρ com a do raio pertencente a uma secção normal que contenha a tangente á superficie, é necessario sujeitar o plano secante ás condições de passar pela normal e pela tangente.

Seja $$z_i-z=A_i(x_i-x)+B_i(y_i-y)$$

a equação do plano normal. As da normal e tangente são

$$x_i-x=-p(z_i-z),\ y_i-y=-q(z_i-z);$$

$$x_i-x=\frac{B-q}{Bp-Aq}(z_i-z),\ y_i-y=-\frac{A-p}{Bp-Aq}(z_i-z):$$

e a condição de estarem estas duas linhas no plano secante dá (Franc. n.° 667)

$$1+A_{,}p+B_{,}q=0\,,\ 1-\frac{B-q}{Bp-Aq}\,.\,A_{,}+\frac{A-p}{Bp-Aq}\,.\,B_{,}=0\,;$$

das quaes se tira

$$A_{,}=-\frac{A-p-q\,(Bp-Aq)}{(B-q)\,q+(A-p)\,p},\quad B_{,}=-\frac{B-q+p\,(Bp-Aq)}{(B-q)\,q+(A-p)\,p}.$$

Logo $$1+A_{,}^2+B_{,}^2=\frac{(X'^2+Y'^2+Z'^2)\,(1+p^2+q^2)}{\left\{(B-q)\,q+(A-p)\,p\right\}^2},$$

$$1+AA_{,}+BB_{,}=\frac{X'^2+Y'^2+Z'^2}{(B-q)\,q+(A-p)\,p};$$

o que substituido em (10) dá

$$\rho=\frac{1+AA_{,}+BB_{,}}{\sqrt{1+A^2+B^2}\,.\,\sqrt{1+A_{,}^2+B_{,}^2}}\,.\,\frac{\left\{1+\frac{Y'^2}{X'^2}+\frac{Z'^2}{X'^2}\right\}.\sqrt{1+p^2+q^2}}{r+2ms+m^2t}.$$

O primeiro factor desta expressão é o coseno do angulo ω que formão entre si os dous planos (Franc. n.° 674); e de mais, por ser

$$\frac{Y'}{X'}=-\frac{A-p}{B-q}=m\,,\ \frac{Z'}{X'}=\frac{Bp-Aq}{B-q}=p+mq\,,$$

temos

$$1+\frac{Y'^2}{X'^2}+\frac{Z'^2}{X'^2}=1+p^2+2mpq+(1+q^2)\,m^2:$$

assim a expressão de ρ transforma-se em

$$\rho=\pm\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\,[1+p^2+2mpq+(1+q^2)\,m^2]}{r+2ms+m^2t}\,.\cos\omega\ldots\ (11)$$

Como o coefficiente de $\cos\omega$ não depende da posição do plano secante senão por causa de m, este coefficiente é constante para todos os planos secantes que passão por uma mesma tangente á superficie. Chamando pois R o raio de secção normal, que passa pela mesma tangente, é

$$R = \pm \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\,[1+p^2+2mpq+(1+q^2)m^2]}{r+2ms+m^2t} \quad \ldots (12);$$

e por conseguinte $\rho = R \cos \omega$ .... (13); expressão analytica do theorema de Meunier, que consiste em ser o raio ρ a projecção de R sobre o plano secante.

Este modo de chegar á expressão de ρ, posto que menos breve do que o geralmente empregado, tem a vantagem de dar o raio ρ de curvatura (10) de qualquer secção, sem passar pelo da normal R; e de se deduzir delle a deste ultimo, indicando as modificações que resultão da posição do plano secante.

Como ρ deve ser positivo, e o numerador de (11) tem sempre o mesmo sinal, por ser $p^2q^2 < (1+p^2)(1+q^2)$; escolheremos o sinal $\pm$ semelhante ao do denominador.

Differenciando $dz = pdx + qdy$, para a superficie e para o plano tangente, vem para a superficie

$$d^2z = pd^2x + qd^2y + dx^2(r+2ms+m^2t),$$

e para o plano

$$(d^2z) = pd^2x + qd^2y;$$

o que dá

$$d^2z = (d^2z) + dx^2(r+2ms+m^2t):$$

logo será

$$d^2z > \text{ou} < (d^2z),$$

e o plano tangente, na direcção da secção correspondente a m, ficará abaixo ou acima do plano tangente consecutivo, conforme fôr positiva ou negativa a expressão $r+2ms+m^2t$, que é o denominador de (11). Assim a curva será *convexa* ou *concava* para o plano dos xy, segundo fôr positivo ou negativo o denominador de (11).

Quando, para um dado ponto, o denominador de (11) conservar o mesmo sinal, qualquer que seja m, isto é, quando fôr $s^2<rt$, a superficie será nesse ponto convexa em todas as direcções: quando o não conservar, ou quando fôr $s^2>rt$, a curvatura mudará de sentido. Assim a condição $s^2<$ ou $>rt$ mostra se a superficie tem, ou não tem, a curvatura no mesmo sentido em todas as direcções, á roda do ponto de que se trata: e o denominador de (11) igualado a zero dá os dous valores de m correspondentes ás direcções em que a curvatura é nulla; direcções que separão umas das outras as curvaturas de differente sentido. Quando $rt=s^2$, a superficie tem a curvatura no mesmo sentido á roda do ponto dado: mas ha uma só direcção em que a curvatura é nulla; e esta direcção é a da geratriz rectilinea da superficie.

Assim $s^2 - rt = k$ pertence ás superficies convexas, não convexas, ou planificaveis, conforme é k negativo, positivo, ou nullo. As superficies torcidas ou enviezadas *(gauches)* entrão na segunda classe.

Posto que o nosso fim sómente fosse achar as formulas que são a base da doutrina da curvatura das linhas e superficies, trataremos das secções normaes cuja curvatura é *maxima* ou *minima*, por serem muito interessantes.

Como esta propriedade é independente da posição dos eixos, tomemos o ponto dado para origem das coordenadas, e o plano tangente para plano dos xy. Então os x, y, z, p, q, da formula (12) são nullos, e fica

$$R = -\frac{1 + m^2}{r + 2ms + m^2t}.$$

A equação do *minimum*, ou do *maximum*, será pois

$$\frac{dR}{dm} = 0 = m^2 s + m(r - t) - s.$$

Como -1 é o producto $m' \cdot m''$ das duas raizes, as duas secções de maxima e minima curvatura, chamadas *principáes*, cortão-se perpendicularmente.

Tomando para eixos dos x e dos y as intersecções das secções principáes com o plano tangente, devem ser $m' = 0$, $m'' = \infty$; e como é

$$m' + m'' = -\frac{r-t}{s}, \text{ resulta } s = 0, \text{ e fica}$$

$$R = \frac{1 + m^2}{r + m^2 t},$$

que, pondo $m = 0$ e $m = \infty$, dá os raios das *secções principáes*:

$$R' = \pm\frac{1}{r},\ R'' = \pm\frac{1}{t},$$

usando dos sinaes que tornão R' e R'' positivos.

Logo,

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{1}{R'}\cos^2\alpha \pm \frac{1}{R''}\operatorname{sen}^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14);$$

sendo α o arco cuja tangente trigonometrica é m.

Este theorema d'Euler dá a curvatura $\frac{1}{R}$ de qualquer secção normal expressa nas das secções principaes e no angulo α feito pelo plano normal secante com uma destas secções. Por onde se vê que, se n'um ponto commum duas superficies tiverem os mesmos raios principaes de curvatura, e existentes nos mesmos planos, os raios de curvatura de todas as outras secções normaes d'uma serão iguaes aos correspondentes da outra, e as superficies terão um contacto de segunda ordem, no ponto de que se tracta.

Sejão α e $90^\circ + \alpha$ os angulos formados por duas quaesquer secções normaes, perpendiculares entre si, com uma das principaes. Substituindo em (14) vem

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R'}\cos^2\alpha + \frac{1}{R''}\operatorname{sen}^2\alpha, \quad \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{R''}\cos^2\alpha;$$

o que dá

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

D'onde resulta que, para cada ponto, a somma algebrica das curvaturas de duas quaesquer secções normaes, que se cortão perpendicularmente, é sempre a mesma. Vej. a Analyse appl. á Geometr. de Le Roy e as Lições d'Analyse de Navier, das quaes tiramos a maior parte do que diz respeito á curvatura das linhas e superficies.

EQUAÇÕES DIFFERENCIAES TOTAES.

I. (*Franc.* n.° 749).

A Eliminação entre as equações lineares, nas quaes os factores, que multiplicão os coefficientes differenciaes da mesma ordem, são os mesmos em todas, offerece um theorema elegante, e ás vezes muito util.

Sejam

$$A_i \frac{d^i x^{(1)}}{dt^i} + A_{i-1} \frac{d^{i-1} x^{(1)}}{dt^{i-1}} + \ldots\ldots + A_0 x^{(1)} = 0\,,$$

$$A_i \frac{d^i x^{(2)}}{dt^i} + A_{i-1} \frac{d^{i-1} x^{(2)}}{dt^{i-1}} + \ldots\ldots + A_0 x^{(2)} = 0,$$

....

$$A_i \frac{d^i x^{(n)}}{dt^i} + A_{i-1} \frac{d^{i-1} x^{(n)}}{dt^{i-1}} + \ldots\ldots + A_0 x^{(n)} = 0,$$

ou

$$\Sigma_0^i A_m \frac{d^m x^{(1)}}{dt^m} = 0,\ \Sigma_0^i A_m \frac{d^m x^{(2)}}{dt^m} = 0,\ \ldots\ \Sigma_0^i A_m \frac{d^m x^{(n)}}{dt^m} = 0,\ \ldots\ldots (1),$$

n equações destas da ordem i. Se multiplicarmos $n-k$ dellas por a_p, $a_p^{(2)}, \ldots\, a_p^{(n-k)}$, e sommarmos os productos, teremos evidentemente a resultante

$$\Sigma_0^i A_m \left\{ a_p^{(1)} \frac{d^m x^{(1)}}{dt^m} + a_p^{(2)} \frac{d^m x^{(2)}}{dt^m} + \ldots + a_p^{(n-k)} \frac{d^m x^{(n-k)}}{dt^m} \right\} = 0 \,.\,. (2);$$

a qual se tornará naquella das equações (1), que é relativa á variavel $x^{(n-k+p)}$, pondo

$$x^{(n-k+p)} = a_p^{(1)} x^{(1)} + a_p^{(2)} x^{(2)} \ldots + a_p^{(n-k)} x^{(n-k)} \ \ldots\ldots\ldots (3).$$

Logo a equação (3) satisfaz as propostas.

Fazendo variar o indice p desde 1 até k, teremos assim k equações da fórma (3), que satisfazem ás propostas, e contém $(n-k)\,k$ arbitrarias $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots\ldots$; e ficaráõ para integrar $n-k$ das equações (1) que deveráõ dar $i\,(n-k)$ arbitrarias.

Mas, para que as k equações (3) sejão integraes completos das propostas (1), é necessario que, além de satisfazerem a estas equações, involvam um numero de arbitrarias que junto ás $i(n-k)$ prefaça o total ni. Teremos pois a condição

$$(n-k)k + i(n-k) = ni,$$

que dá as raizes $k = o$, e $k = n - i$. Donde resulta que $n - i$ é o maior numero de integraes da forma (3), que satisfazem ás equações differenciaes (1).

Applicando o theorema precedente ás seguintes equações, que se encontrão no Livro 2.° da Mech. Celest. n.° 17,

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (O);$$

acharemos o integral linear

$$z = ax + by \;\ldots\ldots\; (d).$$

Como as equações (O) differenciadas dão

$$\left.\begin{aligned} o &= d\left(r^3\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \mu dx \\ o &= d\left(r^3\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \mu dy \\ o &= d\left(r^3\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \mu dz \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (O');$$

e como, differenciando a equação $rdr = xdx + ydy + zdz$ duas vezes consecutivas, multiplicando a ultima differencial resultante por r^2, e substituindo em lugar das differenciaes segundas e terceiras de x, y, z, as suas expressões tiradas de (O) e (O'), por fim resulta

$$o = d\left(r^3\frac{d^2r}{dt^2}\right) + \mu dr,$$

podêmos (considerando o coefficiente r^3 como expresso em função de t) ajuntar esta ultima equação ás tres (O′), tomando nellas por variaveis $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$; e obter assim dois integraes lineares. Um destes integraes será

$$dr = \gamma dx + \lambda dy,$$

que dá

$$r = k + \gamma x + \lambda y \ldots . \ (e).$$

As equações (d) e (e), combinadas com $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, dão uma equação do segundo gráo entre duas quaesquer das variaveis x, y, z. Esta equação pertence a uma secção conica, cujo foco coincide com a origem das coordenadas, em virtude da expressão linear de r. (*)

Teremos assim dois integraes (d) e (e) das equações (O). Differenciando depois (e) duas vezes, e combinando a differencial resultante com as duas primeiras (O), acha-se facilmente a equação

$$0 = \frac{d^2r}{dt^2} + \mu \frac{r-k}{r^3},$$

a qual, multiplicada por dr, e integrada dá

$$0 = r^2 \frac{dr^2}{dt^2} - 2\mu r + \frac{\mu r^2}{a'} + \mu k \ldots . \ (f).$$

Em fim o integral de (f) junto a (d) e (e) completará o systema das tres equações integraes de (O). Esta applicação é textualmente extrahida do citado n.° 17 do Liv. 2.° da Mech. Cel.

Cumpre agora fazer uma reflexão, á qual em casos analogos se deve attender. Os integraes (d), (e), (f), involvem, além das seis arbitrarias a, b, $\varkappa$, λ, γ, a', mais outra proveniente da integração de (f); o que parece tornar defeituoso este processo. Observando porém que os integraes (d) e (f) forão deduzidos das equaçõens (O), e que o integral (e) se tirou das equaçõens (O′), as quaes, por terem resultado da diffe-

(*) Este resultado é muito conhecido, quando um dos planos coordenados coincide com o da secção conica, e se toma o centro, ou o vertice, para origem, com o eixo maior para eixo das abscissas (Franc. nn. 386, 393, 398): e como a mudança de systema d'eixos rectilineos não altera o gráo das funcções das coordenadas, porque a passagem destas d'um para outro systema se faz por expressões lineares (Franc. nn. 382 e seguintes, 676 e seguintes); tambem não altera o mesmo resultado, que tem por isso logar qualquer que seja o systema daquelles eixos.

renciação de (O), tomarão uma fórma mais geral do que ellas, vê-se que na verdade devia resultar esta constante de mais; e até, se tivessemos usado do segundo integral linear das quatro equações (O'), que é $dz = adx + bdy$, appareceria mais outra constante. Mas ao mesmo tempo se vê que, se os integraes dados se sujeitarem á condição de satisfazer particularmente ás equações (O), combinando-os com estas equações, as constantes deverão reduzir-se a seis distinctas.

É o que evidentementes acontece no integral de

$$dz = adx + bdy,$$

que é

$$z = ax + by + C:$$

por quanto, multiplicando por a e b as duas primeiras equações (O); sommando-as; substituindo, em logar dos primeiros termos, a expressão de $\frac{d^2z}{dt^2}$ tirada de $dz = adx + bdy$; e comparando o resultado com a terceira equação (O), depois de substituir $ax + by + C$ em logar de z no segundo membro desta; resulta C=o.

O mesmo acontece relativamente ao integral (e), por isso que (f) resulta da combinação delle com (O); como passamos a verificar.

Fazendo $dr=0$ em (f), a somma $2a'$ das raizes será o eixo maior da secção conica, e a semidifferença será a excentricidade

$$a'e = \sqrt{a'^2 - a'k} : \text{logo } k = a'(1-e^2), \text{ dist. perih.} = a'(1-e).$$

Substituindo em $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ as expressões de y e z tiradas das equações (d) e (e); differenciando depois, e fazendo $dr=0$ e $r = a'(1-e)$ na differencial resultante; acharemos

$$x = \frac{a'e(e-1)[(1+b^2)\gamma - ab\lambda]}{\lambda^2(1+a^2)+\gamma^2(1+b^2)-2ab\lambda\gamma};$$

do mesmo modo

$$y = \frac{a'e(e-1)[(1+a^2)\lambda - ab\gamma]}{\lambda^2(1+a^2)+\gamma^2(1+b^2)-2ab\lambda\gamma};$$

e finalmente

$$z = \frac{a'e(e-1)(a\gamma+b\lambda)}{\lambda^2(1+a^2)+\gamma^2(1+b^2)-2ab\lambda\gamma}:$$

o que substituido em

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ com } r = a'(1 - e),$$

dá

$$e^2 = \frac{(1 + a^2)\lambda^2 + (1 + b^2)\gamma^2 - 2ab\lambda\gamma}{1 + a^2 + b^2};$$

e por conseguinte

$$k = a'(1 - e^2)$$

$$= a' \left\{ 1 - \frac{(1 + a^2)\lambda^2 + (1 + b^2)\gamma^2 - 2ab\lambda\gamma}{1 + a^2 + b^2} \right\}$$

$$= a' \left\{ \frac{1 + a^2 - \lambda^2 + b^2 - \gamma^2 - (a\lambda - b\gamma)^2}{1 + a^2 + b^2} \right\}.$$

Por onde se vê, que uma das arbitrarias k é funcção das outras a, b, γ, λ, a'; e que o calculo dá o que deve dar, conformemente com as condições ás quaes o sugeitamos.

II. (*Franc.* n.° 885)

A integração das equações differenciaes, por meio dos integraes das mesmas equações privadas dos seus ultimos termos, dá logar a um methodo que, ainda mesmo quando não conduz aos integraes exactos, fornece meios de os exprimir em series; e estas, no caso de serem convergentes, podem servir para a resolução de problemas que, no estado actual da analyse, não são susceptiveis de solução rigorosa. Este resultado é objecto dos n.os 40 e seguintes do Liv. 2.° da Mech. Cel.

Sejão

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^i y^{(1)}}{dt^i} + P^{(1)} + \alpha\, Q^{(1)} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^i y^{(2)}}{dt^i} + P^{(2)} + \alpha\, Q^{(2)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^i y^{(n)}}{dt^i} + P^{(n)} + \alpha\, Q^{(n)} = 0 \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (1)$$

n equações da ordem i; nas quaes $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ... $P^{(n)}$, e $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, ... $Q^{(n)}$

representão funcções de t, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... $y^{(n)}$, e de suas differenças até á ordem $i-1$.

E supponhamos que se sabem integrar estas equações privadas dos termos $\alpha\,Q^{(1)}$, $\alpha\,Q^{(2)}$, ... $\alpha\,Q^{(n)}$.

Sendo integraveis as n equações

$$\frac{d^i y^{(1)}}{dt^i}+P^{(1)}=0\,,\ \frac{d^i y^{(2)}}{dt^i}+P^{(2)}=0\,,\ldots\ \frac{d^i y^{(n)}}{dt^i}+P^{(n)}=0\,.\,.\ (2),$$

e tendo n integraes finitos com $i\,n$ arbitrarias, tambem devem ter in integraes da ordem $i-1$; porque o numero destes ultimos integraes deve ser tal que a eliminação das $n\,(i-1)$ derivadas, que nelles entrão, reproduza os n integraes finitos de (2) (Franc. n. 872).

Logo os primeiros membros das equações (2) multiplicados por factores convenientes, e sommados, reduzir-se-hão a funcções differenciaes exactas; e isto para ni systemas de factores.

Sejam

$$\begin{array}{l}
F^{(1)}_{(1)}\,,\ F^{(2)}_{(1)}\,,\ F^{(3)}_{(1)}\,,\ \ldots\ F^{(n)}_{(1)}\,;\\
F^{(1)}_{(2)}\,,\ F^{(2)}_{(2)}\,,\ F^{(3)}_{(2)}\,,\ \ldots\ F^{(n)}_{(2)}\,;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F^{(1)}_{(ni)}\,,\ F^{(2)}_{(ni)}\,,\ F^{(3)}_{(ni)}\,,\ \ldots\ F^{(n)}_{(ni)}\,;
\end{array}$$

os ni systemas de taes factores.

Para cada um destes systemas teremos um resultado da fórma

$$0=\Sigma F^{(m)}_{(p)}\left\{\frac{d^i y^{(m)}}{dt^i}+P^{(m)}\right\}=\frac{dV_{(p)}}{dt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3);$$

sendo para cada systema o indice p constante, e o indice m tomado desde 1 até n: o que dará ni integraes de (2) da ordem $i-1$, da fórma

$$V_{(p)}=c_{(p)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Devendo ser identicos os dois membros de (3), segue-se que

$F^{(m)}_{(p)}$ é o coefficiente de $\frac{d^i y^{(m)}}{dt^i}$ em $\frac{dV_{(p)}}{dt}$, ou o de $\frac{d^{i-1} y^{(m)}}{dt^{i-1}}$ em (4).

Donde resulta que, se por qualquer meio chegarmos a obter ni integraes distinctos da ordem $i-1$ de (2), e eliminarmos entre elles as ni arbitrarias, para os reduzir á fórma (4), qualquer factor $F^{(m)}_{(p)}$, designado pelos indices m da variavel e p do systema, será o coefficiente de $\frac{d^{i-1}y^{(m)}}{dt^{i-1}}$ em $V_{(p)}$.

Posto isto, se multiplicarmos respectivamente as n equações (1) pelos n factores

$$F^{(1)}_{(p)},\ F^{(2)}_{(p)} \ldots\ldots F^{(n)}_{(p)},$$

de cada um dos ni systemas, e sommarmos, acharemos ni resultados da fórma

$$\Sigma F^{(m)}_{(p)} \left\{ \frac{d^i y^{(m)}}{dt^i} + P^{(m)} \right\} + \alpha\, \Sigma F^{(m)}_{(p)}\, Q^{(m)} = 0 = \frac{dV_{(p)}}{dt} + \alpha \Sigma F^{(m)}_{(p)}\, Q^{(m)};$$

que, integrando, dá

$$c_{(p)} - \alpha \int dt\ \Sigma F^{(m)}_{(p)}\, Q^{(m)} = V_{(p)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Se a fórma das equações (1) fôr tal que $dt\, \Sigma F^{(m)}_{(p)} Q^{(m)}$ seja funcção de t, a equação (5) mostra que os integraes das propostas (1) se achão por meio dos integraes de (2), substituindo nestes $c_{(p)} - \alpha \int dt\ \Sigma F^{(m)}_{(p)} Q^{(m)}$ em logar de $c_{(p)}$, depois de ter determinado os factores $F^{(m)}_{(p)} \ldots$ por meio dos ni integraes da ordem $i-1$ de (2) reduzidos á fórma (4).

Passsemos a um exemplo. Seja a equação

$$0 = \frac{d^2 u}{dv^2} + u - \frac{\mu}{h^2} \cdot \frac{1}{[1+\gamma^2 \text{sen}^2(v-\theta)]^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

(*Mech. Cel. Liv.* 2.° n.° 16).

Integrando esta equação sem o ultimo termo, resulta (*Franc.* n.° 881)

$$u = c' \text{ sen } v + c'' \cos v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Differenciando (*b*) em ordem a v, o systema destas equações equivalerá ao dos dois integraes da 1.ª ordem de (2); e eliminando c', c'', entre ellas para as reduzir á forma (4), acha-se cos v para coefficiente de $\frac{du}{dv}$ em uma, e — sen v na outra.

Logo $$F_{(1)} = \cos v\,,\ F_{(2)} = -\operatorname{sen} v;$$

e as funcções $_\alpha F_{(1)}\,Qdt$ e $_\alpha F_{(2)}\,Qdt$ são

$$-\frac{\mu}{h^2}\cdot\frac{\cos v\,dv}{[1+\gamma^2\operatorname{sen}^2(v-\theta)]^{\frac{3}{2}}},\quad +\frac{\mu}{h^2}\cdot\frac{\operatorname{sen} v\,dv}{[1+\gamma^2\operatorname{sen}^2(v-\theta)]^{\frac{3}{2}}},$$

que se tornão em

$$-\frac{\mu}{h^2}\cdot\frac{ady+bdx}{(1+\gamma^2 y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad +\frac{\mu}{h^2}\cdot\frac{bdy-adx}{(1+\gamma^2 y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

pondo

$$\cos\theta = a\,,\ \operatorname{sen}\theta = b,\ \operatorname{sen}(v-\theta) = y,\ \cos(v-\theta) = x\,,\ x^2+y^2 = 1.$$

Ora

$$\int\frac{ady+bdx}{(1+\gamma^2 y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\left\{\frac{ady}{(1+\gamma^2 y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{bdx}{[1+\gamma^2(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{ay}{\sqrt{1+\gamma^2 y^2}} + \frac{bx}{(1+\gamma^2)\sqrt{1+\gamma^2 y^2}},$$

$$\int\frac{bdy-adx}{(1+\gamma^2 y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{by}{\sqrt{1+\gamma^2 y^2}} - \frac{ax}{(1+\gamma^2)\sqrt{1+\gamma^2 y^2}};$$

logo

$$_\alpha\!\int F_{(1)}\,Qdt = -\frac{\mu}{h^2}\left\{\frac{as}{\gamma\sqrt{1+s^2}} + \frac{b\cos(v-\theta)}{(1+\gamma^2)\sqrt{1+s^2}}\right\},$$

$$_\alpha\!\int F_{(2)}\,Qdt = \frac{\mu}{h^2}\left\{\frac{bs}{\gamma\sqrt{1+s^2}} - \frac{a\cos(v-\theta)}{(1+\gamma^2)\sqrt{1+s^2}}\right\},$$

pondo $s=\gamma$ sen $(v-\theta)$.

Substituindo $c'-\alpha\int dt\, F_{(1)}\, Q$ e $c''-\alpha\int dt\, F_{(2)}\, Q'$, em logar de c' e c'', em (b), teremos

$$u=\frac{\mu}{h^2}\left\{\frac{s(a \operatorname{sen} v-b\cos v)}{\gamma\sqrt{1+s^2}}+\frac{\cos(v-\theta)(a\cos v+b\operatorname{sen} v)}{(1+\gamma^2)\sqrt{1+s^2}}\right\}+c'\operatorname{sen} v+c''\cos v$$

$$=\frac{\mu}{h^2}\cdot\frac{\sqrt{1+s^2}}{1+\gamma^2}+c'\operatorname{sen} v+c''\cos v=\frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\sqrt{1+s^2}+e\cos(v-\pi)\right\},$$

pondo

$$c'=\frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}e \operatorname{sen}\pi,$$

$$c''=\frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}e\cos\pi.$$

Esta equação tambem se integra pelos processos ensinados nos nn. 885 e 889 do texto; como vamos fazer.

Methodo do n.° 885. Pondo $s=\gamma$ sen $(v-\theta)$, a proposta é

$$\frac{d^2u}{dv^2}+u=\frac{\mu}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}};$$

e as equações (1) e (2) do texto tornão-se neste caso em

$$\frac{d^2z}{dv^2}+z=0,\quad dt'+2t'\frac{dz}{z}=\frac{\mu}{h^2}\cdot\frac{dv}{z(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A primeira dá (n.° 881) $\qquad z=\gamma \operatorname{sen}(v-\theta)=s.$

Para integrar a segunda temos (n.° 857, ou n.° 860. II)

$$t'e^{2\int\frac{dz}{z}}=\frac{\mu}{h^2}\int\frac{e^{2\int\frac{dz}{z}}dv}{z(1+s^2)^{\frac{3}{2}}},\ \text{ou } t'z^2=\frac{\mu}{h^2}\int\frac{zdv}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$t's^2=\frac{\mu}{h^2}\int\frac{sds}{\sqrt{\gamma^2-s^2}\cdot(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pondo

$$1+s^2=x^2,\ 1+\gamma^2=a^2\text{ , e depois }\frac{a^2}{x^2}-1=q^2\text{ , será}$$

$$\int\frac{sds}{\sqrt{\gamma^2-s^2}\,.\,(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\int\frac{dq}{a^2}=-\frac{q+C}{a^2}$$

$$=-\frac{1}{1+\gamma^2}\left(\frac{\sqrt{\gamma^2-s^2}}{\sqrt{1+s^2}}+C\right).$$

logo

$$dt=t'dv=\frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\frac{-dv\sqrt{\gamma^2-s^2}}{s^2\sqrt{1+s^2}}-\frac{Cdv}{s^2}\right\}$$

$$=\frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\frac{-ds}{s^2\sqrt{1+s^2}}-\frac{Cds}{s^2\sqrt{\gamma^2-s^2}}\right\};$$

d'onde

$$t=\frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\frac{\sqrt{1+s^2}}{s}+\frac{C\sqrt{\gamma^2-s^2}}{\gamma^2 s}+\frac{C''}{\gamma}\right\}$$

$$=\frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\frac{\sqrt{1+s^2}}{s}+\frac{C'\cos(v-\theta)+C''\,\mathrm{sen}\,(v-\theta)}{s}\right\}$$

$$=\frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\frac{\sqrt{1+s^2}}{s}+\frac{e\cos(v-\pi)}{s}\right\};$$

pondo $C'=e\cos(\pi-\theta)$, $C''=e\,\mathrm{sen}\,(\pi-\theta)$.

Emfim $u=tz=\dfrac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\sqrt{1+s^2}+e\cos(v-\pi)\right\}.$

Como neste exemplo o integral da equação (1) é (n.° 884)

$$z=C\,e^{av}+D\,e^{bv};$$

podiamos, aproveitando a reflexão da pag. 184 do texto relativa á equação (4), fazer $C=1$, $D=0$, e tomar logo $z=e^{av}$. Substituindo este valor na equação (4), e attendendo a que φ se torna igual á unidade, e a que deve satisfazer á condição

$$a^2+1=0,\text{ ou }a=\pm\sqrt{-1},$$

teremos, feitas as devidas mudanças,

$$u = e^{\pm v\sqrt{-1}} \int \frac{dv}{e^{\pm 2v\sqrt{-1}}} \int \frac{\mu}{h^2} \cdot \frac{e^{\pm v\sqrt{-1}}dv}{[1+\gamma^2 \text{sen}^2(v-\theta)]^{\frac{3}{2}}};$$

expressão na qual devemos tomar um dos signaes $\pm$. E como nella entra a funcção sen $(v-\theta)$, isto é, funcções de sen v e cos v, devem para as integrações indicadas transformar-se estes senos e cosenos em exponenciaes, ou inversamente, pelas formulas conhecidas (n.° 630).

Mèthodo do n.° 889. A proposta é da forma $u'' + u = V$, sendo

$$V = \frac{\mu}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Multiplicando por $e^{h(v-\theta)}dv$, fica

$$e^{h(v-\theta)}dv\,(u'' + u) = V\,e^{h(v-\theta)}dv,$$

o que dá

$$e^{h(v-\theta)}(au + bu') = \int V e^{h(v-\theta)}dv.$$

Differenciando, e comparando com a proposta, resultão

$$b=1,\ a + bh = 0,\ ah = 1,$$

que dão

$$b=1,\ h=\pm\sqrt{-1},\ a=\pm\frac{1}{\sqrt{-1}}.$$

As duas expressões, entre as quaes se deve eliminar u', são pois

$$u' + \frac{u}{\sqrt{-1}} = e^{-(v-\theta)\sqrt{-1}}\int V e^{+(v-\theta)\sqrt{-1}}dv = F;$$

$$u' - \frac{u}{\sqrt{-1}} = e^{(v-\theta)\sqrt{-1}}\int V e^{-(v-\theta)\sqrt{-1}}dv = G.$$

Mas

$$\int V e^{\pm(v-\theta)\sqrt{-1}}dv = \frac{\mu}{h^2}\int \frac{\cos(v-\theta) \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(v-\theta)}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}dv$$

$$= \frac{\mu}{\gamma h^2}\int \frac{[\sqrt{\gamma^2 - s^2} \pm s\sqrt{-1}]ds}{\sqrt{\gamma^2 - s^2}.(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu}{\gamma h^2}\left\{\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \mp \frac{\sqrt{-1}}{1+\gamma^2}.\frac{\sqrt{\gamma^2 - s^2}}{\sqrt{1+s^2}}\right\};$$

logo

$$F = \frac{\mu}{\gamma^2 h^2}\left\{\sqrt{\gamma^2 - s^2} - s\sqrt{-1}\right\}\left\{\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} - \frac{\sqrt{-1}}{1+\gamma^2}.\frac{\sqrt{\gamma^2 - s^2}}{\sqrt{1+s^2}} + C\right\},$$

$$G = \frac{\mu}{\gamma^2 h^2}\left\{\sqrt{\gamma^2 - s^2} + s\sqrt{-1}\right\}\left\{\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{\sqrt{-1}}{1+\gamma^2}.\frac{\sqrt{\gamma^2 - s^2}}{\sqrt{1+s^2}} + C'\right\},$$

$$F - G = \frac{2u}{\sqrt{-1}} = \frac{\mu}{\gamma^2 h^2}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{2\gamma^2\sqrt{-1}\sqrt{1+s^2}}{1+\gamma^2} \\ +(C-C')\sqrt{\gamma^2 - s^2} - (C+C')\,s\sqrt{-1}\end{array}\right\};$$

d'onde

$$u = \frac{\mu}{\gamma^2 h^2}\left\{\frac{\gamma^2\sqrt{1+s^2}}{1+\gamma^2} + A\sqrt{\gamma^2 - s^2} + Bs\right\}$$

$$= \frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\sqrt{1+s^2} + m\cos(v-\theta) + n\,\mathrm{sen}\,(v-\theta)\right\}$$

$$= \frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)}\left\{\sqrt{1+s^2} + e\cos(v-\pi).\right\}$$

A proposta (a), que nos servio d'exemplo, pertence a uma classe d'equações que dão para (2) equações lineares relativamente ás variaveis $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, . . . e suas differenças, sem termos independentes dellas; e nas quaes $Q^{(m)}$ é funcção de t.

Se neste caso se suppozerem $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, . . . expressas em funcções de t e das ni constantes arbitrarias; depois desenvolvidas pela formula (9) da pag. (6) em ordem ás potencias e productos das mesmas arbitrarias; e finalmente substituidas nas equações propostas: é evidente que, devendo aquellas equações ter logar quaesquer que sejão as arbitrarias, devem reduzir-se separadamente a zero as collecções de termos da mesma ordem relativamente ás potencias e productos destas.

Mas, por serem as propostas lineares, os seus termos do primeiro gráo em ordem ás arbitrarias só podem provir dos do primeiro gráo de $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, . . . : logo os termos lineares de $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, . . . satisfazem separadamente ás propostas; e são integraes completos dellas, por conterem as ni arbitrarias.

Serão pois lineares em ordem ás arbitrarias as n variaveis $y^{(1)}$, $y^{(2)}$,... e suas n $(i-1)$ differenças até a ordem $i-1$: d'onde resulta que, se das ni equações, que as exprimem, se tirarem os valores (4) das arbitrarias, estes valores seráõ funcções lineares de $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... e suas differenças até a ordem $i-1$ (*Franc.* n.° 111.).

Assim $F^{(m)}_{(p)}$ é só funcção de t; e como $Q^{(m)}$ tambem o é, vê-se que a classe de equações, que consideramos, é integravel pela formula (5).

Quando $F^{(m)}_{(p)}$ $Q^{(m)}$ não fôr funcção de t; se α fôr um pequeno coefficiente, ainda se podem integrar por approximação as propostas (1), considerando as equações (4) como primeira approximação dos seus integraes, deduzindo dellas as expressões de $y^{(1)}$, $y^{(2)}$,... $y^{(n)}$ em funcção de t, substituindo estas expressões em $\Sigma F^{(m)}_{(p)}$ $Q^{(m)}$ que ficará sendo funcção de t, e integrando $dt\ \Sigma F^{(m)}_{(p)} Q^{(m)}$. Virão assim os integraes (5) mais approximados do que (4); e repetindo o mesmo processo a respeito destes novos integraes, exprimir-se-hão em serie os das propostas.

As equações (5) mostrão que podemos considerar (4) como integraes das propostas (1), com tanto que em logar das arbitrarias constantes se introduzão outras variaveis, sendo as suas variações sujeitas ás condições (5).

Por onde se vê que, sendo as equações (4) da ordem $i-1$, e resultando tanto os integraes finitos, como os d'outra qualquer ordem, da combinação das mesmas equações, podemos differenciar $i-1$ vezes os integraes finitos, tendo sómente em conta nesta differenciação os termos provenientes da variação das arbitrarias; por que os outros sendo os mesmos, quer se attenda, quer se não attenda, áquella variação, reduzem-se separadamente a zero. Podemos tambem differenciar as equações da ordem $i-1$, substituindo as expressões das differenciaes da ordem i tiradas de (1); sem attender aos termos que provirião da differenciação relativa a coefficientes $\frac{d^{i-1} y^{(m)}}{dt^{i-1}}$ inferiores á ordem $i-1$, nem aos provenientes da substituição das differenciaes da ordem i tiradas de (2); por que, satisfazendo as equações da ordem $i-1$ a (2), estes termos se devem anniquilar separadamente. Resultaráõ assim equações de condição entre as mesmas arbitrarias que serviráõ para as determinar.

Tal é a base do methodo chamado da variação dos parametros que, sendo applicado e modificado segundo á fórma das equações que se querião integrar, foi para Laplace e Lagrange um dos principaes instrumentos com que chegarão a calcular as perturbações dos movimentos planetarios (Mec. Cel. nn. 45 e 63 e seguintes).

Tomemos para exemplo a equação (*a*).

Differenciando (*b*) em ordem a v, teremos as duas equações

$$u = c' \operatorname{sen} v + c'' \cos v\,;$$

$$\frac{du}{dv} = c' \cos v - c'' \operatorname{sen} v.$$

Applicando a ellas o que acabamos de expôr, resultão as equações de condição

$$o = \operatorname{sen} v\, dc' + \cos v\, dc'',$$

$$\frac{\mu}{h^2} \cdot \frac{dv}{\left\{1 + \gamma^2 \operatorname{sen}^2 (v - \theta)\right\}^{\frac{3}{2}}} = \cos v\, dc' - \operatorname{sen} v\, dc''\,;$$

que, pela eliminação de dc'' e dc', dão

$$dc' = \frac{\mu}{h^2} \cdot \frac{\cos v\, dv}{\left\{1 + \gamma^2 \operatorname{sen}^2 (v - \theta)\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$dc'' = -\frac{\mu}{h^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} v\, dv}{\left\{1 + \gamma^2 \operatorname{sen}^2 (v - \theta)\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Integrando (pag. 29), e substituindo os integraes por c' e c'' na equação (*b*), resulta em fim o integral da proposta (pag. 30).

EQUAÇÕES DIFFERENCIAES PARCIAES

I. *Equações lineares da 1.ª ordem* (*Franc.* n.° 903.)

Seja

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \dfrac{dz}{dx_1} + P_2 \dfrac{dz}{dx_2} \ldots\ldots\ldots + P_n \dfrac{dz}{dx_n} = V, \\ \text{ou} \qquad \Sigma_1^n P_k \dfrac{dz}{dx_k} = V \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

a equação linear de primeira ordem entre n variaveis independentes; na qual $x_1, x_2, \ldots x_n$ designão estas variaveis, e $P_1, P_2, \ldots P_n$, os coefficientes, que pódem ser funcções dellas e de z.

Formando n equações da fórma

$$\text{ou} \qquad \left.\begin{array}{l} P_k\, dx_l - P_l\, dx_k = 0 \\ P_k\, dz - V dx_k = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

e procurando n equações finitas

$$A^{(1)} = c^{(1)},\ A^{(2)} = c^{(2)} \ldots\ldots A^{(n)} = c^{(n)} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

que satisfação a (2), o integral da proposta (1) será

$$A^{(1)} = \varphi\left(A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots\ldots A^{(n)}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

sendo φ uma funcção arbitraria. É o que passamos a mostrar, raciocinando de um modo analogo ao do n.° 903 do texto.

Se differenciarmos a equação (4) separadamente em ordem ás n variaveis independentes $x_1, x_2, \ldots x_n$, teremos n equações, nas quaes entrão os $n - 1$ coefficientes differenciaes $\frac{d\varphi}{dA^{(2)}}, \frac{d\varphi}{dA^{(3)}}, \ldots \frac{d\varphi}{dA^{(n)}}$; e eliminando entre ellas estes coefficientes, resultará uma equação de primeira ordem, sem funcção arbitraria, que se deve comparar com a proposta para determinar a forma das funcções $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... $A^{(n)}$, de modo que estas duas equações sejão identicas; isto é, de modo que a equação (4) seja integral da proposta.

Sejão

$$\left.\begin{array}{l} dA^{(1)} = a^{(1)}_1\, dx_1 + a^{(1)}_2\, dx_2 + \dots\, a^{(1)}_n\, dx_n + a^{(1)}\, dz \\ dA^{(2)} = a^{(2)}_1\, dx_1 + a^{(2)}_2\, dx_2 + \dots\, a^{(2)}_n\, dx_n + a^{(2)}\, dz \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dA^{(n)} = a^{(n)}_1\, dx_1 + a^{(n)}_2\, dx_2 + \dots\, a^{(n)}_n\, dx_n + a^{(n)}\, dz \end{array}\right\} \dots (5).$$

Differenciando (4) em ordem a x_i, resulta

$$\frac{dA_{(1)}}{dx_1} - S^{(n)}_{(2)} \frac{d\varphi}{dA_{(i)}} \cdot \frac{dA^{(i)}}{dx_1} = 0 \dots\dots\dots\dots (6);$$

onde escrevemos S para designar sommas relativas ás funcções $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, .. $A^{(n)}$, do mesmo modo que Σ designa sommas relativas ás variaveis x_1, x_2, ... x_n.

Em virtude das equações (5), que dão

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dA^{(1)}}{dx_1} = a^{(1)}_1 + a^{(1)} \dfrac{dz}{dx_1} \\ \dfrac{dA^{(2)}}{dx_1} = a^{(2)}_1 + a^{(2)} \dfrac{dz}{dx_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dA^{(n)}}{dx_1} = a^{(n)}_1 + a^{(n)} \dfrac{dz}{dx_1} \end{array}\right\},$$

a equação (6) reduz-se a

$$a^{(1)}_1 - S^{(n)}_{(2)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}_1 + \frac{dz}{dx_1} \left\{ a^{(1)} - S^{(n)}_{(2)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)} \right\} = 0;$$

da qual

$$\frac{dz}{dx_1} = -\frac{a_1^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_1^{(i)}}{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}},$$

e semelhantemente

$$\frac{dz}{dx_2} = -\frac{a_2^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_2^{(i)}}{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}},$$

....

$$\frac{dz}{dx_n} = -\frac{a_n^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_n^{(i)}}{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}}.$$

Substituindo estas expressões de $\frac{dz}{dx_1}$, $\frac{dz}{dx_2}$ .... $\frac{dz}{dx_n}$ na proposta (1), e attendendo a que, em virtude da independencia dos simbolos Σ e S, é $\Sigma S = S\Sigma$, resulta

$$\Sigma_1^n\, a_k^{(1)} P_k + a^{(1)} V = S_{(2)}^{(n)} \left\{ \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \left(\Sigma_1^n a_k^{(i)} P_k + a^{(i)} V \right) \right\} \ldots\ldots (7);$$

equação que se deve reduzir a uma identidade, para que (4) satisfaça sempre á proposta (1).

Ora, se as funcções $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... $A^{(n)}$, forem taes que as equações (3) satisfação a (2), a substituição de $dx_k = P_k \frac{dz}{V}$, tirado da segunda de (2), em $dA^{(1)} = 0$, $dA^{(2)} = 0$, ... $dA^{(n)} = 0$, dará, supprimindo o factor commum $\frac{dz}{V}$, as equações

$$\Sigma_1^n P_k\, a_k^{(1)} + a^{(1)} V = 0,\ \Sigma_1^n P_k\, a_k^{(2)} + a^{(2)} V = 0, \ldots\ \Sigma_1^n P_k\, a_k^{(n)} + a^{(n)} V = 0,$$

que reduzem (7) a ~~um~~ uma identidade. Logo, se $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ ..... $A^{(n)}$, se determinarem de modo que as equações (3) satisfação a (2), será (4) o integral da proposta (1).

Seja, por exemplo, a equação

$$o = x\left(\frac{du'}{dx'}\right) + y\left(\frac{du'}{dy'}\right) + z\left(\frac{du'}{dz'}\right),$$

onde x, y, z, x', y', z' são as seis variaveis independentes. Formaremos as seis equações (2)

$$xdu' = o\,,\ xdy = o,\ xdz = o,\ xdx = o,\ xdz' - zdx' = o,\ xdy' - ydx' = o\ ;$$

das quaes tambem se tiraria a septima $zdy' - ydz' = o$.

Integrando depois as seis equações, teremos

$$u' = c\,,\ y = c',\ z = c'',\ x = c''',\ c'''z' - c''\ x' = c^{IV},\ c'''\ y' - c'\ x' = c^{V};$$

o que dá os seis integraes

$$u' = c\,,\ y = c',\ z = c'',\ x = c''';\ xz' - zx' = c^{IV},\ xy' - yx' = c^{V};$$

e por conseguinte o da proposta

$$u' = \varphi\,(xy' - yx'\,,\ xz' - zx'\,,\ x\,,\ y\,,\ z).$$

Se nos tivessemos servido da septima em logar da quinta ou da sexta, achariamos uma das duas expressões

$$u' = \varphi\,(xy' - yx',\ zy' - yz',\ x\,,\ y\,,\ z),$$

$$u' = \varphi\,(xz' - zx'\,,\ yz' - zy',\ x\,,\ y\,,\ z)\,;$$

por onde se vê que a fórma mais geral que se póde dar ao integral é (Mech. Cel. Liv. 2.° n.° 18)

$$u' = \varphi\,(xy' - yx'\,,\ xz' - zx'\,,\ yz' - zy',\ x\,,\ y,\ z).$$

Deve porém entender-se que este integral só é mais geral em quanto á fórma; porque debaixo de φ ha sómente cinco combinações arbitrarias, não sendo distinctas todas as seis funcções que nella entrão.

Com effeito sejam

$$xy'-yx'=a\ ,\ xz'-zx'=b.$$

Eliminando x', vem

$$zy'-yz'=\frac{az-by}{x}$$

ou

$$zy'-yz'=\frac{z}{x}(xy'-yx')-\frac{y}{x}(xz'-zx');$$

donde resulta, que φ vem tamsómente a ser funcção de

$$x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ xy'-yx'\ ,\ xz'-zx',$$

por ser tambem $zy'-yz'$ funcção destas quantidades. O mesmo diriamos de qualquer das outras combinações que entrão em φ.

A mesma observação se deve fazer em outros casos, em que apparentemente figura como menos geral o integral, que resulta do processo exposto. Se apparecem debaixo da funcção arbitraria mais funcções do que o numero das variaveis independentes menos uma, é por ser alguma dessas quantidades funcção das outras. Nem outra cousa podia acontecer; porque, se taes combinações fossem distinctas, as equações resultantes da differenciação do integral em ordem a todas as variaveis independentes não darião, como devem dar, pela eliminação dos coefficientes differenciaes, uma equação final independente destes coefficientes.

Sejão

$$\frac{dx}{d\alpha}=z\frac{dx}{dt},\ \frac{dx_1}{d\alpha_1}=z_1\frac{dx_1}{dt_1},\ \ldots\ldots\ \frac{dx_n}{d\alpha_n}=z_n\frac{dx_n}{dt_n}\ \ldots\ldots\ldots\ (a),$$

onde z, z_1, ... z_n, são funcções de x, x_1, ... x_n, e estas ultimas são funcções de α, α_1 .... α_n, t, t_1 .... t_n.

Considerando x_1, x_2, ... x_n, como expressos em α, α_1, ... α_n, t, t_1, ... t_n, as equaçoes (2) dão, para a primeira de (a),

$$dx=0\ ,\ dt+zd\alpha=0\ ,\ d\alpha_1=0\ ,\ dt_1=0\ ,\ \ldots\ d\alpha_n=0\ ,\ dt_n=0\ \ldots\ (b).$$

e semelhantemente, para as outras,

$$\left.\begin{array}{l} dx_1=0,\ dt_1+z_1 d\alpha_1=0,\ d\alpha=0, dt=0, d\alpha_2=0,\ dt_2=0, \ldots\ldots \\ dx_2=0,\ dt_2+z_2 d\alpha_2=0, d\alpha=0, dt=0, d\alpha_1=0,\ dt_1=0, d\alpha_3=0,\ dt_3=0,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n=0,\ dt_n+z_n d\alpha_n=0,\ d\alpha=0, dt=0, \ldots d\alpha_{n-1}=0,\ dt_{n-1}=0 \end{array}\right\}(c).$$

Como os systemas (b) e (c) dão

$$x=\text{const},\ x_1=\text{const},\ x_2=\text{const},\ \ldots;$$

prevê-se que se póde integrar a 2.ª de (b) suppondo z constante, e x_1, x_2, ... x_n d'uma fórma semelhante á de x, sem α nem t explicitos. O que dará para integral de (b)

$$x=\varphi(t+\alpha z,\ \alpha_1,\ t_1,\ \alpha_2,\ t_2,\ \ldots\ldots) \ldots\ldots\ldots\ldots (d),$$

suppondo

$$x_i=\varphi_i(t_i+\alpha_i z_i,\ \alpha_1,\ t_1,\ \ldots\ \alpha_{i-1},\ t_{i-1},\ \alpha_{i+1},\ t_{i+1}\ \ldots) \ldots (d_i).$$

Com effeito dando ás expressões de x_1, x_2, ... x_n, a fórma (d_i), e substituindo-as nas de z, z_1, z_2, ... z_n, que são funcções dellas, teremos $n+1$ equações entre

$$z,\ z_1,\ \ldots\ z_n,\ x,\ \alpha_1,\ t_1,\ \ldots\ \alpha_n,\ t_n,$$

por meio das quaes eliminando as n quantidades z_1, z_2, ... z_n, virá uma expressão de z da fórma

$$z=f(x,\ \alpha_1,\ t_1,\ \alpha_2,\ t_2,\ \ldots\ \alpha_n,\ t_n);$$

e como em (b) se suppõe constantes todas as quantidades que entrão em f, tambem z se deve suppôr tal. (*)

É o que tambem resulta da equação final da pag. 3, que tem ainda logar.

(*) Depois de já impresso este opusculo, achamos que a demonstração primeiramente empregada nesta pagina ficava incompleta, por não serem distinctas duas equações que nella entravão, faltando verificar a segunda condição, o que é facil; mas como a presente é mais clara e simples, substituimol-a á outra, que por isso não completamos.

Terá pois logar o integral (d), com tanto que se supponhão x_1, x_2, ... x_n, da fórma (d_i), sem α nem t explicitos.

Pela mesma razão o integral da 2.ª de (a) terá uma fórma semelhante, com tanto que a tenhão x, x_2, ... x_n, sem α_1 nem t_1 explicitos. E assim successivamente até o da ultima, que terá a mesma fórma, com tanto que a tenhão x, x_1, ... x_{n-1}, sem α_n nem t_n explicitos.

A existencia de cada integral exclue pois dos outros os α_i e t_i explicitos correspondentes ao indice delle. Donde resulta que os integraes simultaneos de (a) serão da fórma (d_i), sem α, t, α_1, t_1, ... α_n, t_n, explicitos a $t_i + \alpha_i z_i$, isto é, da fórma

$$x_i = \varphi_i(t_i + \alpha_i z_i).$$

Chegamos assim ao mesmo resultado a que pelo methodo inverso haviamos chegado na pag. 4; mas aqui vê-se melhor o gráo de generalidade de que é susceptivel a fórma de cada um dos integraes de (a) considerado separadamente dos outros, e as modificações que nessa fórma introduz a simultaneidade dos mesmos integraes.

Equações não lineares de 1.ª ordem.

A integração das equações não lineares da 1.ª ordem póde reduzir-se á daquellas, de que acabamos de tratar, pelo processo seguinte.

Seja $$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

uma equação não linear da 1.ª ordem.

Resolvendo-a em ordem a um dos coefficientes differenciaes p ou q, virá

$$q = f(x, y, z, p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Por serem p e q funcções de x, y, z, e z funcção de x, y, é

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)p, \frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dy} = \left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)q;$$

d'onde resulta, differenciando (1) em ordem a x,

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)+\left(\frac{dp}{dz}\right)q=\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)p+\left(\frac{df}{dp}\right)\left\{\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dp}{dz}\right)p\right\},$$

ou

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)-\left(\frac{dp}{dy}\right)+\left\{p\left(\frac{df}{dp}\right)-q\right\}\left(\frac{dp}{dz}\right)=-\left(\frac{df}{dx}\right)-p\left(\frac{df}{dz}\right)\ldots(2).$$

Esta ultima equação ficará linear da 1.ª ordem, quando nella se substituir a expressão (1) de q, e se considerar p como funcção das variaveis principaes x, y, z; e o seu integral será, como fica ensinado,

$$A=\varphi\,(B, C)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Como porém as variaveis x, y, z, estão ligadas pela relação

$$dz=pdx+qdy\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

será necessario sujeitar (3) a esta equação de condição, de modo que torne differencial exacto o 2.° membro della. E o que vamos fazer; prevendo já que o calculo deve conduzir a uma relação F (A, B, C)=o entre A, B, C, para que não entre senão uma expressão distincta debaixo da funcção arbitraria, como se advertio na pag. 40.

Sendo A, B, C, funcções de x, y, z, p, exprimir-se-hão por meio dellas tres destas ultimas variaveis em funcção da 4.ª e de A, B, C. Exprimindo assim x, y, z, e substituindo em (4), resultará

$$GdA+HdB+KdC+Ldp=o\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

que se deve combinar com o integral (3).

Para isto differenciemos (3): virá

$$dA=\left(\frac{d\varphi}{dB}\right)dB+\left(\frac{d\varphi}{dC}\right)dC,$$

e (5) se tornará em

$$\left\{G\left(\frac{d\varphi}{dB}\right)+H\right\}dB+\left\{G\left(\frac{d}{dC}\right)+K\right\}dC+Ldp=o,$$

cujo integral tem a fórma $C = \psi(B, p)$; sendo ψ uma funcção arbitraria, por que φ o é.

Substituindo em (5) esta expressão de C, resulta

$$GdA + \left\{K\left(\frac{d\psi}{dB}\right) + H\right\}dB + \left\{K\left(\frac{d\psi}{dp}\right) + L\right\}dp = 0,$$

cuja integração dá $A = \pi(B, p)$, sendo π dependente de ψ.

As funcções π e ψ determinar-se-hão pelas integrações indicadas, ou substituindo

$$C = \psi(B, p),\ A = \pi(B, p) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

em (5), a qual mostrará a ligação de ψ com π.

Desta substituição resulta

$$G\left(\frac{d\pi}{dB}\right)dB + G\left(\frac{d\pi}{dp}\right)dp + K\left(\frac{d\psi}{dB}\right)dB + K\left(\frac{d\psi}{dp}\right)dp + HdB + Ldp = 0.$$

Ora, devendo o calculo exposto conduzír a uma relação entre A, B, C, como já notamos, deve o p, que está fóra destas funcções, desapparecer dos resultados, o que reduz as equações precedentes a

$$C = \psi(B),\ A = \pi(B),\ G\left(\frac{d\pi}{dB}\right) + K\left(\frac{d\psi}{dB}\right) + H = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

As equações (7) resolvem o problema de que se trata. A ultima estabelece a relação entre as funcções arbitrarias ψ e π, e as duas primeiras dão, pela eliminação de p, o integral da proposta (1). Esta solução é a que se acha na Lição 20 do *Calculo das Funcções*; mas appresentou-se aqui de um modo, que nos parece evitar algumas difficuldades que lá se encontrão.

Para exemplo tomemos a proposta

$$p^2 + q - y = 0, \text{ que dá } \ldots\ q = y - p^2.$$

Formando a equação (2), e integrando, acha-se

$$B = p,\ A = -2py + x,\ C = -2pz + p^2x + xy - \frac{x^2}{4p}.$$

As duas primeiras equações (7) serão pois

$$-2pz+p^2x+xy-\frac{x^2}{4p}=\psi(p),\ -2py+x=\pi(p).$$

Exprimindo p, x, z em funcção de A, B, C; e substituindo em (4) acha-se (5)

$$\left\{2BC+2B^3A+A^2\right\}dB-\left\{2B^4+AB\right\}dA-2B^2dC=0,$$

independente de x, y, z, p, como tinhamos dito.

Substituindo depois nesta ultima equação as expressões (6), resultaria a 3.ª das equações (7), que daria a relação entre ψ e π; e a eliminação de p entre as expressões achadas de $\psi(p)$ e $\pi(p)$ daria o integral da proposta.

Mas como se não póde effectuar esta eliminação, em quanto ψ e π não tiverem uma fórma determinada; o uso, que podemos fazer da solução achada, é dar a uma destas funcções uma fórma qualquer, achar a fórma correspondente da outra por meio da 3.ª equação (7), e eliminar depois p entre as expressões de $\psi(p)$ e $\pi(p)$.

Tomemos, por exemplo, $\psi(p)=-2p^3$. Então $\pi(p)=p$ satisfará á 3.ª equação (7); e as duas equações, das quaes pela eliminação de p resulta o integral, serão neste caso

$$-2pz+p^2x+xy-\frac{x^2}{4p}=p,\ -2py+x=-2p^3.$$

Para verificar com facilidade a exactidão destas equações, bastará substituir na differencial da 1.ª dellas os valores de x e y, dados em funcção de p e q pela 2.ª e pela proposta; porque o resultado concidirá com o que provém da substituição dos mesmos valores na equação (4).

Dando a ψ outra qualquer fórma, achariamos outras duas equações entre x, y, z, p, que satisfarião á proposta. Assim o systema (7) representa o integral da proposta, á qual satisfaz com uma só funcção arbitraria; ou, para melhor dizer, representa todos os integraes correspondentes aos valores dados á funcção arbitraria.

III. *Equações lineares de 2.ª ordem* (*Franc.* n.º 913).

Seja

$$Rr+Ss+Tt=V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

a equação linear da segunda ordem.

A segunda das equações de definição

$$dp = rdx + sdy\,,\; dq = sdx + tdy\,,$$

dá

$$t = \frac{dq}{dy} - \frac{sdx}{dy}\,;$$

o que substituido em (1) a reduz a

$$Rr + \left(S - T\frac{dx}{dy}\right)s = V - T\frac{dq}{dy}\,,$$

ou

$$R\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(S - T\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) = V - T\frac{dq}{dy} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

A equação (2), com a primeira da definição

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy,$$

está no caso das lineares da 1.ª ordem, em que é p a variavel dependente, e x e y as principaes: por isso applicando-lhe o que se disse na integração das equações desta ordem, teremos

$$Rdy - \left(S - T\frac{dx}{dy}\right)dx = 0,\; R\,dp - \left(V - T\frac{dq}{dy}\right)dx = 0,$$

ou

$$Rdy^2 + Tdx^2 = Sdydx\,,\; Rdpdy + Tdqdx = Vdydx \ldots\ldots (3)\,;$$

cujos integraes $c = A$, $c' = B$, dão o da 1.ª ordem da proposta

$$A = \varphi\,(B).$$

A applicação da regra, que serve para integrar as equações da 1.ª ordem, á transformada (2) suppõe que R, S, T, V, q, são funcções de x e y, ou que z é funcção das mesmas quantidades. Esta condição é expressa pela eqnação

$$dz = pdx + qdy\,,$$

a qual por isso se deve ajuntar ás equações (3), quando se trata de obter os seus integraes.

Ainda que a demonstração deste methodo exposta no texto seja rigorosa, não nos parece inutil a precedente por sua simplicidade.

SUPPLEMENTO

Para facilitar a intelligencia de alguns logares deste opusculo, accrescentamos o seguinte:

Pag. 5, linha 5

Accrescente-se no fim da linha ; ou $\dfrac{d\left(z^2{}_k \dfrac{du}{dt_k}\right)}{dt_k}$.

Pag. 19, linha 11.

Depois de $< (1+p^2)(1+q^2)$ accrescente-se (Franc. n.° 139, 9.°).

Pag. 24, nota

A propriedade de ser a distancia a qualquer ponto da curva uma funcção linear da abscissa, contada do centro, ou do vertice, sobre o eixo maior, pertence exclusivamente ao fóco (Franc. 2.ª ed. nu. 393, 397, 401). E mais geralmente a propriedade de ser aquella distancia funcção linear dos coordenadas.

Com effeito comparando as duas expressões de r^2, que devem ser identicas,

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2$$

$$=(Ax+By+C)^2 = A^2x^2+B^2y^2+2ACx+2BCy+C^2+2ABxy,$$

vem $B=0$, ou $A=0$. Se $B=0$, acha-se $A=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$, substituindo $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$. Se $A=0$, acha-se $B=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$ imaginario, substituindo $x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$. Logo $B=0$. Depois $\beta=0$, $C=a$, $\alpha=\sqrt{a^2-b^2}$: por conseguinte o ponto (α, β) é o foco.

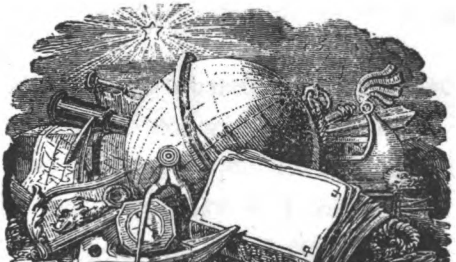
ERRATAS

Pag.	*linh.*	*Erros*	*Emendas*
6	14	$=\frac{d^{p_1-1}\left(\frac{du'}{d\alpha_1}\right)}{dt^{p_1-1}}$	$=\frac{d^{p_1}u'}{d\alpha_1{}^{p_1}}=\frac{d^{p-1}\left(\frac{d\left(\frac{d^{p_1}u}{d\alpha_1{}^{p_1}}\right)}{d\alpha}\right)}{dt^{p-1}}$
10	14	$3\mathrm{sen}\,P\,\mathrm{sen}^2P$	$3\,\mathrm{sen}P\cos^2P$
12	25	$f''+\psi'(f'\psi''-\psi'f'')$	$f''-\psi'(f'\psi''-\psi'f'')$
13	10	$\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)$	$\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2$
22	2	n.° 749	n.° 892
43	24	$G\left(\frac{d}{dC}\right)$	$G\left(\frac{d\varphi}{dC}\right)$
45	16	$\psi(p)=-2p^3,\ \pi(p)=p$	$\pi(p)=-2p^3,\ \psi(p)=p$
»	24	Dando a ψ	Dando a π

DAS

REFRACÇÕES

ATMOSPHERICAS.



LISBOA

NA IMPRENSA NACIONAL.

1850.

Para a Universidade de [illegible]
offerece o Auctor

ADVERTENCIA.

Neste escripto, que é a primeira parte d'um trabalho relativo ás refracções atmospherícas, acha-se sómente a theoria das refracções astronomicas no caso mais simples, e usual, de não serem muito grandes as distancias zenithaes.

Pouco mais fiz, nesta parte, do que aproveitar e coordenar o que tenho colligido das obras de Laplace e Mr. Biot: mas parece-me que não será inutil esse trabalho; principalmente para as pessoas que, desejando lêr uma exposição elementar e concisa da theoria das refracções astronomicas, não possuirem a *Geodesia* de Puissant, ou a *Astronomia* do Sr. F. Folque, nas quaes a podem achar com aquellas qualidades.

Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto.

ERRATA.

Pagina	*Linha*	*Erro*	*Emenda*
9	11	N′ até O	O até N′
22	17	os principaes	a parte principal
5	7	mais..menos	menos..mais

REFRACÇÕES ATMOSPHERICAS.

I

NOÇÕES PRELIMINARES.

1. QUANDO um raio luminoso passa d'um meio para outro, inflecte-se, aproximando-se, ou afastando-se, da normal *á superficie* commum, conforme as naturezas destes meios, e conforme é a passagem do meio mais denso para o menos denso, ou inversamente. Os angulos feitos pelo raio primitivo, e pelo inflectido, com a normal chamam-se respectivamente de *incidencia*, e de *refracção*.

A experiencia mostra que nos meios não crystallizados a razão dos senos do angulo de incidencia e do de refracção é constante para dados meios; e que a inflexão se faz no plano, que contém a normal e o raio incidente: phenomeno, que se póde explicar pela attracção do meio para o raio luminoso, suppondo que a sua acção é sensivel tão sómente a muito pequenas distancias; como vamos mostrar.

2. Seja (fig. 1.ª) (V) o vacuo; e (M) um meio uniforme, que o raio luminoso atravessa, tomando n'elle a direcção ID′ mais proxima da normal IN que a primitiva LI. Como o raio é attrahido pelo meio (M), sendo esta attracção sensivel tão sómente a pequenissimas distancias, segue-se que junto da superficie de separação GH a acção é symmetrica em todos os sentidos, e a direcção da resultante é perpendicular a GH. Chamando pois φ' esta resultante, r a distancia do

raio a GH, u a velocidade no vacuo, e u' a velocidade no meio refrangente, temos pelos principios da mechanica

$$u'^2 = u^2 - 2\int \varphi' \, dr,$$

sendo dr a diminuição differencial de r.

Se o raio passar para outro meio uniforme, separado do primeiro por outra superficie; e chamarmos φ'' a attracção deste segundo meio; será $\varphi'' - \varphi'$ a acção que effectivamente modifica nelle o movimento do raio; e teremos, entre os mesmos limites,

$$u''^2 = u'^2 - 2\int (\varphi'' - \varphi') \, dr;$$

ou, em virtude da precedente,

$$u''^2 = u^2 - 2\int \varphi'' \, dr.$$

E geralmente para qualquer numero n de meios uniformes, separados por superficies, cujos elementos em torno dos pontos d'incidencia se confundem com os planos tangentes, teremos

$$u'^2 = u^2 - 2\int \varphi' \, dr, \quad u''^2 = u'^2 - 2\int (\varphi'' - \varphi') \, dr,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u^{(n)^2} = u^{(n-1)^2} - 2\int (\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)}) \, dr,$$

cuja somma é

$$u^{(n)^2} = u^2 - 2\int \varphi^{(n)} \, dr.$$

Por onde se vê que a velocidade do raio no ultimo meio, depois de ter passado pelos outros, é a mesma que teria se passasse immediatamente do vacuo para aquelle meio.

3. Façamos $-2\int \varphi \, dr = P\rho$; sendo ρ a densidade do meio, e P uma quantidade dependente da sua natureza; e chamemos 1 a velocidade no vacuo, e u a velocidade no meio refrangente: teremos

$$u^2 = 1 + P\rho \ldots\ldots (1).$$

Seja $K \varrho$ o integral $-\int \varphi\, d\, r$ tomado desde $r = \infty$ até $r = o$; o qual será o mesmo que se fosse tomado desde $r =$ dist. finita até $r = o$. Desde que o raio entra no meio refrangente; por ser a acção da parte que elle tem atravessado destruida pela d'outra parte egual que ainda hade atravessar, a velocidade torna-se uniforme logo que a distancia á superficie é sensivel; e o raio fica nas mesmas circumstancias que se passasse successivamente no vacuo por distancias eguaes, em ordem inversa, áquellas pelas quaes passára antes de atravessar o meio: e como $d\, r$ toma signal contrario ao que antes tinha; resulta destas duas considerações que o integral total $-\int \varphi\, d\, r$, tomado desde a distancia finita anterior á entrada até a posterior, é $2 K \varrho$; o que dá

$$P \varrho = 4 K \varrho.$$

4. Quando o raio LI entra no meio (M), a componente da sua velocidade parallela a GH não é alterada pela acção normal do meio; logo, chamando θ e θ' os angulos feitos pelo raio incidente, e pelo refractado, com a normal, as componentes parallelas a GH das velocidades 1 e u darão

$$sen\, \theta = u\, sen\, \theta' \ldots\ldots \quad (2).$$

Se as superficies de separação de qualquer numero n de meios forem planas e parallelas, teremos

$$sen\, \theta = u\, sen\, \theta', \;\; u\, sen\, \theta' = u'\, sen\, \theta'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u^{(n-2)}\, sen\, \theta^{(n-1)} = u^{(n-1)}\, sen\, \theta^{(n)},$$

que dão

$$sen\, \theta = u^{(n-1)}\, sen\, \theta^{(n)};$$

e por conseguinte a direcção do raio luminoso no ultimo meio será parallela á que teria neste meio se passasse immediatamente do vacuo para elle. Mas se as superficies de separação não forem parallelas, as direcções finaes dos raios dependerão da mutua inclinação das mesmas superficies.

As equações (1) e (2) mostram que a velocidade é independente da direcção primitiva do raio; e que a razão $\frac{\text{sen}\,\mathfrak{C}}{\text{sen}\,\mathfrak{C}'}$ é constante para cada meio: o que é a lei citada no n.º (1).

5. Postos estes principios, seja (fig. 2.ª) TT′ a camada atmospherica que passa pelo observador O, e VV′ a camada extrema. Entre os raios luminosos, que partem do ponto S, ha dous, SO e SN′, dos quaes o primeiro, dirigido ao observador, o não encontra, por ser inflectido pela atmosphera, onde entra em N; e o outro, dirigido a H, se inflecte desde N′ até O, chegando ao observador pela direcção OS′. Então $SOZ = z$ é a *distancia zenithal verdadeira*, $S'OZ = z'$ a *distancia zenithal apparente*; e $S'OS = \theta$ a *refracção atmospherica*.

Quando o objecto S é exterior á atmosphera, costuma a refracção chamar-se *astronomica;* quando o objecto é terrestre, costuma a refracção chamar-se *terrestre:* denominações, que adoptaremos sem discutir a sua propriedade.

II

DA REFRACÇÃO ASTRONOMICA.

6. Qualquer que seja a lei segundo a qual varia a densidade e composição das camadas atmosphericas consecutivas, admitte-se que esta variação se faz gradualmente por mudanças insensiveis; e por isso a trajectoria N′mO descripta pelo raio luminoso desde N′ até O, em virtude das acções centraes daquellas camadas, é uma curva. *

* Segundo os principios expostos o plano da trajectoria será o vertical Z O S, com tanto que na proximidade de cada um dos seus pontos o estado das camadas seja uniforme. E ainda que supposmos as camadas esphericas, podemos attender á sua verdadeira figura, referindo o que dissemos na hypothese da esphericidade ás espheras concentricas á osculatriz no logar do observador.

Por ser HSO um angulo muito pequeno para todos os astros conhecidos (Biot, Astr. vol. I, pag. 306), póde o angulo ZOS tomar-se como egual a ZHS; e por isso a refracção astronomica é $ZOS - ZOS' = \theta = ZHS - z'$. Mas chamando v e ω os angulos formados em qualquer ponto m da trajectoria pelo raio vector Cm com a vertical CZ do observador, e com a tangente mK, é $mKZ = v + \omega$; e ZHS, z', são os valores de mKZ em N' e O: logo

$$\theta = \int (dv + d\omega) \ldots\ldots (3),$$

sendo o integral tomado desde N' até O.

7. Sabe-se que nas trajectorias descriptas em virtude de uma força central o producto da velocidade pela perpendicular á tangente é constante. Chamando pois u, u', as velocidades nos pontos O, m; z', ω, os angulos feitos pelas tangentes nesses pontos com os raios vectores; e a, r, estes raios: as perpendiculares abaixadas sobre as tangentes serão $r \operatorname{sen} \omega$, $a \operatorname{sen} z'$; e teremos $u' . r \operatorname{sen} \omega = u . a \operatorname{sen} z'$, ou, em virtude da equação (1),

$$\operatorname{sen} \omega = \frac{a\sqrt{1 + P(\varrho)}}{r\sqrt{1 + P\varrho}} \operatorname{sen} z' \ldots\ldots (4),$$

sendo (ϱ) e ϱ as densidades das camadas atmosphericas em O e m.

A equação (4) exprime que são centraes as forças refractivas em todos os pontos da trajectoria: e para exprimir a continuidade d'estes pontos temos a equação differencial, que convém a todas as curvas,

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{r\,dv}{dr} \ldots\ldots (5).$$

Assim a combinação das equações (3), (4), (5), deve dar a refracção.

8. Tomando os logarithmos de (4), depois differenciando, e attendendo a (5), vem

$$d\omega = -\frac{2(1+P\varrho)+Pr\frac{d\varrho}{dr}}{2(1+P\varrho)}\,dv;$$

logo

$$d\omega + dv = d\theta = -\frac{Pr\frac{d\varrho}{dr}}{2(1+P\varrho)}\,dv \ldots\ldots (a).$$

E porque, em virtude de (5) e (4), é

$$\frac{r\,dv}{dr} = \frac{a\sqrt{1+P(\varrho)}\,.\,sen\,z'}{r\sqrt{1+P\varrho-\frac{a^2}{r^2}sen^2 z'(1+P(\varrho))}} \ldots\ldots (b),$$

resulta

$$d\theta = -\frac{aP\sqrt{1+P(\varrho)}\,sen\,z'\,d\varrho}{2r(1+P\varrho)\sqrt{1+P\varrho-\frac{a^2}{r^2}(1+P(\varrho))\,sen^2 z'}} \ldots (6),$$

equação differencial da refracção.

Primeira approximação.

9. Ainda que para integrar completamente a equação (6) seria necessario exprimir ϱ em funcção de r; com tudo, desenvolvendo o segundo membro em serie, acha-se que o integral dos seus termos principaes é independente d'aquella expressão, nas refracções astronomicas; e por isso começaremos por este desenvolvimento.

Fazendo

$$\frac{P(\varrho)}{2(1+P(\varrho))} = \alpha,\ \frac{a}{r} = 1 - s,$$

a expressão (6) transforma-se em

$$d\theta = -\frac{\alpha(1-s)\frac{d\varrho}{(\varrho)}\operatorname{sen} z'}{\left(1-2\alpha\left(1-\frac{\varrho}{(\varrho)}\right)\right)\sqrt{1-2\alpha\left(1-\frac{\varrho}{(\varrho)}\right)-(1-s)^2\operatorname{sen}^2 z'}} \quad (c),$$

que desenvolvida em serie, e parando nos termos da segunda ordem relativamente a α e s, dá

$$d\theta = -\alpha\frac{d\varrho}{(\varrho)}\operatorname{tang} z'\left(1+\alpha\left(1-\frac{\varrho}{(\varrho)}\right)\frac{2\cos^2 z'+1}{\cos^2 z'} - \frac{s}{\cos^2 z'}\right)\ldots\ldots \quad (7).$$

Cumpre notar que entre os termos da terceira ordem ha um

$$-\frac{3}{2}\alpha\frac{d\varrho}{(\varrho)}\operatorname{tang}^5 z'\left(s^2-2\left(1-\frac{\varrho}{(\varrho)}\right)\alpha s+\left(1-\frac{\varrho}{(\varrho)}\right)^2\alpha^2\right),$$

o qual, por causa do factor tang^5 z', se torna muito superior aos outros quando z' é grande, e por isso é proprio para mostrar o limite do erro proveniente neste caso dos desprezos precedentes: no que se póde prescindir das duas ultimas partes do mesmo termo, e attender só á primeira

$$-\frac{3}{2}\alpha\operatorname{tang}^5 z'\,.\,\frac{s^2\,d\varrho}{(\varrho)}.$$

10. Integrando (7), vem

$$\theta = -\alpha\operatorname{tang} z'\left(\frac{\varrho}{(\varrho)}+\alpha\frac{2\cos^2 z'+1}{\cos^2 z'}\left(\frac{\varrho}{(\varrho)}-\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{(\varrho)}\right)^2\right)-\frac{\int\frac{s\,d\varrho}{(\varrho)}}{\cos^2 z'}\right):$$

onde falta achar $\int\frac{s\,d\varrho}{(\varrho)}$; ou $\int\frac{\varrho\,ds}{(\varrho)}$, por ser $\int\frac{s\,d\varrho}{(\varrho)}=\frac{s\,\varrho}{(\varrho)}-\int\frac{\varrho\,ds}{(\varrho)}$.

Na passagem d'uma camada atmospherica para a immediatamente superior o decrescimento da pressão é devido á falta do peso da primeira, e por conseguinte a equação do equilibrio é

$$dp = -g \varrho dr;$$

ou, designando por (g) e g as gravidades correspondentes aos raios a e r, na latitude a que se referem as observações,

$$dp = -(g)\frac{a^2}{r^2}\varrho\, dr = -(g)\, a \varrho\, ds.$$

Integrando esta equação, e tomando o integral desde $p=(p)$ até $p=o$, resulta

$$\int \frac{\varrho\, ds}{(\varrho)} = \frac{(p)}{(g)(\varrho)a};$$

ou, designando por l a altura d'uma columna de liquido, cuja densidade constante fosse (ϱ), e que sustentasse a pressão (p),

$$(p) = (g)(\varrho)\, l, \int \frac{\varrho\, ds}{(\varrho)} = \frac{l}{a}.$$

Tomando egualmente o resto do integral θ desde $s=o$ ou $\varrho=(\varrho)$, até $\varrho=o$, e exprimindo θ em segundos, resulta em fim

$$\theta = \frac{\alpha}{sen\, 1''} tang\, z' \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\alpha\left(2\cos^2 z' + 1\right) - \frac{l}{a}}{\cos^2 z'}\right) \ldots\ldots (8);$$

expressão da parte da refracção astronomica independente da lei da densidade das camadas atmosphericas.

11. Determinemos as constantes α e l.

Seja (ϱ) a densidade que, no logar do observador, onde a gravidade é (g), corresponde á temperatura actual t, e á pressão actual (p) indicada pela leitura h do barometro; e $(\varrho)_1$ a densidade que, no logar onde a gravidade fosse $(g)_1$, corresponderia á temperatura o do gêlo fundente, e á pressão $(p)_1$ indicada pela leitura h_1 do barometro.

Debaixo da mesma pressão $(p)_1$, a densidade $(\varrho)_1$ torna-se, para a temperatura t, em $\frac{(\varrho)_1}{1+mt}$; sendo m o coefficiente da dilatação do ar, que, segundo as experiencias de Gay-Lussac, é 0,00375 por cada gráo do thermometro centesimal: e, na mesma temperatura t, a densidade $\frac{(\varrho)_1}{1+mt}$ torna-se, para a pressão (p), em $\frac{(\varrho)_1}{1+mt}\cdot\frac{(p)}{(p)_1}$, segundo a lei de Mariotte. Logo

$$(\varrho)=(\varrho)_1\cdot\frac{(p)}{(p)_1(1+mt)}.$$

Sejam Δ e Δ_1 as densidades do mercurio nas temperaturas t' e o; e n o coefficiente da sua dilatação, que, segundo as experiencias de Lavoisier e Laplace, é $\frac{1}{5550}=0{,}00018018$: será $\Delta=\frac{\Delta_1}{1+nt'}$; e por conseguinte

$$\frac{(p)}{(p)_1}=\frac{(g)\,h\,\Delta}{(g)_1 h_1 \Delta_1}=\frac{(g)\,h}{(g)_1 h_1(1+nt')},$$

e

$$(\varrho)=(\varrho)_1\cdot\frac{(g)}{(g)_1}\cdot\frac{h}{h_1(1+mt)(1+nt')}\;\ldots\ldots\;(9).$$

Ainda que a temperatura t' do mercurio do barometro diffira da t da atmosphera, comtudo póde suppôr-se nesta fórmula $t=t'$ sem inconveniente: ou, mais exactamente, póde reduzir-se a indicação do barometro á temperatura t; o que dá, sem differença sensivel,

$$\frac{h}{1+nt'}=\frac{h}{(1+n(t'-t))(1+nt)}=\frac{h'}{1+nt}.$$

Emfim a leitura da escala do barometro na temperatura t'' refere-se a unidades maiores que as da leitura da mesma escala na temperatura o, por se dilatarem as divisões com o calor; e por isso, chamando c o coefficiente da dilatação do metal da escala, a leitura h vale $h(1+ct'')$ das unidades de h_1; o que torna a expressão (9) em

$$(\varrho)=(\varrho)_1 \cdot \frac{(g)}{(g)_1} \cdot \frac{h(1+ct'')}{h_1(1+mt)(1+nt')},$$

ou proximamente

$$(\varrho)=(\varrho)_1 \cdot \frac{(g)}{(g)_1} \cdot \frac{h}{h_1(1+mt)(1+nt)(1-ct)}.$$

E como o meio entre os coefficientes $\frac{1}{53300}$ e $\frac{1}{58200}$ das dilatações do latão e do cobre differe pouco de $\frac{1}{55500}=\frac{1}{10}n$, podemos tomar por c este numero; o que reduz a correcção da escala a pôr $nt-\frac{1}{10}nt$ em logar de nt na fórmula (9), por ser proximamente $(1+nt)(1-ct)=1+nt-ct$ (Astr. de Biot, tomo I, pag. 132) *.

---

* Sejam c, r, f as grandezas de cada divisão dos thermometros, centigrado, de Réaumur, e de Fahrenheit.

Como, por cada $0^m,027$ de pequeno augmento de pressão, a temperatura da ebullição é augmentada com 1° centigrado; e como no thermometro de Fahrenheit a ebullição se suppõe debaixo da pressão $0^m,762$, e nos outros debaixo da pressão $0^m,760$; segue-se que, para corresponder o extremo do primeiro ao dos outros, é necessario abaixal-o de $\frac{2}{27}$ de gráo centigrado, isto é, de $\frac{2}{27} \cdot \frac{c}{f}$ de gráo de Fahrenheit. E com esta correcção ficará

$$100\,c=80\,r=\left(180-\frac{2}{27}\frac{c}{f}\right)f;$$

12. Posto isto, desprezando α^2, $\alpha\left(\alpha-\alpha_1\frac{(g)}{(g)_1}\right)$, e attendendo a (9), temos *

$$\alpha=\frac{1}{2}\mathrm{P}_1(\varrho)_1\cdot\frac{h}{h_1(1+mt)(1+nt)},$$

$$\alpha=\alpha_1\cdot\frac{(g)}{(g)_1}\frac{h}{h_1(1+mt)(1+nt)}.$$

Em París as experiencias feitas por MM. Arago e Biot dão, para $h_1=0^{\mathrm{m}},76$, $\mathrm{P}(\varrho)_1=0,000\,588\,768$; por conseguinte (eq. 1) $\alpha_1=0,000\,294211$, e $\frac{\alpha_1}{\operatorname{sen} 1''}=60'',685$ (Astr. de Biot, tom. I, pag. 199; e Phis. Math., tom. III, pag. 302).

---

ou

$$c=\frac{4}{5}r=\mu r,\ c=\frac{180}{100+\frac{2}{27}}f=\nu f\ \ldots\ldots\ (\mathrm{A}).$$

Sejam agora C, R, F, as leituras dos tres thermometros, correspondentes a uma dada temperatura. Como os valores das graduações, que medem esta temperatura, contadas do gêlo fundente, são $\mathrm{C}c$, $\mathrm{R}r$, $(\mathrm{F}-32)f$; teremos $\mathrm{C}c=\mathrm{R}r=(\mathrm{F}-32)f$, e por conseguinte

$$R=\mu C,\ F=32+\nu C\ \ldots\ldots\ (\mathrm{B}).$$

Os systemas (A) e (B) servem para converter umas nas outras as leituras C, R, F. (Astr. de Biot, tom. I, pag. 135).

* Chamemos $\mathrm{P}(\varrho)_1$ o valor numerico do effeito refrangente, achado por experiencias feitas no logar onde a gravidade é $(g)_1$; sendo h_1 e o as indicações do barometro e do thermometro. A densídade do ar, correspondente a estas mesmas indicações, no logar onde a gravidade é (g), será $\frac{(g)}{(g)_1}\cdot(\varrho)_1$; e o effeito refrangente será

$$P\frac{(g)}{(g_1)}\cdot(\varrho)_1=P_1(\varrho)_1.$$

Em quanto a l, seja l_1 o seu valor correspondente á temperatura o, á pressão $(p)_1$, e á gravidade $(g)_1$. Temos

$$(p) = (g)(\varrho)\, l,\ (p)_1 = (g)_1 (\varrho)_1 l_1\,;$$

logo

$$\frac{(p)}{(p)_1} = \frac{(g)}{(g)_1} \cdot \frac{(\varrho)}{(\varrho)_1} \cdot \frac{l}{l_1},$$

que, por ser

$$\frac{(\varrho)}{(\varrho)_1} = \frac{(p)}{(p)_1} \cdot \frac{1}{1+mt},$$

dá

$$l = \frac{(g)_1}{(g)} \cdot (1+mt) \cdot l_1.$$

Segundo as experiencias sobre as densidades do ar e do mercurio (Astr. de Biot, tom. I, pag. 142) é $\frac{\Delta_1}{(\varrho)_1} = 10462$; o que dá

$$\frac{l_1}{h_1} = 10462,\ l_1 = 10462 \,.\, 0^m{,}76 = 7951^m{,}12,$$

e por conseguinte

$$\frac{l_1}{a} = \frac{7951{,}12}{6366198} = 0,\ 00124896.$$

Os numeros adoptados por Laplace são

$$\frac{\Delta_1}{(\varrho)_1} = 10492{,}10,\ l_1 = 7974^m,\ \frac{l_1}{a} = 0,\ 00125255.$$

As constantes $\frac{l}{a}$ e α tambem se determinam por observações astronomicas, que lhes assignam valores notavelmente conformes com os que resultam das experiencias phisicas (Astr. de Biot, tom. II, pag. 419 e seguintes). Assim Laplace adopta $\alpha_1 = 0,000293876$, deduzido da refracção para $z' = 45°$, determinada por Delambre.

13. Quando as distancias zenithaes não são muito grandes, o factor polynomio da formula (8) pouco varía em virtude das mudanças de pressão e temperatura; pelo que, dando a esta formula a fórma

$$\theta = \frac{\alpha}{sen\, 1''}(A\, tang\, z' + B\, tang^3\, z') \,\ldots\ldots\, (10),$$

onde são

$$A = 1 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{l}{a},\quad B = \frac{1}{2}\alpha - \frac{l}{a},$$

podem então substituir-se por α e $\frac{l}{a}$, nas expressões de A e B, os seus valores correspondentes ao estado medio de pressão e temperatura no logar do observador.

A refracção correspondente ás indicações $h = 0^m,76$, e $t = 10°$, do éstado medio da atmosphera em París é pois

$$\theta' = \frac{\alpha'}{sen\, 1''}(A\, tang\, z' + B\, tang^3\, z'),$$

sendo (n.° 12)

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{h}{0^m,76}\cdot\frac{(1+m.10)(1+n.10)}{(1+mt)(1+nt)}.$$

Logo

$$\theta = \theta'\cdot\frac{h}{0^m,76}\cdot\frac{(1+10m)(1+10n)}{(1+mt)(1+nt)}:$$

Formando taboas das refracções θ^1 correspondentes ao estado medio da atmosphera, e dos factores

$$\frac{h}{0,76} \text{ e } \frac{(1+10m)(1+10n)}{(1+mt)\,1+nt)}:$$

a primeira dará com o argumento z', a segunda com o argumento h, e a terceira com o argumento t, os tres numeros cujo producto é a refracção actual θ.

A taboa I do *Connaissance des Temps* é a do primeiro factor θ', e as taboas II são as dos outros dous factores.

14. Mr. Caillet, em um trabalho que vem junto ao *Connaissance des Temps* para 1851, dá a seguinte disposição á formula (8)

$$\theta = \left[\begin{array}{c} \theta_1 \cdot ff' + \dfrac{\alpha_1}{sen\, 1''} ff' \left[\dfrac{\alpha_1}{2}(ff'-1) - \dfrac{l_1}{a} mt\right] \cdot \dfrac{tang\, z'}{cos^2\, z'} \\ + \dfrac{\alpha_1^{\,2}}{sen\, 1''} ff'(ff'-1)\, tang\, z' \end{array}\right] \ldots\ldots (11);$$

sendo l_1, α_1, θ_1, os valores de l, α, θ, para $h = 0^m,76$ e $t = 0$; e sendo

$$f = \frac{h}{0,76},\ f' = \frac{1}{(1+mt)(1+nt)}.$$

Mr. Caillet calculou cinco taboas, que dão o seguinte: A taboa I dá $\log \theta_1$; a taboa II dá $\log f'$; a taboa III dá $\log f$, suppondo a altura do barometro reduzida á temperatura t (n.° 11); a taboa IV dá

$$\frac{\alpha_1}{sen\, 1''} ff' \left[\frac{\alpha_1}{2}(ff'-1) - \frac{l_1}{a} mt\right] . 1000;$$

a taboa V dá $\dfrac{tang\, z'}{1000\, cos^2\, z'}$. Então o producto dos numeros achados nas taboas IV e V, que ordinariamente se póde desprezar, junto ao numero correspondente á somma dos logarithmos achados nas taboas I, II, III, dá a refracção. O ultimo termo da formula (11) despreza-se, porque até 85° de distancia zenithal apenas chega a centesimas de segundo.

O coefficiente m da dilatação do ar adoptado por Mr. Caillet foi o de Mr. Regnault $m = 0,003665$ (vej. Astr. de Biot, tom. II, pag. 431).

15. Vejamos agora a alteração que produz nos resultados precedentes o estado hygrometrico da atmosphera.

Seja o volume 1 do ar humido capaz de sustentar a mesma pressão (p), que sustenta um egual volume de ar secco. Segundo as leis da diffusão dos gazes, que se misturam sem reacção chymica, reduzindo o ar secco contido na mistura a um volume tal v que sustente a pressão (p), o vapor contido na mesma mistura, reduzido ao resto $1 - v$ do volume, deverá sustentar egual pressão; porque a separação, ou mistura uniforme, dos dous gazes, não deve alterar a força elastica do volume 1 que elles occupam.

Seja (π) a parte da pressão actual (p), que na mistura é sustentada pelo vapor; (ρ) a densidade do ar secco capaz de sustentar a pressão (p); $c\,(\rho)$ a densidade do vapor capaz de sustentar a mesma pressão; e $(\rho)'$ a densidade da mistura. Como o ar secco contido no espaço v se diffunde por todo o espaço 1, a parte da pressão actual, que elle sustenta, é $(p) \cdot \frac{v}{1}$; por conseguinte é $(p) = (p)\,v + (\pi)$.

As densidades do ar e do vapor da mistura são $(\rho) \cdot \frac{v}{1}$ e $c\,(\rho) \cdot \frac{1 - v}{1}$; e por isso a massa da mistura é

$$(\rho)' = (\rho)\,v + c\,(\rho) \cdot (1 - v).$$

Eliminando pois v entre estas duas equações, resulta

$$(\rho)' = (\rho) \cdot \frac{(p) - (1 - c)\,(\pi)}{(p)} \;\ldots\ldots\; (\mathrm{d}),$$

que, por ser

$$(p) = (g)_1\,(\rho)\,l_1\,(1 + mt),$$

dá

$$(p) = (1 - c)\,(\pi) + (g)_1\,(\rho)'\,l_1\,(1 + mt) \;\ldots\ldots\; (\mathrm{e}).$$

As experiencias dão $c=\frac{10}{16}$; e por conseguinte

$$(\varrho)'=(\varrho)\left(1-\frac{3}{8}\frac{(\varpi)}{(p)}\right)=(\varrho)\left(1-100\,m\frac{(\varpi)}{(p)}\right)\ldots\ldots\ (12).$$

Logo em rigor deve ser

$$(p)=(g)\,(\varrho)'\,l=(g)\,(\varrho)\,l\left(1-\frac{3}{8}\frac{(\varpi)}{(p)}\right),$$

e por conseguinte

$$l=l_1\cdot\frac{(g)_1}{(g)}\cdot\frac{1+mt}{1-\frac{3}{8}\frac{(\varpi)}{(p)}}\ldots\ldots\ (13).$$

Em quanto ao poder refrangente, seja P′ o da mistura, P o do ar secco, e P″ o do vapor. Será

$$P'(\varrho)'=P(\varrho)\cdot\frac{v}{1}+P''c(\varrho)\cdot\frac{1-v}{1};$$

e porque as experiencias dão $P=\frac{10}{16}P''=cP''$, resulta

$$P'(\varrho)'=P(\varrho)\ldots\ldots\ (\text{f}),$$

isto é, o effeito refrangente do ar humido egual ao do ar secco e capaz de sustentar a mesma pressão.

Por tanto o estado hygrometrico da atmosphera não altera o valor de α na equação (8), mas altera o valor de $\frac{l}{a}$.

16. As experiencias teem dado formulas empiricas para representar os valores de ϖ, correspondentes ás diversas temperaturas, no estado de saturação; e o hygrometro indica a relação entre o estado da humidade e o da saturação (Vej.

a taboa das tensões, Phis. Math. de Biot, tom. I, pag. 533); de sorte que, multiplicando por esta relação o valor de π dado pelas ditas formulas, resulta o (π) correspondente ao estado hygrometrico actual.

Segundo Laplace (Mech. Cél., Liv. X, n.° 10) a formula que, no estado de saturação, dá π, é

$$\frac{\pi}{0^m,76}=10^{(t-100^\circ)\,.\,0,0154547-(t-100^\circ)^2\,.\,0,0000625826},$$

que serve desde $t=-\infty$ até $t=160°$.

Segundo Mr. Biot (Conn. des Temps, add. para 1839, pag. 19), a formula, no mesmo estado, é

$$\log f_t=b-b_1\,q_1^{\;20^\circ+t}-b_2\,q_2^{\;20^\circ+t},$$

desde $t=-20°$ até $t=220°$; onde

$$b=5,96131330259,\ \log b_1=9\,.\,82340688193,$$

$$\log b_2=0,74110951837,\ \log q_1=-0,01309734295,\ \log q_2=-0,00212510583;$$

e

$$\frac{\pi}{(p)_1}=\frac{f_t}{h_1},$$

sendo f_t e h_1 as alturas do barometro correspondentes ás pressões π e $(p)_1$ reduzidas á temperatura 0° (vej. o Conn. cit., e a Astr. de Biot, tom. III, pag. 332).

17. Resumindo os fundamentos phisicos da formula (8), vê-se que se suppõe:

1.° A figura da terra, e das camadas semelhantes atmosphericas, tão proxima da espherica, que as verticaes dos diversos pontos da trajectoria luminosa concorram sensivelmente no centro da esphera osculatriz, no logar do observador, da camada que passa pelo mesmo logar.

2.° O estado de cada camada uniforme em torno do ponto correspondente da trajectoria; e por conseguinte as resultantes das acções das camadas atmosphericas sobre a luz dirigidas por estas verticaes.

3.° O poder refrangente P o mesmo em todos os pontos da trajectoria. E para isso devem tomar-se por P e (ρ) os seus valores tirados das equações (f) e (12); o que na formula (8) se reduz a substituir $\dfrac{l}{1-\dfrac{3}{8}\dfrac{(\varpi)}{(p)}}$ em logar de l; ao menos suppondo $\dfrac{(\varpi)}{(p)}$ constante.

Emfim cumpre observar que só o ultimo termo da formula (8) suppõe essencialmente o equilibrio da atmosphera; porque só para a deducção d'elle se empregou a equação d'este equilibrio (n.° 10). Assim, com tanto que as forças sejam centraes, e que seja o mesmo o poder refrangente em todos os pontos da trajectoria, os outros dous termos da formula, que são os principaes, não são alterados por quaesquer movimentos atmosphericos que não prejudiquem aquellas hypotheses, e a continuidade. Nem estes movimentos são sensiveis durante a rapidissima passagem da luz pela atmosphera.

18. Resta-nos examinar os limites d'approximação da formula (8).

Para isso (n.° 9) temos de integrar o termo

$$-\frac{3}{2}\alpha\, tang^3 z' \,.\, \frac{s^2\, d\rho}{(\rho)};$$

o que exige a determinação da lei do decrescimento da densidade das camadas atmosphericas, ou ao menos dos limites que a comprehendem.

A densidade das camadas atmosphericas decresce á medida que ellas são mais elevadas; mas como a temperatura tambem diminue, o decrescimento das densidades é menos rapido, do que seria se a temperatura não variasse. D'onde resulta que a verdadeira lei da densidade está comprehendida entre a d'uma densidade constante, e a correspondente a uma temperatura constante.

Na hypothese d'uma temperatura constante tem logar a lei de Mariotte, $\frac{p}{(p)} = \frac{\varrho}{(\varrho)}$; e eliminando ϱ entre ella e a equação do equilibrio (n.° 10), resulta

$$\frac{dp}{p} = -\frac{(g)(\varrho)\,a\,d\,s}{(p)} = -\frac{a\,d\,s}{l},\ p = C e^{-\frac{as}{l}}.$$

Este integral, tomado desde $p = (p)$ ou $s = o$, dá

$$\frac{p}{(p)} = e^{-\frac{as}{l}},\ \text{ou}\ \varrho = (\varrho)\,e^{-\frac{as}{l}} \ldots\ldots (14).$$

Por onde se vê que n'esta hypothese o crescimento das alturas em progressão arithmetica corresponde ao decrescimento das densidades em progressão geometrica.

19. O integral

$$\int s^2 d\varrho = s^2 \varrho - 2\int \varrho\, s\, d\, s,$$

tomado entre os limites $s = o$ e $\varrho = o$, reduz-se ao segundo termo tomado entre os mesmos limites; e $\int \varrho\, s\, d\, s$ representa a somma dos elementos $\varrho\, d\, s$ multiplicados pelas respectivas distancias s á camada cuja densidade é (ϱ). Mas esta somma é maior na hypothese d'uma temperatura constante, do que na lei da natureza em que a temperatura decresce; porque aquella hypothese, dando menor densidade ás camadas, assigna á atmosphera uma altura maior que a verdadeira: logo, se calcularmos o integral na mesma hypothese, resultará um limite d'erro ainda maior que o proveniente da verdadeira lei.

Para effectuar este calculo temos, integrando por partes, e attendendo á equação (14),

$$\int \frac{s^2\,d\varrho}{(\varrho)} = \frac{s^2\varrho}{(\varrho)} + \frac{2ls}{a}\,e^{-\frac{as}{l}} + \frac{2l^2}{a^2}\,e^{-\frac{as}{l}} + \mathrm{C}$$

$$= \frac{s^2\varrho}{(\varrho)} + \frac{2ls}{a}\frac{\varrho}{(\varrho)} + 2\frac{l^2}{a^2}\frac{\varrho}{(\varrho)} + \mathrm{C},$$

que entre os limites $\varrho = (\varrho)$ ou $s = 0$, e $\varrho = 0$, se reduz a $-2\frac{l^2}{a^2}$. Portanto o termo, de que se tracta, é

$$-\frac{3}{2}\frac{\alpha}{sen\,1''}\,tang^3\,z' \int \frac{s^2\,d\varrho}{(\varrho)} = \frac{3\alpha}{sen\,1''}\cdot\frac{l^2}{a^2}\,tang^3\,z'.$$

Substituindo nesta expressão os valores de α e l (n.º 12), acha-se $0'',15$ para $z' = 74°$, e $0'',004$ para $z' = 60°$. Por onde se vê que até estes limites a formula (18) dá sufficiente approximação, quando se quer só exactidão até segundos, ou até centesimas de segundo.

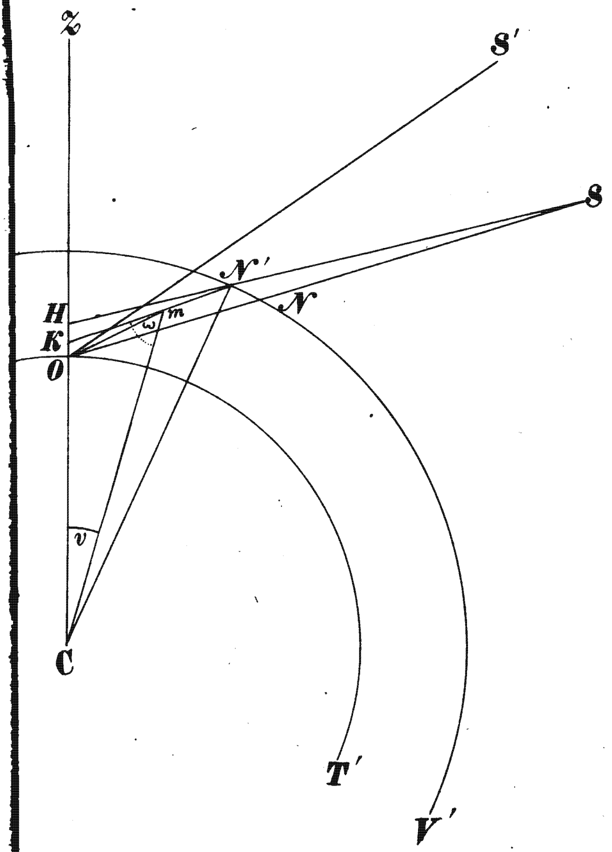
20. Da fórmula (8) deduzem-se com facilidade (Astron. de Biot, tom. II, pag. 426) as de Bradley, e de Simpson,

$$\theta_1 = A\,tang\,(z' - n\,\theta_1),\ sen\,(z' - n\,\theta_1) = B\,sen\,z' :$$

sendo

$$A = 60'',666\,;\ n = 3,25\,;\ B = 0,99809.$$

FIM.


z
S'
S
N'
N
H
m
K
ω
O
v
C
T'
V'